# Szuperhuszár

Horváth Gyula
**horvath@inf.elte.hu**

## 2. Szuperhuszár

$$L = \{v_1 = (x_1, y_1), \dots, v_n = (x_n, y_n)\}$$

$$L^+ = \{\sum_{i=1}^{n} a_i * v_i : a_i \in \mathbb{N}\}$$

**2.1. definíció.** *Azt mondjuk, hogy $L$ megfordítható, ha*

$$(v \in L)(-v \in L^+)$$

**2.2. definíció.** *Azt mondjuk, hogy $L$ tengely-teljes, ha van olyan $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ egész szám, hogy*

$$(a, 0), (0, -b), (0, c), (0, -d) \in L^+$$

**2.3. Állítás.** *Ha $L$ tengely-teljes, akkor $L$ megfordítható.*

**Bizonyítás.** Vegyük $L$ egy tetszőleges $v = (x, y)$ eleméhez a $(w_x, 0)$ és $(0, w_y)$ vektort, ahol $w_x = a$, ha $x < 0$ egyébként $w_x = -b$, és $w_y = c$, ha $y < 0$ egyébként $w_y = -d$.
Mindkét vektor eleme $L^+$, tehát

$$|w_x.w_y|.v + |w_y.x|.(w_x, 0) + |w_x.y|.(0, w_y) = (|w_x.w_y|.x + |w_y.x|.w_x, |w_x.w_y|.y + |w_x.y|.w_y) = (0, 0)$$

Következésképpen

$$(|w_x.w_y| - 1).v + |w_y.x|.(w_x, 0) + |w_x.y|.(0, w_y) = -v$$

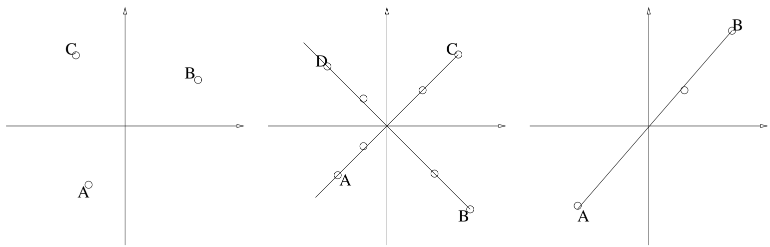
■

**2.4. Állítás.** *$L$ akkor és csak akkor megfordítható, ha az $L$ ponthalmaz konvex burka a belselyében tatalmazza az origót.*

**Bizonyítás.**

Tfh. az $L$ ponthalmaz konvex burka a belselyében tatalmazza az origót. Három esetet különböztetünk Megmutatjuk, hogy a) és b) esetben elő tudunk állítaki $(x,0)$ alakú pontot $L$-beliek összegeként. Hasonlóan látható be a másik három tengelypont előállítása is. Van olyan $A,B \in L$ pont, hogy $A.x < 0$ és $A \times B > 0$, tehát

$$B.y \cdot A + (-A.y) \cdot B = (B.y \cdot A.x + -A.y \cdot B.x, B.y \cdot A.y - A.y \cdot B.y) = (A \times B, 0)$$




1. ábra.

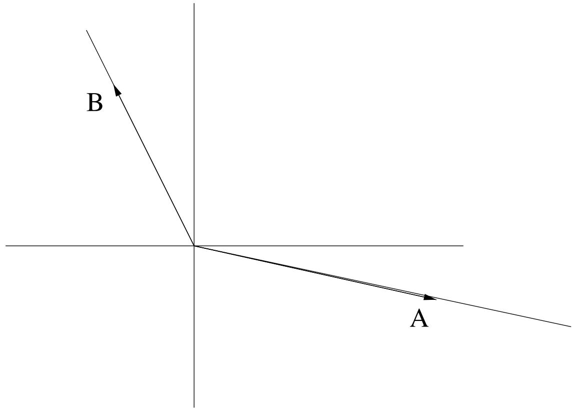
A c) esetben tfh. $A.x < 0$ és $B.x > 0$. Ekkor, ha $P \in L$ és $P.x > 0$ akkor

$$(-A,x) \cdot P + P.x \cdot A = (0,0)$$

Ha $P.x < 0$ akkor pedig

$$B.x \cdot P + (-P.x) \cdot B = (0,0)$$

Fordítva, tfh. a konvex burok nem tartalmazza (belselyében) az origót. Ekkor van olyan $A$ és $B$ pont, hogy minden $L$-beli pont $A$-tól nem-jobbra, $B$-től pedig nem-balra van. Tehát bármely két pont összege is ebben a szögtartományben van, így pl. $-A \notin L^+$. ■




2. ábra.

# 3. Szuperhuszár mindenhova

Eldöntendő, hogy bármely egész koordinátájú pontba el tud-e jutni a szuperhuszár?
$L$ nyilván tengely-teljes kell legyen, tehát megfordítható, így

$$L^+ = L^* = \{\sum_{i=1}^{n} a_i * v_i : a_i \in \mathbb{Z}\}$$

**3.1. Állítás.** *Van olyan $v_1$ és $v_2$, ahol $v_1.y = 0$, hogy*

$$\{v_1, v_2\}^* = L^*$$

*$\mathbb{Z}^2 = L^*$ akkor és csak akkor, ha $v_1 = (1,0)$ és $v_2 = (0,1)$.*

Ha

$$\{v_1, v_2\}^* = \{L[1], \ldots, L[i-1]\}^*$$

akkor ebből kiszámítható olyan $\overline{v_1}$ és $\overline{v_2}$, amelyre

$$\{v_1, v_2, L[i]\}^* = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}^*$$