پاسخ تمرین سری چهارم سیگنال

1- تبدیل فوریه هریک از سیگنال های زیر را حساب کنید.

A) $x(t) = [e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)]u(t) \quad , \quad \alpha > 0$

$$X(\omega) = F\{e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\,u(t)\} = \frac{1}{2\pi} F\{e^{-\alpha t}u(t)\} * F\{\cos(\omega_0 t)\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\alpha + j\omega}\right] * \left[2\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha + j(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{\alpha + j(\omega+\omega_0)}\right] = \frac{\alpha + j\omega}{(\alpha+j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

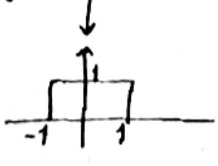
B) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2|n|t}u(t) \longrightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\left[1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} e^{-2|n|t}\right]u(t)\,dt$

$$\longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2nt}u(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n + j\omega}\right]$$

C) $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi t) & ; |t| \leq 1 \\ 0 & ; |t| > 1 \end{cases}$

$$x(t) = [1 + \cos(\pi t)] \times S_p(t) \longrightarrow X(\omega) = F\{S_p(t)(1+\cos(\pi t))\}$$



$$\longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{2\pi} F\{S_p(t)\} * F\{1+\cos(\pi t)\} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right] * F\{1 + \frac{1}{2}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi t}\}$$

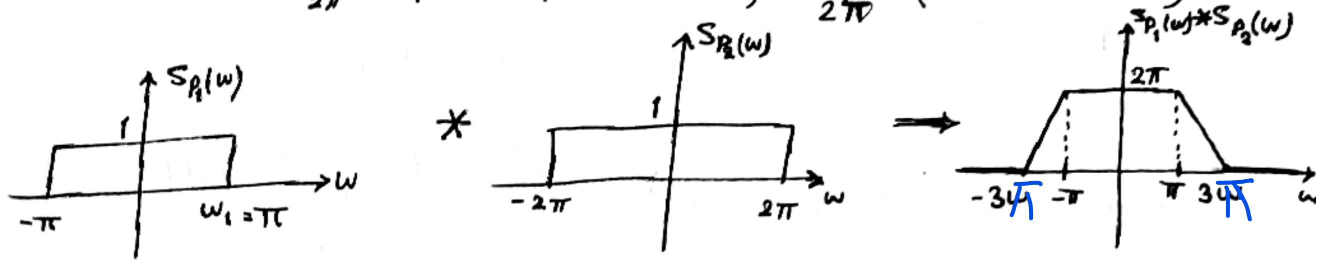
$$\longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\omega}{\omega}\right] * \left[2\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{2}\times 2\pi\delta(\omega-\pi) + \frac{1}{2}\times 2\pi\,\delta(\omega+\pi)\right]$$

$$\longrightarrow X(\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} + \frac{\sin(\omega-\pi)}{\omega-\pi} + \frac{\sin(\omega+\pi)}{\omega+\pi}$$

D) $\left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin(2\pi(t-1))}{\pi(t-1)}\right] \longrightarrow X(\omega) = F\left\{\left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin(2\pi(t-1))}{\pi(t-1)}\right]\right\}$

$$\longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{2\pi} F\left\{\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right\} * F\left\{\frac{\sin(2\pi(t-1))}{\pi(t-1)}\right\}$$

$$\longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{2\pi} S_{p_1}(\omega) * \left(e^{-j\omega} S_{p_2}(\omega)\right) = \frac{e^{-j\omega}}{2\pi}\left(S_{p_1}(\omega) * S_{p_2}(\omega)\right)$$



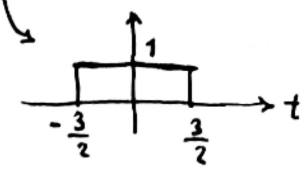
$$\longrightarrow X(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{2\pi}\begin{cases} 2\pi & ; |\omega| < \pi \\ -|\omega| + 3\pi & ; \pi \leq \omega \leq 3\pi \\ 0 & |\omega| > 3\pi \end{cases}$$

---

2 - سیگنال پیوسته درزمان مربوط به هریک از تبدیل فوریه های داده شده را بیابید.

A) $X(j\omega) = \frac{2\sin(3(\omega-2\pi))}{(\omega-2\pi)} \longrightarrow x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{2\sin(3(\omega-2\pi))}{(\omega-2\pi)}\right\}$

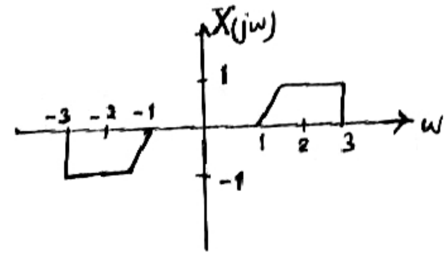
$$\longrightarrow x(t) = e^{j2\pi t} F^{-1}\left\{\frac{2\sin(3\omega)}{\omega}\right\} = e^{j2\pi t} S_p(t)$$



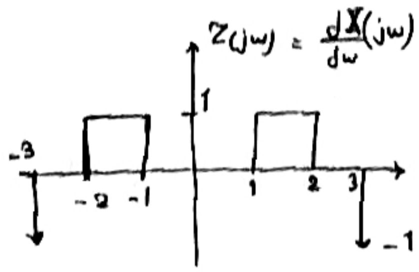
B) $X(j\omega) = \cos\left(4\omega + \frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow x(t) = F^{-1}\left\{\cos\left(4\omega + \frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$$\longrightarrow F^{-1}\left\{\frac{1}{2}e^{j(4\omega+\frac{\pi}{3})} + \frac{1}{2}e^{-j(4\omega+\frac{\pi}{3})}\right\} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}} F^{-1}\{e^{j4\omega}\} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}} F^{-1}\{e^{-j4\omega}$$

$$\longrightarrow x(t) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(t+4) + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(t-4)$$

c) 

$\xrightarrow{\frac{d}{dw}}$



$$z(t) = F^{-1}\{Z(jw)\} = F^{-1}\{-\delta(w+3) - \delta(w-3) + Sp\left(w-\frac{3}{2}\right) + Sp\left(w+\frac{3}{2}\right)\}$$

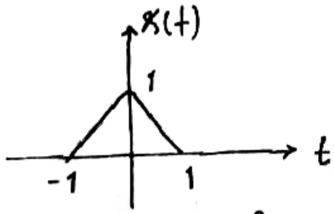
$$\longrightarrow z(t) = -\frac{1}{2\pi} e^{-j3t} - \frac{1}{2\pi} e^{j3t} + e^{j\left(\frac{3}{2}\right)t}\left[\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t}\right] + e^{-j\left(\frac{3}{2}\right)t}\left[\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t}\right]$$

$$\longrightarrow z(t) = -\frac{1}{\pi}\cos(3t) + \frac{2}{\pi t}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

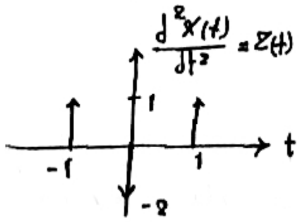
$$Z(jw) = \frac{dX(jw)}{dw} = F\{-jt\,x(t)\} \longrightarrow -jt\,x(t) = z(t)$$

$$\longrightarrow x(t) = \frac{j}{t} z(t) = -\frac{j}{\pi t}\cos(3t) + \frac{2j}{\pi t^2}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

3- الف) تبدیل فوریه شکل مقابل؟



روش I : $\xrightarrow[\text{مشتق مرتبه 2}]{\frac{d^2}{dt^2}}$



$$\longrightarrow F\{z(t)\} = F\{\delta(t+1) + \delta(t-1) - 2\delta(t)\}$$

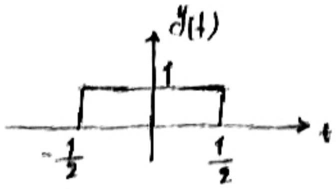
$$\longrightarrow Z(w) = -2 + e^{jw} + e^{-jw} = F\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\}$$

$$\longrightarrow (jw)^2 X(w) = -2 + 2\cos(w)$$

$$\longrightarrow X(w) = \frac{2(1-\cos(w))}{w^2} = \frac{4\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)}{w^2}$$

توجه شود که این روش مشتق گیری زمانی قابل قبول است که $x(t)$ فاقد مولفه ثابت باشد. درغیراین صورت فرآیند مشتق گیری باعث حذف مولفه ثابت سیگنال شده و در پاسخ نهایی باید به طور جداگانه تاثیر این مولفه را به صورت ضربه در مبدا وارد نمود.

روش II : تجزیه $x(t)$ به کانولوشن دو سیگنال پالسی :

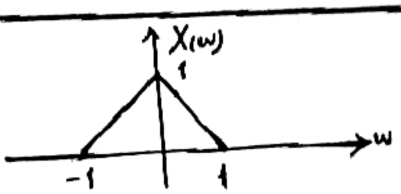


$$Y(\omega) = \mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

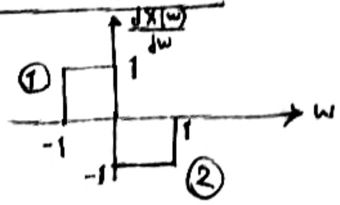
$$x(t) = y(t) * y(t) \longrightarrow X(\omega) = Y^2(\omega)$$

$$\longrightarrow X(\omega) = \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\left(\frac{\omega^2}{4}\right)} = \frac{4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2}$$

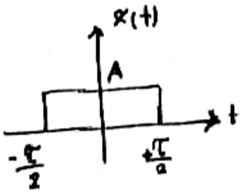
ب)



$\xrightarrow{\frac{d}{d\omega}}$

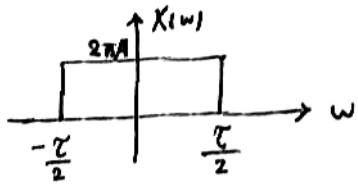


تبدیل فوریه پالس :

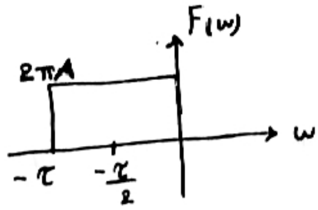


$$\xleftrightarrow{F} X(\omega) = A\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

خاصیت دوگانی : $A\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t\tau}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{F}$

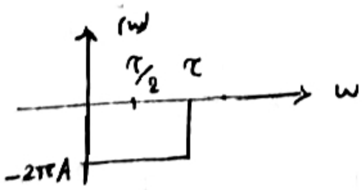


$\xrightarrow{\text{شیفت}}$



$$\xrightarrow{F^{-1}} f(t) = A\tau e^{-j\frac{\tau}{2}t}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\tau t}{2\pi}\right)$$

برای پالس ①



$$\xrightarrow{F^{-1}} g(t) = -A\tau e^{j\frac{\tau}{2}t}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\tau}{2\pi}t\right)$$

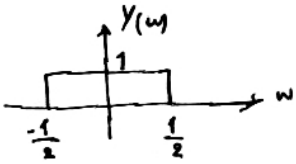
برای پالس ②

$$\tau = 1,\ A = \frac{1}{2\pi} \longrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} \xleftrightarrow{F} -\frac{1}{2\pi}e^{j t/2}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) + \frac{1}{2\pi}e^{-j\frac{t}{2}}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

$$F^{-1}\left\{\frac{dX(\omega)}{dt}\right\} = -jt\,x(t) = -\frac{1}{2\pi}\left(e^{jt/2} - e^{-jt/2}\right)\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

$$\longrightarrow x(t) = \frac{1}{\pi t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right]^2$$

روش II : $X(w)$ را به صورت کانولوشن 2 پالس می نویسیم :



$$Y(w) * Y(w) = X(w)$$

$$\longrightarrow 2\pi\left(y^2(t)\right) = x(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

4- الف) $X(jw)$ تبدیل فوریه $x(t)$ و $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jnw_0 t}$ نمایش سری فوریه سیگنال متناوب $p(t)$ با فرکانس پایه w_0 است. تبدیل فوریه سیگنال $y(t) = x(t)p(t)$ را بیابید.

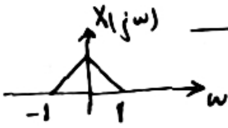
$$Y(jw) = F\{y(t)\} = F\{x(t)p(t)\} = \frac{1}{2\pi}X(jw) * P(jw) = \frac{1}{2\pi}X(jw) * F\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}X(jw) * \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k F\{e^{jkw_0 t}\}\right] = \frac{1}{2\pi}X(jw) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\left(2\pi\delta(w-kw_0)\right)$$

$$\longrightarrow Y(jw) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(jw) * \delta(w-kw_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(w-kw_0)) \quad \text{I}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

ب) $X(jw)$ به صورت



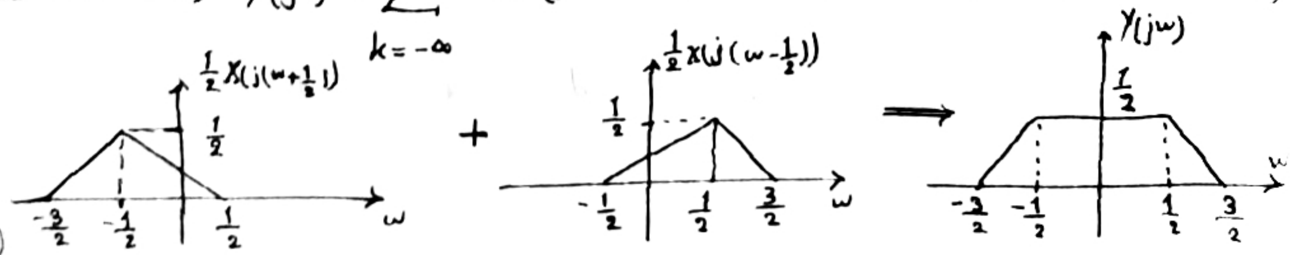
می باشد. طیف $y(t)$ را به ازای $p(t)$ های داده شده حساب کرده و رسم کنید.

$$a)\ p(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \longrightarrow w_0 = \frac{1}{2} \quad \& \text{ for } a_k:\ p(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{j t/2} + \frac{1}{2}e^{-j t/2}$$

$$\longrightarrow p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{1}{2})t} = \frac{1}{2}e^{j t/2} + \frac{1}{2}e^{-j t/2} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \\ a_{k \neq 1,-1} = 0 \end{cases}$$

جایگذاری در I $\longrightarrow$

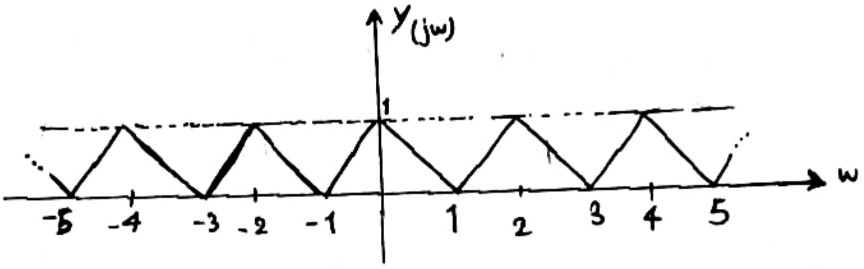
$$Y(jw) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(w-kw_0)) = \frac{1}{2}X\left(j(w+\tfrac{1}{2})\right) + \frac{1}{2}X\left(j(w-\tfrac{1}{2})\right)$$



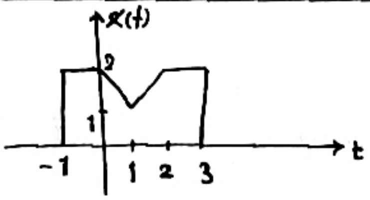
b) $P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \underbrace{n\pi}_{T=\pi}) \longrightarrow a_k = \frac{1}{T}\int_T P(t) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \delta(t) e^{-jk\frac{2\pi}{\pi}t} dt$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \delta(t) e^{-jk2\times0} dt = \frac{1}{\pi} \longrightarrow Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(\omega - k\omega_0))$

$\longrightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - 2k))$



5- $X(j\omega)$ تبدیل فوریه $x(t)$ یعنی



می باشد.

a) $\sphericalangle X(j\omega) = ?$

$x(t)$ انتقال یافته یک سیگنال حقیقی وزوج می باشد. اگر این سیگنال حقیقی و زوج را $z(t)$ بنامیم، تبدیل فوریه آن $Z(j\omega)$ حقیقی وزوج خواهد بود بنابراین:

$x(t) = z(t-1) \longrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega} Z(j\omega)$ & $|X(j\omega)| = \underbrace{|e^{-j\omega}|}_{1} |Z(j\omega)|$

$\longrightarrow \sphericalangle X(j\omega) = -\omega$

b) $X(j0) = ?$ $\quad X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} \xrightarrow{\omega=0} X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 7$

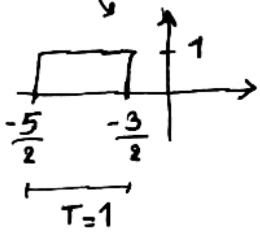
مساحت زیر منحنی $2\times1 + \frac{1+2}{2}\times1\times2 + 2\times1 = 7$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega\times0} d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$

d)

د) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \underbrace{\frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega}} d\omega = ?$

$$Y(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} y(t) = F^{-1}\left\{ \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega} \right\} = S_p(t+2)$$



$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \frac{2\sin(\omega)}{\omega} e^{j2\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) Y(j\omega) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) Y(j\omega)\, e^{j\omega \times 0} d\omega = 2\pi F^{-1}\{X(j\omega)Y(j\omega)\}\Big|_{t=0}$$

$$= 2\pi\{x(t) * y(t)\}\Big|_{t=0} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(0-\tau)\, d\tau = 7\pi$$

ه) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi\left(\frac{38}{3}\right) = 26\pi - \frac{2}{3}\pi$

6- روش های تحلیل فوریه را می‌توان به سیگنال های دارای 2 متغیر مستقل تعمیم داد. این روش‌ها در پردازش تصویر به کار می‌روند. $x(t_1,t_2)$ را سیگنال با دو متغیر مستقل t_1 و t_2 فرض کنید.

تبدیل فوریه دوبعدی $x(t_1,t_2)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(j\omega_1, j\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1,t_2)\, e^{-j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

الف) نشان دهید انتگرال دوگانه را می‌توان به صورت دو تبدیل فوریه یک بعدی متوالی ابتدا نسبت به t_1 (با فرض ثابت بودن t_2) و سپس نسبت به t_2 محاسبه کرد.

ب) با استفاده از نتیجه بند (الف) عکس تبدیل فوریه یعنی $x(t_1,t_2)$ برحسب $X(j\omega_1,j\omega_2)$ را بیابید.

الف) $X(j\omega_1, j\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1,t_2)\, e^{-j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}\, dt_1 dt_2$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1,t_2)\, e^{-j\omega_1 t_1} dt_1\right] e^{-j\omega_2 t_2} dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega_1, t_2)\, e^{-j\omega_2 t_2}\, dt_2 = F_{\omega_2}\{F_{\omega_1}\{x(t_1,t_2)\}\}$$

ب) $F_{\omega_1}^{-1}\{F_{\omega_1}^{-1}\{X(j\omega_1, j\omega_2)\}\} = F_{\omega_1}^{-1}\{F_{\omega_2}^{-1}\{F_{\omega_2}\{F_{\omega_1}\{x(t_1,t_2)\}\}\}\}$

$$= F_{\omega_1}^{-1}\{F_{\omega_1}\{x(t_1,t_2)\}\} = x(t_1, t_2)$$

$$\longrightarrow x(t_1, t_2) = F_{\omega_1}^{-1}\{F_{\omega_2}^{-1}\{X(j\omega_1, j\omega_2)\}\}$$

$$\longrightarrow x(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega_1, j\omega_2)\, e^{j t_2 \omega_2} d\omega_2\right] e^{j\omega_1 t_1} d\omega_1$$

$$\longrightarrow x(t_1,t_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega_1, j\omega_2)\, e^{j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} d\omega_1 d\omega_2$$

DFT :

اگر $x[n]$ دنباله‌ای با دوره محدود باشد، یک عدد N_1 را می‌توان به گونه‌ای یافت که :

$$x[n] = 0 \qquad n > N_1 - 1 \quad , \quad n < 0$$

حال می‌توان دنباله تناوبی $\tilde{x}[n]$ را به گونه‌ای تعریف کرد که در یک دوره تناوب مساوی $x[n]$ باشد.
اگر $N \geq N_1$ باشد و $\tilde{x}[n]$ با دوره تناوب N متناوب باشد داریم :

$$\tilde{x}[n] = x[n] \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

ضرایب سری فوریه برای $\tilde{x}[n]$:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\xrightarrow{DFT} \quad \tilde{X}[k] = a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad k = 0, \dots, N-1$$

از روی DFT می‌توان دنباله اصلی دوره محدود را بازسازی کرد.

$$\xrightarrow{IDFT} \quad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad n = 0, 1, \dots, N-1$$

الگوریتم های سریعی برای محاسبه DFT از جمله FFT وجود دارند. $\tilde{X}[k]$ در واقع با یک نمونه برداری در حوزه فرکانس از $X(\Omega)$ بدست می‌آید که در آن فرکانس های متوالی $\left(\frac{2\pi}{N}\right)k$ برداشته می‌شوند.

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

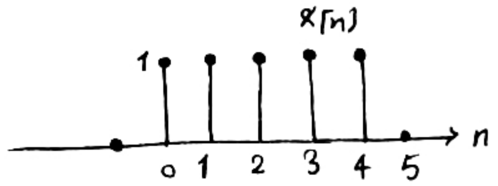
$$\xrightarrow{\frac{2\pi}{N}k = \Omega} \begin{cases} X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \\ X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \end{cases} \xrightarrow{\text{مقایسه}} \tilde{X}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$0 \leq n \leq N_1$$
$$N_1 < N$$

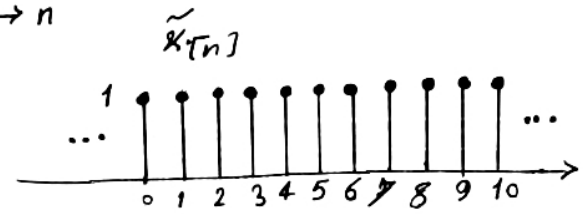
$$\longrightarrow \tilde{X}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

نمونه برداری در حوزه فرکانس باید به گونه ای باشد که $N > N_1$ شود.

مثال: ضرایب DFT دنباله $x[n]$ که در شکل زیر نشان داده شده است را بدست آورید.



$N = 5 \longrightarrow$

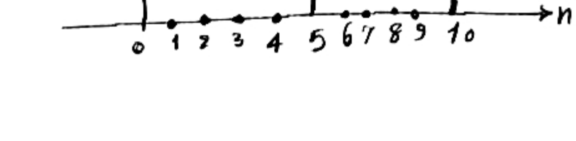


$$\rightarrow a_k = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} e^{-jk\frac{2\pi}{5}n} = \begin{cases} 1 & k=0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

می‌توان این ضرایب را به صورت نمونه های $F\{x[n]\} = X(\Omega)$ در فرکانس های $\Omega = \frac{2\pi}{5}k$

به ازای $k = 1, 2, 3, 4$ بدست آورد.

قدر مطلق تبدیل فوریه گسسته $x[n]$:



$$\longrightarrow \tilde{X}[k] = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k=1,2,3,4 \end{cases}$$