Subject:
Date

سؤال ۲

الف)

$L_1=\{www \mid w\in\{a,b\}^*\}$

با Pumping Lemma پیش می‌بریم. فرضیات:

$w=a^mb^ma^mb^ma^mb^m=\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{ab\ldots ba\ ab\ldots ba\ abb}_{z}$ $|w|\geq m$ $|xy|\leq m$ $|y|\geq 1$

$y=a^k$ $k\geq 1$ $\Rightarrow xy^iz\in L$ ، i های دلخواه ...

مثال نقض: $xyyz=xy^2z$

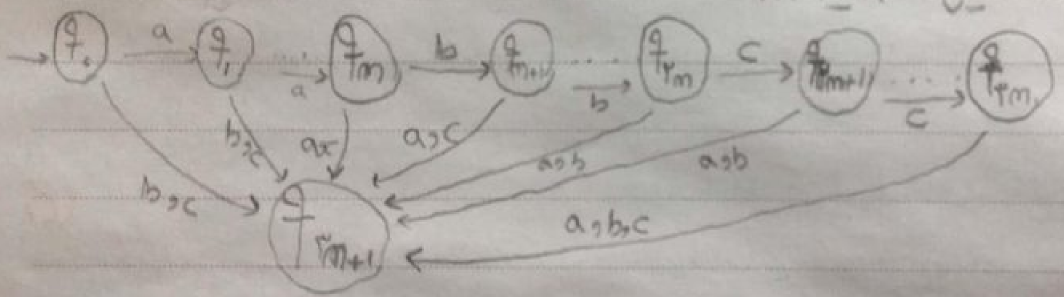
$a^{m+k}b^ma^mb^ma^mb^m\notin L_1 \Rightarrow$ زبان بی‌قاعده است

ب)

$L_2=\{a^mb^mc^m \mid 0\leq m\leq 10^{30}\}$

چون مقدار توانمان (m) عددی محدود است (با این حال که عددی بسیار بزرگ)، پس باقاعده است و برای هر حالت

مطلوب می‌توان با وجود state های خیلی زیاد NFA کشید



پ)

$L_3=\{w\in\{0,1\}^* \mid$ تعداد صفرها و یک‌ها برابر نیست $\}$

ابتدا نقیض آن را بررسی می‌کنیم که کار با آن راحت‌تره.

$w=0^m1^m=xyz$ $|xy|\leq m$ $|y|\geq 1$ $m\geq 1$

$=\underbrace{0\ldots0}_{x}\underbrace{0\ldots0}_{y}\underbrace{1\ldots1}_{z}$

$y=0^k$ $k\geq 1$ $\Rightarrow xy^iz\in L_3$ ، i های دلخواه ...

$xy^iz=0^{m+k}1^m\in L_3$

به تناقض رسیدیم چون تعداد 0ها و 1ها یکی نیست پس زبان بی‌قاعده است.

حال چون از بالا نتیجه رسیدیم که بی‌قاعده است، نقیض آن هم (که اصل سؤاله) بی‌قاعده است. چون از راه‌های بیشمار

بیان DFA و روش جابجایی state و final state و ... است و چون DFA تولید می‌شود در نتیجه بی‌قاعده است.

PAPCO

Scanned with CamScanner

ت) $L_4=\{w \mid n_a(w)\, n_b(w) \overset{3}{=} 2,\ w\in\{a,b\}^*\}$

f و t متغیر Pumping lemma می‌گیریم. همچنین $|w|\geq m$.

$w=a^{3t+2}b^{3f+2}=\underbrace{a\ldots aa}_{x}\underbrace{a}_{y}\underbrace{b\ldots b}_{z}$ $\qquad |xy|\leq m$

$xy^iz\in L \quad i=0,1,2,\ldots \qquad y=a^k \quad k\geq1$

$xy^{2k}z=a^{3t+2+k}b^{3f+1}$

همانطور که مشخصه پاسخ به k وابسته و چون $k\geq1$ پس k با توجه به ۳ هر ۳ حالت را دارد که در حالت هایی دارای نقض است.

ث) $L_5=\{a^{n^3}\mid n\geq0\}$

با Pumping lemma پیش می‌رویم. $|w|\geq m$

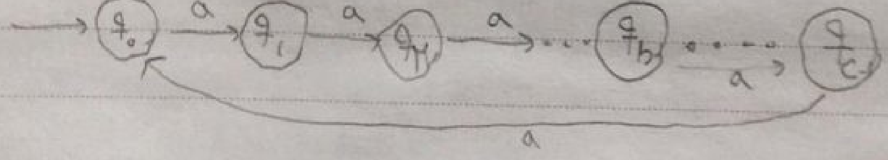
$w=\overbrace{\underbrace{a}_{x}\underbrace{aa\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots a}_{z}}^{m^3}$ $\qquad |xy|\leq m,\ |y|\geq1 \quad y=a^k\ k\geq1$

$xy^iz\overset{?}{\in}L \quad i=0,1,2,\ldots \xrightarrow{i=m} a^{m^3-km} \Rightarrow m(m^2-k)=m^3 \underset{\text{فرض}}{\overset{\text{طبق}}{\Rightarrow}} m^2-k=m^2 \quad k=0\Rightarrow$ تناقض داره با فرض ما

ج) *شک دارم

$L_6=\{a^{b+cd}\mid b \text{ and } c \text{ are constant},\ d\in\{0,1,2,\ldots\}\}$

زبان با قاعده است. (دلیل ثابت شده) در نتیجه DFA آن را رسم می‌کنیم. عبارت توان را ما به عنوان یک تقسیم در نظر می‌گیریم که b باقی‌مانده و d خارج قسمت است. پس طبق ریاضیات $b<c$ پس طبق این پیش می‌رویم و بدیهی است هر جا طبق باشد به مقدار b که d ها اضافه می‌کنیم تا به جواب برسیم.



ح) $L_7=\{a^n\mid n \text{ is the product of two prime numbers}\}$

c و d دو عدد اول و متغیر Pumping lemma می‌گیریم. $|w|\geq cd$.

$w=\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{\overset{k}{a\ldots a}}_{y}\underbrace{a\ldots aa\ldots a}_{z}=a^{cd}$ $\qquad |xy|\leq cd,\ |y|\geq1 \qquad y=a^k,\ k\geq1$

$xy^iz\in L,\ i=0,1,2,\ldots \xrightarrow{i=cd+1} xy^{cd+1}z=a^{c-k}a^{k(cd+1)}a^{c(d-1)} \longrightarrow c-k+kcd+k+cd-c=kcd+cd=(k+1)cd$

که تناقض داره چون ۳ تا عدده است و با مسئله ما یکی نیست. پس نا‌قاعده است.

PAPCO

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

ج)

$L=\{0^x 1^y \mid x \overset{y}{=} 0\}$

با متغیر c و d، Pumping Lemma را می‌گیریم $c \overset{d}{=} 0$

$w = 0^c 1^d = \overbrace{\underbrace{0\ldots}_{x}\underbrace{00\ldots}_{y}\underbrace{00\ldots0\,1\ldots1}_{z}}$ $\quad |xy| \le c\ ,\ |y| \ge 1 \quad y=0^k\ \ k \ge 1$

$\Rightarrow xy^ik\,z \in L \quad i=0,1,2,\ldots \xrightarrow{i=k(c+2)} xy^{k(c+2)}z = 0^{c-k}\,0^{k(c+2)}\,1^d$

$\Rightarrow c-k+kc+2k+d \overset{d}{=} c(k+1)+k+d \overset{d}{=} c(k+1)+k \overset{d}{=} k(c+1)+c \overset{d}{\neq} 0$

از طرفی $k \overset{d}{\neq} 0$ را می‌دانیم $0 \overset{q}{=} p$ پس $p+1 \overset{q}{=} 1$ است که نتیجه می‌گیریم جواب عضو زبان L است که تناقض

در نتیجه این زبان بی‌قاعده است.

خ)

$L=\{a^n b^l c^t \mid k < n+l,\ \{n,k,l\} \in \{0,1,2,\ldots\}\}$

ما متغیر m را Pumping Lemma می‌گیریم $|w| \ge m$

$w = a\ldots \overbrace{aa\ldots aa}^{m}\ \overbrace{ab\ldots b}^{n}\overbrace{c\ldots c}^{k}$ $\quad |xy| \le m\ ,\ |y| \ge 1$

$xy^iz \in L\ ,\ i=0,1,2,\ldots \quad y=a^k\ ,\ k \ge 1 \longrightarrow$ این تناقض ← پس زبان بی‌قاعده است

$i=0 \quad a^{m-k}\,b^n\,c^{m+n-1} \overset{k<n+l}{\Rightarrow} m-k+n > m+n-1 \Rightarrow k<1$

د)

$L=\{b^n a^{2m} \mid 0 \le m < n\} \cup \{a^n b^m c^k \mid 0 \le k = 0 \le m\} \cap \{c^n 1^{2n} \mid n \ge 0\}$

$a^n c^{2n} \longrightarrow \underbrace{a\ldots a}_{v}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots a\,c\ldots c}_{z}\ ,\ k \ge 1 \xrightarrow[\substack{i=k \\ i=0,1,2,\ldots}]{xy^iz \in L} a^{n+k}c^{2n} \Rightarrow 2(n+k) \neq 2n \Rightarrow$ عضو L نیست

$\underset{0 \le m < n}{b^n a^{2m}} \longrightarrow \overbrace{\underbrace{b\ldots b}_{v}\underbrace{b\,b\ldots}_{y}}^{c+1}\underbrace{bb\ldots b\,\overbrace{a\ldots a}^{2c}}_{z}\ \ k \ge 1 \xrightarrow[i=0]{xy^iz \in L,\ i=0,1,2,\ldots} b^{c+1-k}a^{2c}$

$\Rightarrow c+1-k > c \longrightarrow k<1$ ⇐ تناقض

پس زبان L بی‌قاعده است (در اشتراک که اگر یکی بی‌قاعده باشد کل بی‌قاعده می‌شود و در اجتماع هم دو را بررسی کردیم)

PAPCO

Scanned with CamScanner