Одесский Национальный Политехнический Университет

Кафедра информационных систем

Лабораторная работа № 3

по дисциплине: «Числовые методы»

на тему «Решение систем уравнений»

Выполнил:

Ст. группы АИ-166

Дидух Э. Г.

Проверили:

Панькина А. С.

Одесса, 2018

**Задание на лабораторную работу:**

Решить заданную систему алгебраических уравнений с помощью методов:

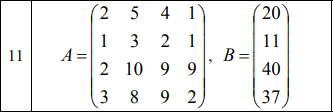
Матричного

Крамара

Гаусса

Зейделя

Гаусса(встроенной функцией)



**Описание алгоритмов:**

**Матричный метод:**

Пусть для матрицы *А* порядка *n* на *n* существует обратная матрица A-1 . Умножим обе части матричного уравнения A\*X=B  слева на A-1. Имеем A-1\*(A\*X)=A-1\*B. Так как для операции умножения матриц подходящих порядков характерно свойство ассоциативности, то последнее равенство можно переписать как (A-1\*A)\*X=A-1\*B , а по определению обратной матрицы (A-1\*A)=E (E – единичная матрица порядка *n* на *n*), поэтому

(A-1\*A)\*X=A-1\*B ⬄

E\*X=A-1\*B ⬄

X=A-1\*B

Таким образом, решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формуле X=A-1\*B. Другими словами, решение СЛАУ находится с помощью обратной матрицы A-1.

**Метод Крамара:**

Рассмотрим систему уравнений http://mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image002.gif

На первом шаге вычислим определитель  http://mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image004.gif, его называют главным определителем системы.

Если http://mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image006.gif, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать [метод Гаусса](http://mathprofi.ru/metod_gaussa_dlya_chainikov.html).

Если http://mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image008.gif, то система имеет единственное решение, и для нахождения корней мы должны вычислить еще два определителя:  
http://mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image010.gif и http://mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image012.gif

На практике вышеуказанные определители также могут обозначаться латинской буквой http://mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image014.gif.

Корни уравнения находим по формулам:  
http://mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image016.gif, http://mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image018.gif

**Метод Гаусса:**

Алгоритм решения [СЛАУ](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%9B%D0%90%D0%A3) методом Гаусса подразделяется на два этапа.

На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём [элементарных преобразований](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D1%8B) над строками систему приводят к ступенчатой или [треугольной форме](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0), либо устанавливают, что система несовместна. А именно, среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой, перемещают его на крайнее верхнее положение перестановкой строк и вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк, домножив её на величину, равную отношению первого элемента каждой из этих строк к первому элементу первой строки, обнуляя тем самым столбец под ним. После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают пока не останется матрица нулевого размера. Если на какой-то из итераций среди элементов первого столбца не нашёлся ненулевой, то переходят к следующему столбцу и проделывают аналогичную операцию.

На втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить [фундаментальную систему решений](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%B4%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9), либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение системы линейных уравнений. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражают соответствующую базисную переменную (а она там всего одна) и подставляют в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь по «ступенькам» наверх. Каждой строчке соответствует ровно одна базисная переменная, поэтому на каждом шаге, кроме последнего (самого верхнего), ситуация в точности повторяет случай последней строки.

**Метод Зейделя:**

Метод Зейделя (иногда называемый методом Гаусса-Зейделя) является модификацией метода простой итерации, заключающейся в том, что при вычислении очередного приближения *x(k+1)* (см. формулы (1.13),(1.14)) его уже полученные компоненты *x1(k+1), ...,xi - 1(k+1)* сразу же используются для вычисления *xi(k+1)*.

В координатной форме записи метод Зейделя имеет вид:

*x1(k+1) = c11x1(k) + c12x2(k) + ... + c1n-1xn-1(k) + c1nxn(k) + d1  
x2(k+1) = c21x1(k+1) + c22x2(k) + ... + c2n-1xn-1(k) + c2nxn(k) + d2  
...  
xn(k+1) = cn1x1(k+1) + cn2x2(k+1) + ... + cnn-1xn-1(k+1) + cnnxn(k) + dn*

где *x(0)* - некоторое начальное приближение к решению.

Таким образом *i*-тая компонента (*k+1*)-го приближения вычисляется по формуле

|  |  |
| --- | --- |
| *xi(k+1)* = ∑ *j=1i-1 cijxj(k+1)* + ∑ *nj=i cijxj(k) + di , i = 1, ..., n* |  |

Условие окончания итерационного процесса Зейделя при достижении точности ε в упрощенной форме имеет вид:

|| *x (k+1) - x (k)* || ≤ ε.

**Результаты:**

|  |  |
| --- | --- |
| Матричный метод | [1.0, 2.0000000000000036, 2.0, 0.0] |
| Метод Крамара | [1.0, 2.0, 2.0, -0.0] |
| Метод Гаусса (встроенной функцией) | [ 1.00000000e+00, 2.00000000e+00, 2.00000000e+00, 1.23358114e-15] |
| Метод Гаусса | [1.0, 2.0, 2.0, -0.0] |
| Метод Зейделя | [ 1.00201547 1.99717834 2.0026873 -0.0000000] |

**Выводы:** В данной лабораторной работе мы применили матричный метод, методы Крамара, Гаусса и Зейделя для решения заданной системы алгебраических уравнений. Полученные результаты совпали между собой, следовательно результаты корректны и цель работы достигнута.