Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием схемы для логарифма плотности с центральными разностями

1 Постановка дифференциальной задачи

Одномерное движение вязкого баротропного газа описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} = f_0, \\ \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} + \rho u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f \end{cases}$$

$p = p(\rho)$ - известная функция давления от плотности. $f_0 \equiv 0$, f - известная функция от (t, x).

$$\mu \in [0,001; 0,1]$$

Неизвестные функции плотности и скорости:

$$\rho,\ u : [0, T] \times [0, X] \to \mathbb{R}, \text{ где } T,\ X > 0$$

$$\rho > 0$$

Краевые условия:

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), x \in [0, X]$$

Для гарантирования положительности ρ вместо функции ρ имеет смысл искать функцию $g = \ln(\rho)$

Тогда система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(u\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial ug}{\partial x} + (2-g)\dfrac{\partial u}{\partial x} \right) = f_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{3}\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \tilde{p}'(g)\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \end{cases}$$

2 Построение разностной схемы

Для численного решения системы введем сетку на области $[0, T] \times [0, X]$ с шагом h по оси OX и τ по оси OT. Узел сетки с координатами (n, m) соответствует точке $(n\tau, mh)$ области. Для разностных операторов и значений в узлах сетки будем использовать обозначения, введенные в пособии к вычислительному практикуму.

M - количество узлов вдоль оси OX. N - количество узлов вдоль оси OT.

Запишем разностную схему:

$$
\begin{cases}
G_t + \frac{1}{2}(V\hat{G}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{G})_{\overset{0}{x}} + (2-G)V_{\overset{0}{x}}) = f_0, \quad 1 \leqslant m \leqslant M-1, \\
G_{t,0} + \frac{1}{2}((V\hat{G})_{x,0} + (2-G_0)V_{x,0}) - \\
-\frac{h}{2}((GV)_{x\overline{x},1} - \frac{1}{2}(GV)_{x\overline{x},2} + (2-G_0)(V_{x\overline{x},1} - \frac{1}{2}V_{x\overline{x},2})) = (f_0)_0, \\
G_{t,M} + \frac{1}{2}((V\hat{G})_{\overline{x},M} + (2-G_M)V_{\overline{x},M}) + \\
+\frac{h}{2}((GV)_{x\overline{x},M-1} - \frac{1}{2}(GV)_{x\overline{x},M-2} + (2-G_M)(V_{x\overline{x},M-1} - \frac{1}{2}V_{x\overline{x},M-2})) = (f_0)_M, \\
V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\overset{0}{x}} + (V\hat{V}_{\overset{0}{x}})) + \tilde{p}'(\hat{G})\hat{G}_{\overset{0}{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\overline{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-\hat{G}})V_{x\overline{x}} + f, \quad 1 \leqslant m \leqslant M-1,
\end{cases}
$$

где $\tilde{\mu} = \mu||e^{-\hat{G}}||_C$.

Запишем эту схему в следующем виде, сгруппировав слагаемые:

$$
\begin{cases}
G_{m-1}^{n+1}\left(\frac{-V_m^n}{2h}\right) + G_m^{n+1}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}\left(V_{\overset{0}{x}}\right)_m^n\right) + \\
+G_{m+1}^{n+1}\left(\frac{V_m^n}{2h}\right) + V_{m+1}^{n+1}\left(\frac{1}{2h}\right) + V_{m-1}^{n+1}\left(\frac{1}{2h}\right) = \\
= f_0(n\tau, mh) + G_m^n\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}\left(V_{\overset{0}{x}}\right)_m^n\right), \quad 1 \leqslant m \leqslant M-1 & (1) \\
G_0^{n+1}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{(V_x)_0^n}{2}\right) + V_1^{n+1}\left(\frac{1}{h}\right) = f_0(n\tau, 0) + \frac{G_0^n}{\tau} + \\
+\frac{h}{2}\left(((GV)_{x\overline{x}})_1^n - \frac{1}{2}((GV)_{x\overline{x}})_1^n + (2-G_0^n)((V_{x\overline{x}})_1^n - \frac{1}{2}(V_{x\overline{x}})_2^n)\right) + G_0^n\frac{(V_x)_0^n}{2}, & (2) \\
G_M^{n+1}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{(V_{\overline{x}})_M^n}{2}\right) + V_{M-1}^{n+1}\left(-\frac{1}{h}\right) = f_0(n\tau, X) + \frac{G_M^n}{\tau} + G_M^n\frac{V_{\overline{x}}}{2} - \\
-\frac{h}{2}\left(((GV)_{x\overline{x}})_{M-1}^n - \frac{1}{2}((GV)_{x\overline{x}})_{M-2}^n + (2-G_M^n)(V_{x\overline{x}})_{M-1}^n - \frac{1}{2}(V_{x\overline{x}})_{M-2}^n\right), & (3) \\
V_{m-1}^{n+1}\left(-\frac{V_m^n}{3h} - \left(\frac{\mu||e^{-\hat{G}}||_C}{h^2}\right)\right) + V_m^{n+1}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{(V_{\overset{0}{x}})_m^n}{3} + \frac{2\mu||e^{-\hat{G}}||_C}{h^2}\right) + \\
V_{m+1}^{n+1}\left(\frac{V_m^n}{3h} - \frac{\mu||e^{-\hat{G}}||_C}{h^2}\right) + G_{m-1}^{n+1}\left(-\tilde{p}'\frac{G_m^n}{2h}\right) + G_{m+1}^{n+1}\left(\tilde{p}'\frac{G_m^n}{2h}\right) = \\
f(n\tau, mh) - (V_{x\overline{x}})_m^n\left(\mu||e^{-\hat{G}}||_C - \mu e^{-G_m^n} + \frac{V_m^n}{\tau}\right), \quad 1 \leqslant m \leqslant M-1 & (4)
\end{cases}
$$

Будем называть *n-ым слоем* узлы сетки с координатой по времени равной n. Заметим, что значения V и G известны на нулевом слое. При известных значениях функции на слое n, с помощью системы уравнений, можно вычислить значения функций на $n+1$ слое. Покажем, как уравнения $(1)-(4)$ формируют необходимую СЛАУ $(*)$.

Уравнение (1) для $m = 1$ и $m = M-1$ содержит четыре неизвестных, т.к. $V_0 = V_M = 0$ на любом слое. Для $2 \leqslant m \leqslant M-2$ уравнение (1) содержит пять неизвестных.

m, пробегая в уравнении (1) значения от 1 до $M-1$, формирует $M-1$ уравнение в системе $(*)$ для неизвестных $G_0^{n+1}, \ldots, G_M^{n+1}$ и $V_1^{n+1}, \ldots, V_{M-1}^{n+1}$

Уравнение (2) дает 1 уравнение в СЛАУ $(*)$ для неизвестных G_0^{n+1}, V_1^{n+1}.

Уравнение (3) дает 1 уравнение в СЛАУ $(*)$ для неизвестных G_M^{n+1}, V_{M-1}^{n+1}.

Уравнение (4) для $m = 1$ и $m = M - 1$ содержит четыре неизвестных, по тем же причинам, что и уравнение (1), и пять при $2 \leqslant m \leqslant M - 2$. m, пробегая в уравнении (4) значения от 1 до $M - 1$, формирует $M - 1$ уравнение в системе $(*)$ для неизвестных $G_0^{n+1}, \ldots, G_M^{n+1}$ и $V_1^{n+1}, \ldots, V_{M-1}^{n+1}$

И так, СЛАУ $(*)$ является системой с $(M+1)+(M-1) = 2M$ неизвестными и $(M-1)+1+1+(M-1) = 2M$ уравнениями. В каждом уравнении не более пяти ненулевых коэффициентов.

Таким образом СЛАУ $(*)$ является разреженной, что делает естественным применение итерационных алгоритмов для ее решения.

Последовательно решая такие СЛАУ для $1 \leqslant n \leqslant N$, получим значения G и V во всех узлах сетки.

3 Результаты тестовых расчетов для гладких решений

Для проверки реализованного на ЭВМ алгоритма сделаем следующее.

1. Положим
$$\begin{cases} \rho(t,x) = e^t(\cos(\pi x/10) + 1.5), \\ u(t,x) = \cos(2\pi t)\sin(\pi (x/10)^2). \end{cases}$$

2. Аналитически вычислим f_0 и f поставленной дифференциальной задачи с такими ρ и u.

3. Сравним значения функций $g(t,x) = \ln(\rho(t,x))$ и u в узлах сетки, вычисленные алгоритмом со значениями, вычисленными аналитически.

Рассмотрим нормы невязок скорости и плотности на последнем слое и их динамику при изменении шага сетки.

$||G_m^n - g(\tau n, hm)||_C$:

N\M	20	60	180	540
20	3,362763e-03	6,904808e-03	7,248479e-03	7,287653e-03
60	1,424766e-03	1,641603e-03	1,932583e-03	1,967819e-03
180	2,576837e-03	2,758106e-04	5,668744e-04	6,014177e-04
540	2,916249e-03	1,400972e-04	1,573306e-04	1,919499e-04

$||G_m^n - g(\tau n, hm)||_{L2_h}$:

N\M	20	60	180	540
20	5,557584e-03	6,769331e-03	6,772578e-03	6,721444e-03
60	1,396404e-03	1,638533e-03	1,861853e-03	1,872744e-03
180	2,464337e-03	4,534565e-04	6,725535e-04	6,949450e-04
540	2,847338e-03	1,578137e-04	2,164430e-04	2,405244e-04

$||G_m^n - g(\tau n, hm)||_{W_2^1}$:

N\M	20	60	180	540
20	1,136667e-02	9,072672e-03	8,801006e-03	8,703443e-03
60	8,457332e-03	3,237552e-03	2,976311e-03	2,959965e-03
180	8,482201e-03	1,756316e-03	1,106216e-03	1,084601e-03
540	8,574849e-03	1,478489e-03	4,476420e-04	3,764018e-04

$||V_m^n - u(\tau n, hm)||_C$:

N\M	20	60	180	540
20	4,468816e-03	4,320572e-03	4,391831e-03	4,402297e-03
60	2,274610e-03	2,065016e-03	2,338842e-03	2,372508e-03
180	3,366699e-03	6,409690e-04	8,794924e-04	9,151004e-04
540	3,848622e-03	1,976056e-04	2,818159e-04	3,165054e-04

$||V_m^n - u(\tau n, hm)||_{L2_h}$:

N\M	20	60	180	540
20	7,078412e-03	7,252476e-03	7,459118e-03	7,483797e-03
60	3,487132e-03	3,275770e-03	3,623278e-03	3,663961e-03
180	4,084412e-03	1,008701e-03	1,337205e-03	1,379699e-03
540	4,679689e-03	3,338699e-04	4,329982e-04	4,749383e-04

$||V_m^n - u(\tau n, hm)||_{W_2^1}$:

N\M	20	60	180	540
20	1,602271e-02	8,270292e-03	8,606246e-03	8,665422e-03
60	1,488460e-02	4,022029e-03	4,374032e-03	4,474257e-03
180	1,596604e-02	2,403521e-03	1,641375e-03	1,709770e-03
540	1,654288e-02	2,447612e-03	6,304648e-04	5,906696e-04