به نام خدا

محمد عرفان زارع زردینی ۹۸۴۱۱۴۳۲

۱) دوره تناوب $N=10$ پس $a_1 = a_{11} = ۵$

گفته $x[n]$ حقیقی و زوج پس a_k حقیقی و زوج $\Leftarrow a_{-1} = a_1 = ۵$

$$\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2 = ۵۰$$

با پارسوال:

$$\sum_{k=-1}^{8}|a_k|^2 = ۵۰ \qquad \underbrace{|a_{-1}|^2}_{۲۵} + \underbrace{|a_1|^2}_{۲۵} + a_0^2 + \sum_{k=2}^{8}|a_k|^2 = ۵۰$$

منفی

$$\Rightarrow a_0^2 + \sum_{k=2}^{8}|a_k|^2 = 0$$

برای $k = 2, \dots, 8$ ، $a_k = 0$ پس

$$x[n] = \sum a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{k=-1}^{1} a_k e^{j\frac{2\pi}{10}kn} = 5e^{j\frac{2\pi}{10}kn} + 5e^{-j\frac{2\pi}{10}n}$$

$$= 10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

(۲

$x(t)$ ، فرد و حقیقی $\Leftarrow$ a_k فرد و موهومی است $\Leftarrow$ $a_0 = 0$:

$$a_k = \frac{1}{8}\int_0^8 x(t)e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)} dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^4 e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)tk} dt - \frac{1}{8}\int_4^8 e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)tk} dt$$

$$= \frac{1}{jk\pi}\left[1 - e^{-j\pi k}\right] = \begin{cases} 0 & k = 2k' \\ \frac{2}{j\pi k} & k = 2k'+1 \end{cases} \quad (1)$$

وقتی $x(t)$ از یک کانال با پاسخ فرکانسی $H(jw)$ عبور کند، خروجی $y(t)$ می‌شود:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jw_0) e^{jkw_0 t}$$

$$H(jw) = \left(jk\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sin(k\pi)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \qquad \xleftarrow{(1)} w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$$

برای $k = 2k+1$ (k فرد) رابطه برابر صفره $\Leftarrow$ $y(t) = 0$

(۳

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{3} a_k H\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{4}k\right)}\right) e^{jk\left(\frac{2\pi}{4}\right)n}$$

$$y[n] = \frac{1}{4} H(e^{j0}) e^{j0} + \frac{1}{4} H(e^{j(\frac{\pi}{2})}) e^{j(\frac{\pi}{2})} + \frac{1}{4} H(e^{j(\frac{3\pi}{2})}) e^{j(\frac{3\pi}{2})} + \frac{1}{4} H(e^{j(\pi)}) e^{j(\pi)}$$

$$\Rightarrow y[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{4} n + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j(\frac{\pi}{2} n + \frac{\pi}{4})} + \cancel{\frac{1}{2} e^{-j(\frac{\pi}{2} n + \frac{\pi}{4})}} \quad \frac{1}{2} e^{j(\frac{3\pi}{2} n - \frac{\pi}{4})}$$

$$H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 0$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = e^{2j\frac{\pi}{4}} \qquad H(e^{\frac{3j\pi}{2}}) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

۴)

A) $x(t-t_0) + x(t+t_0)$

$x(t-t_0) \overset{\text{FS}}{\longleftrightarrow} b_k = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t-t_0) e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t} dt = \frac{e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t_0}}{T} \int_{(T)} x(\tau) e^{-jk(\frac{2\pi}{T})\tau} d\tau$

$= e^{jk(\frac{2\pi}{T})t_0} a_k$

بطور مشابه : $x(t+t_0) \overset{\text{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = e^{jk(\frac{2\pi}{T})t_0} a_k$

$\xrightarrow{+} d_k = e^{-jk(\frac{2\pi}{T})} a_k + e^{jk(\frac{2\pi}{T})} a_k$

$= 2\cos\left(\frac{2k\pi t_0}{T}\right) a_k$

B) $Ev\{x(t)\} =$

$= \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\}$

$x(-t) \overset{\text{FS}}{\longleftrightarrow} b_k = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(-t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T})} dt$

$= \frac{1}{T}\int_{(T)} x(\tau) e^{jk(\frac{2\pi}{T})\tau} d\tau = a_{-k}$

$Ev\{x(t)\}$ ضرایب : $c_k = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{a_k + a_{-k}}{2}$

c) $Re\{x(t)\}$

$\frac{x(t) + x^*(t)}{2}$ برای $x^*(t)$: $b_k = \frac{1}{T}\int_{(T)} x^*(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t} dt$

مزدوج بگیر $\Rightarrow b_k^* = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t) e^{jk(\frac{2\pi}{T})} dt = a_{-k}$

$\Rightarrow Re\{x(t)$ ضرایب $\} = c_k = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{a_k + a^*_{-k}}{2}$

D) $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$

$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{j(\frac{2\pi}{T})kt}$

مشتق ۲ بار از دو طرف $\Rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} -k^2 \frac{4\pi^2}{T^2} a_k e^{j(\frac{2\pi}{T})kt}$

ضرایب عبارت برابر با $k\frac{4\pi^2}{T^2}$

E) $x(3t-1)$

دوره تناوب ~~[illegible]~~ بیابید

دوره تناوب عبارت با فرض دوره تناوب $x(t)$ برابر T می‌شود $T/3$

ضرایب فوریه $x(3t)$ ، a_k و سپس ضرایب فوریه $x(3t-1)$ می‌شود

$a_k = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(3t-1) e^{-jk(\frac{6\pi}{T})t} = a_k e^{-jk(\frac{6\pi}{T})}$