БЛОЧНЫЕ КОДЫ

1) Дополнение до чётности: трёхмерный вариант

27 символов для кодирования:

101 011 110 - 011 000 111 - 010 001 110

Первые 4 матрицы дополнены до чётности по строкам и столбцам. Четвёртая матрица – это дополнение до чётности элементов «в глубину»

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{pmatrix}$$

Перепишем нашу последовательность в закодированном виде: сначала – исходные символы, после – дополнения (парами: по вертикали и горизонтали) и в конце – тройка дополнения «по глубине» (сверху вниз по строкам):

101 011 110 - 011 000 111 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

Декодирование следующее: снова дополняем до чётности. В строках и столбцах, где не ноль – возможна ошибка. По глубине – также *(это доп. параметр – если в каждой группе по одной ошибке, то это не нужно).*

Вносим ошибки и ДЕкодируем:

ВАРИАНТ 1: в каждой группе по ошибке

101 111 110 - 011 010 111 - 110 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 2: в одной группе две ошибки, в другой - одна

111 010 110 - 011 000 011 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Каждый бит имеет номер, состоящий из 3 чисел: его координат по X (строка), Y (столбец), Z (слой). Начало отсчёта строк и столбцов – сверху-слева. Слои отсчитываются слева направо.

Красным отмечены подозрительные на нарушение биты:

1-ый слой: 1,2,1 | 1,3,1 | 2,2,1 | 2,3,1

2-ой слой: 3,1,2

По проверки чётности на глубину мы можем сказать, что ошибкам м.б. подвержены биты с X и Y, равными 1,2 | 2,3 | 3,1 . При сопоставлении со слоями 1 и 2 видно, что данному условию удовлетворяют биты: 1,2,1 | 2,3,1 | 3,1,2

ВАРИАНТ 3: три ошибки в одной группе

111 010 100 - 011 000 111 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&0&0&1\\1&0&0&0&1\\0&0&0&&\\0&0&1&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0\\1&0&0&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

При декодировании видно, что группы 2 и 3 ошибок не содержат, а вот группа 1 – подвержена им крайне сильно. В таком случае мы просто смотрим на матрицу чётности по глубине – в местах, где стоят единицы, мы имеем ошибки в 1-ой группе.

Посмотрим этот алгоритм с ошибками в другой группе:

101 011 110 - 001 100 011 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\1&0&0&0&1\\0&1&1&1&1\\1&0&0&&\\0&1&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Как и ранее, мы видим, что ошибки возникают только во второй группе. И, как ранее, посмотрев на матрицу чётности по глубине мы обнаружим биты из второй группы, подверженные ошибке.

ВАРИАНТ 4: две ошибки в одной строке / одном столбце

110 011 110 - 011 000 111 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&&\\0&1&1&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0\\1&0&0&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Как мы видим, чётность в строках не нарушена. Зато чётность по столбцам говорит, что во 2 и 3 столбцах есть ошибки. Сопоставив с матрицей «по глубине», мы их сразу найдём.

Аналогично – для ошибок по столбцу:

111 001 110 - 011 000 111 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\1&1&0&0&0\\0&0&0&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0\\1&0&0&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ 5: четыре ошибки: алгоритм ломается!

В одной группе (попытка 1):

110 101 110 - 011 000 111 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&&\\1&0&1&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0\\1&0&0&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Просто наложив матрицу чётности «по глубине», мы найдём ошибки.

В одной группе (попытка 2):

101 011 110 - 111 101 110 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&1\\1&0&0&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Просто наложив матрицу чётности «по глубине», мы найдём ошибки.

В одной группе (попытка 3):

101 011 110 - 111 011 110 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&1&0&0\\1&1&0&1&1\\1&0&0&&\\1&1&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Просто наложив матрицу чётности «по глубине», мы найдём ошибки.

В **разных** группах (по две – случай 2+1+1 не отличается от варианта 2):

001 011 100 - 111 001 111 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-111

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&&\\1&1&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\1&1&1&1&0\\1&0&0&&\\1&0&1&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&&\\0&0&0&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Выпишем все подозреваемые на ошибку биты:

1-ый слой: 1,1,1 | 1,2,1 | 3,1,1 | 3,2,1

2-ой слой: 1,1,2 | 1,3,2 | 2,1,2 | 2,3,2

Слой по глубине говорит нам, что ошибки м.б. в битах с X,Y = 2,3 | 3,2

Это нам ничего не даст, т.к. ошибки в битах 1,1,1 | 3,2,1 | 1,1,2 | 2,3,2

ВАРИАНТ 6: ошибка в контрольном бите

101 011 110 - 011 000 111 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-110

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка внутри слоёв не дала обнаружения ошибок. Далее, в зависимости от реализации алгоритма мы или игнорируем указатель на ошибку в матрице «по глубине», или продолжаем работу исходя из того, что **число и расположение сломанных бит неизвестно**.

ВАРИАНТ 7: ошибка в контрольном бите и информационном

101 011 110 - 011 010 111 - 010 001 110 – 000-000 – 001-100 – 110-101 – 100-010-110

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка внутри слоёв дала ошибку во втором слое. Однако проверка матрицей по глубине сообщает, что есть неустановленная ошибка в другом месте.

Далее, в зависимости от реализации алгоритма мы или игнорируем второй указатель на ошибку в матрице «по глубине» (первый совпадает с проверкой внутри слоя), или продолжаем работу исходя из того, что **число и расположение сломанных бит неизвестно**.

ВЫВОДЫ ПО АЛГОРИТМЫ КОДИРОВАНИЯ: Данный алгоритм способен обнаружить ошибки в коде и исправить их, если допущено не более 3 ошибок. При наличии ошибок в контрольных битах мы можем или отбросить их (на свой страх и риск), или запросить последовательность заново.

ПЛЮСЫ: простота реализации; исправляет до 3 ошибок в информационных битах.

МИНУСЫ: избыточность не спасает от ошибки в контрольном бите.