۱-برای هر یک از سیگنال‌های زیر P_∞ , E_∞ را بیابید.

A) $x(t) = e^{j(2t+\frac{\pi}{4})}$, B) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, C) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

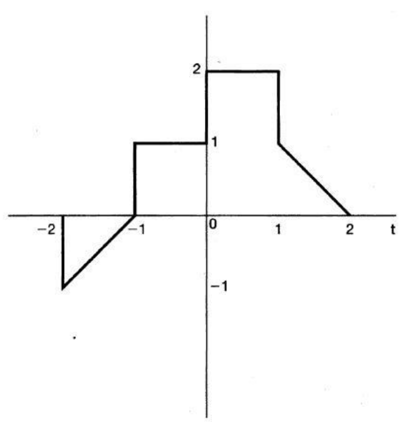
۲-سیگنال متناوب $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ -2, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$ دارای دوره تناوب T = 2 می‌باشد. مشتق این سیگنال با قطار ضربه زیر ارتباط دارد:

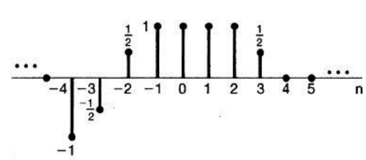
$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2k)$$

می‌توان نشان داد که $\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2)$

مقادیر A_1 , t_1 , A_2 , t_2 را بیابید.

۳- سیگنال پیوسته در زمان $x_1(t)$ و سیگنال گسسته در زمان $x_2[n]$ را در شکل زیر در نظر بگیرید و سیگنال‌های خواسته شده را رسم کنید.





A) $x_1(4 - \frac{t}{2})$, B) $[x_1(t) + x_1(-t)]u(t)$, C) $x_1(t)\left[\delta(t+\frac{3}{2}) - \delta(t - \frac{3}{2})\right]$

$D)\ x_2[3\ -\ n]$, E) x[n] u[3 – n] , F) x[n – 2]$\delta[n\ -\ 2]$

۴ – تعیین کنید که سیستم‌های پیوسته و گسسته در زمان زیر کدام یک از خواص بدون حافظه، تغییر ناپذیر با زمان، خطی، علی، پایدار را دارند و کدام را ندارند و برای هرکدام دلیل بیاورید. (در هر مورد x(t) ورودی و y(t) خروجی است)

A) y(t) = $\int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$, B) $y(t)\ =\begin{cases}0 & ,\ x(t)\ < 0\\ x(t)\ +\ x(t\ -\ 2) & ,\ x(t) \geq 0\end{cases}$

C) y(t) = $\frac{dx(t)}{dt}$, D) y[n] = $\begin{cases}x[n] & ;\ n \geq 1\\ 0 & ;\ n = 0\\ x[n] & ;\ n \leq -1\end{cases}$

۵- تعیین کنید هر یک از سیستم‌های زیر معکوس پذیرند یا خیر. در صورت معکوس پذیر بودن سیستم معکوس را بیابید. در غیر این صورت دو سیگنال متمایز را بیابید که پاسخ سیستم به آنها یکسان باشد.

A)$y[n]\ =\begin{cases}x[n-1] & ;\ n \geq 1\\ 0 & ;\ n\ =\ 0\\ x[n] & ;\ n \leq -1\end{cases}$, B) y(t) = $\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$

C) y(t) = $\frac{dx(t)}{dt}$, D) y[n] = x[2n]

۶ – همبستگی بین دو سیگنال مفهوم بسیار مهمی در بسیاری از کاربردهای پردازش سیگنال می‌باشد. فرض کنید x(t) و y(t) دو سیگنال می‌باشند، در این صورت تابع همبستگی چنین تعریف می‌شود:

$$\Phi_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

تابع $\Phi_{xx}(t)$ را تابع خودهمبستگی سیگنال x(t) ، و $\Phi_{xy}(t)$ را همبستگی متقابل سیگنال‌های x(t) و y(t) می‌نامند.

الف) $\Phi_{yx}(t)$ و $\Phi_{xy}(t)$ چه رابطه‌ای دارند؟

ب) بخش فرد $\Phi_{xx}(t)$ را محاسبه کنید

ج) فرض کنید y(t) = x(t+τ). $\Phi_{xy}(t)$ و $\Phi_{yy}(t)$ را برحسب $\Phi_{xx}(t)$ بیان کنید.

۷- خواص سیستمی که رابطه ورودی و خروجی آن به صورت زیر است را بررسی کنید. (سیستم زیر یک سیستم نمونه بردار است)

$$y(t)\ =\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t\ -\ nT)\ =\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t\ -\ nT)\ =\ f(x(t))$$

۸- الف) درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & ; \quad \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & ; \quad for\ any\ complex\ number\ \alpha \neq 1 \end{cases}$$

ب) نشان دهید اگر $|\alpha| < 1$ آنگاه: $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$

ج) نشان دهید اگر $|\alpha| < 1$ آنگاه: $\sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$

د) با استفاده از روابط اثبات شده حاصل $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ را بدست آورید.

۹- اگر سیستمی فقط دارای خاصیت جمع پذیری باشد آن را سیستم جمع پذیر می‌گویند و خروجی آن به ورودی $x_1(t) + x_2(t)$ مساوی مجموع تک تک پاسخ‌ها است و اگر سیستمی فقط دارای خاصیت همگنی باشد آن را سیستم همگن گویند و خروجی آن به ورودی $ax(t)$ مساوی $ay(t)$ می‌باشد. دو سیگنال داده شده را از لحاظ همگنی یا جمع پذیر بودن بررسی کنید.

A) $y(t) = \frac{1}{x(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2$

B) $y[n] = \begin{cases} \frac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]} & , \quad x[n-1] \neq 0 \\ 0 & , \quad x[n-1] = 0 \end{cases}$