LinAlgDat
2014/2015
Projekt A

Dette er ét af i alt fire obligatoriske projekter der stilles på kurset LinAlgDat. Man skal have godkendt mindst tre af de fire obligatoriske projekter for at indstille sig til eksamen.

Projektet består af fire opgaver. Opgave 1 og 2 er rene (eksamenslignende) matematikopgaver. Opgave 3 er også en matematikopgave men med mere fokus på anvendelser af lineær algebra. Opgave 4 drejer sig om at implementere udvalgte metoder og algoritmer fra lineær algebra i Java.

Bedømmelse. Hvis man har besvaret mindst 70% af projektet korrekt bedømmes det som *godkendt*; i modsat fald som *ikke godkendt*.

Ved bedømmelsen af projektet lægges naturligvis vægt på korrekthed, men det er også vigtigt, at fremstillingen er klar og overskuelig.

Projekterne afleveres og bedømmes individuelt. I må gerne samarbejde (særligt om Opgave 4) med jeres medstuderende, men direkte afskrift fra andre er ikke tilladt og betragtes som eksamenssnyd!

Besvarelsens form. Jeres besvarelse af projektet skal bestå af to dele: (1) En *pdf-fil*, genereret af LaTeX, med jeres løsninger til matematikopgaverne 1, 2 og 3. Pdf-filen bør desuden indeholde en opsummering af jeres løsning af Opgave 4, inklusiv output fra relevante kørsler. (2) En eller flere *tekstfiler* indeholdende de Java-programmer som vedrører Opgave 4.

Første side i pdf-filen skal være en forside indeholdende forfatterens fulde navn, studienummer og holdnummer samt fulde navne og studienumre på de personer, der eventuelt er samarbejdet med.

Brug af lommeregner/computer. Opgave 1 og 2 er eksamenslignende matematikopgaver; de skal regnes uden brug af lommeregner/computer (husk, at eksamen er uden brug af elektroniske hjælpemidler). Det kan dog være fornuftigt at *checke* sine udregninger vha. lommeregner/computer.

Aflevering. Projektet afleveres individuelt, rettidigt og elektronisk i Absalon. Man har mulighed for at genaflevere et evt. ikke godkendt projekt (dette gælder dog ikke for Projekt D).

Rettelser. Projekterne rettes af jeres instruktorer og feedback på jeres besvarelser gives elektronisk via Absalon.

Tidsfrister. Tidsfrister for aflevering, retning, evt. genaflevering mm. af projekterne er beskrevet i dokumentet *Kursusoversigt*. I er selv ansvarlige for at holde jer orienteret herom.

Opgave 1 (30%)

Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 + ax_3 &= 4 \end{aligned}$$

(a) Opskriv totalmatricen for ligningssystemet, og foretag følgende rækkeoperationer (i nævnte rækkefølge):

række 1 og række 2 ombyttes
2 gange række 1 trækkes fra række 2
4 gange række 1 trækkes fra række 3
5 gange række 2 lægges til række 3

Bestem den omformede totalmatrix og afgør om den er på rækkeechelonform hhv. reduceret rækkeechelonform.

(b) Lad $a = 19$. Bring matricen fra (a) på reduceret rækkeechelonform og benyt denne form til at løse ligningssystemet.

(c) Lad $a = 20$. Bestem den inverse matrix til koefficientmatricen for ligningssystemet ved at bruge COMPUTATION p. 78 i lærebogen.

Opgave 2 (30%)

Det oplyses, at en ukendt 3×3 matrix $\mathbf{A}$ ved rækkeoperationerne ero_1, ero_2, ero_3 og ero_4 i denne rækkefølge kan omformes til enhedsmatricen.

> ero_1: $-4\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2$ (4 gange første række trækkes fra anden række),
> ero_2: $\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3$ (anden og tredje række ombyttes),
> ero_3: $\frac{1}{5}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$ (tredje række divideres med 5),
> ero_4: $\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1$ (tredje række lægges til første række).

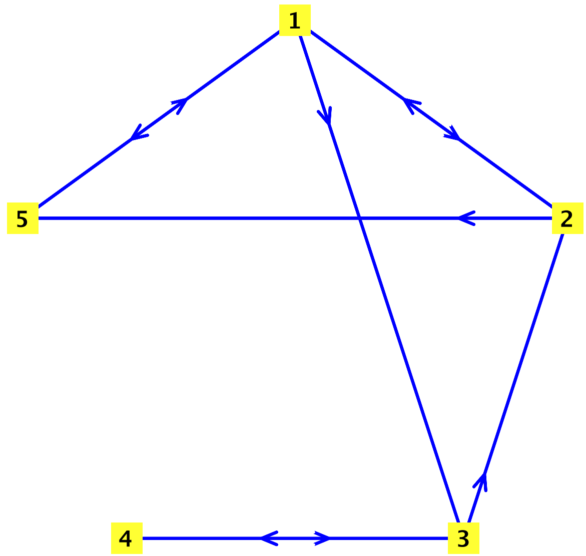
(a) Bestem for hvert $i = 1,2,3,4$ den elementære matrix $\mathbf{E}_i$, som svarer til rækkeoperationen ero_i.

(b) Bestem matrixprodukterne $\mathbf{F} = \mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ og $\mathbf{G} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}\mathbf{E}_4^{-1}$.

(c) Bestem ud fra svarene til (b) den ukendte matrix $\mathbf{A}$.

Opgave 3 (25%)

Nedenstående figur viser en orienteret graf med 5 knuder.



(a) Bestem nabomatricen (eng. *adjacency matrix*) $\mathbf{N}$ for denne orienterede graf.

Angiv antallet af veje fra knude 2 til knude 2 af længde netop 6. *Vink*: det oplyses, at

$$\mathbf{N}^6 = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 11 & 8 & 16 \\ 14 & 12 & 10 & 5 & 14 \\ 10 & 9 & 7 & 4 & 10 \\ 5 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Vi tænker os nu, at grafen repræsenterer et web med 5 sider.

(b) Opskriv linkmatricen $\mathbf{A}$ for grafen ovenfor.
(Linkmatricen hørende til et web er defineret i dokumentet "Googles page rank".)

(c) Bestem en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ som opfylder ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ og foretag på grundlag af dette en rangordning af siderne i webbet.

Opgave 4 [Programmering i Java] (15%)

Med Projekt A følger en klassedefinition, `Matrix`, som bruges til at repræsentere matricer i Java. Denne klasse skal bruges ved besvarelsen af nedenstående spørgsmål.

Lad matricerne **A** og **B** være givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 8 & -5 & 2 \\ -7 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Skriv et program, som viser, hvordan man erklærer og bruger variable af typen `Matrix` ved at definere matricerne **A** og **B** ovenfor og udskrive dem.

(b) Vis hvordan man ændrer elementet a_{13} i **A** så det får værdien -4.

(c) Vis hvordan man bruger metoderne `add` og `mul` fra klassen `Matrix` til at udregne $2\mathbf{A}+\mathbf{B}$ (man vælger selv om man vil bruge den orginale eller den modificerede matrix **A**).

Henrik Holm (holm@math.ku.dk)
Henrik Laurberg Pedersen (henrikp@math.ku.dk)
Jon Sporring (sporring@diku.dk)