МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ
по практической работе №4
по дисциплине «Вычислительная математика»
Тема: Приближённое решение задачи Коши методом Рунге-Кутта

Студент гр. 8301	____________________	Готовский К.В.
Преподаватель	____________________	Сучков А.И
	____________________	Колоницкий С.Б.

Санкт-Петербург
2020

Цель работы.

Изучение численных методов решений задачи Коши на примере метода Рунге-Кутта.

Основные теоретические положения.

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения $\dot{y} = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений $y_1, y_2, \dots, y_n$ решения уравнения в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$. Точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ – узлы сетки. Используем систему равноотстоящих узлов. Величина h – шаг сетки ($h > 0$).

Методом Рунге-Кутта в литературе обычно называют одношаговый метод четвертого порядка, относящийся к широкому классу методов типа Рунге-Кутта. В этом методе величины y_{i+1} вычисляют по следующим формулам:

$$\begin{gathered} y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h/6 \\ k_1 = f(x_i, y_i), \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i = hk_1/2), \\ k_3 = f(x_i + h/2, y_i = hk_2/2), \\ k_4 = f(x_i + h, y_i = hk_3). \end{gathered} \tag{1}$$

Погрешность метода на одном шаге сетки равна Mh^4 , но на практике оценить величину M обычно трудно. При оценке погрешности используют правило Рунге. Для этого проводят вычисления сначала с шагом h, а затем – с шагом $h/2$. Если $y_i^{(h)}$ – приближение, вычисленное с шагом h, а $y_{2i}^{(h/2)}$ – с шагом $h/2$, то справедлива оценка

$$|y_{2i}^{(h/2)} - y(x_{2i})| \leq \frac{16}{15}|y_{2i}^{(h/2)} - y_i^{(h)}| \tag{2}$$

За оценку погрешности вычислений шагом $h/2$ можно принять величину

$$\max_i \frac{\left|y_{2i}^{(h/2)} - y_i^{(h)}\right|}{15} \tag{3}$$

Метод Рунге-Кутта легко переносится на нормальные системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y}_k(x) = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n). \quad (4)$$

которые для краткости удобно записывать в векторной форме:

$$\dot{\bar{y}}_k(x) = \bar{f}(x, \bar{y}), \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n). \quad (5)$$

Для получения расчетных формул методом Рунге-Кутта достаточно в формулах (1) заменить y и $f(x, y)$ соответственно на $\bar{y}$ и $\bar{f} = (x, \bar{y})$, а коэффициенты k_j – на $\overline{k_j}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Постановка задачи.

Решить задачу Коши на отрезке $[a, b]$ методом Рунге–Кутта для системы дифференциальных уравнений второго порядка вида.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_1}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \\ y_1(x)|_{x=a} y_1(a), y_2(x)|_{x=a} y_2(a) \end{cases}$$

1. Реализовать программу `RGK`, решающую задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутта.
2. Составить головную программу, содержащую обращение к `RGK`, и печать результатов на каждом шаге.
3. Произвести вычисления на ЭВМ.
4. Построить графики полученных решений на заданном отрезке.

Необходимые таблицы и графики расчётов программы.

Таблица 1 – Таблица значений для 20 узлов.

x	y(1)	y(2)
0.10000	0.61639	1.5563
0.20000	0.73592	1.6290
0.30000	0.85905	1.7150
0.40000	0.98583	1.8102

0.50000	1.11602	1.9097
0.60000	1.24923	2.0084
0.70000	1.38496	2.1010
0.80000	1.52276	2.1822
0.90000	1.66220	2.2474
1.00000	1.80288	2.2927
1.10000	1.94448	2.3154
1.20000	2.08672	2.3142
1.30000	2.22936	2.2890
1.40000	2.37220	2.2414
1.50000	2.51511	2.1741
1.60000	2.65797	2.0909
1.70000	2.80073	1.9970
1.80000	2.94339	1.8976
1.90000	3.08601	1.7987
2.00000	3.22870	1.7061

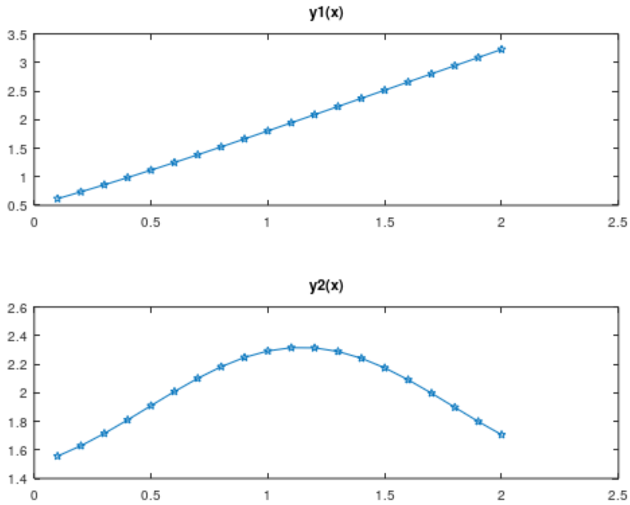

Рисунок 1 – Графики функций для 20-ти узлов.

Выводы.

Я изучил численные методы решений задачи Коши на примере метода Рунге-Кутта.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Программа в режиме для точности 0.01

```
function []= Yrok_4

 function [f] = RightParts(f, y, x)
 f(1) = atan(x^2 + y(2)^2);
 f(2) = sin(x + y(1));
 endfunction

 function [x, y, f] = RGK(n, x, y, f, h)
 tempY = zeros(n, 2);
 tempF = zeros(n, 4);
 [f] = RightParts(f, y, x);
 for i=1:n
 tempF(1,i) = h*f(i);
 tempY(i) = y(i) + tempF(1,i)/2;
 endfor
 x += h/2;
 [f] = RightParts(f, tempY, x);
 for i=1:n
 tempF(2,i) = h*f(i);
 tempY(i) = y(i) + tempF(2,i)/2;
 endfor
 [f] = RightParts(f, tempY, x);
 for i=1:n
 tempF(3,i) = h*f(i);
 tempY(i) = y(i) + tempF(3,i)/2;
 endfor
 x = x + h/2;
 [f] = RightParts(f, tempY, x);
 for i=1:n
 tempF(4,i) = h*f(i);
 y(i) += (tempF(1,i) + 2*tempF(2,i) + 2*tempF(3,i) +
tempF(4,i))/6;
 endfor
 endfunction

 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 n = 2; h = 0.1; f = zeros(2,1); y = [0.5,1.5]; Left = 0; Right =
2;
 x = Left; steps = (Right-Left)/h;
```

```
 Xi = zeros(steps, 1); Y1i = zeros(steps, 1); Y2i = zeros(steps,
1); k = 1;

 for i = 1:steps
 [x, y, f] = RGK(n, x, y, f, h);
 Xi(k) = x
 Y1i(k) = y(1)
 Y2i(k) = y(2)
 k++;
 endfor

 subplot (2, 1, 1)
 plot (Xi, Y1i, 'p-p');
 title ("y1(x)");
 subplot (2, 1, 2)
 plot (Xi, Y2i, 'p-p');
 title ("y2(x)");
endfunction
```