

Одесский Национальный Политехнический Университет
Кафедра информационных систем

Лабораторная работа № 5
по дисциплине: «Численные методы»
на тему «Численное интегрирование»
Вариант 11

Выполнил:
Ст. группы АИ-166
Дидух Э. Г.

Проверили:
Панькина А. С.

Одесса, 2018

Задание на лабораторную работу

$$y = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$$

Интегрирование методом прямоугольников

Метод прямоугольников — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на многочлен нулевой степени, то есть константу, на каждом элементарном отрезке. Если рассмотреть график подынтегральной функции, то метод будет заключаться в приближённом вычислении площади под графиком суммированием площадей конечного числа прямоугольников, ширина которых будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота — значением подынтегральной функции в этих узлах. Алгебраический порядок точности равен 0. (Для формулы средних прямоугольников равен 1).

Если отрезок $[a;b]$ является элементарным и не подвергается дальнейшему разбиению, значение интеграла можно найти по:

1. **Формуле левых прямоугольников:** $f(x)dx \approx \int_a^b f(a)(b-a)$
2. **Формуле правых прямоугольников:** $f(x)dx \approx \int_a^b f(b)(b-a)$
3. **Формуле прямоугольников (средних):** $f(x)dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

Интегрирование методом трапеций

Метод трапеций — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на многочлен первой степени, то есть линейную функцию. Площадь под графиком функции аппроксимируется прямоугольными трапециями. Алгебраический порядок точности равен 1.

Если отрезок $[a;b]$ является элементарным и не подвергается дальнейшему разбиению, значение интеграла можно найти по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a) + E(f)$$

$$E(f) = -\frac{f''(\varepsilon)}{12} (b - a)^3$$

Интегрирование методом Симпсона

Формула Симпсона (также **Ньютона-Симпсона**) относится к приёмам численного интегрирования. Получила название в честь британского математика Томаса Симпсона (1710—1761).

Суть метода заключается в приближении подынтегральной функции на отрезке $[a;b]$ интерполяционным многочленом второй степени $p_2(x)$, то есть приближение графика функции на отрезке параболой. Метод Симпсона имеет порядок погрешности 4 и алгебраический порядок точности 3.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b))$$

Интегрирование методом Монте-Карло

Предположим, необходимо взять интеграл от некоторой функции. Воспользуемся неформальным геометрическим описанием интеграла и будем понимать его как площадь под графиком этой функции.

Для определения этой площади можно воспользоваться одним из обычных численных методов интегрирования: разбить отрезок на подотрезки, подсчитать площадь под графиком функции на каждом из них и сложить.

Предположим, что для функции, представленной на рисунке 2, достаточно разбиения на 25 отрезков и, следовательно, вычисления 25 значений функции. Представим

теперь, мы имеем дело с n -мерной функцией. Тогда нам необходимо 25^n отрезков и столько же вычислений значения функции. При размерности функции больше 10 задача становится огромной. Поскольку пространства большой размерности встречаются, в частности, в задачах теории струн, а также многих других физических задачах, где имеются системы со многими степенями свободы, необходимо иметь метод решения, вычислительная сложность которого бы не столь сильно зависела от размерности. Именно таким свойством обладает метод Монте-Карло.

Предположим, требуется вычислить определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

Рассмотрим случайную величину u , равномерно распределённую на отрезке интегрирования $[a;b]$. Тогда u также будет случайной величиной, причём её математическое ожидание выражается как

$$M(f(u)) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

где $\varphi(x)$ — плотность распределения случайной величины, равная $1/(b-a)$ на участке $[a;b]$. Таким образом, искомый интеграл выражается как

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)M(f(u))$$

но математическое ожидание случайной величины $f(u)$ можно легко оценить, смоделировав эту случайную величину и посчитав выборочное среднее.

Итак, бросаем N точек, равномерно распределённых на $[a;b]$, для каждой u_i точки вычисляем $f(u_i)$. Затем вычисляем выборочное среднее: $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(u_i)$. В итоге получаем оценку интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(u_i)$$

Шаг	Прямоугольников	Трапеций	Симпсона	Монте-Карло
5	2 2.544777153288142 2.506959080591576	2 2.114513849086369 2.295753023183526	2 2.401356051887551 2.4083962538011527	5 1.2000000000000002 1.718281828459045
50	2 2.544777153288142 2.506959080591576	8 2.410623429822744 2.43761607270124	2 2.401356051887551 2.4083962538011527	50 0.18 1.718281828459045
200	8 2.469789269299649 2.462518572913455	16 2.4402063495611968 2.4500673228073477	2 2.401356051887551 2.4083962538011527	200 0.4499999999999996 1.718281828459045

