



دانشکده مهندسی کامپیوتر

دکتر مرضیه ملکی مجد

بهار ۱۴۰۱

تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین سری چهارم

تاریخ تحویل: ۱۹ اردیبهشت ۱۴۰۰ ساعت ۵۹:۵۹:۲۳

محمدامین قسوری - محمدحسین قفقازیان

قوانین:

- سؤالات تئوری نیاز به **اثبات درستی** و **تحلیل زمان اجرا** دارد.
- برای سؤالات تئوری باید تصویر مناسبی از جواب سؤال در کوئرا آپلود کنید.
- پاسخ سؤالات تئوری باید با خودکار **آبی** (و یا رنگ‌های دیگری که در تصویر کم‌رنگ نباشند مانند **مشکی**) و ترجیحاً بر روی برگه‌ی **A4** باشد. (استفاده از برگه‌های خط‌دار که خط‌های آن از نوشته شما پررنگ‌تر نباشد و نوشته‌های پشت برگه بر روی برگه اثر نگذارد، مانعی ندارد.) همچنین امکان تحویل پاسخ سؤالات به صورت تایپ شده وجود دارد.
- بخش‌های مختلف سؤال را جداگانه بنویسید و مشخص کنید هر قسمت در راستای پاسخ به کدام قسمت است.
- راه حل خود را تمیز و با خط خوانا بنویسید، هرگونه مشکل که منجر به ناخوانا بودن جواب شود **کسر نمره** به همراه دارد.
- در سؤالات تئوری می‌توانید با استفاده از شبه کد، جواب خود را توضیح بدهید ولی نوشتن کد یا شبه کد به تنهایی نمره‌ای ندارد.
- در سؤالات عملی، توضیحات دقیق‌تر در مورد نحوه‌ی ورودی و خروجی داخل کوئرا داده شده است.
- برای پاسخ‌های خود اثبات قانع‌کننده ارائه دهید. (به طور مثال اگر مرتبه زمانی برای یک سؤال می‌نویسید، درستی آن را نیز اثبات نمایید.)
- هرگونه ایده گرفتن از تمرین دیگران و کدهای موجود در اینترنت که موجب تشابه بالای کد شما با دیگری شود، تقلب محسوب می‌شود و نمره‌ی منفی برای شما منظور خواهد شد.
- راه حل سؤال‌های تئوری را به طور مختصر و دقیق توضیح دهید. توضیحات بی مورد و همچنین عدم توضیح (برای یک قسمت از سؤال) هر دو کسر نمره دارد.
- برای ارسال هر سری تمرین با تاخیر **تا ۷۲ ساعت** فرصت دارید و پس از آن، کوئرا بسته خواهد شد و تمرینی از شما پذیرفته نخواهد شد.
- در طول ترم **تا ۱۶۸ ساعت (۷ روز کامل)** تاخیر مجاز خواهد بود که به صورت ساعتی محاسبه خواهد شد. در صورتی که تعداد ساعات مجاز تاخیر را رد کنید، **نمره‌ی صفر** برای تمرین شما منظور خواهد شد.
- با توجه به مکانیزم تاخیر در نظر گرفته شده و فشرده بودن برنامه ترم، **به هیچ عنوان امکان تمدید نخواهد بود.**

درمورد این سری تمرین به نکات زیر توجه داشته باشید:

- مبحث اصلی این تمرین، الگوریتم‌های MST (Prim و Kruskal) می‌باشد و از شما انتظار می‌رود برای پاسخ به سوالات، راه‌حل‌های مرتبط با این مبحث را ارائه دهید.
- توجه داشته باشید که در این سری تمرین باید، به سوالات اول و دوم تنها به صورت تئوری و به سوالات سوم تا پنجم تنها به صورت عملی پاسخ دهید.
- پیاده‌سازی الگوریتم سوال‌های ۳ تا ۵ باید با یکی از زبان‌های مجاز در کوئرا باشد.
- بارم این سری تمرین از ۱۰۵ محاسبه می‌شود که ۵ نمره آن امتیازی محسوب خواهد شد.
- فایل پاسخ تئوری تمرین خود را به صورت **شماره‌ی دانشجویی_نام و نام خانوادگی_HW4** نام‌گذاری کرده و ارسال کنید. (برای مثال HW4_NameFamily_99000000). دقت کنید درغیراین صورت، تمرین شما تصحیح نخواهد شد.

سوال اول (۲۰ نمره)

ثابت کنید اگر وزن‌های مربوط به یال‌های درخت G متمایز باشند، درخت G حتماً یک درخت فراگیر کمینه (MST) منحصر به فرد دارد.

سوال دوم (۲۰ نمره)

فرض کنید گراف G و درخت فراگیر کمینه‌ی آن (T) را داریم. وزن یکی از یال‌های گراف G را کم می‌کنیم تا گراف G' به دست آید.

الگوریتمی ارائه دهید که درخت فراگیر کمینه را در گراف G' پیدا کند. دقت کنید با توجه به اینکه اطلاعات درخت پوشای کمینه در گراف اولیه (G) را داریم، باید در زمانی کمتر از الگوریتم‌های معروف MST پاسخ را پیدا کنید.

(راهنمایی: این کار در زمان $O(V + E)$ امکان‌پذیر است.)

سوال سوم (۲۰ نمره)

در کشور تازه تاسیس کوروش توپیا n شهر وجود دارد. همان‌طور که می‌دانید، در هر کشور نیاز است جاده‌هایی برای جابجایی از هر شهر به هر شهر دیگر وجود داشته باشند. به همین خاطر، «کینگ کوروش» به فکر ساخت تعدادی جاده بین شهرها افتاده است. تعدادی از شهرها از قبل به همدیگر راه داشته‌اند و بین بعضی شهرها نمی‌توان جاده‌ای احداث کرد. هزینه‌ی ساخت جاده‌های ممکن برآورد شده است.

حال کینگ کوروش از شما، به عنوان یکی از شهروندان وفادار کوروش توپیا، می‌خواهد در این وضعیت نامناسب اقتصادی هزینه‌ی ساخت جاده‌ها را به حداقل برسانید.

نکته مهم: تمامی جاده‌ها (چه ساخته شده و چه قابل ساخت) دوطرفه هستند و ترتیب شهر مبدا و مقصد فرقی ندارد.

سوال چهارم (۲۵ نمره)

عده‌ای از مخالفان کوروش تویای کبیر، هر ماه اقدام به راهزنی کرده و طلا و نقره‌ی کاروان‌هایی که از یک شهر به شهر دیگر می‌روند را غارت می‌کنند. (می‌توانیم طوقه داشته باشیم یا بین دو شهر چند مسیر وجود داشته باشد). این مشکل، سیستم کشور را مختل کرده است. سردسته‌ی این راهزنها، از این موضوع که هر ماه باید راهزنی کند، خسته شده است. به همین علت، پیشنهادی به پادشاه کوروش تویا می‌دهد.

سردسته‌ی راهزنها برای هر جاده‌ی موجود در نقشه یک g_i و یک s_i مشخص کرده است و قول داده است اگر هر ماه به میزان g_e طلا و s_e نقره از طرف حکومت دریافت کند، به هیچ کدام از مسیرهایی که $g_i \leq g_e$ و $s_i \leq s_e$ باشد، حمله نخواهد کرد.

مشکل دیگری که وجود دارد، این است که خزانه‌های کوروش تویا فقط «کوروش کوین» دارد و طلا و نقره ندارد. فرض کنید ارزش هر طلا برابر G کوروش کوین و ارزش هر نقره برابر S کوروش کوین است. پادشاه که به فکر حل این مشکل است، قصد دارد با پرداخت کمترین میزان کوروش کوین از هر شهر a به هر شهر b یک مسیر امن برای کاروان وجود داشته باشد.

برنامه‌ای بنویسید که به کینگ کوروش در اجرای درست این روش کمک کند.

سوال پنجم (۲۰ نمره)

فرض کنید در شرکتی مشغول به کار هستید و کار شما آنالیز مختصات شعب متعدد این شرکت در سطح شهر، جهت به دست آوردن بهینه ترین راه ممکن جهت اتصال راه های ارتباطی بین این شعب است. برنامه ای بنویسید که به شما در انجام این کار کمک کند.

در این سوال، مختصات شعب شرکت به عنوان ورودی برنامه به شما داده می شود و شما باید کم هزینه ترین راه ممکن برای اتصال این شعب به یکدیگر را پیدا کنید.

❖ به عنوان نمونه، اگر فرض کنیم مختصات این شعب به صورت زیر باشد:

Points = $\{(0,0), (1,2), (3,8), (5,2), (7,0)\}$

هزینه اتصال هر دو شعبه به یکدیگر برابر با Manhattan Distance بین آنهاست که از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$(X_i, Y_i), (X_j, Y_j) \Rightarrow \text{Cost} = |X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$$

این نقاط وقتی کاملاً به هم وصل هستند که از هر راس، راهی برای رسیدن به هر راس دیگر وجود داشته باشد.

توجه: لزومی به وجود یال مستقیم بین هر دو راس وجود ندارد. اما باید الزاماً از هر راس، راهی برای رسیدن به هر راس دیگر وجود داشته باشد.

موفق باشید.