پاسخ تمرین سری سوم سیگنال : سری فوریه

1- اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x[n]$ داده شده است:

- $x[n]$ حقیقی و زوج
- دوره تناوب $x[n]$ برابر $N=10$ و ضرایب سری فوریه آن a_k و $a_{11}=5$
- $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50$

نشان دهید $x[n]=A\cos(Bn+C)$ بوده و مقادیر عددی ثابت های A، B و C را بدست آورید.

پاسخ:

$x[n]$ حقیقی و زوج $\longrightarrow a_k^* = a_{-k} \quad \& \quad a_{-k}=a_k$

$\Rightarrow a_{-11}=a_{11}=5$

$N=10 \longrightarrow a_1=a_{1+10}=a_{11}=5 \quad , \quad a_9=a_{9-2\times10}=a_{-11}=5$

رابطه پارسوال : $\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2 \Longrightarrow \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50=\sum_{k=0}^{9}|a_k|^2$

$$\longrightarrow \underbrace{|a_1|^2}_{25}+\underbrace{|a_9|^2}_{25}+\underbrace{\left[|a_0|^2+|a_2|^2+\dots+|a_8|^2\right]}_{0}=50$$

$\longrightarrow a_0=a_2=\dots=a_8=0$

$\omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{\pi}{5} \longrightarrow x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=0}^{9}a_k e^{jk\frac{\pi}{5}n}$

$$\longrightarrow x[n]=a_1 e^{j\frac{\pi}{5}n}+a_9 e^{j9\frac{\pi}{5}n}=5e^{j\frac{\pi}{5}n}+5\underbrace{e^{j\frac{9\pi}{5}n}}$$

$e^{j\frac{9\pi}{5}n}=e^{-j\frac{\pi}{5}n}\times e^{j\frac{10\pi}{5}n}$

$$\rightarrow e^{j9\frac{\pi}{5}n} = e^{-j\frac{\pi}{5}n} \times e^{j2\pi n} = e^{-j\frac{\pi}{5}n}$$

$$\rightarrow x[n] = 5\times 2\left[\frac{e^{j\frac{\pi}{5}n} + e^{-j\frac{\pi}{5}n}}{2}\right] = 10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) = A\cos(Bn + C)$$

$$A = 10 \quad , B = \frac{\pi}{5} \quad , C = 0$$

2- یک سیستم LTI پیوسته‌درزمان با پاسخ فرکانسی زیر را درنظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

ورودی این سیستم یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $T=8$ می‌باشد:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le t < 4 \\ -1 & ; \quad 4 \le t \le 8 \end{cases}$$

ضرایب سری فوریه خروجی سیستم $y(t)$ را بیابید.

پاسخ:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{\pi}{4}t}$$

$$\rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_k t} \quad , \quad \omega_k = \frac{k\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{LTI} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t} = a_0 H(j0) + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k \frac{\sin(4\omega_k)}{\omega_k} e^{j\omega_k t} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin(4\omega_k)}{\omega_k} e^{j\omega_k t}$$

مقدار متوسط $x(t)$ برابر صفر است پس $a_0 = 0$ $\left(a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt = 0\right)$

$$\longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k \cancel{\frac{\sin(k\pi)}{\frac{k\pi}{4}}} e^{j\omega_k t} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cancel{\frac{\sin(k\pi)}{\frac{k\pi}{4}}} e^{j\omega_k t}$$

$\rightarrow 0$ $\quad$ $\rightarrow 0$

$\longrightarrow y(t) = 0 \longrightarrow$ تمام ضرایب سری فوریه $y(t)$ صفر خواهد بود.

3- قطار ضربه $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4k]$ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ است و خروجی سیستم عبارت است از $y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$. مقادیر $H(e^{j\frac{k\pi}{2}})$ را به ازای $k = 0, 1, 2, 3$ بیابید.

پاسخ:

$$N = 4 \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{4} \sum_{n=-2}^{1} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{4} \sum_{n=-2}^{1} \delta[0]\, e^{-jk\omega_0 n}$$

$$\rightarrow a_k = \frac{1}{4} \delta[0]\, e^{-jk\omega_0 \times 0} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{4}\right) e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$\longrightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{4}\right) H(e^{jk\frac{\pi}{2}})\, e^{jk\frac{\pi}{2}n} = \left(\frac{1}{4}\right) H(e^{j0})\, e^{j\frac{0\times\pi}{2}n} + \left(\frac{1}{4}\right) H(e^{j\frac{\pi}{2}})\, e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\right) H(e^{j\pi})\, e^{j\pi n} + \left(\frac{1}{4}\right) H(e^{j\frac{3\pi}{2}})\, e^{j\frac{3\pi}{2}n} \quad \boxed{\text{رابطه } I}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفی}} y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{j\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

$$\longrightarrow y[n] = \left(\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}\right) e^{j\frac{5\pi}{2}n} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right) e^{-j\frac{5\pi}{2}n}$$

$$\rightarrow y[n] = \left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)e^{j\frac{5\pi}{2}n}\underbrace{e^{-j2\pi n}}_{1} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)e^{-j\frac{5\pi}{2}n}\underbrace{e^{j4\pi n}}_{1}$$

$$e^{j\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{4\pi}{2}\right)n} = e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

$$e^{-j\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{8\pi}{2}\right)n} = e^{-j\frac{3\pi n}{2}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y[n] = \left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)e^{j\frac{\pi}{2}n} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)e^{-j\frac{3\pi n}{2}} \\ \\ y[n] = \frac{1}{4}H(e^{j0}) + \frac{1}{4}H(e^{j\frac{\pi}{2}})\times j + \frac{1}{4}H(e^{j\pi})e^{j\pi n} + \frac{1}{4}H(e^{j\frac{3\pi}{2}})e^{j\frac{3\pi n}{2}} \end{cases}$$

رابطه I

مقایسه 2 رابطه $\longrightarrow$ $H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 0$ و $H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$

$$H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}} = H^*(e^{j\pi/2})$$

---

4. $x(t)$ را یک سیگنال متناوب با تناوب پایه T و ضرایب سری فوریه a_k فرض کنید. ضرایب سری فوریه سیگنال های زیر را برحسب a_k بیان کنید.

A) $x(t-t_0) + x(t+t_0) \longrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0}a_k + e^{jk\omega_0 t_0}a_k$

$$= 2\cos(k\omega_0 t_0)\, a_k$$

B) $Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \longrightarrow \frac{1}{2}[a_k + a_{-k}]$

C) $Re\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(t)] \longrightarrow \frac{1}{2}[a_k + a^*_{-k}]$

D) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longrightarrow (jk\omega_0)^2 a_k = -(k\omega_0)^2 a_k$

E) $x(3t-1)$

ابتدا ضرایب سری فوریه $x(3t)$ را بدست می‌آوریم. تغییر مقیاس زمانی تنها، تاثیری بر ضرایب سری فوریه ندارد و فقط فرکانس پایه را تغییر می‌دهد. اگر دوره تناوب $x(3t)$ را T_1 و فرکانس پایه آن را w_1 فرض کنیم برای $x(3t)$ می‌توان نوشت:

$$x(3t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi w}{T_1}\right)t} \longrightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{T}{3} \\ w = 3w_0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{for } x(3t-1)} x(3t-1) = x\left(3\left(t-\frac{1}{3}\right)\right) \rightarrow e^{-jkw_1\left(\frac{1}{3}\right)} a_k = e^{-jkw_0} a_k$$

5- یک سیستم LTI گسسته زمان با پاسخ ضربه $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ را در نظر بگیرید. نمایش سری فوریه خروجی $y[n]$ را به ازای ورودی های زیر بیابید.

A) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4k)$

پاسخ فرکانسی سیستم : $H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} e^{-jwn}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} e^{-jwn} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e^{-jwn}$$

$$n \rightarrow -n \qquad\qquad n-1 = n' \rightarrow n = n'+1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e^{jwn} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{-jw(n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}e^{jw}\right)^{n} + \frac{1}{2}e^{-jw} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-jw}\right)^{n}$$

$$\rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} + \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - 1$$

A) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-4k) \longrightarrow N = 4 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$

$$\xrightarrow{\text{for } x[n]} a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{1} \delta[n]\, e^{-jk\left(\frac{\pi}{2}\right)\times 0} = \frac{1}{4}\delta[0] = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{for } y[n]} b_k = H(e^{jk\omega_0})\, a_k = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{jk\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\pi/2}} - 1\right]$$

B) $x[n] = \begin{cases} 1 & ; n = 0, \pm 1 \\ 0 & ; n = \pm 2, \pm 3 \end{cases}$ & $N = 6 \longrightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$$\longrightarrow a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{6}\sum_{n=-3}^{2} x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$\longrightarrow a_k = \frac{1}{6}\left[e^{jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{\pi}{3}\times 0} + e^{-jk\frac{\pi}{3}}\right] = \frac{1}{6}\left[1 + 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

$$\longrightarrow b_k = H(e^{jk\omega_0})\, a_k = \frac{1}{6}\left[1+2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{jk\frac{\pi}{3}}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\frac{\pi}{3}}} - 1\right]$$

6- فرض کنید یک سیگنال متناوب پیوسته درزمان به ورودی یک سیستم LTI اعمال شده است.
نمایش سری فوریه سیگنال به صورت زیر است:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|k|} e^{jk(\frac{\pi}{4})t}$$

که در آن α یک عدد حقیقی بین صفر و یک است. پاسخ فرکانسی سیستم عبارت است از:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & ; |\omega| \leqslant W \\ 0 & ; |\omega| > W \end{cases}$$

W حداقل باید چقدر باشد تا انرژی متوسط در هر دوره تناوب خروجی سیستم حداقل 90% انرژی متوسط در هر دوره تناوب $x(t)$ باشد؟

پاسخ:

توان متوسط $P_{av} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\alpha^{|k|}\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{2|k|}$

$$= -1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{2k} + \sum_{k=-\infty}^{0} \alpha^{-2k} = -1 + 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\alpha^2)^k = -1 + \frac{2}{1-\alpha^2}$$

انرژی متوسط $E_{av} = T_0 P_{av} = T_0\left[\frac{2}{1-\alpha^2} - 1\right]$

به واسطه فیلتر پایین گذر $H(j\omega)$، فقط برخی مولفه های فرکانس پایین در خروجی ظاهر می‌شوند
(مثلا مولفه $k=m$ تا $k=-m$)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(j\tfrac{k\pi}{4}) \times \left(\alpha^{|k|} e^{jk\frac{\pi}{4}t}\right) = \sum_{k=-m}^{m} \alpha^{|k|} e^{jk(\frac{\pi}{4})t}$$

$$P_{av} = \sum_{k=-m}^{m} |a_k|^2 = \sum_{k=-m}^{+m} \alpha^{2|k|} = -1 + \sum_{k=-m}^{0} \alpha^{-2k} + \sum_{k=0}^{m} \alpha^{2k}$$

$$\longrightarrow P_{av} = -1 + 2\sum_{k=0}^{m} (\alpha^2)^k = -1 + 2\,\frac{1-\alpha^{2(m+1)}}{1-\alpha^2}$$

$$\longrightarrow e_{av} = T_0 P_{av} = T_0\left[2 \times \frac{1-\alpha^{2(m+1)}}{1-\alpha^2} - 1\right]$$

$$\frac{e_{av}}{E_{av}} \geqslant 0.9 \longrightarrow \frac{T_0\left[2\,\frac{1-\alpha^{2(m+1)}}{1-\alpha^2} - 1\right]}{T_0\left[\frac{2}{1-\alpha^2} - 1\right]} \geqslant 0.9$$

$$\longrightarrow m \geqslant \frac{1}{2}\log_\alpha\left(\frac{1+\alpha^2}{20}\right) - 1$$

برای بدست آوردن کران w باید توجه کنیم که تمامی مولفه های دارای دامنه های $+m$ و ... و $-m$ باید از فیلتر $H(e^{jw})$ عبور کنند. پس :

$$|w_{max}| = |mw_0| < w \longrightarrow w > \left(\frac{1}{2}\log_\alpha\left(\frac{1+\alpha^2}{20}\right) - 1\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)$$