Спектр линеаризированного оператора разностной схемы на стационарном решении системы уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа

1 Постановка задачи

Для разностной схемы с центральными разностями для логарифма плотности построим матрицу дифференциального оператора на стационарном решении. Задача - найти собственные значения такого оператора.

2 Построение оператора

Для построения, учитывая, что стационарное решение - решение с постоянной плотностью и нулевой скоростью:

1. Положим $\forall m, n : V_m^n = 0,\ G_m^n = G$, где $G = \ln \rho_0$ и ρ_0 - положительная константа.
2. Заменим в схеме G_m^n на $G + J_m$, V_m^n на W_m.
3. Отбросим слагаемые, не зависящие от J_m и W_m.
4. Отбросим слагаемые, зависящие нелинейно от J_m и W_m.
5. Заменим $e^G = \frac{1}{\rho_0}$.

Тогда разностная схема примет вид:

$$\begin{cases}
W_0\left(-\dfrac{3}{h}\right)+W_1\left(\dfrac{4}{h}\right)+W_2\left(-\dfrac{1}{h}\right)=0, & (1)\\[2ex]
W_{m-1}\left(-\dfrac{1}{h}\right)+W_{m+1}\left(\dfrac{1}{h}\right)=0,\quad 1\leqslant m\leqslant M-1, & (2)\\[2ex]
W_{M-2}\left(\dfrac{1}{h}\right)+W_{M-1}\left(-\dfrac{4}{h}\right)+W_M\left(\dfrac{3}{h}\right)=0, & (3)\\[2ex]
J_{m-1}\left(\dfrac{\tilde{p}'(\rho_0)}{2h}\right)+J_{m+1}\left(-\dfrac{\tilde{p}'(\rho_0)}{2h}\right)+W_{m-1}\left(-\dfrac{\mu}{\rho_0 h^2}\right)+ & \\[2ex]
+W_m\left(\dfrac{2\mu}{\rho_0 h^2}\right)+W_{m+1}\left(-\dfrac{\mu}{\rho_0 h^2}\right)=0,\quad 1\leqslant m\leqslant M-1. & (4)\\[2ex]
W_0=0 & \\[2ex]
W_M=0 &
\end{cases}$$

Отбросим тривиальные W_0 и W_M и построим матрицу следующим образом:

1. Колонкам переменные отвечают в следующем порядке:

$$J_0, J_1, W_1, J_2, \ldots, W_{M-1}, J_M$$

Строчки заполняются уравнениями так:

$$\begin{pmatrix}
(1)\\
(2)|_{m=1}\\
(4)|_{m=1}\\
(2)|_{m=2}\\
(4)|_{m=2}\\
\vdots\\
(2)|_{m=M-1}\\
(4)|_{m=M-1}\\
(3)
\end{pmatrix}$$

Покажем на комплексной плоскости собственные значения такого оператора для

$$\begin{cases} \rho_0 = 1 \\ \tilde{p}'(x) = 1 \\ M = 120 \\ X = 10 \\ h = \frac{1}{12} \\ \mu = 0.01 \end{cases}$$