NỘI SUY TRUNG TÂM

Hà Thị Ngọc Yến

Hà nội, 2025

Ý TƯỞNG

- Phép nội suy có sai số nhỏ nhất khi x ở khoảng trung tâm của đoạn nội suy
- Đa thức nội suy Newton có thể kết nạp mốc nội suy theo thứ tự bất kỳ
- Trích xuất mốc nội suy gần nhất với giá trị cần tính, kết nạp dần mộc nội suy về cả hai phía

Công thức Gauss I

- Mốc cách đều $x_k = x_0 + kh,\ k \in \mathbb{Z}$
- Số mốc lẻ, xuất phát từ mốc chính giữa
- Kết nạp bên phải trước, xen kẽ P,T,P,T,….

$$
\begin{aligned}
P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) &+ a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&+ a_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1}) \\
&+ a_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})(x - x_2)\cdots
\end{aligned}
$$

Công thức Gauss I

- Xây dựng công thức

$$P\left(x_0\right) = a_0 = y_0$$

$$P\left(x_1\right) = y_1 = y_0 + a_1 h \Rightarrow a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$$

$$P\left(x_{-1}\right) = y_{-1} = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\left(-h\right) + a_2\left(-h\right)\left(2h\right) \Rightarrow a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2h^2}$$

Công thức Gauss I

5	x_{-2}	y_{-2}	?	?	?	?			
3	x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\boxed{\Delta^2 y_{-1}}$	$\boxed{\Delta^3 y_{-1}}$				
1	x_0	y_0	$\boxed{\Delta y_0}$	$\Delta^2 y_0$					
2	x_1	y_1	Δy_1						
4	x_2	y_2							

Công thức Gauss I

- Xây dựng công thức

$$y_0 \to \Delta y_0 \to \Delta^2 y_{-1} \to \Delta^3 y_{-1} \to \Delta^4 y_{-2} \to \Delta^5 y_{-2} \to \cdots \to \Delta^{2i} y_{-i} \to \Delta^{2i+1} y_{-i} \to \cdots$$

$$a_{2i} = \frac{\Delta^{2i} y_{-i}}{(2i)!h^{2i}} \qquad a_{2i+1} = \frac{\Delta^{2i+1} y_{-i}}{(2i+1)!h^{2i+1}}$$

$$P(x) = P(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!} t(t-1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}(t+1)t(t-1) + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!}(t+1)t(t-1)(t-2) + \cdots$$

Công thức Gauss I

- Ý tưởng thuật toán

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
a_0 \times & & & & & & 1 \\
a_1 \times & & & & & & t \\
a_2 \times & & & & & t & (t-1) \\
a_3 \times & & & & t & (t-1) & (t+1) \\
a_4 \times & & & t & (t-1) & (t+1) & (t-2) \\
a_5 \times & & t & (t-1) & (t+1) & (t-2) & (t+2) \\
\ldots & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrrrrr}
a_0 \times & & & & & & 1 \\
a_1 \times & & & & & 1 & 0 \\
a_2 \times & & & & 1 & -1 & 0 \\
a_3 \times & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\
a_4 \times & & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\
a_5 \times & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 \\
\ldots & & & & & &
\end{array}
$$

Công thức Gauss II

- Mốc cách đều $x_k = x_0 + kh,\ k \in \mathbb{Z}$
- Số mốc lẻ, xuất phát từ mốc chính giữa
- Kết nạp bên trái trước, xen kẽ T, P, T, P,….

$$
\begin{aligned}
P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) &+ a_2(x - x_0)(x - x_{-1}) \\
&+ a_2(x - x_0)(x - x_{-1})(x - x_1) \\
&+ a_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})(x - x_{-2})\cdots
\end{aligned}
$$

Công thức Gauss II

- Xây dựng công thức

$$P\left(x_0\right)=a_0=y_0$$

$$P\left(x_{-1}\right)=y_{-1}=y_0+a_1\left(-h\right)\Rightarrow a_1=\frac{\Delta y_{-1}}{h}$$

$$P\left(x_1\right)=y_1=y_0+\frac{\Delta y_{-1}}{h}\left(h\right)+a_2\left(h\right)\left(2h\right)\Rightarrow a_2=\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2h^2}$$

Công thức Gauss II

4	x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\boxed{\Delta^3 y_{-2}}$	?			
2	x_{-1}	y_{-1}	$\boxed{\Delta y_{-1}}$	$\boxed{\Delta^2 y_{-1}}$	?				
1	x_0	y_0	Δy_0	?					
3	x_1	y_1	?						
5	x_2	y_2							

Công thức Gauss II

- Xây dựng công thức

$$y_0 \to \Delta y_{-1} \to \Delta^2 y_{-1} \to \Delta^3 y_{-2} \to \Delta^4 y_{-2} \to \Delta^5 y_{-3} \to \cdots \to \Delta^{2i-1} y_{-i} \to \Delta^{2i} y_{-i} \to \cdots$$

$$a_{2i-1} = \frac{\Delta^{2i-1} y_{-i}}{(2i-1)!h^{2i-1}} \qquad a_{2i} = \frac{\Delta^{2i} y_{-i}}{(2i)!h^{2i}}$$

$$P(x) = P(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}(t+1)t +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!}(t+1)t(t-1) + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!}(t+2)(t+1)t(t-1) + \cdots$$

Công thức Gauss I

- Ý tưởng thuật toán

$$
\begin{array}{llllll}
a_0 \times & & & & & 1 \\
a_1 \times & & & & & t \\
a_2 \times & & & & t & (t+1) \\
a_3 \times & & & t & (t+1) & (t-1) \\
a_4 \times & & t & (t+1) & (t-1) & (t+2) \\
a_5 \times & t & (t+1) & (t-1) & (t+2) & (t-2) \\
\dots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
a_0 \times & & & & & & 1 \\
a_1 \times & & & & & 1 & 0 \\
a_2 \times & & & & 1 & 1 & 0 \\
a_3 \times & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\
a_4 \times & & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\
a_5 \times & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 \\
\dots
\end{array}
$$

Gauss I và Gauss II

-

$$
\begin{array}{lccccc|ccccc}
a_0 \times & & & & & 1 & & & & & 1 \\
a_1 \times & & & & & t & & & & & t \\
a_2 \times & & & & t & (t-1) & & & & t & (t+1) \\
a_3 \times & & & t & (t-1) & (t+1) & & & t & (t+1) & (t-1) \\
a_4 \times & & t & (t-1) & (t+1) & (t-2) & & t & (t+1) & (t-1) & (t+2) \\
a_5 \times & t & (t-1) & (t+1) & (t-2) & (t+2) & t & (t+1) & (t-1) & (t+2) & (t-2) \\
\ldots & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Gauss I và Gauss II

-

$$
\begin{array}{l cccccc|cccccc}
a_0 \times & & & & & & 1 & & & & & & 1 \\
a_1 \times & & & & & 1 & 0 & & & & & 1 & 0 \\
a_2 \times & & & & 1 & -1 & 0 & & & & 1 & 1 & 0 \\
a_3 \times & & & 1 & 0 & -1 & 0 & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\
a_4 \times & & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\
a_5 \times & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 \\
\cdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Công thức Sterling

- Ý tưởng: thác triển đồng thời về cả hai phía.

$$\text{Sterlin} = \frac{\text{Gauss I} + \text{Gauss II}}{2}$$

$$y_0 + t\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}(t+1)t(t-1) + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!}(t+1)t(t-1)(t-2) + \cdots$$

$$y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}(t+1)t + \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!}(t+1)t(t-1) + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!}(t+2)(t+1)t(t-1) + \cdots$$

Công thức Sterling

- Cộng từng cặp số hạng:

$$y_0 \qquad \Delta y_0 t \qquad \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}t(t-1) \qquad \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}t(t^2-1) \qquad \cdots$$

$$y_0 \qquad \Delta y_{-1} t \qquad \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}t(t+1) \qquad \frac{\Delta^3 y_{-2}}{3!}t(t^2-1) \qquad \cdots$$

$$y_0 \qquad \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2}t \qquad \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}t^2 \qquad \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2\times 3!}t(t^2-1) \qquad \cdots$$

Công thức Bessel

- ĐK: môc cách đều, số mốc chẵn

$$x_{-n} \quad \ldots \quad x_{-1} \quad x_0 \quad x_1 \quad \ldots \quad x_n \quad x_{n+1}$$

$$\text{GaussI} \;: x_0 \to x_1 \to x_{-1} \to x_2 \to \cdots \to x_n \to x_{-n} \to x_{n+1}$$

$$\text{GaussII} : x_1 \to x_0 \to x_2 \to x_{-1} \to \cdots \to x_{-n+1} \to x_{n+1} \to x_{-n}$$

$$\text{Bessel} = \frac{\text{GaussI} + \text{GaussII}}{2}$$

Công thức Bessel

- ĐK: môc cách đều, số mốc chẵn

$$P_{GI}\left(x_0+th\right)$$

$$=y_0+t\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!}t\left(t-1\right)+\frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}\left(t+1\right)t\left(t-1\right)+\cdots$$

$$+\frac{\Delta^{2n+1}y_{-n}}{\left(2n+1\right)!}t\left(t^2-1\right).....\left(t^2-n^2\right)$$

Công thức Bessel

- ĐK: môc cách đều, số mốc chẵn

$$P_{GII}\left(x_0+th\right)$$

$$=y_1+\left(t-1\right)\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\left(t-1\right)t+\frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}t\left(t-1\right)\left(t-2\right)+\cdots$$

$$+\frac{\Delta^{2n+1}y_{-n}}{\left(2n+1\right)!}t\left(t^2-1\right).....\left(t^2-\left(n-1\right)^2\right)\left(t-n\right)$$

Công thức Bessel

- ĐK: môc cách đều, số mốc chẵn

$$P_{GII}\left(x_0+th\right)$$

$$=y_1+\left(t-1\right)\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\left(t-1\right)t+\frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!}t\left(t-1\right)\left(t-2\right)+\cdots$$

$$+\frac{\Delta^{2n+1}y_{-n}}{\left(2n+1\right)!}t\left(t^2-1\right).....\left(t^2-\left(n-2\right)^2\right)\left(t-n+1\right)\left(t-n\right)$$

$$P\left(x_0+th\right)=\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{\Delta y_0}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_{-1}}{2\times 2!}t\left(t-1\right)+\frac{\Delta^3 y_{-1}}{2\times 3!}t\left(t-1\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

Các vấn đề cần giải quyết

- Mốc cách đều
  - Bảng sai phân
  - Thêm mốc nội suy
  - Đa thức nội suy
  - Trích xuất dữ liệu phù hợp yêu cầu