

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

Hà Thị Ngọc Yên
Hà nội, 10/2025

BÀI TOÁN

- Cho bộ điểm $(x_i, y_i)_{i=\overline{1,n}}$
- Cho kgvt V với hệ hàm cơ sở $\{\varphi_j\}_{j=\overline{1,m}}$
- Tìm hàm $g = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i \in V$ để sai lệch giữa f, g là nhỏ nhất
- Khi đó $f \approx g$

Sai số trung bình phương

- Xét lưới điểm $\{x_i\}_{i=1,n}$
- Sai lệch trung bình phương giữa hai hàm:
$$\sigma_{f-g} = \sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - g(x_i))^2}$$
- Sai số trung bình phương nhỏ nhất khi nào?

PP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

- Xét hàm m biến $S(a_1, a_2, \dots, a_m)$
- Và cực tiểu hóa
$$S = \sum_{i=1}^n (a_1\varphi_1(x_i) + \dots + a_m\varphi_m(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min_{a_i} S$$
- S luôn đạt cực tiểu tại điểm dừng $\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, i = \overline{1, m}.$

Hàm bậc nhất

- Xét V là kg các đa thức bậc không quá một

$$S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min_{a,b} S$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)(x_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Hàm bậc hai

- Xét V là kg các đa thức không quá hai

$$S = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \rightarrow \min_{a,b,c} S$$
$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Trường hợp tổng quát

$$S = \sum_{i=1}^n \left(a_1 \varphi_1(x_i) + \cdots + a_m \varphi_m(x_i) - y_i \right)^2 \rightarrow \min_{a_1, \dots, a_m} S$$

$$\varphi_i = (\varphi_i(x_1), \varphi_i(x_2), \dots, \varphi_i(x_n))^t, i = \overline{1, m}; y = (y_i)^t$$

$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_m]_{n \times m}; M = \Phi^t \Phi = [\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle]_{i,j}$$

$$\Rightarrow S = a^t Ma - 2y^t \Phi a + y^t y$$

$$\Rightarrow S' = 2a^t M - 2y^t \Phi = 0 \Leftrightarrow Ma = \Phi^t y \Leftrightarrow a = M^{-1} \Phi^t y$$

Hàm đưa được về dạng tuyến tính theo tham số

- Một số hàm chưa tuyến tính đưa được về dạng tuyến tính theo tham số

$$y = ae^{b_1\varphi_1(x) + \dots + b_m\varphi_m(x)}$$

$$y = ax^b$$

$$y = \ln(b_1\varphi_1(x) + \dots + b_m\varphi_m(x))$$

Hàm đưa được về dạng tuyến tính
theo tham số

$$(x_i, y_i)_{i=1, \overline{n}}, \quad y = ae^{b_1\varphi_1(x) + \dots + b_m\varphi_m(x)}$$

$$y_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln a + b_1\varphi_1(x) + \dots + b_m\varphi_m(x)$$

$$y_i < 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$$\Rightarrow \ln(-y) = \ln(-a) + b_1\varphi_1(x) + \dots + b_m\varphi_m(x)$$

Thuật toán

- Bước 1: Nhập $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$, $\varphi_j(x), j = 1, \dots, m$
- Bước 2: Tính
$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_m]; M = \Phi^t \Phi; \quad b = \Phi^t y$$
- Bước 3: Giải PT $Mx = b$

Ví dụ

Câu 1. Tìm hàm thực nghiệm $y = ae^{bx} - 2$ biết bảng dữ liệu sau:

x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	- 0.641	- 0.498	- 0.34	-0.165	0.028	0.241	0.477	0.737	1.025	1.343	1.695

2

- c. Xây dựng công thức xác định tham số của hàm thực nghiệm dạng $y = ax + b \sin x$ với bộ dữ liệu $(x_i, y_i)_{i=1, n}$ cho trước. Áp dụng tìm hàm thực nghiệm với dữ liệu trong file data đã cho.

2L3o57ghv