Одесский Национальный Политехнический Университет
Кафедра информационных систем

Лабораторная работа № 3
по дисциплине: «Числовые методы»
на тему «Решение систем уравнений»

Выполнил:
Ст. группы АИ-166
Дидух Э. Г.

Проверили:
Панькина А. С.

Одесса, 2018

Задание на лабораторную работу:

Решить заданную систему алгебраических уравнений с помощью методов:

Матричного

Крамара

Гаусса

Зейделя

Гаусса(встроенной функцией)

11	$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 9 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 40 \\ 37 \end{pmatrix}$

Описание алгоритмов:

Матричный метод:

Пусть для матрицы A порядка n на n существует обратная матрица A^{-1} . Умножим обе части матричного уравнения $A*X=B$ слева на A^{-1}. Имеем $A^{-1}*(A*X)=A^{-1}*B$. Так как для операции умножения матриц подходящих порядков характерно свойство ассоциативности, то последнее равенство можно переписать как $(A^{-1}*A)*X=A^{-1}*B$, а по определению обратной матрицы $(A^{-1}*A)=E$ (E – единичная матрица порядка n на n), поэтому

$(A^{-1}*A)*X=A^{-1}*B \Leftrightarrow$

$E*X=A^{-1}*B \Leftrightarrow$

$X=A^{-1}*B$

Таким образом, решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формуле $X=A^{-1}*B$. Другими словами, решение СЛАУ находится с помощью обратной матрицы A^{-1}.

Метод Крамара:

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = s_1 \\ a_2 x + b_2 y = s_2 \end{cases}$

На первом шаге вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, его называют *главным определителем системы*.

Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, и для нахождения корней мы должны вычислить еще два определителя:

$\Delta_x = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}$

На практике вышеуказанные определители также могут обозначаться латинской буквой D.

Корни уравнения находим по формулам:

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

Метод Гаусса:

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса подразделяется на два этапа.

На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна. А именно, среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой, перемещают его на крайнее верхнее положение перестановкой строк и вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк, домножив её на величину, равную отношению первого элемента каждой из этих строк к первому элементу первой строки, обнуляя тем самым столбец под ним. После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают пока не останется матрица нулевого размера. Если на какой-то из итераций среди элементов первого столбца не нашёлся ненулевой, то переходят к следующему столбцу и проделывают аналогичную операцию.

На втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений, либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение системы линейных уравнений. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражают соответствующую базисную переменную (а она там всего одна) и подставляют в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь по «ступенькам» наверх. Каждой строчке соответствует ровно одна базисная переменная, поэтому на каждом шаге, кроме последнего (самого верхнего), ситуация в точности повторяет случай последней строки.

Метод Зейделя:

Метод Зейделя (иногда называемый методом Гаусса-Зейделя) является модификацией метода простой итерации, заключающейся в том, что при вычислении очередного приближения $x^{(k+1)}$ (см. формулы (1.13),(1.14)) его уже полученные компоненты $x_1^{(k+1)}$, ...,$x_{i-1}^{(k+1)}$ сразу же используются для вычисления $x_i^{(k+1)}$.

В координатной форме записи метод Зейделя имеет вид:

$$x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1$$

$$x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \ldots + c_{2n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2$$

...

$$x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + c_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + c_{nn}x_n^{(k)} + d_n$$

где $x^{(0)}$ - некоторое начальное приближение к решению.

Таким образом i-тая компонента $(k+1)$-го приближения вычисляется по формуле

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij}x_j^{(k)} + d_i\ ,\ i = 1, ..., n$$

Условие окончания итерационного процесса Зейделя при достижении точности ε в упрощенной форме имеет вид:

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq \varepsilon.$$

Результаты:

Матричный метод	[1.0, 2.0000000000000036, 2.0, 0.0]
Метод Крамара	[1.0, 2.0, 2.0, -0.0]
Метод Гаусса (встроенной функцией)	[1.00000000e+00, 2.00000000e+00, 2.00000000e+00, 1.23358114e-15]
Метод Гаусса	[1.0, 2.0, 2.0, -0.0]
Метод Зейделя	[1.00201547 1.99717834 2.0026873 -0.0000000]

Выводы: В данной лабораторной работе мы применили матричный метод, методы Крамара, Гаусса и Зейделя для решения заданной системы алгебраических уравнений. Полученные результаты совпали между собой, следовательно результаты корректны и цель работы достигнута.