Subject: ۹۸۴۱۱۴۳۲ ش . د :
Date

محمد عرفان زارع زردینی

تمرین سری 1 سیگنال

۱)

A) $x(t) = e^{j(\pi t + \frac{\pi}{4})}$ $\omega_0 = ۲$ $\phi = \frac{\pi}{4}$ $T = \pi$

$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{j(2t+\frac{\pi}{4})}|}_{1} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = \infty$

$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$

$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |e^{j(\pi t + \frac{\pi}{4})}| = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} dt = \frac{1}{2T}(T-(-T)) = 1$

$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

B) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} |(\frac{1}{2})^{2n} u[n]| = \sum_{0}^{+\infty} (\frac{1}{4})^n = 1 \times \frac{1-(\frac{1}{4})^\infty}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

$\left.\begin{matrix} E_\infty < \infty \\ \infty \end{matrix}\right\} \Longrightarrow P_\infty = 0$

C) $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{4})$

$E_\infty = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(\frac{n\pi}{4}) = 1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 1 + \dots = \infty$

$P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N} \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(\frac{n\pi}{4}) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos(\frac{n\pi}{2})}{2} = \frac{1}{2}$

۲)

$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ -2 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$ $T = 2$

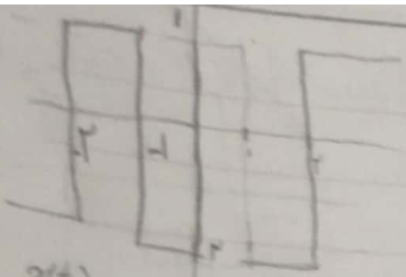
$g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-2k)$

$\frac{dx}{dt} = A_1 g(t-t_1) + A_2 g(t-t_2)$

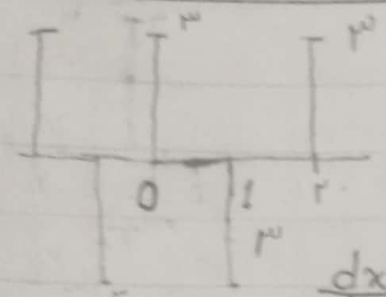
$A_1, t_1, A_2, t_2 = ?$

PAPCO

Scanned by CamScanner



سیگنال متناوب $x(t)$



شکل نمایی از $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = A_1 \overbrace{g(t-t_1)}^{\sum \delta(t-2k-t_1)} + A_2 \overbrace{g(t-t_2)}^{\sum \delta(t-2k-t_2)}$$

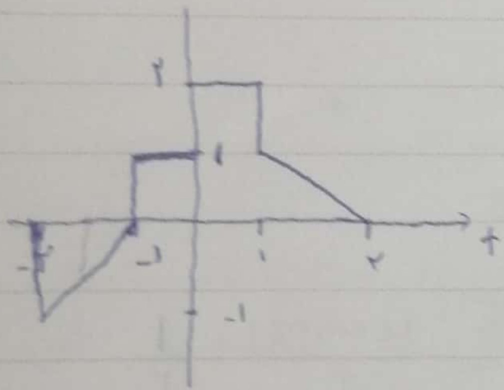
شکل ۱: $3\sum \delta(t-2k) - 3 \sum \delta(t-2k-1)$

به تغییرات در نقاط صفر دقت شود — به تغییرات در $t=1$ دقت شود

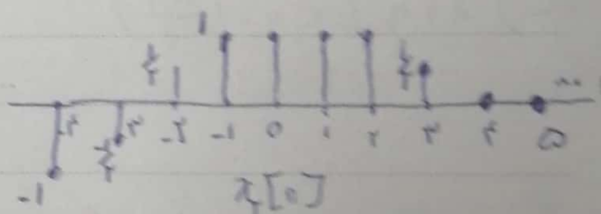
$$\Rightarrow A_1 = 3,\ A_2 = -3$$
$$t_1 = 0\ ,\ t_2 = 1$$

۳

۳) سیگنال پیوسته در زمان $x_1(t)$ و سیگنال گسسته در زمان $x_2[n]$ را در شکل زیر در نظر بگیرید سیگنال های خواسته شده را رسم کنید

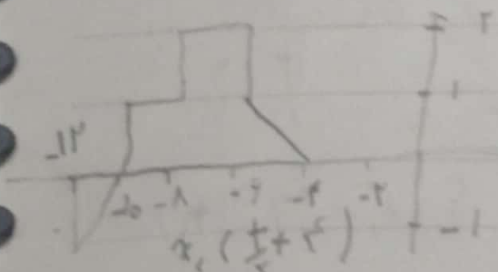


$x_1(t)$

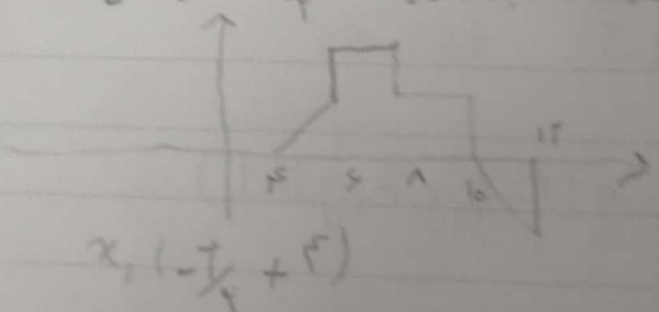


$x_2[n]$

A) $x_1(4-\frac{t}{2})$ اول جابجایی $t \to t+4$ بعد مقیاس‌دهی $t \to \frac{t}{2}$ بعد برعکس کردن $t \to -t$



$x_1(\frac{t}{2}+4)$

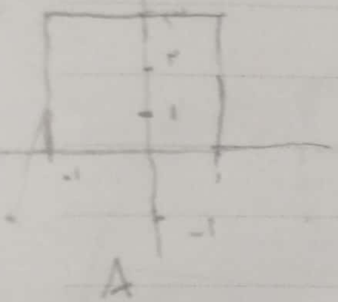


$x_1(-\frac{t}{2}+4)$

B) $\underbrace{[x_1(t) + x_1(-t)]}_{A} u(t)$

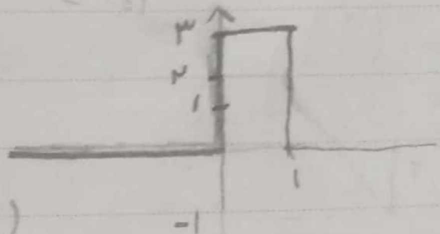
A: $t=-۲: ۰+۰=۰$ $\quad t=-۱: ۱+۲=۳$ $\quad t=۰: ۳$ $\quad t=۱: ۳$ $\quad t=۲: ۰$

$$u(t) = \begin{cases} ۱ & t>۰ \\ ۰ & t<۰ \end{cases}$$



A

$\Rightarrow$

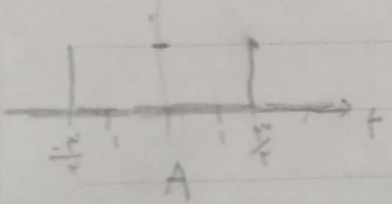


$B = A\,u(t)$

C) $x_1(t)\underbrace{[\delta(t+۳/۲) - \delta(t-۳/۲)]}_{A}$

$$\delta(t+۳/۲) = \begin{cases} 1 & t=-۳/۲ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\delta(t-۳/۲) = \begin{cases} 1 & t=۳/۲ \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

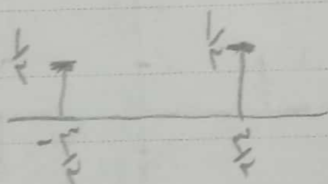


A

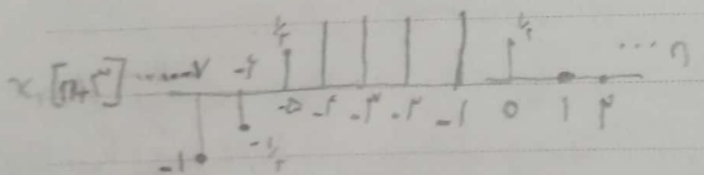
$x_1(۳/۲) = ۱/۲$

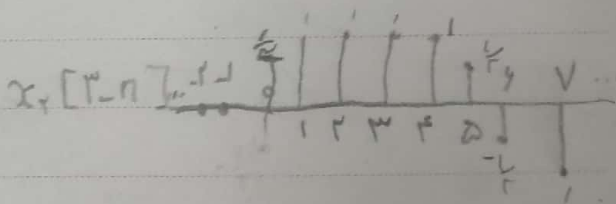
$x_1(-۳/۲) = -۱/۲$

C) $x_1(t)A$



D) $x_۲[۳-n]$



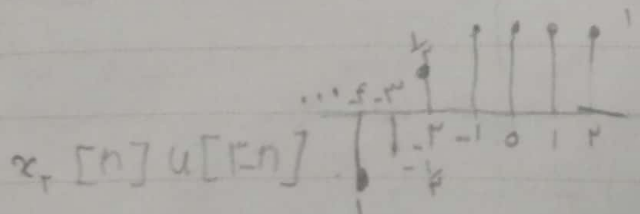


E) $x_۲[n]\, u[۳-n]$

۱ $n>+۳$

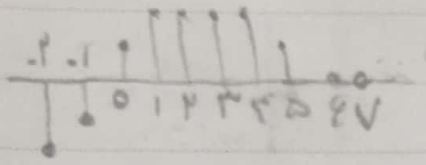
۰ $n<+۳$

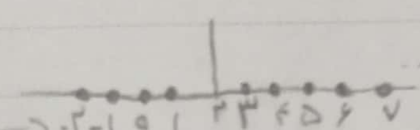
$$u[۳-n] = \begin{cases} 1 & n<۳ \\ ۰ & n>۳ \end{cases}$$



F) $x[n-2]\,\delta[n-2]$ $\qquad \delta[n-2] = \begin{cases} 1 & n=2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

$x[n-2]$




$\Rightarrow$ $x[n-2]\,\delta[n-2]$

۴) (بدون حافظه ، تغییر نا پذیر با زمان ، خطی ، علی ، پایدار) بررسی

A) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau$

حافظه دار (چون خروجی به زمان گذشته و آینده بستگی دارد) (بازه گذشته و آینده را هم پوشش می‌دهد $2t$)

غیر علی (چون به زمان آینده ورودی هم بستگی دارد)

۵ پایدار (چون به ازای $x(t)$ محدود ، $y(t)$ نامحدود داریم) $\left|\int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{2t} |x(\tau)|d\tau < \int_{-\infty}^{2t} b\,d\tau = \infty$

برای خطی بودن: همگن است: $\int a x(\tau)d\tau = a\int x(\tau)\,d\tau$ ✓ جمع پذیر: $\int x_1(\tau) + x_2(\tau)\,d\tau = \int x_1(\tau)d\tau + \int x_2(\tau)d\tau$

خطی است

تغییر پذیر با زمان چون در هر لحظه با زمان تغییر می‌کند

B) $y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$

حافظه دار (چون در ازای $x(t-2)$ به تمام آینده هم بستگی دارد)

علی (چون به آینده و گذشته ورودی بستگی ندارد)

پایدار (چون به ازای $x(t)$ محدود ، $y(t)$ محدود داریم)

خطی است

برای خطی بودن: همگن است ✓ ، جمع پذیری ✓ $\Rightarrow$ خطی است

تغییر ناپذیر با زمان (با جا گذاری $x(t-t_0)$ به جای $x(t)$ ، خروجی تغییری ندارد)

C) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

حافظه دار (چون مشتق ، خروجی در هر لحظه ، تابع ورودی در همان لحظه نیست) وبه گذشته / آینده بستگی دارد

علی (چون به آینده ورودی بستگی ندارد)

ناپایدار (چون مشتق $x(t)$ در لحظه‌ی شیب بی‌نهایت می‌رود)

برای خطی بودن: جمع پذیری $x$ $\quad d(x_1+x_2) \neq dx_1 + dx_2$

PAPCO

Scanned by CamScanner

تغییرپذیری: ؟؟

$$D)\ y[n]=\begin{cases} x[n] & n\geq 1 \\ 0 & n=0 \\ x[n] & n\leq -1 \end{cases}$$

بدون حافظه (چون خروجی در هر لحظه تابع از ورودی در همان لحظه است)

علّی (بدون حافظه است در آینده ورودی بستگی ندارد)

پایدار (به ازای $x[n]$ محدود، $y[n]$ محدود است)

برای خطی بودن: همگنی ✓ $ax[n]\to ay[n]$ جمع پذیری ✓ $x_1[n]+x_2[n]=x_1[n]+x_2[n]$ ✓
خطی است.

تغییرپذیر با زمان، با شیفت دادن به جهت های مختلف ما خروجی تغییر می کند.

(۵

$$A)\ y[n]=\begin{cases} x[n-1] & n\geq 1 \\ 0 & n=0 \\ x[n] & n\leq -1 \end{cases}$$

معکوس ناپذیر $\Longleftarrow$ $y[n]=\begin{cases} 0 & n=1 \\ 0 & n=0 \end{cases}$

(۶

$$B)\ y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-T)}\, x(T)\, dT$$

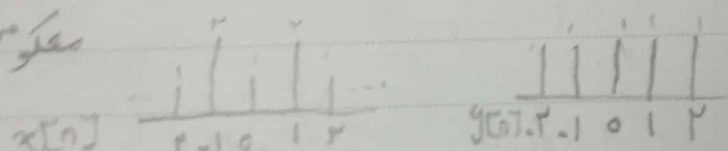
معکوس پذیر: $x(t)+\dfrac{dx(t)}{dt}$

c) $y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

معکوس پذیر نیست $x(t)=u(t)$ $\frac{du(t)}{dt}=\begin{cases} 0 & t=4 \\ 0 & t=3 \end{cases}$

D) $y[n]=x[2n]$

معکوس پذیر نیست




$+1 \quad n=2k$

$2 \quad n=2k+1$

(۶

$$\phi_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+T)\,y(T)\,dT$$

الف) رابطه $\phi_{xy}(t)$ و $\phi_{yx}(t)$

ب) زوج بودن $\phi_{xx}(t)$ را ثابت کنی

ج) فرض کنید $y(t)=x(t+T)$ ، $\phi_{xy}(t)$ و $\phi_{yy}(t)$ را برحسب $\phi_{xx}(t)$ بیابید

(✱)

الف) $\phi_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+T)\,y(T)\,dT$

$\phi_{yx}=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t+T)\,x(T)\,dT=\phi_{xy}(-t)$

ب)

ازجفت اول $\Phi_{xx}(t)=\Phi_{xx}(-t) \Rightarrow$ زوجه $\Phi_{xx}$

وقتی مرکز آن صفر در نظر گرفته شود

ج) $\Phi_{yy}=\int y(t+T)\,y(t)\,dT \overset{(*)}{=} \int x(t+T)\,x(t)\,dT \Rightarrow \Phi_{yy}(t)=\Phi_{xx}(t)$

$\Phi_{xy}=\int x(t+T)\,y(T)\,dT \Rightarrow \Phi_{xy}(t)=\Phi_{xx}(t-T)$

۷)

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(t)\,\delta(t-nT)}_{A} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) = f(x(t))$$

$$\delta(t-nT)=\begin{cases}1 & t=nT\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x(t)=x(nT)$ دوسوی تساوی برقراره طبق $t=nT$ $\Rightarrow \begin{cases}x(t) & n=\frac{t}{T}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

به ازای $n=\frac{t}{T}$ رابطه برابر $x(t)$ و به ازای مقادیر دیگر چون تابع ضربه صفر می شود

از خواص $(*)$: $x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

کل معادله صفر می شود و در نتیجه حاصل سیگما می شود $x(nt)$ به ازای $n=\frac{t}{T}$

۸) اتحاد درستی رابطه را اثبات کنید

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\begin{cases}N & ; \quad \alpha=1\\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & ; \text{ for any complex number } \alpha \neq 1\end{cases}$$

$\alpha^0+\alpha^1+\alpha^2+\dots+\alpha^{N-2}+\alpha^{N-1}=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n$

$$\alpha=1 \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} 1^n = 1^0+1^1+\dots+1^{N-1} = \underbrace{1+1+\dots 1}_{N} = N$$

$\alpha \neq 1$ دنباله هندسی: $\alpha$ جمله اول: رابطه جمع $\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n = a_1 \frac{1-q^N}{1-q} = \alpha^0\,\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$

PAPCO

ب) نشان دهید $|\alpha|<1$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}=a_1\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

$$|\alpha|<1 \Rightarrow -1<\alpha<1 \Rightarrow (-1)^N<\alpha^N<1^N \Rightarrow 0<\alpha^N<1 \Rightarrow \lim_{N\to\infty}\alpha^N=0$$

چون $|\alpha|<1$ است پس وقتی توان به سمت بی‌نهایت برود $\alpha^N$ به سمت صفر می‌رود

$$\Rightarrow 1-\alpha^N=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}$$

ج) نشان دهید $|\alpha|<1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^۲}$

از دو طرف نتیجه بخش ب را مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\right]=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^{n-1}=\sum n\alpha^n=\frac{1}{(1-\alpha)^۲}$$

جور دیگه

د) با استفاده از ج حاصل $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{۲}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{۲}\right)$ را بیابید

$$A \qquad \frac{1}{۲}e^{j\frac{n\pi}{۲}}+\frac{1}{۲}e^{-j\frac{n\pi}{۲}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{۲}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{۲}\right)^n e^{j\frac{n\pi}{۲}}+\frac{1}{۲}\sum_{n=0}\left(\frac{1}{۲}\right)^n e^{-j\frac{n\pi}{۲}}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{۲}\left(\left(\frac{1}{۲}\right)^0\times e^{j\frac{n\pi}{۲}}\right)}_{\frac{1}{۲}\left(\frac{۴}{۵}+j\frac{۲}{۵}\right)}+\underbrace{\left(\left(\frac{1}{۲}\right)^0\times e^{-j\frac{n\pi}{۲}}\right)}_{\frac{1}{۲}\left(\frac{۴}{۵}-j\frac{۲}{۵}\right)}=۰/۸$$

غلط

$=۰/۴+j۰/۲ \qquad ۰/۴-j۰/۲$

PAPCO

(9)

A) $y(t)=\frac{1}{x(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2$

جمع پذیری: $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ $\quad y_3(t)=\frac{1}{x_3(t)}\left[\frac{dx_3(t)}{dt}\right]^2$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1(t)+x_2(t)}\left[\frac{dx_1(t)+dx_2(t)}{dt}\right]^2 \neq y_1(t)+y_2(t) \Rightarrow$ جمع پذیر نیست

بررسی همگنی: $x\to ax$ $\quad y\xrightarrow{?}ay$ $\quad y_4=\frac{1}{a\,x_4(t)}\left[\frac{a\,dx(t)}{dt}\right]^2=\frac{a}{x_4(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2=ay$

$\Leftarrow$ همگن است

B) $y[n]=\begin{cases}\frac{x[n]\,x[n-2]}{x[n-1]} & x[n-1]\neq 0\\ 0 & x[n-1]=0\end{cases}$

جمع پذیری: $x_1[n]=3\delta[n+2]+3\delta[n+1]+3\delta[n]$, $x_2[n]=4\delta[n+2]+3\delta[n+1]+2\delta[n]$ $\xRightarrow{n=0}$ $y_1[0]=3$, $y_2[0]=\frac{8}{3}$

$x_1+x_2$ اگر: $x_3[n]=7\delta[n+2]+6\delta[n+1]+5\delta[n]$

$\Rightarrow y_3=\frac{35}{6}$ می‌شود $\Rightarrow$ جمع پذیر نیست.

برای همگنی بودن: $x\to ax$ $\quad \frac{a\times a}{a}=a \Rightarrow y\to ay$ $\quad$ همگن است