Subespaços gerados, soma e interseção, parâmetros e escalonamento

Centro de Informática UFPE
Universidade Federal de Pernambuco

Subespaço vetorial:

Um subconjunto de um espaço vetorial pode ser dito subespaço se satisfeitas todas as 8 condições de um espaço vetorial (elemento inverso, neutro...), que podem ser resumidas a duas propriedades, ser fechado para a soma e produto por escalar.

Subespaço vetorial:

Estes são os testes de fechamento de S com relação às duas operações:

- $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S,\ \forall\ u, v \in S$
- $u \in S \wedge k \in R \Rightarrow k.u \in S,\ \forall\ u \in S \wedge \forall\ k \in R$

Subespaço vetorial:

Os subespaços podem ser representados como combinações lineares de vetores. Um conjunto de elementos que podem ser combinados linearmente de forma a gerar todo um dado subespaço é dito um conjunto gerador.

Subespaço vetorial:

Assim podemos utilizar um conjunto de vetores para representar o subespaço que ele gera por exemplo podemos nos referir ao subespaço [(1,0)], note que esse subespaço contem todos os pontos do eixo X, outro exemplo é o subespaço [(1,0),(0,1)] este se refere a todo o plano XY.

Subespaço vetorial:

Note que mesmo que ainda podemos adicionar vetores na representação do subespaço anterior por exemplo [(1,0),(0,1),(1,1)], entretanto ainda geraríamos o mesmo subespaço pois (1,1) é combinação linear de (1,0) e (0,1).

Subespaço vetorial:

Note também que com o exemplo anterior mostramos que o conjunto gerador de um subespaço não é único outro exemplo é que [(1,0)] e [(2,0)], se referem ao mesmo subespaço.

Subespaço vetorial:

Também podemos representar subespaços com sistemas de equações, e é também possível encontrar um sistema de equações pelo conjunto gerador e um conjunto gerador a partir de um sistema de equações. Utilizando o escalonamento e a parametrização.

Soma e interseção:

Definimos a soma de dois subespaços S_1 e S_2:

$$S_1 + S_2 = \{v \in V \Rightarrow \exists\ v1,v2 \,|\, v = v1+v2 \wedge (v1 \in S_1 \wedge v2 \in S_2)\}$$

Note que existem elementos na soma de S_1 e S_2 que não pertencem nem a S_1 nem a S_2, e também que a soma pertence ao mesmo espaço ao qual S_1 e S_2 pertencem.

Soma e interseção:

De forma resumida podemos definir a soma de S_1 e S_2 como o menor subespaço ao qual a união de S_1 e S_2 pertence(observe que a união não necessariamente será um subespaço e por isso seria necessário "adicionar alguns elementos").

Soma e interseção:

Podemos definir a interseção de S_1 e S_2 como sendo o conjunto de elementos que pertencem a ambos os subespaços.

Soma e interseção:

Note que esse conjunto será sempre um subespaço pois os elementos da união quando somados ou multiplicados por escalar irão pertencer tanto a S_1 quanto a S_2 pois S_1 e S_2 são subespaços.