Phương pháp sai phân giải bài toán biên

Bài toán biên

- Phương trình vi phân:

$$\left[p(x)u'(x)\right]' - q(x)u(x) = -f(x)$$

Bài toán biên

- Điều kiện biên loại 1:

$$u\left(a\right)=\alpha$$

$$u\left(b\right)=\beta$$

Bài toán biên

- Điều kiện biên loại 2:

$$p(a)u'(a) = -\mu_1 \qquad (2.1)$$

$$p(b)u'(b) = -\mu_2 \qquad (2.2)$$

Bài toán biên

- Điều kiện biên loại 3:

$$p(a)u'(a)-\sigma_1 u(a)=-\mu_1, \qquad (3.1)$$

$$p(b)u'(b)-\sigma_2 u(b)=-\mu_2, \qquad (3.2)$$

$$\sigma_i \geq 0,\ \sigma_1+\sigma_2>0$$

Bài toán biên

- Điều kiện biên hỗn hợp:

$$u\left(a\right)=\alpha$$

$$p\left(b\right)u'\left(b\right)-\sigma_2 u\left(b\right)=-\mu_2 \quad \left(\sigma_2 \geq 0\right)$$

Sai phân hóa phương trình vi phân

- Ý tưởng: Xấp xỉ đạo hàm bằng công thức sai phân trung tâm với bước *h*/2

- Công thức sai phân trung tâm:

$$\varphi'\left(x_i\right) = \frac{\varphi\left(x_i + h/2\right) - \varphi\left(x_i - h/2\right)}{h} + O\left(h^2\right)$$

Sai phân hóa PTVP

-

$$\left[p(x)u'(x)\right]' - q(x)u(x) = -f(x)$$

$$u'_i = \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{h}$$

$$\left(p_i u'_i\right)' = \frac{p_{i+1/2}u'_{i+1/2} - p_{i-1/2}u'_{i-1/2}}{h}$$

$$= \frac{p_{i+1/2}\left(u_{i+1} - u_i\right) - p_{i-1/2}\left(u_i - u_{i-1}\right)}{h^2}$$

Sai phân hóa PTVP

$$\frac{p_{i+1/2}\left(u_{i+1}-u_i\right)-p_{i-1/2}\left(u_i-u_{i-1}\right)}{h^2}-q_iu_i+f_i=0$$

$$A_i=p_{i-1/2},$$

$$B_i=\left(p_{i+1/2}+p_{i-1/2}+h^2q_i\right),$$

$$C_i=p_{i+1/2},$$

$$A_iu_{i-1}-B_iu_i+C_iu_{i+1}=-h^2f_i \quad (1)$$

Bài toán biên loại 1

- Phương trình rời rạc hóa:

$$A_i u_{i-1} - B_i u_i + C_i u_{i+1} = -h^2 f_i \qquad i = \overline{1, N-1}$$

- Điều kiện biên loại 1

$$u(a) = \alpha \Leftrightarrow u_0 = \alpha$$

$$u(b) = \beta \Leftrightarrow u_N = \beta$$

Bài toán biên loại 1

- Phương trình rời rạc hóa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_1 & -B_1 & C_1 & 0 & & & \\ 0 & A_2 & -B_2 & C_2 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & A_{N-2} & -B_{N-2} & C_{N-2} & 0 \\ & & & 0 & A_{N-1} & -B_{N-1} & -C_{N-1} \\ 0 & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -h^2 f_1 \\ -h^2 f_2 \\ \vdots \\ -h^2 f_{N-2} \\ -h^2 f_{N-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Bài toán biên loại 2

- Điều kiện biên loại 2:

$$p_{1/2}u'_{1/2}$$

$$= \left[p_0 + \frac{h}{2} p'_0 + O\left(h^2\right) \right] \left[u'_0 + \frac{h}{2} u''_0 + O\left(h^2\right) \right]$$

$$= p_0 u'_0 + \frac{h}{2} \left[p'_0 u'_0 + p_0 u''_0 \right] + O\left(h^2\right)$$

Bài toán biên loại 2

$$\Rightarrow p_0 u_0' \approx p_{1/2} u_{1/2}' - \frac{h}{2}\left[p_0 u_0'\right]'$$

$$= p_{1/2} u_{1/2}' - \frac{h}{2}\left[q_0 u_0 - f_0\right]$$

$$\Rightarrow (2.1) \Leftrightarrow p_{1/2}\frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2}\left[q_0 u_0 - f_0\right] = -\mu_1$$

$$\Leftrightarrow p_{1/2} u_1 - \left[p_{1/2} + \frac{h^2 q_0}{2}\right] u_0 = \frac{-h^2 f_0}{2} - \mu_1 h$$

Bài toán biên loại 2

$$p_{N-1/2}u'_{N-1/2}$$

$$=\left[p_N-\frac{h}{2}p'_N+O\left(h^2\right)\right]\left[u'_N-\frac{h}{2}u''_N+O\left(h^2\right)\right]$$

$$=p_Nu'_N-\frac{h}{2}\left[p'_Nu'_N+p_Nu''_N\right]+O\left(h^2\right)$$

$$=p_Nu'_N-\frac{h}{2}\left[p_Nu'_N\right]'+O\left(h^2\right)$$

Bài toán biên loại 2

$$\Rightarrow p_N u'_N \approx p_{N-1/2} u'_{N-1/2} + \frac{h}{2}\left[p_N u'_N\right]'$$

$$= p_{N-1/2} u'_{N-1/2} + \frac{h}{2}\left[q_N u_N - f_N\right]$$

$$\Rightarrow (2.2) \Leftrightarrow p_{N-1/2} \frac{u_N - u_{N-1}}{h} + \frac{h}{2}\left[q_N u_N - f_N\right] = -\mu_2$$

$$\Leftrightarrow \left[p_{N-1/2} + \frac{h^2 q_N}{2}\right] u_N - p_{N-1/2} u_{N-1} = \frac{h^2 f_N}{2} - \mu_2 h$$

Bài toán biên loại 3

$$\Rightarrow p_0 u_0' \approx p_{1/2} u_{1/2}' - \frac{h}{2}\left[q_0 u_0 - f_0\right]$$

$$\Rightarrow (3.1) \Leftrightarrow p_{1/2}\frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2}\left[q_0 u_0 - f_0\right] - \sigma_1 u_0 = -\mu_1$$

$$\Leftrightarrow p_{1/2} u_1 - \left[p_{1/2} + \frac{h^2 q_0}{2} + \sigma_1\right] u_0 = \frac{-h^2 f_0}{2} - \mu_1 h$$

Bài toán biên loại 3

$$\Rightarrow p_N u'_N \approx p_{N-1/2} u'_{N-1/2} + \frac{h}{2}\left[q_N u_N - f_N\right]$$

$$(3.2) \Leftrightarrow p_{N-1/2} \frac{u_N - u_{N-1}}{h} + \frac{h}{2}\left[q_N u_N - f_N\right] - \sigma_2 u_N = -\mu_2$$

$$\Leftrightarrow \left[p_{N-1/2} + \frac{h^2 q_N}{2} - \sigma_2\right] u_N - p_{N-1/2} u_{N-1} = \frac{h^2 f_N}{2} - \mu_2 h$$

Bài toán giá trị riêng

- Phương trình vi phân:

$$\left[p(x)u'(x)\right]' - q(x)u(x) = \lambda r(x)u(x),$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

$$p \geq c_1 > 0, \qquad q \geq 0, \quad r > 0$$

Bài toán giá trị riêng

- Phương trình vi phân:

$$Lu = \frac{1}{r(x)}\left[\left[p(x)u'(x)\right]' - q(x)u(x)\right],$$

$$Lu = \lambda u, \qquad\qquad u \neq 0$$

Bài toán giá trị riêng

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_1 & -B_1 & C_1 & 0 & & & \\ 0 & A_2 & -B_2 & C_2 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & A_{N-2} & -B_{N-2} & C_{N-2} & 0 \\ & & & 0 & A_{N-1} & -B_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -h^2 r_1 u_1 \\ -h^2 r_2 u_2 \\ \vdots \\ -h^2 r_{N-2} u_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} u_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bài toán giá trị riêng

$$\begin{bmatrix} -B_1+\lambda h^2 r_1 & C_1 & 0 & & \\ A_2 & -B_2+\lambda h^2 r_2 & C_2 & 0 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & A_{N-2} & -B_{N-2}+\lambda h^2 r_{N-2} & C_{N-2} \\ 0 & & 0 & A_{N-1} & -B_{N-1}+\lambda h^2 r_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = 0$$

Câu 2. Cho phương trình vi phân (1): $\left[p(x)y'\right]' - q(x)y + Cr(x) = 0$, trong đó,

$$p(x) = 1 + x^2,\ q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2.25x,\ r(x) = e^{-x^2}\left(1.25x^2 - 2.75x - 2\right),\ x \in [0,3].$$

a. Tìm miền ổn định tuyệt đối của công thức RK4.

b. Dùng công thức RK4 giải gần đúng phương trình (1) với điều kiện ban đầu $y(0) = y'(0) = C$, bước $h = 0.01$; C là số thứ tự của bạn theo danh sách thi. Ghi rõ 6 điểm tìm được tương ứng với các bước lưới $x_1, x_2, x_3, x_{298}, x_{299}, x_{300}$. Vẽ đường cong nghiệm trên hệ toạ độ (x, y) với kết quả tìm được. Bạn có kết luận gì về nghiệm của bài toán đã cho?

c. Dùng phương pháp sai phân hữu hạn rời rạc hóa phương trình (1). Sau đó tìm nghiệm gần đúng với điều kiện biên $y'(0) = 150$, $y'(3) = 21.9787667$, bước lưới $h = 0.1$. Vẽ đường cong nghiệm, xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm nghiệm và mốc đạt được giá trị đó.