МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №1

по дисциплине «Вычислительная математика»

Тема: Приближенное решение уравнения $f(x) = 0$ методом деления пополам (метод бисекций)

Студент гр. 8301	__________________	Готовский К.В.
Преподаватель	__________________	Сучков А.И
	__________________	Колоницкий С.Б.

Санкт-Петербург

2020

Цель работы.

Изучение программирования Octave с последующим созданием Пролог-программы с графическим интерфейсом.

Основные теоретические положения.

Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти корень уравнения $f(x) = 0$. Предположим, что найден отрезок $[a, b]$, такой, что $f(a)f(b) < 0$. Тогда согласно теореме Больцано — коши внутри отрезка $[a, b]$ существует точка c, в которой значение функции равно нулю, т. е. $f(c) = 0$, $c \in (a, b)$. Итерационный метод бисекций состоит в построении последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n] | [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a, b]\}$, на концах которых функция принимает значения разных знаков. Каждый последующий отрезок получают делением пополам предыдущего. Процесс построения последовательности отрезков позволяет найти нуль функции $f(x)$ (корень уравнения $f(x) = 0$ с любой заданной точностью.

Опишем один шаг итераций. Пусть на *(n-1)*-м шаге найден отрезок $[a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a, b]$, такой, что $f(a_{n-1})f(b_{n-1}) < 0$. Делим его пополам точкой и вычисляем $f(\xi)$. Если $f(\xi) = 0$, то — корень уравнения. Если $f(\xi) \neq 0$, то из двух половин отрезка выберем ту, на концах которой функция имеет противоположные знаки, так как один из корней лежит на этой половине. Таким образом,

$a_n = a_{n-1}, b_n = \xi$, если $f(\xi)f(a_{n-1}) < 0$,

$a_n = \xi, b_n = b_{n-1}$, если $f(\xi)f(a_{n-1}) > 0$.

Если требуется найти корень с точностью ε, то деление пополам продолжаем до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Тогда координата середины отрезка и есть значение корня с требуемой точностью ε.

Метод бисекций — простой и надежный метод поиска простого корня уравнения $f(x) = 0$. Он сходится для любых непрерывных функций $f(x)$, в том числе недифференцируемых. Скорость сходимости невелика. Для достижения точности ε необходимо совершить N итераций, где

$N \simeq log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$.

Это означает, что для получения каждых трех верных десятичных знаков необходимо совершить около 10 итераций.

Если на отрезке $[a, b]$ находится несколько корней уравнения $f(x) = 0$, то процесс сходится к одному из них. Метод неприменим для отыскания кратных корней четного порядка. В случае кратных корней нечетного порядка он менее точен.

Постановка задачи.

1. Графически или аналитически отделить корень уравнения $f(x) = 0$ (т. е. найти отрезок $[a, b]$, на котором функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Больцано – Коши.
2. Составить подпрограмму – функцию вычисления $f(x)$.
3. Составить головную программу, содержащую обращение к подпрограмме BISECT и печать результатов.
4. Провести вычисления по программе.

Выполнение работы.

Дана функция:

$$f(x) = log_e x - \frac{1}{1+x^2}. \quad (1)$$

Аналитическим путём – методом подстановки было найдено, что $f(1) = log_e 1 - \frac{1}{1+1^2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$, и что $f(e) = log_e e - \frac{1}{1+e^2} = 1 - \frac{1}{1+e^2} > 0$.

Для простоты вычислений взята более «правая» точка чем e, а именно 3.

В итоге есть промежуток $[1; 3]$.

Для проверки промежутка и правильности дальнейшего ответа, был построен график в онлайн калькуляторе (рис.1).

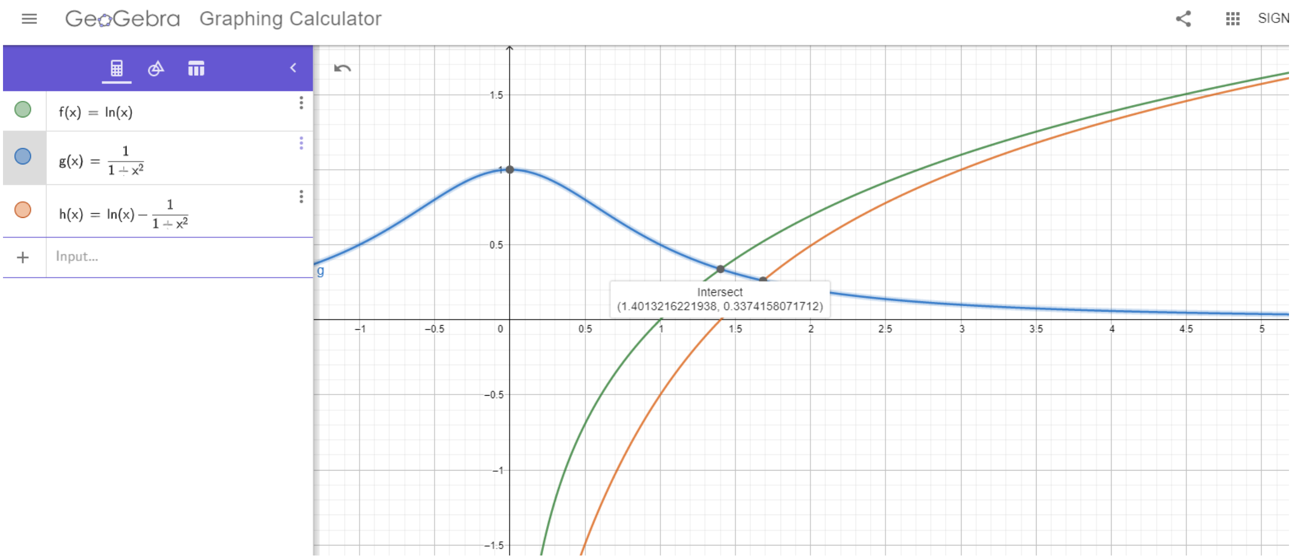

Рисунок 1 – График функции и его значения.

Значения вычислением методом бисекций представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Таблица значений вычислением методом бисекций.

a	*f(a)*	*b*	*f(b)*	*c*	*f(c)*
1	-0.5	3	0.99861	2	0.49315
1	-0.5	2	0.49315	1.5	0.09777
1	-0.5	1.5	0.09777	1.25	-0.16710
1.25	-0.16710	1.5	0.09777	1.375	-0.02749
1.375	-0.02749	1.5	0.09777	1.4375	0.03679
1.375	-0.02749	1.4375	0.03679	1.40625	0.00508
1.375	-0.02749	1.40625	0.00508	1.39063	-0.01109
1.39063	-0.01109	1.40625	0.00508	1.39844	-0.00298
1.39844	-0.00298	1.40625	0.00508	1.40234	0.00105
1.39844	-0.00298	1.40234	0.00105	1.40039	-0.00096
1.40039	-0.00096	1.40429	0.00306	1.40136	0.00004
1.40039	-0.00096	1.40136	0.00004	1.40088	-0.00046
1.40088	-0.00046	1.40136	0.00004	1.40112	-0.00021
1.40112	-0.00021	1.40136	0.00004	1.40124	-0.00008
1.40124	-0.00008	1.40136	0.00004	1.4013	-0.00002
1.4013	-0.00002	1.40136	0.00004	1.40133	0.00001

Полученный отрезок [1.4013; 1.40133] является приближенным ответом с точностью $\varepsilon = 5e - 5$. Ответ был получен за $N = 16$ итераций.

Проверка формулы из теоретического положения: $N \simeq log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} = log_2 \frac{3-1}{5e-5} =$ 15.288 $\simeq$ 16, что подтверждает правильность расчётов в таблице.

Результаты работы программы (см. приложение А) по алгоритму метода бисекций представлены на рис.2. Корень совпадает с $a = 1.4013$, а количество итерация = 15, потому что при проверке точности, алгоритм не стал делать дополнительное приближение и вывел ответ.

```
>> [x0,k] = Yrok_1
x0 =  1.4013
k =  15
```

Рисунок 2 – Результаты работы программы.

Выводы.

В результате работы были проведены аналитические расчёты и написана программа для функции. Результаты экспериментов совпадают между собой.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ФУНКЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ СИНУСОИДЫ

```
function [x0,k] = Yrok_1

  function [y] = BISECT(x)
    y = log(x) - 1/(1 + x^2);
  endfunction

  a = 1; b = 3; eps = 5e-5; k = 0; x0 = 0;

  while (eps*2 < b - a)
    x0 = (a + b)*0.5;
    if BISECT(x0) > 0
      b = x0;
    else
      a = x0;
    endif
    k = k + 1;
  endwhile

endfunction
```