Signals And Systems

Dr. Abdollah Amirkhani

Solution – 1

iust.signal3992@gmail.com

۱- برای هر یک از سیگنال‌های زیر E_∞ , P_∞ را بیابید.

A) $x(t) \;=\; e^{j(2t+\frac{\pi}{4})}$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}\right|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot dt = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|x(t)|^2\,dt \;=\; \lim_{T\to\infty}\frac{\int_{-T}^{T}dt}{2T} = \lim_{T\to\infty}\frac{2T}{2T} = 1$$

B) x[n] = $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right|^2 = \sum_{0}^{+\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1\right|^2 = \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

در محاسبه حد مجموع سری هندسی فوق از رابطه‌ی $S_\infty = \frac{a}{1-q}$ استفاده شده است که a جمله اول تصاعد هندسی و q قدر نسبت تصاعد می‌باشد.

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}|x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{0}^{N}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1\right|^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{\frac{4}{3}}{2N+1} = 0$$

C) x[n] = $cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

$$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left|cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}cos^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(1+cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}{2}$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2}$$

سیگنال $cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ بوده و بنابراین جمله دوم در عبارت بالا صفر خواهد بود بنابراین:

$$E_{\infty} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right) = \infty$$

$$P_{\infty} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{-N}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{(2N+1)\left(\frac{1}{2}\right)}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

---

۲) سیگنال متناوب $x(t) = \begin{cases} 1\,, & 0 \le t \le 1 \\ -2\,, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$ دارای دوره تناوب T = 2 می‌باشد. مشتق این سیگنال با قطار ضربه زیر ارتباط دارد:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2k)$$

می‌توان نشان داد که $\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2)$

مقادیر A_1 , t_1 , A_2 , t_2 را بیابید.

سیگنال x(t) را می‌توان در بازه (0,2) با استفاده از توابع پله به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\hat{x}(t) = u(t) - 3u(t-1) + 2u(t-2)$$

از آنجایی که x(t) باید در هر دوره تناوب T = 2 تکرار شود، می‌توان آن را به صورت مجموعی از $\hat{x}(t)$ هایی که یکی پس از دیگری اتفاق می‌افتند نوشت:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t-2k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{u(t-2k) - 3u(t-1-2k) + 2u(t-2-2k)\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{u(t-2k) - 3u(t-1-2k)\} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2u(t \underbrace{-2-2k}_{-2(k+1)=-2k'})$$

سیگمای دوم را می‌توان با تغییر متغیر k+1→k به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\to x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{u(t-2k) - 3u(t-1-2k)\} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2u(t-2k)$$

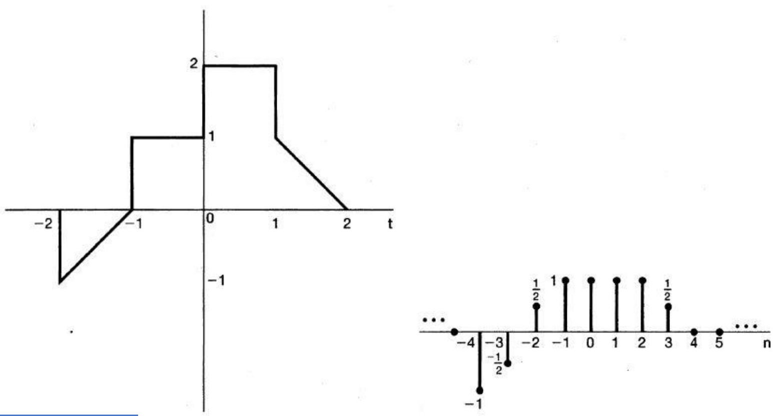
$$\rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{3u(t-2k) - 3u(t-1-2k)\}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{3u(t-2k) - 3u(t-1-2k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{3\delta(t-2k) - 3\delta(t-1-2k)\}$$

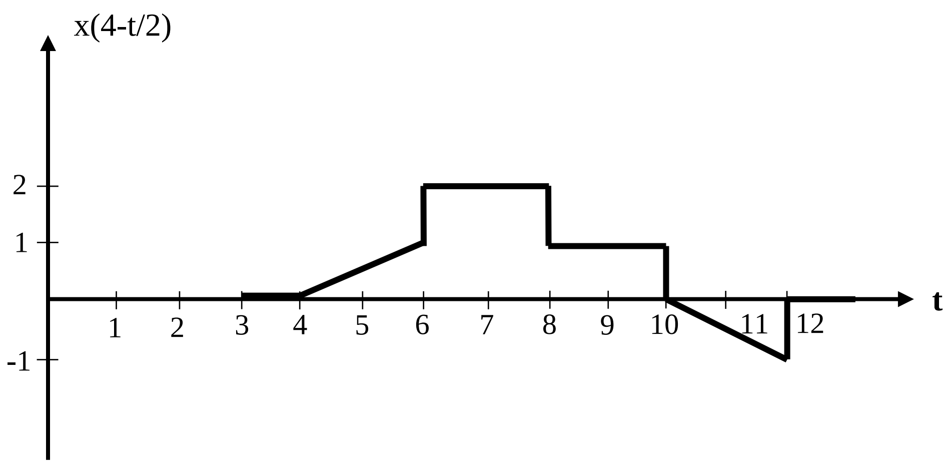
$$= 3\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2k) \; - 3\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2k-1) = A_1 g(t-t_1) + A_2 g(t-t_2)$$

$$\rightarrow A_1 = 3, \qquad A_2 = -3, \qquad t_1 = 0, \qquad t_2 = 1$$

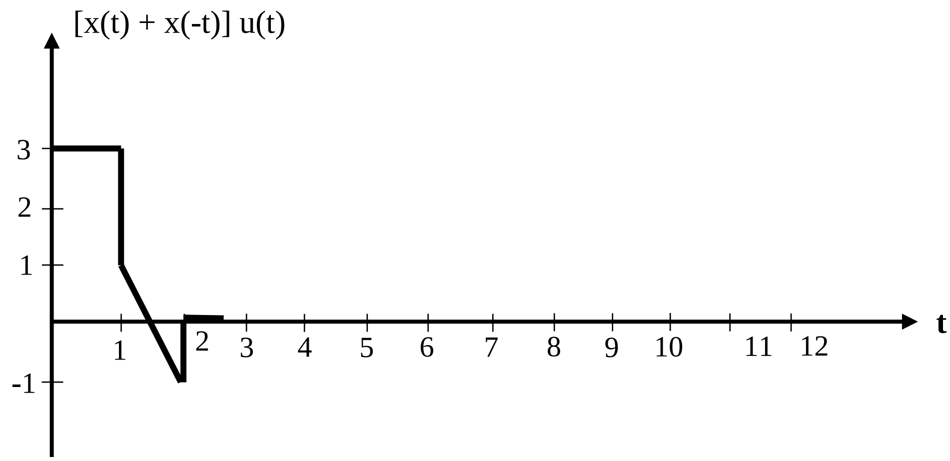
۳- سیگنال پیوسته در زمان $x_1(t)$ و سیگنال گسسته در زمان $x_2[n]$ را در شکل زیر در نظر بگیرید و سیگنال‌های خواسته شده را رسم کنید.



$A) x_1(4 - \frac{t}{2})$

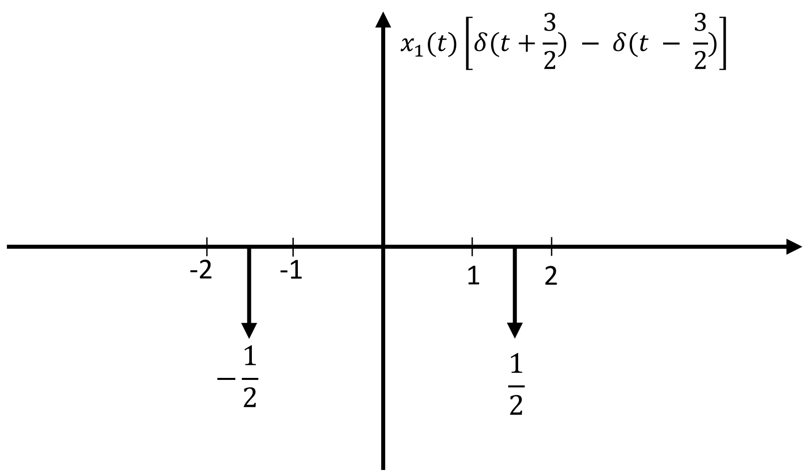


B) $[x_1(t) + x_1(-t)]u(t)$

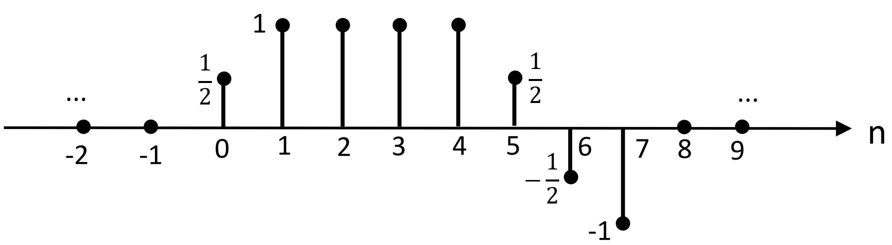


C) $x_1(t)\left[\delta(t+\frac{3}{2}) - \delta(t-\frac{3}{2})\right]$

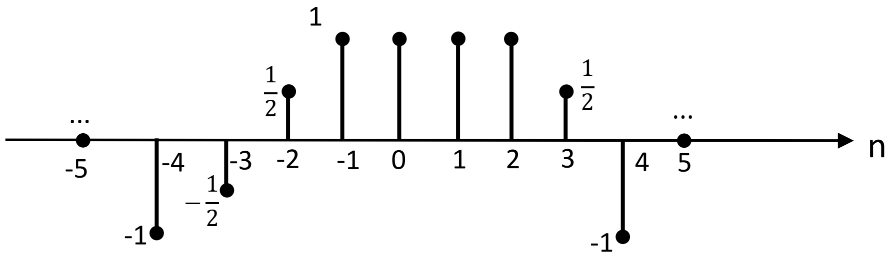
$$x(t)\left[\delta(t+\frac{3}{2}) - \delta(t-\frac{3}{2})\right] = x(t)\delta(t+\frac{3}{2}) - x(t)\delta(t-\frac{3}{2})$$
$$= x(-\frac{3}{2})\delta(t+\frac{3}{2}) - x(\frac{3}{2})\delta(t-\frac{3}{2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)\delta(t+\frac{3}{2}) - \left(\frac{1}{2}\right)\delta(t-\frac{3}{2})$$



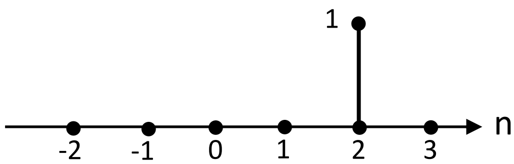
$D)\ x_2[3 - n]$



E) $x_2[n]\,u[3-n]$



F) $x_2[n-2]\delta[n-2]$



۴ – تعیین کنید که سیستم‌های پیوسته و گسسته در زمان زیر کدام یک از خواص بدون حافظه، تغییر ناپذیر با زمان، خطی، علی، پایدار را دارند و کدام را ندارند و برای هرکدام دلیل بیاورید. (در هر مورد $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی است)

A) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$

۱–سیستم حافظه دار است زیرا به عنوان مثال می‌توان نوشت:

$y(1) = \int_{-\infty}^{2} x(\tau)d\tau$

خروجی لحظه $t = 1$ به ورودی در لحظات پس از $t = 1$ (مثلا $t = 2$) هم بستگی دارد.

۲–تغییرپذیر با زمان است زیرا:

$$x(t+T) \rightarrow \int_{-\infty}^{2t} x(\tau+T)d\tau \xrightarrow{\tau+T=\xi} \int_{-\infty}^{2t+T} x(\xi)d\xi \neq \underbrace{\int_{-\infty}^{2(t+T)} x(\xi)d\xi}_{y(t+T)}$$

۳–خطی است زیرا:

$$if\begin{cases}x_1(t)\rightarrow y_1(t)\\ x_2(t)\rightarrow y_2(t)\\ x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\end{cases}\rightarrow\ y_3(t)=\int_{-\infty}^{2t}x_3(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{2t}\{ax_1(t)+bx_2(t)\}d\tau$$

$$=a\int_{-\infty}^{2t}x_1(\tau)d\tau+b\int_{-\infty}^{2t}x_2(\tau)d\tau=ay_1(t)+by_2(t)$$

۴-سیستم علی نمی‌باشد زیرا خروجی سیستم به ورودی‌های آینده نیز بستگی دارد.

۵-سیستم پایدار نیست. به عنوان مثال برای ورودی پله خواهیم داشت:

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{2t}u(\tau)d\tau\ \rightarrow\infty$$

B) $y(t)\ =\begin{cases}0 & ,\quad x(t)\ <0\\ x(t)\ +\ x(t\ -\ 2) & ,\quad x(t)\geq 0\end{cases}$

۱-سیستم حافظه دار است، زیرا y(t) تنها به ورودی لحظه t بستگی ندارد.

۲-سیستم تغییر ناپذیر با زمان می‌باشد زیرا حافظه دار است.

۳-سیستم خطی است زیرا در هر دو ناحیه $t\geq 0$ و $t<0$ سیستم رابطه خطی دارد.

۴-با توجه به اینکه $y(t_0)$ فقط به لحظات $t\leq t_0$ بستگی دارد، سیستم علی است.

۵-پایدار است زیرا برای هر ورودی محدودی (مانند ورودی پله واحد) خروجی هم محدود می‌باشد.

C) $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

۱-سیستم حافظه دار است زیرا می‌توان نوشت:

$$y(t)\ =\frac{dx(t)}{dt}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{x(t)-x(t-\Delta)}{\Delta}$$

واضح است که y(t) هم به ورودی لحظه t و هم به یک لحظه قبل از آن $(t-\Delta)$ بستگی دارد و بنابراین حافظه دار است.

۲-تغییرناپذیر با زمان است زیرا:

$$x(t+T) \rightarrow \frac{dx(t+T)}{dt} = \frac{dx(t+T)}{d(t+T)} \times \frac{d(t+T)}{dt} = \frac{dx(t+T)}{d(t+T)} = y(t+T)$$

۳-سیستم خطی است زیرا:

$$if \begin{cases} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \\ x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \end{cases} \quad \rightarrow \ y_3(t) = \frac{d}{dt}x_3(t) = \frac{d}{dt}(ax_1(t) + bx_2(t))$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\{(ax_1(t) + bx_2(t)) - (ax_1(t-\Delta) + bx_2(t-\Delta))\}}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \ a\left\{\frac{x_1(t) - x_1(t-\Delta)}{\Delta}\right\} + \lim_{\Delta\to 0} \ b\left\{\frac{x_2(t) - x_2(t-\Delta)}{\Delta}\right\}$$

$$= a\frac{dx_1(t)}{dt} + b\frac{dx_2(t)}{dt} = ay_1(t) + by_2(t)$$

۴-سیستم علی است، زیرا فقط به ورودی‌های لحظه t و $t - \Delta < t$ وابسته است.

۵-سیستم در کل ناپایدار است زیرا مثلا برای ورودی x(t) = u(t) خواهیم داشت:

$$y(t) \ = \frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

که $\delta(t)$ در اطراف t = 0 حاوی مقادیر نامحدود است.

D) y[n] = $\begin{cases} x[n] & ; \quad n \geq 1 \\ 0 & ; \quad n = 0 \\ x[n] & ; \quad n \leq -1 \end{cases}$

۱-سیستم بدون حافظه است زیرا در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه بستگی دارد.

۲-سیستم تغییر پذیر با زمان است به عنوان مثال:

If x[n] = x[n – n0] → y[n-n0] = $\begin{cases} x[n-n_0] & ; \quad n-n_0 \geq 1 \\ 0 & ; \quad n-n_0 = 0 \\ x[n-n_0] & ; \quad n-n_0 \leq -1 \end{cases}$

$$\rightarrow y[n-n_0] = \begin{cases} x[n] & ; \quad n \geq n_0 + 1 \\ 0 & ; \quad n = n_0 \\ x[n] & ; \quad n \leq n_0 - 1 \end{cases} \quad \neq y[n]$$

۳-سیستم خطی می‌باشد زیرا برای هر لحظه خاص رابطه ورودی و خروجی یک رابطه خطی می‌باشد.

۴-سیستم علی است زیرا بدون حافظه می‌باشد.

۵-بنا به دلایل قبل سیستم پایدار است.

۵- تعیین کنید هر یک از سیستم‌های زیر معکوس پذیرند یا خیر. در صورت معکوس پذیر بودن سیستم معکوس را بیابید. در غیر این صورت دو سیگنال متمایز را بیابید که پاسخ سیستم به آنها یکسان باشد.

A) $y[n] = \begin{cases} x[n-1] & ; \quad n \geq 1 \\ 0 & ; \quad n = 0 \\ x[n] & ; \quad n \leq -1 \end{cases}$

سیستم معکوس پذیر است، برای سیستم معکوس داریم:

$$\begin{cases} x[n] = y[n] & ; \ n \leq -1 \\ x[n-1] = y[n] & ; \ n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x[n] = y[n] & ; n \leq -1 \\ x[n] = y[n+1] & ; \ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x[n] = \begin{cases} y[n] & ; \quad n \leq -1 \\ y[n+1] \ ; & n \geq 0 \end{cases}$$

B) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$

سیستم معکوس پذیر است، برای سیستم معکوس داریم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\tau) d\tau \Longrightarrow e^{t} y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{t} y(t)) = \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\tau) d\tau\right) \Rightarrow e^{t} y(t) + e^{t}\frac{dy(t)}{dt} = e^{t} x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = y(t) + \frac{dy(t)}{dt}$$

C) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

سیستم معکوس ناپذیر است. برای دو سیستم متمایز داریم:

$$x_1(t) = k_1 \rightarrow y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = 0$$

$$x_2(t) = k_2 \rightarrow y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = 0$$

D) $y[n] = x[2n]$

سیستم معکوس ناپذیر است. برای دو ورودی متمایز داریم:

$$x_1[n] = 1 \Rightarrow y_1[n] = 1$$

$$x_2[n] = \begin{cases} 1\ ;\ n\ even \\ 0\ ;\ n\ odd \end{cases} \Rightarrow y_2[n] = 1$$

۶ – همبستگی بین دو سیگنال مفهوم بسیار مهمی در بسیاری از کاربردهای پردازش سیگنال می‌باشد. فرض کنید x(t) و y(t) دو سیگنال می‌باشند، در این صورت تابع همبستگی چنین تعریف می‌شود:

$$\Phi_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$

تابع $\Phi_{xx}(t)$ را تابع خودهمبستگی سیگنال x(t) ، و $\Phi_{xy}(t)$ را همبستگی متقابل سیگنال‌های x(t) و y(t) می‌نامند.

الف) $\Phi_{yx}(t)$ و $\Phi_{xy}(t)$ چه رابطه‌ای دارند؟

ب) بخش فرد $\Phi_{xx}(t)$ را محاسبه کنید

ج) فرض کنید y(t) = x(t+τ). $\Phi_{xy}(t)$ و $\Phi_{yy}(t)$ را برحسب $\Phi_{xx}(t)$ بیان کنید

حل:

الف)

$$\Phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau \xrightarrow{t+\tau=\xi} \Phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi)y(-t+\xi)d\xi = \Phi_{yx}(-t)$$

ب) با توجه به قسمت الف:

$$\Phi_{xx}(-t) = \Phi_{xx}(t)$$

بنابراین $\Phi_{xx}(t)$ یک سیگنال زوج بوده و بخش فرد ندارد: $od\{\Phi_{xx}(t)\} = 0$

ج)

$$\Phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(\tau+T)d\tau$$

$$\xrightarrow{t+\tau=\xi} \Phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x((t-T)+\xi)\,x(\xi)d\xi = \Phi_{xx}(t-T)$$

$$\Phi_{yy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+T+\tau)x(\tau+T)d\tau$$

$$\xrightarrow{t+\tau=\xi} \Phi_{yy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\xi)x(\xi)d\xi = \Phi_{xx}(t)$$

۷- خواص سیستمی که رابطه ورودی و خروجی آن به صورت زیر است را بررسی کنید. (سیستم زیر یک سیستم نمونه بردار است)

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) = f(x(t))$$

ابتدا شرط خطی بودن را بررسی می‌کنیم:

$$y = f(x(t)) \to f(a_1x_1(t)+a_2x_2(t)) = a_1f(x_1(t)) + a_2f(x_2(t))$$

$$f(a_1x_1(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_1x_1(t)\delta(t-nT) = a_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(t)\delta(t-nT) = a_1f(x_1(t))$$

$$f(a_2x_2(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_2x_2(t)\delta(t-nT) = a_2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(t)\delta(t-nT) = a_2f(x_2(t))$$

از طرفی داریم:

$$f(a_1x_1(t)+a_2x_2(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_1x_1(t)+a_2x_2(t))\delta(t-nT)$$

$$= a_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(t)\delta(t-nT) + a_2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(t)\delta(t-nT)$$

$$\Rightarrow f(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) = a_1 f(x_1(t)) + a_2 f(x_2(t))$$

پس سیستم خطی است.

بررسی مستقل از زمان بودن:

$$f\big(x(t-\tau)\big) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT-\tau)\delta(t-nT)$$

$$\text{but: } y(t-\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\delta(t-\tau-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-\tau-nT)$$

پس سیستم در حالت کلی متغیر با زمان است.

(خواص دیگر: بی حافظه و علی)

۸- الف) درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & ; \quad \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & ; \quad for\ any\ complex\ number\ \alpha \neq 1 \end{cases}$$

ب) نشان دهید اگر $|\alpha| < 1$ آنگاه: $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$

ج) نشان دهید اگر $|\alpha| < 1$ آنگاه: $\sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$

د) با استفاده از روابط اثبات شده حاصل $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ را بدست آورید.

حل:

الف) برای $\alpha = 1$ داریم:

$$S(N) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

برای $\alpha \neq 1$ داریم:

$$S(N)=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\alpha^0+\sum_{n=1}^{N}\alpha^n-\alpha^N=1+\alpha\sum_{n=1}^{N}\alpha^{n-1}-\alpha^N$$

$$\xrightarrow{n=m+1} S(N)=1+\alpha\sum_{m=0}^{N-1}\alpha^m-\alpha^N=1+\alpha S(N)-\alpha^N \Rightarrow S(N)=\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

ب)

$$|\alpha|<1 \Rightarrow \lim_{N\to\infty}\alpha^N=0$$

$$\Rightarrow S(\infty)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\lim_{N\to\infty}\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}=\frac{1-0}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$$

ج)

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\right\}=\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{1}{1-\alpha}\right\}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{d}{d\alpha}\alpha^n\right\}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^{n-1}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^{n-1}=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

د)

$$\sum_{n\,=\,0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{n\pi}{2}}+e^{-j\frac{n\pi}{2}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{n\pi}{2}}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{n\pi}{2}}\right)^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{j}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-j}{2}\right)^n$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{j}{2}\right)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{j}{2}\right)}=\frac{1}{2-j}+\frac{1}{2+j}=\frac{4}{5}$$

۹- اگر سیستمی فقط دارای خاصیت جمع پذیری باشد آن را سیستم جمع پذیر می‌گویند و خروجی آن به ورودی x1(t) + x2(t) مساوی مجموع تک تک پاسخ‌ها است و اگر سیستمی فقط دارای خاصیت همگنی باشد آن را سیستم همگن گویند و خروجی آن به ورودی ax(t) مساوی ay(t) می‌باشد. دو سیگنال داده شده را از لحاظ همگنی یا جمع پذیر بودن بررسی کنید.

A) $y(t) = \frac{1}{x(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2$

$$y(t) = \frac{1}{x(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 = f(x(t))$$

$$f(ax_1(t) + bx_2(t)) = \frac{1}{ax_1(t)+bx_2(t)}\left[\frac{d(ax_1(t)+bx_2(t))}{dt}\right]^2 = \frac{1}{ax_1(t)+bx_2(t)}\left[a\frac{d(x_1(t))}{dt} + b\frac{d(x_2(t))}{dt}\right]^2$$

سیستم غیرخطی اما همگن است زیرا:

$$f(ax(t)) = \frac{1}{ax(t)}\left[\frac{d(ax(t))}{dt}\right]^2 = \frac{1}{ax(t)}a^2\left[\frac{d(x(t))}{dt}\right]^2 = a\frac{1}{x(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2$$

B) $y[n] = \begin{cases} \frac{x[n]x[n-2]}{x[n-1]} & , \quad x[n-1] \neq 0 \\ 0 & , \quad x[n-1] = 0 \end{cases}$

$$f[ax_1[n] + bx_2[n]] = \frac{(ax_1[n] + bx_2[n])(ax_1[n-2] + bx_2[n-2])}{ax_1[n-1] + bx_2[n-1]}$$

سیستم خطی نیست اما همگن است زیرا:

$$f[ax_1[n]] = \frac{ax_1[n]ax_1[n-2]}{ax_1[n-1]} = \frac{ax_1[n]x_1[n-2]}{x_1[n-1]} = af\ [x_1[n]]$$