Task 1

1: For $p(n) = 8p(n/2) + n^2$ gælder det at $p(n) = \Theta(n^3)$. Dette kan man se ved at bruge Theorem 4.1 case 1, hvor det skal gælde at for $\epsilon > 0$:

$$f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$$

ϵ bliver valgt til $\epsilon = 1$

$$n^2 = O(n^{log_2 8-1}) \Leftrightarrow n^2 = O(n^2) \Downarrow$$
$$p(n) = \Theta(n^{log_2 8}) = \Theta(n^3)$$

2: For $p(n) = 8p(n/4) + n^3$ gælder det at $p(n) = \Theta(n^3)$. Dette kan man se ved at bruge Theorem 4.1 case 3, hvor det skal gælde at for $\epsilon > 0 \wedge c < 1$:

$$f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon}) \wedge a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$$

ϵ bliver valgt til $\epsilon = 1,5$

$$n^3 = \Omega(n^{log_4 8-15})$$
$$\Updownarrow$$
$$n^3 = \Omega(n^3)$$

Vi vælger $c = 1/8$ og får:

$$8\left(\frac{n}{4}\right)^3 \leq \frac{1}{8} \cdot n^3$$
$$\Updownarrow$$
$$8\frac{n^3}{64} \leq \frac{1}{8} \cdot n^3$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{n^3}{8} \leq \frac{n^3}{8}$$

3: For $p(n) = 10p(n/9) + n \cdot log_2 n$ gælder det at $p(n) = \Theta(n^{log_9 10} log_2 n) \approx \Theta(n^{1,048} log_2 n)$. Dette kan man se ved at bruge Theorem 4.1 case 3, hvor det skal gælde at:

$$f(n) = \Theta(n^{log_b a})$$

$$n \cdot log_2 n = \Theta(n^{log_9 10})$$
$$n \cdot log_2 n = \Theta(n^{1,048})$$