Projekt B

Christian Hohlmann Enevoldsen, MRB852, Hold 2

18. december 2013

Opgave 1.

a)

Først findes RREF-representation af A. Det er heldigvis allerede gjort. Ud fra det findes de uafhængige søjler. (Pivot columns) - Disse udgør basisen for søjlerummet i $colA$

$$colA = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b)

$$null(A*) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at:

$$x_1 = -2x_2 - 2x_4$$

$$x_3 = -x_4$$

$$x_5 = 0$$

$$x_2 \text{ og } x_4 \text{ er frie variable}$$

$$null(A*) = \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - 2x_4 \\ 1 \\ -4_x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c)

$dim(ker\ T) = dim(null(A)) = 2. \rightarrow$ fordi der er 2 elementer i basisen for $null(A)$

$dim(ran\ T) = dim(colA) = rankA = 3 \rightarrow$ fordi, der er 3 pivot søjler i A

.

d)

Vi sætter totalmatricen op:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 9 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Den omdannes til RREF

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det ses at

$$x_1 = 1 - 2x_1 - 2x_4$$

$$x_3 = -1 - x_4$$

$$x_5 = 1$$

Vi ved at første tredje og femte søjle udgør en basis for $colA$ Derfor kan vi bruge dem i et ligningssystem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Der laves rækkeoperationer og vi får

$$\begin{aligned}
r_2 &\leftrightarrow r_1\\
r_2 - 2r_1 &\rightarrow r_1\\
r_3 - 4r_1 &\rightarrow r_1\\
r_2 &\rightarrow -r_2\\
r_3 + 3r_2 &\rightarrow r_3\\
r_4 - 3r_2 &\rightarrow r_4\\
r_4 - r_3 &\rightarrow r_4\\
r_3/3 &\rightarrow r_3\\
r_2 + r_3 &\rightarrow r_2\\
r_1 + r_2 &\rightarrow r_1
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Her vises så at en mulighed kunne være: $x = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}$

Opgave 2.

(a)

Vi har flg.

$$x_1 \begin{bmatrix} 2\\4\\1\\5\\1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1\\2\\1\\3\\0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4\\8\\1\\9\\6 \end{bmatrix} + = \begin{bmatrix} 0\\0\\3\\3\\0 \end{bmatrix}$$

Totalmatricen sættes op og vi løser system

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] : (x_1, x_2, x_3) = (-6, 8, 1)$$

Vi laver nu en lineær kombination med konstanterne og tester om de giver v_3

$$v_3 = -6 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ergo er koordinaterne $(x_1, x_2, x_3) = (-6, 8, 1)$

(b)

Det opgives at $v_1 = u_2$, og $v_2 = u_3$

Så gælder det at $[v_1]_\beta = 0u_1 + 1u_2 + 0u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$[v_2]_\beta = 0u_1 + 0u_2 + 1u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ergo har vi basisskiftet $[v]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c)

$$w = v_1 + 2v_2 - v_3 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 0 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix}$$

w udtrykkes som en lineær kombination af β

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 0 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vi udregner $x_1..x_3$ ved at løse ligningssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 9 \\ 4 & 2 & 8 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 9 & 18 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right]$$

Ligningsystemet løses og vi får: $(x_1, x_2, x_3) = (12, -11, -1)$

ergo er lineærkombinationen

$$12 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 11 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 0 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Opgave 3.

a)

$$\begin{pmatrix} c_1^f \\ c_2^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \vec{CS} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & s_1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & s_2 \end{array}\right] \leftrightarrow F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

c)

Fra b kender vi F
Vi har fået oplyst detaljerne omkring L_θ og R_θ

$$L_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.133974 & 0,5 & 0,87 & -0,5 \\ -0,5 & -0,133974 & 0,5 & 0.87 \end{bmatrix} R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,133974 & -0,5 & 0,87 & 0,5 \\ 0,5 & 0.133974 & -0,5 & 0.87 \end{bmatrix}$$

På matrixprogrammet udregnes $F \cdot L_\theta \cdot F \cdot R_\theta \cdot R_\theta \cdot F =$

```
F.mul( L ).mul( F ).mul( R ).mul( R ).mul( F ).mul( K );
[ 1,37 ]
[ 2,37 ]
[ 1,87 ]
[ 3,23 ]
```

hvor K $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (Startposition)

Opgave 4.

a, b)

Kig i java kode

c

Eksempel på kørsel, med input fra opgavebeskrivelse.

Matrix

[2,00 4,00 2,00 8,00 5,00]
[1,00 7,00 7,00 10,00 5,00]
[0,00 1,00 1,00 3,00 3,00]

Gauss

[0,00 1,00 1,00 3,00 3,00]
[1,00 0,00 -1,00 -2,00 -3,50]
[0,00 0,00 1,00 -9,00 -12,50]

GaussJordan

[0,00 1,00 0,00 12,00 15,50]
[1,00 0,00 0,00 -11,00 -16,00]
[0,00 0,00 1,00 -9,00 -12,50]