



دانشکده مهندسی کامپیوتر

دکتر مرضیه ملکی مجد

بهار ۱۴۰۱

---

تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها

تمرین سری پنجم

تاریخ تحویل: ۱ خرداد ۱۴۰۱ ساعت ۲۳:۵۹:۵۹

هانا کریمان - رامتین احسانی

---

## قوانین:

- سؤالات تئوری نیاز به **اثبات درستی** و **تحلیل زمان اجرا** دارد.
- برای سؤالات تئوری باید تصویر مناسبی از جواب سؤال در کوئرا آپلود کنید.
- پاسخ سؤالات تئوری باید با خودکار **آبی** (و یا رنگ‌های دیگری که در تصویر کم‌رنگ نباشند مانند **مشکی**) و ترجیحاً بر روی برگه‌ی **A4** باشد. (استفاده از برگه‌های خط‌دار که خط‌های آن از نوشته شما پررنگ‌تر نباشد و نوشته‌های پشت برگه بر روی برگه اثر نگذارد، مانعی ندارد.) همچنین امکان تحویل پاسخ سؤالات به صورت تایپ‌شده وجود دارد.
- بخش‌های مختلف سؤال را جداگانه بنویسید و مشخص کنید هر قسمت در راستای پاسخ به کدام قسمت است.
- راه حل خود را تمیز و با خط خوانا بنویسید، هرگونه مشکل که منجر به ناخوانا بودن جواب شود **کسر نمره** به همراه دارد.
- در سؤالات تئوری می‌توانید با استفاده از شبه کد، جواب خود را توضیح بدهید ولی نوشتن کد یا شبه کد به تنهایی نمره‌ای ندارد.
- در سؤالات عملی، توضیحات دقیق‌تر در مورد نحوه‌ی ورودی و خروجی داخل کوئرا داده شده است.
- برای پاسخ‌های خود اثبات قانع‌کننده ارائه دهید. (به طور مثال اگر مرتبه زمانی برای یک سؤال می‌نویسید، درستی آن را نیز اثبات نمایید.)
- هرگونه ایده گرفتن از تمرین دیگران و کدهای موجود در اینترنت که موجب تشابه بالای کد شما با دیگری شود، تقلب محسوب می‌شود و نمره‌ی منفی برای شما منظور خواهد شد.
- راه حل سؤال‌های تئوری را به طور مختصر و دقیق توضیح دهید. توضیحات بی مورد و همچنین عدم توضیح (برای یک قسمت از سؤال) هر دو کسر نمره دارد.
- برای ارسال هر سری تمرین با تاخیر **تا ۱۲۰ ساعت** فرصت دارید و پس از آن، کوئرا بسته خواهد شد و تمرینی از شما پذیرفته نخواهد شد.
- در طول ترم **تا ۲۴۰ ساعت (۱۰ روز کامل)** تاخیر مجاز خواهد بود که به صورت ساعتی محاسبه خواهد شد. در صورتی که تعداد ساعات مجاز تاخیر را رد کنید، **نمره‌ی صفر** برای تمرین شما منظور خواهد شد.
- با توجه به مکانیزم تاخیر در نظر گرفته شده و فشرده بودن برنامه ترم، **به هیچ عنوان امکان تمدید نخواهد بود.**

## درمورد این سری تمرین به نکات زیر توجه داشته باشید:

مبحث اصلی این تمرین، الگوریتم‌های کوتاه‌ترین مسیر (Shortest Path) می‌باشد و از شما انتظار می‌رود برای پاسخ به سوالات، راه‌حل‌های مرتبط با این مبحث را ارائه دهید.

توجه داشته باشید که در این سری تمرین باید، به سوالات اول تا سوم تنها به صورت تئوری و به سوالات چهارم تا ششم تنها به صورت عملی پاسخ دهید.

پیاده سازی الگوریتم سوال‌های ۴ تا ۶ باید با یکی از زبان‌های مجاز در کوئرا باشد.

فایل پاسخ تئوری تمرین خود را به صورت **شماره‌ی دانشجویی\_نام و نام خانوادگی\_HW5** نام‌گذاری کرده و ارسال کنید. (برای مثال HW5\_NameFamily\_98000000). دقت کنید درغیراین صورت، تمرین شما تصحیح نخواهد شد.

## سوال اول (۱۰ نمره)

فرض کنید گراف وزن دار و جهت دار  $G = (V, E)$  یک دور منفی (Negative Weight Cycle) دارد. الگوریتم بهینه‌ای ارائه دهید که رئوس این دور را پیدا کند. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

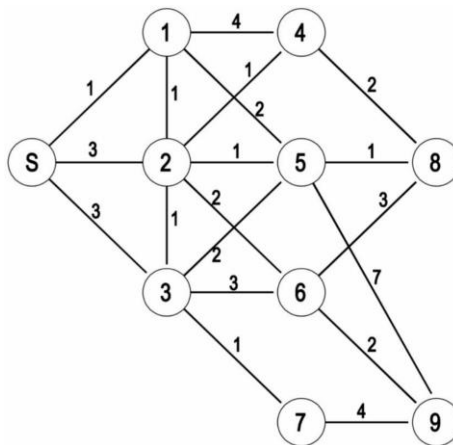
## سوال دوم (۲۰ نمره)

نشان دهید پیاده‌سازی زیر از الگوریتم Floyd-Warshall صحیح است و در مقایسه با نسخه‌ی اصلی، الگوریتم به فضای زمانی  $\Theta(n^2)$  نیاز دارد.

```
FLOYD-WARSHALL' (W)
1  n = W.rows
2  D = W
3  for k = 1 to n
4      for i = 1 to n
5          for j = 1 to n
6               $d_{ij} = \min(d_{ij}, d_{ik} + d_{kj})$ 
7  return D
```

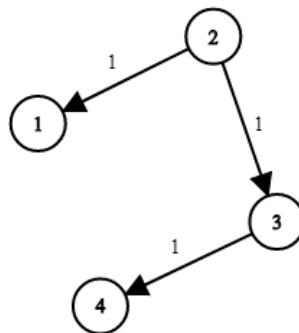
## سوال سوم (۲۰ نمره)

الگوریتم Dijkstra را برای گراف زیر با شروع از گره S اجرا کنید. مقادیر کوتاه‌ترین مسیر از گره S به تمامی گره‌ها را نشان دهید.



## سوال چهارم (۲۰ نمره)

فرض کنید دکل‌های مخابراتی در سرتاسر شهر قرار دارند. این دکل‌ها به صورتی در سطح شهر پخش شده‌اند که تشکیل یک گراف داده‌اند. فرض کنید این دکل‌ها با اعداد ۱ تا  $n$  نام‌گذاری می‌شوند و وضعیت ارتباطی آن‌ها در قالبی به شما داده می‌شود. همچنین یال‌های بین این دکل‌ها نشان‌دهنده‌ی زمان لازم برای ارسال سیگنال بین هر دو دکل است.



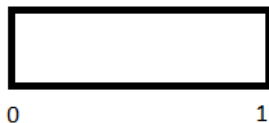
همانطور که در گراف بالا مشخص است، در این شهر ۴ دکل داریم و زمان لازم برای ارسال سیگنال از دکل شماره ۲ به ۱ برابر ۱ ثانیه است.

مدیر این دکل‌های مخابراتی قصد دارد سیستمی طراحی کند که با بروزرسانی نرم‌افزار مربوط به یکی از دکل‌ها، تمامی دکل‌های سطح شهر در کمترین زمان ممکن بروزرسانی شوند. درواقع با ارسال سیگنال بروزرسانی به دکل شماره  $k$ ، این دکل سیگنال بروزرسانی را باید به سایر دکل‌ها در کمترین زمان ممکن ارسال کند. دکل  $k$  باید کوتاه‌ترین مسیرها (از نظر زمانی) را برای ارسال سیگنال به باقی دکل‌ها انتخاب کند.

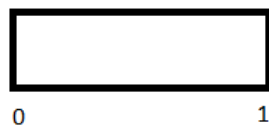
شما در این سوال وظیفه‌ی پیاده‌سازی این سیستم را بر عهده دارید. به عنوان ورودی، به شما وضعیت قرارگیری دکل‌ها داده می‌شود و از شما انتظار می‌رود به عنوان خروجی، سیستم مربوطه کمترین زمان لازم برای ارسال سیگنال بروزرسانی به تمامی دکل‌ها را محاسبه کند.

برای مثال، در شکل بالا فرض کنید سیگنال بروزرسانی به دکل شماره ۲ داده می‌شود.

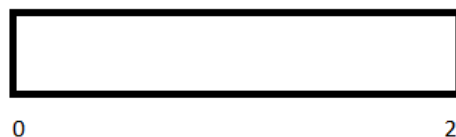
این دکل می‌تواند سیگنال را در زمان ۱ ثانیه برای دکل شماره ۱، در ۱ ثانیه برای دکل شماره ۳ و در ۲ ثانیه برای دکل شماره ۴ ارسال کند.



زمان لازم برای رسیدن سیگنال به دکل شماره ۱



زمان لازم برای رسیدن سیگنال به دکل شماره ۳



زمان لازم برای رسیدن سیگنال به دکل شماره ۴

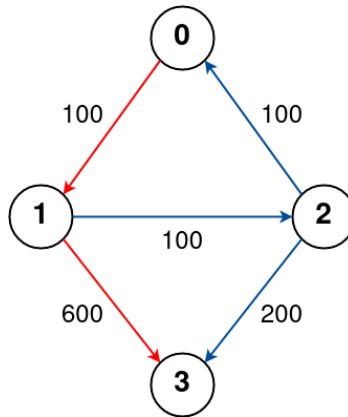
پس کل زمان لازم برای ارسال سیگنال بروزرسانی در این شبکه برابر با ۲ ثانیه است. توجه داشته باشید که ارسال سیگنال به دکل‌ها به صورت هم‌زمان صورت می‌گیرد.

## سوال پنجم (۲۰ نمره)

فرض کنید شما در شرکت «الی گشت» مشغول به کار شده‌اید. به عنوان اولین وظیفه، از شما درخواست شده است سیستمی پیاده‌سازی کنید که کمترین قیمت بلیط را برای سفر از شهر Source به Destination برای مسافران با توجه به میزان حداکثری توقف بین شهری محاسبه کند.

مسافران حداکثر توقف بین شهرهای Source و Destination را در این سیستم مشخص می‌کنند.

نحوه‌ی کارکرد این سیستم این گونه است که به عنوان ورودی، گرافی از شهرهای نزدیک به شهرهای Source و Destination (به عنوان رئوس گراف) و میزان قیمت بلیط بین هر دو شهر (به عنوان یال‌های بین شهرها) به شما داده می‌شود. به عنوان خروجی، سیستم شما باید کم‌هزینه‌ترین راه ممکن را برای رسیدن به مقصد محاسبه کند.



به عنوان مثال شکل بالا را در نظر بگیرید. فرض کنید مسافر مورد نظر درخواست حداکثر ۱ توقف بین شهر مبدا و مقصد داده است و قصد دارد از شهر ۰ به شهر ۳ برود.

برای رفتن از شهر ۰ به شهر ۳، با حداکثر ۱ توقف بین شهری، کم‌هزینه‌ترین راه ممکن برابر ۷۰۰ است. یعنی از شهر ۰ به شهر ۱ برویم و از آنجا به شهر ۳ سفر کنیم. (مسیر مشخص شده با رنگ قرمز در شکل)

## سوال ششم (۱۰ نمره)



فرض کنید آرایه‌ای  $N$  عضوی از اعداد صحیح مثبت به نام  $arr$  به همراه یک عدد صحیح مثبت  $K$  را داریم.

اگر  $i$  شماره‌ی (index) یک خانه از آرایه باشد، برای بازدید خانه‌های اطراف این خانه با شماره‌ی (index)  $j$  باید شرط  $j \leq i + k$  برقرار باشد.

هزینه‌ی رسیدن از خانه  $i$  به خانه  $j$  برابر است با:

$$\text{path\_cost\_from\_i\_to\_j} = |arr[i] - arr[j]| \quad \text{قدرمطلق تفاضل}$$

الگوریتمی ارائه دهید که کمترین مقدار هزینه ممکن برای رسیدن از خانه با شماره‌ی  $0$  به خانه با شماره‌ی  $N-1$  (آخرین عضو آرایه) را محاسبه کند.

موفق باشید.