

ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

Hà Thị Ngọc Yên

Hà nội, 9/2025

ĐA THÚC NỘI SUY

- Cho bộ điểm

$$\left\{x_i, y_i = f(x_i)\right\}_{i=0,n}, x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j, x_i \in [a,b]$$

- Đa thức bậc không quá n, $P_n(x)$ đi qua bộ điểm trên được gọi là đa thức nội suy với các mốc nội suy $\{x_i\}_{i=0,n}$
- Khi đó

$$f(x) \approx P_n(x)$$

KHAI TRIỂN TAYLOR

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x_0) = 2!a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

...

$$f^{(n)}(x_0) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$$

ĐA THÚC NỘI SUY NEWTON

- Ý tưởng: Tìm đa thức nội suy theo cách xây dựng khai triển Taylor của hàm số

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$f(x_0) = a_0 \Rightarrow a_0 = y_0$$

$$f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \approx f'(x_0)$$

ĐA THÚC NỘI SUY NEWTON

- Tỷ sai phân (tỷ hiệu)

$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] := \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] := \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

NỘI SUY NEWTON

- Xây dựng đa thức nội suy Newton theo quy nạp các mốc theo thứ tự tăng dần

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - y_0}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) = y_0 + f[x, x_0](x - x_0)$$

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

$$\Rightarrow f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$\Rightarrow f(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1)$$

NỘI SUY NEWTON

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$P_n(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] w_{n+1}(x)$$

$$w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

NỘI SUY NEWTON

Xây dựng bảng tỷ sai phân tương ứng với bảng dữ liệu:

1.2	1.3	1.5	1.7	1.8	2
3.172	3.695	3.974	4.152	3.769	3.112

$$P_n(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

NỘI SUY NEWTON

Xây dựng bảng tỷ sai phân tương ứng với bảng dữ liệu:

1.2	3.172							
1.3	3.695	5.23						
1.5	3.974	1.395	-12.78333333					
1.7	4.152	0.89		-1.2625	23.04166667			
1.8	3.769	-3.83	-15.73333333	-28.94166667	-86.63888889			222.658
2	3.112	-3.285	1.816666667		35.1	91.48809524		7302

NỘI SUY NEWTON

Xây dựng bảng tích:

	0	0	0	0	0	0	1
1.2	0	0	0	0	1	-1.2	
1.3	0	0	0	1	-2.5	1.56	
1.5	0	0	1	-4	5.31	-2.34	
1.7	0	1	-5.7	12.11	-11.367	3.978	
1.8	1	-7.5	22.37	-33.165	24.4386	-7.1604	

NỘI SUY NEWTON

Rút gọn đa thức nội suy Newton về dạng chính tắc:

$$\begin{aligned}P_5(x) = & 222.6587302x^5 - 1756.579365x^4 \\& + 5497.759127x^3 - 8538.62373x^2 \\& + 6585.831476x - 2015.938571.\end{aligned}$$

ĐTNS NEWTON MỐC CÁCH ĐỀU

$$x_k = x_0 + kh$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \nabla y_{k+1}$$

$$\Delta^l y_k = \Delta(\Delta^{l-1} y_k)$$

$$\nabla^l y_k = \nabla(\nabla^{l-1} y_k)$$

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} = \frac{\nabla^k y_k}{k! h^k}$$

Câu 1. Cho các mốc nội suy:

x	-2.5	-2	-1.5	-1
y	15.93	16.17	15.53	15.13

1. Tìm đa thức nội suy Newton lùi.
2. Tính gần đúng giá trị hàm số tại $x = -1.7$.

NS NEWTON MỐC CÁCH ĐỀU

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th)$$

$$= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)\cdots(t-n+1)$$

$$= P_n(x_n + th)$$

$$= y_n + \frac{\nabla y_n}{1!} t + \frac{\nabla^2 y_n}{2!} t(t+1) + \cdots + \frac{\nabla^n y_n}{n!} t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

Các vấn đề cần giải quyết

- Mốc bất kỳ:
 - Lập bảng tỷ sai phân, thêm mốc nội suy
 - Lập đa thức nội suy newton, thêm mốc nội suy
 - Bổ sung dữ liệu bị thiếu

Các vấn đề cần giải quyết

- Mối cách đều
 - Bảng sai phân
 - Thêm mối nội suy
 - Đa thức nội suy
 - Trích xuất dữ liệu phù hợp yêu cầu