Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием схемы для логарифма плотности с центральными разностями

1 Постановка дифференциальной задачи

Одномерное движение вязкого баротропного газа описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} + \rho u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f \end{cases}$$

$p = p(\rho)$ - известная функция давления от плотности

$$\mu \in [0,001; 0,1]$$

Неизвестные функции плотности и скорости:

$$\rho,\ u : [0, T] \times [0, X] \to \mathbb{R}, \text{ где } T,\ X > 0$$

$$\rho > 0$$

Краевые условия:

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), x \in [0, X]$$

Для гарантирования положительности ρ вместо функции ρ имеет смысл искать функцию $g = \ln(\rho)$

Тогда система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(u\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial ug}{\partial x} + (2-g)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{3}\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x}\right) + \tilde{p}'(g)\dfrac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \end{cases}$$