Одесский Национальный Политехнический Университет
Кафедра информационных систем

Лабораторная работа № 2
по дисциплине: «Числовые методы»
на тему «Решение уравнений»

Выполнил:
Ст. группы АИ-166
Дидух Э. Г.

Проверили:

Одесса, 2017

Вариант 11

№ 11. 1). $3^x + 2x - 2 = 0$;

2). $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$;

3). $[(x-2)^2 - 1]2^x = 1$;

4). $(x-2)\cos x = 1$; $-2\pi \le x \le 2\pi$.

Алгоритм:

Классический метод Ньютона или касательных заключается в том, что если x_n — некоторое приближение к корню x уравнения f(x) = 0, то следующее приближение определяется как корень касательной к функции f(x), проведенной в точке x_n.

Уравнение касательной к функции f(x)в точке x_n имеет вид:

$$f'(x_j) = \frac{y - f(x_n)}{x - x_n}$$

В уравнении касательной положим y = 0 и $x = x_{n+1}$.

Тогда алгоритм последовательных вычислений в методе Ньютона состоит в следующем:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Сходимость метода касательных квадратичная, порядок сходимости равен 2.

Без всяких изменений метод обобщается на комплексный случай.

Если корень x является корнем второй кратности и выше, то порядок сходимости падает и становится линейным.

К недостаткам метода Ньютона следует отнести его локальность, поскольку он гарантированно сходится при произвольном стартовом приближении только, если везде выполнено условие $|ff''|/(f^{(2)}) < 1$, в противной ситуации сходимость есть лишь в некоторой окрестности корня.

Недостатком метода Ньютона является необходимость вычисления производных на каждом шаге.

Комбинированный метод (хорд и касательных)

Суть комбинированного метода состоит в разбиении отрезка [a,b] (при условии f(a)f(b)<0) на три отрезка с помощью хорды и касательной и выборе нового отрезка от точки пересечения хорды с осью абсцисс до точки пересечения касательной с осью абсцисс, на котором функция меняет знак и содержит решение.

Построение хорд и касательных продолжается до достижения необходимой точности решения ε.

Комбинированный метод применим для решения уравнения вида f(x)=0 на отрезке [a,b], если ни одна точка отрезка [a,b] не является ни стационарной, ни критической, т.е. f'(x)≠0 и f''(x)≠0.

Условие начальной точки для метода хорд f(x)f''(x)<0.

Условие начальной точки для метода касательных f(x)f''(x)>0.

Сначала находим отрезок [a,b] такой, что функция f(x) дважды непрерывно дифференцируема и меняет знак на отрезке, т.е. f(a)f(b)<0.

Далее применяем алгоритм решения.

Входные данные: **f(x), f'(x), f''(x), a, b, ε**.

$$1.\ \textit{Если}\ f(a)f''(a)<0,\ \textit{то}\ a=a-f(a)\frac{a-b}{f(a)-f(b)},$$

$$\textit{иначе если}\ f(a)f''(a)>0,\ \textit{то}\ a=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

$$2.\ \textit{Если}\ f(b)f''(b)<0,\ \textit{то}\ b=b-f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)},$$

$$\textit{иначе если}\ f(b)f''(b)>0,\ \textit{то}\ b=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

$$3.\ \textit{Если}\ |a-b|>2\varepsilon,\ \textit{то идти к}\ 1.$$

$$4.\ x=\frac{a+b}{2}.$$

Выходные данные: **x**.

Значение **x** является решением с заданной точностью **ε** нелинейного уравнения вида **f(x)=0**.

Если **f(x)=0**, то **x** - точное решение.

Программа:

Метод половинного деления(Bisection):

```
# coding: utf-8

# In[6]:
def fn(x):
return 2*x**4-8*x**3+8*x**2-1
# define bisection method
def bisection( eq, segment, app = 0.3 ):
a, b = segment['a'], segment['b']
Fa, Fb = eq(a), eq(b)
if Fa * Fb > 0:
raise Exception('No change of sign - bisection not possible')
while( b - a > app ):
x = ( a + b ) / 2.0
f = eq(x)
if f * Fa > 0: a = x
else: b = x
return x
#test it
print bisection(fn,{'a':2,'b':3}, 0.00003) # => 1.32974624634
```

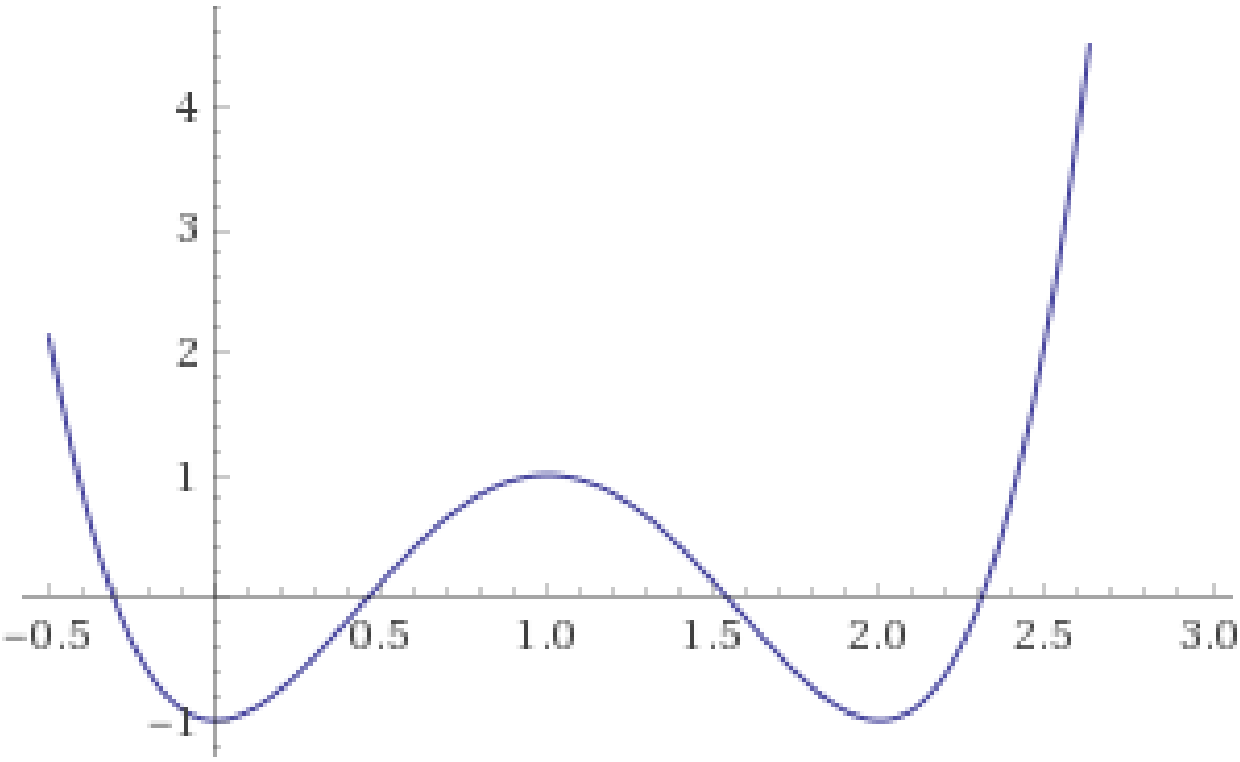
Метод касательных(Newton):

```
import math

b=2.5
x2=2.1
def f(x):
    """ Функция, определяющая уравнение """
    return 2*x**4-8*x**3-8*x**2-1
def df(x):
    """Производная функции f(x)"""
    return 8*x**3-24*x**2-16*x
```

```
x,e=b,0.0001
xx=x2
while 1:
    if df(x)<>0:
        x=x-f(x)/df(x)
    else:
        print 'Error'
        break
    if abs(x-xx)<e:
        print 'x=%10.6f' % x
        break
    xx=x
```

Метод хорд и касательных(Hordes):

```
import math

from math import *
def f(x): return 2*x**4-8*x**3+8*x**2-1
x1,x2,e=2.1,2.5,0.000001
y1,y2=f(x1),f(x2)
print x1,y1,x2,y2
xx=x2
while 1:
x3=(abs(y2)*x1+abs(y1)*x2)/(abs(y2)+abs(y1))
y3=f(x3)
if y1*y3<0: x2,y2=x3,y3
else: x1,y1=x3,y3
if abs(x3-xx)<e: break
xx=x3
print x3,y3
```



Точность	Bisection	Newton	Hordes
E=0.1	-0.3 0.5 1.5 2.3	-0.3 0.5 1.5 2.3	-0.299880669326 0.591957671958 1.53328063241 2.22010010537
E=0.001	-0.307 0.459 1.541 2.307	-0.307 0.458 1.541 2.307	-0.30646831253 0.45889207968 1.54119423092 2.30541227263
E=0.000001	-0.306564 0.458817 1.541183 2.306563	-0.306563 0.458804 1.541196 2.306563	-0.306562724486 0.458803926013 1.54119609973 2.30656155019

https://ideone.com/zGPRIO

https://ideone.com/0KOaAq

https://ideone.com/M9LFnk

Выводы: В данной лабораторной работе мы применили метод Ньютона и метод хорд и касательных для нахождения корня заданной функции. Полученные результаты совпали с результатами методом половинного деления, следовательно результаты корректны и цель работы достигнута.