Вероятность наугад выбрать одну копилку из (k+1) равновер и составляет:

$$p_i = \frac{1}{k+1}$$

Вероятность выпадения 1 фальшивой монеты составляет:

$$q_i = \frac{k+1-i}{k}$$

Вероятность, что все выпавшие монеты в результате эксперимента будут фальшивые:

$$P = \frac{1}{k+1}\sum_i\left(\frac{k+1-i}{k}\right)^n$$

Соответственно вероятность, что следующая монета будет фальшивая, составляет:

$$P_k(n) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{k+1-i}{k}\right)^{n+1}$$

1) При $k = 5$, $n = 2$:

$$P_5(2) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{6-i}{5}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(\frac{5}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{0}{5}\right)^3\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{125+64+27+8+1}{125} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{5} = \underline{\underline{0{,}3}}$$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} P_k(99)$

$$P_k(99) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{k+1-i}{k}\right)^{99} \Rightarrow \left| \text{т.к. } \frac{k+1-i}{k} \approx 1 - \frac{i}{k} \right| \Rightarrow \left| x = 1 - \frac{i}{k} \right| \Rightarrow$$

использ. интег

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} P_k(99) = \int_0^1 x^{99}\,dx = \frac{x^{100}}{100}\Big|_0^1 = \underline{\underline{0{,}01}}$$

3) $1000\cdot\left(P_5(2) + \lim\limits_{k\to\infty} P_k(99)\right) = 1000\,(0{,}3 + 0{,}01) = \underline{\underline{310}}$

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k(n)$ в замкнутом виде от n

$$P_k(n) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{k+1-i}{k}\right)^{n+1}$$

1. Т.к $k \to \infty \Rightarrow \frac{k+1-i}{k} = 1 - \frac{i-1}{k}$

2. При $k \to \infty$: $1 - \frac{i-1}{k}$ - становится бесконечно малым и выражение $\left(1-\frac{i-1}{k}\right)^{n+1}$ стремится $e^{-\frac{(i-1)(n+1)}{k}}$ по принципу экспонинциального приближения

3. Представим предел суммы как интеграл, где $x = \frac{i-1}{k}$; $dx = \frac{1}{k}$

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left(1-\frac{i-1}{k}\right)^{n+1} \approx \int_0^1 (1-x)^{n+1}dx = \left| \begin{matrix} u = 1-x \\ du = -dx \end{matrix} \right| = \int_0^1 u^{n+1}(-du)$$

$$= \int_0^1 u^{n+1}du = \frac{u^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{k\to\infty} P_k(n) = \frac{1}{n+2}$$