

Bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường Nhóm phương pháp Euler

Bài toán Cauchy

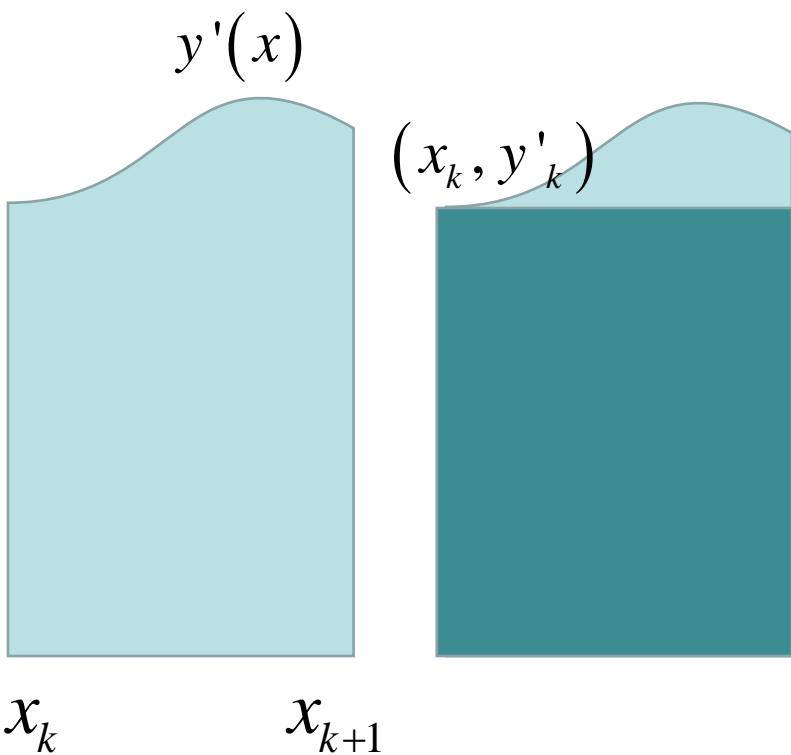
$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in I = [x_0, X], \\ y \in C^1(I, \mathbb{R}^k) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Phương trình tích phân

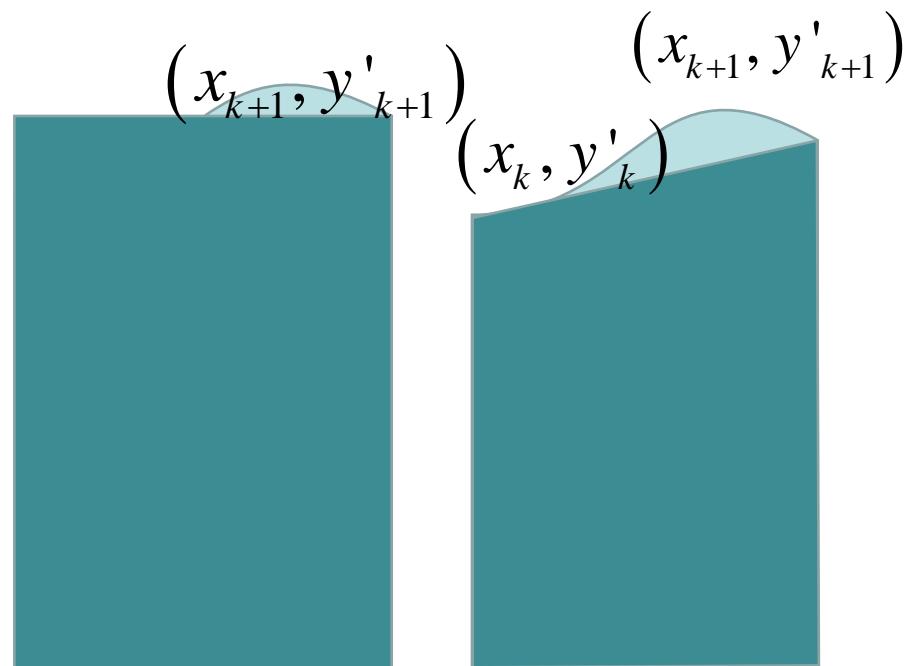
$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t)) dt$$

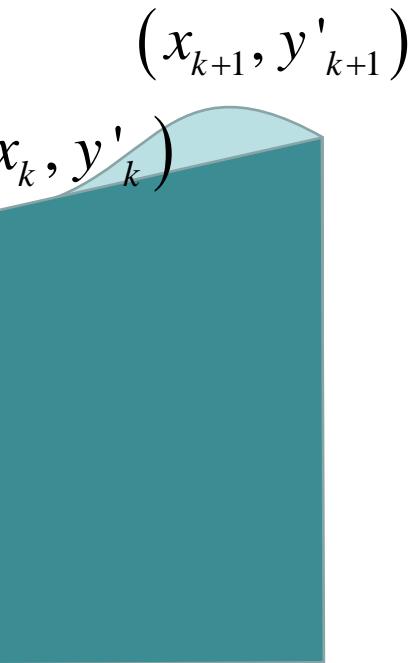
Ý nghĩa hình học của các CT



Euler hiện



Euler ẩn



Hình thang

- Euler forward (hiện)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

- Euler backward (ân)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

- Công thức hình thang

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right)$$

- Euler forward (hiện)

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + O(h^2)$$

- Euler backward (ân)

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + O(h^2)$$

- Công thức hình thang

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2} (y'(x_n) + y'(x_{n+1})) + O(h^2)$$

Sự hội tụ của phương pháp

- Phương pháp được gọi là hội tụ nếu

$$\forall x \in [x_0, X], nh = x - x_0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} |y(x) - y_n| = 0$$

- Phương pháp hội tụ cấp p nếu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|y(x) - y_{n+1}|}{h^p} = \text{const.}$$

Sai số và tốc độ hội tụ Euler hiện

- Đặt $\varepsilon_k = y(x_k) - y_k, \quad f_k = y'(x_k)$

$$\varepsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$= y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(t) dt - [y_n + hf_n]$$

$$= \varepsilon_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f(t, y(t)) - f(t, y_n)] dt$$

$$+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f(t, y_n) - f(x_n, y_n)] dt$$

Sai số và tốc độ hội tụ

Euler hiện

•

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t, y(t)) - f(t, y_n)| dt \leq L \int_{x_n}^{x_{n+1}} |y(t) - y_n| dt \\&\leq L \int_{x_n}^{x_{n+1}} |y(x_n) + y'(x_n)(t - x_n) + C_2(t - x_n)^2 - y_n| dt \\&\leq Lh|\varepsilon_n| + LC_1h^2 + L\overline{C}_2h^3 \\|I_2| &\leq \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t, y_n) - f(x_n, y_n)| dt \leq \left| \frac{\partial f(t^*, y_n)}{\partial t} \right| \int_{x_n}^{x_{n+1}} |t - x_n| dt \leq C_3h^2\end{aligned}$$

Sai số và tốc độ hội tụ

Euler hiện

- $$\begin{aligned} |\varepsilon_{n+1}| &\leq |\varepsilon_n| + |I_1| + |I_2| \\ &\leq (1 + Lh)|\varepsilon_n| + Ch^2 \\ &\leq (1 + Lh)^2 |\varepsilon_{n-1}| + (1 + Lh)Ch^2 + Ch^2 \\ &\leq (1 + Lh)^{n+1} |\varepsilon_0| + Ch^2 \left((1 + Lh)^n + \dots + (1 + Lh) + 1 \right) \\ &\leq e^{Lh(n+1)} |\varepsilon_0| + Ch^2 \frac{(1 + Lh)^{n+1} - 1}{Lh} \\ &\leq e^{L(x_{n+1} - x_0)} |\varepsilon_0| + M e^{L(x_{n+1} - x_0)} h \end{aligned}$$

Miền ổn định tuyệt đối

- Phương trình thứ:

$$y' = \lambda y, \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

- Đặc tính nghiệm:

$$|y(t)| = |e^{(a+ib)t}| = |e^{at} (\cos bt + i \sin bt)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{a < 0} 0$$

- Miền ổn định tuyệt đối của phương pháp:

$$z = h\lambda, h > 0, A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

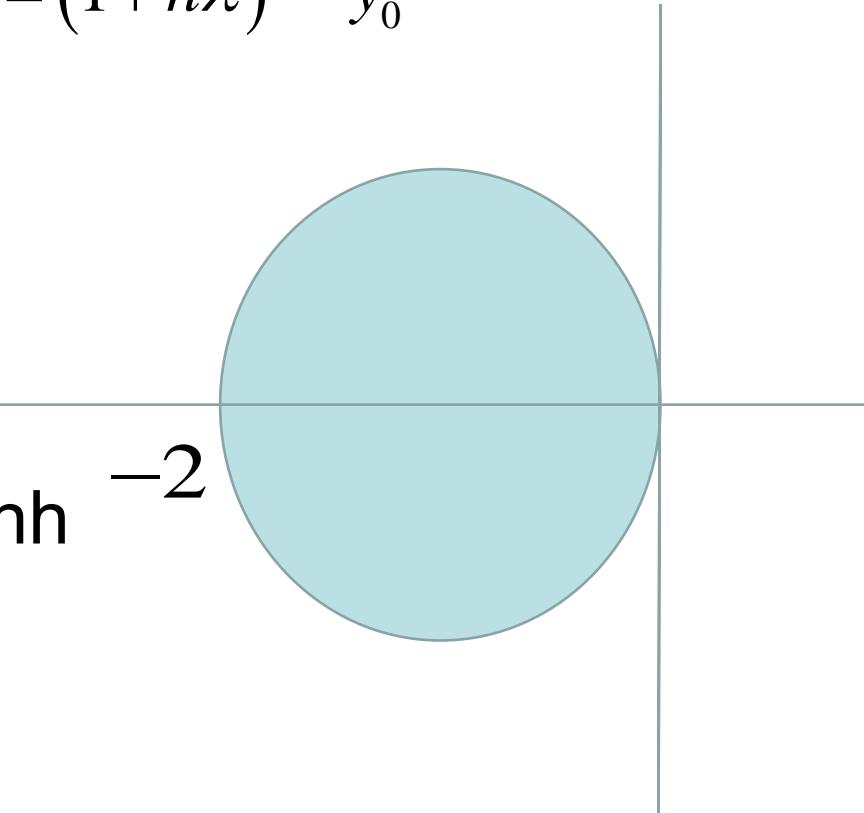
Miền ổn định tuyệt đối Euler hiện

- $y' = \lambda y, \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$

$$y_{n+1} = y_n + hf_n = (1 + h\lambda) y_n = (1 + h\lambda)^{n+1} y_0$$

$$\Rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |1+z| < 1\}$$

- h bị ràng buộc để
 - Thỏa mãn sai số
 - Phương pháp ổn định



Ví dụ mô hình hệ thú mồi

$$\begin{cases} n' = rn \left(1 - \frac{n}{K} \right) - anp \\ p' = -\mu p + anp \end{cases}$$