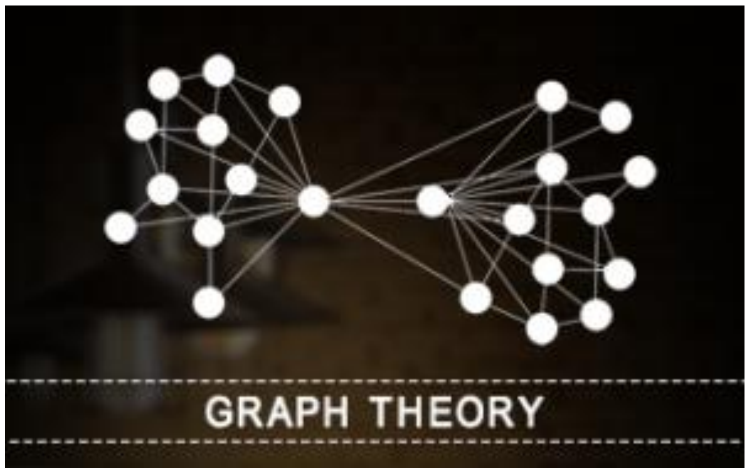
بسم الله الرحمن الرحیم



درس: نظریه گراف

98411432

تمرین سری سوم

پاییز 1402

سوال1)

گراف پترسون، گرافی با 10 راس و 15 یال است . برای نشان دادن آنکه گراف مدنظرمان، درون همیلتونی است، باید با حذف هر راس دلخواه، گراق حاصل همیلتونی باشد. این گراف با توجه به رئوس آن به دو مجموعه قسمت می شود که مجموعه رئوس a={1,2,3,4,5} (تشکیل دهنده 5 ضلعی اصلی) و مجموعه دیگر که در نقاط میانی اند و شامل b={6,7,8,9,10} تشکیل می شود. یال ها هر راس از مجموعه اول را به رئوس متناظر در مجموعه دوم وصل نموده وهمچنین هر راس از مجموعه اول را به همسایه های آن در مجموعه خودش وصل می کند. حال برای این دو حالت با حذف راس دلخواه از هرکدام بررسی می نماییم:

حالت اول) اگر یک راس از مجموعه اول حذف شود:

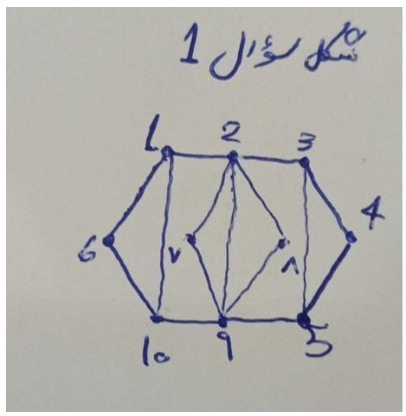
با حذف یک راس از مجموعه A، یک زیرگراف باقی می‌ماند که شامل تمام راس‌های هر دو مجموعه A و B به جز راس حذف شده است. در این حالت، گراف باقیمانده همچنان شامل پنج ضلعی و رئوس مربوطه از مجموعه B است. نمودار باقیمانده از یک چرخه همیلتونی تشکیل شده است که توسط رئوس پنج ضلعی اصلی و رئوس مربوط به آنها از مجموعه B تشکیل شده است.

حالت دوم) اگر یک راس از مجموعه B (نقاط میانی یال ها) حذف شود:

با حذف یک راس از مجموعه B یک زیرگراف باقی می ماند که در آن پنج ضلعی اصلی دست نخورده باقی می ماند اما ممکن است اتصالات خود را با برخی از رئوس در مجموعه B از دست بدهد. اما، از آنجایی که هر راس در مجموعه A (پنج ضلعی) به تمام رئوس مجموعه B و به رئوس مجاور آن در مجموعه A متصل است، نمودار باقی

مانده همچنان شامل یک چرخه همیلتونی خواهد بود که توسط پنج ضلعی اصلی تشکیل شده است.

بنابراین، در هر دو مورد، حذف هر رأسی از گراف پترسن منجر به زیرگرافی می شود که حاوی یک چرخه همیلتونی است. این نشان می‌دهد که گراف پترسن در واقع درون همیلتونی است، زیرا حذف هر رأسی یک چرخه همیلتونی را در گراف باقی‌مانده باقی می‌گذارد.



سوال 2)

الف)

اگر G یک گراف 2-connected نباشد، به این معنی است که یک راس وجود دارد که حذف آن گراف را غیرمتصل می کند. یک گراف همیلتونی، طبق تعریف، حتی پس از حذف هر رأس، متصل باقی می ماند. اگر G گراف 2-connected نباشد، حذف یک راس می‌تواند گراف را قطع کند و امکان ایجاد چرخه همیلتونی را از بین میبرد. زیرا یک چرخه همیلتونی دقیقاً یک بار از هر راس بازدید می‌کند و بدون غیرمتصل و قطع شدن به راس شروع باز می‌گردد.

مثال، چرخه ای از رئوس را در نظر می گیریم که در آن حذف هر رأسی باعث قطع ارتباط در گراف می شود. حذف هر رأسی در چنین فرمتی چرخه را شکسته و منجر به یک گراف unconnected می شود و ثابت می کند که نمی تواند همیلتونی باشد.

ب)

غیرممکن است که این نمودار دارای یک چرخه همیلتونی باشد. در یک نمودار دو بخشی با اجزای نابرابر، هیچ چرخه همیلتونی نمی تواند وجود داشته باشد زیرا چرخه باید بین راس های X و Y به طور متناوب تغییر کند. با این حال، به دلیل اندازه نابرابر قسمت ها، تشکیل چرخه ای که شامل همه رئوس باشد، بدون بازدید مجدد یک راس غیرممکن است.

به عنوان مثال، اگر یک قسمت دارای رئوس بیشتری نسبت به دیگری باشد، در قسمت کوچکتر رئوس کافی برای تکمیل چرخه بدون بررسی مجدد برخی از رئوس وجود نخواهد داشت. بنابراین، یک گراف دوبخشی با قطعات نابرابر نمی تواند همیلتونی باشد.

سوال3)

با توجه به یک نمودار دوبخشی کامل $k_{5,5}$ که در آن رئوس یک مجموعه قرمز رنگ و رئوس مجموعه دیگر آبی رنگ فرض می شوند(دو مجموعه جدا از هم) می‌خواهیم ثابت کنیم که همیشه حداقل یک زیر گراف تک رنگ از $k_{2,2}$ وجود خواهد داشت.

رئوس یک گروه را در نظر گرفته، (مثال قرمز). طبق اصل لانه کبوتری، باید حداقل یک رنگ (قرمز یا آبی) وجود داشته باشد که حداقل 3 بار در میان یالهای متصل کننده این رئوس قرمز به رئوس آبی وجود داشته باشد.

فرض می کنیم که رنگ قرمز حداقل 3 بار در بین این یال ها ظاهر شود. از بین این سه یال قرمز، رئوس (a, b, c) در سمت قرمز را در نظر می گیریم. حال، در میان یالهایی که این سه راس قرمز (a, b, c) را به سمت آبی وصل می‌کنند، باید حداقل یک جفت رئوس وجود داشته باشد که به دلیل لانه کبوتری، یک رنگ (یا قرمز یا آبی) داشته باشند. فرض می کنیم (ab) و (bc) هر دو یال قرمز هستند.

بنابراین، (a - b) و (b - c) را به عنوان یال های قرمز داریم. اگر (a - c) یک یال قرمز نیز باشد، یک زیرگراف قرمز $k_{2,2}$ داریم (a,c قرمز و b,c آبی). اگر (a - c) یک یال آبی باشد، آنگاه (a - b - c) یک زیرگراف آبی با a,c در قسمت قرمز وb,c در قسمت آبی می باشد.)

بنابراین، در هر رنگ آمیزی $k_{5,5}$ با دو رنگ، همیشه حداقل یک زیرگراف تک رنگ $k_{2,2}$ وجود خواهد داشت.

سوال4)

از اصل لانه کبوتری برای نشان دادن این موضوع استفاده میکنیم بدان گونه که:

ابتدا هر رأسی را در گراف کامل در نظر و طبق اصل لانه کبوتری، باید حداقل (k + 1) یال همرنگ به این راس وجود داشته باشد. بدون از دست دادن کلیت کار، فرض شد این (k + 1) یال قرمز هستند. حال از میان رئوس متصل به راس اولیه از طریق یال های قرمز، زیرگراف تشکیل شده توسط این رئوس و اتصالات آنها از طریق یال های قرمز را در نظر میگیریم که این زیرگراف حداقل دارای (k + 1) راس است (از جمله رأس اولیه) می باشد. در این زیرگراف، هر یک از این (k + 1) رئوس از طریق یال های قرمز به رئوس دیگر ارتباط دارند. چون گراف اصلی یک گراف کامل است، هر رأس در این زیرگراف به رأس های دیگر در زیرگراف متصل است. اگر هر رأسی در این زیرگراف

حداقل n یال قرمز داشته باشد (به استثنای راس اولیه)، یک زیردرخت تک رنگ با (n + 1) راس پیدا کرده ایم. در غیر این صورت، هر رأس در زیرگراف حداکثر (n - 1) یال قرمز دارد. تعداد (2k) راس باقیمانده که در این زیرگراف نیستند را در نظر گرفته. همین استدلال را برای این رئوس و اتصالات آنها از طریق یال های قرمز درنظر میگیریم. اگر هر یک از این رئوس باقیمانده یک زیرگراف قرمز با (n) یال تشکیل دهد، زیردرخت تک رنگ دیگری با (n + 1) راس پیدا کرده ایم. اگر نه، هر یک از این رئوس باقیمانده حداکثر (n - 1) یال قرمز دارند که به آن برخورد می کنند.

زیرگراف اول (با حداقل (k + 1) راس و رئوس باقی مانده را برای ایجاد یک زیرگراف بزرگتر ترکیب شده که حداقل 2(k+1) راس دارد که حداقل (k + 1) حداکثر (n - 1) یال قرمز دارند که به آنها برخورد می کند. تعداد کل لبه های قرمز بین رئوس در زیرگراف ترکیبی را فرض نموده که حداقل:

(k + 1) (گراف فرعی اولیه) + (k + 1) (رئوس باقیمانده) = 2k+2 است.

البته حداکثر تعداد یال های قرمزی که می تواند در زیرگراف ترکیبی باشد n*(2k+1) است که برای هر یک از n*(2k+1) یال است. رئوس، مجموع n*(2k+1) هست.

چون که 2k+2>n*(2k+1)، باید حداقل یک رنگ (قرمز، در این مورد) وجود داشته باشد که حداقل (n + 1) بار در زیرگراف ترکیبی ظاهر شود. پس، یک زیردرخت تک رنگ با رئوس (n + 1) در نمودار کامل با رئوس 2k+1 و یال های رنگی با 3 رنگ وجود دارد.

سوال5)

در گراف Kn (گراف کامل با n رأس)، وقتی که لبه‌ها را با (n - 1) رنگ رنگ آمیزی کنیم، هر رأس به n - 1 یال متصل خواهد شد که هر یک، از رنگ‌های مختلفی تشکیل شده اند. برای بیشینه کردن تعداد رئوسی که به عنوان کمان‌های رنگی محسوب می‌شوند، باید تعداد حداکثری از رئوس دارای n - 1 یال با رنگ‌های متفاوت باشند.

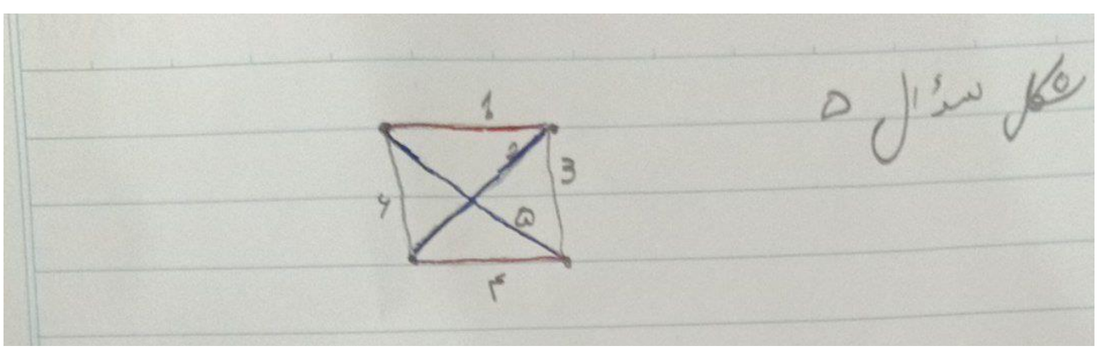
در این حالت، به عنوان مثال، تعداد رئوسی که می‌توانند کمان‌های رنگی باشند را بررسی می‌کنیم:

برای هر رأس، می‌توانید n - 1 یال داشته باشید که هرکدام از رنگ‌های مختلفی باشند، که نتیجه می‌دهد n - 1 کمان رنگی برای هر رأس داریم.

بنابراین، در یک گراف Kn که لبه‌هایش با n - 1 رنگ، رنگ شده باشند، تمام n رأس می‌توانند به عنوان کمان‌های رنگی محسوب شوند.

برای رنگ‌آمیزی لبه‌ها:

- به هر یال یک رنگ منحصر به فرد اختصاص داده، به طوری که هیچ دو یالی که به یک رأس متصل هستند، رنگ یکسانی نداشته باشند. در مثال پایین ، با 4 راس این کار را انجام داده ایم که 3 رنگ را شامل می شود. این الگو رنگ آمیزی می تواند به تام گراف های n راسی کامل تعمیم داده شود.



سوال6)

نموداری متشکل از n راس را در نظر بگیرید که در یک خط یا مسیر مرتب شده اند.برای n=2، گراف دو رأس دارد که با یک یال به هم متصل می شوند و برای n=3، گراف شامل 3 راس در یک خط اند که مسیرش با دو یال بهم متصل اند. برایn>3 ، هم ما همین فرمت مسیر مستثیم را در نظر گرفته و یال و راس بدان می افزاییم.در این ساختار همانطور که در پایین مشخص است، هیچ سه راسی توسطط یال ها به هم متصل نیستند تا مثلثی تشکیل شود . هر راس دقیقا به دو راس دیگر متصل شده اند (بجز نقلاط انتهایی n>2) ، و ساختار یک مسیر ساده را حفظ می کند. بنابراین، برای هر n، گراف ساخته شده به عنوان یک خط یا مسیر با n راس هیچ مثلثی نخواهد داشت.