

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОДНОМЕРНОГО  
ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМЫ ДЛЯ ЛОГАРИФМА  
ПЛОТНОСТИ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

## 1 Постановка дифференциальной задачи

Одномерное движение вязкого баротропного газа описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = f_0, \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f \end{cases}$$

$p = p(\rho)$  - известная функция давления от плотности.  $f_0 \equiv 0$ ,  $f$  - известная функция от  $(t, x)$ .

$$\mu \in [0,001; 0,1]$$

Неизвестные функции плотности и скорости:

$$\rho, u : [0, T] \times [0, X] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ где } T, X > 0$$

$$\rho > 0$$

Краевые условия:

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), x \in [0, X]$$

Для гарантирования положительности  $\rho$  вместо функции  $\rho$  имеет смысл искать функцию  $g = \ln(\rho)$

Тогда система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u g}{\partial x} + (2 - g) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f_0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \tilde{p}'(g) \frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \end{cases}$$

## 2 Построение разностной схемы

Для численного решения системы введем сетку на области  $[0, T] \times [0, X]$  с шагом  $h$  по оси  $OX$  и  $\tau$  по оси  $OT$ . Узел сетки с координатами  $(n, m)$  соответствует точке  $(n\tau, mh)$  области. Для разностных операторов и значений в узлах сетки будем использовать обозначения, введенные в пособии к вычислительному практикуму.

$M$  - количество узлов вдоль оси  $OX$ .  $N$  - количество узлов вдоль оси  $OT$ .

Запишем разностную схему:

$$\begin{cases} G_t + \frac{1}{2}(V\hat{G}_0 + (V\hat{G})_0 + (2-G)V_0) = f_0, & 1 \leq m \leq M-1, \\ G_{t,0} + \frac{1}{2}((V\hat{G})_{x,0} + (2-G_0)V_{x,0}) - \\ - \frac{h}{2}((GV)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}(GV)_{x\bar{x},2} + (2-G_0)(V_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}V_{x\bar{x},2})) = (f_0)_0, \\ G_{t,M} + \frac{1}{2}((V\hat{G})_{\bar{x},M} + (2-G_M)V_{\bar{x},M}) + \\ + \frac{h}{2}((GV)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2-G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}V_{x\bar{x},M-2})) = (f_0)_M, \\ V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_0 + (V\hat{V})_0) + \tilde{p}'(\hat{G})\hat{G}_0 = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-\hat{G}})V_{x\bar{x}} + f, & 1 \leq m \leq M-1, \end{cases}$$

где  $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-\hat{G}}\|_C$ .

Запишем эту схему в следующем виде, сгруппировав слагаемые:

$$\begin{cases} G_{m-1}^{n+1} \left( \frac{-V_m^n}{2h} \right) + G_m^{n+1} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \left( V_x^n \right)_m \right) + \\ + G_{m+1}^{n+1} \left( \frac{V_m^n}{2h} \right) + V_{m+1}^{n+1} \left( \frac{1}{2h} \right) + V_{m-1}^{n+1} \left( \frac{1}{2h} \right) = \\ = f_0(n\tau, mh) + G_m^n \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \left( V_x^n \right)_m \right), & 1 \leq m \leq M-1 \quad (1) \\ G_0^{n+1} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{(V_x)_0^n}{2} \right) + V_1^{n+1} \left( \frac{1}{h} \right) = f_0(n\tau, 0) + \frac{G_0^n}{\tau} + \\ + \frac{h}{2} \left( ((GV)_{x\bar{x}})_1^n - \frac{1}{2}((GV)_{x\bar{x}})_1^n + (2-G_0^n)((V_{x\bar{x}})_1^n - \frac{1}{2}(V_{x\bar{x}})_2^n) \right) + G_0^n \frac{(V_x)_0^n}{2}, \quad (2) \\ G_M^{n+1} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{(V_{\bar{x}})_M^n}{2} \right) + V_{M-1}^{n+1} \left( -\frac{1}{h} \right) = f_0(n\tau, X) + \frac{G_M^n}{\tau} + G_M^n \frac{V_{\bar{x}}}{2} - \\ - \frac{h}{2} \left( ((GV)_{x\bar{x}})_{M-1}^n - \frac{1}{2}((GV)_{x\bar{x}})_{M-2}^n + (2-G_M^n)(V_{x\bar{x}})_{M-1}^n - \frac{1}{2}(V_{x\bar{x}})_{M-2}^n \right), \quad (3) \\ V_{m-1}^{n+1} \left( -\frac{V_m^n}{3h} - \left( \frac{\mu \|e^{-\hat{G}}\|_C}{h^2} \right) \right) + V_m^{n+1} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{(V_x)_m^n}{3} + \frac{2\mu \|e^{-\hat{G}}\|_C}{h^2} \right) + \\ + V_{m+1}^{n+1} \left( \frac{V_m^n}{3h} - \frac{\mu \|e^{-\hat{G}}\|_C}{h^2} \right) + G_{m-1}^{n+1} \left( -\tilde{p}' \frac{G_m^n}{2h} \right) + G_{m+1}^{n+1} \left( \tilde{p}' \frac{G_m^n}{2h} \right) = \\ = f(n\tau, mh) - (V_{x\bar{x}})_m^n \left( \mu \|e^{-\hat{G}}\|_C - \mu e^{-G_m^n} + \frac{V_m^n}{\tau} \right), & 1 \leq m \leq M-1 \quad (4) \end{cases}$$

Будем называть  $n$ -ым слоем узлы сетки с координатой по времени равной  $n$ . Заметим, что значения  $V$  и  $G$  известны на нулевом слое. При известных значениях функции на слое  $n$ , с помощью системы уравнений, можно вычислить значения функций на  $n+1$  слое. Покажем, как уравнения (1) – (4) формируют необходимую СЛАУ (\*).

Уравнение (1) для  $m=1$  и  $m=M-1$  содержит четыре неизвестных, т.к.  $V_0 = V_M = 0$  на любом слое. Для  $2 \leq m \leq M-2$  уравнение (1) содержит пять неизвестных.

$m$ , пробегая в уравнении (1) значения от 1 до  $M-1$ , формирует  $M-1$  уравнение в системе (\*) для неизвестных  $G_0^{n+1}, \dots, G_M^{n+1}$  и  $V_1^{n+1}, \dots, V_{M-1}^{n+1}$ .

Уравнение (2) дает 1 уравнение в СЛАУ (\*) для неизвестных  $G_0^{n+1}, V_1^{n+1}$ .

Уравнение (3) дает 1 уравнение в СЛАУ (\*) для неизвестных  $G_M^{n+1}, V_{M-1}^{n+1}$ .

Уравнение (4) для  $m=1$  и  $m=M-1$  содержит четыре неизвестных, по тем же причинам, что и уравнение (1), и пять при  $2 \leq m \leq M-2$ .

$m$ , пробегая в уравнении (4) значения от 1 до  $M-1$ , формирует  $M-1$  уравнение в системе (\*) для неизвестных  $G_0^{n+1}, \dots, G_M^{n+1}$  и  $V_1^{n+1}, \dots, V_{M-1}^{n+1}$ .

И так, СЛАУ (\*) является системой с  $(M + 1) + (M - 1) = 2M$  неизвестными и  $(M - 1) + 1 + 1 + (M - 1) = 2M$  уравнениями. В каждом уравнении не более пяти ненулевых коэффициентов.

Таким образом СЛАУ (\*) является разреженной, что делает естественным применение итерационных алгоритмов для ее решения.

Последовательно решая такие СЛАУ для  $1 \leq n \leq N$ , получим значения  $G$  и  $V$  во всех узлах сетки.

### 3 Результаты тестовых расчетов для гладких решений

Для проверки реализованного на ЭВМ алгоритма сделаем следующее.

1. Положим

$$\begin{cases} \rho(t, x) = e^t(\cos(\pi x/10) + 1.5), \\ u(t, x) = \cos(2\pi t) \sin(\pi(x/10)^2), \\ \tilde{p}'(x) = 1.4x^{0.4}, \\ \mu = 0,01. \end{cases}$$

2. Аналитически вычислим  $f_0$  и  $f$  поставленной дифференциальной задачи с такими  $\rho$  и  $u$ .

3. Сравним значения функций  $g(t, x) = \ln(\rho(t, x))$  и  $u$  в узлах сетки, вычисленные алгоритмом со значениями, вычисленными аналитически.

Рассмотрим нормы невязок скорости и плотности на последнем слое и их динамику при изменении шага сетки.

$$\|G_m^n - g(\tau n, hm)\|_{C_h}:$$

N\M	20	40	80	160
20	3,922676e-03	6,846325e-03	7,855319e-03	8,028590e-03
80	2,284488e-03	6,666070e-04	1,385733e-03	1,552270e-03
320	3,298528e-03	5,208735e-04	1,538522e-04	3,205057e-04
1280	3,528191e-03	7,919148e-04	1,299347e-04	3,777771e-05

$$\|G_m^n - g(\tau n, hm)\|_{L2_h}:$$

N\M	20	40	80	160
20	6,978421e-03	8,324877e-03	8,596909e-03	8,588685e-03
80	2,196948e-03	1,066965e-03	1,529168e-03	1,638729e-03
320	3,151690e-03	4,912069e-04	2,865486e-04	3,929692e-04
1280	3,411053e-03	7,215213e-04	1,180613e-04	7,359237e-05

$$\|G_m^n - g(\tau n, hm)\|_{W_2^1}:$$

N\M	20	40	80	160
20	8,116420e-03	9,991449e-03	1,041680e-02	1,040223e-02
80	3,335466e-03	1,429192e-03	2,152698e-03	2,329049e-03
320	4,669536e-03	7,197021e-04	3,882380e-04	5,609736e-04
1280	5,040628e-03	1,078920e-03	1,725182e-04	9,975466e-05

$$\|V_m^n - u(\tau n, hm)\|_{C_h}:$$

N\M	20	40	80	160
20	6,536483e-03	7,631195e-03	8,045635e-03	8,162966e-03
80	3,209157e-03	2,053450e-03	2,571117e-03	2,735217e-03
320	4,584228e-03	6,996692e-04	5,508347e-04	6,929872e-04
1280	4,986150e-03	1,119679e-03	1,681524e-04	1,400664e-04

$$\|V_m^n - u(\tau n, hm)\|_{L_{2h}}:$$

N\M	20	40	80	160
20	1,038489e-02	1,248116e-02	1,327623e-02	1,348587e-02
80	4,157618e-03	3,399343e-03	4,243924e-03	4,482896e-03
320	5,684335e-03	9,515532e-04	9,173616e-04	1,137741e-03
1280	6,362583e-03	1,388733e-03	2,339405e-04	2,337295e-04

$$\|V_m^n - u(\tau n, hm)\|_{W_2^1}:$$

N\M	20	40	80	160
20	1,337563e-02	1,472665e-02	1,565885e-02	1,591049e-02
80	6,622063e-03	4,081016e-03	5,069747e-03	5,373048e-03
320	8,282039e-03	1,521293e-03	1,106045e-03	1,367516e-03
1280	9,028565e-03	2,020049e-03	3,772762e-04	2,821159e-04

Динамикой падения невязок подтверждается сходимость решения порядка  $\tau + h^2$

## 4 Добавление искусственной вязкости для погашения осцилляций

Как будет видно в следующем разделе, на участках скачка или разрывов иногда возникают осцилляции. Добавление искусственной вязкости способствует увеличению погрешности полученного решения, но так же и большей наглядности графиков в силу погашения осцилляций.

Первое уравнение схемы (2.1) изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} & G_{m-1}^{n+1} \left( \frac{-V_m^n}{2h} - \frac{\tau\eta}{h^2} (V_m^n)^2 \right) + G_m^{n+1} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \left( V_x^n \right)_m + \frac{\tau\eta}{h} \left( 2V_m^n (V_m^n)_{\bar{x}} + \frac{2}{h} (V_m^n)^2 \right) \right) + \\ & + G_{m+1}^{n+1} \left( \frac{V_m^n}{2h} - \frac{\tau\eta}{h} \left( 2V_m^n (V_m^n)_{\bar{x}} + \frac{1}{h} (V_m^n)^2 \right) \right) + V_{m+1}^{n+1} \left( \frac{1}{2h} \right) + V_{m-1}^{n+1} \left( \frac{1}{2h} \right) = \\ & = f_0(n\tau, mh) + G_m^n \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \left( V_x^n \right)_m \right), \quad 1 \leq m \leq M-1. \end{aligned}$$

$\eta$  положим равным 1.

Для того, чтобы понять насколько велика погрешность, вносимая искусственной вязкостью, запустим программу с конфигурацией раздела 3. Рассмотрим нормы невязок скорости и плотности на последнем слое и их динамику при изменении шага сетки.

$$\|G_m^n - g(\tau n, hm)\|_{C_h}:$$

N\M	20	40	80	160
20	3,027303e-03	6,079820e-03	7,109855e-03	7,297630e-03
80	2,469829e-03	6,046209e-04	1,228040e-03	1,398319e-03
320	3,343293e-03	5,603700e-04	1,565692e-04	2,837960e-04
1280	3,539285e-03	8,016850e-04	1,392396e-04	4,359738e-05

$$\|G_m^n - g(\tau n, hm)\|_{L2_h}:$$

N\M	20	40	80	160
20	5,459609e-03	6,719960e-03	7,010482e-03	7,006051e-03
80	2,358832e-03	8,562423e-04	1,353432e-03	1,483715e-03
320	3,208420e-03	5,295449e-04	2,733631e-04	3,755793e-04
1280	3,425545e-03	7,323123e-04	1,276667e-04	7,330143e-05

$$\|G_m^n - g(\tau n, hm)\|_{W_2^1}:$$

N\M	20	40	80	160
20	6,428185e-03	8,471366e-03	9,040238e-03	9,082784e-03
80	3,448082e-03	1,289660e-03	2,093473e-03	2,303993e-03
320	4,711536e-03	7,339005e-04	3,948103e-04	5,730980e-04
1280	5,051336e-03	1,082671e-03	1,745601e-04	1,047004e-04

$$\|V_m^n - u(\tau n, hm)\|_{C_h}:$$

N\M	20	40	80	160
20	7,603278e-03	8,826935e-03	9,226537e-03	9,341849e-03
80	3,302077e-03	2,340227e-03	2,795649e-03	2,930461e-03
320	4,607151e-03	7,379845e-04	6,189833e-04	7,411660e-04
1280	4,991859e-03	1,125517e-03	1,803059e-04	1,568410e-04

$$\|V_m^n - u(\tau n, hm)\|_{L2_h}:$$

N\M	20	40	80	160
20	1,169881e-02	1,380130e-02	1,455186e-02	1,474642e-02
80	4,310347e-03	3,716146e-03	4,506701e-03	4,728942e-03
320	5,673148e-03	1,013637e-03	9,924577e-04	1,198472e-03
1280	6,357793e-03	1,389623e-03	2,519741e-04	2,521522e-04

$$\|V_m^n - u(\tau n, hm)\|_{W_2^1}:$$

N\M	20	40	80	160
20	1,535277e-02	1,660978e-02	1,742239e-02	1,763747e-02
80	6,948748e-03	4,541354e-03	5,394857e-03	5,659660e-03
320	8,309691e-03	1,638142e-03	1,212322e-03	1,438737e-03
1280	9,032652e-03	2,033500e-03	4,099248e-04	3,079729e-04

## 5 Результаты расчетов для негладких начальных данных

Решим 2 задачи с негладкими начальными данными.

$$\begin{aligned} f_0 &\equiv 0, \\ f_1 &\equiv 0, \\ \tilde{p}'(x) &= 1.4x^{0.4} \end{aligned} \quad (1)$$

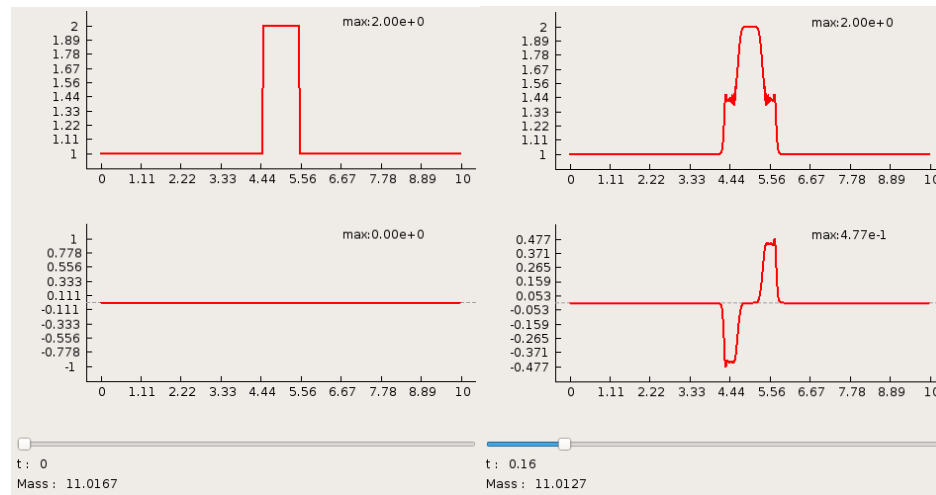
$$(1) \quad \begin{cases} \rho_0(x) = 1, & x < 4,5 \text{ или } x > 5,5, \\ \rho_0(x) = 2, & x \in [4,5; 5,5], \\ u_0(x) \equiv 0, & x \in [0; 10], \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0, & t \in [0; 1], \end{cases} \quad \mu = 0,01,$$

$$(2) \quad \begin{cases} u_0(x) = 0, & x < 4,5 \text{ или } x > 5,5, \\ u_0(x) = 1, & x \in [4,5; 5,5], \\ \rho_0(x) \equiv 1, & x \in [0; 10], \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0, & t \in [0; T], \end{cases} \quad \mu = 0,1.$$

Настройки алгоритма:

$$M = 600, N = 600.$$

Для задачи (1) без добавления искусственной вязкости получаем:



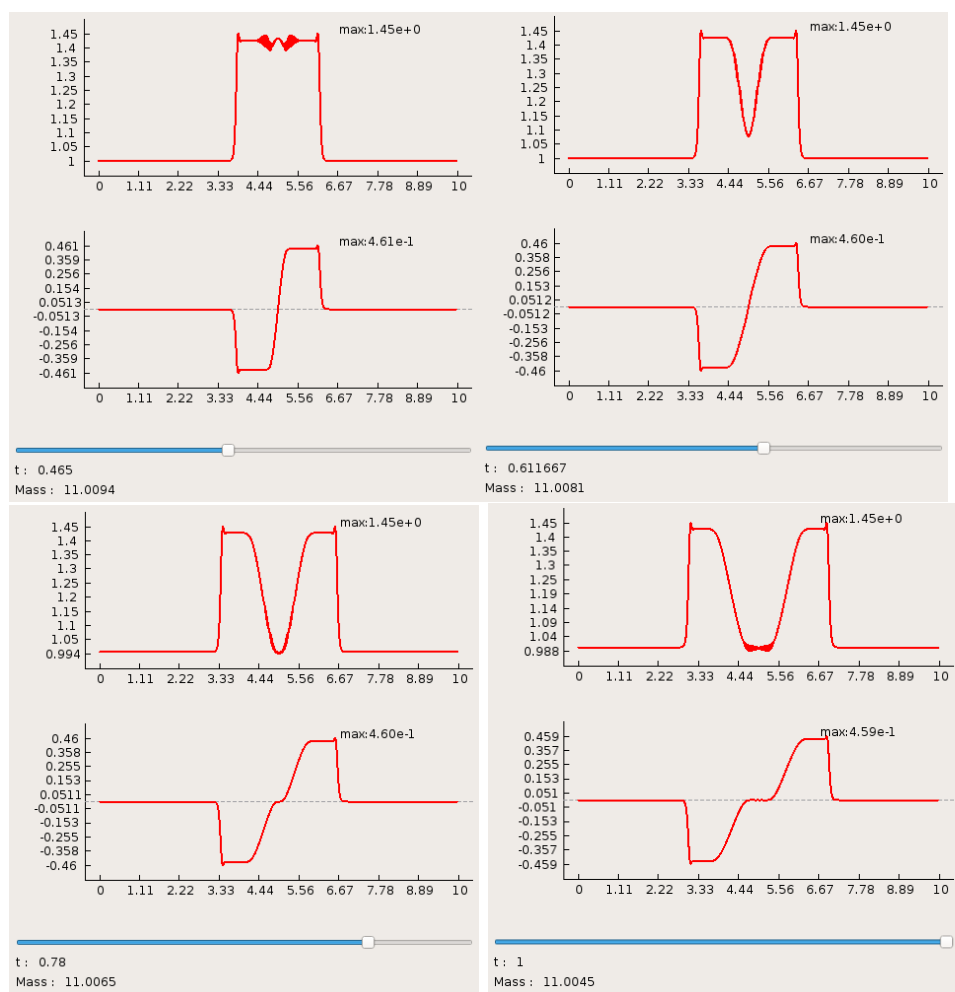
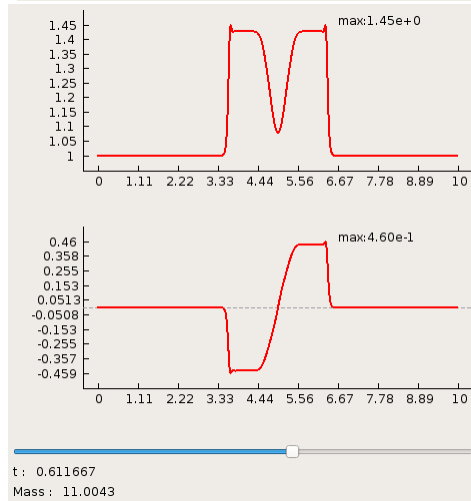
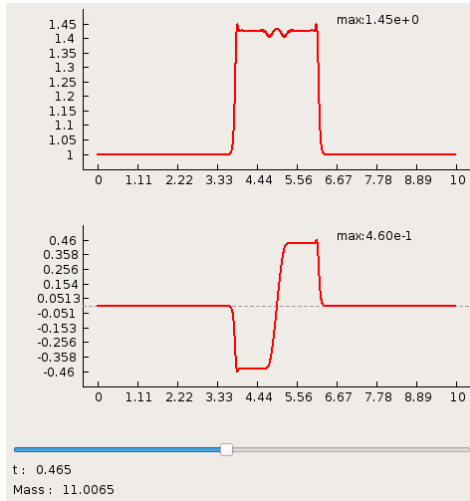
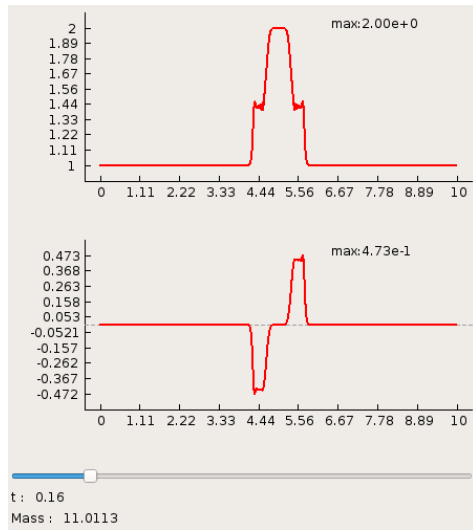
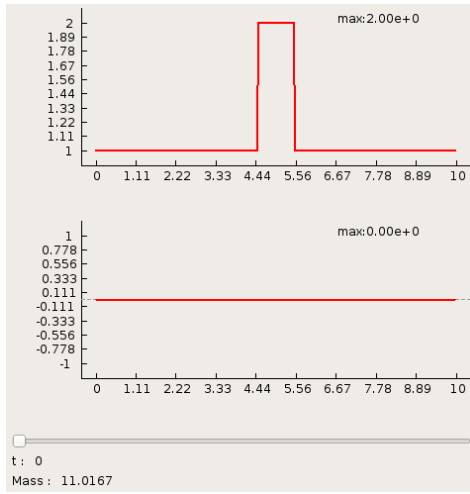


Рис. 1: Графики плотности (верхний) и скорости (нижний)

Для задачи (1) с добавлением искусственной вязкости получаем





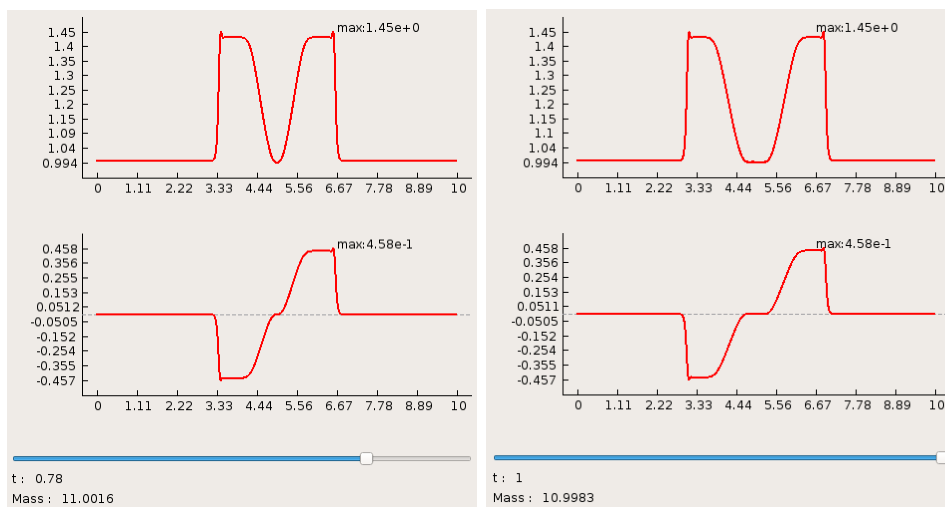
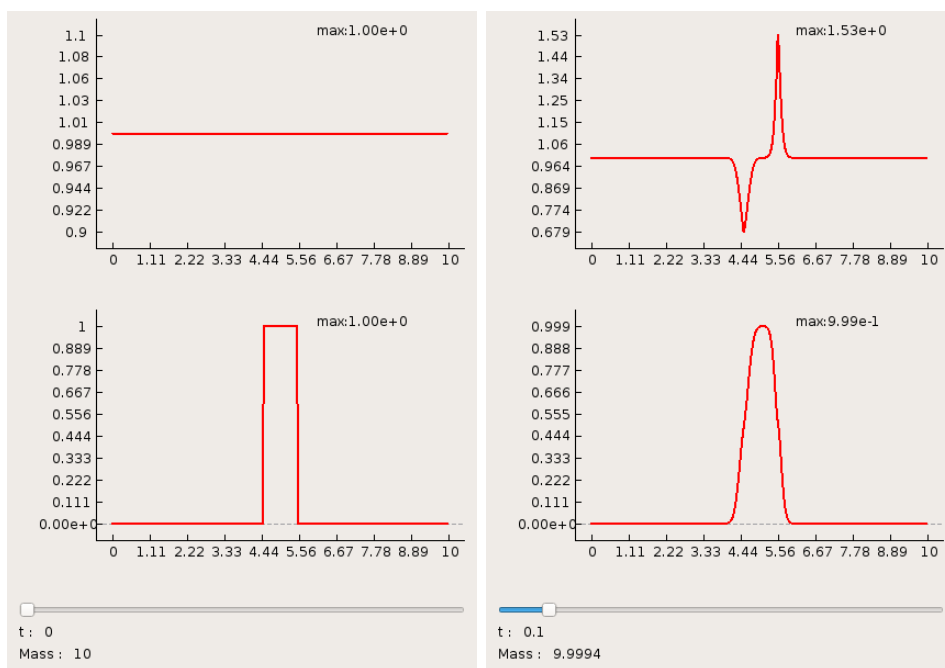


Рис. 2: Графики плотности (верхний) и скорости (нижний)

Заметим, что закон сохранения масс выполнен, т.к. изменяется в пределах вычислительной погрешности.

Для задачи (2) без добавления искусственной вязкости получаем:



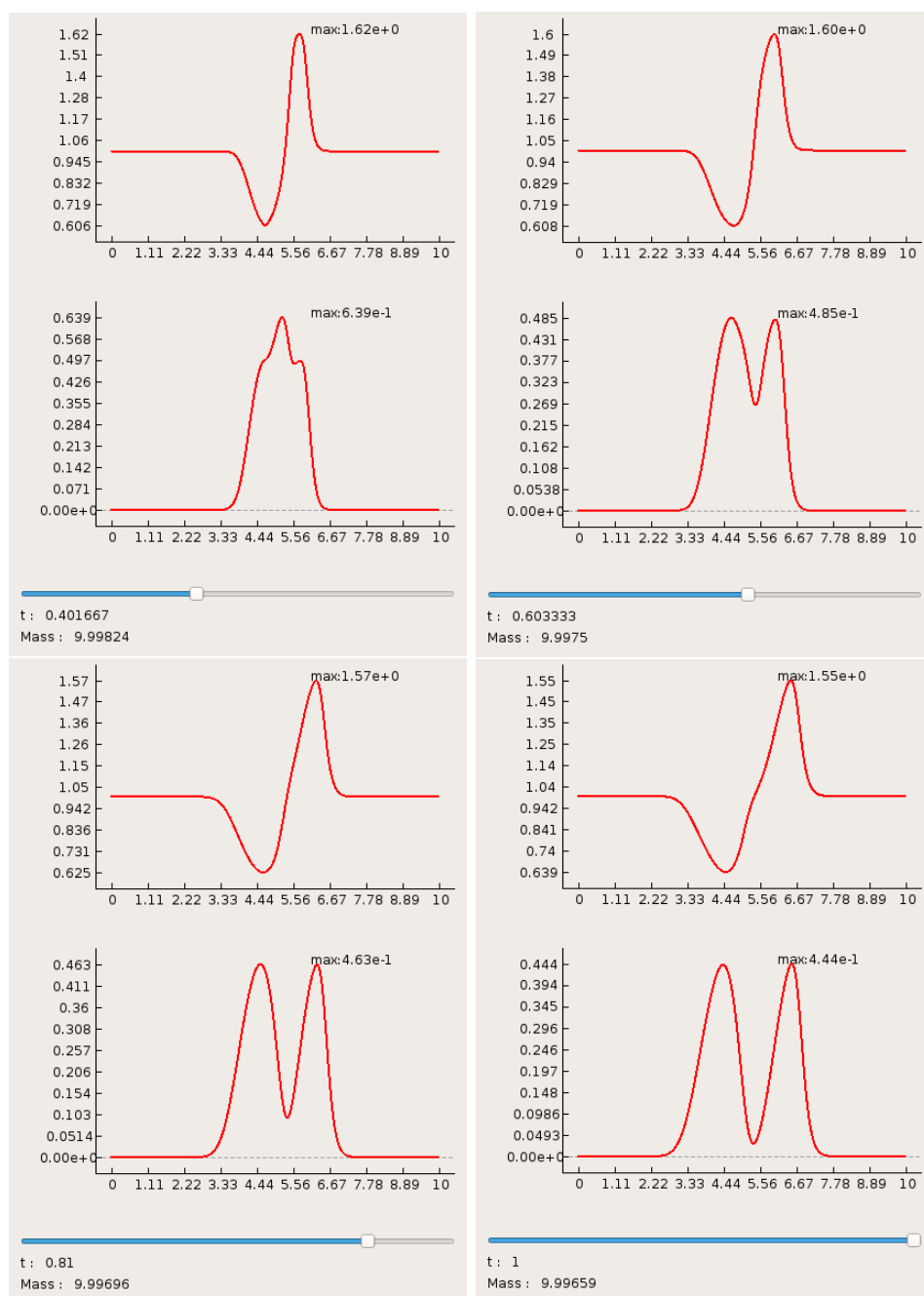


Рис. 3: Графики плотности (верхний) и скорости (нижний)

Закон сохранения массы так же выполнен.

## 6 Зависимость точности полученного решения от коэффициента вязкости газа

Для задачи 4.1 проведем три запуска программы с

$$\begin{cases} f_0 \equiv 0, \\ f_1 \equiv 0, \\ \tilde{p}'(z) = 1.4z^{0.4}, \\ M = 800, \\ N = 800, \\ \mu \in \{0.001, 0.01, 0.1\} \end{cases}$$

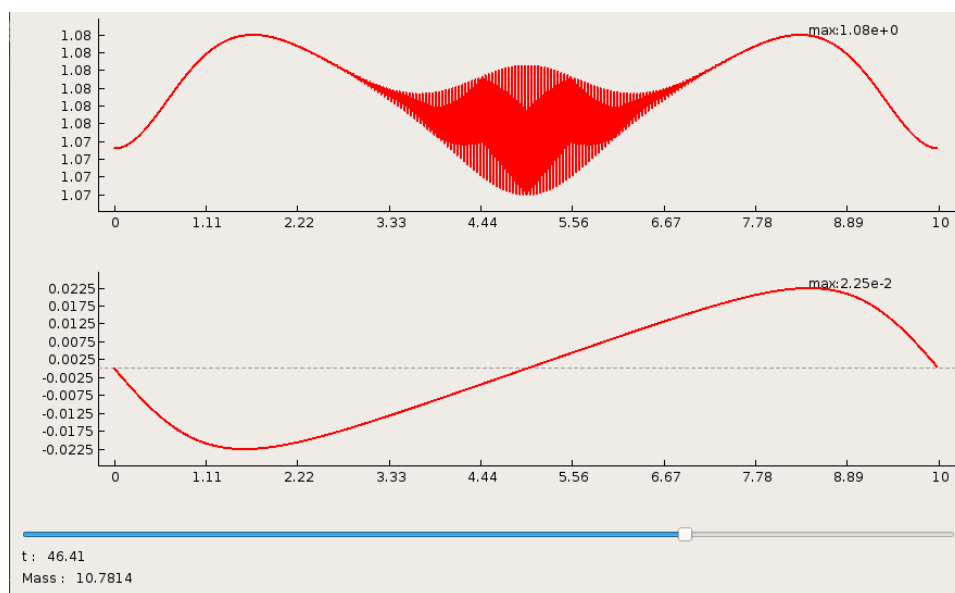
Имеем следующую зависимость точности полученного решения от коэффициента вязкости газа:

норма \ $\mu$	0.001	0.01	0.1
$\ G_m^n - g(\tau n, hm)\ _{C_h}$	2,584176e-04	3,700739e-04	2,817834e-03
$\ G_m^n - g(\tau n, hm)\ _{L_{2,h}}$	3,207805e-04	4,151149e-04	2,019011e-03
$\ G_m^n - g(\tau n, hm)\ _2^1$	5,062162e-04	7,514924e-04	5,873506e-03
$\ V_m^n - u(\tau n, hm)\ _{C_h}$	4,216830e-04	4,278619e-04	2,062970e-03
$\ V_m^n - u(\tau n, hm)\ _{L_{2,h}}$	6,341970e-04	6,255225e-04	1,524787e-03
$\ V_m^n - u(\tau n, hm)\ _2^1$	7,866074e-04	8,754409e-04	5,837614e-03

## 7 Стабилизация газа на негладких начальных условиях

Интересно построить решение разностной схемы на области, неограниченной по времени. Вместо этого критерием окончания итеративного процесса, может являться достаточно малая разность между максимальным и минимальным значением плотности газа на  $[0, X]$ . Приведем графические результаты работы алгоритма на задаче (4.1) с критерием для плотности  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Запустим программу *без добавления искусственной вязкости* со следующими параметрами:

$$\begin{cases} f_0 \equiv 0, \\ f_1 \equiv 0, \\ \tilde{p}'(z) = 1.4z^{0.4}, \\ h = 0.125, \\ \tau = 0.125, \\ \mu = 0.1 \end{cases}$$



Запустим программу с добавлением искусственной вязкости со теми же параметрами

