Guía de Problemas n^0 2

October 15, 2024

Problema 1

a) Demuestre que el conjunto de todas las matrices unitarias nxn constituye un grupo. (Para demostrar la clausura, por ejemplo, hay que demostrar que el producto de dos matrices unitarias es a su vez unitario). b) Demuestre que el conjunto de todas las matrices unitarias nxn con detenninante 1 constituye un grupo. c) Demuestre que $O(n)$ es un grupo. d) Demuestre que $SO(n)$ es un grupo.

Problema 2

Supongamos que interpretamos el electrón literalmente como una esfera sólida clásica de radio r y masa m, que gira con momento angular. $\frac{1}{2}\hbar$ ¿Cuál es la velocidad, v, de un punto de su "ecuador"? Experimentalmente, se sabe que r es inferior a $10^{-16}cm$. ¿Cuál es la velocidad ecuatorial correspondiente? ¿Qué se deduce de ello?

Problema 3

Demuestre que la reacción "original" de desintegración beta $n \to p + e$ violaría la conservación del momento angular (las tres partículas tienen espín 1/2). Si usted fuera Pauli y propusiera que la reacción es realmente $n \to p + e + \bar{\nu_e}$, ¿qué espín asignaría al neutrino?

Problema 4

Demuestre que:
a) El conmutador, $[A, B] = AB - BA$, de dos matrices de Pauli es $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$.
b) El anticonmutador $\{A, B\} = AB + BA$ es $\{\sigma_i, \sigma_j = 2i\delta_{ij}$.
c) Para dos vectores cualesquiera a y b, $(\sigma.a)(\sigma.b) = ab + i\sigma.(a \times b)$.

Problema 5

a) Demuestre que $e^{i\pi\sigma_z/2} = i\sigma_z$.
b) Encuentre la matriz U que representa la rotación en 180^0 alrededor del eje y, y demuestre que convierte el "spin up" en "spin down", como cabría esperar.
c) De forma más general, demuestre que

$$U(\theta) = cos(\frac{\theta}{2}) - i(\widehat{\theta} \cdot \sigma)sin(\frac{\theta}{2}) \tag{1}$$

Problema 6

a) Utilizando la ecuación $P^2 = I$ demuestre que los valores propios de P son 1.
b) Demuestre que cualquier función escalar $f(x, y, z)$ puede expresarse como la suma de una función propia $f_+(x, y, z)$ con valor propio $+1$ y una función propia $f_-(x, y, z)$ con valor propio -1. Construye las funciones f_+ y f_- , en términos de f.

Problema 7

Las desintegraciones dominantes del mesón η son:

$$\eta \longrightarrow 2\gamma(39\%), \eta \longrightarrow 3\pi(55\%), \eta \longrightarrow \pi\pi\gamma(59\%)$$

y se clasifica como partícula "estable", por lo que evidentemente ninguna de ellas es una interacción puramente fuerte. A primera vista, esto parece extraño, ya que a $549MeV/c^2$, el η tiene masa de sobra para decaer fuertemente en 2π o 3π.
a) Explique por qué el modo 2π está prohibido, tanto para las interacciones fuertes como para las electromagnéticas.
b) Explique por qué el modo 3π está prohibido como interacción fuerte, pero permitido como desintegración electromagnética.