

2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Численное решение нелинейных (алгебраических или трансцендентных) уравнений вида

$$f(x) = 0 \quad (2.1)$$

заключается в нахождении значений x , удовлетворяющих (с заданной точностью) данному уравнению и состоит из следующих основных этапов:

1. *Отделение (изоляция, локализация) корней уравнения.*
2. *Уточнение с помощью некоторого вычислительного алгоритма конкретного выделенного корня с заданной точностью.*

Целью первого этапа является нахождение отрезков из области определения функции $f(x)$, внутри которых содержится только один корень решаемого уравнения. Иногда ограничиваются рассмотрением лишь какой-нибудь части области определения, вызывающей по тем или иным соображениям интерес. Для реализации данного этапа используются *графические* или *аналитические* способы.

При аналитическом способе отделения корней полезна следующая теорема [2]:

Теорема 2.1. Непрерывная строго монотонная функция $f(x)$ имеет и притом единственный нуль на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков.

Достаточным признаком монотонности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ является сохранение знака производной функции.

Графический способ отделения корней целесообразно использовать в том случае, когда имеется возможность построения графика функции $y = f(x)$. Наличие графика исходной функции дает непосредственное представление о количестве и расположении нулей функции, что позволяет определить промежутки, внутри которых содержится только один корень. Если построение графика функции $y = f(x)$ вызывает затруднение, часто оказывается удобным преобразовать уравнение (2.1) к эквивалентному виду $f_1(x) = f_2(x)$ и построить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут соответствовать значениям корней решаемого уравнения.

Так или иначе, при завершении первого этапа, должны быть определены промежутки, на каждом из которых содержится только один корень уравнения.

Для уточнения корня с требуемой точностью обычно применяется какой-либо итерационный метод, заключающийся в построении числовой последовательности $x^{(k)}$ ($k=0,1,2,\dots$), сходящейся к искомому корню $x^{(*)}$ уравнения (2.1).

Метод половинного деления. Процесс уточнения корня уравнения (2.1) на отрезке $[a,b]$, при условии, что функция $f(x)$ непрерывна на этом отрезке, заключается в следующем [1,3].

Исходный отрезок делится пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, то $x^{(*)}=\frac{a+b}{2}$ - является корнем уравнения. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, то выбирается та из половин $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ или $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Новый суженный отрезок $[a^{(1)},b^{(1)}]$ снова делится пополам и проводится то же рассмотрение и т.д. В результате на каком-то этапе либо находится точный корень уравнения (1), либо имеется последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a^{(1)},b^{(1)}]$, $[a^{(2)},b^{(2)}]$,..., $[a^{(k)},b^{(k)}]$ для которых $f(a^{(k)})f(b^{(k)})<0$ $k=0,1,2,\dots$

Если требуется найти корень с точностью ε , то деление отрезка пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε . Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.

Метод Ньютона (метод касательных). При нахождении корня уравнения (2.1) методом Ньютона, итерационный процесс определяется формулой

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad k=0,1,2,\dots \quad (2.2)$$

Для начала вычислений требуется задание начального приближения $x^{(0)}$.

Условия сходимости метода определяются следующей теоремой [2]:

Теорема 2.2. Пусть на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет первую и вторую производные постоянного знака и пусть $f(a)f(b)<0$.

Тогда если точка $x^{(0)}$ выбрана на $[a,b]$ так, что

$$f(x^{(0)})f''(x^{(0)})>0, \quad (2.3)$$

то начатая с нее последовательность $x^{(k)}$ ($k=0,1,2,\dots$), определяемая методом Ньютона (2.2), монотонно сходится к корню $x^{(*)}\in(a,b)$ уравнения (2.1).

В качестве условия окончания итераций в практических вычислениях часто используется правило $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon \Rightarrow x^{(*)} \approx x^{(k+1)}$.

Метод секущих. Использование метода Ньютона предполагает вычисление на каждой итерации значения функции и ее производной. Заменяя производную функции приближенным разностным отношением

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

и подставляя его в (2.2), получаем итерационную формулу метода секущих

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})(x^{(k)} - x^{(k-1)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Использование этого метода избавляет от необходимости расчета производной функции в процессе вычислений.

Метод является двухшаговым; как видно из формулы (2.4), результат $(k+1)$ -го шага зависит от результатов (k) -го и $(k-1)$ -го шагов.

Для выполнения первой итерации требуется задание двух начальных точек $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$. Выбор начальной точки $x^{(0)}$ осуществляется по тому же принципу, что и в методе касательных, например, используя условие (2.3). Вторая начальная точка $x^{(1)}$ выбирается в непосредственной близости от $x^{(0)}$, желательно между точкой $x^{(0)}$ и искомым корнем.

Окончание счета по методу секущих, учитывая его быструю сходимость, можно контролировать путем проверки на малость модуля $|x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ или модуля невязки $|f(x^{(k)})|$ [2].

Метод простой итерации. При использовании метода простой итерации уравнение (2.1) заменяется эквивалентным уравнением с выделенным линейным членом

$$x = \varphi(x) \quad (2.5)$$

Решение ищется путем построения последовательности

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

начиная с некоторого заданного значения $x^{(0)}$. Если $\varphi(x)$ - непрерывная функция, а $x^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) - сходящаяся последовательность, то значение $x^{(*)} = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ является решением уравнения (2.5).

Условия сходимости метода и оценка его погрешности определяются теоремой [2]:

Теорема 2.3. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда если выполняются условия:

- 1) $\varphi(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$,
- 2) $\exists q : |\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in (a, b)$,

то уравнение (2.5) имеет и притом единственный на $[a, b]$ корень $x^{(*)}$;

к этому корню сходится определяемая методом простой итерации последовательность $x^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), начинающаяся с любого $x^{(0)} \in [a, b]$.

При этом справедливы оценки погрешности ($\forall k \in N$):

$$|x^{(*)} - x^{(k+1)}| \leq \frac{q}{1-q} |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \quad (2.7)$$

$$|x^{(*)} - x^{(k+1)}| \leq \frac{q^{k+1}}{1-q} |x^{(1)} - x^{(0)}|.$$

Пример 2.1. Решить уравнение

$$f(x) = e^{2x} + 3x - 4 = 0 \quad (2.8)$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Для локализации корней применим графический способ. Преобразуем исходное уравнение к следующему эквивалентному виду:

$$e^{2x} = 4 - 3x$$

Построив графики функций $f_1(x) = e^{2x}$ и $f_2(x) = 4 - 3x$ (рис. 2.1), определяем, что у решаемого уравнения имеется только один корень, который находится в интервале $0.4 < x^{(*)} < 0.6$.

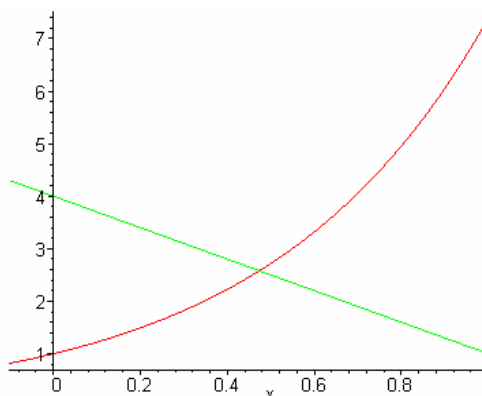


Рис. 2.1

Уточним значение корня с требуемой точностью, пользуясь методами приведенными выше.

Метод половинного деления. В качестве исходного отрезка выберем $[0.4, 0.6]$. Результаты дальнейших вычислений, согласно приведенному выше алгоритму содержатся в таблице 2.1.

Таблица 2.1

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$f(a^{(k)})$	$f(b^{(k)})$	$\frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$	$f\left(\frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}\right)$
0	0.4000	0.6000	-0.5745	1.1201	0.5000	0.2183
1	0.4000	0.5000	-0.5745	0.2183	0.4500	-0.1904
2	0.4500	0.5000	-0.1904	0.2183	0.4750	0.0107
3	0.4500	0.4750	-0.1904	0.0107	0.4625	-0.0906
4	0.4625	0.4750	-0.0906	0.0107	0.4688	-0.0402
5	0.4688	0.4750	-0.0402	0.0107	0.4719	-0.0148
6	0.4719	0.4750	-0.0148	0.0107	0.4734	-0.0020
7	0.4734	0.4750	-0.0020	0.0107	[0.4742]	

$$x^{(*)} \approx 0.474$$

Метод Ньютона. Для корректного использования данного метода необходимо, в соответствии с теоремой 2.2, определить поведение первой и второй производной функции $f(x)$ на интервале уточнения корня и правильно выбрать начальное приближение $x^{(0)}$.

Для функции $f(x) = e^{2x} + 3x - 4 = 0$ имеем:

$f'(x) = 2e^{2x} + 3$, $f''(x) = 4e^{2x}$ - положительные во всей области определения функции.

В качестве начального приближения можно выбрать правую границу интервала $x^{(0)} = 0.6$, для которой выполняется неравенство (2.3):

$$f(0.6)f''(0.6) > 0$$

Дальнейшие вычисления проводятся по формуле (2.2), где

$$f(x^{(k)}) = e^{2x^{(k)}} + 3x^{(k)} - 4, \quad f'(x^{(k)}) = 2e^{2x^{(k)}} + 3.$$

Итерации завершаются при выполнении условия $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$.

Результаты вычислений содержатся в таблице 2.2.

Таблица 2.2

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$	$-f(x^{(k)})/f'(x^{(k)})$
0	0.6000	1.1201	9.6402	-0.1162
1	0.4838	0.0831	8.2633	-0.0101
2	0.4738	0.0005	8.1585	-0.0001
3	[0.4737]			

$$x^{(*)} \approx 0.474$$

Метод секущих. В качестве начальных точек зададим: $x^{(0)} = 0.6$ и $x^{(1)} = 0.59$.

Дальнейшие вычисления проводятся по формуле (2.4), где $f(x^{(k)}) = e^{2x^{(k)}} + 3x^{(k)} - 4$.

Итерации завершаются при выполнении условия $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$.

Результаты вычислений содержатся в таблице 2.3.

Таблица 2.3

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
0	0.6000	1.1201
1	0.5900	1.0244
2	0.4830	0.0765
3	0.4744	0.0056
4	[0.4737]	

$$x^{(*)} \approx 0.474$$

Метод простой итерации. Уравнение (2.8) можно записать в виде

$$x = \frac{4 - e^{2x}}{3} \quad (2.9)$$

или

$$x = \frac{\ln(4 - 3x)}{2} \quad (2.10).$$

Из двух этих вариантов приемлемым является вариант (2.10), так как, взяв за основной интервал (0.4, 0.55) и положив $\varphi(x) = \frac{\ln(4 - 3x)}{2}$, будем иметь:

$$1) \quad \varphi(x) \in [0.4, 0.55] \quad \forall x \in [0.4, 0.55]$$

$$2) \quad \varphi'(x) = -\frac{3}{2(4 - 3x)}. \text{ Отсюда, на интервале } (0.4, 0.55) \quad |\varphi'(x)| < 0,64 = q.$$

Условия теоремы 2.3 выполнены.

В качестве начального приближения положим $x^{(0)} = (0.4 + 0.55)/2 = 0.475$.

Вычисляем последовательные приближения $x^{(k)}$ с одним запасным знаком по формуле (2.6), где $\varphi(x^{(k)}) = \frac{\ln(4 - 3x^{(k)})}{2}$.

В соответствии с (2.7) достижение требуемой точности контролируется условием

$$\frac{q}{1 - q} |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4

k	$x^{(k)}$	$\varphi(x^{(k)})$
0	0.4750	0.4729
1	0.4729	0.4741
2	0.4741	0.4734
3	0.4734	0.4738
4	[0.4738]	

$$x^{(*)} \approx 0.474$$

$x = x - \lambda f(x)$.

Данное уравнение имеет вид (2.5) с $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$. Здесь λ - параметр, который подбирается таким образом [2,3], чтобы в нужной области выполнялось неравенство $|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| \leq q < 1$.

Как и в случае одного нелинейного уравнения, локализация решения может осуществляться на основе специфической информации по конкретной решаемой задаче (например, по физическим соображениям), и - с помощью методов математического анализа. При решении системы двух уравнений, достаточно часто удобным является графический способ, когда месторасположение корней определяется как точки пересечения кривых $f_1(x_1, x_2) = 0$, $f_2(x_1, x_2) = 0$ на плоскости (x_1, x_2) .

Метод Ньютона. Если определено начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$, итерационный процесс нахождения решения системы (2.11) методом Ньютона можно представить в виде

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)} \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k)} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

где значения приращений $\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, \dots, \Delta x_n^{(k)}$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, все коэффициенты которой выражаются через известное предыдущее приближение $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}^{(k)}) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2} \Delta x_2^{(k)} + \dots + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n} \Delta x_n^{(k)} = 0 \\ f_2(\mathbf{x}^{(k)}) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2} \Delta x_2^{(k)} + \dots + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n} \Delta x_n^{(k)} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(\mathbf{x}^{(k)}) + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2} \Delta x_2^{(k)} + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n} \Delta x_n^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

В векторно-матричной форме расчетные формулы имеют вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

где вектор приращений $\Delta \mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta x_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ находится из решения уравнения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

Здесь $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ - матрица Якоби первых производных вектор-

функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Выражая из (2.16) вектор приращений $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$ и подставляя его в (2.15), итерационный процесс нахождения решения можно записать в виде

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

где $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})$ - матрица, обратная матрице Якоби. Формула (2.17) есть обобщение формулы (2.2) на случай систем нелинейных уравнений.

При реализации алгоритма метода Ньютона в большинстве случаев предпочтительным является не вычисление обратной матрицы $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})$, а нахождение из системы (2.14) значений приращений $\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, \dots, \Delta x_n^{(k)}$ и вычисление нового приближения по (2.13). Для решения таких линейных систем можно привлекать самые разные методы, как прямые, так и итерационные (см. раздел 1.1), с учетом размерности n решаемой задачи и специфики матриц Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ (например, симметрии, разреженности и т.п.).

Использование метода Ньютона предполагает дифференцируемость функций $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})$ и невырожденность матрицы Якоби ($\det \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \neq 0$). В случае, если начальное приближение выбрано в достаточно малой окрестности искомого корня, итерации сходятся к точному решению, причем сходимость квадратичная.

В практических вычислениях в качестве условия окончания итераций обычно используется критерий [2,5]

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon, \quad (2.18)$$

где ε - заданная точность.

Пример 2.2. Методом Ньютона найти положительное решение системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0.1x_1^2 + x_1 + 0.2x_2^2 - 0.3 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0.2x_1^2 + x_2 - 0.1x_1x_2 - 0.7 = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. Для выбора начального приближения применяем графический способ. Построив на плоскости (x_1, x_2) в интересующей нас области кривые $f_1(x_1, x_2) = 0$ и $f_2(x_1, x_2) = 0$ (рис. 2.2), определяем, что положительное решение системы уравнений находится в квадрате $0 < x_1 < 0.5, \quad 0.5 < x_2 < 1.0$.

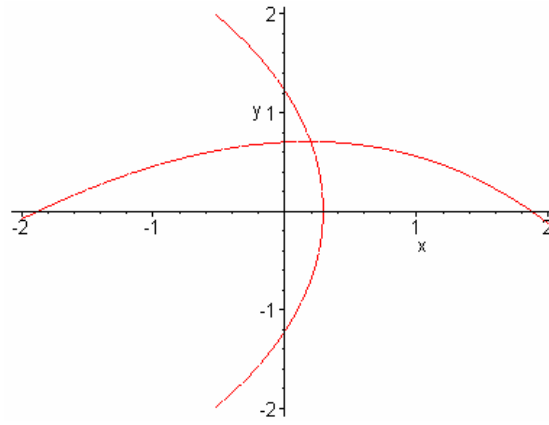


Рис. 2.2

За начальное приближение примем $x_1^{(0)} = 0.25$, $x_2^{(0)} = 0.75$.

Для системы двух уравнений расчетные формулы (2.13), (2.14) удобно записать в виде разрешенном относительно $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\det \mathbf{A}_1^{(k)}}{\det \mathbf{J}^{(k)}} \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{\det \mathbf{A}_2^{(k)}}{\det \mathbf{J}^{(k)}} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

где

$$\mathbf{J}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1^{(k)} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом примере:

$$f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.1x_1^{(k)2} + x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)2} - 0.3$$

$$f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.2x_1^{(k)2} + x_2^{(k)} - 0.1x_1^{(k)}x_2^{(k)} - 0.7$$

$$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = 0.2x_1^{(k)} + 1,$$

$$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} = 0.4x_2^{(k)}$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = 0.4x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)},$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} = 1 - 0.1x_1^{(k)}.$$

$$\left\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right\| = \max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|.$$

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|.$$

Таблица 2.5

k	$x_1^{(k)}$ $x_2^{(k)}$	$f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ $f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$	$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}$ $\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}$ $\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}$	$\det \mathbf{A}_1^{(k)}$	$\det \mathbf{A}_2^{(k)}$	$\det \mathbf{J}^{(k)}$
0	0.25000 0.75000	0.06875 0.04375	1.01250 0.02500	0.30000 0.97500	0.05391	0.04258	0.97969
1	0.19498 0.70654	-0.00138 0.00037	1.00760 0.00734	0.28262 0.98050	-0.00146	0.00038	0.98588
2	0.19646 0.70615	0.00005 0.00000	1.00772 0.00797	0.28246 0.98035	0.00005	0.00000	0.98567
3	0.19641 0.70615						

$$x_1^{(*)} \approx 0.1964, \quad x_2^{(*)} \approx 0.7062.$$

[illegible]
$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \varphi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Если выбрано некоторое начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$, последующие приближения в методе простой итерации находятся по формулам

[illegible]

или, в векторной форме

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Если последовательность векторов $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$ сходится, то она сходится к решению $\mathbf{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_n^{(*)})^T$.

Достаточное условие сходимости итерационного процесса (2.23) формулируется следующим образом [3]:

Теорема 2.4. Пусть вектор-функция $\Phi(\mathbf{x})$ непрерывна, вместе со своей производной

$$\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

в ограниченной выпуклой замкнутой области G и

$$\max_{\mathbf{x} \in G} \|\boldsymbol{\phi}'(\mathbf{x})\| \leq q < 1, \quad (2.25)$$

где q - постоянная. Если $\mathbf{x}^{(0)} \in G$ и все последовательные приближения

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

также содержатся в G , то процесс итерации (2.23) сходится к единственному решению уравнения

$$\mathbf{x} \equiv \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$$

в области G и справедливы оценки погрешности $(\forall k \in N)$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{(*)} - \mathbf{x}^{(k+1)}\| &\leq \frac{q^{k+1}}{1-q} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|, \\ \|\mathbf{x}^{(*)} - \mathbf{x}^{(k+1)}\| &\leq \frac{q}{1-q} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \end{aligned} \quad (2.26)$$

Пример 2.2. (продолжение). Найти положительное решение системы (2.19) методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Преобразуем исходную систему уравнений (2.19) к виду

$$\begin{cases} x_1 = 0.3 - 0.1x_1^2 - 0.2x_2^2 \equiv \varphi_1(x_1, x_2) \\ x_2 = 0.7 - 0.2x_1^2 + 0.1x_1x_2 \equiv \varphi_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Проверим выполнение условия (2.25) в области $G: |x_1 - 0.25| \leq 0.25, |x_2 - 0.75| \leq 0.25$. Для этого найдем

$$\max_{\mathbf{x} \in G} \|\Phi'(\mathbf{x})\| = \max_{\mathbf{x} \in G} \left\{ \max_{(i)} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i(x_1, x_2)}{\partial x_j} \right| \right\} \quad (2.27)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= -0.2x_1, & \frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= -0.4x_2, \\ \frac{\partial \varphi_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= -0.4x_1 + 0.1x_2, & \frac{\partial \varphi_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= 0.1x_1, \end{aligned}$$

то в области G имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right| &= |-0.2x_1| + |-0.4x_2| \leq 0.5 \\ \left| \frac{\partial \varphi_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right| &= |-0.4x_1 + 0.1x_2| + |0.1x_1| \leq 0.2 \end{aligned}$$

$$\max_{\mathbf{x} \in G} \|\Phi'(\mathbf{x})\| \leq 0.5 = q < 1.$$

Следовательно, если последовательные приближения $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ не покинут области G (что легко обнаружить в процессе вычислений), то итерационный процесс будет сходящимся.

В качестве начального приближения примем $x_1^{(0)} = 0.25, x_2^{(0)} = 0.75$. Последующие приближения определяем как

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) &= 0.3 - 0.1x_1^{(k)2} - 0.2x_2^{(k)2}, \\ \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) &= 0.7 - 0.2x_1^{(k)2} + 0.1x_1^{(k)}x_2^{(k)} \end{aligned}$$

В соответствии с (2.26), вычисления завершаются при выполнении условия

$$\frac{q}{1-q} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon,$$

где

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|.$$

Результаты вычислений содержатся в таблице 2.6

Таблица 2.6

k	$x_1^{(k)}$ $x_2^{(k)}$	$\varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ $\varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$
0	0.25000 0.75000	0.18125 0.70702
1	0.18125 0.70702	0.19674 0.70617
2	0.19674 0.70617	0.19639 0.70615
3	0.19639 0.70615	0.19641 0.70615
4	0.19641 0.70615	

$$x_1^{(*)} \approx 0.1964, \quad x_2^{(*)} \approx 0.7062.$$

Замечание. В случае, когда при анализе сходимости конкретной итерационной схемы проверка условия (2.27) является затруднительной, можно определить норму «мажорирующей матрицы» [5,6] $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ с

элементами $m_{ij}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in G} \left| \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|$, так что $\max_{\mathbf{x} \in G} \|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{M}(\mathbf{x})\|$. Если $\|\mathbf{M}(\mathbf{x})\| \leq q < 1$, то

последовательные приближения сходятся к решению $\mathbf{x}^{(*)}$.