Domanda 29: Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto. Spiegare il significato geometrico della derivata.

$$f:]a,b[\to \mathbb{R}, per\ x_0 \in]a,b[\text{ definiamo } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\forall x \in\ x_0, \text{ rapporto incrementale di } f\ in\ x_0.$$

$$\text{Se } \exists \text{ limite finito per } x \to x_0,$$

$$f^I(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f^I(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)}{x - x_0} \text{, DERIVATA di } f\ in\ x_0$$

Compiendo un cambio di variabile $h = x - x_0$, $x = x_0 + h$ con $x \to x_0 \Rightarrow h \to 0$ si ottiene e se $\exists$ il suo limite per $h \to 0$ allora:

$$f^I(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)}{h}$$

Il significato geometrico di una funzione in un punto mette in relazione il grafico della funzione e la retta tangente ad esso nel punto considerato: la derivata nel punto ha il significato geometrico di coefficiente angolare della retta tangente. Il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $\big(x_0, f(x_0)\big)$. La retta tangente avrà equazione:

$$y = f(x_0) + f^I(x_0)(x - x_0)$$

Tale retta è tangente al grafico di f in P_0 se è il limite della retta secante per P_0, $P_h = (x_0 + h\ , f(x_0 + h)$ quando $h \to 0$. La retta secante avrà come equazione:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} * (x - x_0)$$

Domanda 30: Scrivere la definizione di funzione continua e di funzione derivabile in un punto. Enunciare e dimostrare la relazione fra continuità e derivabilità.

Funzione continua: se $f: X \to \mathbb{R}, x_0 \in X, x_0$ di accumulazione per X e vale $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, f si dice continua in x_0. f è continua se vale questo $\forall x_0 \in X$ di accumulazione per X.

Funzione derivabile in un punto: $f:]a,b[\to \mathbb{R}, per\ x_0 \in]a,b[$ si dice derivabile in x_0 se $\exists$ limite finito: $f^I(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0}$, tale limite si chiama derivata di f in x_0.

Continuità e derivabilità: $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, derivablie in $x_0 \in]a,b[$ allora f è continua in x_0.

Dimostrazione della relazione fra continuità e derivabilità:

f Derivabile in un intorno x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f^I(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Passando al limite per $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to\ x_0} f(x) = [f(x_0) + f^I(\ x_0)(x -\ x_0) + o(x - x_0)] = f(\ x_0) + 0 + 0 = f(x_0)$$

Definizione di funzione continua in x_0.

Domanda 31: Scrivere la definizione di derivata destra e sinistra, di punto angoloso, di cuspide, di flesso a tangente verticale.

Sia $f\colon]a,b[\to \mathbb{R},\ x_0 \in]a,b[$, definiamo:
Derivata Destra di f in x_0, se ∃, anche $\pm\infty$:

$$f_+^I(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivata Sinistra di f in x_0, se ∃, anche $\pm\infty$:

$$f_-^I(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se la derivata destra e la derivata sinistra esistono e sono uguali allora f è derivabile in x_0.

$f\colon]a,b[\to \mathbb{R}, per\ x_0 \in]a,b[$, f continua in x_0 ma non derivabile:

$\exists\ f_-^I(x_0)\,, f_+^I(x_0)$ e almeno una è finita: x_0 è detto punto angoloso.

$\exists\ f_-^I(x_0) = f_+^I(x_0) = +\infty$ (o $-\infty$): x_0 è detto flesso a tangente verticale.

$\exists\ f_-^I(x_0) = -\infty\,,\ f_+^I(x_0) = +\infty$ oppure $f_-^I(x_0) = +\infty\,,\ f_+^I(x_0) = -\infty$: x_0 è detto cuspide.

Domanda 32: Enunciare il teorema sull'algebra delle derivate e dimostrare la regola di derivazione del prodotto (regola di Leibniz).

Dati $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, derivabile in $x_0 \in]a,b[$, allora:

1) $\exists\ (f \pm g)^I(x_0) = f^I(x_0) \pm g^I(x_0)$
   $\forall c \in \mathbb{R}\,, \exists (c * f)^I(x_0) = c * f^I(x_0)$
2) $\exists\ (f * g)^I(x_0) = f^I(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g^I(x_0)$
   Formula di Leibniz
3) Se $g(x_0) \neq 0\,, \exists \left(\frac{1}{g}\right)^I (x_0) = -\frac{g^I}{[g(x_0)]^2}$
   $\exists \left(\frac{f}{g}\right)^I (x_0) = \frac{\left(f^I(x_0)g(x_0) - f(x_0)g^I(x_0)\right)}{[g(x_0)]^2}$

Dimostrazione:

se $\exists\ (f * g)^I(x_0) =$
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)*g(x_0+h) - f(x_0)*g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x_0+h)*g(x_0+h) - f(x_0)*g(x_0+h)] + [f(x_0)*g(x_0+h) - f(x_0)*g(x_0)]}{h} =$
$\lim_{h \to 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))}{h} * g(x_0 + h) + \lim_{h \to 0} f(x_0) * \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$

$$= f^I(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g^I(x_0)$$

Poiché g è derivabile in x_0e quindi è una funzione continua, per il teorema sulla continuità delle funzioni derivabili $\Rightarrow \lim_{h \to 0} g(x_0 + h) = g(x_0)$

Domanda 33: Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta (regola della catena).

Date f definita in un intorno di $y_0 = g(x_0)$ e derivabile in y_0, g derivabile in x_0, $f \circ g$ definiti in un intorno di x_0, allora:

$$\exists\ (f \circ g)^I(x_0) = f^I\big(g(x_0)\big) * g^I(x_0)$$

Dimostrazione:

se $\exists\ (f \circ g)^I(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}$ = dalla caratterizzazione della derivabilità di f in

$y_0 = g(x_0)$, $\forall y$ in un intorno $\mathrm{U}g(x_0)$ di $g(x_0)$:

1) $f(y) = f\big(g(x_0)\big) + f^I\big(g(x_0)\big)\big(y - g(x_0)\big) + \sigma\big(y - g(x_0)\big)$
   Poiché è derivabile in x_0, $\lim_{h\to 0} g(x_0 + h) = g(x_0) \Rightarrow$ per h sufficientemente piccolo,
   $$y = g(x_0 + h) \in \mathrm{U}g(x_0)$$
   Dalla 1 segue:
2) $f(g(x_0 + h) - f\big(g(x_0)\big) = f^I\big(g(x_0)\big) * [g(x_0 + h) - g(x_0)] + \sigma((g(x_0 + h) - g(x_0)) * 1) = [g(x_0 + h) - g(x_0)] * \sigma(1)$

Sostituiamo il punto 2 nel limite iniziale:

$$(f \circ g)^I(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^I(g(x_0)) * [g(x_0 + h) - g(x_0)] + [g(x_0 + h) - g(x_0)] * \sigma(1)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} f^I\big(g(x_0)\big) * \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} * \sigma(1) =$$

$$f^I\big(g(x_0)\big) * g^I(x_0) + g^I(x_0) * 0 = f^I\big(g(x_0)\big) * g^I(x_0)$$

Domanda 34: Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione inversa.

Data $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, continua in $]a,b[$ e invertibile, se f è derivabile in $x_0 \in]a,b[$ e $f^I(x_0) \neq 0$, detto

$y_0 = f(x_0)$, $\exists\ (f^{-1})^I(y_0) = \frac{1}{f^I(x_0)}$

Dimostrazione: Dati $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ continua e invertibile, dai Teoremi sulle funzioni continue in un intervallo, $f(\,]a,b[\,) \to]a,b[$ è continua. Quindi:

$$\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0$$

Se $\exists$, $(f^{-1})^I(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$ = faccio un cambio di variabili

$$\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ \lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = x_0 \end{cases} \begin{cases} y = f(x) \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f^I(x_0)}$$

Domanda 35: Scrivere la definizione di punto di massimo e minimo relativo e la definizione di punto critico o stazionario. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

Punto di Minimo:

$f: X \to \mathbb{R}$, $x \neq \emptyset, x_0 \in X$ si dice punto di minimo locale o relativo se

$\exists\ \mathrm{U}x_0 =]x_0 - \delta , x_0 + \delta[$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in X \cap \mathrm{U}x_0$ (stretto se $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \neq x_0$).

Punto di Massimo:

$x_1 \in X$si dice punto di massimo relativo o locale se $\exists\ \mathrm{U}x_1 =]x_1 - \delta , x_1 + \delta[$ tale che $f(x) \leq f(x_1)$ $\forall x \in X \cap \mathrm{U}x_1$ (stretto se $f(x) < f(x_1)$ $\forall x \neq x_1$).

Un punto critico è un punto del dominio per cui la derivata prima o è nulla ($f^I(x_0) = 0$) o non esiste ($\nexists\ f^I(x_0)$).

Teorema di Fermat:

Se $f: X \to \mathbb{R}$ ha un punto di massimo o minimo relativo in x_0 interno a X, dove f è derivabile, allora: $f^I(x_0) = 0$.

Dimostrazione: Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo di f, quindi

$\exists\ \mathrm{U}x_0 =]x_0 - \delta , x_0 + \delta[\subseteq X$ (x_0 interno) dove $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in \mathrm{U}x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$

Scriviamo il rapporto incrementale di f in x_0:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} x > x_0 : \dfrac{NUM \leq 0}{DEN > 0} \leq 0 \\ x < x_0 : \dfrac{NUM \leq 0}{DEN < 0} \geq 0 \end{cases}$$

Passando ai limiti:

$$f_+^I(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$$

$$f_-^I(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

Ma f è derivabile in x_0 quindi:

$$f(x_0) = f_+^I(x_0) = f_-^I(x_0) = 0$$

Domanda 36: Enunciare e dimostrare uno a scelta fra il Teorema di Rolle e il Teorema di Lagrange (o del Valor Medio).

Teorema di Rolle:

Se $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ con $f(a) = f(b)$, allora $\exists\ c\ \in]a, b[$ dove $f^I(c) = 0$.

Dimostrazione:

f continua su $[a, b]$ ha minimo e massimo assoluti in $[a, b]$

1. Se il minimo e il massimo sono entrambi negli estremi, poiché per ipotesi $f(a) = f(b) \Longrightarrow m = M \Longrightarrow f(x) = costante$. È $d(costante) = 0\ \forall c \in]a, b[$. Quindi $\exists\ c$.
2. Almeno uno dei 2 è assunto all'interno di $]a, b[$. In questo punto detto c, deve essere $f^I(c) = 0$ per il Teorema di Fermat.

Teorema di Lagrange: Sia

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, allora $\exists\ c\ \in]a, b[$ dove $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^I(c)$

Dimostrazione:

definiamo $F(x) = f(x) - y = f(x) - \left[f(a) * \frac{f(b)-f(a)}{b-a} * (x - a)\right]$

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in [a,b] , derivabile in]a,b[e:

- $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} * (a - a) = 0$
- $F(b) = f(b) - f(a) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} * (b - a)\right] = 0$
  $\Longrightarrow F(a) = F(b) = 0.$

Per Rolle, $\exists\ c\ \in]a, b[$ dove: $F^I(c) = f^I(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Longrightarrow f^I(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Domanda 37: Caratterizzare le funzioni costanti su un intervallo I (cioè dimostrare che una funzione è costante su I se e solo se la sua derivata è nulla in tutti i punti di I).

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in [a,b] e derivabile in]a,b[, allora $f^I(x) = 0\ \forall x \in]a, b[\Leftrightarrow f(x) =$ costante in [a,b]

Dimostrazione:

- Se $f(x) = costante$, allora $f^I(x) = 0\ \forall x \in]a, b[$
- Supponiamo $f^I(x) = 0\ \forall x \in]a, b[$ Vogliamo dimostrare che $f(x) = costante$ in [a,b] $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2, vale\ f(x_1) = f(x_2)$

Presi $x_1\ e\ x_2$ applichiamo il Teorema di Lagrange a $f$in $[x_1, x_2]$: $\exists c \in]x_1, x_2[\ tale\ che$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f^I(c) = 0 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in [a, b] \Longrightarrow f(x) = costante$$

Domanda 38: Scrivere la definizione di funzione monotona. Enunciare e dimostrare il Test di monotonia.

Definizione di funzione monotona:

- Crescente se $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Decrescente se $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Strettamente decrescente se $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in [a,b] e derivabile in]a,b[allora:

- f è crescente in [a,b]$\Leftrightarrow f^I(x) \geq 0 \ in \ ]a,b[$
- f è decrescente in [a,b] $\Leftrightarrow f^I(x) \leq 0 \ in \ ]a,b[$
- f è strettamente crescente in [a,b] $\Leftrightarrow f^I(x) \geq 0 \ in \ ]a,b[$ e non esestono intervalli dove $f^I(x) = 0$
- f è strettamente decrescente in [a,b] $\Leftrightarrow f^I(x) \leq 0 \ in \ ]a,b[$ e non esistono intervalli dove $f^I(x) = 0$

Dimostrazione: (solo per funzioni crescenti)

1. Supponiamo f crescente in [a,b] e dimostrare che $f^I(x) \geq 0 \ in \ ]a,b[$:

   $\forall x_0 \in]a,b[$, basta scrivere il rapporto incrementale di f:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} f(x) \geq f(x_0), & x > x_0 : \dfrac{NUM \geq 0}{DEN > 0} \geq 0 \\ f(x) \leq f(x_0), & x < x_0 : \dfrac{NUM \leq 0}{DEN < 0} \geq 0 \end{cases}$$

   $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f^I(x_0) \geq 0$ per il Teorema di Permanenza del Segno seconda forma.

2. Supponiamo che $f^I(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[$ e dimostriamo che f è crescente
   Ipotesi f crescente $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a.b], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Presi questi x_1, x_2 applichiamo il Teorema di Lagrange alla funzione in $[x_1, x_2]$. Allora $\exists c \in]x_1, x_2[$ tale che $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f^I(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Domanda 39: Definire una funzione concava o convessa in un intervallo. Enunciare il Test di convessità (cioè il Teorema sulle condizioni equivalenti alla convessità/concavità per le f derivabili).

Concava/Convessa:

I = intervallo generico, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice:

- Convessa in I se $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$:
$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} * (x - x_1) \ \forall x \in [x_1, x_2]$$
- Strettamente convessa in I $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$:
$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} * (x - x_1) \ \forall x \in]x_1, x_2[$$
- Concava in I se I $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$:
$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} * (x - x_1) \ \forall x \in [x_1, x_2]$$
- Strettamente concava in I se $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$:
$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} * (x - x_1) \ \forall x \in]x_1, x_2[$$

Test convessità:

Dato I = intervallo aperto, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora sono equivalenti:

1. f è convessa (concava) in I;
2. $f(x) \geq (\leq) f(x_0) + f^I(x_0) * (x - x_0)\ \forall x, x_0 \in I$;
3. $f^I: I \to \mathbb{R}$ è una funzione crescente (Decrescente);
   se $\exists\ f^{II} \forall x \in I$:
4. $f^{II}(x) \geq 0\ (f^{II}(x) \leq 0)\ \forall x \in I$.

Domanda 40: Enunciare il Teorema di De l'Hôpital.

Siano f,g derivabili in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}^*$ (escluso eventualmente x_0) e $g^I(x) \neq 0$ in tale insieme. Allora se:

1. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$ (f,g infinitesime per $x \to x_0$). Oppure
2. $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ e f qualsiasi, allora

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^I(x)}{g^I(x)} \text{ se } \exists \text{ il secondo limite}$$

Domanda 41: Enunciare la formula di Taylor di ordine n con resto (a scelta) nella forma di Peano o di Lagrange.

Formula di Taylor con resto di Peano:

Data f derivabile n volte in x_0, allora $\exists$ un unico polinomio:

$$T_n(x) = f(x_0) + f^I(x_0) * (x - x_0) + \frac{1}{2} f^{II}(x_0) * (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} * f^n(x_0) * (x - x_0)^n$$

Polinomio di Taylor di f in x=x_0, di ordine n per cui vale:

$$f(x) = Tn(x) + o((x - x_0)^n)$$

Spesso, $Rn((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^n)$ Resto di Peano.

Formula di Taylor con resto di Lagrange:

Data $f \in C^{n+1}([a, b]), \forall x_0 \in [a, b], \exists c \in [a, b]$ tale che

$$f(x) = Tn(x) + \frac{1}{(n+1)!} * f^{n+1}(c) * (x - x_0)^{n+1}$$

$Rn(x) = \frac{1}{(n+1)!} * f^{n+1}(c) * (x - x_0)^{n+1}$ resto n-esimo di Lagrange.

Domanda 42: Definire le somme di Cauchy–Riemann e dare la definizione di integrale definito di una funzione limitata su un intervallo [a; b].

Data $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, f limitata se le somme di Cauchy – Rienmann di f, costruite prendendo: $\forall n$ la suddivisione di [a,b]: $x_0 = a, x_1 = a + h , \dots , x_n = a + nh = b$ con $h = \frac{b-a}{n}$ e ponendo:

$$Sn = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) * (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) * \frac{b-a}{n}$$

Hanno tutte lo stesso limite finito, f si dice integrabile e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n Sn$$

Domanda 43: Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

Data $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $\exists\ c \in [a, b]$ tale che $\frac{1}{b-a} * \int_a^b f(x)dx = f(c)$

Dimostrazione:

$f \in \mathcal{C}([a, b]) \implies \exists m(minimo\ assoluto), M(massimo\ assoluto)\ di\ f\ in\ [a, b]$ per il teorema di Weierstrass. Quindi: $m \le f(x) \le M\ \forall x \in [a, b]$. Per la monotonia dell'integrale:

$$m(b-a) = \int_a^b m\ dx \le \int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b M\ dx = M(b-a)$$

$$m \le \frac{1}{b-a} * \int_a^b f(x)\ dx \le M$$

$\frac{1}{b-a} * \int_a^b f(x)\ dx = y \in [m, M]$, per il teorema dei valori intermedi $\exists\ c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = y = \frac{1}{a-b} * \int_a^b f(x)\ dx$$

Domanda 44: Scrivere la definizione di primitiva. Dimostrare che due primitive definite su un intervallo differiscono al più per una costante.

Data $f \in \mathcal{C}(I)$, G è primitiva di f se $G^I(x) = f(x)\ \forall x \in I$

Se $F, G \in \mathcal{C}^1(I)$, primitive di $f \in \mathcal{C}(I)$, allora: $G(x) = F(x) + k\ \forall x \in I$ e per qualunque $k \in \mathbb{R}$

Dimostrazione:

Consideriamo la differenza G-F (primitive di $f(x)$) e deriviamo:

$$(G-F)^I(x) = G^I(x) - F^I(x) = f(x) - f(x) = 0\ \forall x \in I$$

Per la caratterizzazione delle costanti su un intervallo:

$G(x) - F(x) = k\ \forall x \in I$, per qualunque $k \in \mathbb{R}$

Domanda 45: Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per parti.

$f, g \in C^1([a, b])$, allora:

$$\int f^I(x) * g(x)\, dx = f(x) * g(x) - \int f(x) * g^I(x)\, dx$$

Per l'integrale definito:

$$\int_a^b f^I(x) * g(x)\, dx = [f(x) * g(x)]_b^a - \int_a^b f(x) * g^I(x)\, dx$$

Dimostrazione:

Consideriamo la derivazione del prodotto $(f(x) * g(x))^I = f^I(x) * g(x) + f(x) * g^I(x)$ e integriamo (in modo indefinito)

$$\int (f(x) * g(x))^I\, dx = \int f^I(x) * g(x)\, dx + \int f(x) * g^I(x)\, dx$$

$$\int f^I(x) * g(x)\, dx = f(x) * g(x) - \int f(x) * g^I(x)\, dx$$

Domanda 46: Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per sostituzione.

Data $g \in C([a, b])$, $f \in C^I([c, d])$, $f: [c, d] \to [a, b]$, allora: $(y = f(x))$

$$\int g\big(f(x)\big) * f^I(x)\, dx = \int g(y)\, dy$$

Sostituzione:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ dy = f^I(x)\, dx \end{cases}$$

Se $G(y)$ è primitiva di g:

$$\int g\big(f(x)\big) * f^I(x) dx = G\big(f(x)\big) + k \ , \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione:

se G(y) è primitiva di g, consideriamo

$$(G \circ f)^I = G^I\big(f(x)\big) * f^I(x) = g\big(f(x)\big) * f^I(x)$$

Integrando in modo indefinito

$$\int (G \circ f)^I(x)\, dx = \int g\big(f(x)\big) * f^I(x)\, dx = G\big(f(x)\big) + k\,, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Domanda 47: Scrivere la definizione di funzione integrale. Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del Calcolo integrale (secondo, sul libro di testo).

Funzione Integrale: $f \in \mathcal{C}(\,[a,b]\,)$, si dice funzione integrale: $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad \forall x \in [a,b]$

Teorema fondamentale del Calcolo integrale:

Data $f \in \mathcal{C}(\,[a,b]\,)$, la sua funzione di centro a: $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad \forall x \in [a,b]$ è una primitiva di f cioè:

$$F \in \mathcal{C}^1(\,[a,b]\,) \text{ e } F^I(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Dimostrazione:

Se $\forall x \in [a,b]$ fissato $\exists F^I(x)$, che è dato da:

$$F^I(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} * \left\{ \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right\} =$$

Per Additività

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} * \left\{ \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right\} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} * \int_x^{x+h} f(t)\, dt =$$

Dal Teorema della Media

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_h) = \lim_{h\to 0} f(c_h) = f(\lim_{h\to 0} c_h) = f(x)$$

Quindi

$$\exists F^I(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Quindi F è derivabile in [a,b] e $F \in \mathcal{C}^1(\,[a,b]\,)$, perché la sua derivata f è continua in [a,b] .

Domanda 48: Enunciare e dimostrare il corollario del Teorema fondamentale del Calcolo integrale (primo teorema fondamentale del Calcolo integrale sul libro di testo).

Data $f \in \mathcal{C}(\,[a,b]\,)$, se G è un'arbitraria primitiva di f, allora:

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Dimostrazione:

Se G è primitiva di f, visto che tutte le primitive differiscono al più per una costante $k \in \mathbb{R}$:

$G(x) = \int_a^b f(t)\, dt + k$ $\qquad$ ($F(x) = \int_a^b f(t)\, dt$ è primitiva per il Teorema fondamentale secondo)

$$G(a) = \int_a^a f(t)\; dt + k = 0 + k \Longrightarrow G(a) = k$$

$$G(b) = \int_a^b f(t)\, dt + G(a) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a)$$

Domanda 49: Dare la definizione di integrale generalizzato su intervalli illimitati per funzioni non negative. Scrivere poi anche la definizione di integrale generalizzato su intervalli limitati per funzioni non negative.

Integrale generalizzato su intervalli illimitati per funzioni non negative:

Data $f: [a, +\infty[\to [0, +\infty[$, integrabile in [a,x] $\forall x > a$. Allora definiamo l'integrale in senso generalizzato in $[a, +\infty[$ come:

$$I = \int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

I è finito: f si dice integrabile in senso generalizzato se $[a, +\infty[$ o che converge;
$I = +\infty$: f si dice non integrabile in senso generalizzato se $[a, +\infty[$ o che I diverge.

Data $f:]a, b] \to [0, +\infty[$, integrabile in [x,b] $\forall\, a < x < b$, allora definiamo l'integrale in senso generalizzato in [a,b] di f:

$$I = \int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\, dt$$

Data $f: [a, b[\to [0, +\infty[$, integrabile in [a,x] $\forall\, a < x < b$, allora definiamo l'integrale in senso generalizzato in [a,b] di f:

$$I = \int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$$

- I è finito: f integrabile in senso generalizzato in [a,b] ; I converge
- $I = +\infty$: f non è integrabile in senso generalizzato in [a,b]; I diverge

Domanda 50: Enunciare il criterio del confronto per gli integrali generalizzati su intervalli illimitati (o limitati, a scelta).

Date $f, g: [a, +\infty[\to [0, +\infty[$, integrabili in [a,x] $\forall x > a$ e tali che:

$$f(x) \leq g(x)\, , \forall x \geq a$$

Allora:

- se g è integrabile in senso generale in $[a, +\infty[$ anche f lo è;
- se f non è integrabile in senso generale in $[a, +\infty[$ allora neanche g lo è.

Domanda 51: Enunciare il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati su intervalli illimitati.

Date $f, g: [a, +\infty[\to [0, +\infty[$, integrabili in [a,x] $\forall x > a$ allora:

1. se $f \sim L * g$ per $x \to +\infty$ $(L \neq 0, L \in \mathbb{R})$ cioè $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$
   allora f è integrabile in senso generale in $[a, +\infty[\Leftrightarrow g$ lo è.
2. Se $f = o(g)$ per $x \to +\infty$, allora:
   se g è integrabile in senso generale in $[a, +\infty[$ anche f lo è;
   se f non è integrabile in senso generale in $[a, +\infty[$ anche g non lo è.

Domanda 52: Enunciare il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati su intervalli limitati.

Date $f, g:]a, b] \to]0, +\infty[$, integrabili in [x,b] $\forall x \in]a, b[$ se $per\ x \to a^+$, allora:

1) $f \sim Lg$, fè integrabile in senso generalizzato $\Leftrightarrow$ lo è $g(L \neq 0)$
2) $f = o(g)$,
   a) se gè integrabile in senso generalizzato, anche f lo è;
   b) se f non è integrabile in senso generalizzato, neppure $g$lo è.

Domanda 53: Scrivere la definizione di serie convergente, divergente, irregolare (o indeterminata). Presentare un esempio per tipo.

Somma della serie se: $S = \lim_n Sn = \lim_n \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

Se $\exists$ S finito, allora diciamo che la serie converge: $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S$ esempio: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k*(k+1)}$

Se $\exists S = +\infty\ (o - \infty)$, diciamo che la serie diverge a $+\infty\ (o - \infty)$: $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty\ (o - \infty)$ esempio: $\sum_{k=1}^{+\infty} k$, $Sn = 1 + 2 + \cdots + k$

Se $\nexists S = \lim_n Sn$, diciamo che la serie è irregolare. Esempio: $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$

Domanda 54: Definire le serie telescopiche e discuterne le proprietà di convergenza. Esibire un esempio di serie telescopica.

Una serie $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è telescopica quando $\exists\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_n = (b_n - b_{n+1})\ \forall n$

Proprietà:

- $S_1 = a_1 = (b_1 - b_2)$
- $S_2 = a_1 + a_2 = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = (b_1 - b_3)$
- …
- $S_n = a_1 + \cdots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_{n+1})$

Quindi:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) = \lim_n (b_1 - b_{n+1})$$

Proprietà di convergenza:

- La serie diverge $\Leftrightarrow \exists \lim_n b_{n+1} = +\infty$ (o $- \infty$)
- La serie converge $\Leftrightarrow \exists \lim_n b_{n+1} = b \in \mathbb{R}$ (somma $= b_1 - b$)
- La serie è irregolare $\Leftrightarrow \nexists \lim_n b_{n+1}$

Domanda 55: Scrivere la definizione di serie geometrica. Enunciare e dimostrare quando converge/ diverge/è irregolare.

Definizione di serie geometrica:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^k$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} q^k \begin{cases} -1 < q < 1, cioè\ |q| < 1 : converge\ a \dfrac{1}{1-q} \\ q \geq 1: diverge + \infty \\ q \leq -1 : irregolare \end{cases}$$

Dimostrazione:

Essendo $Sn = 1 + 1^n + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq n)$

$$\mathrm{S} = \lim_{n \to +\infty} Sn = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} \ \text{ se } |q| < 1 \\ +\infty \ \text{ se } q \geq 1 \\ \nexists \ \text{ se } q \leq 1 \end{cases}$$

Domanda 56: Enunciare e dimostrare la proprietà fondamentale delle serie a termini non negativi.

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ dove $a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Proprietà:
Sono convergenti o divergenti (a $+\infty$) ma mai irregolari. Dimostrazione:

Data $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ dove $a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ allora $\forall n$:

$$Sn + 1 = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + a_{n+1} = Sn + a_{n+1} \geq Sn$$

Quindi $(Sn)_n$ è una successione monotona crescente ed ha sempre limite, finito o $+\infty$ per il Teorema sul limite delle successioni monotone. Quindi $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_n Sn$ converge o diverge a $+\infty$.

Domanda 57: Scrivere la definizione di serie armonica e di serie armonica generalizzata. Enunciare le proprietà di convergenza.

Serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Diverge positivamente

Serie armonica generalizzata 1:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha < 1$

Serie armonica generalizzata 2:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}$$

Converge $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 , \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1 , \beta > 1 \end{cases}$

Domanda 58: Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza delle serie. Tale condizione è anche sufficiente? Motivare la risposta.

Condizione necessaria di convergenza della serie: se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge, allora $\lim\limits_n a_n = 0$
Dimostrazione:

sia $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim\limits_n \mathrm{S}n \in \mathbb{R}$ per ipotesi $\mathrm{S}n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) = \mathrm{S}_{n-1} + a_n \Rightarrow$

$$a_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$$

Passiamo al $\lim\limits_n$, ricordando che $\lim\limits_n \mathrm{S}_{n-1} = \lim\limits_n \mathrm{S}_n = \mathrm{S}$: $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n (\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}) = \lim\limits_n \mathrm{S}_n - \lim\limits_n \mathrm{S}_{n-1} = \mathrm{S} - \mathrm{S} = 0$

Perciò : $\lim\limits_n a_n = 0$

Domanda 59: Enunciare il criterio della radice e il criterio del rapporto per serie a termini positivi e dimostrarne uno a scelta.

Criterio della radice:
Data $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ con $a_k > 0$ da qualche N in poi e

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} L > 1, \text{serie DIVERGENTE} \\ L < 1, \text{serie CONVERGENTE} \end{cases}$$

Criterio del rapporto:
Data $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ con $a_k > 0$ da qualche $N \in \mathbb{N}$ in poi e $\exists \lim\limits_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, quando:
1. $L > 1$, la serie diverge a$+\infty$;
2. $L < 1$, la serie converge.

Dimostrazione:

Dal criterio del rapporto per le successioni, si ha $\lim\limits_n a_n = +\infty \ (\neq 0)$ se $\mathrm{L} > 1 \Longrightarrow$ la serie DIVERGE.
Dalla definizione di $\lim\limits_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, segue che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 (\geq N)$ per cui:

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \ \forall n \geq N_1$$

Possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ così piccolo per cui $a = L + \varepsilon < 1$
Per $n = N_1$:

$$\frac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}} < a \Longrightarrow a_{N_1+1} < a * a_{N_1}$$

Per $n = N_1 + 1$:

$$\frac{a_{N_1+2}}{a_{N_1}} < a \Longrightarrow a_{N_1+2} < a * a_{N_1+1} < a * a * a_{N_1} = a^2 * a_{N_1}$$

Per $n = N_1 + k - 1$:
$0 < a_{N_1+k} < a^k * a_{N_1}, a < 1$ serie geometrica convergente (a^k)
Per il teorema di confronto, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{N_1+k}$ converge e per le proprietà della serie, questo implica che converge $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Domanda 60: Enunciare il criterio del confronto o, a scelta, del confronto asintotico per le serie a termini positivi.

Criterio del confronto:
Se $0 \leq a_k \leq b_k$ da un certo $N \in \mathbb{N}$ in poi, allora:

- $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge
- $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} b_k = +\infty$

Domanda 61: Serie a termini di segno variabile: definizione di convergenza assoluta. Dimostrare che la convergenza assoluta implica quella semplice.

Convergenza assoluta della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$:
si dice che la serie converge assolutamente se converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$
Teorema:
se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

Dimostrazione:

osserviamo che, per ipotesi $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \mathrm{S}_1 \in \mathbb{R}$ e dalla proprietà del valore assoluto:

$$-|a_n| < a_n < |a_n|$$

Sommo $|a_n|$:

$$|a_n| - |a_n| = 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Poiché: $a_n + |a_n| \geq 0$ (a termini ≥ 0) e vale il Teorema del confronto sia

$$\mathrm{S}_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$$

Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ è serie CONVERGENTE}$$

Domanda 62: Definire le serie a termini a segno alterno. Enunciare il criterio di Leibniz.

Serie alternata:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ con } a_n \geq 0 \text{ (da un certo N in poi).}$$

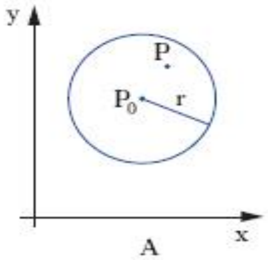
Criterio di Leibniz:
data $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$ (da un certo N in poi), serie alternata, allora se:

$$\lim_n a_n = 0 \text{ e } a_n \text{ decrescente}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ converge}$$

Domanda 63: Definizione di norma o modulo e definizione di intorno sferico per $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, nei casi n = 2, n = 3.

Per $n = 2$:
$\underline{x} = (x, y), \underline{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,
$|\underline{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Norma di $\underline{x}$,
$|\underline{x} - \underline{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ distanza da $\underline{x}$ a $\underline{x}_0$,
$\mathrm{U}(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$ Intorno di $\underline{x}_0$

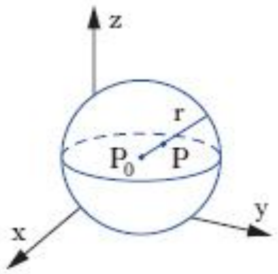


A

Intorno $\mathrm{U}(x_0, y_0)$

Cerchio di Centro $C(x_0, y_0)$ e raggio $r = \delta$

Per $n = 3$:
$\underline{x} = (x, y, z), \underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$,
$|\underline{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Norma di $\underline{x}$,
$|\underline{x} - \underline{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ distanza da $\underline{x}$ a $\underline{x}_0$,
$\mathrm{U}(x_0, y_0, z_0) = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta\}$ Intorno di $\underline{x}_0$



B

Intorno $\mathrm{U}(x_0, y_0, z_0)$ è sfera "piena"

Di centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raggio $r = \delta$

Domanda 64: Dati $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}$ o $\boldsymbol{l} = \pm\infty$, scrivere la definizione di $\lim_{\underline{x} \to \infty} \boldsymbol{f}(\underline{x}) = \boldsymbol{l}$

Definizione:

Data $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ illimitato, si dice che $\lim_{|\underline{x}| \to +\infty} f(\underline{x}) = l$ $(l \in \mathbb{R}^*) \Leftrightarrow \forall\, \mathrm{U}_l$ intorno di l in $\mathbb{R}$, $\exists N > 0$ tale che $f(\underline{x}) \in \mathrm{U}_l$ $\forall x \in X$ con $|\underline{x}| > N$

Esplicitamente in $\mathbb{R}^2$, si esplicita $\lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x, y) = l$:

$$l \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N > 0 : |f(x, y) - l| < \varepsilon, \forall (x, y) \in X, \text{con } \sqrt{x^2 + y^2} > N$$

$$l = +\infty: \forall\ M > 0\ \exists\ N > 0 : f(x) > M, \forall (x, y) \in X, \text{con } \sqrt{x^2 + y^2} > N$$

$$l = -\infty: \forall\ M < 0\ \exists\ N > 0 : f(x) < M, \forall (x, y) \in X, \text{con } \sqrt{x^2 + y^2} > N$$

Domanda 65: Dati $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$ o $l = \pm\infty$, scrivere la definizione di $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$

Data $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ di accumulazione per X, si dice $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ $(l \in \mathbb{R}^*)$ se

$\forall$ U_l intorno di l in $\mathbb{R}$, $\exists$ $U\underline{x}_0$, intorno di $\underline{x}_0$ in $\mathbb{R}^n$, tale che $f(\underline{x}) \in U_l$ $\forall$ $\underline{x} \in X \cap (U\underline{x}_0 \backslash \{\underline{x}_0\})$, cioè:

$$\forall\, \underline{x} \in X, 0 < |\underline{x} - \underline{x}_0| < \delta \text{ (per qualche } \delta > 0)$$

Esplicitamente in $\mathbb{R}^2$, si esplicita $\lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x,y) = l$:

$$l \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |f(x,y) - l| < \varepsilon, \forall (x,y) \in X, 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

$$l = +\infty: \forall\, M(> 0)\ \exists\, \delta > 0: f(x,y) > M, \forall (x,y) \in X, 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

$$l = -\infty: \forall\, M(< 0)\ \exists\, \delta > 0: f(x,y) < M, \forall (x,y) \in X, 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Domanda 66: Dare la definizione di derivata parziale e di gradiente per una funzione di due variabili. L'esistenza del gradiente implica la continuità? Illustrare la risposta con un esempio.

Derivate parziali in $\mathbb{R}^2$:

Data $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ interno ad X:

- $f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$
  $\exists$ finito, derivata parziale in x
- $f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0,y_0)}{h}$
- $\exists$ finito, derivata parziale in y
- $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$, se $\exists$, gradiente di f(con f derivabile in (x_0, y_0).

L'esistenza del gradiente non implica la continuità. Esempio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$, è derivabile

Continuità in (0,0): deve essere

$$\lim_{(x,y) \to 0} f(x,y) = 0$$

$y = mx, \lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x * mx}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2} \Rightarrow \nexists$ il limite $\Longrightarrow$ Non continua in (0,0)

Domanda 67: Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione di due variabili e dire quando le derivate direzionali si riducono a derivate parziali. Enunciare la formula del gradiente.

Derivata direzionale in $\mathbb{R}^2$, di direzione $\underline{u}$:
Data $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ interno ad X, $\underline{u} = (u_1, u_2)$:
Versore, cioè vettore con $|\underline{u}| = 1$, definiamo:

$$D\underline{u}\, f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (\in \mathbb{R})$$

(se ∃ finito) derivata Direzionale.

Relazione con le derivate parziali:

- $\underline{u} = (1,0)$: $D_{(1,0)} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h1, y_0 + h0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$
- $\underline{u} = (0,1)$: $D_{(1,0)} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h0, y_0 + h1) - f(x_0, y_0)}{h} = f_y(x_0, y_0)$

Formula del Gradiente in $\mathbb{R}^2$:

se $f \in C^1$ (continua e derivabile con derivate continue) in un intorno di (x_0, y_0), allora $\forall\, \underline{u}$ versore di $\mathbb{R}^2$ $\exists\ D\underline{u}\, f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$

Domanda 68: Dare la definizione di f differenziabile per una funzione di due variabili. Enunciare il legame fra differenziabilità e continuità.

Definizione di f differenziabile in $\mathbb{R}^2$:

Data $f: X \to \mathbb{R}$, $\underline{x} = (x_0, y_0)$ interno ad X:

f si dice differenziabile in $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ se $\exists\ \nabla f(x_0, y_0)$ e

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

f differenziabile in $\underline{x}_0 = (x_0, y_0) \Rightarrow f$ continua in $\underline{x}$.

Domanda 69: Dare la definizione di piano tangente al grafico di f, funzione di due variabili. Enunciare il Teorema del differenziale totale.

Definizione piano tangente al grafico:
Data $f: X \to \mathbb{R}$, $\underline{x} = (x_0, y_0)$ interno ad X, f si dice differenziabile in $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ e il piano tangente a Γ_f in $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ è:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Teorema del differenziale totale:
Sia $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^2$derivabile (cioè $\exists\ f_x$ e f_y) in un intorno di $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ e con f_x , f_y funzioni continue in (x_0, y_0). Allora f è differenziabile in $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$.
In particolare, f è differenziabile in X aperto (tutti punti interni) quando $f \in C^1(X)$.