



## تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال دوم ۰۱-۰۰

استاد: دکتر ملکی مجد

زمان پاسخ‌گویی: ۱۲۰ دقیقه

### آزمونک سوم (الگوریتم‌های کوتاه‌ترین مسیر)

لطفاً به نکات زیر توجه فرمایید:

- پاسخ‌های خود را به‌صورت یک فایل ZIP یا PDF که نام آن به فرمت `Name&LastName_StudentID` می‌باشد، در کوئرا آپلود کنید.
- در تمامی سوالات طراحی الگوریتم، تحلیل پیچیدگی زمانی و مکانی الزامی است.
- اگر برای جواب دادن به سوال نیاز به پیش‌فرضی دارید، فرض خود را صریحاً بنویسید و با فرض خود به ارائه جواب بپردازید.
- توجه کنید هرگونه عدم خوانایی و نامرتبی در برگه‌ی شما کسر نمره به همراه خواهد داشت.
- به هیچ وجه پاسخ خود را در اختیار کسی قرار ندهید. در صورت مشاهده تقلب، نمره هردو طرف صفر منظور خواهد شد.

#### سوال اول: [۲۰ نمره]

برای مسئله‌ی زیر الگوریتمی با پیچیدگی زمانی حداکثر  $O(n^2)$  ارائه دهید. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

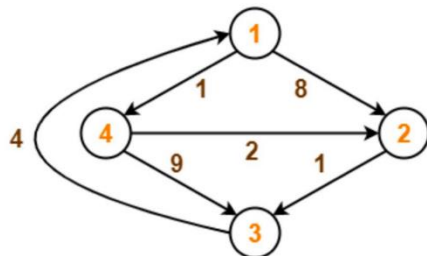
ورودی: گراف بدون جهت  $G = (V, E, L)$  به شما داده می‌شود. در این گراف داریم:  $L_e = \text{اندازه یال}$   $L_e > 0; e \in E$

خروجی: اندازه‌ی کوتاه‌ترین دور شامل یال  $e$  را به دست آورید.

#### سوال دوم: [۲۵ نمره]

گراف جهت‌دار زیر را در نظر بگیرید. با استفاده از الگوریتم فلوید-وارشال، کوتاه‌ترین مسیر بین هر جفت رئوس را پیدا کنید.

روند اجرای الگوریتم را به طوری که قابل فهم باشد، مرحله به مرحله نشان دهید.



### سوال سوم: [۳۰ نمره]

در هر کدام از موارد زیر پاسخ صحیح را انتخاب کنید و برای درستی پاسخ خود خود دلایل کافی ارائه دهید.

(آ) گراف جهت‌دار  $G = (V, E, L)$  را در نظر بگیرید. علی قصد دارد برای محاسبه‌ی کوتاه‌ترین مسیر از راس  $s$  به راس  $t$ ، بدون توجه به حضور یا عدم حضور یال‌هایی با وزن منفی، همواره از الگوریتم Dijkstra استفاده کند. علی برای این کار، ایده‌ی زیر را مطرح می‌کند:

برای محاسبه‌ی کوتاه‌ترین مسیر، ابتدا عدد ثابت بسیار بزرگی به وزن تمام یال‌ها اضافه کرده تا همیشه مطمئن باشیم وزن تمام یال‌ها مثبت هستند و در نهایت با خیال راحت، الگوریتم Dijkstra را اجرا کرده تا مسیر موردنظر به دست آید.

آیا راه حل علی درست است؟ توضیح دهید.

۱- بله                      ۲- خیر

(ب) در گرافی بی‌وزن و بدون جهت، برای محاسبه‌ی کوتاه‌ترین مسیر از راس  $s$  به باقی راس‌های گراف بهینه‌ترین روش ممکن از لحاظ پیچیدگی زمانی کدام است؟ توضیح دهید.

۱- الگوریتم Dijkstra با شروع از راس  $s$                       ۲- الگوریتم Floyd-Warshall

۳- الگوریتم DFS با شروع از راس  $s$                       ۴- الگوریتم BFS با شروع از راس  $s$

(پ) اگر به خاطر داشته باشید، عملیات RELAX در الگوریتم Bellman-Ford به این صورت انجام می‌شود:

```
RELAX(u, v, w)
1 if v.d > u.d + w(u,v)
2   v.d = u.d + w(u,v)
3   v.π = u
```

اگر شرط بروزرسانی مقادیر  $d$  و  $\pi$  را به صورت زیر تعریف کنیم، مشکلی در محاسبه‌ی کوتاه‌ترین مسیر پیش خواهد آمد؟

```
RELAX(u, v, w)
1 if v.d >= u.d + w(u,v)
2   v.d = u.d + w(u,v)
3   v.π = u
```

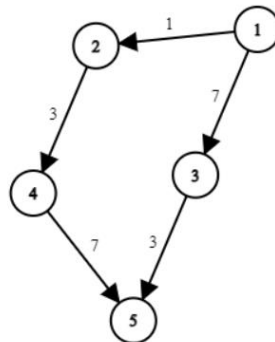
۱- بله                      ۲- خیر

اگر پاسخ شما بله است، سناریویی برای گراف مدنظر خودتان (با هرگونه فرضیاتی) تعریف کنید که انجام چنین کاری باعث مشکل در محاسبه‌ی کوتاه‌ترین مسیر در گراف می‌شود.

### سوال چهارم: [۲۵ نمره]

الگوریتمی برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر Monotonic از راس  $s$  به دیگر راس‌های گراف جهت‌دار و وزن‌دار  $G = (V, E, L)$  با پیچیدگی زمانی حداکثر  $O(E \log V)$  ارائه دهید. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

مسیری Monotonic است که اندازه‌ی وزن‌های تمامی یال‌های مسیر یا کاملاً در حال افزایش باشند یا کاملاً در حال کاهش باشند.



برای مثال در شکل بالا، مسیر  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$  مسیر Monotonic به صورت کاهشی است و مسیر  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  مسیر Monotonic به صورت افزایشی است. اندازه‌ی کوتاه‌ترین مسیر Monotonic بین دو راس ۱ و ۵ برابر با ۱۰ (مسیر  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ ) است.

موفق باشید.