



دانشکده مهندسی کامپیوتر

دکتر مرضیه ملکی مجد

بهار ۱۴۰۱

تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین سری سوم

تاریخ تحویل: ۴ اردیبهشت ۱۴۰۰ ساعت ۱۴:۵۹:۲۳

دانیال بازمانده - علی صدیقی

قوانین:

- سؤالات تئوری نیاز به **اثبات درستی** و **تحلیل زمان اجرا** دارد.
- برای سؤالات تئوری باید تصویر مناسبی از جواب سؤال در کوئرا آپلود کنید.
- پاسخ سؤالات تئوری باید با خودکار **آبی** (و یا رنگ‌های دیگری که در تصویر کم‌رنگ نباشند مانند **مشکی**) و ترجیحاً بر روی برگه‌ی **A4** باشد. (استفاده از برگه‌های خط‌دار که خط‌های آن از نوشته شما پررنگ‌تر نباشد و نوشته‌های پشت برگه بر روی برگه اثر نگذارد، مانعی ندارد.) همچنین امکان تحویل پاسخ سؤالات به صورت تایپ شده وجود دارد.
- بخش‌های مختلف سؤال را جداگانه بنویسید و مشخص کنید هر قسمت در راستای پاسخ به کدام قسمت است.
- راه حل خود را تمیز و با خط خوانا بنویسید، هرگونه مشکل که منجر به ناخوانا بودن جواب شود **کسر نمره** به همراه دارد.
- در سؤالات تئوری می‌توانید با استفاده از شبه کد، جواب خود را توضیح بدهید ولی نوشتن کد یا شبه کد به تنهایی نمره‌ای ندارد.
- در سؤالات عملی، توضیحات دقیق‌تر در مورد نحوه‌ی ورودی و خروجی داخل کوئرا داده شده است.
- برای پاسخ‌های خود اثبات قانع‌کننده ارائه دهید. (به طور مثال اگر مرتبه زمانی برای یک سؤال می‌نویسید، درستی آن را نیز اثبات نمایید.)
- هرگونه ایده گرفتن از تمرین دیگران و کدهای موجود در اینترنت که موجب تشابه بالای کد شما با دیگری شود، تقلب محسوب می‌شود و نمره‌ی منفی برای شما منظور خواهد شد.
- راه حل سؤال‌های تئوری را به طور مختصر و دقیق توضیح دهید. توضیحات بی مورد و همچنین عدم توضیح (برای یک قسمت از سؤال) هر دو کسر نمره دارد.
- برای ارسال هر سری تمرین با تاخیر **تا ۷۲ ساعت** فرصت دارید و پس از آن، کوئرا بسته خواهد شد و تمرینی از شما پذیرفته نخواهد شد.
- در طول ترم **تا ۱۶۸ ساعت (۷ روز کامل)** تاخیر مجاز خواهد بود که به صورت ساعتی محاسبه خواهد شد. در صورتی که تعداد ساعات مجاز تاخیر را رد کنید، **نمره‌ی صفر** برای تمرین شما منظور خواهد شد.
- با توجه به مکانیزم تاخیر در نظر گرفته شده و فشرده بودن برنامه ترم، **به هیچ عنوان امکان تمدید نخواهد بود.**

درمورد این سری تمرین به نکات زیر توجه داشته باشید:

مبحث اصلی این تمرین، الگوریتم‌های مقدماتی گراف (BFS, DFS, Topological Sort, SCC) می‌باشد و از شما انتظار می‌رود برای پاسخ به سوالات، راه‌حل‌های مرتبط با این مبحث را ارائه دهید.

توجه داشته باشید که در این سری تمرین باید، به سوالات اول تا سوم تنها به صورت تئوری، به سوالات چهارم و پنجم به صورت عملی و به سوال ششم به صورت تئوری و عملی پاسخ دهید. درواقع برای سوال ششم، توضیحات کامل مربوط به راه حل و الگوریتم خود را داخل قسمت تئوری آپلود می‌کنید و کد مربوطه را نیز در قسمت مشخص شده در کوئرا بارگزاری می‌کنید و نمره به صورت خودکار محاسبه می‌شود.

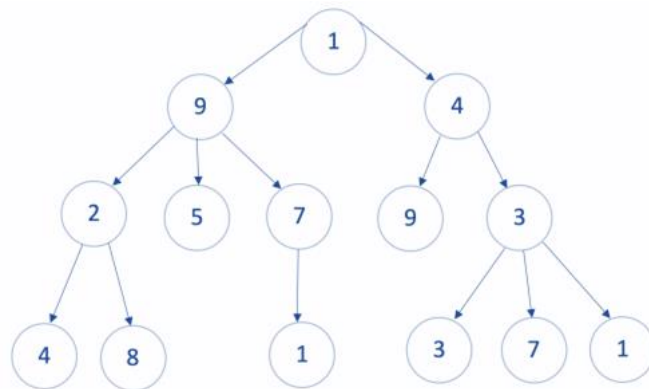
این تمرین شامل یک سوال امتیازی می‌باشد (سوال ۶) و نمره تمرین از ۱۲۵ محاسبه می‌شود.

پیاپی سازی الگوریتم سوال‌های ۴ تا ۶ باید با یکی از زبان‌های مجاز در کوئرا باشد.

فایل پاسخ تئوری تمرین خود را به صورت **شماره ی دانشجویی_نام و نام خانوادگی_HW3** نام گذاری کرده و ارسال کنید. (برای مثال HW3_NameFamily_99000000). دقت کنید درغیراین صورت، تمرین شما تصحیح نخواهد شد.

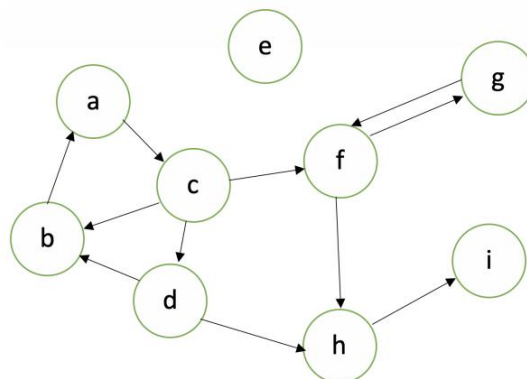
سوال اول (۱۵ نمره)

فرض کنید درختی در اختیار داریم که به هرکدام از رئوس آن عددی اختصاص داده‌ایم. هر راس این درخت که با شروع از ریشه‌ی درخت به آن برسیم و به عدد تکراری برخورد نکنیم، یک راس طلایی نامیده می‌شود. الگوریتمی ارائه دهید که با استفاده از آن بتوان رئوس طلایی یک درخت را پیدا کرد. سپس با استفاده از این الگوریتم، رئوس طلایی درخت زیر را بیابید.



سوال دوم (۲۰ نمره)

در گراف زیر، به مسیری که از یک راس شروع شده و پس از عبور از تعدادی رئوس دیگر به خود آن راس بازگردد، مسیر طلایی گفته می‌شود. با استفاده از الگوریتم Strongly Connected Components (SCC) راس‌هایی که حداقل یک مسیر طلایی دارند را پیدا کنید. همچنین مقادیر $u.f$ و $u.d$ را برای هر راس در هر مرحله محاسبه کنید.



الگوریتم خود را واضح و شفاف بیان کنید و پیچیدگی زمانی و حافظه‌ای آن را نیز محاسبه کنید.

اختلاف مجموع دو زیردرخت ایجادشده	یال درخت
$۱۹ = ۲۱ - ۲$	۰-۱
$۵ = ۱۴ - ۹$	۰-۲
$۷ = ۱۵ - ۸$	۰-۳
$۱۷ = ۲۰ - ۳$	۲-۴
$۱۳ = ۱۸ - ۵$	۲-۵
$۱۹ = ۲۱ - ۲$	۲-۶

५

سوال چهارم (۲۰ نمره)

فرض کنید آرایه‌ای از کلمات را در اختیار داریم که مربوط به زبانی ناشناخته هستند. اگر تضمین شود کلمات داخل این آرایه به صورت مرتب‌شده (sorted) قرار گرفته باشند (به مانند یک فرهنگ لغت)، برنامه‌ای بنویسید که ترتیب حروف (کاراکترهای) این زبان را به دست آورد. (تضمین می‌شود آرایه خوش تعریف است و ترتیب یکتا می‌توانیم پیدا کنیم).

❖ به عنوان نمونه، فرض کنید آرایه‌ی داده‌شده به صورت زیر باشد:

```
arr = ["baa", "abcd", "abca", "cab", "cad"]
```

با دقت در ترتیب واژگان این آرایه متوجه خواهیم شد ترتیب حروف این زبان به صورت ['b', 'd', 'a', 'c'] است. چراکه کلمه‌ی "baa" پیش از "abcd" آمده است و این به این معنی است که حرف 'b' در این زبان جلوتر از 'a' می‌باشد. با دقت در ترتیب سایر واژگان می‌توانیم به مطلوب مسئله برسیم.

سوال پنجم (۲۵ نمره)

در یک روز بارونی، آقای نقطه در هنگام رفتن به سرکار، به یکسری چاله‌های آب که در کنار هم قرار دارند، برخورد کرده است. این چاله‌ها را می‌توانیم به شکل یک ماتریس $n \times m$ نمایش دهیم که نشان‌دهنده‌ی یک ناحیه مربعی شکل روی زمین هستند. در صورتی که مقدار هریک از اعضای این ماتریس، برابر " " باشد، آقای نقطه خودش را در داخل آن می‌تواند ببیند پس در آن نقطه چاله آب داریم و در صورتی که مقدار آن برابر "*" باشد، در آن ناحیه مربعی شکل خشکی داریم.

به عنوان مثال، در نمونه زیر، یک ماتریس آمده است که نشان می‌دهد در منطقه‌ی [۰, ۳] یک چاله‌ی آب داریم ولی مناطق مجاور آن همگی خشک هستند.

```
***.*.
...*.
...
```

حال آقای نقطه می خواهد بداند با حذف کردن هر کدام از نواحی خشکی و قرار دادن چاله آب بجای آن، چه دریاچه‌هایی ایجاد می‌شوند. دریاچه به تعداد یک یا بیشتر از یک چاله آب می‌گویند که در کنار هم قرار گرفته‌اند و هم‌چنین سائز دریاچه نیز به تعداد چاله‌های آن بستگی دارد. (خانه‌های مجاور ۴ تا محاسبه می‌شوند؛ چپ، راست، بالا و پایین)

برنامه‌ای بنویسید تا بر روی هر منطقه‌ی خشک عددی چاپ کند که نشان‌دهنده‌ی این است که اگر این منطقه به چاله آب تبدیل شود، دریاچه حاوی این نقطه چه سائزی دارد.

توجه کنید که باقیمانده عدد به‌دست‌آمده را در جدول قرار دهید. به عنوان مثال، اگر سائز دریاچه ۱۰ است، باید عدد ۰ قرار داده شود.

سوال ششم (امتیازی) (۲۵ نمره)

گراف G یک گراف ساده است. فرض کنید W_k یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از رئوس گراف G باشد به طوری که به ازای هر دو راس متمایز در این زیرمجموعه، فاصله‌ی این دو راس برابر k یا $k + 1$ باشد. به عبارت دیگر:

$$W_k \subseteq G \quad \text{and} \quad W_k \neq \emptyset$$

$$\forall u, v \in W_k \wedge u \neq v \Rightarrow d(u, v) = k \vee k + 1$$

در این مسئله یک درخت با n راس به شما داده خواهد شد. برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر عدد i بین ۱ تا n ، مقدار بیشینه‌ی اندازه مجموعه W_i را محاسبه کند. پیچیدگی مکانی و حافظه‌ای الگوریتم خود را محاسبه کنید.

موفق باشید.