

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра вычислительной математики

Отчет

«Сравнение схемы с центральными разностями для
логарифма плотности и схемы Соколова А. Г.
Плотность-Импульс для уравнений движения вязкого
баротропного газа»

Студента 410 группы

Назаренко Вячеслава Львовича

Москва

2018

Оглавление

1.	Постановка задачи	3
2.	Схема с центральными разностями для логарифма плотности	3
3.	Схема Соколова А. Г. Плотность-Импульс	6
4.	Сравнение точности схем для гладких решений при разной вязкости газа	7
5.	Сравнение схем при нулевых правых частях	13
6.	Вывод	28

1. Постановка задачи

Рассматривается система дифференциальных уравнений движения вязкого баротропного газа в двумерной области. А именно:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} = f_0 \\ \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2 u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho f_1 \\ \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \rho f_2 \end{cases}$$

Неизвестными являются функции: плотность $\rho > 0$, вектор скорости \mathbf{u} .

Область: $(t, \mathbf{x}) \in Q = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega = [0, 3\pi] \times [0, \pi] \cup [\pi, 2\pi] \times [\pi, 2\pi]$

Граничные условия:

$$\begin{cases} u_1 = \omega = 1, u_2 = 0, \rho = \rho_\gamma = 1 & \mathbf{x} \in \{0\} \times [0, \pi] \\ u_1 = 0, \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 & \mathbf{x} \in [\pi, 2\pi] \times \{2\pi\} \\ u_2 = 0, \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 & \mathbf{x} \in \{3\pi\} \times [0, \pi] \end{cases}$$

Начальные условия могут ставиться разные в зависимости от требований численного эксперимента.

Для нахождения «реального» движения газа функции f_0, f_1, f_2 полагаются равным нулю. Однако для отладки алгоритмов, реализующих ниже описываемые разностные схемы, полезно положить их такими, что решением системы уравнений были бы заранее известные гладкие функции.

2. Схема с центральными разностями

для логарифма плотности

Для автоматического выполнения условия $\rho > 0$ рассматривают другую неизвестную функцию $g = \ln \rho$

Тогда система уравнений преобразовывается к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(u_k \frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k g}{\partial x_k} + (2 - g) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = f_0 \\ \frac{\partial u_k}{\partial g} + \frac{1}{3} \left(u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^2}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(u_m \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m u_k}{\partial x_m} - u_k \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) + \\ + p'_\rho(\rho) \frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_m} \right) \right) + f_k \\ p = p(\rho) \\ g = \ln \rho \end{array} \right. \quad k = 1, 2$$

Пусть неизвестным функциям соответствуют их сеточные аналоги следующим образом:

$$u_1 \rightarrow V_1$$

$$u_2 \rightarrow V_2$$

$$\rho \rightarrow H$$

$$g \rightarrow G$$

Сетка рассматривается равномерная с шагами τ и h_1, h_2 по времени и пространственным переменным соответственно.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T}{N} \\ h_1 &= \frac{\pi}{M_1} \\ h_2 &= \frac{\pi}{M_2}, \end{aligned}$$

где M_1, M_2 - число разбиений сторон элементарного квадрата $\pi \times \pi$. Пусть γ_k^\pm - участок границы области, где x_k достигает своего минимума ($-$) или максимума ($+$). Опишем разностную схему:

$$G_t + 0.5 \cdot \sum_{k=1}^2 \left(V_k \hat{G}_{x_k}^0 + (V_k \hat{G})_{x_k}^0 + 2(\hat{V}_k)_{x_k}^0 - G \cdot (V_k)_{x_k}^0 \right) = f_0, \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_h^-$$

$$G_t + 0.5 \cdot \left((V_k \hat{G})_{x_k} + 2(\hat{V}_k)_{x_k} - G(V_k)_{x_k} \right) -$$

$$-0.5h_k \left((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5(GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k} + (2 - G)((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5(V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k}) \right) =$$

$$= f_0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \quad k = 1, 2 \quad (2)$$

$$G_t + 0.5 \cdot \left((V_k \hat{G})_{\bar{x}_k} + 2(\hat{V}_k)_{\bar{x}_k} - G(V_k)_{\bar{x}_k} \right) +$$

$$+0.5h_k \left((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5(GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k} + (2 - G)((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5(V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k}) \right) =$$

$$= f_0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, \quad k = 1, 2 \quad (3)$$

$$(V_k)_t + \frac{1}{3} \left(V_k(\hat{V}_k)_{x_k}^0 + (V_k \hat{V}_k)_{x_k}^0 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(V_m(\hat{V}_k)_{x_m}^0 + (V_m \hat{V}_k)_{x_m}^0 - V_k(V_m)_{x_m}^0 \right) +$$

$$+ p'_\rho(e^G) \hat{G}_{x_k}^0 = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) - \quad (4)$$

$$-(\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) \left(\frac{4}{3}(V_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) +$$

$$+ \frac{\mu e^{-g}}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m}^0 + f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h^-$$

Аналог уравнения (4) для скорости на границах области зависит от граничных условий на конкретной границе.

Узлы сетки нумеруются слева-направо, снизу-вверх. В этом случае вектор неизвестных имеет вид: $(G(0), V_1(0), V_2(0), G(1), V_1(1), V_2(1), \dots)$. Для нахождения значений сеточных функций, на каждом временном слое решается одна система линейных уравнений, составленная с помощью уравнений (1) - (4) разностной схемы.

Данная схема имеет порядок аппроксимации $\tau + h^2$.

3. Схема Соколова А. Г. Плотность-Импульс

Особенность схемы, которая будет описана в этом разделе, заключается в том, что

- Сеточная функция H определяется на полуцелых узлах области, некоторые из которых выходят за ее пределы (на $\frac{h}{2}$),
- На каждом временном слое решаются две системы линейных уравнений: одна с вектором неизвестных $(H(0), H(1), \dots)$ и другая с $(V_1(0), V_2(0), V_1(1), V_2(1), \dots)$

Введем обозначения:

$$\bar{V}^+ = \begin{cases} V, & V \geq 0 \\ 0, & V < 0 \end{cases}$$

$$\bar{V}^- = \begin{cases} V, & V \leq 0 \\ 0, & V > 0 \end{cases}$$

$$\theta_k\{H, V\} = H\bar{V}^- + H^{-1_k}\bar{V}^+$$

Опишем схему:

$$H_t + (\theta_1\{\hat{H}, V_{1s_2}\})_{x_1} + (\theta_2\{\hat{H}, V_{2s_1}\})_{x_2} = f_0, \quad x \in \Omega_h^{1/2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & (H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_1)_t + 0.5(\theta_1\{\hat{H}_{\bar{s}_2}\hat{V}_1, V_1\})_{x_1} + 0.5(\theta_1\{\hat{H}_{\bar{s}_2}\hat{V}_1^{(+1_1)}, V_1\})_{\bar{x}_1} + \\ & + 0.5(\theta_2\{\hat{H}_{\bar{s}_1}\hat{V}_2, V_1\})_{x_2} + 0.5(\theta_2\{\hat{H}_{\bar{s}_1}\hat{V}_2^{(+1_2)}, V_1\})_{\bar{x}_2} + \\ & + \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}((\hat{H}_{\bar{s}_2})^{\gamma-1})_{\bar{x}_1} = \\ & = \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_1)_{x_1\bar{x}_1} + (\hat{V}_1)_{x_2\bar{x}_2} \right) + \frac{\mu}{3}(V_2)_{x_1x_2}^0 + \hat{f}_1\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \quad \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0 \\ & \hat{V}_1 = 0, \quad \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& (H_{\bar{s}_1\bar{s}_2}V_2)_t + 0.5(\theta_1\{\hat{H}_{\bar{s}_2}\hat{V}_1, V_2\}_{x_1} + 0.5(\theta_1\{\hat{H}_{\bar{s}_2}\hat{V}_1^{(+1_1)}, V_2\}_{\bar{x}_1} + \\
& + 0.5(\theta_2\{\hat{H}_{\bar{s}_1}\hat{V}_2, V_2\}_{x_2} + 0.5(\theta_2\{\hat{H}_{\bar{s}_1}\hat{V}_2^{(+1_2)}, V_2\}_{\bar{x}_2} + \\
& + \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}((\hat{H}_{\bar{s}_1})^{\gamma-1})_{\bar{x}_2} = \\
& = \mu \left(\frac{4}{3}(\hat{V}_2)_{x_2\bar{x}_2} + (\hat{V}_2)_{x_1\bar{x}_1} \right) + \frac{\mu}{3}(V_1)_{x_1x_2}^0 + \hat{f}_2\hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2}, \quad \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} \neq 0 \\
& \hat{V}_2 = 0, \quad \hat{H}_{\bar{s}_1\bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}
\end{aligned} \tag{7}$$

На каждом временном шаге первая система линейных уравнений составляется с помощью уравнения (5), вторая с помощью (6), (7).

Порядок аппроксимации схемы $\tau + h$

4. Сравнение точности схем для гладких решений при разной вязкости газа

Продemonстрируем асимптотику сходимости схем к гладким решениям для различных τ, h, μ . Для решения линейных систем используется алгоритм CGS с предобуславливателем Якоби

Положим

$$\rho(x, y) = (\cos(2x) + 1.5)(\sin(2y) + 1.5)e^t$$

$$u_1(x, y) = \sin x \sin y e^t$$

$$u_2(x, y) = \sin x \sin y e^{-t}$$

и вычислим соответствующие f_0, f_1, f_2 , чтобы указанные плотность и скорость были решениями дифференциальной задачи.

Приведем сравнительные таблицы норм разности вычисленной сеточной функции и искомой. Далее $T = 0.1$

$\mu = 0.001$. Норма: $\|G\|_{C_h}$ и $\|H\|_{C_h}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.023909	0.006064	0.001617
60	0.024174	0.006056	0.001565
120	0.024308	0.006099	0.001540

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.051275	0.026298	0.013302
60	0.051400	0.026363	0.013334
120	0.051464	0.026397	0.013351

$\mu = 0.001$. Норма: $\|G\|_{L_h^2}$ и $\|H\|_{L_h^2}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.032944	0.008582	0.002732
60	0.033067	0.008487	0.002302
120	0.033134	0.008470	0.002176

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.107444	0.055484	0.028903
60	0.106941	0.054828	0.028031
120	0.106718	0.054553	0.027691

$\mu = 0.001$. Норма: $\|G\|_{W_{1h}^2}$ и $\|H\|_{W_{1h}^2}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.037008	0.008868	0.002747
60	0.037207	0.008780	0.002320
120	0.037313	0.008766	0.002195

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.113702	0.056532	0.029103
60	0.113178	0.055850	0.028210
120	0.112932	0.055563	0.027862

Далее для краткости сравним остальные сеточные функции только в L_h^2 норме.

$\mu = 0.001$. Норма: $\|V_1\|_{L_h^2}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.080079	0.019818	0.005332
60	0.081100	0.019938	0.005104
120	0.081632	0.020016	0.005038

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.043571	0.020849	0.010416
60	0.043300	0.020632	0.010096
120	0.043191	0.020574	0.010031

$\mu = 0.001$. Норма: $\|V_2\|_{L_h^2}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.081669	0.020021	0.005127
60	0.082836	0.020268	0.005086
120	0.083437	0.020401	0.005091

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.036769	0.017792	0.008731
60	0.036679	0.017774	0.008738
120	0.036637	0.017769	0.008749

Теперь приведем результаты для $\mu = 0.01$

$\mu = 0.01$. Норма: $\|G\|_{L_h^2}$ и $\|H\|_{L_h^2}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.032249	0.008408	0.002694
60	0.032395	0.008314	0.002259
120	0.032475	0.008298	0.002132

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.107450	0.055483	0.028902
60	0.106946	0.054827	0.028030
120	0.106723	0.054552	0.027689

$\mu = 0.01$. Норма: $\|V_1\|_{L_h^2}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.078646	0.019479	0.005272
60	0.079649	0.019589	0.005022
120	0.080171	0.019661	0.004949

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.043237	0.020683	0.010325
60	0.042981	0.020478	0.010015
120	0.042879	0.020425	0.009955

$\mu = 0.01$. Норма: $\|V_2\|_{L_h^2}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.080183	0.019667	0.005032
60	0.081338	0.019915	0.004995
120	0.081933	0.020047	0.005001

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.036512	0.017673	0.008671
60	0.036427	0.017657	0.008680
120	0.036387	0.017652	0.008692

Теперь приведем результаты для $\mu = 0.1$

$\mu = 0.1$. Норма: $\|G\|_{L_h^2}$ и $\|H\|_{L_h^2}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.027590	0.007250	0.002459
60	0.027870	0.007165	0.001992
120	0.028026	0.007159	0.001853

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.107450	0.055484	0.028902
60	0.106946	0.054827	0.028030
120	0.106723	0.054552	0.027690

$\mu = 0.1$. Норма: $\|V_1\|_{L_h^2}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.068314	0.017128	0.005029
60	0.069215	0.017139	0.004507
120	0.069687	0.017181	0.004359

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.043237	0.020683	0.010325
60	0.042981	0.020479	0.010015
120	0.042879	0.020426	0.009955

$\mu = 0.1$. Норма: $\|V_2\|_{L_h^2}$

Схема с ц. р.:

N\M	30	60	120
30	0.069217	0.017042	0.004384
60	0.070353	0.017302	0.004336
120	0.070936	0.017444	0.004348

Схема Соколова:

N\M	30	60	120
30	0.036513	0.017673	0.008671
60	0.036427	0.017656	0.008680
120	0.036387	0.017653	0.008692

Данные таблицы подтверждают порядки аппроксимаций схем: $\tau + h^2$ для ц.р. и $\tau + h$ для схемы Соколова. Видно, что больший порядок аппроксимации первой схемы дает на достаточно мелких разбиениях более близкое к настоящему решение.

5. Сравнение схем при нулевых правых частях

Далее приводятся графики плотности и скорости газа для двух схем до момента стабилизации газа (изменение скорости со временем становится незначительным) Неизменными являются следующие параметры:

$$M_1 = 30$$

$$M_2 = 30$$

$$T_{sokolov} = 150$$

$$T_{c.d.} = 80$$

$$p(\rho) = 1.4\rho$$

$$\omega = 1$$

$$\rho(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{\pi}{5} \\ 0.1 & x > \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

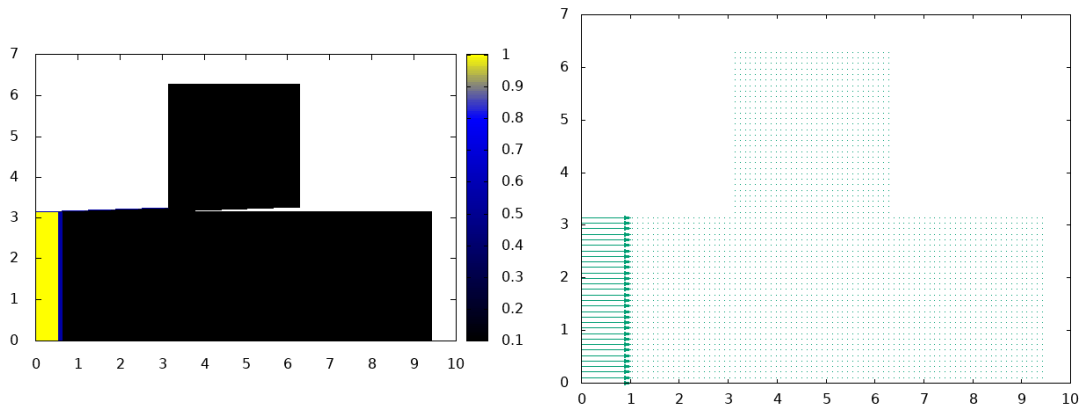


Рис. 1. Плотность и скорость при $t = 0$

Далее в левой колонке приводятся графики для схемы с центральными разностями, а в правой для схемы Соколова.

Рассмотрим $\mu = 0.1$.

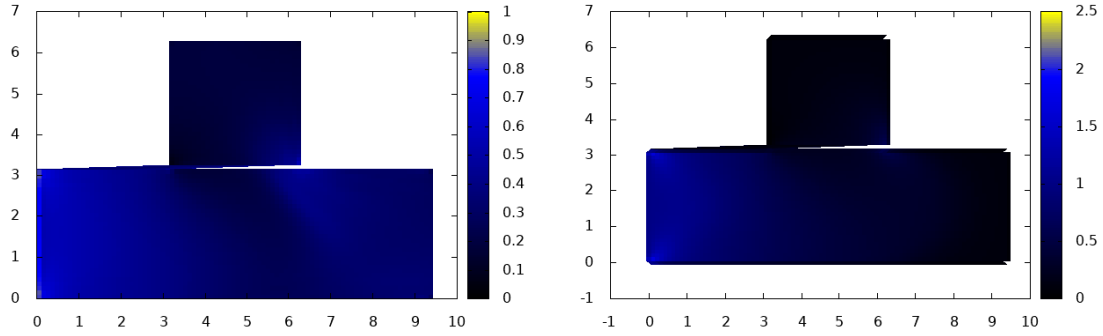


Рис. 2. Плотность при $t = 4$

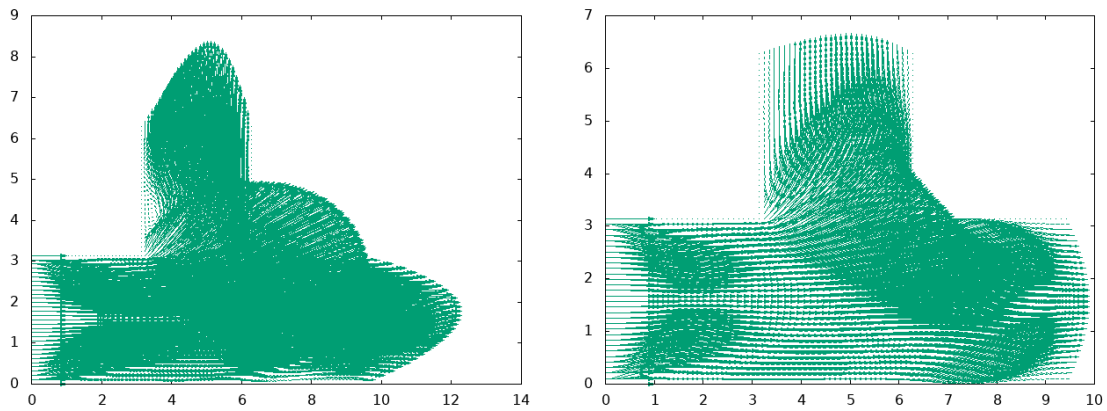


Рис. 3. Скорость при $t = 4$

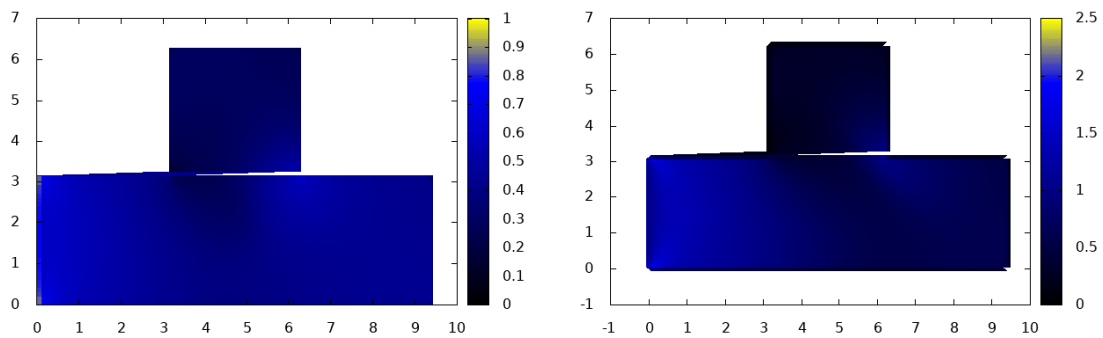


Рис. 4. Плотность при $t = 10$

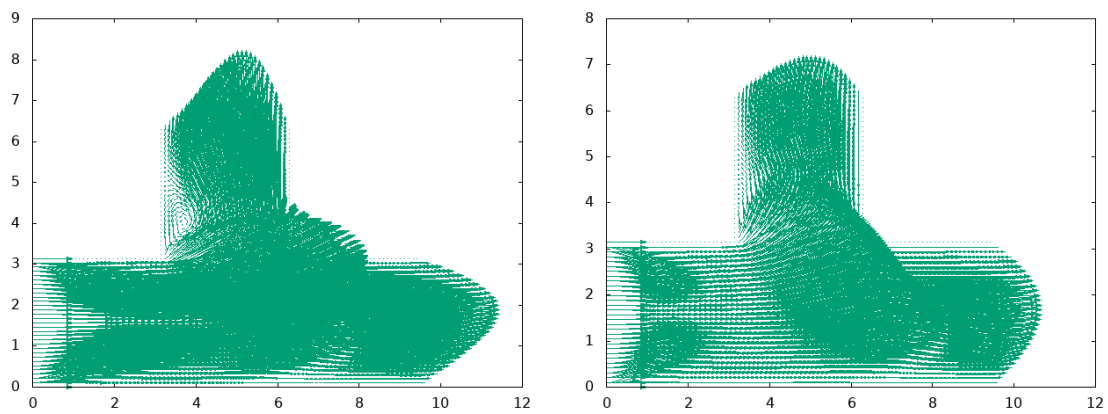


Рис. 5. Скорость при $t = 10$

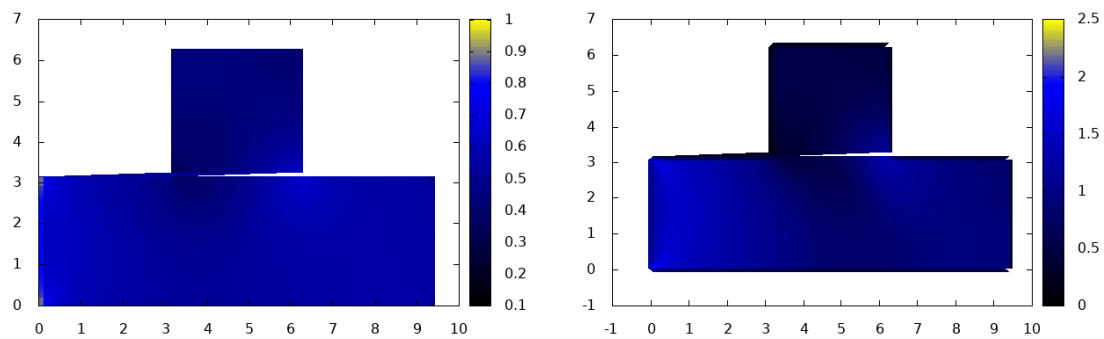


Рис. 6. Плотность при $t = 21.3$

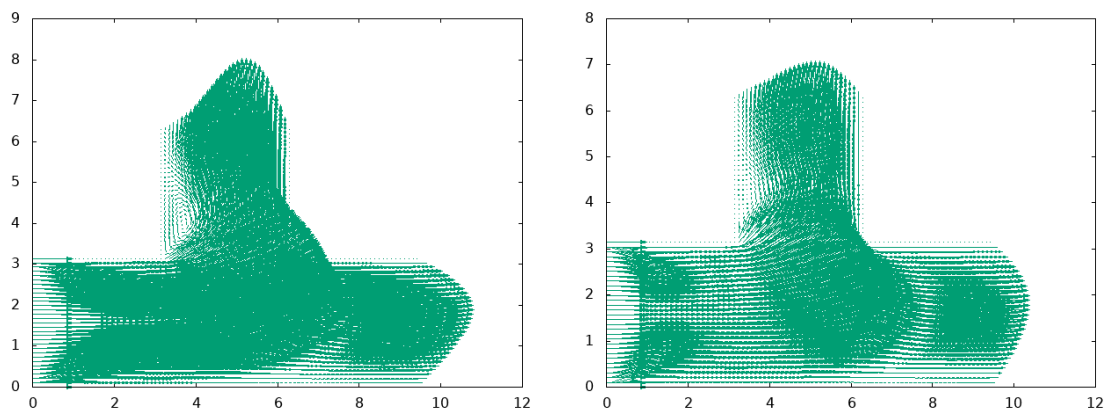


Рис. 7. Скорость при $t = 21.3$

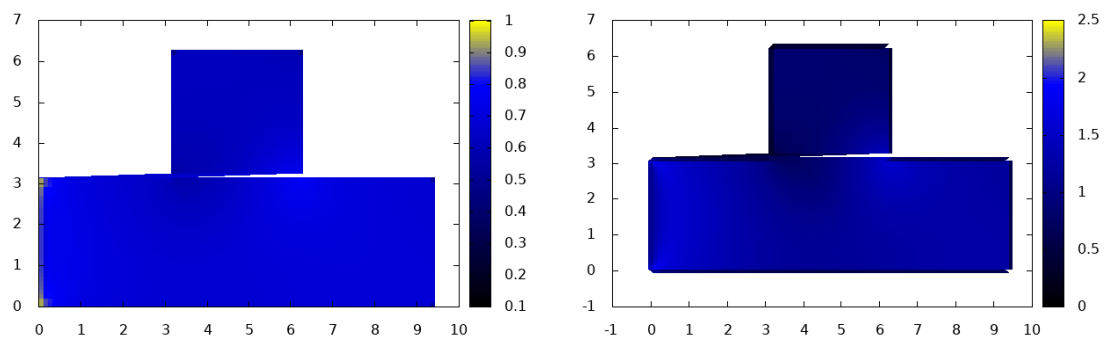


Рис. 8. Плотность при $t = 41$

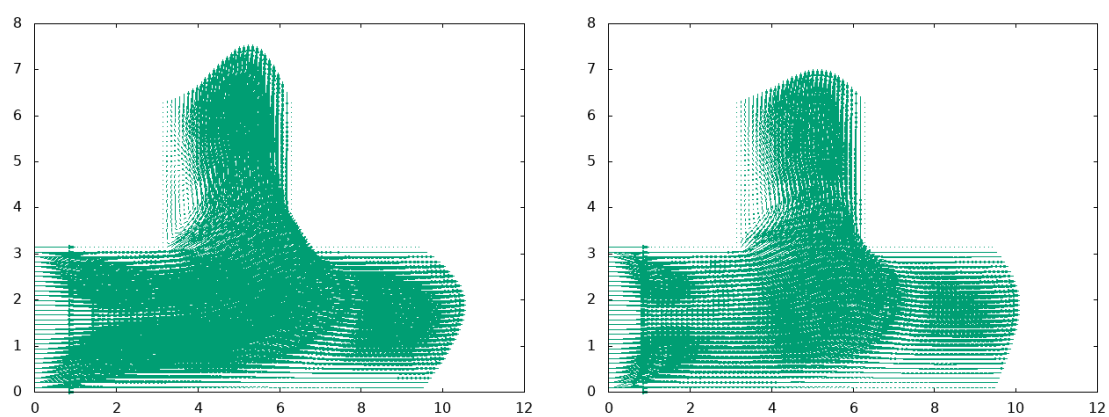


Рис. 9. Скорость при $t = 41$

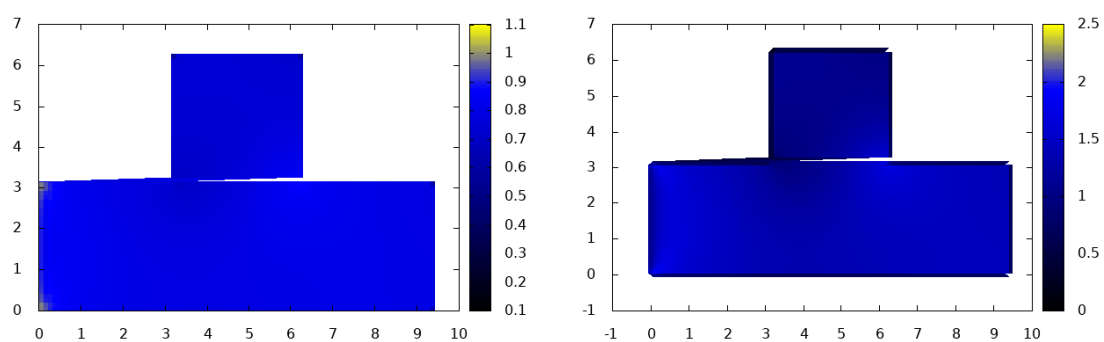


Рис. 10. Плотность при $t = 60$

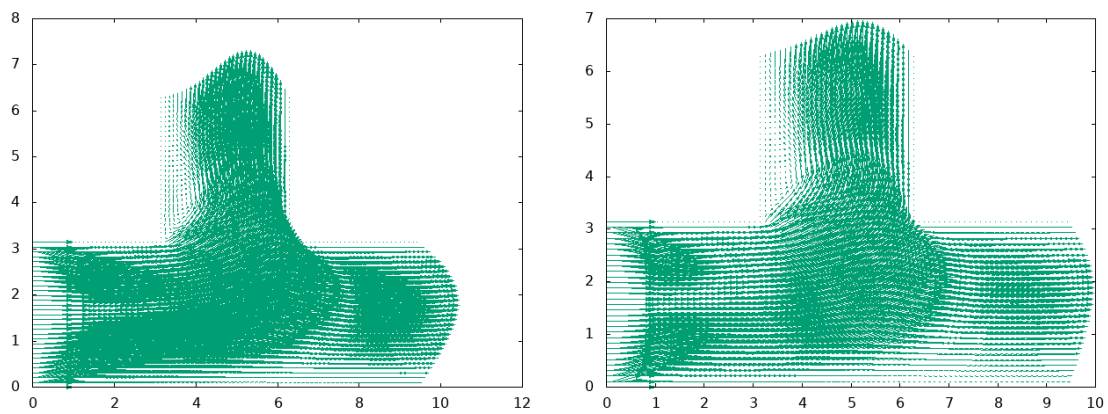


Рис. 11. Скорость при $t = 60$

Как видно из графиков плотности и скорости схемы с центральными разностями газ стабилизировался. Далее результаты приводятся только для схемы Соколова.

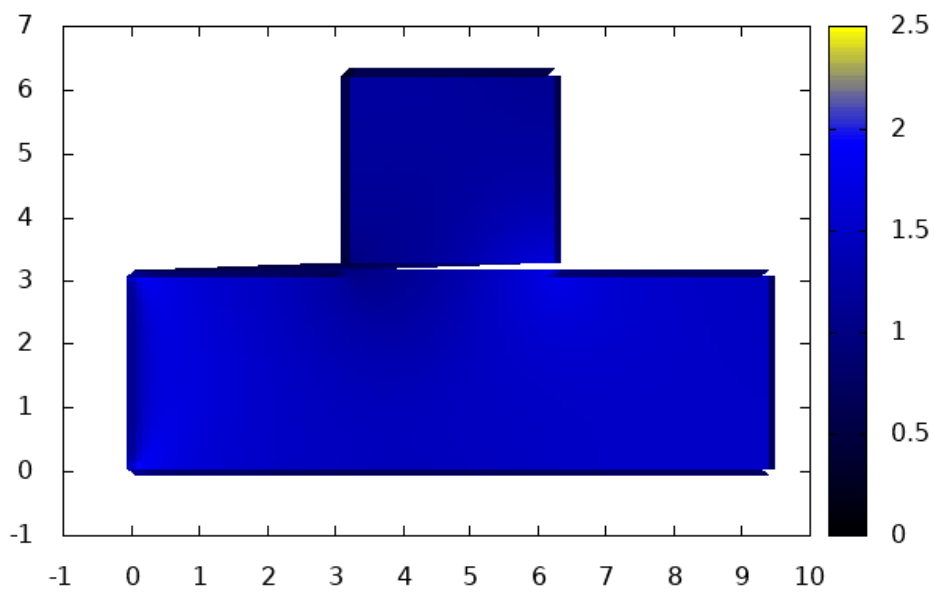


Рис. 12. Плотность при $t = 71$

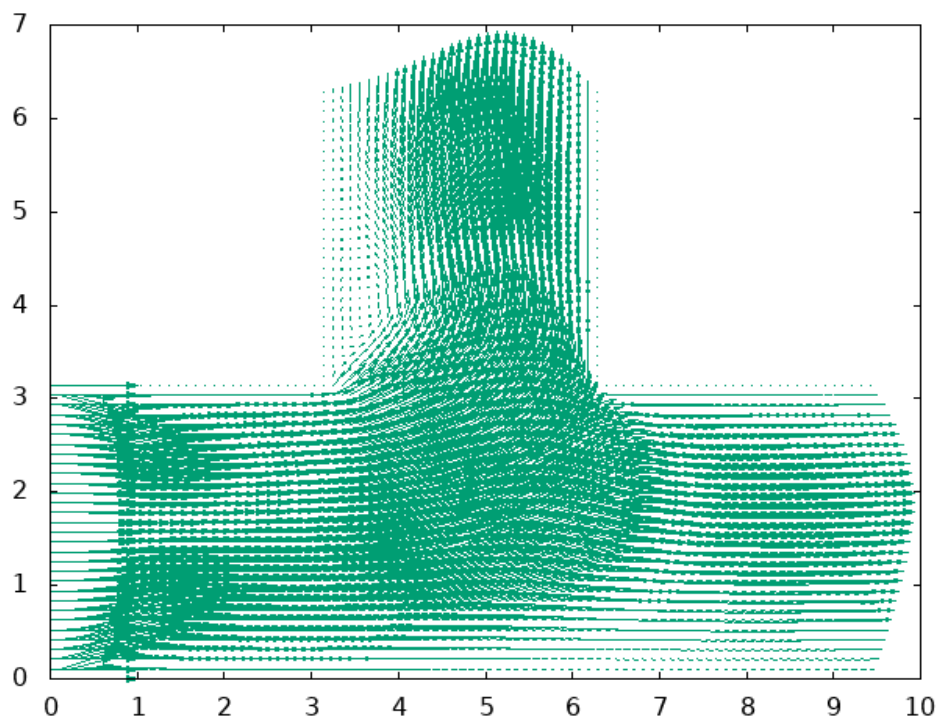


Рис. 13. Скорость при $t = 71$

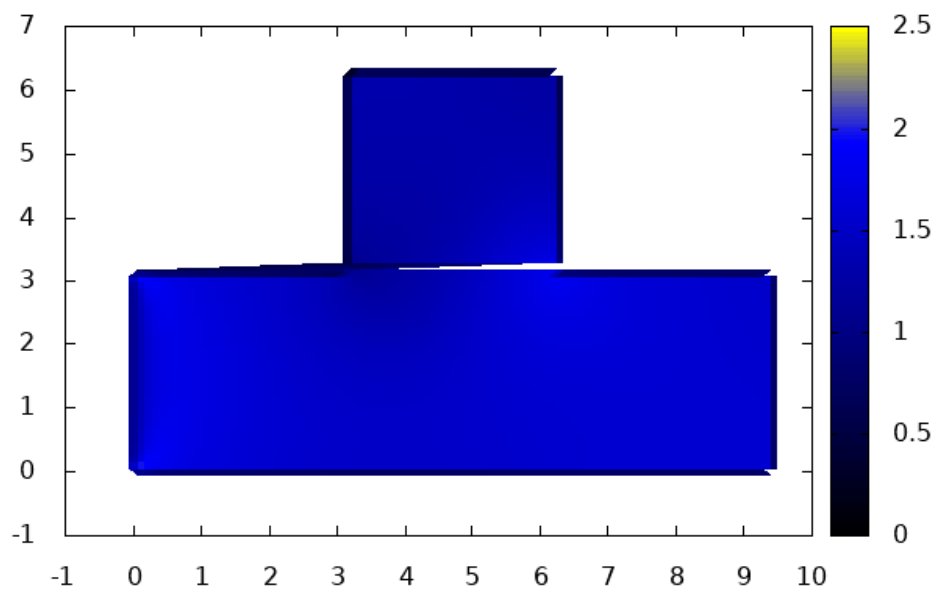


Рис. 14. Плотность при $t = 81$

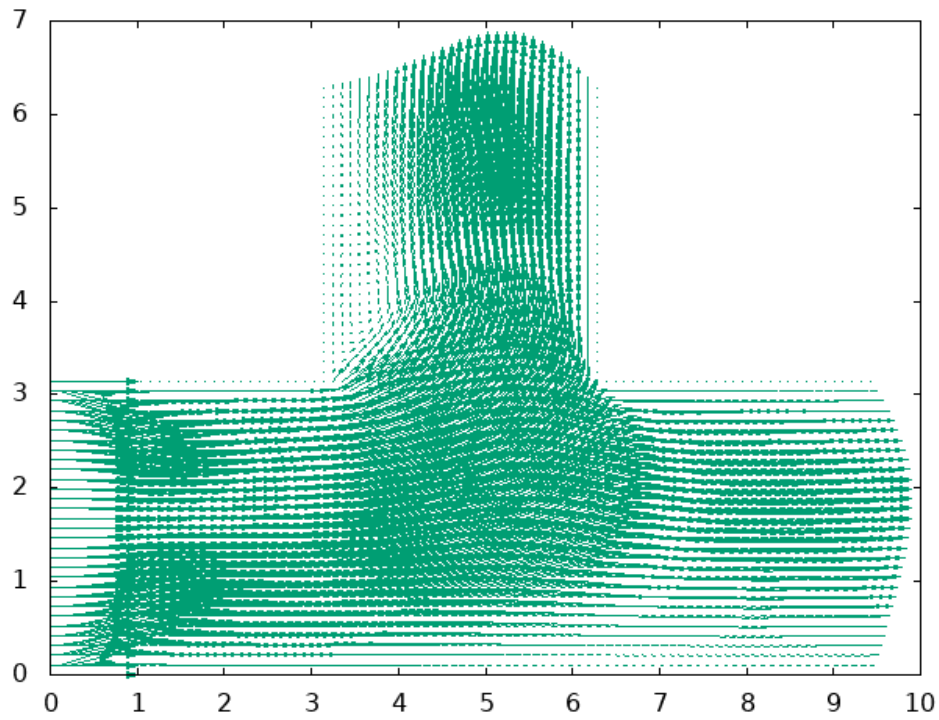


Рис. 15. Скорость при $t = 81$

Как видно из графиков плотности и скорости схемы Соколова газ стабилизировался.

Рассмотрим $\mu = 0.025$.

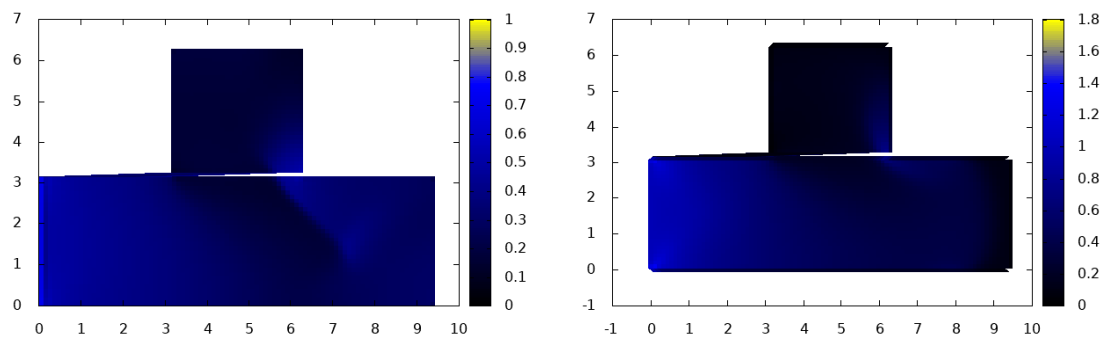


Рис. 16. Плотность при $t = 4$

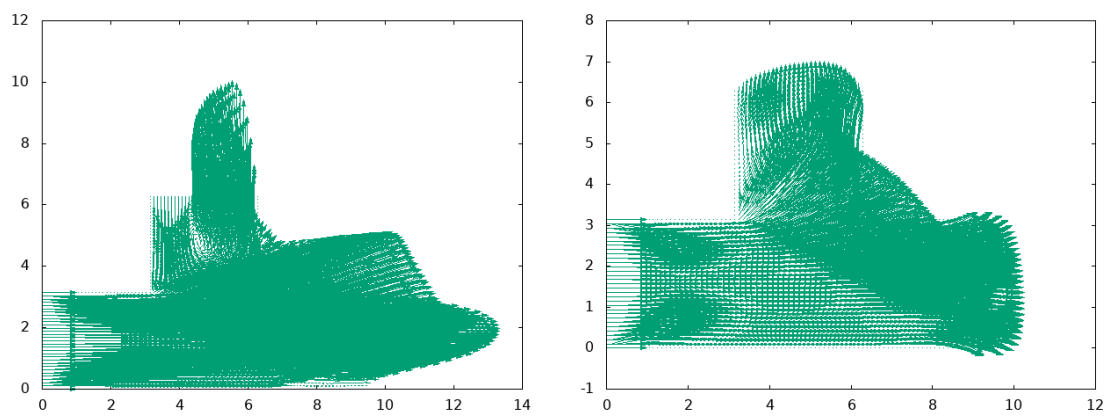


Рис. 17. Скорость при $t = 4$

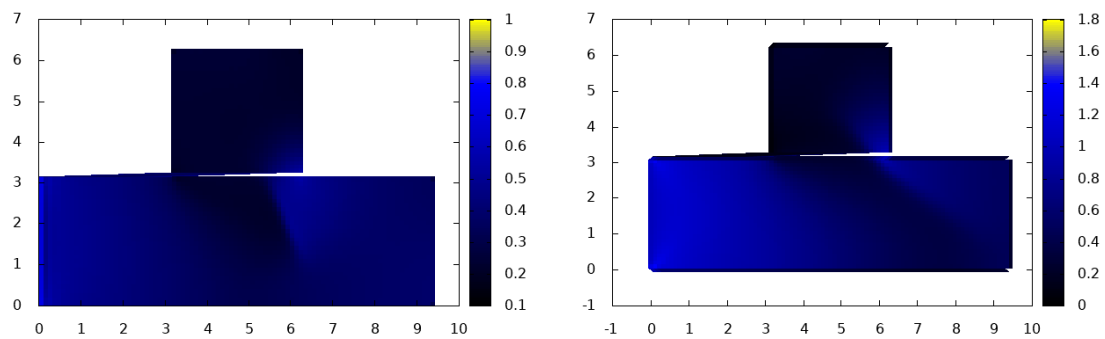


Рис. 18. Плотность при $t = 10.6$

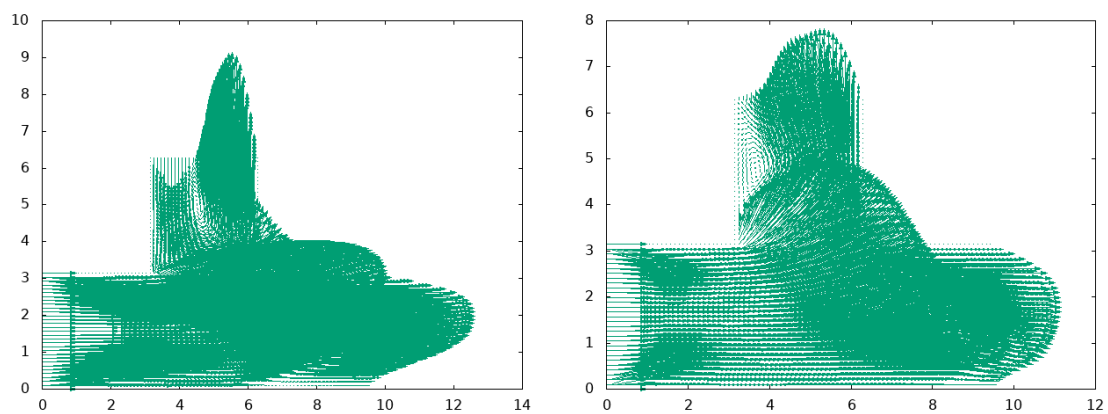


Рис. 19. Скорость при $t = 10.6$

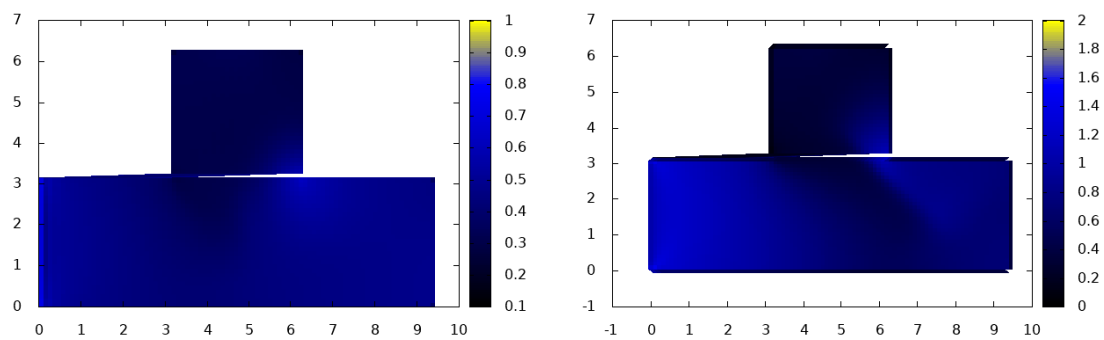


Рис. 20. Плотность при $t = 21.3$

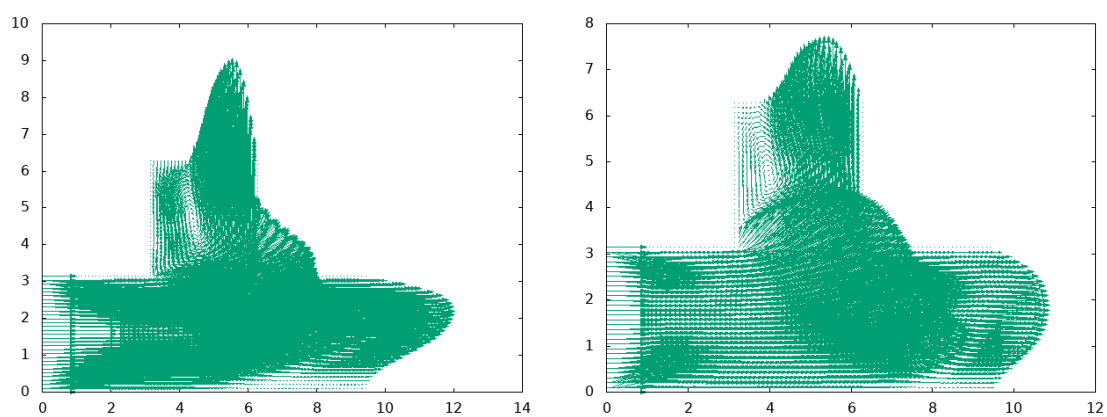


Рис. 21. Скорость при $t = 21.3$

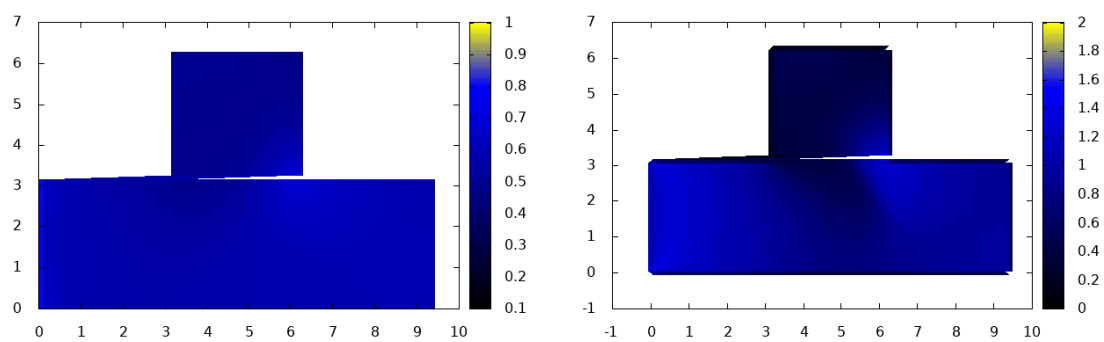


Рис. 22. Плотность при $t = 42.6$

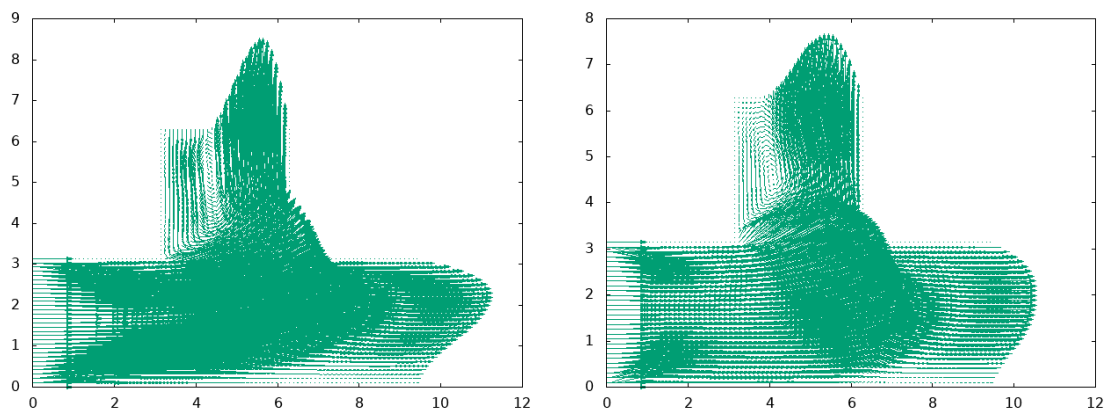


Рис. 23. Скорость при $t = 42.6$

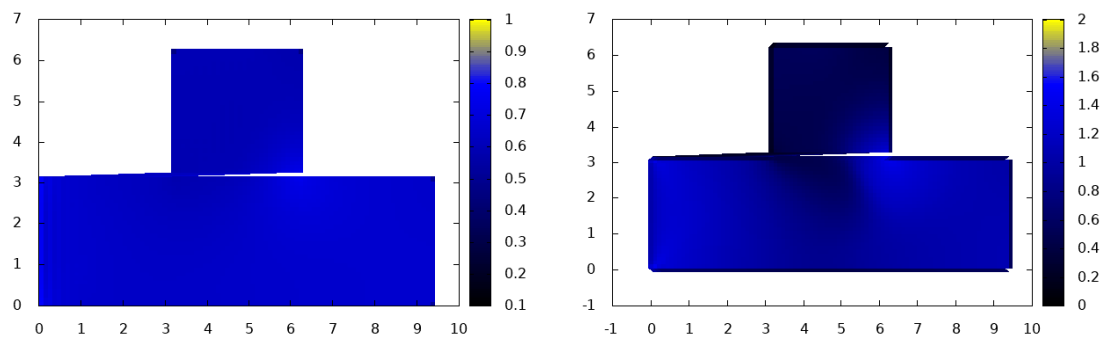


Рис. 24. Плотность при $t = 60$

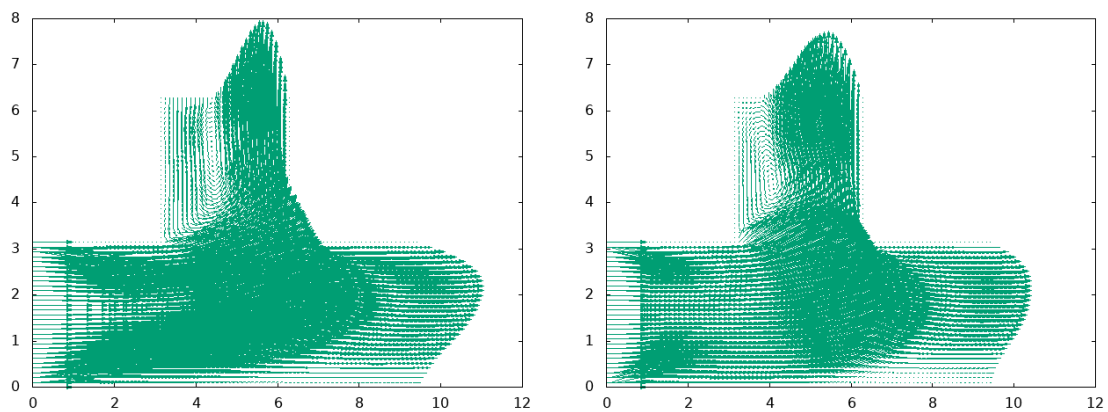


Рис. 25. Скорость при $t = 60$

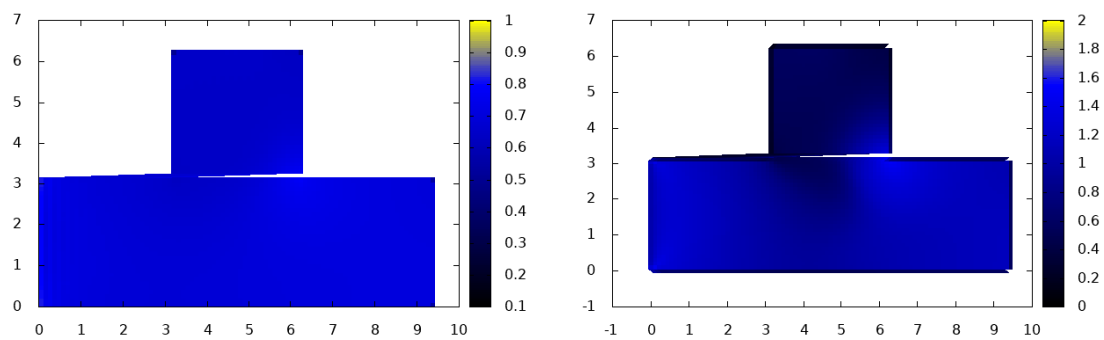


Рис. 26. Плотность при $t = 71$

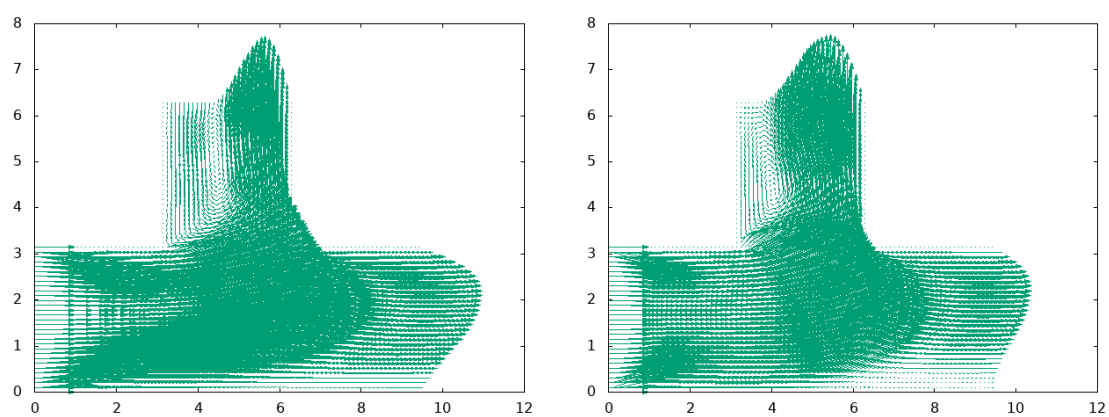


Рис. 27. Скорость при $t = 71$

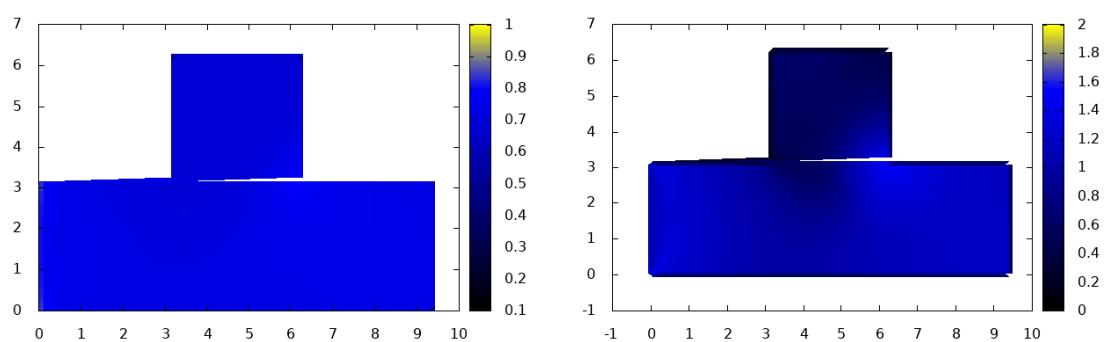


Рис. 28. Плотность при $t = 80$

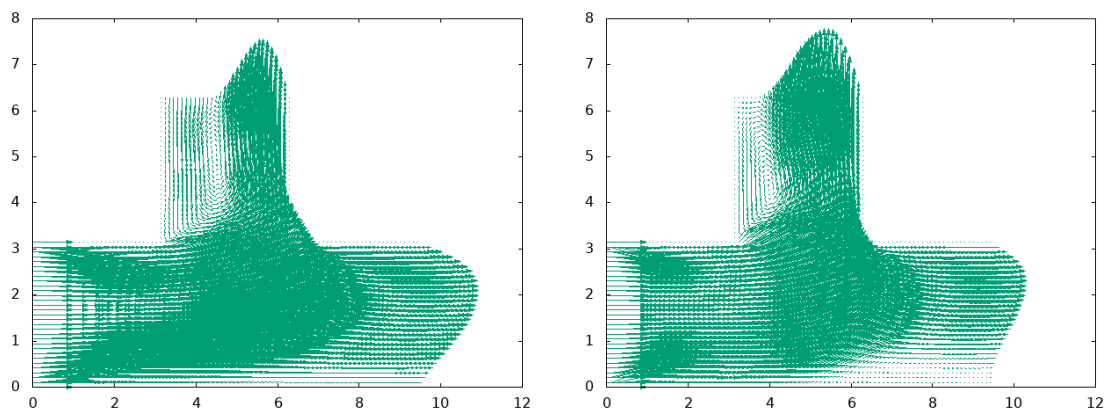


Рис. 29. Скорость при $t = 80$

Как видно из рисунков для схемы с ц. р. за $\Delta t = 9$ плотность и скорость газа почти не изменились. Далее приводятся рисунки только для схемы Соколова.

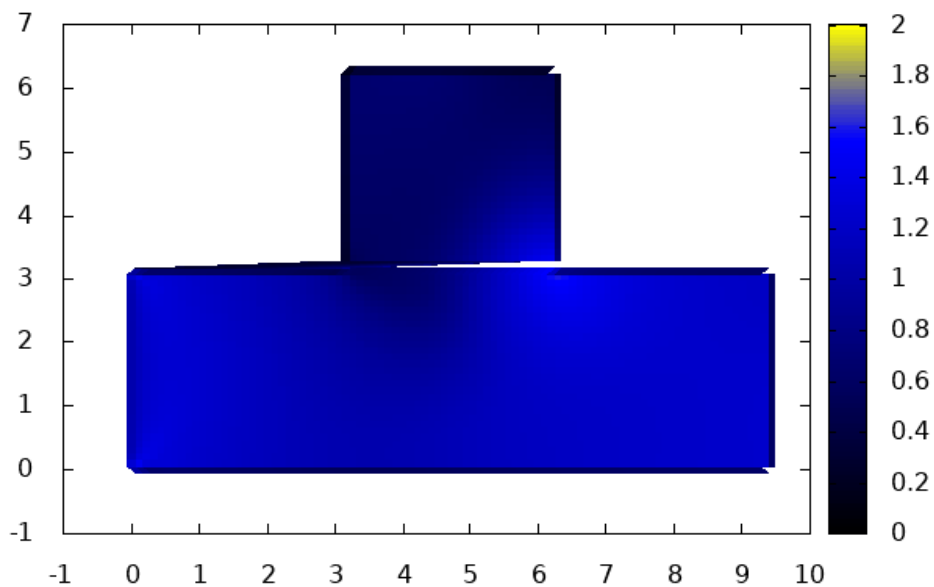


Рис. 30. Плотность при $t = 92.3$

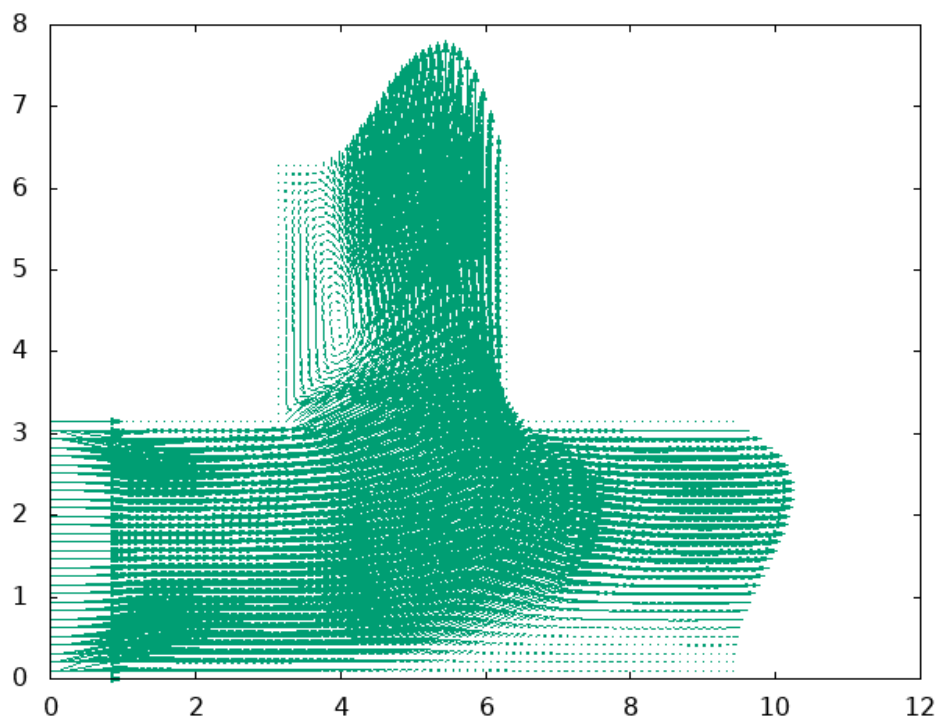


Рис. 31. Скорость при $t = 92.3$

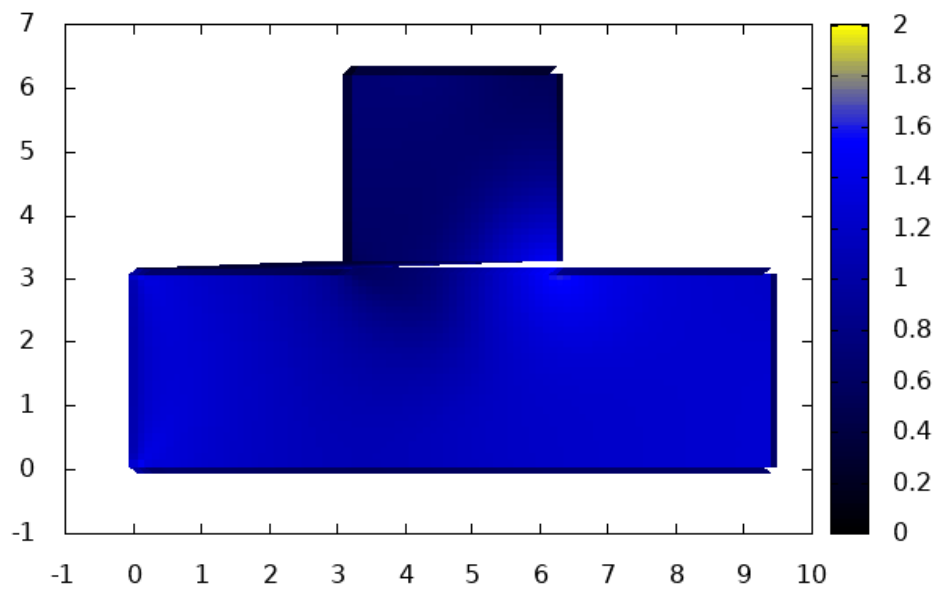


Рис. 32. Плотность при $t = 100$

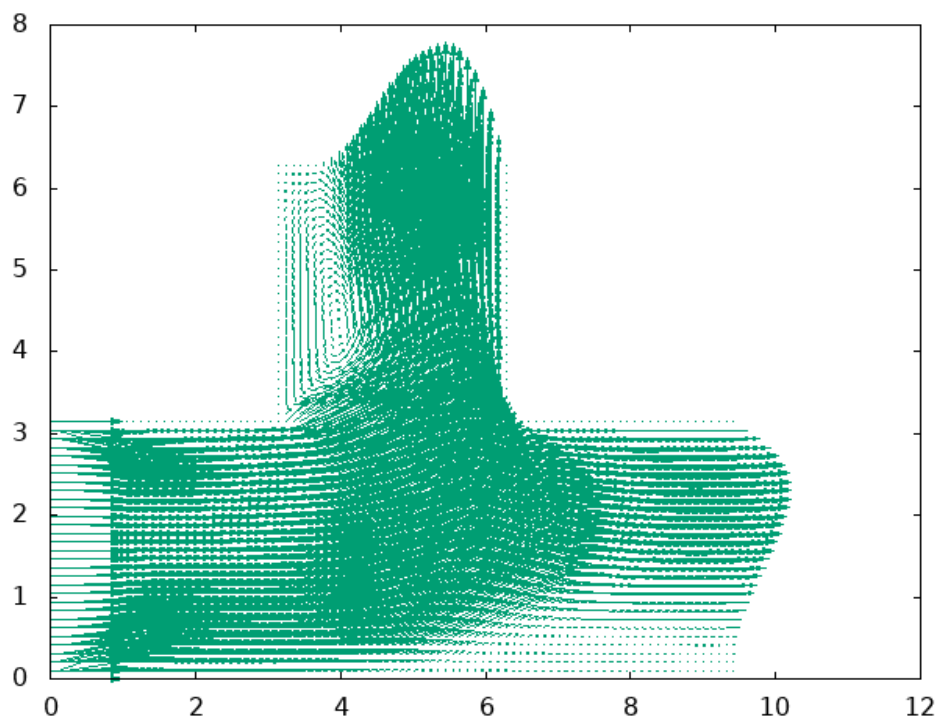


Рис. 33. Скорость при $t = 100$

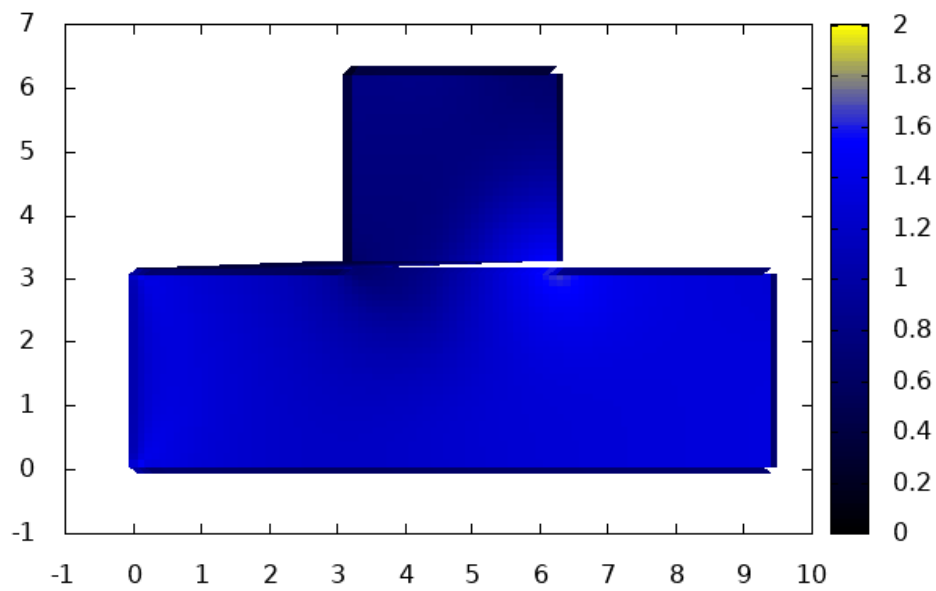


Рис. 34. Плотность при $t = 122$

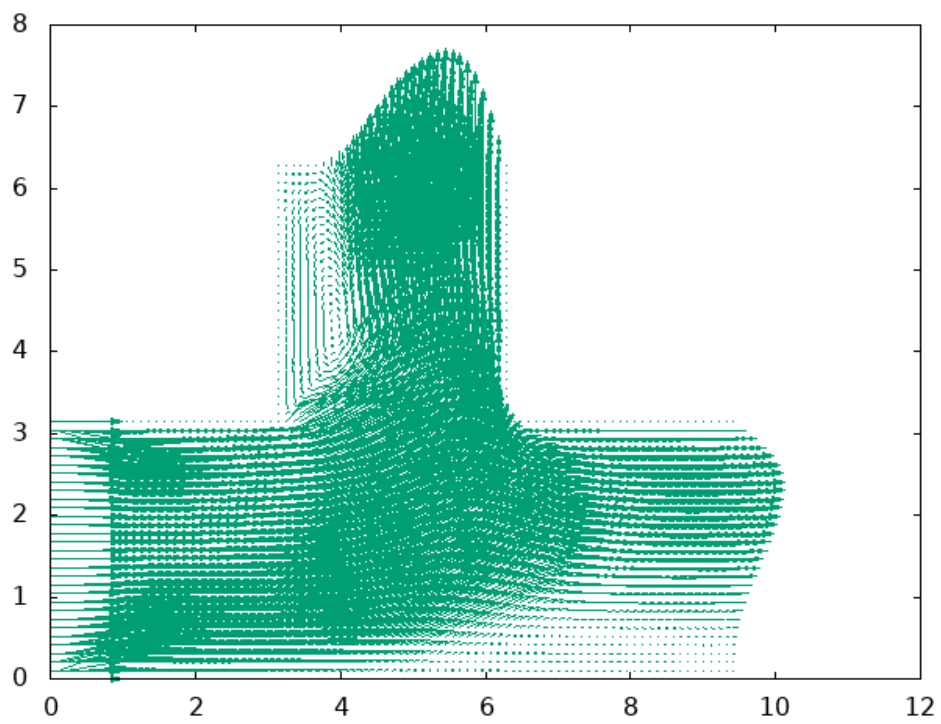


Рис. 35. Скорость при $t = 122$

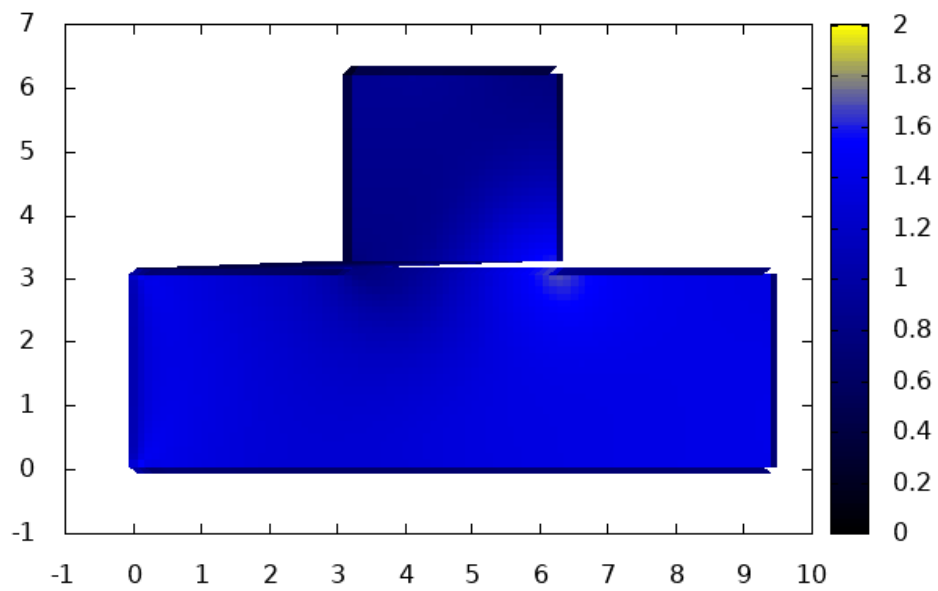


Рис. 36. Плотность при $t = 150$

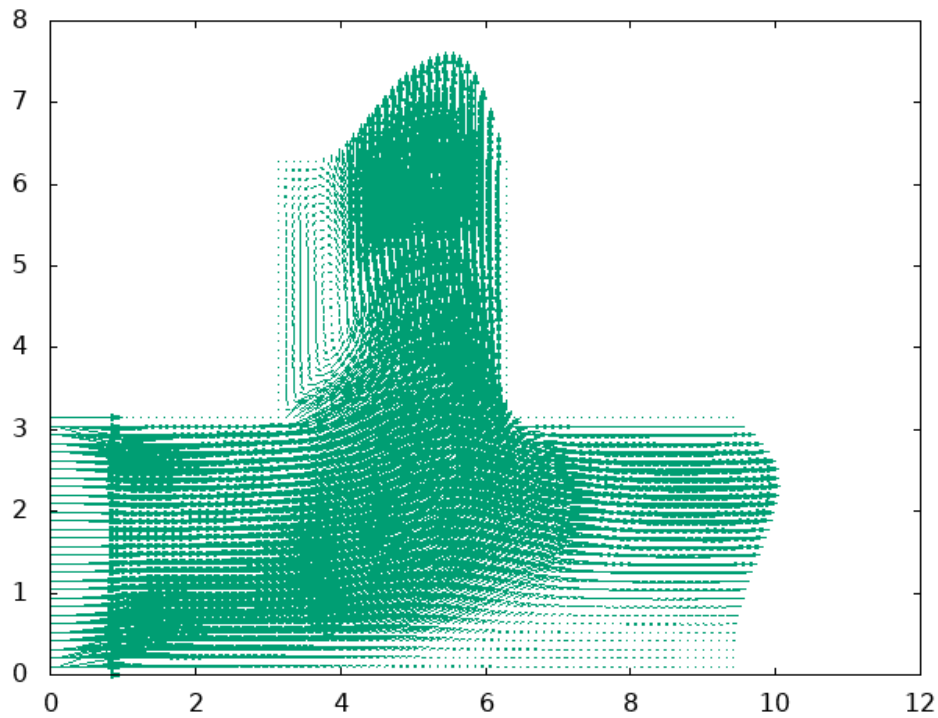


Рис. 37. Скорость при $t = 150$

Как видно из рисунков за $\Delta t = 28$ плотность и скорость газа почти не изменились. Можно сделать вывод, что газ стабилизировался.

6. Вывод

Проведённые численные эксперименты демонстрируют, что в схеме Соколова стабилизация происходит медленнее, чем в схеме с центральными разностями. Также при меньшей вязкости газа стабилизация по обоим схемам медленнее.