Projekt C

Christian Hohlmann Enevoldsen, MRB852, Hold 2

27. december 2013

Opgave 1.

a)

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2 \text{ hvis } \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da u_3 kan skrives som en lineær kombination af u_1 og u_2 er den ikke en del af basen for $\mathcal{U}$

$$\text{ergo er } span\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \text{ en ortogonal basis for } \mathcal{U}$$

b)

$$\begin{aligned} A &= span\{\mathcal{U}\} \\ Pv = proj\mathcal{U}_v &= AA^T{}_v \\ Pv = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} v \\ \leftrightarrow P &= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$Pv = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -36 \\ 9 \end{bmatrix}$$

d)

Vi betragter underrummet $\{\mathcal{U}\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

Lad $\mathbf{A} = span(\{\mathcal{U}\})$

Vi ved at $\mathcal{U}^{\perp} = null(\mathbf{A}^T)$

Vi beregner nu $null(\mathbf{A})$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] RREF \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$null(\mathbf{A}) = span\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{Et basis } \beta \text{ for } \mathcal{U}^{\perp} \text{ er derfor } \beta = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Opgave 2.

a)

$$q_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

$$y = v_2 - proj_{v_1}^{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{y}{||y||} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

Den ortonormale basis for $\mathcal{V}$ er således $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \right\}$

b)

$[w]_b = \frac{w \cdot q_1}{||q_1||^2} q_1 + ... + \frac{w \cdot q_4}{||q_4||^2} q_4$

Lad $x_n = \frac{w \cdot q_n}{||q_n||^2} q_n$

Længderne på $q_1 ... q_4$ er normaliseret dvs. 1.

Derfor er $x_n = w \cdot q_n$

Og jeg får $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 5, 5, 10)$

Således

$$w = 0 \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \\ -2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} -2/5 \\ -4/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

c)

Da vi har med en ortonormal basis at gøre kan man bruge reglen: $Q^{-1} = Q^T$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -4/5 & 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & 2/5 & -1/5 & -4/5 \\ 4/5 & -1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 & 4/5 & 2/5 \\ -4/5 & 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 & -2/5 & 4/5 \\ -2/5 & -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Opgave 4.

a, b)

Se Main.java og Matrix.java. Jeg har tilladt mig at ændre navnet til Matrix (fra matrix), da det giver 100 gange mere mening.
Eksempel på kørsel:

GramSchmidt

[0,666667 -0,333333 -0,533333]
[0,000000 0,000000 0,600000]
[0,333333 -0,666667 0,533333]
[0,666667 0,666667 0,266667]

v1...

[2,800000]
[0,600000]
[3,200000]
[1,600000]

v2...

[1,000000]
[2,000000]
[3,000000]
[4,000000]