ElegantBook：优美的 LaTeX 笔记——数学基础篇

ElegantLaTeX 李群与李代数

作者：mronebian
组织：ElegantLaTeX Program
时间：March 9, 2025

忽有春风化剑意，斩我二十少年气

目录

本章节主要是来自《微分几何与广义相对论》中的部分笔记，后续可能会有纤维丛的知识。本文主要定位在于帮助本人强化记忆和理解，具体知识可看书。

第一部分

李群与李代数

第一章 群论基础

定义 1.1 (群 (group))

集合 G 配以满足以下条件的映射 $G\times G\to G$(叫群乘法) 称为群 (group).

1. $(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3)\quad \forall g_1,g_2,g_3\in G$
2. $\exists$ 恒等元 *(identity element)* $e\in G$ 使得 $eg=ge=g,\quad \forall g\in G$
3. $\forall g\in G$, $\exists$ 逆元 *(inverse element)* $g^{-1}\in G$ 使得 $g^{-1}g=gg^{-1}=e$

♣

笔记 恒等元是唯一的, 逆元也是唯一的.

定义 1.2

乘法满足交换律的群称为阿贝尔群 (Abelian group). 只含有限个元素的群称为有限群 (finite group), 否则称为无限 (infinite group). 群 G 的子集 H 称为 G 的子群 (subsetgroup), 若 H 用 G 的乘法也构成群.

♣

定义 1.3

设 G 和 G' 群, 映射 $\mu:G\to G'$ 叫同态 (homomorphism), 若

$$\mu(g_1g_2)=\mu(g_1)\mu(g_2),\quad \forall g_1,g_2\in G$$

同态本质上是确保群乘法的.

♣

定理 1.1

同态映射 $\mu:G\to G'$ 具有以下性质:

1. 若 e,e' 是 G,G' 的恒等元, 则 $\mu(e)=e'$. 这一性质, 是因为恒等元在不同群具有唯一性.
2. $\mu(g^{-1})=\mu(g)^{-1},\quad \forall g\in G$ 证明:

$$e'=\mu(e)=\mu(g^{-1}g)=\mu(g^{-1})\mu(g)$$

根据逆元的定义, 可知

$$\mu(g)^{-1}=\mu(g^{-1})$$

3. $\mu[G]$ 是 G' 的子群, 当 G 是阿贝尔群时, $\mu[G]$ 是 G' 的阿贝尔子群.

$$\mu(g_1)\mu(g_2)=\mu(g_1g_2)=\mu(g_2g_1)=\mu(g_2)\mu(g_1)$$

♡

定义 1.4

一一到上的同态映射称为同构 (isomorphism). 又称群同构. 同构 $\mu:G\to G'$ 称为群 G 上的自同构 (automorphism).

♣

对于 $\forall g\in G$, 可构造一个称为伴随同构 (adjoint isomorphism) 的自同构映射, 又称内自同构 (inner isomorphiam), 记作 $I_g:G\to G$, 定义为:

$$I_g(h)=ghg^{-1},\quad \forall h\in G$$

定义 1.5

群 G 和 G' 的卡式积 $G\times G'$ 可以按下列方式定义

$$(g_1,g_1')(g_2,g_2'):=(g_1g_2,g_1'g_2')\quad \forall g_1,g_2\in G,g_1',g_2'\in G'$$

构成 G 和 G' 的直积群 (direct product group).

♣

定义 1.6

设 H 是群 G 的子群,$g \in G$, 则 $gH \equiv \{gh|h \in H\}$ 称为 H 的含 g 的左陪集 *(left coset)*, 同理, 可定义右陪集 *(right coset)*.

笔记 若子群 H 的两个左陪集有交, 则两者必相等.
证明：如果两个左陪集交集不为空, 则 $\exists x \in G$ 满足

$$g_1h_1 = x = g_2h_2$$

则由 $g_1h_1 = g_2h_2$, 变形得到

$$g_2^{-1}g_1 = h_2h_1^{-1} \in H$$

或者

$$g_1^{-1}g_2 = h_1h_2^{-1} \in H$$

对于第一个关系, 可以得到

$$g_1 = g_2h$$

而

$$g_1H = g_2hH \subset g_2H$$

所以

$$g_1H \subset g_2H$$

同理可得

$$g_2H \subset g_1H$$

所以两个左陪集相等.

定义 1.7

群 G 的子群 H 称为正规 *(normal)* 子群或不变 *(invariant)* 子群, 若

$$ghg^{-1} \in H, \quad \forall g \in G, h \in H$$

定义 1.8

设 G 是群, 则 $A(G) \equiv \{\mu : G \to G|\mu$为自同构映射$\}$, 以映射的复合为群乘法构成群, 称为群 G 的自同构群. 群乘法是 $\forall \mu, \nu \in A(G)$, 群乘积 $\mu, \nu \in A(G)$ 定义为 $(\mu\nu)(g) \equiv \mu(\nu(g)), \quad \forall g \in G$

定理 1.2

以 $A_I(G)$ 代表 G 上全体的自同构映射的集合, 即

$$A_I(G) \equiv \{I_g : G \to G|g \in G\} \subset A(G)$$

则 $A_I(G)$ 是群 $A(G)$ 的一个正规子群.

定义 1.9

设 H 和 K 是群, 且存在同态映射 $\mu : K \to A(H), \quad \forall k \in K$, 把 $\mu(k) \in A(H)$ 简记作 μ_k, 则 $G \equiv H \times K$ 配以下式的群乘法：

$$(h, k)(h', k') := (h\mu_k(h'), kk'), \quad \forall h, h' \in H, \quad k, k' \in K$$

所构成的群称为 H 和 K 的 **半直积群 *(simidirect product)***, 记作 $G \equiv H \otimes_S K$

第二章 李群

定义 2.1

若 G 既是 n 维 (实) 流形又是群, 其群乘映射 $G \times G \to G$ 和求逆元映射 $G \to G$ 都是 C^∞ 的, 则 G 叫 n 维 (实) 李群 (*Lie group*).

这里的李群一般是有限维.

定义 2.2

李群 G 和 G' 之间的 C^∞ 同态映射 $\mu : G \to G'$ 称为李群同态映射 (*Lie-group homomorphism*) 李群同态 μ 称为李群同构 (*Lie-group isomorphism*), 若 μ 是微分同胚.

定义 2.3

李群 G 的子集 H 称为 G 的李子群 (*Lie-group*), 若 H 既是 G 的子流形又是 G 的子群.

定义 2.4

$\forall g \in G$, 映射 $L_g : h \mapsto gh \quad \forall h \in G$ 叫做由 G 生成的左平移 (*left translation*).

1. 显然左平移映射是微分同胚的
2. L_e 是恒等映射
3. $L_{gh} = L_g \circ L_h$
4. $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$

定义 2.5

G 上的矢量场 $\bar{A}$ 叫左不变的 (*left invariant*), 若

$$L_{g*}\bar{A} = \bar{A}$$

等价形式

$$(L_{g*}\bar{A})_{gh} = \bar{A}_{gh}$$

ps: 本节以大写字母代表矢量, 字母 +‾ 表示矢量场.

其中 L_{g*} 是由左平移映射诱导的推前映射

等价形式推导, 根据第四章有 $(\phi_* v)|_{\phi(p)} = \phi_*(v|_p)$ 取

$$M = N = G, \phi = L_g, v = \bar{A}, p = h, \phi(p) = gh$$

则

$$(L_{g*}\bar{A})_{gh} = L_{g*}(\bar{A}_h)$$

便可得到第二个等价形式

$$L_{g*}(\bar{A}_h) = \bar{A}_{gh}$$

定理 2.1

G 上全体左不变矢量场的集合 $\mathscr{L}$ 与 G 的恒等元 e 的切空间 V_e（作为两个矢量空间）同构

证明：$\forall A \in V_e$, 用下式定义 G 上的矢量场 $\bar{A}$

$$\bar{A}_g := L_{g*}A, \quad \forall g \in G$$

这样便给出了一个映射联系了两个矢量空间（用 η 表示映射关系）, 先证明左不变, 不妨令 $g = gh$

$$\bar{A}_{gh} = L_{gh*}A = (L_g \circ L_h)_* A = (L_{h*} \circ L_{g*})A = (L_{g*} \circ L_{h*})A = L_{g*}(L_{h*}A) = L_{g*}\bar{A}_h$$

第三步见定理 4-1-5 随后要是证明同构, 只需说明是一一到上的线性映射, 线性已经满足.

一一：如果 $\eta(A) = \eta(B) \Rightarrow A = B$, 则一一成立.

$$\bar{A} = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}_e = \bar{B}_e \Rightarrow A = B$$

到上：$\forall A \in \mathscr{L}$ 有 $\bar{A}_e \in V_e$

基本思想是构造法, 就是利用 $\mathscr{L}$ 的元素构造出新的矢量场并证明新的矢量场就是旧的矢量场, 意味着值域的每个元素都有对应

$$\bar{B}_g = L_{g*}\bar{A}_e = \bar{A}_{ge} = \bar{A}_g$$

第三章 李代数

在矢量空间 $\mathscr{V}$ 上定义映射 $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ 就得到一种代数. 一种重要的乘法是李括号 (Lie bracket), 记作 $[,]$, 是满足下列条件的双线性映射.

1. $[A, B] = -[B, A]$
2. $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0, \quad \forall A, B, C \in \mathscr{V}$, 又称为雅可比恒等式

定义 3.1

定义了李括号的矢量空间称为李代数 (*Lie algebra*). 任意两个元素的李括号都为零的李代数称为阿贝尔李代数

定理 3.1

G 上全体左不变矢量场的集合 $\mathscr{L}$ 是李代数

证明：以矢量场对易子为李括号.

首先验证 $[\bar{A}, \bar{B}]$ 是左不变的

$$L_{g*}[\bar{A}, \bar{B}] \overset{1}{=} [L_{g*}\bar{A}, L_{g*}\bar{B}] = [\bar{A}, \bar{B}]$$

第一步证明

令 $\phi_* = L_{g*}$ 则

$$\phi_*[v, u](f) = [v, u](\phi^* f) = v(u(\phi^* f)) - u(v(\phi^* f))$$

而

$$\begin{aligned}
[\phi_* v, \phi_* u](f) &= \phi_* v(\phi_* u(f)) - \phi_* u(\phi_* v(f)) \\
&= \phi_*(vu)(f) - \phi_*(uv)(f) \\
&= (vu)(\phi^* f) - uv(\phi^* f) \\
&= v(u(\phi^* f)) - u(v(\phi^* f))
\end{aligned}$$

所以第一个等号成立. 对易子的反称性确保了李括号的第一个条件第二个条件:

$$\begin{aligned}
&[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] \\
=&[uv - vu, w] + [wu - uw, v] + [vw - wv, u] \\
=&(uv - vu)w - w(uv - vu) + (wu - uw)v - v(wu - uw) + (vw - wv)u - u(vw - wv) \\
=&uvw - vuw - wuv + wvu + wuv - uvw - vwu + vuw + vwu - wvu - uvw + uwv \\
=&uvw - uvw + vuw - vuw + wuv - wuv + wvu - wvu - vwu + vwu - uvw + uwv \\
=&0
\end{aligned}$$

第二个条件也满足.

结合定理2.1和定理3.1, 可见恒等元的切空间与李代数同构.

定义 3.2

设 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{W}$ 是李代数. 线性映射 $\beta : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ 称为李代数同态, 若它保李括号, 即 $\beta([A, B]) = [\beta(A), \beta(B)]$. 同态再称为李代数同构, 若 β 是一一到上的.

定理 3.2

设 $\mathscr{G}$ 和 $\hat{\mathscr{G}}$ 分别是李群 G 和 $\hat{G}$ 的李代数,$\rho : G \to \hat{G}$ 是同态映射, 则 ρ 在点 $e \in G$ 诱导的推前映射 $\rho_* : \mathscr{G} \to \hat{\mathscr{G}}$ 是李代数同态.

♡

定义 3.3

李代数 $\mathscr{G}$ 的子空间 $\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{G}$ 的李子代数 (*Lie subalgebra*), 若

$$[A, B] \in \mathscr{H}, \quad \forall A, B \in \mathscr{H}$$

♣

定理 3.3

设 H 是李群 G 的李子群, 则 H 的李代数 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的李子代数.

♡

定义 3.4

李代数 $\mathscr{G}$ 的子代数 $\mathscr{H}$ 称为理想 (*ideal*), 若

$$[A, \mu] \in \mathscr{H}, \forall A \in \mathscr{G}, \mu \in \mathscr{H}$$

♣

定理 3.4

设 $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ 是理想,$\mathscr{G}/\mathscr{H}$ 代表以等价类为元素的集合（$A, B \in \mathscr{G}$ 叫等价的, 若 $A - B \in \mathscr{H}$）, 则 $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ 是李代数, 称作商李代数（*quotient Lie algebra*）.

♡

定义 3.5

李代数 $\mathscr{G}$ 称为单 (*simple*) 李代数, 若它不是阿贝尔代数而且除 $\mathscr{G}$ 及 $\{0\}$ 外不含理想. $\mathscr{G}$ 称为半单 (*semi-simple*) 李代数, 若它不含非零的阿贝尔理想. 相应地, 李群 G 称为单李群, 若它不是阿贝尔群而且除 G 外不含正规子群. G 称为半单李群, 若它不含阿贝尔正规子群.

♣

第四章 单参子群和指数映射

定义 4.1

C^∞ 曲线 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 叫李群 G 的单参子群 (one-parameter subgroup), 若

$$\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t),\quad \forall s,t\in\mathbb{R}$$

其中 $\gamma(s)\gamma(t)$ 代表群元 $\gamma(s)$ 和 $\gamma(t)$ 的群乘积.($\gamma:\mathbb{R}\to G$ 是李群同态映射)

1. $\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$ 保证子集的两个元素的积仍在子集内.
2. 子集内含有恒等元 $\gamma(0)$.
3. 逆元 $\gamma(-t)$ 也在群内, 子集 $\{\gamma(t)|t\in\mathbb{R}\}$, 构成子群

定理 4.1

任一左不变矢量场 $\bar{A}$ 都是完备矢量场, 就是说, 它的每一不可延积分曲线的参数可以取遍全 $\mathbb{R}$.

笔记 完备矢量场：积分曲线参数的定义域是 $\mathbb{R}$.

proof: 为符号统一, 本该用 $\partial/\partial t$, 但这里有许多曲线, 为避免混淆, 使用 $\frac{d}{dt}\gamma(t)$ 代表 $\gamma(t)$ 切矢. 思路是取一开区间, 证明其可以延拓到 $\mathbb{R}$. 设 $\mu(t)$ 是 $\bar{A}$ 的、满足 $\mu(0)=e$ 的积分曲线. 其定义域为开区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$, 即 $\mu:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$. 在线上取点 $h\equiv\mu(\frac{\varepsilon}{2})$, 令 $\nu(t):=h\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})$, 则有曲线映射 $\nu:(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{3\varepsilon}{2})\to G$. 我们来看看 $\nu(\frac{\varepsilon}{2})=h\mu(0)=h$. 说明 μ 和 ν 有一重合点. 接下来的思路是要证明有重合段, 这样就可以重复利用以上步骤延拓到 $\mathbb{R}$. 则只需要 ν 也是 $\bar{A}$ 的积分曲线.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t\nu(t)=\left.\frac{d}{dt}\right|_t h\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})=\left.\frac{d}{dt}\right|_t L_h\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})=L_{h*}\left.\frac{d}{dt}\right|_t\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})$$

令 $t'=t-\frac{\varepsilon}{2}$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})=\left.\frac{d}{dt}\right|_t\mu(t'(t))=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t'}\mu(t')=\left[\left.\frac{d}{dt'}\right|_{t'}\mu(t')\right]\frac{dt'}{dt}=\left.\frac{d}{dt'}\right|_{t'}\mu(t')=\bar{A}_{\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})}$$

则

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t\nu(t)=L_{h*}\bar{A}_{\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})}=\bar{A}_{h\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})}=\bar{A}_{\nu(t)}$$

所以 $\nu(t)$ 也是 $\bar{A}$ 的积分曲线, 则二者有重合段, 则可无限延伸.

下面要证 $\bar{A}$ 任一条积分曲线定义域 $\mathbb{R}$:

$\forall g\in G$, 令

$$\beta(t)\equiv g\gamma(t)$$

则有

$$\left.\frac{d}{dt}\right|\beta(t)=\bar{A}_{g\gamma(t)}=\bar{A}_{\beta(t)}$$

表明 $\beta:\mathbb{R}\to G$ 是 $\bar{A}$ 过 g 的积分曲线 [满足 $d\beta/dt|_{t=0}=\bar{A}_g$], 可见 $\bar{A}$ 的任一不可延积分曲线参数都可取遍 $\mathbb{R}$.

定理 4.2

设 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 是左不变矢量场 $\bar{A}$ 的、满足 $\gamma(0)=e$ 的积分曲线, 则 γ 是 G 的一个单参子群.

只需证明 γ 满足子群乘法. $\forall s\in\mathbb{R}$, 令 $\beta(t)\equiv\gamma(s)\gamma(t),\gamma_1(t)\equiv\gamma(s+t)$, 那么 $\beta(t)\overset{?}{=}\gamma_1(t)$.

取一点 $g=\gamma(s)$. 则 $\beta(t)=g\gamma(t)$, 易见 $\beta(t)$ 是一条 $\bar{A}$ 的积分曲线, 且 $\beta(t)$ 过 $\gamma(s)$, 而 $\gamma_1(t)$ 也过 $\gamma(s)$. 那么要

证明 $\beta(t)=\gamma_1(t)$, 只需要证明 $\gamma_1(t)$ 是 $\bar{A}$ 的积分曲线.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t \gamma_1(t)=\left.\frac{d}{dt}\right|_t \gamma(s+t)$$

令 $t'(t)=t+s$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t \gamma(s+t)=\left.\frac{d}{dt'}\right|_{t'} \gamma(t'(t))\frac{dt'}{dt}=\bar{A}_{t'}=\bar{A}_{t+s}$$

结论得证.

定理 4.3

设单参子群 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 在恒等元 e 的切矢为 A, 则 $\gamma(t)$ 是 A 对应的左不变矢量场 $\bar{A}$ 的积分曲线.

proof: 只需要证明 $\bar{A}_{\gamma(s)}=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s}\gamma(t)$.

$$\bar{A}_{\gamma(s)}=L_{\gamma(s)*}\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma(t)=\left.\frac{d}{dt}\right|_0 L_{\gamma(s)}\gamma(t)=\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma(s)\gamma(t)=\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma(s+t)=\left.\frac{d}{dt'}\right|_s \gamma(t')$$

ps:$t'=t+s$.

总结以上, 则李群的李代数 $\mathscr{G}$ 的每一个元素都可以对应一个单参子群, 则每一元素又称为生成元 (generator).

指数映射

先介绍 (M,g_{ab}) 的指数映射.

$$\exp_p:V_p\to M$$

定义

$$\exp_p(v):=\gamma(1)$$

ps:p 是任一一点.

我们来看看李群上的指数映射.

定义 4.2

李群 G 上的指数映射 *(exponential map)*$\exp:V_e\to G$ 定义为:

$$\exp(A):=\gamma(1),\quad \forall A\in\mathscr{G}$$

其中 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 是与 A 对应的单参子群

定理 4.4

$$\exp(sA)=\gamma(s),\quad \forall s\in\mathbb{R},A\in V_e$$

$\gamma(s)$ 是由 A 决定的单参子群.

proof: 令 $A'=sA\in V_e$. 以 $\bar{A},\bar{A}'$ 分别代表 A 和 A' 对应的左不变矢量场,$\eta:V_e\to\mathscr{L}$ 是同构映射 (推前映射是线性的) 导致 $\bar{A}'=s\bar{A}$.

以 $\gamma(t)$ 代表 $\bar{A}$ 对应的单参子群, 用 $\gamma'(t)\equiv\gamma(st)$ 定义曲线 $\gamma':\mathbb{R}\to G$,

则

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t \gamma'(t)=\left.\frac{d}{dt}\right|_t \gamma(st)=\left.\frac{d}{dt'}\right|_{t'} \gamma(t')\frac{dt'}{dt}=s\bar{A}_{\gamma(t')}=\bar{A}'_{\gamma'(t)}$$

γ' 是 $\bar{A}'$ 的积分曲线, 又因为 $\gamma(0)=\gamma'(0)$, 可知 $\gamma'(t)$ 是 $\bar{A}'$ 对应的单参子群. 于是 $\exp(sA)=\exp(A')=\gamma'(1)=\gamma(s)$.

ps：设 $\gamma(t)$ 是由 $A \in V_e$ 决定的单参子群, 则上面定理表明：

$$\gamma(t) = \exp(tA)$$

我们也可以用 $\exp(tA)$ 代表由 A 决定的单参子群.

定理 4.5

设 $\phi : \mathbb{R} \times G \to G$ 是由 $A \in V_e$ 对应的左不变矢量场 $\bar{A}$ 产生的单参微分同胚群, 则

$$\phi_t(g) = g \exp(tA), \quad \forall g \in G, t \in \mathbb{R}$$

♡

proof: 设 $\gamma(t)$ 是 $\bar{A}$ 决定的, 满足 $\gamma(0) = e$, 则 γ 是 G 的单参子群. 所谓 $\phi_t(g)$ 是过 g 的积分曲线, 而且参数值与 g 差 t. 定义 ϕ_t 的积分曲线 $\beta(t)$ 满足 $\beta(0) = g$, 则

$$\beta(0) = g\gamma(0)$$

命题给出 $\beta(t)$ 是 $\bar{A}$ 的积分曲线, 上文给出 $g\gamma(t)$ 亦是.

那么二者是同一条曲线. 则

$$\phi_t(g) = g\gamma(t) = g \exp(tA)$$

第五章 常用李群及其李代数

5.1 GL(m) 群 (一般线性群,general linear group)

设 V 是 $m(<\infty)$ 维矢量空间,$GL(m)$ 代表 $\{T: V \xrightarrow{\text{线性}} V | T\text{可逆}\}$ 用复合映射定义群乘法, 不难验证 $GL(m)$ 是群, 称为 m 阶（实）一般线性群.$GL(m)$ 的任一群元 $T \in \mathscr{T}_V(1,1)$. T 有 m^2 个分量, 天然对应一个 $m \times m$(实) 矩阵, 映射 T 的可逆性要求矩阵是可逆矩阵 $\det A \neq 0$. 则以矩阵乘法定义为群乘法的 $m \times m$ 矩阵构成一个群, 且与 $GL(m)$ 同构. 因此常把 $GL(m)$ 看作实矩阵. 另一方面,$GL(m)$ 可以看作 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的真子集. 而求行列式 $\det(A)$ 可以看作连续映射 $\det : \mathbb{R}^{m^2} \to \mathbb{R}$, 满足

$$\mathrm{GL}(m) = \det{}^{-1}(-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subset \mathbb{R}^{m^2}$$

$GL(m)$ 是非连通流形证明见书 $p742$, 含有两个连通分支. $GL(m)$ 是 $V \xrightarrow{\text{线性}} V$ 时用的纯几何语言, 说其是 $m \times m$ 的可逆矩阵用的是坐标语言. 以 $\mathscr{GL}(m)$ 代表 $GL(m)$ 的李代数, 则 $V_e = \mathscr{GL}(m)$. 设 $A \in \mathscr{GL}(m)$, 则它是恒等元 $I \in GL(m)$ 的矢量, 在坐标语言中有 m^2 个分量, 因而对应 $m \times m$ 实矩阵. 反之, 任一 $m \times m$ 实矩阵配以 I 点的坐标基矢, 便是 I 的一个矢量. 可见虽然只有可逆实 $m \times m$ 矩阵才是 $GL(m)$ 的元素, 但是任意的 $m \times m$ 是 $\mathscr{GL}(m)$ 的元素. 我们有如下定理

定理 5.1

$\mathscr{GL}(m) = \mathscr{M}\{m \times m$实矩阵$\}$(等号表示同构)

proof:$\forall$ 矩阵 $A \in \mathscr{M}$, 对于矩阵 $\psi(t) \equiv I + tA$, 对于足够小的 t, 可以总保证 $\psi(t)$ 可逆行列式为正. 则 $\psi(t) \in GL(m)$. 且 $\psi(t)$ 是过恒等元的切线, 它在 I 点的切矢为:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} I + tA = A$$

上述意思为切矢 A = 矩阵 A, 这里 A 是一切的实方阵. 给一个矩阵便有一个切矢, 而切矢亦对应一个矩阵, 群乘法也是对应的, 说明两个矢量空间同构.

对任意 $m \times m$ 矩阵 A 引入符号 (定义了指数为矩阵的 e 指数):

$$\mathrm{Exp}(A) \equiv I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n \cdots$$

引理 5.1

若矩阵对易

$$Exp(A+B) = Exp(A)Exp(B)$$

定理 5.2

$$Exp(A) = exp(A), \quad \forall A \in \mathscr{GL}(m)$$

proof: 根据4.2的定义, 我们只需要证明 Exp 是 $GL(m)$ 的单参子群, 且在恒等元的切矢量为 A. 不难验证, 以5.1定义的群是李群.

$$\mathrm{Exp}((s+t)A) = \mathrm{Exp}(sA) + \mathrm{Exp}(tA) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

则 Exp 是 $GL(m)$ 是单参子群.

恒等元切矢

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Exp(tA)} = A$$

ps: 这里采用取巧的办法, 原则上应该利用参数式.

以 V_e 作为 $\mathscr{GL}(m)$, 其任意二元素 $A, B \in V_e$ 的李括号定义为 $[A, B] := [\bar{A}, \bar{B}]_e$, 另一方面 $\mathscr{M}$ 的李括号定义为矩阵对易子.

定理 5.3

设 G 是 $GL(M)$ 的李子群, 则其李代数元 $A, B \in \mathscr{G} \subset \mathscr{GL}(m)$ 的李括号 $[A, B]$ 对应的矩阵的对易子

$$[A, B] = AB - BA$$

♡

ps: 这个定理, 说明 $\mathscr{GL}(m)$ 与 $\mathscr{M}$ 李代数同构

proof: 根据定理3.3, 只需要对 $GL(m)$ 给出证明：
设 e(即 I) 为 G 的恒等元,$\bar{A}, \bar{B}$ 代表 $A, B \in V_e$ 所对应的左不变矢量场,$\phi : \mathbb{R} \times G \to G$ 是由 $\bar{A}$ 产生的单参微分同胚群, 则,

$$[A, B] = [\bar{A}, \bar{B}]_e = (\mathscr{L}_{\bar{A}}\bar{B})_e = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(\phi_{-t*}\bar{B})_e - \bar{B}_e]$$

第二步见定理 4-2-3

注意到 $e = \phi_{-t}(\phi_t(e))$, 可知 $(\phi_{-t*}\bar{B})_e = \phi_{-t}\bar{B}_{\phi_t(e)}$, 而 $\bar{B}_e$ 又可以表示为 $\bar{B}_e = \phi_{-0*}\bar{B}_{\phi_0(e)}$, 所以

$$[\bar{A}, \bar{B}]_e = \lim_{t=0} \frac{1}{t}[\phi_{-t*}\bar{B}_{\phi_t(e)} - \phi_{-0*}\bar{B}_{\phi_0(e)}] \equiv \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\phi_{-t*}\bar{B}_{\phi_t(e)})$$

而

$$\bar{B}_{\phi_t(e)} = \phi_{*t}(e)\bar{B}_e = \phi_{*t}(e) \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(sB) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [\phi_t(e)\exp(sB)]$$

故而有

$$\begin{aligned}
[A, B] = [\bar{A}, \bar{B}]_e = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\phi_{-t*} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [\phi_t(e)\exp(sB)]\right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [\phi_{-t}(\phi_t(e)\exp(sB))]\right) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [\phi_{-t}(e\exp(tA)\exp(sB))] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [\exp(tA)\exp(sB)(\exp(-tA))] \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [(\mathrm{Exp}(tA)\mathrm{Exp}(sB)\mathrm{Exp}(-tA))] \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Exp}(tA)B\mathrm{Exp}(-tA) \\
&= ABI - IBA \\
&= AB - BA
\end{aligned}$$

ps: 注意保持映射顺序, 还有就是每一步的求导含义, 如有遗忘, 详见 P744.

5.2 O(m) 群 (正交群,orthohonal group)

如第一节所言,GL(m) 群是 m 维矢量空间 V 上所有 (1,1) 型张量 T 的集合, 对 T 再提出某些要求便得到 GL(m) 的子群,O(m) 群是要求 T 保度规的子群. 以下把 O(m) 群的元素专门记作 Z. 设 (V, g_{ab}) 是带正定度规的 m 维矢量空间. 线性映射 $Z : V \to V$ 称为**保度规的**, 若

$$g_{ab}(Z^a{}_c v^c)(Z^b{}_d u^d) = g_{cd}v^c u^d, \quad \forall v^c, u^d \in V$$

若 $v = u$, 可见在这样的映射下, 矢量的长度不变, 称为**保长性**, 二者等价, 可借用坐标基矢证明. 我们有

$$Z^a{}_c Z^b{}_d g_{ab} = g_{cd}$$

令 $O(m) \equiv \{Z^a{}_b \in \mathscr{T}_V(1,1) | Z^a{}_c Z^b{}_d g_{ab} = g_{cd}\}$, 则 O(m) 是 GL(m) 的李子群. 用 V 在正交归一基矢下的分量可以把保度规条件改写成分量形式.

$$\delta_{\sigma\rho} = Z^\mu{}_\sigma Z^\nu{}_\rho \delta_{\mu\nu} = (Z^T)_\sigma{}^\mu \delta_{\mu\nu} Z^\nu{}_\rho$$

翻译成矩阵语言
$$I = Z^T I Z = Z^T Z$$
表示 $Z^T = Z^{-1}$, 即 Z 是正交矩阵. 则有
$$1 = (\det Z^T)(\det Z) = (\det Z)^2$$
故而
$$\det Z = \pm 1$$
同 GL(m), 这是一个非连通流形. 这里有一些题外话, 每每遇到等式 $\det MN = \det M \det N$ 总是有疑问, 这里还是把问题讲清楚吧.

定义 5.1

行列式是几何形式（可分解外多项式）在线性变换下的变积系数或伸缩系数, 用数学语言说就是给定线性空间 V 的一组基底向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 给定一个线性变换 $f : V \to V$, 其表示为矩阵为 M, 则
$$\det(M) = \frac{f(e_1) \wedge f(e_2) \wedge \cdots \wedge f(e_n)}{e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n}$$
♣

随后我们可以给出定理

定理 5.4

$\det(NM) = \det(N)\det(M)$, 其中 N 是线性变换的 $g : V \to V$ 的矩阵.
♡

proof:
$$\begin{aligned}\det(NM) &= \frac{gf(e_1) \wedge gf(e_2) \wedge \cdots \wedge gf(e_n)}{e_1 (e_2 \wedge \cdots \wedge e_n}\\ &= \frac{gf(e_1) \wedge gf(e_2) \wedge \cdots \wedge g(e_n)}{f(e_1) \wedge f(e_2) \wedge \cdots \wedge f(e_n)} \frac{f(e_1) \wedge f(e_2) \wedge \cdots \wedge f(e_n)}{e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n}\\ &= \det(N)\det(M)\end{aligned}$$
行列式的定义, 与矩阵的乘法的关系如上所示, 还有就是可以验证上述定义与我们熟知的计算行列式的方法一致.

以上 O(m) 群可以具体化, 我们来看 O(1) 群, 则所对应的矢量空间是 $(\mathbb{R}, \delta_{ab})$. 由于保长性,O(1) 只有两个群元, 一个是恒等元, 另一个称为**反射 (reflection)** 即-e, 记作 r. 则 $O(1) = \{e, r\}$.

再来讨论 O(2) 群, 所对应的矢量空间 $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$.O(2) 最易想到的映射是旋转映射, 记作 $Z(\alpha)$, 用矩阵表示为
$$Z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$$
存在特例 $Z(0) = \mathrm{diag}(1, 1)$, 是恒等元, 上述矩阵的行列式是 $+1$, 可见其并不全面, 还应存在为 -1 的行列式, 不难给出
$$Z'(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -cos\alpha \end{bmatrix}$$
特例是 $Z'(0) = \mathrm{diag}(1, -1)$, 作用于矢量将矢量关于 x 轴做了对称变换, 称为反射, 记作 r_y. 同理存在关于 y 轴对称变换 $Z'(\pi)$, 记作 r_x. 此外 $Z(\pi)$ 则代表以原点为对称点的**反演 (inversion)**, 记作 i_{xy}, 易看出 $i_{xy} = r_x r_y$

Z 的四个矩阵元受到 $Z^T Z = 1$ 的限制, 只有一个独立, 所以 O(2) 是 1 维李群.Z 代表的子集构成 $O(2)$ 的李子群, 称为 **2 维空间的转动群**, 记作 SO(2). 这里的要求也适用于其他常见李群, 例如 GL(m) 的 $\det T = +1$ 的子集也是群, 称为 SL(m)(特殊线性群).

对于 O(m) 的群元 Z 满足 $\det = \pm 1$, 其流形总是有两个连通分支组成的非连通流形, 其中含有恒等元 e 的分支记作 SO(m), 即
$$SO(m) \equiv \{Z \in O(m) | \det = +1\}$$

是 O(m) 的李子群, 称为**特殊正交群 (special orthohonal group)**

最常用的是 SO(3), 它的一个群元的作用是让一个过原点的矢量绕过原点的轴转某角**欧拉定理**. 可以用从原点为起点的一个箭头代表群元, 所在直线是转轴, 长度是转动角度 $(0 \sim \pi)$, 方向相反代表转动方向相反, 且**对径认同** $(0 = \pi)$

李群 O(m) 和 SO(m) 的李代数 $\mathscr{O}$(m) 和 $\mathscr{SO}$(m), 显然 $\mathscr{SO}(m) \subset \mathscr{O}m$(3.3).

定理 5.5

$$\mathscr{SO}(m) = \mathscr{O}(m) = \{m \times m\text{实矩阵}A|A^T = -A\}$$

♡

proof: 要证第一个等号, 只需要证明两者相互包含 $\mathscr{SO}(m) \subset \mathscr{O}(m)$, 比较显然, 下面证明 $\mathscr{O}(m) \subset \mathscr{SO}(m)$

$$\forall A \in \mathscr{O}(m), \text{Exp}(tA) \subset O(m)$$

又因为 Exp(tA) 是过恒等元的单参子群,t 连续变化则有

$$\det(\text{Exp}(tA)) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

所以

$$A \subset \mathscr{SO}(m)$$

即

$$\mathscr{O}(m) \subset \mathscr{SO}(m)$$

对于第二个等号正方向, 考虑 O(m) 里的任意一条曲线满足 $1.Z(0) = I \quad 2. \frac{d}{dt}\big|_{t=0} = A$(这一曲线不一定是单参子群), 对于每一个 t

$$Z(t)^T Z(0) = I$$

对于上式求导, 并在 $t = 0$ 取值

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Z(t)^T Z = Z^T(0) \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Z + Z(0) \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Z^T = A + A^T = 0$$

对于第二个矩阵方向, 有一个矩阵 $A^T = -A$, 注意到 $(A^2)^T = (A^T)^2, (A^3)^T = (A^T)^3 \cdots$, 则有 $(\text{Exp}A)^T = \text{Exp}(A^T)$

$$(\text{Exp}A)^T(\text{Exp}A) = (\text{Exp}A^T)(\text{Exp}A) = (\text{Exp} - A)(\text{Exp}A) = I$$

上式表明 Exp$A \in O(m)$ 在零点的切矢为 A, 可见 A 是李群 O(m) 中过 I 的曲线 Exp(tA) 在 I 点的切矢, 所以 $A \in \mathscr{O}(m)$. 利用定理5.5可以方便计算李群 O(m) 和 SO(m) 的维数, 而李群和李代数同维数, 展开来说就是李群的李代数同构于李群恒等元的切空间, 自然李代数的维数就是切空间的维数, 切空间的维数和李群的维数相等.

$$\text{dimO}(m) = \text{dim}\mathscr{O}(m) = \frac{1}{2}m(m-1)$$

虽然 O(m) 和 SO(m) 不相等, 但是他们的李代数相同, 说明二者同维度.

5.3 O(1,3) 群 (洛伦兹群,The Lorentz group)

定义 O(m) 群时要求度规是正定的, 现在放宽为任意度规, 设 g_{ab} 在正交归一基底下有 m' 个对角元是 -1,m'' 个对角元是 $+1$, 把这样的群定义为 O(m',m"). 即

$$O(m', m'') := \{\Lambda^a{}_b \in \mathscr{T}_V(1,1)|\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d g_{ab} = g_{cd}\}$$

O(m',m") 是 GL(m) 的李子群,O(m) 可以看作 O(m',m") 的特殊情况.

在物理中有一类重要的群, 洛伦兹群 $L \equiv O(1,3)$, 我们从简单的看起, 首先是 O(1,1). 2 维闵式时空 $(\mathbb{R}^2, \eta ab)$ 可以用来定义 O(1,1) 的洛伦兹度规. 这样, 我们就可以把保度规条件的分量形式写作

$$\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho \eta_{\mu\nu} = (\Lambda^T)_\sigma{}^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho$$

写成矩阵等式

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \tag{5.1}$$

其中 $\eta = diag(-1,1)$ 上式子表明 $det\Lambda = \pm 1$ 不难想到 O(1,1) 群也是非连通的.

我们知道洛伦兹变换就是保度规的一种变换, 曾经推出过两种形式的洛伦兹变换, 分别是

$$t' = \gamma(t - vx)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

令 $v = th\lambda$ 得到另一种形式, 这里采取几何单位制.

$$t' = tch\lambda - xsh\lambda$$

$$x' = xch\lambda - tsh\lambda$$

不难得到

$$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} ch\lambda & -sh\lambda \\ -sh\lambda & ch\lambda \end{bmatrix}$$

不难验证满足我们的保度规条件. 而 $\det \Lambda = 1$, 说明至少还存在一个连通分支, 事实上, 有四个, 我们来看看另外两个是如何来的我们用 $(e_0)^c(e_0)^d$ 来缩并保度规条件

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_0\Lambda^{\nu}{}_0 \\ &= \eta_{00}\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 + \eta_{11}\Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_0 \\ &= -(\Lambda^0{}_0)^2 + (\Lambda^1{}_0)^2 \Longrightarrow \\ (\Lambda^0{}_0)^2 &= 1 + (\Lambda^1{}_0)^2 \geq +1 \end{aligned}$$

要求 $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq +1$, 这两者配合又给出了两个连通分支, 最后一共有四个连通分支.

1. 子集 $O_+^{\uparrow}(1,1)$, 其元素 $\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} ch\lambda & -sh\lambda \\ -sh\lambda & ch\lambda \end{bmatrix}$ 满足 $det\Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \geq +1$;
2. 子集 $O_-^{\uparrow}(1,1)$, 其元素 $\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} ch\lambda & -sh\lambda \\ sh\lambda & -ch\lambda \end{bmatrix}$ 满足 $det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \geq +1$;
3. 子集 $O_-^{\downarrow}(1,1)$, 其元素 $\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} -ch\lambda & sh\lambda \\ -sh\lambda & ch\lambda \end{bmatrix}$ 满足 $det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$;
4. 子集 $O_+^{\downarrow}(1,1)$, 其元素 $\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} -ch\lambda & sh\lambda \\ sh\lambda & -ch\lambda \end{bmatrix}$ 满足 $det\Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$;

为观察这几个分支的作用, 我们来看看 $\Lambda(0)$ 的群元作用在列矢量 $v = \begin{bmatrix} v^0 \\ v^1 \end{bmatrix}$ 的作用.

1. 对于子集 $O_+^{\uparrow}(1,1)$, 有 $\Lambda(0) = \text{diag}(1,1)$, 是恒等元, 作用与 v 所在的矩阵为 $v' = \begin{bmatrix} v^0 \\ v^1 \end{bmatrix}$, 称为**恒等变换**;
2. 对于子集 $O_-^{\uparrow}(1,1)$, 有 $\Lambda(0) = \text{diag}(1,-1)$, 作用与 v 所在的矩阵为 $v' = \begin{bmatrix} v^0 \\ -v^1 \end{bmatrix}$, 称为**空间反射**, 记作 r_x;
3. 对于子集 $O_-^{\downarrow}(1,1)$, 有 $\Lambda(0) = \text{diag}(-1,1)$, 作用与 v 所在的矩阵为 $v' = \begin{bmatrix} -v^0 \\ v^1 \end{bmatrix}$, 称为**时间反射**, 记作 r_t;
4. 对于子集 $O_+^{\downarrow}(1,1)$, 有 $\Lambda(0) = \text{diag}(-1,-1)$, 作用与 v 所在的矩阵为 $v' = \begin{bmatrix} -v^0 \\ -v^1 \end{bmatrix}$, 称为**时空反演**, 记作 $i_t x$.

$O(1,1)$ 是非紧致的, 具体细节见 P750.

在以上的基础上, 我们来介绍**洛伦兹群** O(1,3), 简记为 L, 其群元 $\Lambda \in L$ 应满足式5.1, 不过其矩阵形式应该是 4×4 的. L 是由 4 个连通分支组成的.

- $L_+^{\uparrow}(1,1) = \{\Lambda \in L| \det\Lambda = +1, \Lambda^0 \geq +1\}$;
- $L_-^{\uparrow}(1,1) = \{\Lambda \in L| \det\Lambda = -1, \Lambda^0 \geq +1\}$;
- $L_-^{\downarrow}(1,1) = \{\Lambda \in L| \det\Lambda = -1, \Lambda^0 \leq -1\}$;
- $L_+^{\downarrow}(1,1) = \{\Lambda \in L| \det\Lambda = +1, \Lambda^0 \leq -1\}$.

每一个连通分支都有一个最简单的元素, 分别记作 I, r_s, r_t, i_{st}, 具体形式是

- $I \equiv \text{diag}(1,1,1,1) \in L_+^{\uparrow}$ 是 L 的恒等元;
- $r_s \equiv \text{diag}(1,-1,-1,-1) \in L_-^{\uparrow}$ 是 L 的空间反射元;
- $r-t \equiv \text{diag}(-1,1,1,1) \in L_-^{\downarrow}$ 是 L 的时间反射元;
- $i_{st} \equiv \text{diag}(-1,-1,-1,-1) = r_s r_t \in L_+^{\downarrow}$ 是 L 的时空反演元.

上述 4 个连通分支只有 $L_+^{\uparrow}$ 是子群, 而且是李子群, 称为**固有洛伦兹群 (proper Lorentz group)**, 还有其他名称, 可以与量子场论一致. $L_+^{\uparrow}$ 是一个 6 维连通流形, 流形结构 $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$. 其他 3 个分支, 都是子群左乘 r_s, r_t, i_{st} 的左陪集.

接下来看洛伦兹群 O(1,3) 的李代数, 记作 $\mathscr{O}(1,3)$. 同 O(m) 一样, 子群的李代数与 O(1,3) 的李代数一样.

定理 5.6

$\mathscr{O}(1,3) = \{4\times 4\text{实矩阵} A | A^T = -\eta A \eta\}$

♡

proof: (正向)$\forall A \in \mathscr{O}(1,3)$, 考虑 O(1,3) 中满足以下两条件的曲线 $\Lambda(t)$ 满足 $1.\Lambda(0) = I$, $\quad 2. \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Lambda(t) = A$, 则对 $\Lambda^T(t)\eta\Lambda(t) = \eta$ 求导得到:

$$0 = \left[\frac{d}{dt}\Lambda^T(t)\right]_{t=0} \eta\Lambda(0) + \Lambda^T(0)\eta\left[\frac{d}{dt}\Lambda(t)\right]_{t=0} = A^T\eta + \eta A$$

两边右乘 η^{-1}

$$A^T = -\eta A \eta$$

笔记 $\eta^2 = I$

(反向)A 满足 $A^T = -\eta A\eta$ 的 4×4 实矩阵, 只需要证明 $\text{Exp}(A) \in O(1,3)$, 原因是前面这个条件导致 tA $\in O(1,3)$, 后面是由 A 生出的单参子群, 可以给出 $A \in \mathscr{O}(1,3)$ 下面我们来证明: 要证明是洛伦兹群元, 只需要满足证明保度规条件5.1 对任意矩阵 M, N 我们有:

$$\begin{aligned}
N^{-1}(\text{Exp}M)N &= N^{-1}(I + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots)N \\
&= N^{-1}N + N^{-1}MN + \frac{1}{2!}(N^{-1}MN)(N^{-1}MN) + \frac{1}{3!}(N^{-1}MN)(N^{-1}MN)(N^{-1}MN)\cdots \\
&= \text{Exp}(N^{-1}MN)
\end{aligned}$$

取 $N = \eta, M = A$, 则

$$\eta(\text{Exp}A)\eta = \text{Exp}(\eta A\eta)$$

两边右乘 η

$$\eta(\text{Exp}A) = \text{Exp}(\eta A\eta)\eta$$

则

$$(\text{Exp}A)^T\eta(\text{Exp}A) = (\text{Exp}A)^T\text{Exp}(\eta A\eta)\eta = [\text{Exp}(A^T + \eta A\eta)]\eta = \eta$$

定理得证.

对于群而言也有类似的结论:

$$dimO(m', m'') = dimO(m' + m'')$$

对于洛伦兹群, 我们也很方便求出群元的逆 (借助5.1):

$$\Lambda^{-1} = \eta\Lambda\eta$$

即只需要求转置, 再按下面矩阵改变符号即可 $\begin{bmatrix} + & - & - & - \\ - & + & + & + \\ - & + & + & + \\ - & + & + & + \end{bmatrix}$

5.4 U(m) 群 (酉群,Unitary group)

考虑 $GL(m,\mathbb{C}) := \{T : V \xrightarrow{\text{线}} V | T\text{可逆}\}$ $\mathbb{C}$ 代表数乘时是复数,V 是复矢量空间. 我们来介绍这个群的一个重要子群——酉群.

$$U(m) = \{U \in GL(m,\mathbb{C}) | U\text{保 (复内积)}\}$$

U(m) 是对 $GL(m,\mathbb{C})$ 提出保内积的子群. 关于内积的部分可以见量子力学数学基础篇设 V 是有限维内积空间, 线性映射 $A : V \to V$ 称为 V 上的**线性算符**, 简称**算符**, 它自然诱导出 V 上的另一线性算符 $A^\dagger$, 称为 A 的伴随算符, 满足

$$(A^\dagger f, g) = (f, Ag), \quad \forall f, g \in V$$

具体更详细内容见量子力学部分, 下面我们进入正题.

定义 5.2

内积空间 V 上的算符 U 称为酉算符 (或幺正算符)(unitary operator), 若其作用保内积, 即

$$(Uf, Ug) = (f, g), \quad \forall f, g \in V$$

♣

最后给出洛伦兹群的维数,$\forall A \in \mathscr{O}(1,3)$, 令 $B \equiv \eta A$, 则 $B^T = A^T\eta = -\eta A\eta\eta = -B$, 即 $B \in \mathscr{O}(4)$. 表明存在 $\psi : \mathscr{O}(1,3) \xrightarrow{\text{线性同构}} \mathscr{O}(4)$, 则 $dim\mathscr{O}(1,3) = dim\mathscr{O}(4)$

定理 5.7

算符 U 为酉算符的充要条件为

$$U^\dagger U = \delta$$

其中 δ 代表恒等算符, 即从 V 到 V 的恒等映射.

♡

proof: 充分性: 若 $U^\dagger U = \delta$, 则:

$$(Uf, Ug) = (U^\dagger Uf, g) = (\delta f, g) = (f, g)$$

必要性:

$$0 = (Uf, Ug) - (f, g) = ((U^\dagger U - \delta)f, g)$$

因为 $\forall f, g \in V$, 所以

$$U^\dagger U - \delta = 0 \Longrightarrow U^\dagger U = \delta$$

选择 V 上的一个正交归一基底 $\{e_i\}$,V 上任一算符 A, 算符会诱导出一个矩阵 (算符 $\hat{A} \mapsto \tilde{A}$ 矩阵), 其矩阵元定义为

$$\tilde{A}_{ij} := (e_i, \hat{A}e_j)$$

定理 5.8

1. $\hat{A} = 0 \Longleftrightarrow \tilde{A} = 0$
2. $\widetilde{(\hat{A}\hat{B})} = \tilde{A}\tilde{B}$

♡

给出伴随算符的矩阵

$$\tilde{A}_{ij} = (\hat{A}^\dagger e_i, e_j) = \overline{(e_j, \hat{A}^\dagger e_i)} = \overline{\tilde{A}^\dagger_{ji}}$$

所以, 在同一基底上, 有:

定理 5.9

算符 U 为酉算符的充要条件为是其在正交归一基底下的矩阵 U 满足矩阵等式

$$U^{-1} = U^\dagger = \overline{U^T}$$

proof 根据定理5.7和5.8可以给出酉算符的矩阵等式

必要性:

$$\widetilde{\hat{U}^\dagger \hat{U}} = \tilde{\hat{\delta}} \Rightarrow$$
$$\tilde{U}^\dagger \tilde{U} = \tilde{I}$$

根据逆矩阵定义可以给出第一个等号, 第二个等号前文已证明

充分性: 定义 $\hat{A} \equiv \hat{U}^\dagger \hat{U} - \hat{\delta}$, 则

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{ij} &= (e_i, \hat{A} e_j) = (e_i, \hat{U}^\dagger \hat{U} e_j) - (e_i, \hat{\delta} e_j) \\ &= \widetilde{\hat{U}^\dagger \hat{U}}_{ij} - I_{ij} \\ &= (\tilde{U}^\dagger \tilde{U})_{ij} - I_{ij} \\ &= 0\end{aligned}$$

所以 $\hat{A} = 1$, 也就意味着算符是酉算符.

定义 5.3

*满足定理5.9中的式子的复矩阵称为***酉矩阵** *(或***幺正矩阵***)(unitary matrix)*

ps: 当退回到实数时 $U^\dagger = U^T$, 酉矩阵可以看作是正交矩阵在复矩阵的推广

定理 5.10

设 U 为酉矩阵, 则

$$\det U = e^{i\phi}$$

其中 $\phi \in \mathbb{R}$, 即 $|\det U| = 1$

proof: 酉矩阵满足等式 $U^\dagger U = I$, 则

$$\begin{aligned}1 &= \det(U^\dagger U) = \det(U^\dagger)\det(U) = \det\overline{(U^T)}\det U \\ &= \overline{\det U}\det U = |\det U|^2\end{aligned}$$

则 $\det U = e^{i\phi}$

定义 5.4

*$U(m) := \{m$ 维内积空间 V 上酉算符$\} = \{m \times m$酉矩阵$\}$ 以复合映射 (或矩阵乘法) 为群乘法, 不难验证 $U(m)$ 是李群, 称为***酉群** *(或***幺正群***)(unitary group)*

例 5.1 U(1) 群 选择 1 维复矢量空间 $\mathbb{C}$ 作为 V 并按照下式定义内积构成内积空间:

$$(f, g) := \bar{F} g, \quad \forall f, g \in \mathbb{C}$$

定义线性算符

$$\hat{A} \in \mathbb{C}, \hat{A} f := A \cdot f \in \mathbb{C}, \quad \forall f \in \mathbb{C}$$

则易给出酉算符满足下式

$$1 = I = U^{\dagger}U = \overline{U^{T}}U = \bar{U}U = |U|^{2}$$

酉算符的集合是复平面的单位圆, 由此可见 U(1) 群的流形是一个圆周, 是紧致的非连通流形.

定义 5.5

复方阵 A 称为是**厄米** (*hermitian*) 的, 若 $A^{\dagger} = A$;A 被称为是**反厄米** (*anti-hermitian*) 的, 若 $A^{\dagger} = -A$. ♣

接下来我们来看看酉群的李代数,GL(m,ℂ) 群的李代数 $\mathscr{GL}(m,\mathbb{C})$ 同构于全体 $m \times m$ 复矩阵构成的李代数, 即

$$\mathscr{U}(m,\mathbb{C}) = \{m \times m\text{复矩阵}\}$$

定理 5.11

酉群 *U(m)* 的李代数

$$\mathscr{U}(m) = \{A \in \mathscr{GL}(m,\mathbb{C}) | A^{\dagger} = -A\} = \{m \times m\text{反厄米复矩阵}\}$$ ♡

proof: 与定理5.5证明类似, 要把 $Z^{T}(t), A^{T}$ 改为 $U^{\dagger}(t), A^{\dagger}$

定理 5.12

$$dimU(m) = dim\mathscr{U}(m) = m^{2}$$ ♡

proof: $A \in \mathscr{U}(m)$ 是有 m^{2} 个复数组成, 有 $2m^{2}$ 个变量, 反厄米要求, 提供了一组方程, 减少了变量的数量.

- 对于对角元来说, 要求复数的实部为 0, 虚部并无要求, 因此只有 m 个方程
- 对于非对角元而言, 实部要求是反称的, 虚部则是要求对称的, 有 $m^{2} - m$ 个方程.

一个方程减少一个变量, 最后我们有 m^{2} 个独立变量, 表述为上述定理.

例 5.2 $\mathscr{U}(1)$ 由例5.1得知李群 $U(1)$ 可以表示为 $U(1) = \{e^{-i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$, 可以看作是以 θ 为参数的单参子群, 可以求出一个李代数元, 作为基底, 由于李代数是一维的, 便可以得到 U(1) 的李代数.

$$A = \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} e^{-i\theta} = -i \in \mathscr{U}(1)$$

故而 $\mathscr{U}(1) = \{-i\alpha | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

下面我们回到李群,

定理 5.13

酉群 *U(m)* 是连续流形 ♡

proof: 只需证明 $\forall U \in U(m)$, ∃ 连续曲线 $\gamma(t)$ 满足 $\gamma(0) = I, \gamma(1) = U$.(1 可以是任意数, 这里取了 1) 由线性代数知, 任意酉矩阵可以酉变换为对角形, 且对角元模皆为 1.

笔记 *这里不证明了, 简单说一下理解, 酉矩阵的列向量 (或者行向量) 是正交的, 且每个向量的长度为 1. 即酉矩阵是正交的复数矩阵, 类似于实数矩阵中的正交矩阵, 但涉及复数元素. 天然的选择列向量作为基底便可以得到对角的且对角元模为 1 的矩阵, 作为 U, 而 U 的实质没有变只是换了基底.*

即 $\forall U \in U(m), \exists W \in U(m)$ 使得

$$WUW^{-1} = D = \begin{bmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\varphi_n} \end{bmatrix}$$

引入 $\Phi \equiv \begin{bmatrix} \varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\varphi_n \end{bmatrix}$ 则 $D = Exp(i\Phi)$, 证明比较简单, 把右面的式子泰勒展开, 写进一个矩阵的式子, 在对

对角元元素观察, 发现是 D. 由于上式, 则有

$$\begin{aligned} U &= W^{-1}DW \\ &= \mathrm{Exp}(iW^{-1}\Phi W) \end{aligned}$$

接下来只需要证明 U 是从恒等元连续变换而来即可. 下面给出证明：引入 $A = iW^{-1}\Phi W$

$$A^\dagger = \overline{A^T} = \overline{iW^T\Phi(W^{-1})^T} = -i\overline{W^T}\Phi\overline{(W^{-1})^T} = -iW^\dagger(\Phi W^{-1})^\dagger = -iW^{-1}\Phi W = -A$$

最后一步用了 $W^\dagger = W^{-1}$

这就意味着 A 是 U(m) 的李代数的李代数元, 那么由 A 生成的单参子群的 $\gamma(1) = \mathrm{Exp}(A)$, 命题得证.

笔记 这里我们证明了: 酉群的任一群元都属于某一单参子群, 同样适用于 *SO(m)*, 但并非所有的李群都有, 存在定理: 紧致的连通李群的指数映射是到上映射, 等价于任一群元属于某一单参子群.

引理 5.2

设 A 为任意 $m \times m$ 矩阵, 则

$$\det(ExpA) = e^{trA}$$

proof: 设 $F(t) \equiv \det(\mathrm{Exp}(tA))$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(t) &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} f(t+s) \quad \text{后面验证以下等号} = \left.\frac{\partial f(t+s)}{\partial(t+s)}\right|_{s=0} \cdot \frac{\partial(t+s)}{\partial s} = \frac{d}{dt}f(t) \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} [\det(\mathrm{Exp}(t+s)A)] \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} [\det(\mathrm{Exp}tA)\det(\mathrm{Exp}sA)] \\ &= [\det(\mathrm{Exp}tA)\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \det(\mathrm{Exp}sA)] \\ &= [\det(\mathrm{Exp}tA)]\mathrm{tr}A \quad \text{这一步后面证明} \\ &= f(t)\mathrm{tr}A \end{aligned}$$

我们构造一个微分方程:

$$\frac{d\ln f(t)}{dt} = \frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = \mathrm{tr}A$$

求解微分方程得到

$$f(t) = Ce^{(\mathrm{tr}A)t}$$

因为 $f(0) = \det I = 1$, 所以 $C = 1$. 当 $t = 1$ 时, 得到命题等式.

下面证明第五步:

设 X 为任意 $m \times m$ 矩阵,$X^i{}_j$ 是矩阵元,$\varepsilon_{i_1\cdots i_m}$ 代表 m 维 Levi-Civita 记号, 有行列式定义:

$$\det X = \varepsilon_{i_1\cdots i_m}X^{i_1}{}_1\cdots X^{i_m}{}_m$$

这里的定义与定义5.1等价, 为了不太陷入数学, 这里我们可以通过不同角度理解这两个定义都代表矩阵的行 (或列) 向量组成的体元的体积, 所以定义等价.

取 $X = \mathrm{Exp}(sA) = I + sA + \frac{1}{2!}s^2A^2 + \cdots$, 有 $X^i{}_j = \delta^i{}_j + sA^i{}_j + \frac{1}{2!}s^2(A^i{}_j)^2 + \cdots$, 故

$$X^i{}_j|_{s=0} = \delta^i{}_j,\ \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} X^i{}_j = A^i{}_j$$

我们对定义求导

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\det X &= \varepsilon_{i_1\cdots i_m}(\frac{dX^{i_1}{}_1}{ds}X^{i_2}{}_2\cdots X^{i_m}{}_m+\cdots+X^{i_1}{}_1X^{i_2}{}_2\cdots\frac{dX^{i_m}{}_m}{ds})|_{s=0}\\&=\varepsilon_{i_1\cdots i_m}(A^{i_1}{}_1\delta^{i_2}{}_2\cdots\delta^{i_m}{}_m+\cdots+\delta^{i_1}{}_1\delta^{i_2}{}_2\cdots A^{i_m}{}_m)\\&=(A^1{}_1+\cdots+A^m{}_m)\\&=\mathrm{tr}A\end{aligned}$$

U(m) 的子集 $SU(m)\equiv\{U\in U(m|\det U=1)\}$ 是 U(m) 的李子群, 称为**特殊酉群** (special unitary group), 同 U(m) 一样,SU(m) 也是紧致的连通李群.

定理 5.14

特殊酉群 *SU(m)* 的李代数

$$\mathscr{SU}(m)=\{m\times m\text{复矩阵}A|A^\dagger=-A,trA=0\}$$

♡

proof:

正向:

$$A\in\mathscr{SU}(m)\Rightarrow\mathrm{Exp}(tA)\subset SU(m)\Rightarrow\begin{cases}1.(Exp)(tA)\subset U(m)(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\mathrm{Exp}(tA)=A)\Rightarrow A\in\mathscr{U}(m)\Rightarrow A^\dagger=-A;\\2.e^{\mathrm{tr}(tA)}=\det\mathrm{Exp}(tA)=1\Rightarrow e^{\mathrm{tr}tA}=1\Rightarrow t(tr(A))=\mathrm{tr}(tA)=2\pi ki\\\quad\Rightarrow\text{等式成立的唯一条件}tr(A)=0.\end{cases}$$

反向:

$$\left.\begin{aligned}&A^\dagger=-A\Rightarrow A\in\mathscr{U}(m)\Rightarrow\mathrm{Exp(tA)}\subset U(m)\\&trA=0\to tr(tA)=0\Rightarrow\det(\mathrm{Exp}(tA))=e^0=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow Exp(tA)\subset SU(m),\text{A 是恒等元切矢, 所以 }A\subset SU(m)$$

定理5.14表明 U(m) 与 SU(m) 的位数不同.

定理 5.15

$$dimSU(m)=dim\mathscr{SU}(m)=m^2-1$$

♡

SU(m) 比 U(m) 多给了一个方程 $trA=0$, 所以可以得到上述定理.

5.5 E(m) 群 (欧氏群)

m 维欧式空间的等度规群称为**欧式群 (Euclidean group)**, 记作 E(m). 默认欧式空间具有最高对称性,

$$dimE(m)=m(m+1)/2$$

我是这么理解的度规在坐标语言下的分量可以看作是 $m\times m$ 矩阵, 在群上满足保度规条件

$$g_{ij}=\Lambda_i{}^m g_{mn}\Lambda^n{}_j$$

由于度规是对称的, 会给出 $m^2-\frac{1}{2}(m+1)m$ 个关于 Λ_{ab} 的方程. 作为群元, 可以给出 Λ 的维度是 $\frac{1}{2}(m+1)m$.

我们以 E(2) 为例, 说明 E(2) 是 T(2) 和 O(2) 的半直积群, 半直积群定义见1.9.2 维的欧式空间有 3 个独立的 killing 矢量场, 其上的等度规映射既有平移又有转动. 先看平移, 以 $\vec{v},\vec{a}$ 代表欧式空间的任意两点, 则映射 $\vec{v}\to\vec{a}$ 称为**平移 (translation)**, 记作 $T_{\vec{a}}$, 即:

$$T_{\vec{a}}\vec{v}:=\vec{v}+\vec{a}$$

取笛卡尔坐标系 x 轴沿着 $\vec{a}$, 则其 killing 场对应的积分曲线 (也是单参等度规群), 是平行于 x 轴的直线, 很明显 $T_{\vec{a}}$ 是属于该群, 因为这个的作用也是将元素沿 x 轴平移, 以复合映射定义群乘法, 有

$$T_{\vec{a}}\circ T_{\vec{b}}=T_{\vec{a}+\vec{b}}=T_{\vec{b}}\circ T_{\vec{a}}$$

则其是阿贝尔群.$\vec{a}$ 有两个分量, 所以 dimT(2) = 2.

再来看转动,killing 场 $\frac{\partial}{\partial\varphi} \equiv -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ 对应的单参等度规群的轨道是以原点为心的圆周, 映射 $Z(\alpha)$ 代表绕原点逆时针转 α 角, 也是该群的一元是, 等度规映射. 集合 $\{Z(\alpha)|0 \le \alpha < 2\pi\}$ 是李群 SO(2).

设 E 是 E(2) 的任一元素, 它把欧式空间的原点 $\vec{o}$ 映射为 $\vec{a}$, 即

$$E\vec{o} = \vec{a}$$

则有

$$T_{-\vec{a}}E\vec{o} = \vec{o}$$

所以 $T_{-\vec{a}}E$ 是保持原点不动的的等度规映射,E 是等度规的是因为欧式群的定义.

保持原点不动的 2 维保度规群很明显属于 O(2), 即 $T_{-\vec{a}}E \in O(2)$. 记 $Z = T_{-\vec{a}}E$, 则 $E = T_{\vec{a}}Z$. 可见 $\forall E \in E(2)\exists$ 存在唯一的 $T_{\vec{a}} \in T(2), Z \in O(2)$ 使 $E = T_{\vec{a}}Z$.

唯一性证明, 假设存在第二种组合记作 $T'_{\vec{a}}, Z'$, 满足 $E = T'_{\vec{a}}Z', \quad T'_{\vec{a}} \neq T_{\vec{a}}, \quad Z' \neq Z$, 则有

$$T'_{-\vec{a}}E\vec{o} = \vec{o} \Rightarrow T'_{-\vec{a}}\vec{a} = \vec{o} \Rightarrow T'_{-\vec{a}}T_{\vec{a}}\vec{o} = \vec{o}$$

则可见 $T_a = T'_a$ 与题设矛盾, 则唯一性成立.

说明 E 可以表示为有序对 $(T_{\vec{a}}, Z)$, 因而作为集合或拓扑空间 $E(2) = T(2) \times O(2)$. 因为群乘法定义为映射的复合, 作用体现为

$$(T_{\vec{a}}, Z)\vec{v} = T_{\vec{a}}Z\vec{v} = Z\vec{v} + \vec{a}$$

设 $T_{\vec{a}_1}, T_{\vec{a}_2} \in T(2), \quad Z_1, Z_2 \in O(2)$, 注意到

$$(T_{\vec{a}_1}, Z_1)(T_{\vec{a}_2}, Z_2)\vec{v} = (T_{\vec{a}_1}, Z_1)(Z_2\vec{v} + \vec{a}_2) = Z_1(Z_2\vec{v} + \vec{a}_2) + \vec{a}_1 = (T_{\vec{a}_1 + Z_1\vec{a}_2}, Z_1Z_2)$$

把 $(T_{\vec{a}}, Z)$ 简记为 $(\vec{a}, Z)$, 可以给出 E 的群乘法为

$$(\vec{a}_1, Z_1)(\vec{a}_2, Z_2) = (\vec{a}_1 + Z_1\vec{a}_2, Z_1Z_2)$$

与定义1.9可见 E(2) 是 T(2) 和 O(2) 的半直积群, 其中要定义 Z_1 作用在 $\vec{a}_2$ 上的作用, 群 A(T(2)) 要求与 Z 同态, 与 T 自同构, 群中的元素 Ψ_z 作用于 T(2) 为 $\Psi_{Z_1}\vec{a}_2 = T_{Z_1}\vec{a}_2$ 把等式右面简记为 $Z_1\vec{a}_2$. 于是

$$E(2) = T(2) \otimes_S O(2)$$

对于 E(3) 有同样的思路, 则有

$$E(3) = T(3) \otimes_S O(3)$$

5.6 Poincaré 群 (庞加莱群)

4 维闵式时空等度规群称为 **Poincaré** 群, 简记作 P. 沿着上一节的讨论, 可见 Poincaré 群是 4 维平移群 T(4) 和 6 维洛伦兹群 $L \equiv SO(1,3)$ 的半直积群.

$$P = T(4) \otimes_S L$$

具体而言, 设 $T_{a_1}, T_{a_2} \in T(4), \Lambda_1, \Lambda_2 \in L$, 则有序对的群乘法表现为

$$(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2)$$

如果要求为 $L_+^\uparrow$ 得到 P 的子群称为**固有保时向 Poincaré 群**, 记作 P_P

我们在这里画一个总结性的表格

符号	李群名称	连通性	矩阵	维数	李代数的矩阵
GL(m)	一般线性群 (实)	不连通	$m \times m$ 可逆实矩阵	m^2	$m \times m$ 任意实矩阵
GL(m,ℂ)	一般线性群 (复)	连通	$m \times m$ 可逆复矩阵	$2m^2$	$m \times m$ 任意复矩阵
SL(m)	特殊线性群 (实)	连通	行列式为 1 的 $m \times m$ 可逆实矩阵	$m^2 - 1$	$m \times m$ 无迹实矩阵
SL(m,ℂ)	特殊线性群 (复)	连通	行列式为 1 的 $m \times m$ 可逆复矩阵	$2m^2 - 2$	$m \times m$ 无迹复矩阵
O(m)	正交群	不连通	正交实矩阵	$\frac{m(m-1)}{2}$	$m \times m$ 反对称实矩阵
SO(m)	转动群 (特殊正交群)	连通	行列式为 1 的正交实矩阵	$\frac{m(m-1)}{2}$	$m \times m$ 反对称实矩阵
O(1,3)	洛伦兹群	不连通	4×4 实矩阵 Λ, 满足 $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$	6	4×4 实矩阵 A, 满足 $A^T = -\eta A \eta$
$L_+^\uparrow$	固有洛伦兹群	连通	4×4 实矩阵满足 $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$,$\det \Lambda = 1, {\Lambda^0}_0 \geq 1$	6	4×4 实矩阵 A, 满足 $A^T = -\eta A \eta$
U(m)	酉群	连通	$m \times m$ 酉矩阵	m^2	$m \times m$ 反厄米复矩阵
SU(m)	特殊酉群	连通	行列式为 1 的 $m \times m$ 酉矩阵	$m^2 - 1$	$m \times m$ 反厄米无迹复矩阵

表 5.1: 常用李群的矩阵

第六章 李代数的结构常数

$\mathscr{V}$ 是李代数, 则李括号 $[,]:\mathscr{V}\times\mathscr{V}\xrightarrow{\text{双线}}\mathscr{V}$ 是双线性映射. 明显是 (1,2) 型张量, 记作 $C^c{}_{ab}$, 便有

定义 6.1

$$[v,u]^c = C^c{}_{ab}v^a u^b, \quad \forall v^a, u^b \in \mathscr{V}$$

$C^c{}_{ab}$ 称为李代数 $\mathscr{V}$ 的**结构 (常) 张量** ***(structure constant tensor)***

♣

笔记 阿贝尔李代数的结构张量为 *0*, 连通李群是阿贝尔群当且仅当其李代数是阿贝尔代数

定理 6.1

1. $C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba}$
2. $C^c{}_{a[b}C^{|a|}{}_{de]} = 0$

♡

proof:

1. $C^c{}_{ab}v^a u^b = [v,u]^c = -[u,v]^c = -C^c{}_{ab}u^a v^b = -C^c{}_{ba}v^a u^b \Rightarrow C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba}$,$v^a, u^b$ 是任意的.
2. 根据定义3.1

$$\begin{aligned}
&[u,[v,w]]^e + [v,[w,u]]^e + [w,[u,v]]^e = 0\\
&C^e{}_{ad}u^a[v,w]^d + C^e{}_{bd}v^b[w,u]^d + C^e{}_{cd}w^c[u,v]^d = 0\\
&C^e{}_{ad}u^a C^d{}_{bc}v^b w^c + C^e{}_{bd}v^b C^d{}_{ca}w^c u^a + C^e{}_{cd}w^c C^d{}_{ab}u^a v^b = 0\\
&C^e{}_{ad}C^d{}_{bc}u^a v^b w^c + C^e{}_{bd}C^d{}_{ca}v^b w^c u^a + C^e{}_{cd}C^d{}_{ab}w^c u^a v^b = 0\\
&C^e{}_{ad}C^d{}_{bc} + C^e{}_{bd}C^d{}_{ca} + C^e{}_{cd}C^d{}_{ab} = 0 \Rightarrow\\
&C^e{}_{da}C^d{}_{bc} + C^e{}_{db}C^d{}_{ca} + C^e{}_{dc}C^d{}_{ab} - C^e{}_{da}C^d{}_{cb} - C^e{}_{db}C^d{}_{ac} - C^e{}_{dc}C^d{}_{ba} = 0 \Rightarrow\\
&C^e{}_{d[a}C^{|d|}{}_{bc]} = 3! \times 0 = 0
\end{aligned}$$

修改一下指标可以得到命题等式

定义 6.2

设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的任一基底, 则

$$[e_\mu, e_\nu]^c = C^c{}_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b = C^\sigma{}_{\mu\nu}(e_\sigma)^c$$

上式的 $C^\sigma{}_{\mu\nu}$ 称为李代数 $\mathscr{V}$ 的**结构常数** ***(structure constants)***, 结构常数依赖坐标基底.

♣

例 6.1 李群 $\mathbb{R}^2$ 的李代数的结构张量

把 $\mathbb{R}^2$ 的每点看作从 (0,0) 点出发的一个矢量, 定义群乘法为矢量加法, 容易验证其是李群, 恒等元 e 很明显是 (0,0) 点, 易见是阿贝尔群, 则有

1. 过 e 的每一直线是一单参子群;
2. $\mathbb{R}^2$ 上任一左不变矢量场 $\bar{A}$ 满足 $\partial_a \bar{A}^b = 0$

proof:

1. 由于过恒等元, 可以给一个直线定义 $\gamma(t) = (at, bt)$ 则 $\gamma(t)\gamma(s) = (at, bt)(as, bs) = (a(t+s), b(t+s)) = \gamma(t+s)$,
2. 如果是单参子群, 可以给出其积分曲线是直线

$$\frac{d}{dt}\gamma t = A$$

A 是常矢量, 对于每一个二维的基矢分量方向上, 是一个 $y = at$ 形式的参数方程, 这是直线的参数方程; 故

而这两个给出的是充要条件. 总结就是 $\partial_a \bar{A}^b = 0$

由 2 知左不变矢量场的对易子为 0:$[\bar{A}, \bar{B}] = 0$ 见定理 3-1-9, 结构常数必为 0. 类似地可定义李群 $\mathbb{R}^n$, 也是阿贝尔群, 其李代数也是阿贝尔李代数.

例 6.2 李代数 $\mathscr{SO}(3)$ 的结构张量

$$\dim \mathscr{SO}(3) = \frac{3(3-1)}{2} = 3$$

我们知道 SO(3) 群是空间旋转群, 为了求 $\mathscr{SO}(3)$, 可以借用 3 个典型的单参子群, 分别是绕 x,y,z 转动, 可以给出它们对于的李代数

$$Z_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, Z_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}, Z_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求其在恒等元的切矢

$$A_1 = \left.\frac{d}{d\alpha}\right|_\alpha Z_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \left.\frac{d}{d\alpha}\right|_\alpha Z_y(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \left.\frac{d}{d\alpha}\right|_\alpha Z_z(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

易看出三者线性独立, 可以 3 者任意两两之间求出李括号为, 这里用到定理5.3

$$[A_1, A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_3$$

$$[A_2, A_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A_1$$

$$[A_1, A_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -A_2$$

为保证指标平衡, 可以将结果总结为

$$[A_i, A_j] = \varepsilon_{ij}{}^k A_k = \varepsilon^k{}_{ij} A_k$$

可见在这样的基底下 $\mathscr{SO}(3)$ 的结构常数是 $\varepsilon^k{}_{ij}$.

例 6.3 洛伦兹李代数 $\mathscr{O}(1,3)$ 的结构张量

洛伦兹群 O(1,3) 是 6 维的, 若想求其结构张量, 可以借常见的单参子群对应的矩阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\lambda & -\operatorname{sh}\lambda & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\lambda & \operatorname{ch}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\lambda & 0 & -\operatorname{sh}\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\lambda & 0 & \operatorname{ch}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \operatorname{ch}\lambda & 0 & 0 & -\operatorname{sh}\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sh}\lambda & 0 & 0 & \operatorname{ch}\lambda \end{bmatrix}$$

笔记 注意这里代表的是矢量的旋转而不是坐标基矢的转动. 我们知道对于洛伦兹群的坐标基矢有坐标变换 $x'^\mu =$

$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ 假设有一矢量 A^a, 经过旋转到达 A'^a, 矢量旋转与其旋转满足相同的定律, 则可以得到

$$A'^a(e^{\mu})_a = \Lambda^a{}_b A^b(e^{\mu})_a = A^b(\Lambda^{-1})_b{}^a(e^{\mu})_a = A^b(e''^{\mu})^b$$

$'$ 表示逆时针旋转,$''$ 表示顺时针旋转从上面等式我们可以看出坐标变换对于矢量分量和基矢的作用是相反的.

具体到这里, 如果我们想要反应矢量在同一坐标系下的旋转或增速变换下, 应该是坐标变换矩阵的逆矩阵或转置.

可以求出对应的李代数元:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} r_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} r_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求对应的结构常数

$$\begin{aligned}
&[r_1, r_2] = r_3, \quad [r_2, r_3] = r_1, \quad [r_1, r_3] = -r_2; \\
&[b_1, b_2] = -r_3, \quad [b_2, b_3] = -r_1, \quad [b_1, b_3] = r_2; \\
&[b_1, r_1] = 0, \quad [b_2, r_2] = 0, \quad [b_3, r_3] = 0; \\
&[b_1, r_2] = b_3, \quad [b_2, r_3] = b_1, \quad [b_3, r_1] = b_2; \\
&[b_1, r_3] = -b_2, \quad [b_2, r_1] = -b_3, \quad [b_3, r_2] = -b_1;
\end{aligned}$$

总结为

$$\begin{aligned}
&[r_i, r_j] = \varepsilon_{ij}{}^k r_k; \\
&[b_i, b_j] = -\varepsilon_{ij}{}^k r_k; \\
&[b_i, r_j] = \varepsilon_{ij}{}^k b_k;
\end{aligned}$$

李代数 $\mathscr{O}(1,3)$ 在基底 $\{r_1, r_2, r_3, b_1, b_2, b_3\}$ 下的结构常数可从上式读出. 引入符号 $(l_{\mu\nu}\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ 且 $l_{\mu\nu}$ 反称), 其含义为

$$l_{01} \equiv b_1, l_{02} \equiv b_2, l_{03} \equiv b_3, l_{12} \equiv r_3, l_{23} \equiv r_1, l_{31} \equiv r_2$$

则不难验证式几个李括号可统一表为下式

$$[l_{\mu\nu}, l_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}l_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}l_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}l_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}l_{\mu\sigma}$$

每个 $l_{\mu\nu}$ 可看作一个反称实矩阵, 矩阵元可表为

$$(l_{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta} = -\delta^{\alpha}{}_{\mu}\eta_{\beta\nu} + \delta^{\alpha}{}_{\nu}\eta_{\beta\mu}$$

笔记 $\eta_{\mu\nu}$ 是 $diag(-1,1,1,1)$ 的洛伦兹度规, 如果是另一种 $diag(+1,-1,-1,-1)$ 的话, 给统一式子加一个负号就行. 不是, 这真是人能想出来的东西吗? 太巧妙了吧, 想出这个的人真牛逼!!!

例 6.4 特殊酉群 SU(2) 的李代数 $\mathscr{SU}(2)$ 的结构张量.

$\dim \mathscr{SU}(2) = 3$,SU(2) 要求 $A^{\dagger} = -A, \quad \mathrm{tr}(A) = 0$. 我们有熟知的泡利矩阵

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

但是泡利矩阵是厄米的, 只需要乘以 i 就是反厄米的, 为了得到结构常数, 我们先见之明的给出基矢

$$E_i = -\frac{i}{2}\tau_i$$

则不难验证

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E, 1] = E_2$$

即

$$[E_i, E_j] = \varepsilon^k{}_{ij} E_k$$

虽然是复矩阵, 但是只有实数的线性组合才能确保构成的李代数元属于 $\mathscr{SU}(2)$

这个结构常数明显和 $\mathscr{SO}(3)$ 在上面给出的基底下的的结构常数相同. 定义线性映射 $\psi : \mathscr{SU}(2) \to \mathscr{SO}(3)$ 满足 $\psi(E_i) = A_i$ 可见 ψ 保李括号, 根据定义3.2 可以说 $\mathscr{SU}(2), \mathscr{SO}(3)$ 李代数同态, 李代数同态并不代表着李群同构, 相反李群同构对应于李代数同构. 这与李群和李代数的关系有关, 李群相同意味着恒等元及其切空间相同, 但是切空间相同并不一定说明李群相同, 在局域内可以说相同, 整体则不一定.

接下来我们讨论一下 SU(2) 群; 从 U(2) 说起,$U \in U(2), \quad U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 满足 $U^\dagger U = I$ 则 $U^\dagger = U^{-1}$ 即 $\overline{U^T} = U^{-1}$ 如果求出上式, 则可以给出

$$\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

其中 $\Delta = ad - bc = \det U = e^{i\phi}$, 对应元素相等给出

$$\overline{a} = \frac{1}{\Delta} d$$
$$\overline{c} = -\frac{1}{\Delta} b$$
$$\overline{b} = -\frac{1}{\Delta} c$$
$$\overline{d} = \frac{1}{\Delta} a$$

只有两个式子是独立的, 这里证明一个另一个完全相似:

$$\overline{a} = \frac{1}{\Delta} d \Longrightarrow a = \overline{\frac{1}{\Delta}} \overline{d} = \overline{\frac{1}{e^{i\phi}}} \overline{d} = \overline{e^{-i\phi}} \overline{d} = e^{i\phi} \overline{d} = \Delta \overline{d}$$

我们只要前两个等式, 实部虚部各给一个方程, 就是 4 个方程, 因为有 8 个变量, 最后 U(2) 维度是 4. 而 SU(2) 要求 $\det U = 1 = \Delta$, 代入上面等式, 得到 $c = -\overline{b}, \quad d = \overline{a}$, 可以给出 U 的矩阵形式

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$$

对于 SU(2) 有 $\det U = 1$ 即

$$a\overline{a} + b\overline{b} = 1 \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

设

$$a = a_1 + ia_2. \quad b = b_1 + ib_2$$

结合上面两个式子有

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 + (b_1)^2 + (b_2)^2 = 1$$

这明显是一个球面方程, 也就是说是 $\mathbb{R}^4$ 中的 3 维球面. 我们无法想象四维空间的三维面, 这里简单描述一下, 大概是沿着第四个轴会出现一个半径先增大后减小的一个球体, 每一个球体只取表面, 大概就是这么一个结构, 在第四个轴上的切面是一个三维球壳, 每一个点在第四个方向相连, 最后是一个连通的流形. 我们压缩一个维度, 用图直观说明一下, 如图6.1所示, 我们以三维球面 S^3 代表 SU(2) 的流形, 恒等元在北极点, 用一个平面切出的圆环实际

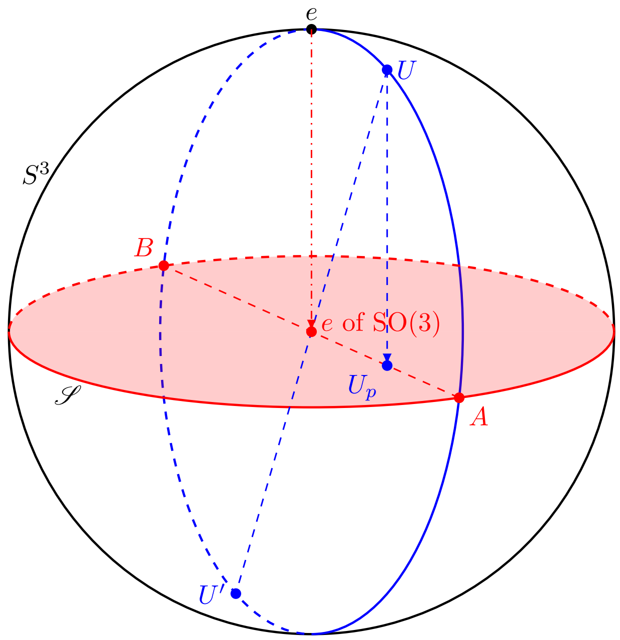

图 6.1: SU(2) 的流形

上是一个三维球壳; 接下来我们直观的说明 $\pi : SU(2) \to SO(3)$ 是一个 2 对 1 的一个映射; 首先我们把目光聚焦在赤道面上也就是红色面, 其中 SU(2) 在这里的应该是最外面的红线 $\mathscr{S}$, 加上内部的阴影和 A、B 的对径认同, 则整个赤道面可以看作是 SO(3) 的流形, 这一点不难想到, 我们看恒等元 e 投影到赤道面上依旧是恒等元, 同理北半球面如图所示与赤道面一一对应, 而且是连续的映射, 正逆皆如此, 结果就是北半球面加上赤道线与赤道面同胚, 就是流形之间的同胚. 则与 U 对应的点 U_p 满足 $U_p \in SO(3)$, 图中 U 和 U' 是对径的两点, 定义映射

$$\pi : SU(2) \mapsto SO(3)\text{满足}\pi(U') = \pi(U) = U_p$$

我们说 SU(2) 和 SO(3) 满足二对一的映射,U_p 是两者一一对应的那个点.

我们先说明 SO(3) 的非单连通性, 考虑对径直线, 由于对径认同, 可以认为这是闭合的, 但是不能通过连续变形为一点, 所以不是单连通流形, 就就像图中的 $B \to e \to A$.

定义 6.3 (同伦 homotopic)

*设 M 为连通流形,M 中两条连续闭合曲线 C_1, C_2 称为彼此***同伦 (homotopic)** *的, 若 C_1 可以连续变形为 C_2.* ♣

M 中所有连续的闭曲线可以分为若干同伦类. 单连通流形只有一个同伦类.

最后, 我们定量给出映射 $\pi : SU(2) \to SO(3)$ 并证明 2 对 1 的同态性. 前面我们给出了 $\mathscr{SU}(2)$ 的基底 $\{E_i = -i\tau_i/2\}$ 可对每一 $\vec{v} \equiv (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ 构造一个

$$\vec{v} \cdot \vec{E} = v^i E_i \in \mathscr{SU}(2)$$

笔记 这里有一个问题, 可以拓宽一下想法, 就是前文的矩阵说 2×2 矩阵, 而 v^i 理论上应该是 3×1 的列向量, 带给我的第一感觉是存在问题, 不满足矩阵乘法, 实际上这里 $v^i \in \mathbb{R}$ 上面的意思是数乘.

给一个 $U \in SU(2)$, 令 $A \equiv U(\vec{v}\vec{E})U^{-1}$, 则

$$A^\dagger = \overline{(U(\vec{v}\vec{E})U^{-1})^T} = U(\overline{v\vec{v}\vec{E}^T})U^{-1} = U(-\vec{v}\vec{E})U^{-1} = -A$$

最后一步要对每一个基矢验证, 结果就是需要提出一个负号, 其次我们来求迹, 首先给出一个引理

引理 6.1

$$tr(AB)=tr(BA),\quad A,B\text{都是矩阵}$$

♡

proof: 其实证明不难, 用指标就可以看出是相同的数求和

$$tr(AB)=tr(A_{ij}B^{jk})=A_{ij}B^{ji}=B^{ji}A_{ij}=tr(B^{ki}A_{ij})=trBA$$

然后我们来求迹

$$tr(A)=tr(U(\vec{v}\vec{E})U^{-1})=tr(\vec{v}\vec{E}U^{-1}U)=tr(\vec{v}\vec{E})=0$$

最后一步是由基矢的特点给出的. 所以 $A\in\mathscr{SU}(2)$

这样便存在唯一的 $v'^i\in\mathbb{R},\quad i=1,2,3$ 满足

$$U(\vec{v}\vec{E})U^{-1}=\vec{v}'\cdots\vec{E}$$

表明 U 诱导出一个映射 $Z:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 满足 $Z(\vec{v})\equiv\vec{v}'$

先来证明一个有用的等式 $\det(\vec{v}\cdot\vec{E})=\frac{|\vec{v}|^2}{4}$

$$\det\vec{v}\cdot\vec{E}=\det v^iE_i=\det v^iE_i=\det\begin{bmatrix}-\frac{i}{2}(v_3) & -\frac{i}{2}(v_1-iv_2)\\ -\frac{i}{2}(v_1+iv_2) & -\frac{i}{2}(-v_3)\end{bmatrix}=\frac{(v^1)^2+(v_2)^2+v_3^2}{4}=\frac{v^2}{4}$$

所以有

$$|v'|^2=4\det(\vec{v}'\cdot\vec{E})=4\det U(\vec{v}\vec{E})U^{-1}=4\det U\det(\vec{v}\vec{E})\det U^{-1}=|v|^2$$

也就是说映射 $Z:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 就是一个保长的一个映射, 所以 $Z\in O(3)$

如果 $\det Z>0$ 那么它就是 SO(3) 的群元. 这里先说明一下, 行列式的定义我们给出过详见5.1, 本质上是一个变换系数, 如果是负的话, 会把右手系变成左手系; 正的话则相反. 先来看一个等式

$$[\vec{u}\cdot\vec{E},\vec{v}\cdot\vec{E}]=u^iv^j\,[E_i,E_j]=u^iv^j\varepsilon_{ij}^kE_k=(\vec{u}\times\vec{v})^kE_k=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{E},$$

故

$$\begin{aligned}Z(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{E}&=U[(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{E}]U^{-1}=U[\vec{u}\cdot\vec{E},\vec{v}\cdot\vec{E}]U^{-1}=\left[U(\vec{u}\cdot\vec{E})U^{-1},U(\vec{v}\cdot\vec{E})U^{-1}\right]\\&=[(Z\vec{u})\cdot\vec{E},(Z\vec{v})\cdot\vec{E}]=[(Z\vec{u})\times(Z\vec{v})]\cdot\vec{E},\end{aligned}$$

这里是正的变换, 即 $\det Z>0$; 给出结论, 存在映射 $\pi:SU(2)\to SO(3)$ 满足 $\pi(U)=Z$

我们从直观的看, 是一个 2 对 1 的一个映射, 而且 $U'=-U$ 整理一下思路, 就是要证明 $\forall U,U'\in SU(2)$ 有

$$\pi(U')=\pi(U)\Leftrightarrow U'=\pm U$$

令 $Z\equiv\pi(U),Z'\equiv\pi(U')$ 则有

$$(Z\vec{v})\cdot\vec{E}=U(\vec{v}\cdot\vec{E})U^{-1},\quad(Z'\vec{v})\cdot\vec{E}=U'(\vec{v}\cdot\vec{E})U'^{-1},\quad\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^3$$

若 $U'=\pm U$, 则上式导致

$$(Z'\vec{v})\cdot\vec{E}=(\pm U)(\vec{v}\cdot\vec{E})\left(\pm U^{-1}\right)=U(\vec{v}\cdot\vec{E})U^{-1}=(Z\vec{v})\cdot\vec{E}$$

故 $Z'\vec{v}=Z\vec{v},\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, 因而 $Z'=Z$, 即 $\pi(U')=\pi(U)$. 反之, 若 $\pi(U')=\pi(U)$, 则有 $U'(\vec{v}\cdot\vec{E})U'^{-1}=U(\vec{v}\cdot\vec{E})U^{-1}$, 所以

$$U^{-1}U'(\vec{v}\cdot\vec{E})=(\vec{v}\cdot\vec{E})U^{-1}U',\quad\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^3$$

作为 2×2 复矩阵, $U^{-1}U'$ 总可表为 I,E_1,E_2,E_3 的 (实的) 线性组合, 即 $\exists\alpha^0,\alpha^i\in\mathbb{R}U^{-1}U'=\alpha^0I+\alpha^iE_i$. 取 $\vec{v}$ 使 $\vec{v}\cdot\vec{E}=E_1$, 代入上式后不难得到 $\alpha^2=\alpha^3=0$(由李括号可知这两个左右交换的积不同, 只能限定系数是 0), 同法可证 $\alpha^3=\alpha^1=0$, 故 $U^{-1}U'=\alpha^0I$,

因而 $\alpha^0=\det\left(U^{-1}U'\right),\left|\alpha^0\right|=1,\alpha^0=\pm1$. 于是

$$U^{-1}U'=\pm I,U'=\pm U$$

最后证明 π 为同态映射. 改写式子为 $[\pi(U)\vec{v}]\cdot\vec{E}=U(\vec{v}\cdot\vec{E})U^{-1}$, 则 $\forall U'\in\mathrm{SU}(2)$ 有

$$\begin{aligned}\left[\pi\left(U'\right)\pi(U)\vec{v}\right]\cdot\vec{E}&=U'[(\pi(U)\vec{v})\cdot\vec{E}]U'^{-1}=U'\left[U(\vec{v}\cdot\vec{E})U^{-1}\right]U'^{-1}\\&=\left(U'U\right)\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)\left(U'U\right)^{-1}=\left[\pi\left(U'U\right)\vec{v}\right]\cdot\vec{E},\end{aligned}$$

故 $\pi(U')\pi(U)=\pi(U'U)\quad\forall U',U\in SU(2)$, 所以 $\pi:SU(2)\to SO(3)$ 是同态, 保护的群乘法是李群乘法, 所以是李群同态.

第七章 李变换群和 killing 矢量场

把流形 M 上的单参微分同胚群 $\phi:\mathbb{R}\times M\to M$ 中的

定义 7.1

设 G 是李群,M 是流形.C^∞ 映射 $\sigma:G\times M\to M$ 称为 M 上的一个**李变换群 (Lie group of transformation)**, 若

1. $\forall g\in G,\sigma_g:M\to M$ 是微分同胚;
2. $\sigma_{gh}=\sigma_g\circ\sigma_h,\forall g,h\in G$

♣

以复合映射定义群乘法, 容易验证满足群乘法; 恒等元是 σ_e; 还有就是 $(\sigma_g)^{-1}=\sigma_{-g},\forall g\in G$. 同时还会有以下等式

$$\sigma_p(g)=\sigma(g,p)=\sigma_g(p)\quad\forall g\in G,p\in M$$

李群按定义是一个高度抽象的概念, 而李变换群就比较具体了, 它的群元 σ_g 是流形 M 上的点变换 (微分同胚), 例如抽象的 SO(3) 可以借用一个 2 维球面 S^2 想象变得具体.

定义 7.2

从李群 $G=\{g\}$ 到李变换群 $\{\sigma_g:M\to M|g\in G\}$ 的同态映射 $G\to\{\sigma_g\}$ 称为 G 的一个**实现 (realization)**,M 称为**实现空间**. 若此同态为同构, 则称为 **忠实 (faith) 表现**

♣

笔记 左不变映射 L_g 根据上面定义可以看作是忠实实现.

定义 7.3

李群 G 在流形 M 上的一个实现 $G\to\{\sigma_g\}$ 称为 G 的一个**表示 (representation)**, 若 M 是矢量空间且 $\sigma_g:M\to M(\forall g\in G)$ 是线性变换. 这时称为 M 为**表示空间**. 同时把 $\{\sigma_g\}$ 称为 G 的表示. 若忠实实现是表示, 则称为**忠实表示**.

♣

设 $\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow G$ 是 G 的、的与 $A\in V_e$ 对应的单参子群, 则 $\gamma(t)$ 是 G 上的曲线. 把群 $\{\sigma_g\in|g\in G\}$ 中 G 的取值范围限制在 $\gamma(t)$ 上, 便得到子集 $\{\sigma_{\gamma(t)}|t\in\mathbb{R}\}$, 其中每个 $\sigma_{\gamma(t)}:M\to M$ 都是微分同胚, 而且满足

$$\sigma_{\gamma(t)}\circ\sigma_{\gamma(s)}=\sigma_{\gamma(t)\gamma(s)}=\sigma_{\gamma(t+s)}$$

可见 G 的每一个单参子群决定 M 上的一个单参微分同胚群. 我们想找出与之对应的 C^∞ 矢量场 $\bar{\xi}$.

因为 $\bar{\xi}$ 的积分曲线与单参微分同胚群 $\{\sigma_{\gamma(t)}|t\in\mathbb{R}\}$ 的轨道重合, 所以可以得到在 p 点的切矢为 $\bar{\xi}_p,\quad\forall p\in M$. 群 $\{\sigma_{\gamma(t)}|t\in\mathbb{R}\}$ 过 p 点的集合是 $\{\sigma_{\gamma_t}(p)|t\in\mathbb{R}\}$ 则有

$$\sigma_{\gamma(t)}(p)=\sigma(\gamma(t),p)=\sigma_p(\gamma(t))$$

于是有

$$\bar{\xi}_p=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\sigma_p(\gamma(t))=\sigma_{p*}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma(t)=\sigma_{p*}A\tag{7.1}$$

可见, 给定李变换群 $\sigma:G\times M\to M$,G 的李代数 V_e 的每一个元素 A 会对应于 M 上的光滑矢量场 (即 C^∞ 矢量场), 也就是说存在映射 $\chi:V_e\to\{\bar{\xi}\}$.

我们先来看一类特殊情况：M 是带度规 g_{ab} 的流形,G 是 (M,g_{ab}) 的等度规群, 李变换群 σ 的每一群元 $\sigma_g:M\to M$ 都是等度规映射. 这时 G 的每一个单参子群 $\gamma(t)$ 产生的单参微分微分同胚群 $\{\sigma_{\gamma(t)}|t\in\mathbb{R}\}$ 会强化为单参等度规群, 其轨道切矢上的 $\bar{\xi}$ 就是 (M,g_{ab}) 的 killing 矢量场, 引入 $\mathscr{K}$ 代表 M 上的全部 Killing 矢量场, 则结论就是

$$\{\bar{\xi}\}\subset\mathscr{K}$$

故 χ 可以看作映射 $V_e \to \mathscr{K}$ 上的线性映射.

引理 7.1

Killing 矢量场的对易子依旧是 *killing* 的.

proof: 见第 4 章习题 13.

那么我们完全可以以对易子作为李括号, 则 $\mathscr{K}$ 有李代数且有定理.

定理 7.1

映射 $\chi : V_e \to \mathscr{K}$ 保李括号的程度满足式子

$$\chi([A,B]) = -[\chi(A),\chi(B)] \quad \forall A,B \in V_e$$

这里书上没有证明, 当结论记住吧. 定义映射 $\psi(A) = -\chi(A)$, 则 ψ 保李括号, 即

$$\psi([A,B]) = [\psi(A),\psi(B)], \quad \forall A,B \in V_e$$

那么 ψ 被称为李代数同态, 因为每个完备的 killing 矢量场都能产生一个单参等度规群, 故二者同维, 则 ψ 是同构, 而不完备的矢量场由于总有取值取不到, 也就限制住李群只有恒等元, 为 0 维.

定理 7.2

(M,g_{ab}) 的等度规群的李代数 V_e 同构于其上的全体 *killing* 场的集合 $\mathscr{K}$ 的李子代数; 当每一 *killing* 场都完备时 $V_e = \mathscr{K}$ (李代数同构)

有了上面定理, 我们可以借用 killing 矢量场的来计算群的结构常数, 我们来看几个例子.

例 7.1 3 维欧式空间 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 中的二维球面 (S^2, h_{ab})

这里我们要计算群的结构常数, 给定的二维球面是 S^2 是是一个给定度规的流形, 对其进行变换的有意义的变换应该是要求保度规的, 也就是 O 群,S^2 是嵌入到三维空间的二维流形, 借用坐标表示也就是存在 3 个参数所以是 O(3)群, 我们讨论的是 killing 矢量场, 如果要求存在矢量变换要有连通性, 对于包含恒等元的最适合的便是 SO(3) 群.SO(3) 的维度这样计算

$$dim SO(3) = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3$$

也就是说 SO(3) 的变换会给出 3 个独立的 killing 矢量场.

这里我们还是给出如何求一个流形的 killing 矢量场, 根据定理 4-3-1, 详见 P109. 给出 killing 矢量场满足矢量方程.

$$\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0$$

首先我们需要给出 S^2 的度规, 以及与其适配的导数算符. 我们知道二维球面的线元满足

$$ds^2 = d^2\theta + \sin^2\theta d^2\varphi$$

这里 θ 为与 z 轴夹角,φ 为与 x 轴夹角. 所以与之适配的度规便给出了来, 这里以矩阵的形式表示为

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

不难给出

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2}\theta \end{bmatrix}$$

还需要计算克氏符, 因为这里不是欧式空间, 克氏符的计算公式如下所示

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho})$$

这里 $g_{ab,c}$ 表示 $\partial_c g_{ab}$. 把度规代入可以得到不同的分量, 这里只计算一个, 剩余直接给出结果.

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1{}_{22} &= \frac{1}{2} g^{1\rho}(\partial_2 g_{\rho 2} + \partial_2 g_{2\rho} - \partial_\rho g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\theta \sin^2\theta \\
&= -\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

我们给出所有结果

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1{}_{11} &= 0 \\
\Gamma^1{}_{12} &= 0 \\
\Gamma^1{}_{21} &= 0 \\
\Gamma^1{}_{22} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^2{}_{11} &= 0 \\
\Gamma^2{}_{12} &= \cot\theta \\
\Gamma^2{}_{21} &= \cot\theta \\
\Gamma^2{}_{22} &= 0
\end{aligned}
$$

我们知道

$$
\nabla_a \xi_b = \partial_a \xi_b - \Gamma^c{}_{ab}\xi_c
$$

这里应该给出 3 个方程

$$
\begin{aligned}
\nabla_{(1}\xi_{1)} = 0 &\Rightarrow \partial_{(1}\xi_{1)} - \Gamma^c{}_{11}\xi_c = 0 \\
\nabla_{(1}\xi_{2)} = 0 &\Rightarrow \partial_{(1}\xi_{2)} - \Gamma^c{}_{12}\xi_c = 0 \\
\nabla_{(2}\xi_{2)} = 0 &\Rightarrow \partial_{(2}\xi_{2)} - \Gamma^c{}_{22}\xi_c = 0
\end{aligned}
$$

最后给出方程组

$$
\begin{aligned}
&\partial_{(1}\xi_{1)} = 0 \\
&\partial_{(1}\xi_{2)} - \cot\theta\xi_2 = 0 \\
&\partial_{(2}\xi_{2)} + \sin\theta\cos\theta\xi_1 = 0
\end{aligned}
$$

接下来我们计算求解

$$
\partial_1\xi_1 = 0 \tag{7.2}
$$

$$
\partial_1\xi_2 + \partial_2\xi_1 - 2\cot\theta\xi_2 = 0 \tag{7.3}
$$

$$
\partial_2\xi_2 + \sin\theta\cos\theta\xi_1 = 0 \tag{7.4}
$$

2 式对 φ 求偏导, 同时把 1 和 3 式代入得到

$$
\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi}\xi_1 + \xi_1 = 0
$$

可以得到

$$
\xi_1 = A\cos\varphi + B\sin\varphi
$$

把上式代入式 3, 可得

$$\xi_2 = -A\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + B\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + C(\theta)$$

再度代回式 2, 可以得到

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta} - 2\cot\theta C(\theta) = 0$$

结果是

$$C(\theta) = C\sin^2\theta$$

笔记 *如果有不会解得微分方程, 可以借助 mathmatica 等工具求解, 这里是使用的是分量变量法解得的.*

到目前为止, 汇总结果

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos\varphi + B\sin\varphi\\ \xi_2 &= -A\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + B\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + C\sin^2\theta\end{aligned}$$

笔记 *这里需要着重说明一下上面两个式子的意义, 首先 ξ_a 是二维球面的矢量场, 取值为 1,2 是我们在选定好坐标系后给出的沿坐标的分量, 也就是说上面这两个式子就是二维球面在球坐标系下的 θ,φ 两个方向的分量, 而我们前面知道存在 3 个独立的 killing 矢量场, 我们只需要凑出 3 个矢量作为基矢即可.*

不妨令 A,B,C 轮流取 1, 其余取 0 给出 3 个对偶矢量来. 然后使用度规给出矢量场

$$\begin{aligned}&A=1,B=C=0\to\xi^1=g^{11}\xi_1=\cos\varphi,\quad \xi^2=g^{22}\xi_2=-\sin^{-2}\theta\sin\theta\cos\theta\sin\varphi=-\cot\theta\sin\varphi\\ &B=1,A=C=0\to\xi^1=g^{11}\xi_1=\sin\varphi,\quad \xi^2=g^{22}\xi_2=\sin^{-2}\theta\sin\theta\cos\theta\cos\varphi=\cot\theta\cos\varphi\\ &C=1,B=A=0\to\xi^1=g^{11}\xi_1=0,\quad \xi^2=g^{22}\xi_2=\sin^{-2}\theta\sin^2\theta=1\end{aligned}$$

汇总给出的 3 个矢量场

$$(\xi^a)_1 = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{7.5}$$

$$(\xi^a)_2 = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{7.6}$$

$$(\xi^a)_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{7.7}$$

不难验证

$$\begin{aligned}[(\xi^a)_1,(\xi^a)_2] &= (\xi^a)_3\\ [(\xi^a)_2,(\xi^a)_3] &= (\xi^a)_1\\ [(\xi^a)_3,(\xi^a)_1] &= (\xi^a)_2\end{aligned}$$

这可以看作李代数 $\mathscr{S}\mathscr{O}(3)$ 的结构常数表达式. 实际上, 上面 3 个矢量场便是绕坐标轴旋转给出的矢量场, 为了很好的说明其直观性, 我们这里从几何的角度给出矢量场.

设球面上的点 (x,y,z) 用球坐标表示为:

$$\begin{aligned}x &= \sin\theta\cos\varphi,\\ y &= \sin\theta\sin\varphi,\\ z &= \cos\theta,\end{aligned}$$

其中 $\theta\in[0,\pi]$ 是极角,$\varphi\in[0,2\pi)$ 是方位角. 当球面绕 x、y、z 轴微小旋转时, 诱导出的矢量场分别为:

绕 x 轴旋转一个小角度 $\delta\alpha$, 旋转矩阵为:

$$R_x(\delta\alpha)\approx\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-\delta\alpha\\0&\delta\alpha&1\end{bmatrix}.$$

因此点 (x,y,z) 的变化为：

$$\delta \boldsymbol{r}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix} \delta\alpha.$$

对应的诱导矢量场为：

$$\boldsymbol{v}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix}.$$

绕 y 轴旋转一个小角度 $\delta\beta$, 旋转矩阵为：

$$R_y(\delta\beta) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\delta\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此点 (x,y,z) 的变化为：

$$\delta \boldsymbol{r}_y = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \delta\beta.$$

对应的诱导矢量场为：

$$\boldsymbol{v}_y = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}.$$

绕 z 轴旋转一个小角度 $\delta\gamma$, 旋转矩阵为：

$$R_z(\delta\gamma) \approx \begin{bmatrix} 1 & -\delta\gamma & 0 \\ \delta\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此点 (x,y,z) 的变化为：

$$\delta \boldsymbol{r}_z = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \delta\gamma.$$

对应的诱导矢量场为：

$$\boldsymbol{v}_z = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

绕 x、y、z 轴的诱导矢量场在笛卡尔坐标系下分别为：

$$\boldsymbol{v}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_y = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_z = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

这些矢量场表示了球面上的每一点在对应轴的微小旋转下的速度方向和大小. 这就是我们寻找的 killing 矢量场.

换成 θ,φ 换成 θ,φ 表示的坐标系我们有:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_x &= -z\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial z}=-\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial z}\\
\boldsymbol{v}_y &= z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}-\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z}\\
\boldsymbol{v}_z &= -y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}=-\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
$$

接下来我们转换基矢, 这里我们更详细一些:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi}=\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi}=\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varphi}=-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

代入可以求得矢量场

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_x &= -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
\boldsymbol{v}_y &= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
\boldsymbol{v}_z &= \frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned}
$$

可见在 killing 矢量空间.

本例结束后面还有几个例子, 详见书 P770

现在回到 M 上没有度规的一般情况。正如前述，只要 G 是李群，仍然可以定义李变换群 $G:G\times M\to M$。参照 M 有度规且 G 是其等度规群的情况，自然把式7.1定义的矢量场写称为 **M 上关于李群 G 的 Killing 矢量场**（**Killing vector field on M relative to Lie group G**)。这时有如下结论：

1. $\mathscr{K}=\{\bar{\xi}\}$ 仍是矢量空间；
2. 仍可用矢量场对易子定义李括号使得 $\mathscr{K}$ 成为李代数（$\mathscr{K}$ 的任意元素的李括号仍在 $\mathscr{K}$ 内）;
3. 映射 $\chi:V_e\to\mathcal{X}$ 仍在某一个负号的意义下“保持括号”。

然而，如果对 $G:X\to M$ 不作要求，则 $\dim V_e$ 有可能小于 $\dim\mathscr{K}$，从而使得 $\chi:V_e\to\mathscr{K}$ 不是矢量空间之间的同构映射。映射 $\sigma:G\times M\to M$ 称为**有效的 (effective)**，若

$$\sigma_g(p)=p,\forall p\in M \implies g=e.$$

（等价于 $g\mapsto\sigma_g$ 是一一映射，还等价于 G 在 M 上的实现是忠实的）。可以证明：只要 $G:G\times M\to M$ 是有效的，则 $\chi:V_e\to\mathscr{K}$ 是矢量空间间的同构映射，ψ 按照 $\psi(A)=-\chi(A)$ 定义就是李代数同构。

第八章 伴随表示和 killing 型

8.1 伴随表示

设 V 是 m($<\infty$) 维实矢量空间, 令

$$\mathscr{L}(V) \equiv \{\text{线性变换}\psi : V \to V\} \equiv \mathscr{T}_V(1,1)$$

则 $\mathscr{L}(V)$ 是 m^2 维矢量空间, 我们给其定义乘法

$$\psi\varphi := \psi \circ \varphi \quad \forall \psi, \varphi \in \mathscr{L}(V)$$

然后我们就可以定义李括号为

$$[\psi, \varphi] := \psi\varphi - \varphi\psi$$

从而使得 $\mathscr{L}(V)$ 成为 m^2 李代数.

定义 8.1

李代数同态映射 $\beta : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(V)$ 称为**李代数 $\mathscr{G}$ 的表示**

♣

同一李群（李代数）可能有不同的表示, 本节介绍李群和李代数的伴随表示, 根据定义1.4, 对任意群 G 的群元可构造映射

$$I_g : G \to G \Longrightarrow I_g(h) := ghg^{-1}, \quad \forall h \in G$$

称为自同构映射, 对于李群而言, 这还是个微分同胚, 所以可以称为李群同构. 根据定义 $I_g(e) = e$, 所以这个映射在 e 点诱导的推前映射（切映射）是 $V_e \to V_e$ 的映射, 记为 $\mathscr{A}d_g$, 因为 V_e 就是 G 的李代数 $\mathscr{G}$, 故而 $\mathscr{A}d_g : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 是线性变换. 最后需要强调的一点, 虽然 I_g 作用到 e 为 e, 但是不代表 $\mathscr{A}d_g$ 会得到相同的切矢, 所以对应的曲线不同.

定理 8.1

设 $\mathscr{G}$ 是李群 G 的李代数, 则有

$$\exp(t(\mathscr{A}d_g A)) = g(\exp tA)g^{-1}$$

♡

proof: 设 $\gamma(t) = \exp(tA), \gamma'(t) = g(\exp tA)g^{-1}$, 首先 $\gamma(t)$ 是单参子群, 且方程左面是 $\mathscr{A}d_g A$ 生成的, 见定理4.4, 下面我们证明 $\gamma'(t)$ 也是单参子群.

$$\gamma'(t+s) = g(\exp(t+s)A)g^{-1} = g(\exp(tA)\exp(sA))g^{-1} = g(\exp(tA)g^{-1}g\exp(sA)g^{-1} = \gamma'(t)\gamma'(s)$$

所以要想证明方程相等, 只需要证明 $\gamma'(t)$ 在恒等元的切矢为 $\mathscr{A}d_g$, 证明如下：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 [g\exp(tA)g^{-1}] = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 [I_g \exp(tA)] = I_{g*}\left.\frac{d}{dt}\right|_0 [\exp(tA)] = I_{g*}A = \mathscr{A}d_g A$$

定理得证.

定理 8.2

设 H 是李群 G 的正规子群 (定义见1.7),$\mathscr{H}$ 是 H 的李代数, 则

$$\mathscr{A}d_g B \in \mathscr{H}, \quad \forall B \in \mathscr{H}, g \in G$$

♡

首先 B 是某个李代数, 会生成一个单参子群 $\exp(tB)$, 又因为是正规子群所以 $g\exp(tB)g^{-1} \subset H$, 可见生成的单参子群也是 H 的单参子群, 又因为

$$\exp(t(\mathscr{A}d_g B)) = g(\exp tB)g^{-1}$$

可见 $\mathscr{A}d_g B \in \mathscr{H}$

定理 8.3

设 $\mathscr{G}$ 是李群 G 的李代数, 则 $\forall A, B \in \mathscr{G}$ 有

$$[A, B] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\mathscr{A}d_{(\exp tA)} B)$$

设 ϕ 是由 A 产生的单参微分同胚群. 同定理5.3的证明

$$[A, B] = [\bar{A}, \bar{B}]_e = (\mathscr{L}_{\bar{A}} \bar{B})_e = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\phi_{-t*} \bar{B}_{\phi_t(e)})$$

因为定理4.5, 有 $\phi_t(e) = e(\exp(tA)) = \exp(tA)$, 则有 $\bar{B}_{\phi_t(e)} = L_{\exp(tA)*} B$, 则

$$[A, B] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [(\phi_{-t} \circ L_{\exp(tA)})_* B]$$

另一方面有

$$I_{\exp(tA)}(g) = \exp(tA) g \exp(-tA) = \phi_{-t}[\exp(tA)(g)] = \phi_{-t}[L_{\exp(tA)}(g) = (\phi_{-t} \circ L_{\exp(tA)})(g)$$

即 $I_{\exp(tA)} = \phi_{-t} \circ L_{\exp(tA)}$, 代入前面式子

$$[A, B] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (I_{\exp(tA)*} B) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\mathscr{A}d_{\exp(tA)} B)$$

定理 8.4

设 H 是连通李群 G 的连通李子群,$\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{G}$ 分别是 H 和 G 的李代数, 则 H 是 G 的正规子群 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的理想 (理想的定义见3.4).

证明

1. $(\Rightarrow)$ 由定理8.2知 $\mathscr{A}d_{\exp(tA)} B \in \mathscr{H}, \quad \forall A \in \mathscr{G}, B \in \mathscr{H}, t \in \mathbb{R}$ 根据定理8.3,$[A, B] \in \mathscr{H}$, 根据理想的定义,$\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的理想.
2. $(\Leftarrow)$

引理 8.1

只要 H 是连通李群的连通李子群, 则 $\forall h \in H, \exists B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{H}$ 使得 $h = \exp(B_1)\exp(B_2)\cdots$(有限个指数之积)

引理就交给数学家证明吧.

当 $h = \exp(B), B \in \mathscr{H}$ 时

$$ghg^{-1} = g(\exp B)g^{-1} = \exp(\mathscr{A}d_g B) \in H$$

当 $h = \exp(B_1)\exp(B_2)\cdots$ 则有

$$ghg^{-1} = g\exp(B_1)\exp(B_2)\cdots h^{-1} = g\exp(B_1)g^{-1}g\exp(B_2)\cdots h^{-1} = h_1 h_2 \cdots \in H$$

则 H 是 G 的正规子群.

笔记 理想在李代数的地位就是正规子群在群论的地位.

因为推前映射的线性性, 不难知道 $\mathscr{A}d_g : \mathscr{G} \xrightarrow{\text{线性}} \mathscr{G} \Rightarrow \mathscr{A}d_g \in \mathscr{L}(\mathscr{G})$, 由此可见, 每有一个 g 便可以通过映射 $\mathscr{A}d : g \mapsto \mathscr{A}d_g$ 获得一个 $\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 的元素, 便有映射

$$\mathscr{A}d : G \to \{\mathscr{G}\text{上可逆线性变换}\} \subset \mathscr{L}(\mathscr{G})$$

为什么会有可逆的? 是因为 $I_g : G \to G$ 是微分同胚, 保证了 $I_{g*} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 是同构映射, 便存在了逆映射. 故$\mathscr{G}$上可逆线性变换对应于一个矩阵群 $GL(m, \mathbb{R})$

定理 8.5

$\mathscr{A}d : G \to \{\mathscr{G}上的可逆线性变换\}$ 是同态映射.

证明

$$\mathscr{A}d_{gh} = I_{gh*} = (I_g \circ I_h)_* = I_{g*} \circ I_{h*} = \mathscr{A}d_g \circ \mathscr{A}d_h$$

群元的复合映射就是群乘积, 所以有 $\mathscr{A}d_{gh} = \mathscr{A}d_g \cdot \mathscr{A}d_h$ 可见是同态映射.

笔记 $I_{gh}(m) = ghmh^{-1}g^{-1} = I_g(I_h m) = I_g \circ I_h(m) \Rightarrow I_{gh} = I_g \circ I_h$

定义 8.2

同态映射 $\mathscr{A}d : G \to \{\mathscr{G}上可逆线性变换\}$ 称为**李群 *G* 的伴随表示** *(adjoint representation)*

定义映射 $ad_A := [A, B], \quad \forall B \in \mathscr{G}$ 由李括号的线性性可知 $ad_A : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 有如下两个性质:

(a). $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{G}, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ 有 $ad_A(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) = \beta_1 ad_A(B_1) + \beta_2 ad_A(B_2)$

(b). $\forall A_1, A_2 \in \mathscr{G}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ 有 $ad_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} = \alpha_1 ad_{A_1} + \alpha_2 ad_{A_2}$

性质 (a) 表明 ad_A 是 $\mathscr{G}$ 上的线性变换, 即 $ad_A \in \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 也可以看作 (1,1) 型张量, 则有

$$(ad_A)^c{}_b B^b = [A, B]^c = C^c{}_{ab} A^a B^b, \quad \forall B^b \in \mathscr{G}$$

甩掉 B^b 后有

$$(ad_A)^c{}_b = A^a C^c{}_{ab}$$

映射 $ad_A, \quad A \in \mathscr{G}$, 虽然与 $\mathscr{A}d_g, \quad g \in G$, 但两者有如下关系写成定理为

定理 8.6

$$\mathscr{A}d_{exp(A)} = Exp(ad_A)$$

证明 构造映射 $\gamma(t) = \mathscr{A}d_{\exp(tA)}, \gamma'(t) = \mathrm{Exp}(t(ad_A))$, 由定理5.2, 可见 $\gamma'(t)$ 是由 ad_A 唯一决定的单参子群 $\exp(t(ad_A))$, 由于 $\mathscr{A}d$ 是同态映射, 再结合 $\exp(t+s)A = \exp tA + \exp sA$ 说明 $\gamma(t)$ 也是单参子群. 又因为二者都是 $\mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 的映射, 可见它们是同一个群. 要证明二者相等, 问题就比较简单了, 只需要证明均过恒等元, 且在切矢量相同即可, 当 $t = 0$ 时, 两者不难看出是恒等元. 我们来看切矢量, 对于 $\gamma(t)$ 由定理8.3可以看出

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathscr{A}d_{\exp(tA)}) = ad_A$$

对于 $\gamma'(t)$, 很明显, 切矢为 ad_A, 所以可以得到结论

$$\mathscr{A}d_{\exp(tA)} = \mathrm{Exp}(t(ad_A))$$

当 $t = 1$ 时, 便有我们想要的结果.

笔记 以上证明为个人所想, 如有错误请及时指出.

既然每一个 $A \in \mathscr{G}$ 对应于一个 $ad_A \in \mathscr{L}(\mathscr{G})$, 便有从 $\mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 记作 $ad : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$, 性质 (b) 表明 ad 是线性映射, 接下来我们来看映射是否是同态映射李代数的同态映射, 就是看它是否保李括号. 即

$$\begin{aligned}
ad_{[A,B]}(C) &= [[A, B], C] = [A, [B, C]] + [B, [C, A]] \\
&= [A, [B, C]] - [B, [A, C]] \\
&= ad_A(ad_B(C)) - ad_B(ad_A(C)) \\
&= (ad_A ad_B - ad_B ad_A)(C)
\end{aligned}$$

由此可见 $ad_{[A,B]} = [ad_A, ad_B]$

定义 8.3

同态映射 $ad : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G}$ 李代数 $\mathscr{G}$ 的伴随表示)

♣

五个映射总结

1. $I_g : G \to G$
2. $\mathscr{A}d_g : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$
3. $\mathscr{A}d : G \to \{\mathscr{G}$上可逆线性变换$\}$ 为李群的伴随表示
4. $ad_A : \mathscr{G} \to \mathscr{G}, \quad A \in \mathscr{G}$
5. $ad : \mathscr{G} \xrightarrow{\text{线}} \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 为李代数的伴随表示

实际上 $\mathscr{A}d_*$ 作为推前映射 (切映射) 与 ad 相等, 有定理

定理 8.7

映射 $\mathscr{A}d_* : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 与 $ad : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 相等

♡

证明 只需要证明 $(\mathscr{A}d_* A)(B) = ad_A(B) \quad \forall A, B \in \mathscr{G}$

$$\mathscr{A}d_* A = \mathscr{A}d_*[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tA)] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathscr{A}d(\exp(tA)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathscr{A}d_{\exp(tA)}$$

故有

$$\mathscr{A}d_* A(B) = [\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathscr{A}d_{\exp(tA)}(B)] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathscr{A}d_{\exp(tA}B) = [A, B] = ad_A(B)$$

8.2 killing 型

利用 $\mathscr{G}$ 伴随表示可以定义映射 $K : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$K(A, B) := \mathrm{tr}(ad_A ad_B), \quad \forall A, B \in \mathscr{G}$$

其中 ad_A, ad_B 是映射先后作用. 加上求迹后, 不难看出这是一个对称的双线性映射, 可以看作是 $\mathscr{G}$ 上的 $(0, 2)$ 对称张量, 在李代数理论中称为 killing 型.

定理 8.8

$K([A, B], C) = K(A, [B, C]), \quad \forall A, B \in \mathscr{G}$

♡

证明

$$\begin{aligned}
K([A, B], C) &= \mathrm{tr}(ad_{[A,B]} ad_C) \\
&= \mathrm{tr}([ad_A, ad_B] ad_C) \\
&= \mathrm{tr}(ad_A ad_B ad_C - ad_B ad_A ad_C) \\
&= \mathrm{tr}(ad_A ad_B ad_C - ad_A ad_C ad_B) \\
&= \mathrm{tr}(ad_A [ad_B, ad_C]) \\
&= K(A, [B, C])
\end{aligned}$$

注意：求迹可以交换顺序, 不影响结果.

借用抽象指标,K(A,B) 会有如下的表示

$$K(A, B) = (ad_A)^a{}_b (ad_B)^b{}_a = C^a{}_{cb} C^b{}_{da} A^c B^d = K_{cd} A^c B^d$$

类似于度规的定义, 如果 K_{ab} 是非退化的（可以理解为存在逆）. 借用万能的数学家证明的定理

引理 8.2

K_{ab} 非退化的充要条件是 $\mathscr{G}$ 为半单李代数 (定义见3.5).

引理不证

半单李代数 $\mathscr{G}$ 的 Killing 型 K_{ab} 可充当 $\mathscr{G}$ 的度规, 称为**嘉当度规**, 物理中遇到的李代数的 K_{ab} 多是负定的, 因而存在正交归一基底 $\{(E_\mu)^a\}$ 使得

$$K_{\mu\nu} = K_{ab}(E_\mu)^a(E_\nu)^b = -\delta_{\mu\nu}$$

嘉当度规 K_{ab} 一般用于给结构常数升降指标, 即：

$$C_{\rho\mu\nu} \equiv K_{\rho\sigma}C^\sigma{}_{\mu\nu}$$

定理 8.9

$$C_{\rho\mu\nu} = C_{[\rho\mu\nu]}$$

证明 下标 $\mu\nu$ 本身就是反称的, 详情见6.1, 所以只需要证明 $C_{\rho\mu\nu} = -C_{\mu\rho\nu}$; 注意到

$$\begin{aligned} C_{\rho\mu\nu} &= K_{\rho\sigma}C^\sigma{}_{\mu\nu} \\ &= K(E_\rho, E_\sigma)C^\sigma{}_{\mu\nu} \\ &= K(E_\rho, C^\sigma{}_{\mu\nu}E_\sigma) \\ &= K(E_\rho, [E_\mu, E_\nu]) \end{aligned}$$

同理 $C_{\mu\rho\nu} = K(E_\mu, [E_\rho, E_\nu]) = -K(E_\rho, [E_\mu, E_\nu])$, 所以有

$$C_{\rho\mu\nu} = -C_{\mu\rho\nu}$$

注意:$[E_\mu, E_\nu]^c = C^c{}_{ab}(E_\mu)^a(E_\nu)^b C^\sigma_{\mu\nu}(E_\sigma)^c$, 命题得证.

Killing form 可以推广至任意表示 $\beta : \mathscr{GL}(V)$. 在 $\mathscr{G}$ 上定义双线性映射 $\tilde{K} : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\tilde{K}(A, B) := tr[\beta A, \beta B], \quad A, B \in \mathscr{G}$$

当其非退化时, 可以充当度规, 为**广义嘉当度规**. 根据定义8.1是同态映射, 类似于定理8.8的证明可以给出相似的性质

$$\tilde{K}([A, B], C) = \tilde{K}(A, [B, C]), \quad A, B, C \in \mathscr{G}$$

第九章 固有洛伦兹群和洛伦兹代数

9.1 固有洛伦兹变换和洛伦兹群

洛伦兹群是由洛伦兹变换诱导出来的. 最简单的洛伦兹变换是惯性系之间的变换, 这里 v 是沿 x 轴方向.

$$t' = \gamma(t - vx), x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z \qquad -1 < v < 1, \gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$$

用矩阵表示为

$$X' = B_x(v)X, \quad B_x(v) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

X 作为 $\{t, x, y, z\}$ 系的简称. 令 $v = th\lambda$, 在几何单位制中满足 $-1 < v < 1$, 对应 λ 中 G 的取值范围限制在 $-\infty < \lambda < \infty$, $B_x(v)$ 可以改为如下形式

$$B_x(\lambda) = \begin{bmatrix} ch\lambda & -sh\lambda & 0 & 0 \\ -sh\lambda & ch\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

但是并非所有情况都是这样的变换, 很多情况下是速度是不沿坐标轴, 这样的情况下我们该怎么处理, 设事件 $p \in \mathbb{R}^4$ 在 X 和 X' 的时空坐标分别为 t, x, y, z 和 t', x', y', z' 以 e 来代表基矢则有如下形式

$$\vec{R} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \qquad \vec{R}' = x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}' + z'\vec{e}_3{}'.$$

分别代表事件 p 在两个坐标系的位矢.

笔记 *注意 $\vec{R}$ 和 $\vec{R}'$ 是 p 点切于不同的 3 维子流形的矢量, 不能直接比较.*

为了方便描述两者的关系, 人为引入一个 3 维的矢量空间 $\mathscr{V}$(实的), 选定正交归一基矢 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ 则有表示

$$\boldsymbol{r} \equiv x^i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \qquad \boldsymbol{r}' \equiv x'^i \boldsymbol{\varepsilon}'_i \qquad \vec{v} \equiv v\boldsymbol{\varepsilon}_1.$$

笔记 *如果你有疑问为什么 v 是沿坐标轴平行, 这里只是简单而言, 后面会有更复杂的讨论; 还有一点值得提的便是这里选定的基矢便不会再变动了, 所谓的像矢量简单而言就是拿着 X' 下的系数与 $\mathscr{V}$ 的坐标基矢组合成矢量.*

其中小写字母 r 是 $\vec{R}, \vec{R}'$ 在 $\mathscr{V}$ 的像矢量. 我们可以使用 $\mathscr{V}$ 上的两个像矢量重新表述最简单的洛伦兹变换.

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \vec{v} \cdot \vec{r}) \\ \vec{r'} &= \vec{r} + \vec{v}[\frac{(\gamma - 1)(\vec{v} \cdot \vec{r})}{v^2} - \gamma t] \end{aligned}$$

第一个式子比较明显, 我们来看一下第二个式子:

$$\begin{aligned} x' = \boldsymbol{\varepsilon}^1 \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{\varepsilon}^1 \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\varepsilon}^1 \boldsymbol{v}[\frac{(\gamma - 1)(\vec{v} \cdot \vec{r})}{v^2} - \gamma t] \\ &= x + v[\frac{(\gamma - 1)vx}{v^2} - \gamma t] \\ &= x + (\gamma - 1)x - \gamma vt \\ &= \gamma(x - vt) \end{aligned}$$

对于 y 和 z 而言和 ε^1 相乘第二项便为 0, 由此可见所给式子就是洛伦兹变换. 下面我们把情况推广到 $\vec{V}$ 取任意方向,

相当于 X 和 X' 进行了相同的空间转动, 也就是坐标基矢发生了变换, 正如例6.3下面所言, 对应的矢量发生了一个逆变换. 而选定的坐标基矢 $\{\varepsilon_1\}$ 不会发生变动, 就是说在 $\mathscr{V}$ 内两个矢量进行了旋转, 而且是相同的. 用 $\tilde{\boldsymbol{r}}$ 代表旋转后的矢量, 我们的问题便是 $\tilde{\boldsymbol{r}}, \tilde{\boldsymbol{r}}'$ 满足什么样的关系? 事实上是和 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ 满足相同的关系,t 肯定满足, 因为

是进行了空间转动, 对于空间分量, 我们来看方括号中的式子, 由于转动是内积不变的, 很明显 [] 中的式子是不变的, 不妨令其为 α, 则有

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \alpha\boldsymbol{v}.$$

因为 X 和 X' 进行了相同的转动, 可以理解为等式两方同时左乘了一个旋转矩阵, 结果是

$$\tilde{\boldsymbol{r}}' = \tilde{\boldsymbol{r}} + \alpha\tilde{\boldsymbol{v}}.$$

笔记 本节我们均使用~代表旋转后的坐标系.

由此可见我们得到了速度方向不在坐标轴上的惯性坐标系满足的关系. 由于关系相同, 我们以不带~的式子代表任意惯性坐标系之间的洛伦兹变换. 我们重新审视便有如下式子

$$t' = \gamma t - \gamma v_1 x - \gamma v_2 y - \gamma v_3 z$$

$$\begin{aligned}
x' = \boldsymbol{\varepsilon}^1 \cdot \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{\varepsilon}^1 \boldsymbol{r} + \varepsilon \boldsymbol{v}[\frac{(\gamma-1)(v_1 r_1 + v_2 r_2 + v_3 r_3)}{v^2} - \gamma t] \\
&= x + v_1[\frac{(\gamma-1)(v_1 x + v_2 y + v_3 z)}{v^2} - \gamma t] \\
&= -\gamma v_1 t + (1 + \frac{(\gamma-1)(v_1)^2}{v^2})x + \frac{(\gamma-1)v_1 v_2}{v^2} y + \frac{(\gamma-1)v_1 v_3}{v^2} z
\end{aligned}$$

对于 y 和 z 而言一样, 我们便得到这样 Boost 对应的洛伦兹变换矩阵.

$$B(v) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v_1 & -\gamma v_2 & -\gamma v_3 \\ -\gamma v_1 & 1 + \frac{(\gamma-1)v_1^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1v_1 v_2)}{v^2} & \frac{(\gamma-1v_1 v_3)}{v^2} \\ -\gamma v_2 & \frac{(\gamma-1v_2 v_1)}{v^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)v_2^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1v_2 v_3)}{v^2} \\ -\gamma v_3 & \frac{(\gamma-1v_3 v_1)}{v^2} & \frac{(\gamma-1v_3 v_2)}{v^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)v_3^2}{v^2} \end{bmatrix}.$$

上述矩阵称为**伪转动矩阵**, 已经穷尽满足如下条件的坐标变换

1. 两个空间坐标系在在时间为 0 时重合
2. X' 系相对于 X 以任意速度进行匀速平动
3. 两个空间坐标系的坐标轴平行

为了便于计算给出如下几个式子

$$B^0{}_0(\boldsymbol{v}) = \gamma, \quad B^0{}_i(\boldsymbol{v}) = B^i{}_0(\boldsymbol{v}) = -\gamma v^i, \quad B^i{}_j(\boldsymbol{v}) = B^j{}_i(\boldsymbol{v}) = \delta^i{}_j + \frac{\gamma^2 v^i v_j}{1+\gamma} \tag{9.1}$$

除了 boost 外, 还有一种转动 (Rotation), 最一般的空间转动群是 SO(3) 也就是说是这样的一个矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R} \end{bmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{bmatrix} R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3 \\ R^2{}_1 & R^2{}_2 & R^2{}_3 \\ R^3{}_1 & R^3{}_2 & R^3{}_3 \end{bmatrix} \in SO(3).$$

笔记 注意 *rotation* 是不会改变参考系, 变的是坐标系;*boost* 则会改变参考系

最一般的洛伦兹变换可以定义如下: 惯性坐标系 X 和 X' 之间的坐标变换称为**洛伦兹变换**, 若两系的空间坐标原点在 $t' = t = 0$ 时重合. 满足上面定义的也可以称为**齐次洛伦兹变换**, 而**齐次变换**就是我们所说的平移变换. 齐次与非齐次构成 Poincaré 群; 由全体转动组成的集合 $ZD \subset L_+^\uparrow$,ZD 同构于 SO(3), 所以它是群, 且是固有洛伦兹群的子群, 而且还可以证明其是李子群, 伪转动的集合 $WZ \subset L_+^\uparrow$, 不是子群, 托马斯进动正是 WZ 不是子群的结果 (托马斯进动未学). 不过 WZ 的子集

$$WZ_x = \{B_x(\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

是固有洛伦兹群的单参子群, 具体看 B_x 的形式不难得出.

本节只讨论齐次洛伦兹变换, 也就是固有洛伦兹群 $L_+^\uparrow$, 其群元可以是 rotation,boost 或者是两者的混合. 我们

现在再次讨论 $B(\boldsymbol{v})$, 设 X 和 X' 系由简单的 boost $B_x(v)$ 联系, 即

$$X' = B_x(v)X.$$

对两个系加上相同的但是任意的转动有 $\tilde{X} = RX$ 和 $\tilde{X}' = RX'$, 则我们可以得到

$$\tilde{X}' = RX' = RB_x(v)X = RB_x(v)R^{-1}\tilde{X}.$$

很明显 $B(\boldsymbol{v}) = RB_x(\boldsymbol{v})R^{-1}$, 我们有如下定理

定理 9.1

1. $B_x(v) \in WZ_x, R \in ZD \Rightarrow R^{-1}B_x(v)R \in WZ$;
2. $B(\boldsymbol{v}) \in WZ \Rightarrow \exists R \in ZD$ 使 $B(\boldsymbol{v}) = R^{-1}B_x(v)R$, 其中 $|v| = |\boldsymbol{v}|$

♡

证明

1. 这一条其实前面已经证明了;
2. 这个定理比较显然, 从物理实质上理解就行了, 若想严格求解的话, 可以求解矩阵方程.

定理 9.2

若惯性坐标系 X 和 X' 由伪转动联系,$R \in ZD$, 则 $\tilde{X} \equiv RX$ 与 $\tilde{X}' \equiv RX'$ 也由伪转动联系.

♡

证明 首先有

$$X' = B(\boldsymbol{v})X = R_\circ^{-1}B_x(v)R_\circ X.$$

其次

$$\tilde{X}' = RX' = RR_\circ^{-1}B_x(v)R_\circ X = RR_\circ^{-1}B_x(v)R_\circ R^{-1}\tilde{X}.$$

令

$$R_1 = R_\circ R^{-1}.$$

最后有

$$\tilde{X}' = (R_1)^{-1}B_x(v)R_1\tilde{X}.$$

由定理9.1可知二者之间也是伪转动联系.

定理 9.3

$\forall B(\boldsymbol{v}) \in WZ, R \in ZD$ 有

$$B(\hat{R}\boldsymbol{v}) = RB(\boldsymbol{v})R^{-1}.$$

其中 $R \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R} \end{bmatrix} \in ZD, \hat{R}\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$ 即 $(\hat{R}\boldsymbol{v})^i = R^i{}_j v^j$

♡

证明 设 X 是惯性坐标系, 则 $X' \equiv B(\boldsymbol{v})X$ 也是惯性坐标系. 以 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 分别代表 X 和 X' 所在的惯性参考系, $\boldsymbol{V}$ 代表 $\mathscr{R}'$ 相对于 $\mathscr{R}$ 的速度,$B(\boldsymbol{v})$ 中的 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 在 $\mathscr{V}$ 中的像矢量, 即 $\boldsymbol{v} \equiv v^i\boldsymbol{\varepsilon}_i$, 对两个惯性坐标系加以转动,$\tilde{X} = RX, \tilde{X}' = RX'$, 这里惯性参考系还是 $\mathscr{R}, \mathscr{R}'$, 变的只有惯性坐标系, 由定理9.2知道 $\tilde{X}, \tilde{X}'$ 之间还是依靠 boost 联系, 对于 $\tilde{X}$ 而言,$\boldsymbol{V}$ 的像矢量变为 $\tilde{\boldsymbol{v}} = \tilde{v}^i\boldsymbol{\varepsilon}_i$,$\tilde{v}^i$ 是 $\boldsymbol{V}$ 在 $\tilde{X}$ 下的坐标分量, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 还是抽象矢量空间的坐标基底, 我们知道当坐标系旋转后同一个矢量在两个坐标系下的分量满足关系 $\tilde{v}^i = R^i{}_j v^j$, 即

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = R\boldsymbol{v}.$$

让我们来结束问题

$$\tilde{X}' = B(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{X} = B(R\boldsymbol{v})\tilde{X}$$
$$\tilde{X}' = RX' = RB(\boldsymbol{v})X = RB(\boldsymbol{v})R^{-1}\tilde{X}$$

对比两个式子便得到我们想要的结果.

笔记 我在这里遇到过一个问题, 就是坐标基底旋转后相当于矢量在坐标基底不变的情况下的一个逆方向转动, 为什么对应的转动矩阵是同一个? 事实上, 同一个转动矩阵作用到矢量在坐标基底分量和坐标基底上的效果是相反的, 这一点可以见例*6.3*的笔记.

定理 9.4 (分解定理)

$\forall\Lambda\in L_+^\uparrow$,∃唯一的 $B(\boldsymbol{v})\in WZ$ 和 $R\in ZD$ 使

$$\Lambda=B(\boldsymbol{v})R.$$

证明 首先 $\Lambda\in L_+^\uparrow$ 保证满足保度规条件 $\eta=\Lambda^T\Lambda$, 利用抽象指标写成

$$\eta_{\sigma\rho}=(\Lambda^T)_\sigma{}^\mu\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho=\Lambda^\mu{}_\sigma\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho.$$

则有下面三个等式

1. $\sigma=\rho=0,\quad \eta_{00}=\Lambda^\mu{}_0\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_0=\eta_{00}(\Lambda^0{}_0)^2+\sum_i\eta_{ii}(\Lambda^i{}_0)^2\Rightarrow(\Lambda^0{}_0)^2-\sum_i(\Lambda^i{}_0)^2=1$
2. $\sigma=0,\rho=i,\quad \eta_{0i}=\Lambda^\mu{}_0\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_i=\Lambda^0{}_0\eta_{00}\Lambda^0{}_i+\sum_j\Lambda^0{}_j\eta_{jj}\Lambda^j{}_i\Rightarrow-\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_i+\sum_j\Lambda^0{}_j\Lambda^j{}_i=0$
3. $\sigma=i,\rho=k,\quad \eta_{ik}=\Lambda^\mu{}_i\eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_k=\Lambda^0{}_i\eta_{00}\Lambda^0{}_k+\sum_j\Lambda^j{}_i\eta_{jj}\Lambda^j{}_k\Rightarrow-\Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_k+\sum_j\Lambda^j{}_i\Lambda^j{}_k=\delta_{ik}$

如果 $\Lambda\in WZ$ 则可以令 $B(\boldsymbol{v})=\Lambda,R=I$ 此时有

$$\Lambda^0{}_0=\gamma,\Lambda^i{}_0=-\gamma v^i.$$

即

$$\gamma=\Lambda^0{}_0,\quad v^i=-\frac{\Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0}\tag{9.2}$$

要想证明存在唯一的 $B(\boldsymbol{v})$ 和 R 不妨先构造一个, 再证明唯一性. 猜测当 $\Lambda\notin WZ$, 其群元仍满足式子9.2.

笔记 猜测还是要靠一点直觉的, 就是 *ZD* 群不会改变第一列的矩阵元, 是因为 *ZD* 同构于 *SO(3)* 群, 而且是针对空间的, 对时间无效.

代入等式 1, 不难验证即使 $\Lambda\notin WZ$ 其群元仍满足式子9.2满足亚光速条件

$$\gamma^2-\gamma^2v^2=1\Rightarrow\gamma^2(1-v^2)=1\Rightarrow v^2<1\Rightarrow|\boldsymbol{v}|<1$$

1. **构造**: WZ 群元形式我们已经清楚, 而 Λ 原则上清楚, 接下来只要找到一个 $R\in ZD$ 满足 $\Lambda=B(\boldsymbol{v})R$ 即

$$R=B^{-1}(\boldsymbol{v})\Lambda=B(-\boldsymbol{v})\Lambda.$$

借助式9.1可以给出 WZ 群元

$$\begin{aligned}B^0{}_0(-\boldsymbol{v})&=\gamma=\Lambda^0{}_0\\B^0{}_i(-\boldsymbol{v})&=B^i{}_0(-\boldsymbol{v})=\gamma v^i=-\Lambda^i{}_0\\B^i{}_j(-\boldsymbol{v})&=B^j{}_i(-\boldsymbol{v})=\delta^i{}_j+\frac{\gamma^2v^iv_j}{1+\gamma}=\delta^i{}_j+\frac{\Lambda^i{}_0\Lambda_{j0}}{1+\Lambda^0{}_0}\end{aligned}$$

每行最后一个等号均引用了9.2, 经过计算不难给出 R.

$$\begin{aligned}R^0{}_0&=B^0{}_\mu\Lambda^\mu{}_0=(\Lambda^0{}_0)^2-\sum_i(\Lambda^i{}_0)^2=1\\R^0{}_i&=B^0{}_\mu\Lambda^\mu{}_i=\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_i-\sum_j\Lambda^j{}_0\Lambda^j{}_i=0\end{aligned}$$

前两个式子比较简单, 代入开头证明的洛伦兹群元满足的等式就会解决.

$$\begin{aligned} R^i{}_0 = B^i{}_\mu \Lambda^\mu{}_0 &= B^i{}_0 \Lambda^0{}_0 + \sum_j B^i{}_j \Lambda^j{}_0 \\ &= -\Lambda^i{}_0 \Lambda^0{}_0 + \sum_j (\delta^i{}_j + \frac{\Lambda^i{}_0 \Lambda_{j0}}{1+\Lambda^0{}_0}) \Lambda^j{}_0 \\ &= \Lambda^i{}_0 (1 - \Lambda^0{}_0 + \frac{\gamma^2 v^2}{1+\Lambda^0{}_0}) \\ &= \frac{\Lambda^i{}_0}{1+\Lambda^0{}_0}(1-\gamma^2+\gamma^2 v^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

这几项均满足 ZD 的要求, 最后要证明 $R^i{}_j$ 属于 SO(3), 根据表5.1就是只需要验证 $R^i{}_j$ 是正交矩阵即可, 这里有一个非常棒的想法 $R \in L^\uparrow_+$, 也就是说满足通用的等式

$$-\Lambda^0{}_i \Lambda^0{}_k + \sum_j \Lambda^j{}_i \Lambda^j{}_k = \delta_{ik}$$

而 $R^0{}_i = 0$ 即

$$\sum_j R^j{}_i R^j{}_k = \delta_{ik}$$

就是正交群.

笔记 *什么! 你要计算 $R^i{}_j$,OK,bro,you win! 我这里给出结果*

$$R^i{}_j = \Lambda^i{}_j - + \frac{\Lambda^i{}_0 \Lambda_{j0}}{1+\Lambda^0{}_0}$$

至此, 我们找到一个 $B(\boldsymbol{v})R$ 满足我们的要求, 接下来到第二个步骤证明唯一性.

2. **唯一性**: 假设存在另一组 $\Lambda = B(\boldsymbol{v}')R$, 则有

$$B(\boldsymbol{v})R = B(\boldsymbol{v}')R'.$$

也就是

$$B(\boldsymbol{v}') = B(\boldsymbol{v})R'R^{-1} = B(\boldsymbol{v})\overline{R}$$

$\overline{R}$ 也是转动群满足转动群的要求, 我们有

$$\gamma' = B^0{}_0(\boldsymbol{v}') = B^0{}_0(\boldsymbol{v})\overline{R}^0{}_0 + \sum_i B^0{}_i(\boldsymbol{v})\overline{R}^i{}_0 = B^0{}_0 = \gamma.$$

还有

$$-\gamma' v'^i = B^i{}_0(\boldsymbol{v}') = B^i{}_0(\boldsymbol{v})\overline{R}^0{}_0 + \sum_j B^i{}_j(\boldsymbol{v})\overline{R}^j{}_0 = B^i{}_0 = -\gamma v^i.$$

结合上面两个式子, 可以知道 $v^i = v'^i$, 也就是唯一的 $B(\boldsymbol{v})$

分解定理还有别的形式, 如下

定理 (分解定理另一形式)

$\forall \Lambda \in L^\uparrow{}_+, \exists$ 唯一的 $\overline{R} \in ZD$ 和 $B(\boldsymbol{w}) \in WZ$ 使

$$\Lambda = \overline{R}B(\boldsymbol{w}).$$

且 $\overline{R} = R, \boldsymbol{v} = \hat{R}\boldsymbol{w}$

♡

证明 $\Lambda \in L^\uparrow{}_+ \Rightarrow \Lambda^{-1} \in L^\uparrow{}_+$ 根据定理9.4,$\exists B(\boldsymbol{n}) \in WZ, \overline{R}^{-1} \in ZD$ 满足 $\Lambda^{-1} = B(\boldsymbol{n})\overline{R}^{-1}$, 故

$$\Lambda = (B(\boldsymbol{n})\overline{R}^{-1})^{-1} = \overline{R}B(-\boldsymbol{n}).$$

令 $\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{n}$

$$\Lambda = \overline{R}B(\boldsymbol{w}).$$

下面证明 $\overline{R}=R, \boldsymbol{v}=\hat{R}\boldsymbol{w}$, 由上面讨论知道 Λ 有两种形式, 必然相等

$$B(\boldsymbol{v})R=\overline{R}B(\boldsymbol{w})\Rightarrow B(\boldsymbol{v})=\overline{R}B(\boldsymbol{w})R^{-1}$$

令 $R^{-1}=\overline{R}^{-1}R_1$ 借助定理9.3, 有

$$B(\boldsymbol{v})=B(\hat{\overline{R}}\boldsymbol{w})R_1$$

因为 $B(\boldsymbol{v})=B(\boldsymbol{v})I$,I 亦是转动矩阵结合定理9.4的唯一性则有

$$\begin{cases} R_1=I\Rightarrow R=\overline{R} \\ \boldsymbol{v}=\hat{R}\boldsymbol{w} \end{cases}.$$

最后唯一性也由定理9.4迁移过来, 原因是这里如果不唯一,9.4 就不唯一.

定理 9.5

设 $B(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{B(u)}\in \boldsymbol{WZ}$ 且 $\boldsymbol{v}\neq 0,\boldsymbol{u}\neq 0$ 则

$$B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u})\in WZ\Leftrightarrow \boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{u}.$$

证明 1. $B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u})\in WZ\Leftarrow \boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{u}$

借助定理9.1和9.3, 则知

$$B(\boldsymbol{v})=(R_1)^{-1}B_x(\boldsymbol{v})(R_1)=(R_1)^{-1}B_x(v\boldsymbol{\varepsilon}_1)(R_1)=B[v(\hat{R}_1)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1]\Rightarrow \boldsymbol{v}=v(\hat{R}_1)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1$$
$$B(\boldsymbol{u})=(R_2)^{-1}B_x(\boldsymbol{u})(R_2)=(R_2)^{-1}B_x(u\boldsymbol{\varepsilon}_1)(R_2)=B[u(\hat{R}_2)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1]\Rightarrow \boldsymbol{u}=u(\hat{R}_2)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1$$

又因为 $\boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{u}$ 即 $\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}$ 结合上式有

$$(\hat{R}_2)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{\alpha v}{u}(\hat{R}_1)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1\Rightarrow$$
$$\hat{R}_1(\hat{R}_2)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{\alpha v}{u}\boldsymbol{\varepsilon}_1$$

由于转动不改变矢量长度, 限制了 $\frac{\alpha v}{u}=\pm 1$, 并令 $\hat{R}=\hat{R}_1(\hat{R}_2)^{-1}$(可以给出 $R=R_1(R_2)^{-1}$), 有 $\hat{R}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\pm\boldsymbol{\varepsilon}_1$, 我们来看

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u})&=(R_1)^{-1}B_x(\boldsymbol{v})RB_x(\boldsymbol{u})R_2=(R_1)^{-1}B_x(\boldsymbol{v})RB_x(\boldsymbol{u})(R)^{-1}R_1 \\ &=(R_1)^{-1}B_x(\boldsymbol{v})B_x(u\hat{R}\boldsymbol{\varepsilon}_1)R_1 \\ &=(R_1)^{-1}B_x(\boldsymbol{v})B_x(\pm u\boldsymbol{\varepsilon}_1)R_1 \\ &=(R_1)^{-1}B_x(\boldsymbol{v}\pm\boldsymbol{u})R_1 \end{aligned}$$

笔记 *注意 B_x 括号内黑体字母代表矢量, 而且应该是在 x 轴上的矢量, 这里注意其中含义.*

2. $B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u})\in WZ\Rightarrow \boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{u}$.

伪转动群满足式9.1,$[B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u})]^0{}_i=[B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u})]^i{}_0$, 令 $V=B(\boldsymbol{v}),U=B(\boldsymbol{u})$

$$\begin{aligned} [VU]^i{}_0&=V^i{}_0U^0{}_0+\sum_j V^i{}_jU^j{}_0 \\ &=-\gamma_v v^i\gamma_u+\sum_j(\delta^i{}_j+\frac{\gamma_v^2v^iv_j}{1+\gamma_v})(-\gamma_u u^j) \\ &=-\gamma_v\gamma_u v^i-\gamma_u u^i-\frac{\gamma_v^2\gamma_u v^iv_ju^j}{1+\gamma_v} \\ &=-\gamma_v\gamma_u\boldsymbol{v}-\gamma_u\boldsymbol{u}-\frac{\gamma_v^2\gamma_u\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})}{1+\gamma_v} \end{aligned}$$

同理有

$$[VU]^0{}_i=-\gamma_v\gamma_u\boldsymbol{u}-\gamma_v\boldsymbol{v}-\frac{\gamma_u^2\gamma_v\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})}{1+\gamma_u}$$

则有

$$\gamma_v\gamma_u\boldsymbol{v}+\gamma_u\boldsymbol{u}+\frac{\gamma_v^2\gamma_u\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})}{1+\gamma_v}=\gamma_v\gamma_u\boldsymbol{u}+\gamma_v\boldsymbol{v}+\frac{\gamma_u^2\gamma_v\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})}{1+\gamma_u}.$$

两边同时叉乘 $\boldsymbol{v}$ 有

$$\gamma_u[1-\gamma_v-\frac{\gamma_u\gamma_v\boldsymbol{uv}}{1+\gamma_u}](\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=0.$$

因为 $\gamma\geq 1$, 可能的情况只有两种, 一是 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=0$, 就是我们要求的平行的情况, 第二种则是 [] 的等式为 0. 第一种情况已经推出平行, 我们来看第二种情况, 并简化 []

$$1-\gamma_v+\gamma_u-\gamma_u\gamma_v(1+\boldsymbol{uv})=0.$$

同理叉乘 $\boldsymbol{u}$ 有

$$1-\gamma_u+\gamma_v-\gamma_u\gamma_v(1+\boldsymbol{uv})=0.$$

联立给出 $\gamma_u=\gamma_v$ 和 $1-\gamma_u\gamma_v(1+\boldsymbol{uv})=0$, 结合这两个式子有

$$\boldsymbol{v}^2+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$$
$$\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$$

两式相加则有

$$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})^2=0.$$

即

$$\boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{u}.$$

结合两种情况, 命题得证.

笔记 这里使用了分类讨论的思想, 记得我高中时接触过一个不等式的问题, 使用的便是分类讨论的思想, 分类讨论可以使问题简化.

9.2 洛伦兹代数 (The Lorentz Algebra)

本节从李代数的角度讨论. 洛伦兹代数记为 $\mathscr{O}(1,3)$, 取一群元 A 可以看表5.1知道 A 满足

$$A^T=-\eta A\eta.$$

可以给出

$$A=\begin{bmatrix}0 & A^0{}_1 & A^0{}_2 & A^0{}_2\\ A^0{}_1 & 0 & A^1{}_2 & A^1{}_3\\ A^0{}_2 & -A^1{}_2 & 0 & A^2{}_3\\ A^0{}_3 & -A^1{}_3 & -A^2{}_3 & 0\end{bmatrix}.$$

笔记 实际上 $\eta A\in O(4)$, 也可以根据这个给出 A 的形式.

这里引入符号 $span\,()$ 代表使用 () 内的基矢张成的空间; 对于 $\mathscr{O}(1,3)$ 有

$$\mathscr{O}(1,3)=span(r_1,r_2,r_3;b_1,b_2,b_3) \tag{9.3}$$

这里的矢量见例6.3. 我们观察两个子空间

$$\mathscr{R}\equiv span(r_1,r_2,r_3)\subset\mathscr{O}(1,3)$$
$$\mathscr{B}\equiv span(b_1,b_2,b_3)\subset\mathscr{O}(1,3)$$

说明 $\mathscr{R},\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{O}(1,3)$ 的子空间, 问题是它们是否是李代数且为李子代数, 同样的在6.3我们得到了

$$[r_i,r_j]=\varepsilon_{ij}{}^{k}r_k;$$
$$[b_i,b_j]=-\varepsilon_{ij}{}^{k}r_k;$$

这里是以对易子定义的李括号, 根据第三章内容可以看出它们可以是李代数, 但只有 $\mathscr{R}$ 构成李子代数, 因为它是封闭的.$\mathscr{B}$ 不构成子代数, 也和 WZ 不是子群密切相关.

定理 9.6

$\mathscr{R}$ 是李群 ZD 的李代数

证明 $\dim\mathscr{R}=3=\dim ZD$, 只需要证明 $\forall r\in\mathscr{R}$,ZD 中 $\exists$ 过 e 的曲线, 满足在 e 的切矢为 r ; r 可以写为

$$r=\nu_1r_1+\nu_2r_2+\nu_3r_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-\nu_3&\nu_2\\0&\nu_3&0&-\nu_1\\0&-\nu_2&\nu_1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&\hat{r}\end{bmatrix}.$$

$\hat{r}$ 是 3×3 反对称矩阵, 所以 $\hat{r}\in\mathscr{O}(3)$,$\forall t\in R$ 有

$$\mathrm{Exp}(tr)=I+tr+\frac{1}{2!}t^2r^2+\cdots\frac{1}{n!}t^nr^n\cdots$$

对于 r^2 我们知道 $r^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&\hat{r}^2\end{bmatrix}$; 不难相信, $r^n=\begin{bmatrix}0&0\\0&\hat{r}^n\end{bmatrix}$, 故有

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}(tr)&=\begin{bmatrix}1&0\\0&\hat{I}+t\hat{r}+\frac{1}{2!}t^2\hat{r}^2+\cdots\frac{1}{n!}t^n\hat{r}^n\cdots\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0\\0&\mathrm{Exp}(t\hat{r})\end{bmatrix}\end{aligned}$$

笔记 $\hat{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

因为 $\hat{r}\in\mathscr{O}(3)$, 所以 $Exp(t\hat{r})$ 是 $SO(3)$ 的单参子群, 故 $\mathrm{Exp}(tr)$ 是 ZD 群的单参子群, 就是我们要找的曲线.

定理 9.7

$B_x(\lambda)\subset WZ_x$ 满足

$$B_x(\lambda)=Exp(\lambda b_1).$$

证明

$$\mathrm{Exp}(\lambda b_1)\equiv I+\lambda b_1+\frac{1}{2!}(\lambda b_1)^2+\cdots\frac{1}{n!}(\lambda b_1)^n\cdots$$

归纳一下, 可以给出如下结果

$$\begin{cases} 当\text{ n }为奇数时 \quad (\lambda b_1)^n = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^n & 0 & 0 \\ -\lambda^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 当\text{ n }为偶数时 \quad (\lambda b_1)^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

不难看出

$$\text{Exp}(\lambda b_1) = \begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以有

$$\begin{cases} p = 1 + \frac{1}{2!}\lambda^2 + \frac{1}{4!}\lambda^4 \cdots = \text{ch}\lambda \\ q = -(\lambda + \frac{1}{3!}\lambda^3 + \frac{1}{5!}\lambda^5 \cdots) = -\text{sh}\lambda \end{cases}.$$

就是我们熟知的 $B_x(\lambda)$

笔记 其实这里也能看出来 B_y, B_z, 还有 R 的对应, 就是映照着李群与李代数的密切关系.

定理 9.8

$r \in \mathscr{R} \Leftrightarrow \exists R \in ZD, \nu \in \mathbb{R}$ 使得 $r = \nu R^{-1} r_3 R$

笔记 把 r_3 改成 r_1, r_2 定理仍然成立.

证明

1. $(\Leftarrow)$: 只需要证明 r 反称即可

$$\begin{aligned} r &= \nu R^{-1} r_3 R \\ &= \nu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^1{}_1 & R^2{}_1 & R^3{}_1 \\ 0 & R^1{}_2 & R^2{}_2 & R^3{}_2 \\ 0 & R^1{}_3 & R^2{}_3 & R^3{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3 \\ 0 & R^2{}_1 & R^2{}_2 & R^2{}_3 \\ 0 & R^3{}_1 & R^3{}_2 & R^3{}_3 \end{bmatrix} \\ &= \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^1{}_2 R^2{}_1 - R^1{}_1 R^2{}_2 & R^1{}_3 R^2{}_1 - R^1{}_1 R^2{}_3 \\ 0 & R^1{}_1 R^2{}_2 - R^1{}_2 R^2{}_1 & 0 & R^2{}_2 R^1{}_3 - R^1{}_2 R^2{}_3 \\ 0 & R^1{}_1 R^2{}_3 - R^1{}_3 R^2{}_1 & R^1{}_2 R^2{}_3 - R^1{}_3 R^2{}_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

很明显 r 是反称的, 满足 $\mathscr{R}$ 要求, 问题结束.

笔记 事实上, 这里说明了 $\forall R \in ZD$ 使得 $r \in \mathscr{R}$

2. $(\Rightarrow)$ $r \in \mathscr{R} \Rightarrow \exists \nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R}$ 使

$$r = \nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + \nu_3 r_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_3 & \nu_2 \\ 0 & \nu_3 & 0 & -\nu_1 \\ 0 & -\nu_2 & \nu_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

存在性证明最为简单, 找到一个便证明结束. 我们再来仔细的看一下这个定理, 本质上是一个同一个矢量空间的两个矢量可以用某种转动来联系, 从物理实质上来看, 只要两者的长度相等, 就可以使用转动联系, 谈及转动, 以球坐标系描述最佳, 令 $\nu = \sqrt{{\nu_1}^2 + {\nu_2}^2 + {\nu_3}^2}$, 则有

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu \sin\theta \cos\varphi \\ \nu_2 &= \nu \sin\theta \sin\varphi \\ \nu_3 &= \nu \cos\theta \end{aligned}$$

而前面再加上 μ 这个常数作为放缩, 消去了长度的限制, 所以势必存在这么一个矢量, 以上只是一个 hand-waving 的论证, 而且是类比普通的矢量空间, 实际上, 这里的矢量空间应该是8.1说的李代数的表示; 接下来我们靠数学细节验证这个.

首先 $r_3 \to r$ 是一个 $\mathscr{G} \to \mathscr{G}$, 根据8.7上方的映射总结, 不难看出两者之间的联系可以是 $\mathscr{A}d_g$, 关键是如何找到这个群元, 不难相信 $g(\theta, \varphi)$, 可以选择合适李代数元生成单参子群并乘积可以作为 g, 书上给的群元是

$$g = \text{Exp}(\varphi r_3)\text{Exp}(\theta r_2).$$

对于 $\text{Exp}(\varphi r_3), \text{Exp}(\theta r_2)$, 可以对照9.7, 给出

$$\text{Exp}(\varphi r_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Exp}(\theta r_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

我们体会其巧妙之处

$$\begin{aligned} \mathscr{A}d_g r_3 &= \mathscr{A}d_{\text{Exp}(\varphi r_3)\text{Exp}(\theta r_2)} r_3 \\ &= \mathscr{A}d_{\text{Exp}(\varphi r_3)}(\mathscr{A}d_{\text{Exp}(\theta r_2)} r_3) && \text{参考定理8.5} \\ &= \mathscr{A}d_{\text{Exp}(\varphi r_3)}[\text{Exp}(ad_{\theta r_2})] r_3 && \text{参考定理8.6} \\ &= \mathscr{A}d_{\text{Exp}(\varphi r_3)}[\text{Exp}(\theta ad_{r_2})] r_3 && \text{参考定义8.2下方性质} \\ &= \mathscr{A}d_{\text{Exp}(\varphi r_3)}[1 + \theta ad_{r_2} + \frac{1}{2!}(\theta ad_{r_2})^2 + \frac{1}{3!}(\theta ad_{r_2})^3 + \cdots] r_3 \end{aligned}$$

我们单独计算几个式子, 期望发现规律:

$$\begin{aligned} ad_{r_2} r_3 &= [r_2, r_3] = r_1 && \text{见定义8.2和例6.3} \\ ad_{r_2}^2 r_3 &= ad_{r_2}[r_2, r_3] = ad_{r_2} r_1 = [r_2, r_1] = -r_3 \\ ad_{r_2}^3 r_3 &= -r_1 \\ ad_{r_2}^4 r_3 &= r_3 \\ ad_{r_2}^5 r_3 &= r_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

可见 4 个一循环, 提取同类项得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}d_g r_3 &= \mathscr{A}d_{\mathrm{Exp}(\varphi r_3)}[(1-\frac{1}{3!}\theta^3+\cdots)r_3+(\theta-\frac{1}{4!}+\cdots)r_1] \\
&= \mathscr{A}d_{\mathrm{Exp}(\varphi r_3)}(\cos\theta r_3+\sin\theta r_1) \\
&= \mathrm{Exp}(ad_{\varphi r_3})(\cos\theta r_3+\sin\theta r_1) \\
&= \cos\theta\mathrm{Exp}(ad_{\varphi r_3})r_3+\sin\theta\mathrm{Exp}(ad_{\varphi r_3})r_1 \\
&= r_3\cos\theta+(r_1\cos\varphi+r_2\sin\varphi)\sin\theta \\
&= \nu^{-1}(\nu_1 r_1+\nu_2 r_2+\nu_3 r_3) \\
&= \nu^{-1}r
\end{aligned}$$

还差一步, 由定理8.1知 $\exp(t(\mathscr{A}d_g r_3))=g(\exp tr_3)g^{-1}$, 两边对 t 求导, 并令 $t=0$ 得

$$\mathscr{A}d_g r_3 = g r_3 g^{-1}.$$

不难给出 $R=g^{-1}$, 证明结束.

笔记 其实从物理实质上看,R 应该是唯一的, 找到它确实需要一些灵光一现、神来一笔.

上述定理还有一个姊妹定理.

定理 9.9

$b\in\mathscr{B}\Leftrightarrow\exists R\in ZD,\nu\in\mathbb{R}$ 使 $b=\nu R^{-1}b_1R$

证明

1. $(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned}
b &= \nu R^{-1}b_1 R \\
&= \nu\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&R^1{}_1&R^2{}_1&R^3{}_1\\0&R^1{}_2&R^2{}_2&R^3{}_2\\0&R^1{}_3&R^2{}_3&R^3{}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&R^1{}_1&R^1{}_2&R^1{}_3\\0&R^2{}_1&R^2{}_2&R^2{}_3\\0&R^3{}_1&R^3{}_2&R^3{}_3\end{bmatrix} \\
&= \nu\begin{bmatrix}0&-R^1{}_1&R^1{}_2&R^1{}_3\\-R^1{}_1&0&0&0\\-R^1{}_2&0&0&0\\-R^1{}_3&0&0&0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$b\in\mathscr{B}$

2. $(\Rightarrow)$

因为 $b\in\mathscr{B}$, 所以有 $b=\beta_1b_1+\beta_2b_2+\beta_3b_3$, 如果 $\beta_2=\beta_3=0$ 显然成立, 下面考虑至少一个非 0 的情况, 不妨令 $\beta_2\neq0$, 令 $\mu=\sqrt{\beta_1{}^2+\beta_2{}^2}\nu=\sqrt{\beta_1{}^2+\beta_2{}^3+\beta_3{}^2}$ 容易验证 $\frac{1}{\mu\nu}\begin{bmatrix}\mu\beta_1&\mu\beta_2&\mu\beta_3\\\nu\beta_2&-\nu\beta_1&0\\\beta_1\beta_2&\beta_2\beta_3&-\mu^2\end{bmatrix}\in SO(3)$ 验证正交归一即可. 故

$$R=\frac{1}{\mu\nu}\begin{bmatrix}\mu\nu&0&0&0\\0&\mu\beta_1&\mu\beta_2&\mu\beta_3\\0&\nu\beta_2&-\nu\beta_1&0\\0&\beta_1\beta_2&\beta_2\beta_3&-\mu^2\end{bmatrix}\in ZD.$$

由矩阵运算容易验证 $b=\nu R^{-1}b_1R$

笔记 以上内容来自课本 *P789*, 这里没有细算.

定理 9.10

$R \in ZD \Leftrightarrow \exists r \in \mathscr{R}$ 使 $R = Exp(r)$

证明

1. ($\Leftarrow$ 这很显然,$r \in \mathscr{R}$ 是李群 ZD 的李代数, 由指数映射相关性质说明其成立
2. ZD 同构与 SO(3) 是紧致的连通李群, 保证其上的指数映射是到上映射, 故定理成立.

见书 P787.

定理 9.11

$B \in WZ \Leftrightarrow B = Exp(b), b \in \mathscr{B}$

证明 $B \in WZ \Leftrightarrow B = R^{-1}B_x R$, 参考定理9.2, 而 B_x 是由 b_1 这个生成元生出的, 故有

$$B_x = \text{Exp}(\nu b_1).$$

利用泰勒展开再在中间反复插入 R^{-1} 有下式

$$B = \text{Exp}(\nu R^{-1} b_1 R) \tag{9.4}$$

1. $(\Rightarrow)$ $B \in WZ \Leftrightarrow B = \text{Exp}(\nu R^{-1} b_1 R)$, 只需要证明 $\nu R^{-1} b_1 R \in \mathscr{B}$ 由定理9.9反向知道上式成立, 所以正向成立.
2. $(\Leftarrow)$ 已知 $B = \text{Exp}(b)$, 根据定理9.9有
$$B = \text{Exp}(\nu R^{-1} b_1 R).$$
根据式9.4知道 $B \in WZ$

定理 9.12

$\Lambda \in L_+^\uparrow \Rightarrow\Rightarrow R_1, R_2 \in ZD, \nu \in \mathbb{R}$ 使 $\Lambda = R_1(Exp(\nu b_1)R_2$

证明 由定理9.4和9.1, 知 $\exists R, \overline{R} \in ZD$ 使

$$\Lambda = \overline{R}^{-1} B_x \overline{R} R.$$

而 $B_x = \text{Exp}(\nu b_1)$, 最后令 $R_1 = \overline{R}^{-1}, R_2 = \overline{R} R$ 便有

$$\Lambda = R_1(\text{Exp}(\nu b_1))R_2.$$

9.3 用 killing 矢量场讨论洛伦兹代数

我们知道 PoincarPe 群 P 的李代数 $\mathscr{P}$ 同构于 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上的全体 killing 矢量场的集合 $\mathscr{K}$,killing 可以给我们一个更加直观的理解, 以下给出 $\mathscr{K}$ 的基矢

$$\xi_{t_0} = -\frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_{t_1} = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_{t_2} = -\frac{\partial}{\partial y} \quad \xi_{t_3} = -\frac{\partial}{\partial z} \tag{9.5}$$

$$\xi_{r_1} = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad \xi_{r_2} = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_{r_3} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \tag{9.6}$$

$$\xi_{b_1} = t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_{b_2} = t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_{b_3} = t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t}. \tag{9.7}$$

本节不考虑平移, 就是后两行六个基矢; 令 $\mathscr{K}_l \equiv \text{span}(\xi_{r_1}, \xi_{r_2}, \xi_{r_3}; \xi_{b_1}, \xi_{b_2}, \xi_{b_3})$, 则 $\mathscr{K}_l \subset \mathscr{K}$ 我们的目的是借 $\mathscr{K}_l$ 研究 $\mathscr{O}(1,3)$, 我们这里把式子9.3搬过来

$$\mathscr{O}(1,3) = \text{span}(r_1, r_2, r_3; b_1, b_2, b_3)$$

能够借 $\mathscr{K}_l$ 研究 $\mathscr{K}$ 的前提是它们李代数同构, 我们来看是如何同构的. 定义线性映射 $\psi : \mathscr{O}(1,3) \to \mathscr{K}_l$ 为

$$b_i \mapsto \xi_{b_i}, \quad r_i \mapsto \xi_{r_i}.$$

我们在前文中计算过 $\mathscr{K}$ 的李括号, 而书上 P770 给出了 $\mathscr{K}_l$ 的李括号, 很明显二者是一一对应的, 所以可以认为二者是同构的.

定理 9.13

以 X 和 $\frac{\partial}{\partial X}$ 分别代表由惯性坐标系 $\{t,x,y,z\}$ 的 4 个坐标和 4 个坐标基矢分别排成的列矩阵, 则

$$\xi_{r_i} = -X^T r_i^T \frac{\partial}{\partial X}, \quad \xi_{b_i} = -X^T b_i^T \frac{\partial}{\partial X}, \qquad i=1,2,3.$$

证明 证明比较简单代入计算即可, 这里只算一个

$$-X^T r_1^T \frac{\partial}{\partial X} = -\begin{bmatrix} t & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} t & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = -y\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} = \xi_{r_1}.$$

令 $\mathscr{K}_r = \text{span}(\xi_{r_1}, \xi_{r_2}, \xi_{r_3} \subset \mathscr{L}_l$, $\mathscr{K}_b = \text{span}(\xi_{b_1}, \xi_{b_2}, \xi_{b_3} \subset \mathscr{L}_l$ 求它们的李括号有

$$[\xi_{r_i}, \xi_{r_j}] = \varepsilon^k{}_{ij}\xi_{r_k}$$
$$[\xi_{b_i}, \xi_{b_j}] = -\varepsilon^k{}_{ij}\xi_{b_k}$$

可见 $\mathscr{K}_r$ 构成子代数, 而 $\mathscr{K}_b$ 只能构成子空间, 对应于 $\mathscr{R}$ 构成李子代数, 而 $\mathscr{B}$ 构成子空间, 不能构成子代数. 对于两个子空间并非所有的元素都可以表示为式9.6的形式, 但是下面定理表明加上某种转动后总能将其写为这种形式.

定理 9.14

设 $\mathscr{K}_r$ 由惯性坐标系 $X \equiv \{t,x,y,z\}$ 定义, 则 $\forall \xi \in \mathscr{K}_r, \exists \nu \in \mathbb{R}$ 以及与 X 同属于一个惯性参考系 $\tilde{X} = \{\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ 使

$$\xi = \nu(\tilde{y}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - \tilde{x}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}).$$

证明 $\xi \in \mathscr{K}_r \Rightarrow \xi = \rho^i \xi_{r_i} = \rho^i(-X^T r_3^T \frac{\partial}{\partial X}) = X^T \rho^i r_i \frac{\partial}{\partial X}$ 因为 $\rho^i r_i \in \mathscr{R}$ 根据定理9.8, 知道

$$\xi = X^T \nu R^{-1} r_3 R \frac{\partial}{\partial X} = \nu(RX)^T r_3 (R\frac{\partial}{\partial X}) = \nu(\tilde{X}) r_3 (\frac{\partial}{\partial \tilde{X}}) = -\nu(\tilde{X}) r_3^T (\frac{\partial}{\partial \tilde{X}}).$$

再根据定理9.13得到上面定理.

定理 9.15

设 $\mathscr{K}_b$ 由惯性坐标系 $X \equiv \{t,x,y,z\}$ 定义, 则 $\forall \xi \in \mathscr{K}_b, \exists \nu \in \mathbb{R}$ 以及与 X 同属于一个惯性参考系 $\tilde{X} = \{\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ 使

$$\xi = \nu(\tilde{t}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{x}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}).$$

笔记 整个大章节到这就结束了, 事实上书上还有几个定理, 包括托马斯进动的问题, 这里时间不够, 如有需要会进行补充, 详情见书 *P791*

第二部分

纤维丛的数学基础

Introduction

本部分的目的是学习纤维丛的数学基础并架起与物理之间的桥梁.

我们首先介绍一下切丛的概念,

$$\forall m \in M, F_m \equiv \{(m, v^a) \mid v^a \in V_m\}.$$

M 是流形,m 是其中一点,v^a 是 m 点的某个切矢. 为了更直观, 我们作图说明

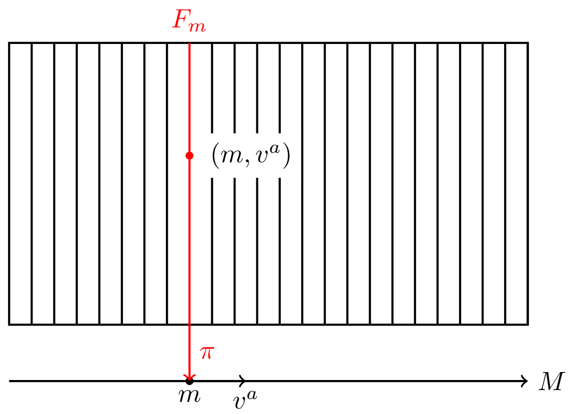

图 9.1: 切丛 TM 示意图

以 M 上方的竖直直线代表 F_m, 即一根**纤维 (fiber)**,M 上的每一点都有一个 F, 所有 F 的集合记为 TM, . 取 m 的邻域 O, 设 $\{x^\mu\}$ 是 M 的一个坐标系, 则 m 有 n 个坐标, v^a 也对应于 n 个实数 $v^\nu = v^a(dx^\nu)_a$, 以 (x^μ, v^ν) 作为点 (m, v^a) 的坐标变得 TM 的一个坐标系, 可以把 TM 定义为一个 2n 维流形, 称为流形的**切丛 (tangent bundle)**. 以上说明天然存在一个映射 $\pi : TM \to M$, 满足

$$\pi((m, v^a)) = m.$$

类似的可以定义**余切丛 (cotangent bundle)** T^*M 为

$$F_m^* \equiv \{(m, \omega_a) \mid \omega_a \in V_m^*\}.$$

切丛和余切丛都是**纤维丛 (fiber bundle)** 的特例.

本部分经常涉及丛流形 P 和底流形 M, 这里把 $p \in P$ 的切空间记为 T_pP, 类似 $m \in M$ 的切空间记作 T_mM. 一个**纤维丛**由四元组 (E, B, π, F) 构成，其中：

1. E 称为**总空间**（total space）,
2. B 称为**底空间**（base space）,
3. F 称为**纤维**（fiber）,
4. $\pi : E \to B$ 是一个连续满射，称为**投影映射**。

满足以下条件：

1. **局部平凡性**：对任意 $x \in B$，存在开邻域 $U \subseteq B$ 和同胚映射 $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_1 \\ U & \xrightarrow{\mathrm{id}} & U \end{array}$$

其中 $\mathrm{pr}_1 : U \times F \to U$ 是向第一个分量的投影。

2. **转移函数的相容性**：若 U_i 和 U_j 是底空间 B 的两个相交开集，则存在转移函数（结构群 G 的作用）：

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F,$$

且对任意 $x \in U_i \cap U_j$，映射 $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x, \cdot) : F \to F$ 属于结构群 $G \subseteq \mathrm{Aut}(F)$。

以上定义是 deepseek 给出的, 更为精确的定义可以参考其它文献. 接下来就正式开始.

第十章 主纤维丛 (Principal Fiber Bundles)

10.1 定义和例子 (definition and examples)

定义 10.1 (left action)

李群 G 在流形 K 上的一个**左作用** ***(left action)*** 是一个 C^∞ 映射 $L: G\times K \to K$, 满足:

1. $L_g: K\to K$ 是微分同胚 $\forall g\in G$;
2. $L_{gh} = L_g \circ L_h, \quad \forall g,h\in G$.

♣

定义 10.2 (right action)

李群 G 在流形 K 上的一个**右作用** ***(right action)*** 是一个 C^∞ 映射 $R: K\times G \to K$, 满足:

1. $R_g: K\to K$ 是微分同胚 $\forall g\in G$;
2. $R_{gh} = R_h \circ R_g, \quad \forall g,h\in G$.

♣

笔记 考察 $R_g(k), g\in G, k\in K$ 可以定义为 $R_g(k) := kg\in K$, 这是右作用; 如果是左作用 $L_g(k) := gk\in K$. 有一点值得强调的是这里的 kg, gk 只是一种满足上面的定义, 只要满足定义10.1,10.2就可以, 我们在后面10.10会有别的定义, 如果不特殊声明, 一般采用这里给出的定义.

定义 10.3 (free)

右作用 $R: P\times G\to P$ 称为**自由的** ***(free)***, 若 $g\neq e \Rightarrow pg\neq p \quad \forall p\in P$; 同理, 左作用 $R: G\times p \to P$ 称为**自由的** ***(free)***, 若 $g\neq e\Rightarrow gp\neq p \quad \forall p\in P$.

♣

定义 10.4 (orbit)

子集 $\{pg \mid g\in G\}\subset P$ 称为右作用 $R: P\times G\to P$ 过点 $p\in P$ 的**轨道** ***(orbit)***; 同理, 子集 $\{gp\mid g\in G\}\subset P$ 称为左作用 $R: G\times P\to P$ 过点 $p\in P$ 的**轨道** ***(orbit)***.

♣

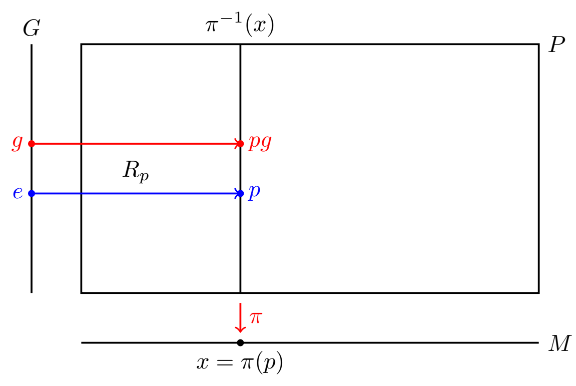

图 10.1: 主纤维丛图示

定义 10.5 (principal fiber bundle)

主纤维丛 ***(principipak fiber bundle)*** 是由一个叫做**丛流形** ***(bundle manifold)*** 的流形 P、一个叫做**底流形** ***(base manifold)*** 的流形 M 和一个叫做**结构群** ***(structure group)*** 的李群组成, 满足以下要求:

1. *G 在 P 上有自由右作用 $R : P \times G \to P$;*
2. *$\exists C^\infty$ 的、到上的投影映射 $\pi : P \to M$, 满足*

$$\pi^{-1}[\pi(p)] = \{pg \mid g \in G\}, \quad \forall p \in P; \text{见图}10.1.$$

3. *每一 $x \in M$ 有开邻域 $U \subset M$ 及微分同胚 $T_U : \pi^{-1}[U] \to U \times G$, 且 T_U 取如下形式*

$$T_U(p) = (\pi(p), S_U(p)), \quad \forall p \in \pi^{-1}[U].$$

其中映射 $S_U : \pi^{-1}[U] \to G$ 满足

$$S_U(pg) = S_U(p)g, \quad \forall g \in G.$$

具体含义见图10.2

♣

笔记 *原则上逆映射应该是一一到上的, 可是第二条明显不是这样, 在这里说的是集合之间的映射,$[\pi(p)]$ 应该理解为只有这一点的集合;[] 代表集合的映射; 为了便利起见, 今后把主纤维丛简称为主丛, 简记为 $P(M,G)$ 或者 P.*

由第一条知 $R_p : G \to P, R_p(g) = R(p,g) = R_g(p) \equiv pg$, 结合第二条知道 $pg \in \pi^{-1}[\pi(p)]$; 结合图10.1给出具体的含义, 随便给一个 p 点可以给出 R_p 来, 而 R_p 作用于 g, 给出 pg 和 p 同 fiber, 也就给出图中 pg 的位置, 可见有

$$R_p[G] = \pi^{-1}[\pi(p)] \Leftrightarrow R_p : G \to \pi^{-1}[\pi(p)].$$

事实上 R_p 是一个流形的嵌入映射, 且为一个微分同胚映射, 为什么是一个微分同胚映射, 我们这里把其解释的更清楚一些, 给定 p 后, 与其同 fiber 的纤维便定了下来, 满足条件 2, 即

$$g \in G \mapsto pg \in P.$$

如果 g 不同, 则 pg 不同, 反之亦然, 再结合上右作用的要求 C^∞, 可见 R_p 是一个微分同胚映射; 进一步要问,G 的群结构是否也能被带到 $\pi^{-1}[x]$ 上? 是可以的, 每一 $p' \in \pi^{-1}[x]$ 对应于 G 的一个元素, 即

$$p' = R_p(g) = R_g(p) = pg.$$

可以借用 G 的群乘法定义 $\pi^{-1}[x]$ 的群乘法为

$$(pg) \cdot (ph) := p(gh), \quad \forall pg, ph \in \pi^{-1}[x].$$

可以验证以上式定义的群乘法确实构成群, 但是 $\pi^{-1}[x]$ 不具有天生的群结构, 群同构映射 R_p 是 p 点依赖的.

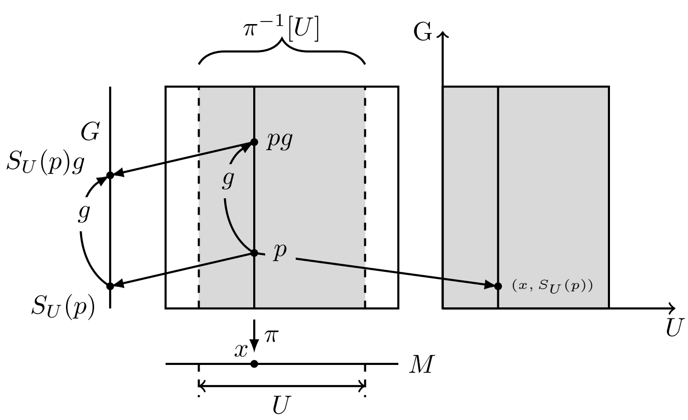

图 10.2: 条件 3

条件 3 很像是给主丛构建一个坐标系, 借用卡式积的概念, 如图10.2,p 点是主丛上的点, 而其在底流形上的对应是固定的, 由 π 映射到 M 上为 x, 抽象出来就是 $(x, \cdot)$, 对于第二个就比较灵活, 定义了 S_U 映射, 给出 $(x, S_U(p))$. 如果 x 的 U 可以要求到 $U = M$, 则 $T_M : P \to M \times G$, 也就意味着这时 P 和 $M \times G$ 微分同胚, 此时的 P 是**平凡 (trivial) 主丛**. 而当 $U \neq M$, 条件 3 要求 P 是局域平凡的, 所以 T_U 是一个**局域平凡 (local trivialization)**. 由

于 T_U 是微分同胚映射, 不难给出 $\pi^{-1}[x]$ 与 G 之间的映射 $S_U[\pi^{-1}[x]]$ 是微分同胚. 因而可以在 $\pi^{-1}[x]$ 上确定了一个特殊点 $\breve{p}_U$, 满足 $S_U(\breve{p}_U) = e \in G$, 结合主丛上定义的 R, 给出微分同胚映射 $R_{\breve{p}_U} : G \to \pi^{-1}[x]$, 且 $R_{\breve{p}_U}$ 与 $S_U : \pi^{-1}[x] \to G$ 互逆.

定理 10.1

$R_{\breve{p}_U}$ 与 S_U 互为逆映射.

证明 两个方向均是微分同胚映射, 所以一一到上是绝对成立的, 证明可逆只需要证明 $R_{\breve{p}_U} \circ S_U = S_U \circ R_{\breve{p}_U} = e$

1. 证明 $(R_{\breve{p}_U} \circ S_U) = e$
$$(R_{\breve{p}_U} \circ S_U)p = R_{\breve{p}_U} S_U(p) = R_{S_U(p)}\breve{p}_U = \breve{p}_U S_U(p)$$
由于 $p, \breve{p}_U \in \pi^{-1}[x]$, 不难知道存在 g 满足 $p = \breve{p}_U g$ 代入上式中有
$$(R_{\breve{p_U}} \circ S_U)p = \breve{p}_U S_U(\breve{p}_U g) = \breve{p}_U S_U(\breve{p}_U)g = \breve{p}_U eg = p.$$
所以等式成立.
2. 证明 $(S_U \circ R_{\breve{p}_U}) = e$
$$(S_U \circ R_{\breve{p}_U})g = S_U(R_{\breve{p}_U}(g)) = S_U(\breve{p}_U g) = S_U(\breve{p}_U)g = eg = g.$$
等式成立.

例 10.1 对任给的李群 G 和流形 M 总可以按如下三步构造一个主丛:
1. 选择 $P \equiv M \times G$ 为丛流形, 则 P 的任一点都可以表为 $p = (x, g), x \in M, g \in G$
2. 定义自由右作用 $R : P \times G \to P$ 为
$$R_h(x, g) := (x, gh), \text{即}(x, g)h = (x, gh), \quad \forall x \in M, h, g \in G.$$
3. 定义投影映射为
$$\pi(x, g) := x, \quad x \in M, g \in G.$$

以上构造的主丛是平凡的

设 $P(M, G)$ 是主丛, $T_U : \pi^{-1}[U] \to U \times G$ 和 $T_V : \pi^{-1}[V] \to V \times G$ 是两个局域平凡的, 且 $U \cap V \neq \varnothing$, 每一个 $p \in \pi^{-1}[U \cap V]$ 在 G 上有两个像点, 为 $g_U = S_U(p), g_V = S_V(p)$ 故有 $T_U(p) = (x, g_U), T_V = (x, g_V)$ 很明显 $T_U \cup T_V \supset P$, 原因很简单,$\pi^{-1}[U \cap V]$ 内的每一个元素对应于两个点 (或更多, 如果交的集合增加的话), 如果把这两个像点认为是同一个点, 那么 $P = T_U \cup T_V = P$, 也就天然的要求
$$g_U = g_U g_V^{-1} g_V = S_U(p) S_V(p)^{-1} g_V.$$
由此可以给出如下定义

定义 10.6 (transition function)

*设 $T_U : \pi^{-1}[U] \to U \times G$ 和 $T_V : \pi^{-1}[V] \to V \times G$ 是主丛 $P(M, G)$ 的两个局域平凡, $U \cup V \neq \varnothing$. 映射 $g_{UV} : U \cap V \to G$ 称为 T_U 到 T_V 的**转换函数 (transition function)**, 若*
$$g_{UV}(x) = S_U(p) S_V(p)^{-1}, \quad \forall x \in U \cap V, \quad \pi(p) = x.$$

有了上面定义, 难免会遇到这样的一个问题 p' 和 p 是有可能对应同一个 x(二者同 fiber 就行, 同时意味着 p', p 中间满足 $p' = pg$), 但是两者生成的 g_{UV} 是否还一致, 我们来看
$$S_U(p') S_V(p')^{-1} = S_U(pg) S_V(pg)^{-1} = S_U(p) g (S_V(p) g)^{-1} = S_U(p) g g^{-1} S_V(p)^{-1} = S_U(p) S_V(p)^{-1}.$$
由此说明无论是哪个 p, 只要映射到同一个 x, 之间的转换函数就是一样的.

定理 10.2

g_{UV} 满足如下性质

1. $g_{UU}=e, \quad \forall U\cap V$;
2. $g_{VU}(x)=g_{UV}(x)^{-1}, \quad \forall x\in U\cap V$;
3. $g_{UV}(x)g_{VW}(x)g_{WU}(x)=e, \quad \forall x\in U\cap V\cap W$

证明上面等式比较简单, 代入定义10.6便可以轻松看出. 上文提出, 在 $U\cap V\neq\varnothing$ 中, 每一个 p 可以经过 $T_U,T_V\cdots$ 映射到不同的的点, 为了保证 P 不变, 我们引入了转换函数, 更具体而言, 就是定义了一个等价关系

$$x=x',g=g_{UV}(x)g' \quad (x,g)\in U\times G,(x',g')\in V\times G \tag{10.1}$$

此时认为 (x,g) 等价于 (x',g') 记作 $(x,g)\sim(x',g')$, 数学上的等价关系必须具备如下性质.

1. **反身性**: 一个元素等价与自身, 即,$(x,g)\sim(x,g)$;
2. **对称性**: a 等价于 b, 则 b 等价于 a, 即 $(x,g)\sim(x',g')\Leftrightarrow(x',g')\sim(x,g)$;
3. **传递性**: a 等价于 b,b 等价于 c, 则 a 等价于 c, 即 $(x,g)\sim(x',g'),(x',g')\sim(x'',g'')\Rightarrow(x,g)\sim(x'',g'')$.

接下来让我们验证我们定义的式子10.1满足以上三个性质

1. 反身性: 由式10.1知
$$x=x,g=g_{UU}g=g.$$
可知反身性成立.
2. 对称性: 已知 $(x,g)\sim(x',g')$, 即
$$x=x',g=g_{UV}g'.$$
很轻松得到 $x'=x$, 对于另一个式子我么有
$$g'=g_{UV}(x)^{-1}g=g_{VU}(x)g$$
根据式子10.1知道 $(x',g')\sim(x,g)$, 对于反向的过程与之十分相似, 这里不证.
3. 传递性: 已知 $(x,g)\sim(x',g'),(x',g')\sim(x'',g'')$, 即
$$x=x' \quad g=g_{UV}(x)g' \quad x'=x'' \quad g'=g_{VW}g''.$$
不难给出 $x=x''$, 对于另一个式子有
$$g=g_{UV}g_{VW}g=g_{UW}.$$
则 $(x,g)\sim(x'',g'')$

笔记 注意:U 对应于 (x,g) ,V 对应于 (x',g'),W 对应于 (x'',g'').

定理 10.3

设 g_{UV} 是从局域平凡 T_U 到 T_V 的转换函数, $x\in U\cap V$, 以 $\breve{p}_U$ 和 $\breve{p}_V$ 分别代表由 T_U 和 T_V 在 $\pi^{-1}[x]$ 上确定的特殊点, 定义为

$$S_U(\breve{p}_U)=S_V(\breve{p}_V)=e\in G.$$

则

$$\breve{p}_V=\breve{p}_U g_{UV}(x).$$

证明 $\breve{p}_U,\breve{p}_V\in\pi^{-1}[x]$ 保证 $\exists g\in G$ 使

$$\breve{p}_V=\breve{p}_U g.$$

前文说明只要 $\pi^{-1}[x]$ 相同,g_{UV} 的选择与 p 无关, 不妨选择 $\breve{p}_V$

$$g_{UV}(x)=S_U(\breve{p}_V)S_V(\breve{p}_V)^{-1}=S_U(\breve{p}_V)=S_U(\breve{p}_U g)=eg=g$$

故有

$$\breve{p}_V = \breve{p}_U g_{UV}(x).$$

定义 10.7 (local (cross) section)

*设 $P(M,G)$ 是主丛, U 是 M 的开子集. C^∞ 映射 $\sigma: U \to P$ 称为一个**局域截面 (local (cross)section)** 若*

$$\pi(\sigma(x)) = x, \quad \forall x \in U.$$

♣

定理 10.4

局域截面和局域平凡之间存在一一对应关系.

♡

证明 定理是存在性, 证明二者是可以通过构造的方法.

1. 局域平凡可以给出一个局域截面

   选定 $T_U: \pi^{-1}[U] \to U \times G$ 后每一个 $x \in U$ 会有一个特殊点 $\breve{p}_U$, 就是上文中给出如下等式的那个点

   $$S_U(\breve{p}_U) = e \in G.$$

   每有一个 x 便有一个 $\breve{p}_U$, 即 $\breve{p}_U(x)$, 定义

   $$\sigma(x) := \breve{p}_U(x).$$

   我们给出了一个映射 $U \to P$, 接下来需要证明其是否是 C^∞ 的, 首先 $T_U(x, S_U(\breve{p}_U(x))$ 是 C^∞ 的, 又因为

   $$T_U(x, S_U(\breve{p}_U(x))) = T_U(x, e).$$

   不难看出 U 和 $\{\breve{p}_U[U]\}$ 是微分同胚的.

   笔记 *这里 hand-waving 一下, 上面的思路是底流形 M 是连续的 (即 M 与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚), 而选定 $\breve{p}_U$ 的集合作为这个截面的映射, 是因为这样相当于 2 维坐标系中,y 是常数,x 变化引出的曲线与 x 轴内对应的集合微分同胚, 在这里就是 U 和 $\{\breve{p}_U[U]\}$ 微分同胚.*

2. 给定局域截面可以构造一个对应的局域平凡. 给定 $\sigma: U \to P$ 后, 令 $\sigma(x)$ 为作为特殊点 $\breve{p}_U$, 对于和 $\sigma(x)$ 共纤维的点 p 有等式 $p = \sigma(x)g$, 对于 $\forall p \in \pi^{-1}[U]$ 定义

   $$T_U(p) := (x, g).$$

   这要验证上式满足定义10.5第三点中 S_U 的性质, 而这个性质就是说在 $\pi^{-1}[x]$ 上群元之间的关系和 G 的对应群元关系相同, 我们这里那 $\pi^{-1}[x]$ 的群元关系定义为 S_U, 自然满足, 我们就构造了一个局域平凡的映射, 并且特殊点为 $\sigma(x)$.

这样我们就建立起来了局域平凡和局域截面的一一对于关系.

我们构造出 $\sigma(x) \sim \breve{p}(x)$, 故 $\sigma(x)$ 满足如下等式

$$\sigma_V(x) = \sigma_U(x) g_{UV}(x) \quad \forall x \in U \cap V \tag{10.2}$$

定义 10.8 (global section)

*局部截面 $\sigma: U \to P$ 称为**整体截面 (global section)**, 若 $U = M$.*

♣

对应于平凡主丛, 会有整体截面的概念, 上面定义也满足平凡主丛的要求, 不过由于局部平凡的主丛更有用, 所以整体截面很少见到.

例 10.2 设 $M = S^1, G = Z_2$, S^1 是一维圆周, $Z_2 = \{e, h\}$ 是 0 维李群, 其中 $eh = he = h, hh = e$, 按照例10.1可以构造一个平凡主丛 $P = S^1 \times Z_2$, 不难看出 P 是两个不连通的圆周的并, 对主丛加以修改得到非平凡主丛, 见例10.3

例 10.3 令 $P = S^1, G = Z_2$, S^1, Z_2 和例10.2一致. 需要定义右作用 $R: P \times G \to P$, 即 $R: S^1 \times Z_2 \to S^1$, 按照如

下定义

$$R_e(p_\theta) := p_\theta$$
$$R_h(p_\theta) := p_{\theta+\pi}.$$

θ 是圆周上的角度坐标. 如图10.3所示, 根据定义的右作用可以给出虚线两个端点同 fiber, 把下半圆投影到下方直线再加上端点认同下方直线就是底流形 M, 由于对径认同 M 和 S^1 有相同的拓扑结构, 也就是 $\{a_1, a_2\}$ 投影到 a 点, 其它类似. 此时 $P \neq M \times G$, 原因是 $M \times G = S^1 \times G$ 是两个圆周, 而 P 是一个自然就不是平凡主丛. 更形象的图见书 p1089, 图 I-7.

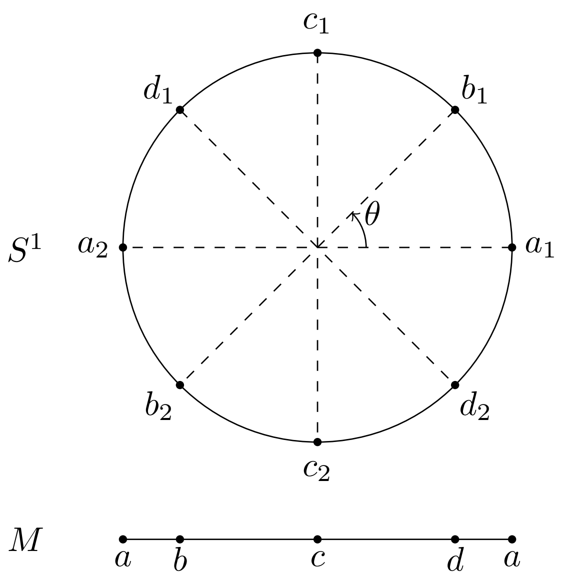

图 10.3: 例 3

例 10.4 设 M 是 n 维流形, 以 T_xM 代表 $x \in M$ 的切空间, 令

$$P \equiv \{(x, e_\mu) | x \in M, \{e_\mu\} 是 T_xM 的一个基底\}.$$

首先看 P 是否是一个流形; 设 (O, ψ) 是 M 的一个坐标系, 坐标为 $\{x^\mu\}$, 则每个 e_μ 可以使用坐标基底展开

$$e_\mu = e^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

则 (x, e_μ) 可以用一组实数 $(x^\sigma, e^\nu{}_\mu)$ 来刻画, 共计 $n + n^2$ 个, 也就是说 P 上存在坐标 $(x^\sigma, e^\nu{}_\mu) \in R^{n+n^2}$, 流形的定义有两点,1 任意开覆盖子集同胚于用 $\mathbb{R}^n$ 刻画的开子集;2 重叠的区域诱导出的多个 $\mathbb{R}^n$ 之间的映射是 C^∞, 对于 M 本身的要求只有第一点, 这里已经满足了. 故 P 是一个流形.

根据主丛的要求, 可以选 $GL(n)$ 为结构群 G, 通过以下三步构造一个主丛

1. 定义矩阵群 $GL(n)$ 在 P 上的自由右作用 $R : P \times GL(n) \to P$ 为

$$R_g(x, e_\mu) := (x, e_\nu g^\nu{}_\mu), \quad \forall g \in GL(n).$$

GL(n) 是可逆映射不会改变基矢之间的线性独立性, 因此会变换到新的基矢量;

2. 定义投影映射 $\pi : P \to M$ 为 $\pi(x, e_\mu) := x, \quad \forall (x, e_\mu) \in P$;
3. $\forall x \in M$, 总有坐标系 $\{x^\mu\}$ 其坐标域 U 含 x. 定义局域平凡 $T_U : \pi^{-1}[U] \to U \times G$ 为

$$T_U(x, e_\mu) := (x, h).$$

其中 $h \equiv S_U((x, e_\mu))$ 满足如下等式

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} |_x h^\nu{}_\mu = e_\mu \Leftrightarrow S_U((x, e_\mu)) = e_\nu h^\nu{}_\mu.$$

接下来需要验证 h 满足如下等式

$$S_U((x,e_\mu)g)=S_U((x,e_\mu))g.$$

用第二个式子更好给出

$$S_U((x,e_\mu)g)=S_U((x,e_\mu g))=e_\nu h^\nu{}_\mu g=S_U((x,e_\mu))g.$$

笔记 事实上 g 也应该写上指标, 不过这里足够清楚, 就没有遵守指标的一个平衡.

由于 $\det(g^\mu{}_\nu)\neq=0$ 且有限维的线性映射总是光滑的, 不难给出 T_U 是微分同胚的.

由于基底又名标架, 所以由以上构造出的主丛 $P(M,GL(n))$ 称为**标价丛 (frame bundle)**

例 10.5 若在 M 上定义了度规场, 对于标架而言便可以讨论正交归一性. 以洛伦兹时空为例

$$P\equiv\{(x,\hat{e}_\mu)\mid x\in M\}\hat{e}_\mu\text{代表}T_xM\text{上的正交归一基底}.$$

选择 $O(1,3)$ 为结构群的话, 按照例10.4定义给出的主丛称为**正交归一标价丛 (orthogonal frame bundle)**.

10.2 主丛上的基本矢量场 (Fundmental Vector Feilds)

主丛 P 上的每点 p 可以定义切空间 T_pP, 同样的对于过 p 点的纤维 $\pi^{-1}[\pi(p)]$ 可以给出其切矢 X, 它们之间的关系是

$$X\in T_p\pi^{-1}[\pi(p)]\subset T_pP.$$

具体理解为 X 切于过 p 点的躺在 $\pi^{-1}[\pi(p)]$ 上的一条曲线,π 把这条曲线映射到一点 $\pi(p)$, 我们定义的推前映射 (切映射) π_* 可以给出切矢量在底流形的像, 由于底流形上只有一点, 故而有

$$\pi_*(X)=0.$$

不妨令 $V_p=T_p\pi^{-1}[\pi(p)]$, 则可以给出 V_p 的定义式

$$V_p:=\{X\in T_pP\mid\pi_*(X)=0\}.$$

把满足 $\pi_*(X)=0$ 的 X 称为**竖直矢量**, 把 V_p 称为**竖直子空间 (vertical subspace)**.

笔记 根据图*10.1*容易把 X 理解为垂直于 M 的矢量, 这是片面的, 如果李群 G 是多维度的, π 依旧会将其映射到一个点, 但是此时的 M 却不一定垂直于 M.

定理 10.5

设 $P(M,G)$ 是主丛, V_p 是点 $p\in P$ 的切空间 T_pP 的竖直子空间, $\mathscr{G}$ 是 G 的李代数, 则 V_p 与 $\mathscr{G}$ 作为矢量空间有自然的同构映射.

证明 右作用 $R:P\times G\to P$ 对每一个 p 给出一个微分同胚映射 $G\to\pi^{-1}[\pi(p)]$, 且 $R_p(e)=p$, 所以 R_p 在恒等元 $e\in G$ 给出推前映射 $R_{p*}:T_eG\to T_p\pi^{-1}[\pi(p)]$, 而 $\mathscr{G}$ 同构于 T_eG, $V_p=T_p\pi^{-1}[\pi(P)]$ 故 $R_{p*}:\mathscr{G}\to V_p$, 微分同胚映射诱导出来的切映射自然是一一对应的, 不难给出两个矢量空间同构.

定义 10.9 (Fundmental Vector Field)

给定 $A\in\mathscr{G}$ 后, 每点 $p\in P$ 可以给出一个竖直矢量 A^*_p

$$A^*_p:=R_{p*}A,\forall p\in P.$$

因而每一 $A\in\mathscr{G}$ 在 P 上生出一个竖直矢量场 A^*, 称为由 A 诱导的**基本矢量场 *(fundmental vector field)***

定理 10.6

设 T_U 是局域平凡, $x \in U$, 则微分同胚 $S_U : \pi^{-1}[x] \to G$ 的推前映射 S_{U*} 把 $\pi^{-1}[x]$ 上的基本矢量场 A^* 映为 G 上由 $A \in \mathscr{G}$ 生成的左不变矢量场 $\overline{A}$, 即

$$S_{U*}A^* = \overline{A}.$$

♡

证明 $\forall p \in \pi^{-1}[x]$, 令

$$g \equiv S_U(p) \in G.$$

只需要验证 S_{U*} 把 p 点的基本矢量场映射为左不变矢量场在 g 点的值即

$$S_{U*}A_p^* = \overline{A}_g.$$

首先 $\overline{A}_g = L_{g*}A$,$L_g : G \to G$ 是由 $g \in G$ 生成的左平移映射, 对于任意 $g' \in G$, 有

$$R_{pg}g' = R_{g'}(pg) = pgg' = R_{gg'}(p) = R_p(gg') = R_p(L_g(g')) = R_p \circ L_g(g').$$

即 $R_{pg} = R_p \circ L_g$; 另外由 $g = S_U(p)$ 不难给出

$$p = S_U^{-1}(g) = R_{\breve{p}_U}(g) = \breve{p}_U g.$$

引用了定理10.1.

故

$$\begin{aligned}
S_{U*}A_p^* &= S_{U*}R_{p*}A \qquad \text{定义10.9} \\
&= S_{U*}R_{\breve{p}_U g*}A \\
&= S_{U*}(R_{\breve{p}_U} \circ L_g)_*A \\
&= (S_U \circ R_{\breve{p}_U})_* L_{g*}A \\
&= (e)_* L_{g*}A \\
&= (L_e \circ L_g)_*A \\
&= L_{g*}A = \overline{A}_g.
\end{aligned}$$

矢量 $A \in T_eG$ 作为生成元, 可以在 G 上生成一个单参子群 $\exp(tA) \in G, t \in \mathbb{R}, A \in \mathscr{G} = T_eG$, 结合 $p \in P$ 可以给出 $\pi^{-1}[\pi(p)]$ 内的一条曲线, 其在 p 点的切矢是 A_p^*, 表述为如下定理.

定理 10.7

$A_p^* = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} [p(\exp(tA)]$

♡

证明

$$A_p^* = R_{p*}A = R_{p*}\left[\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tA)\right] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}[R_p \exp(tA)] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}[p\exp(tA)].$$

笔记 这里使用的基本原理是像的切矢等于切矢的像.

定理 10.8

设 $P(M, G)$ 是主丛, $A \in T_eG, t \in \mathbb{R}$, 定义 $\phi_t : P \to P$ 为

$$\phi_t(p) := p\exp(tA), \quad \forall p \in P.$$

则 $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ 是由矢量场 A^* 产生的单参微分同胚群.

♡

证明 $\forall p \in P, \phi_t(p) = p\exp(tA) = R_{\exp(tA)}(p)$, 在定义10.5下面我们说明了 R_g 是微分同胚映射, 对应到这里就是 ϕ_t 是微分同胚映射. 根据单参子群的定义要求 ϕ_t 为 C^∞ 曲线且满足 $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$, 我们逐步来看, 首先不妨令

$$\gamma(tA) = \exp(tA).$$

在第四章中曾说明 $\gamma(t)$ 是单参子群, 也就是说存在两次映射

$$t \mapsto \gamma(tA) \mapsto \phi_t(p).$$

这两次均是 C^∞ 的, 所以对于第一个条件满足, 我们来看第二个

$$(\phi_t \circ \phi_s)(p) = \phi_t(p) \circ \phi_s(p) = (p(\exp(tA))) \cdot (p(\exp(sA))) = p(\exp(tA)\exp(sA)) = p(\exp((t+s)A)) = \phi_{t+s}(p).$$

笔记 注意这里定义的群乘法和 G 上的不同, 这里定义的群乘法在定义10.5下方; 对于第一个等号而言我们给出

$$(\phi_t \circ \phi_s)(p) = (\phi_t)(\phi_s(p)) = \phi_t(p\exp(tA)) = p(\exp(tA)\exp(sA)).$$

根据定义的群乘法给出了第一个等号 (这个等号描述的是同一个东西本该相等, 这里只是验证一下), 这也从侧面说明这样群乘法定义的合理性.

目前为止, 我们说明了 ϕ_t 是单参子群, 又因为是微分同胚映射, 故 ϕ_t 是单参微分同胚群 (定义见书 P46), 接下来只需要证明其是由 A^* 产生的即可, 也就是说证明 $p(\exp(tA)$ 是 A^* 的积分曲线, 即证明 $\frac{d}{dt}\big|_{t=s} p\exp(tA) = A^*_{\phi_s(p)}$

$$\begin{aligned}
A^*_{\phi_s(p)} &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [\phi_s(p)(\exp(tA)] \quad \text{定理10.7} \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [p\exp(sA)\exp(tA)] \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [p\exp(t+s)A] \quad \text{令} t' = t+s \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t'=s} p\exp(t'A) \quad \text{令} t = t' \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=s} p\exp(tA)
\end{aligned}$$

至此证明结束.

定理 10.9

竖直矢量场 A^* 服从如下公式

$$R_{g_*}A^*_p = (\mathscr{A}d_{g^{-1}}A)^*_{pg}, \quad \forall p \in P, g \in G, A \in \mathscr{G}.$$

证明

$$\begin{aligned}
R_{g_*}A^*_p &= R_{g*}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}[p(\exp(tA)] \quad \text{定理10.7} \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} R_g[p(\exp(tA)] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p(\exp(tA)g \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} pgg^{-1}(\exp(tA))g \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} R_{pg}(g^{-1}(\exp(tA))g) \quad \text{注意分清 P 的元素和 G 的元素} \\
&= R_{pg*}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (I_{g^{-1}}(\exp(tA))) \quad \text{利用了伴随表示的定义} \\
&= R_{pg*}(I_{g^{-1}*}A) = R_{pg*}(\mathscr{A}d_{g^{-1}*}A) \quad \text{见第 8 章定义} \\
&= (\mathscr{A}d_{g^{-1}}A)^*_{pg}.
\end{aligned}$$

笔记 该定理表述了由 A 生成的竖直矢量场在 p 点的值经过 g 的右作用诱导出的推前映射所得的像等于 A 经过 g^{-1} 伴随表示的切映射生成的矢量场在 pg 的值.

定理 10.10

设 $[A, B] \in \mathscr{G}$ 是 $A, B \in \mathscr{G}$ 的李括号,$[A^*, B^*]$ 是矢量场 A^*, B^* 的对易子, 则 P 上有矢量场等式

$$[A^*, B^*] = [A, B]^*.$$

♡

证明 这个定理所要表达的含义就是

借助右作用可以定义李变换群 (G 对 P 的左作用) 为

$$\sigma(g, p) := R_{g^{-1}}(p).$$

不难验证 $\sigma_{gh}(p) = R_{(gh)^{-1}}(p) = ph^{-1}g^{-1} = R_{g^{-1}} \circ R_{h^{-1}}(p)$ 满足定义10.1的要求 2, 第一点由右作用自动满足.

对于李变换群上的每一个单参微分同胚群存在映射 $\chi : \mathscr{G} \to \mathscr{K}$ 与之对应的 C^∞ 矢量场 $\overline{\xi}$

$$\overline{\xi} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_p(\exp(tA)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_p(\exp(-tA)) = R_{p*}(-A) = -A_p^*.$$

故 $\chi(A) = -A^*$, 根据第七章内容有李代数同构 $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{K}$ 满足 $\psi(A) = A^*$ 保李括号, 于是

$$[A^*, B^*] = [\psi(A), \psi(B)] = \psi([A, B]) = [A, B]^*.$$

第十一章 主丛上的联络 (Connection In a Principal Fiber Bundle)

在主丛 P 上定义一个称为联络的附加结构, 后便可讨论水平子空间, 这里不太严谨的说明一下, 正如图10.2右面显示的那样, 竖直子空间是 G 方向的矢量空间, 水平子空间是 U 方向的矢量空间.

11.1 主丛联络的三个等价定义 (Three Equivalent Definitions of Connection)

介绍定义之间补充关于直和的概念.

定义 11.1 (direct sum)

矢量空间 V 称为其子空间 V^1 和 V^2 的**直和** ***(direct sum)***, 记

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

若 $v \in V$ 有唯一的 $v_1 \in V_1$ 和 $v_2 \in V_2$, 使

$$v = v_1 + v_2.$$

♣

不难给出

1. $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;
2. $V_1 \cap V_2 = \{0\} \subset V$

证明

1. 对于 $\forall v \in V$, 有

$$\dim(v) = \dim(v_1 + v_2) \quad \exists v_1 \in V_1, V_2 \in V.$$

由于 v_1, v_2 线性无关, 则

$$\dim(v_1 + v_2) = \dim(v_1) + \dim(v_2).$$

对 $\forall v \in V$ 成立, 即

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2.$$

2. 首先 $V_1 \subset V, V_2 \subset V$, 对于 $v \in V_1 or v \in V_2$, 要想满足式子 $v = v_1 + v_2$, 则三者都有零元, 假设 $V_1 \cap V_2$ 有除去零元的元素 $v_{1a}, a = 1, 2$ 代表属于不同的空间. 假设 $v \in V$, 有

$$v = v_{11} + v_2 = v_{12} + v_2.$$

可以看出 $\exists$ 情况 $v_{11} \neq 0, v_2 \neq v_{12} + v_2$, 我们找到了第二种组合, 与定义11.1 要求不符合, 故没有除了零元外的集合.

定义 11.2 (Connection(1))

主丛 $P(M, G)$ 上的一个**联络** ***(connection)*** 是对每点 $p \in P$ 指定一个**水平子空间** ***(horizontal subspace)***$H_p \subset T_pP$, 满足

1. $T_pP = V_p \oplus H_p, \quad \forall p \in P$;
2. $R_{g*}[H_p] = H_{pg}, \quad \forall p \in P, g \in G$;
3. H_p 光滑地依赖于 p.

♣

条件 1 不难理解, 条件 2 要求 T_pP 的 H_p 在 R_{g*} 作用下的像等于 $T_{pg}P$ 的水平子空间, 这个定义非常自然; 条件 3 的准确含义是: 每一 $p \in P$ 有邻域 N, 其上存在 $n = \dim M$ 个光滑矢量场, 它们在任一 $q \in N$ 的值可以当作 H_q 的基底.

$\pi: P \to M$ 在点 $p \in P$ 的推前映射 $\pi_*: T_pP \to T_xM$ 把 π_* 的定义域限制到 H_p 上, 我们自然希望 $\pi_*: H_p \to T_xM$ 是一个同构映射, 下面来证明:

$$\begin{aligned}\dim H_p &= \dim T_pP - \dim V_p = \dim P - \dim \mathscr{G} \\ &= \dim(M \times G) - \dim G = \dim M + \dim G - \dim G = \dim M = \dim T_xM\end{aligned}$$

既然 H_p 和 T_xM 维度相同, 在这个前提下我们只需要证明一一性或到上性两者之一, 这里证明一一性.

笔记 如果映射前后的矢量空间同维度, 如果一一性成立, 也就是说 H_p 势必会在 T_xM 上的不同的像上, 我们讨论的均为线性映射, 也就是说不改变线性独立性, 则映射过去的像可生成矢量空间 T_xM 即是到上的; 反过来, 如果映射到上性成立, 也就是说, 每一个 T_xM 都会有逆像, 同样的由于线性独立性, 加上同维的话, 每个逆像只会有一个, 也就是一一性成立.

设存在 $X, X' \in H_p$ 使得 $\pi_*X = \pi_*X'$, 则 $\pi_*(X - X') = 0$, 根据竖直子空间定义给出 $X - X' \in V_p$, 又因为 $X, X' \in H_p$, 所以 $X - X' \in H_p$, 再结合上 $V_p \cap H_p = \{0\}$, 故

$$X - X' = 0.$$

所以一一性成立, 每个 T_xM 只会对应于一个逆像, 最后给出 H_p 同构于 T_xM.

在阐述第二个定义之前, 还需要补充一些数学知识, 假设我们有一个流形 M 其上存在映射 $f: M \to \mathbb{R}$, 此时 f 是 M 上的 0 形式场 (标量场函数) 以 $\Lambda_M(0)$ 代表光滑的 0 形式场, 如果 f 是光滑的, 则有 $f \in \Lambda_M(0)$

笔记 如果 $f: M \to \mathbb{R} or \mathbb{C}$, 那么 $f \in \Lambda_M(0, \mathbb{R} or \mathbb{C})$, 即实数取值或复数取值的 0 形式场.

进一步可以推广到矢量空间的 0 形式场, 如果 $f^1, \cdots, f^R \in \Lambda_M(0, \mathbb{R} or \mathbb{C})$,$e_r \in$ 矢量空间 $\mathscr{V}$, 令

$$f \equiv e_1 f^1 + \cdots + e_R f^R = e_r f^r.$$

则有

$$f(x) = e_r f^r(x) \in \mathscr{V}, x \in M$$

这样我们给出了 $f \in \Lambda_M(0, \mathscr{V})$.

接下来我们给出 l 形式场, 我们假定 $\varphi^1, \cdots, \varphi^R \in \Lambda_M(l, \mathbb{R} or \mathbb{C})$, 再配上矢量空间基矢, 有

$$\varphi \equiv e_r \varphi^r \in \Lambda_M(l, \mathscr{V}).$$

则对于 $v_1, \cdots, v_l$ 是 M 上 x 点的矢量

$$\varphi|_x (v_1, \cdots, v_l) := e_r \varphi^r|_x (v_1, \cdots, v_l) \in \mathscr{V}.$$

我们接下来给出微分形式

$$d\varphi = e_r d\varphi^r \in \Lambda_M(l+1, \mathscr{V}).$$

定义 11.3 (Connection(2))

主丛 $P(M, G)$ 上的**联络**是 P 上的一个 C^∞ 的 $\mathscr{G}$ 值 1(一) 形式场 $\tilde{\omega}$, 满足:

1. $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(A_p^*) = A, \quad \forall A \in \mathscr{G}, p \in P$;
2. $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{pg}(R_{g*}X) = \mathscr{A}d_{g^{-1}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p(X), \quad \forall p \in P, g \in G, X \in T_pP$

♣

笔记 $\mathscr{G}$ 值 1 形式场 $\tilde{\omega}$ 意味着 $\tilde{\omega}$ 作用到矢量上给出 $\mathscr{G}$ 的元素.

条件 2 有一个等价条件 2', 即 $\forall x \in M, \exists p \in \pi^{-1}[x]$ 使

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{pg}(R_{g*}X) = \mathscr{A}d_{g^{-1}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p(X), \quad \forall g \in G, X \in T_pP$$

两个条件是有微妙的不同的, 条件 2 是先指定 p, g, X 满足公式, 而条件 2' 是在 M 上指定 x 后, 能在 P 上找到一个等式满足等式. 我们来证明等价性

1. $(2 \Rightarrow 2')$ 条件 2 成立, 对于条件 2' 上, 势必会找到一点 p 满足要求等式, 因为条件 2 要求所有 p 都满足.
2. $(2' \Rightarrow 2)$, 条件 2' 成立, 给出了 P 的每条纤维上至少有一点 p 满足 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{pg}(R_{g*}X) = \mathscr{A}d_{g^{-1}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p(X), \quad \forall g \in G, X \in T_pP$, 我们的思路是证明与 p 相关的点 pg 和 p' 之间存在条件 2 的关系

对于同纤维上的 p' 点, 有如下等式

$$p' = pg', \quad \forall p' \in \pi^{-1}[\pi(p)], g' \in G.$$

则 $p = p'g'^{-1}$, 代入等式有

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}g}(R_{g*}X) = \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}}(X).$$

对于等式左面有

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}g}(R_{g*}X) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}g}(R_{g'g'^{-1}g*}X) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}g}(R_{g'^{-1}g}R_{g'})_*X = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}g}R_{g'^{-1}g*}X'. \tag{11.1}$$

X' 是 p' 的切空间, 对于等式右面有

$$\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}}(X) = \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}}(R_{g'g'^{-1}*}X) = \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}}(R_{g'^{-1}*}X'). \tag{11.2}$$

对于 p 点而言 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{pg}(R_{g*}X) = \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p(X), \quad \forall g \in G, X \in T_pP$, 故有

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{pg'}(R_{g'*}X) = \mathscr{A}d_{g'^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p(X) \tag{11.3}$$

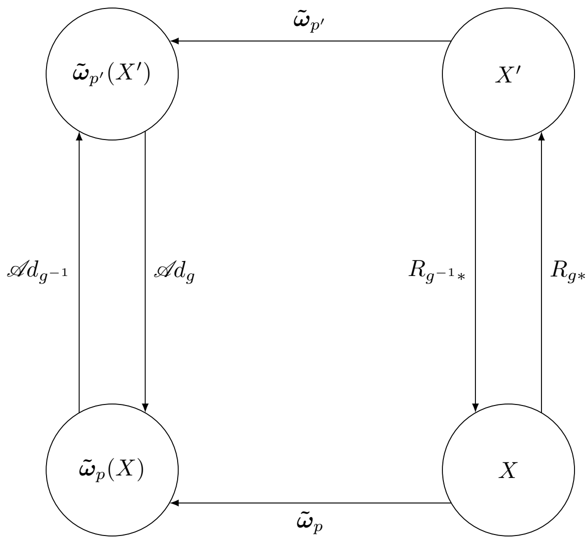

图 11.1: 形式场给出的矢量空间的联系

也就是说如图11.1所示,$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'}(X')$ 有两种途径得到, 这也是式11.3所要表达的含义, 我们知道推前映射 R_{g*} 是线性映射, 且 $\dim X = \dim X'$, 也就是说 X 和 X' 是同构的矢量空间, 而 $\tilde{\omega}_p(X)$ 和 $\tilde{\omega}'_p(X')$ 都是 G 的恒等元的矢量空间, 彼此之间也同构, 所以我们可以给出关系

$$\tilde{\omega}_p(R_{g^{-1}*}X') = \mathscr{A}d_g\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'}(X').$$

代入式子11.2有, 注意式子11.2反应 p 和 p' 之间关系的群元是 g'

$$\begin{aligned}\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}}(R_{g'^{-1}*}X') &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p(R_{g'^{-1}*}X') = \mathscr{A}d_{g^{-1}}\mathscr{A}d_{g'}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'}(X') \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}g'}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'}(X') = \mathscr{A}d_{(g'^{-1}g)^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'}(X')\end{aligned}$$

最后, 结合上面所有讨论我们给出

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'g'^{-1}g}R_{g'^{-1}g*}X' = \mathscr{A}d_{(g'^{-1}g)^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p'}(X').$$

而 $p'g'^{-1}g = pg$, 也就是说与 p 联系的两点 p', pg 可以给出条件 2 的式子, 而与 p 同 fiber 的所有点都有联系, 也就是说所有的点都有条件 2' 给出的关系, 也就是条件 2 成立

下面我们正式证明定义11.2和定义11.3等价, 给出定理

定理 11.1

定义*11.2*和定义*11.3*等价

证明 (定义11.3 ⇒ 定义 11.2) 设 $\tilde{\omega}$ 是定义 11.3的联络, 就可以给每一 $p \in P$ 的切空间 T_pP 定义如下的线性水平子空间

$$H_p := \{X \in T_pP \mid \tilde{\omega}_p(X) = 0\}.$$

1. **定义11.3⇒ $T_pP = V_p \oplus H_p$, $\forall p \in P$** : 我们令 $A \equiv \tilde{\omega}_p(X) \in \mathscr{G}$ 则有 $X_1 \equiv A_p^* \in V_p$, 再令 $X_2 \equiv X - A_p^*$, 则

$$\tilde{\omega}_p(X_2) = \tilde{\omega}_p(X) - \tilde{\omega}_p(A_p^*) = A - A = 0.$$

笔记 第一步是因为 l 形式场本质上是 $(0, l)$ 型张量, 结合张量的定义, 可知 $\tilde{\omega}_p$ 是线性的, 第二步用了*11.3*的条件 *1*

所以 $X_2 \in H_p$, 由 $X_2 \equiv X - A_p^*$ 得 $X = X_1 + X_2$, 下面我们来说明分解的唯一性, 每有一个 X 便会给出一个 A, 也就是说一一性成立, 也就是说 $X \mapsto A$ 是唯一的, 再根据上面的步骤, 不难得到 X_2 亦是唯一的, 也就是说分解具有唯一性.

2. **定义11.3⇒ $R_{g*}[H_p] = H_{pg}$, $\forall p \in P, g \in G$:** 设 $X \in H_p$, 则有

$$\tilde{\omega}_{pg} R_{g*} X = \mathscr{A}d_{g^{-1}} \tilde{\omega}_p(X) = \mathscr{A}d_{g^{-1}} 0 = 0 \Rightarrow R_{g*} X \in H_{pg}.$$

所以 $R_{g*}[H_p] \subset H_{pg}$, 现在令 $Y \in H_{pg}$, 重复上面步骤

$$\tilde{\omega}_p R_{g^{-1}*} Y = \mathscr{A}d_g \tilde{\omega}_{pg}(X) = \mathscr{A}d_g 0 = 0 \Rightarrow R_{g^{-1}*} Y \in H_p.$$

则 $R_{g^{-1}*}[H_{pg}] \subset H_p$, 故 $H_p = H_{pg}$

3. H_p 光滑地依赖于 p 由 $\tilde{\omega}$ 是 C^∞ 来保证.

笔记 还是来一点 *hand-waving*,H_p 是光滑地依赖于 *p*, 也就是说可以在 p 上定义一个 C^∞ 的矢量场, 而 $\tilde{\omega}$ 可以把 X 映射到 $\mathscr{G}$ 和 H_p, $\tilde{\omega}$ 的 C^∞ 保证了两个矢量空间是光滑的, 从侧面应证了,X 在 p 的邻域上是光滑的.

(定义11.2 ⇒ 定义 11.3) 在这里我们只要找到 $\tilde{\omega} \in \Lambda_p(1, \mathscr{G})$ 满足定义11.3的要求即可, 根据定义11.2 $\forall X \in T_pP, \exists$ 唯一的 $X_1 \in V_p, X_2 \in H_p$ 满足 $X = X_1 + X_2$. $X_1 \in V_p \Rightarrow \exists$唯一$A \in \mathscr{G}$满足, $X_1 = A_p^*$, 故 $X = A_p^* + X_2$, 定义

$$\tilde{\omega}_p(X) = \tilde{\omega}_p(A_p^* + X_2) := A \quad \forall p \in P \tag{11.4}$$

$\tilde{\omega}$ 的 C^∞ 由定义11.2第三条保证, 我们来验证满足定义11.3要求

1. 由式11.4得 $\tilde{\omega}_p(A_p^*) = A$;
2. 因为 $\tilde{\omega}$ 是线性的, 所以只需要证明 $\tilde{\omega}_p(X_1)$ 和 $\tilde{\omega}_p(X_2)$ 满足即可, 由定义11.2条件 2 知道 $R_{g*} \in H_{pg}$, 所以 $\tilde{\omega}_p(X_2) = 0, \tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X_2) = 0$, 不难给出

$$\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X_2) = \mathscr{A}d_{g^{-1}} \tilde{\omega}_p(X_2).$$

对于 $\tilde{\omega}_p(X_1)$ 有

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X_1) &= \tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}A_p^*) = \tilde{\omega}_{pg}[\mathscr{A}d_{g^{-1}}A)_{pg}^*] \quad \text{第二个等号用到定理10.9} \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}A = \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(A_p^*) \quad \text{这两步是定义11.3条件 1(已经验证过了)} \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p X_1.\end{aligned}$$

定义 11.4 (Connection(3))

主丛 $P(M, G)$ 的一个 **联络**是对每个局域平凡 $T_U : \pi^{-1}[U] \to U \times G, U \subset M$ 指定一个 U 上的 C^∞ 的 $\mathscr{G}$ 值的 *1* 形式场 ω_U. 如果 $T_V : \pi^{-1}[V] \to V \times G$ 是另一局域平凡,$U \cap V \neq \varnothing$, 从 T_U 到 T_V 的转换函数为 g_{UV}, 则还要求

$$\omega_V(Y) = \mathscr{A}d_{g_{UV}(x)^{-1}} \omega_U(Y) + L^{-1}_{g_{UV}(x)*} g_{UV*}(Y), \quad \forall x \in U \cap V, Y \in T_xM.$$

我们来理解一下这个等式,$\mathscr{A}d_{g_{UV}(x)^{-1}}\boldsymbol{\omega}_U(Y)$ 是李代数元, 不难猜想 $L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)$ 也是李代数元, 事实上确实是, 我们可以根据图11.2看出它们之间的关系. (注意红色部分与蓝色部分的联系)

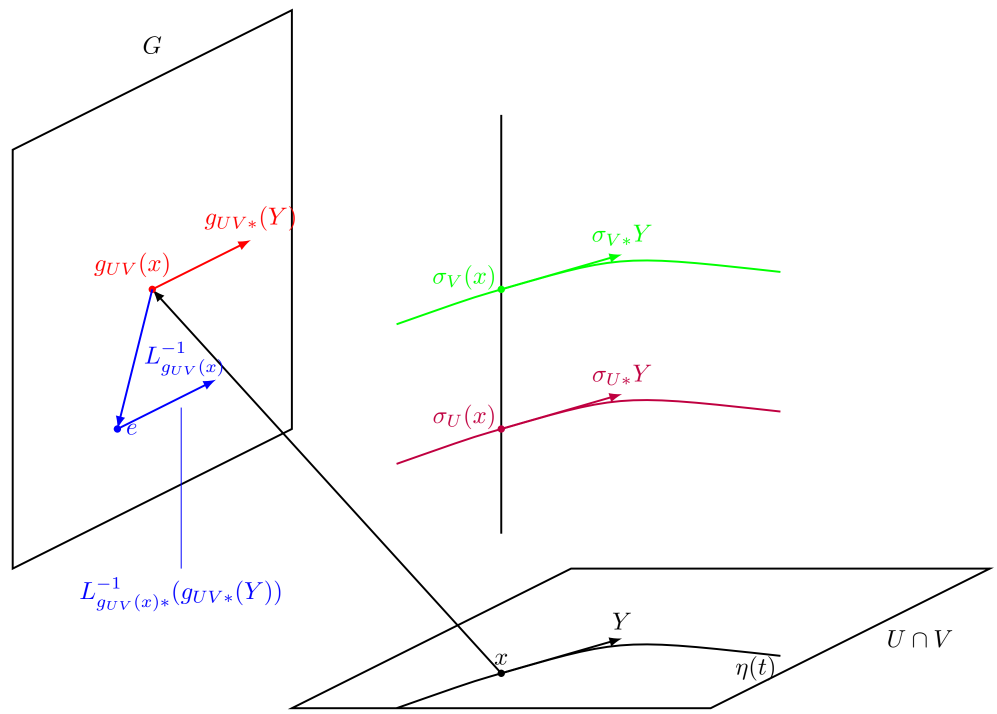

图 11.2: 定义11.4配套图

定理 11.2

定义11.3和定义11.4等价.

证明 (定义11.3⇒ 定义11.4) 由定义11.3知道主丛上有 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}\in\Lambda_P(1,\mathscr{G})$, 我们需要给底流形定义 $\boldsymbol{\omega}_U\in\Lambda_U(1,\mathscr{G})$, 定义11.4要求在局域平凡 U 上指定形式场, 根据10.4可以给出 $\sigma_U: U\to P$ 给出一个与 T_U 定义的局域截面, 根据拉回映射的定义可以给出 U 上的 1 形式场.

笔记 *拉回映射: 假设存在两个流形 M 和 N, 流形之间存在光滑映射 $\phi: M\to N$, 且在 N 存在 l 形式场, 定义 M 上的 l 形式场, 并记作 $\phi^*:\mathscr{F}_N(0,l)\to\mathscr{F}_M(0,l)$, 假设 $\forall T\in\mathscr{F}_N(0,l)$ 定义 $\phi^*T\in\mathscr{F}_M(0,l)$ 为*

$$(\phi^*T)_{a_1\cdots a_l}\mid_p(v_1)^{a_1}\cdots(v_l)^{a_l}:=T_{a_1\cdots a_l}\mid_{\phi_p}(\phi_*v_1)^{a_1}\cdots(\phi_*v_l)^{a_l},\quad \forall p\in M, v_1,\cdots,v_l\in V_p.$$

简而言之, 就是借助了 N 上的形式场, 给了 M 上的形式场, 更多详细内容参考书 P102.

就是说给出 $\boldsymbol{\omega}_U\equiv\sigma_U^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 是 U 上 C^∞ 的 $\mathscr{G}$ 值的 1 形式场, 而如果给定另一个底流形 V, 且 $U\cap V\neq\varnothing$, 故在 $U\cap V$ 的区域内还能给出 $\boldsymbol{\omega}_V\equiv\sigma_V^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, 我们在前面给出转换函数是要求 $x\in U\cap V$, 给出 $\sigma_U(x)$ 和 $\sigma_V(x)$ 的认同, 这里我们应该给出相同的要求.

我们来看它们之间满足的关系

$$\boldsymbol{\omega}_V\mid_x(Y)=(\sigma_V^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mid_{\sigma_V(x)})(Y)=\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mid_{\sigma_V(x)}(\sigma_{V*}Y)$$

我们来看 $\sigma_{V*}Y$ 和 $\sigma_{U*}Y$ 的关系, 其中 $\eta(t)$ 是过 x 的 C^∞ 曲线, 满足 $\eta(0)=x$, $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\eta(t)=Y$

$$\begin{aligned}
\sigma_{V*}Y &= \sigma_{V*}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\eta(t)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\sigma_V\eta(t))=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\sigma_U(\eta(t))g_{UV}(\eta(t))) \quad \text{最后一个等号见式10.2}\\
&=\sigma_U(\eta(0))\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g_{UV}(\eta(t))+[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\sigma_U(\eta(t)))][g_{UV}(\eta(0))]\\
&=\sigma_U(x)\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g_{UV}(\eta(t))+[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\sigma_U(\eta(t)))][g_{UV}(x)]\\
&=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\sigma_U(x)g_{UV}(\eta(t)))+\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\sigma_U(\eta(t)))g_{UV}(x) \quad \text{这一步只是把 } \sigma_U(x), g_{UV}(x) \text{ 当作常数.}
\end{aligned}$$

我们分开计算上式, 先来看第一项, 首先有

$$\sigma_U(x)g_{UV}(\eta(t))=\sigma_V(x)g_{UV}(x)^{-1}g_{UV}(\eta(t))=\sigma_V(x)L_{g_{UV}(x)^{-1}}g_{UV}(\eta(t))=R_{\sigma_V(x)}[L^{-1}_{g_{UV}(x)}g_{UV}(\eta(t))].$$

则

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\sigma_U(x)g_{UV}(\eta(t)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}R_{\sigma_V(x)}[L^{-1}_{g_{UV}(x)}g_{UV}(\eta(t))]\\
&=R_{\sigma_V(x)*}L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\eta(t)\\
&=R_{\sigma_V(x)*}L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)\\
&=[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)]^*_{\sigma_V(x)} \quad \text{定义10.9.}
\end{aligned}$$

再来看第二项

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\sigma_U(\eta(t)))g_{UV}(x) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(R_{g_{UV}(x)}\sigma_U(\eta(t)))\\
&=(R_{g_{UV}(x)*})\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\sigma_U(\eta(t))\\
&=(R_{g_{UV}(x)*})(\sigma_{U*})\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\eta(t)\\
&=R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y.
\end{aligned}$$

所以我们有

$$\sigma_{V*}Y=R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y+[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)]^*_{\sigma_V(x)}. \tag{11.5}$$

我们回到 $\boldsymbol{\omega}_V|_x(Y)$, 我们有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_V|_x(Y) &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}|_{\sigma_V(x)}[R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y+[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)]^*_{\sigma_V(x)}]\\
&=\tilde{\boldsymbol{\omega}}|_{\sigma_V(x)}[R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y]+\tilde{\boldsymbol{\omega}}|_{\sigma_v(x)}[[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)]^*_{\sigma_V(x)}]\\
&=\tilde{\boldsymbol{\omega}}|_{\sigma_U(x)g_{UV}(x)}[R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y]+L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)\\
&=\mathscr{A}d_{g_{UV}(x)^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\sigma_U(x)}(\sigma_{U*}Y)+L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)\\
&=\mathscr{A}d_{g_{UV}(x)^{-1}}\boldsymbol{\omega}_U|_x(Y)+L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y).
\end{aligned}$$

就是我们定义11.4的要求, 证明结束.

(定义11.4 $\Rightarrow$ 定义 11.3), 也就是有 $\boldsymbol{\omega}_U\in\Lambda_U(1,\mathscr{G})$, 求 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}\in\Lambda_p(1,\mathscr{G})$

1. 首先在 $\pi^{-1}[U]$ 上定义一个 $\mathscr{G}$ 值上的 1 形式场 $\tilde{\omega}$, 由于只定义了 $\pi^{-1}[U]$ 上的形式场, 所以这里记作 $\tilde{\omega}^U$ 以作区别, 对于 $\forall$ 一点 $x\in U$, 令 $p\equiv\sigma_U(x)$, 而对 p 的任一矢量 X, 令 $Y\equiv\pi_*X, Z\equiv X-\sigma_{U*}Y$, 故

$$\pi_*Z=\pi_*X-\pi_*\sigma_{U*}Y=\pi_*X-(\pi\circ\sigma)_*Y=Y-Y=0$$

笔记 注意 π 是一个多对一的映射, σ 只会把 x 映射到 p 点, 也就是说 $(\pi\circ\sigma_U)$ 恒为 e, 而 $(\sigma_U\circ\pi)$ 只有作用到 p 点才为 e.

即 $Z \in V_p$ 是竖直子空间, 故由定理10.5,$V_p, \mathscr{G}$ 内的矢量存在一一对映的关系, 即 $\exists A \in \mathscr{G}$, 满足 $Z = A_p^*$, 于是

$$X = A_p^* + \sigma_{U*}Y.$$

我们给出 $\pi^{-1}[U]$ 上的定义

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U|_p(X) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^U|_p(A_p^* + \sigma_{U*}Y) := A + \boldsymbol{\omega}_U|_{\pi(p)}(Y).$$

对于其它不在截面的点, 但是与 p 同 fiber 的点 $p' \in \pi^{-1}[y]$, 且 X' 为其切矢量, 有唯一的 $g \in G$ 使得 $p' = pg$ 则 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U$ 在 p' 点的定义为

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U|_{p'}(X') := \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U|_p(R_{g^{-1}*}X').$$

笔记 *不在 fiber 的点 p' 的定义是迎合定义11.3要求给出的, 下面证明确实满足定义11.3*

2. 我们需要验证上面定义是否满足定义11.3的要求, 定义11.3要求两点, 我们来看第一点, 对于截面上的点有:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U(A_p^*) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^U(A_p^* + 0) = A + 0 = A.$$

对于不是截面上的点但和 p 同 fiber 的点有

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U|_{p'}(A_{p'}^*) &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U|_p(R_{g^{-1}*}A_{p'}^*) \\
&= \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U|_p(\mathscr{A}d_g A)_p^* \quad \text{定理10.9} \\
&= \mathscr{A}d_{g^{-1}}\mathscr{A}d_g A \\
&= A.
\end{aligned}$$

第一点满足, 接下来看第二点

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{pg}^U(R_{g*}X) = \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p^U[(R_{g^{-1}*})(R_{g*}X)] = \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p^U(X). \tag{11.6}$$

根据式11.6, 我们给出了截面上的点与其同 fiber 的点的关系满足定义11.3第二条的要求, 但是定义11.3要求的 p 是任意点, 也就是说我们还需要验证不在截面上的两点之间满足定义11.3的要求. 事实上我们在前文中证明过相同的问题, 详情请见图11.1所在位置附近的证明.

笔记 *事实上, 定义11.3有一个等价条件, 观察式11.6, 满足等价条件.*

由此可见, 在 $\pi^{-1}[U]$ 上我们定义的 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U$ 满足定义11.3的要求.

3. 前文给出的是底流形 M 上的 U 的形式场, 在底流形再指定一个 V 满足 $U \cap V$, 在 $\pi^{-1}[U \cap V]$ 上有形式场 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^V$ 两个形式场, 只有让

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^V = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^U.$$

才能给出全局的统一的形式场并且满足定义11.3的要求. 根据图11.1中由 R_{g*} 诱导的矢量空间是同构的, 而 $\mathscr{A}d_{g^{-1}}$ 诱导的矢量空间亦是同构的, 那么对于目前而言, 一个 X 有两个形式场 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^V$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^U$, 要想证明其相等, 只需要在一点上证明其相等, 随后根据 R_{g*} 和 $\mathscr{A}d_{g^{-1}}$ 便可以令 $U \cap V$ 的形式场相等. 重复上述步骤可以给出全局统一的形式场.

在 $\pi^{-1}[U \cap V]$ 区域内, 每条 fiber 上有两个局域截面的点分别由 U 和 V 给出, 不妨记作 $p = \sigma_U(x)$ 和 $p' = \sigma_V(x)$ 它们之间满足

$$\sigma_V(x) = \sigma_U(x)g_{UV} \Rightarrow (g_{UV}\text{记作}g)p' = pg.$$

下面我们来证明 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^V = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^U$, 选择证明 p' 点, 由于 $X' = A_{pg}^* + \sigma_{V*}Y$, 则只需要证明

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{pg}^V(A_{pg}^* + \sigma_{V*}Y) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{pg}^U(A_{pg}^* + \sigma_{V*}Y).$$

即只需要

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{pg}^V(\sigma_{V*}Y) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{pg}^U(\sigma_{V*}Y).$$

而 σ_{V*} 和 σ_{U*} 之间的关系我们在上文证明过, 关系式是式11.5, 不同式子的含义可见图11.2, 则

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^U_{pg}(\sigma_{V*}Y) &= \tilde{\omega}^U_{pg}(R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y + [L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)]^*_{\sigma_V(x)}) \\ &= \tilde{\omega}^U_{pg}(R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y) + \tilde{\omega}^U_{pg}([L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)]^*_{\sigma_V(x)}) \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(\sigma_{U*}Y) + L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y) \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}\boldsymbol{\omega}_U(Y) + L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y) \\ &= \omega_V(Y) \quad \text{定义11.4}.\end{aligned}$$

且

$$\tilde{\omega}^V_{pg}(\sigma_{V*}Y) = \boldsymbol{\omega}_V(Y).$$

故 $\tilde{\omega}^V_{pg}(\sigma_{V*}Y) = \tilde{\omega}^U_{pg}(\sigma_{V*}Y)$ 命题得证.

以上我们给出了关于联络的三个等价定义. 上面都是比较抽象的定义, 我们把它应用到更具体的环境中, 如果结构群是矩阵群的话, 我们有如下定理:

定理 11.3

若结构群 G 是矩阵群, 则 $\boldsymbol{\omega}_V$ 和 $\boldsymbol{\omega}_U$ 的关系可以写作

$$\boldsymbol{\omega}_V = g^{-1}_{UV}\boldsymbol{\omega}_U g_{UV} + g^{-1}_{UV}dg_{UV}.$$

♡

笔记 G 是矩阵群意思是它的元素是 $N\times N$ 矩阵, 故其李代数元也是 $N\times N$ 矩阵, 令 $\mathscr{V}\equiv\{N\times N\}$, 则 $\mathscr{V}$ 是矢量空间, 且 $G\subset\mathscr{V},\mathscr{G}\subset\mathscr{V}$, 而 $\boldsymbol{\omega}_U$ 和 $\boldsymbol{\omega}_V$ 都是 $\mathscr{G}$ 值的 1 形式场, 即 $\boldsymbol{\omega}_U,\boldsymbol{\omega}_V\in\Lambda_{U\cap V}(1,\mathscr{V})$, 而 $g_{UV}:U\cap V\to G\subset\mathscr{V}$ 是作用到底流形上的一个点上, 即 $g_{UV}\in\Lambda_{U\cap V}(0,\mathscr{V})$, 同理 $g^{-1}_{UV}(x)$ 是 $g_{UV}(x)$ 的逆矩阵所以 $g^{-1}_{UV}(x)$ 依旧是 $\Lambda_{U\cap V}(0,\mathscr{V})$, 所以定理*11.3*的等式是 1 形式场等式.

证明 对于 $\boldsymbol{\omega}_U$ 和 $\boldsymbol{\omega}_V$ 有通用的等式

$$\boldsymbol{\omega}_V(Y) = \mathscr{A}d_{g_{UV}(x)^{-1}}\boldsymbol{\omega}_U(Y) + L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y).$$

我们简化一下写法令 $g=g_{UV}(x)$, $A=\boldsymbol{\omega}_U(Y)\in\mathscr{G}$, 则对于等号左边第一项有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}d_{g_{UV}(x)^{-1}}\boldsymbol{\omega}_U(Y) &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}A = g^{-1}Ag \quad \text{来源于定理8.1对两边求导并令}t=0 \\ &= g_{UV}(x)^{-1}\boldsymbol{\omega}_U(Y)g_{UV}(x).\end{aligned}$$

对于等号左面第二项

$$\begin{aligned}L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y) &= L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\eta(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L^{-1}_{g_{UV}(x)}g_{UV}(\eta(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_{UV}(x)^{-1}g_{UV}(\eta(t)) \\ &= g_{UV}(x)^{-1}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_{UV}(\eta(t)).\end{aligned}$$

目前比较容易, 下面需要一些技巧, 首先 $g_{UV}\in\Lambda_{U\cap V}(0,\mathscr{V})$, 则 $dg_{UV}\in\Lambda_{U\cap V}(1,\mathscr{V})$, 以 $\{e_r\}$ 代表 $\mathscr{V}$ 的一组基矢量, 则有

$$g_{UV}=e_rf^r, dg_{UV}=e_rdf^r.$$

故

$$\begin{aligned}L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y) &= g_{UV}(x)^{-1}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_{UV}(\eta(t)) = g_{UV}(x)^{-1}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e_rf^r(\eta(t)) \\ &= g_{UV}(x)^{-1}e_r\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f^r(\eta(t)).\end{aligned}$$

我们观察 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f^r(\eta(t))$,f^r 是 $\mathbb{R} or \mathbb{C}$ 的 0 形式场, 回顾切矢的定义不难给出

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f^r(\eta(t)) = Y(f^r) = df^r(Y).$$

笔记 *切矢的定义为流形上的 C^1 曲线 (至少连续) 上面定义了函数 (0 形式场), 线可以使用参数式 $C(t)$ 来表示, 定义的切矢为*

$$T(f) := \frac{d(f(C(t)))}{dt}\bigg|_{t_0}.$$

T 就是在 t_0 点 f^r 的切矢. f 还会给出对偶矢量场, 定义为

$$df(v) := v(f).$$

由于 df 是作用于 1 个矢量, 故其为 1 形式场.

由此可见

$$\begin{aligned} L^{-1}_{g_{UV}(x)*} g_{UV*}(Y) &= g_{UV}(x)^{-1} e_r \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f^r(\eta(t)) \\ &= g_{UV}(x)^{-1} dg_{UV}(Y). \end{aligned}$$

总结上述证明有

$$\boldsymbol{\omega}_V(Y) = g_{UV}(x)^{-1}\boldsymbol{\omega}_U(Y) g_{UV}(x) + g_{UV}(x)^{-1} dg_{UV}(Y).$$

由于 x 是确定的点, 上述式子表述的是作用于 x 点的切矢量 Y, 故可以简记为

$$\boldsymbol{\omega}_V = g^{-1}_{UV}\boldsymbol{\omega}_U(Y) g_{UV} + g^{-1}_{UV} dg_{UV}.$$

11.2 用标架计算曲率张量 (Frame Method For Computing Curvature)

为了更好的进行下一节的内容, 这里补充一节, 来源于书中选读 5.7 节,P140. 本节讨论如何利用标架计算曲率.

我们给定流形 M, 并在上面定义了导数算符 ∇_a, 设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是任一基底场, 定义域为 $U \subset M$, 其第 μ 基矢场 $(e_\mu)^a$ 沿第 τ 基矢场 $(e_\tau)^a$ 的导数依旧为 U 上的矢量场, 可借基底场 $\{(e_\sigma)^a\}$ 展开, 写作下式

$$(e_\tau)^b \nabla_b (e_\mu)^a = \gamma^\sigma{}_{\mu\tau}(e_\sigma)^a \tag{11.7}$$

展开系数 $\gamma^\sigma_{\mu\tau}$ 称为 **联络系数 (connection coefficients)**, 如果基底场是坐标基底场的话, 则有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\tau}\right)^b \nabla_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = \Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a = \Gamma^a{}_{\mu\tau} \tag{11.8}$$

这里我们使用了和克氏符相同的符号 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$, 是因为上式给出的那组数确实是克氏符在坐标基底场的分量, 我们借助这个证明来回顾一下克氏符的定义以及曲率的相关知识点.

我们在第 3 章给出的克氏符定义的式子为 (来源 p74, 定理 3-1-5)

$$\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b{}_{ac} v^c.$$

即 $\Gamma^b{}_{ac} v^c = \nabla_a v^b - \partial_a v^b$, 我们选择坐标基底场作为 $v^a = (\frac{\partial}{\partial x^\sigma})^a$, 可以给出

$$\Gamma^b{}_{ac} v^c = \nabla_a v^b - \partial_a v^b = \nabla_a v^b.$$

最后一个括号是因为选定坐标基矢就不会改变, 随后我们调整指标位置为

$$\Gamma^a{}_{bc} v^c = \nabla_b v^a \Rightarrow \Gamma^a{}_{bc}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^c = \nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a.$$

笔记 *这里在代入指标, 原则上 v^a 和 v^b 内部代入的指标应该有两项, 在这里会有细微的差别, 原因在于左侧 v^c 是哑指标, 而 v^a 和 v^c 是同一个矢量, 为了指标平衡, 给出的上式.*

两边左乘 $(\frac{\partial}{\partial x^\tau})^b$, 给出

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\tau}\right)^b \nabla_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^\tau}\right)^b \Gamma^a{}_{bc}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^c = \Gamma^a{}_{\tau\mu} = \Gamma^a{}_{\mu\tau}.$$

由此可见当代入坐标基矢后, 式11.8给出的式子确实是克氏符的那组数. 可以作为克氏符的等价定义.

笔记 式*11.8*指标存在一些问题, 但是由于导数算符的无挠性指标确实可以交换位置, 但是为什么这么写, 未知?

让我们把思路回到非基底场的情况上, 也就是式11.7, 使用 $(e^\nu)_a$ 作用到式 11.7可以给出

$$\gamma^\nu{}_{\mu\tau} = (e^\nu)_a(e_\tau)^b\nabla_b(e_\mu)^a.$$

我们定义 ∇_a 在基底场 $\{(e_\mu)^a\}$ 的联络 1 形式场, 简记为 $\omega_\mu{}^\nu{}_a$, 定义是

$$\omega_\mu{}^\nu{}_a := -\gamma^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_a.$$

笔记 实际上 $\gamma^\nu{}_{\mu\tau}$ 是下一节中的联络形式场, 这里这么定义是为了凑出嘉当第二结构方程的形式, 具体内容见书上 *P1108* 选读 *I-2-1* 最后一段. 这里交换 μ,ν 指标就是会带来一个负号, 原因是因为

$$-(e^\nu)_c\nabla_a(e_\mu)^c = (e_\mu)^c\nabla_a(e^\nu)_c.$$

借鉴于式子*11.9*, 同样有帮助于理解的还有式子*11.11*

这里 μ,ν 的取值均为 $1\cdots n$, 也就是说这里我们有 n^2 个 1 形式场, 称为**联络 1 形式 (Connection 1 Form)**, 代入 $\gamma^\nu{}_{\mu\tau}$ 有

$$\omega_\mu{}^\nu{}_a := -(e^\tau)_a(e^\nu)_c(e_\tau)^b\nabla_b(e_\mu)^c = -\delta^b{}_a(e^\nu)_c\nabla_b(e_\mu)^c = -(e^\nu)_c\nabla_a(e_\mu)^c = (e_\mu)^c\nabla_a(e^\nu)_c \tag{11.9}$$

$\omega_\mu{}^\nu{}_a$ 和对偶基矢 $(e^\mu)_c$ 都是 1 形式, 可以去掉抽象指标记为 $\boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu$ 和 $\boldsymbol{e}^u$, 它们之间有以下关系

定理 11.4 (嘉当 (Cartan) 第一结构方程)

$$\boldsymbol{de}^\mu = -\boldsymbol{e}^\mu\wedge\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu.$$

♡

证明

$$\begin{aligned}
-(e^\mu)_a\wedge\omega_\mu{}^\nu{}_b &= -2(e^\mu)_{[a}\wedge\omega_{|\mu|}{}^\nu{}_{b]}\\
&= -2(e^\mu)_{[a}(e_{|\mu|})^c\nabla_{b]}(e^\nu)_c\\
&= -2\delta_{[a}{}^c\nabla_{b]}(e^\nu)_c\\
&= -2[\frac{1}{2}(\delta_a{}^c\nabla_b(e^\nu)_c-\delta_b{}^c\nabla_a(e^\nu)_c)]\\
&= -2[\frac{1}{2}(\nabla_b(e^\nu)_a-\nabla_a(e^\nu)_b)]\\
&= 2\nabla_{[a}(e^\nu)_{b]}\\
&= (de^\nu)_{ab}.
\end{aligned}$$

笔记 还是老道理 *[]* 代表下指标反称, 同时加上 | | 代表里面的指标不参与反称.

我们来回忆一下黎曼张量 $R_{abc}{}^d$, 定义是

$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\omega_c = R_{adc}{}^d\omega_d.$$

令

$$R_{ab\mu}{}^\nu = R_{abc}{}^d(e_\mu)^c(e^\nu)_d.$$

上面这个张量是一个 2 形式, 原因是因为 $R_{ab\mu}{}^\nu = R_{[ab]\mu}{}^\nu$, 数量依旧是 n^2, 求出它来我们就计算出了黎曼曲率, 同样可以使用省去抽象指标加黑体代表微分形式, 我们看

定理 11.5 (嘉当第二结构方程)

$$\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu = d\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu+\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\lambda\wedge\boldsymbol{\omega}_\lambda{}^\nu.$$

♡

证明

$$\begin{aligned} R_{ab\mu}{}^{\nu} &= R_{abc}{}^{d}(e_\mu)^c(e^\nu)_d = (e_\mu)^c R_{abc}{}^{d}(e^\nu)_d \\ &= (e_\mu)^c 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}(e^\nu)_c \quad (e^\nu)_d\text{这一步可以看作 1 形式, 并借助黎曼张量定义} \end{aligned}$$

.

我们来看

$$\begin{aligned} (e_\mu)^c\nabla_a\nabla_b(e^\nu)_c &= \nabla_a[(e_\mu)^c\nabla_b(e^\nu)_c] - [\nabla_a(e_\mu)^c]\nabla_b(e^\nu)_c \\ &= \nabla_a[\omega_\mu{}^\nu{}_b] - [\nabla_a(e_\mu)^d\delta^c{}_d]\nabla_b(e^\nu)_c \\ &= \nabla_a[\omega_\mu{}^\nu{}_b] - [\nabla_a(e_\mu)^d]\delta^c{}_d\nabla_b(e^\nu)_c \quad \text{定理 3-1-8} \\ &= \nabla_a[\omega_\mu{}^\nu{}_b] - [\nabla_a(e_\mu)^d](e^\lambda)_d(e_\lambda)^c\nabla_b(e^\nu)_c \\ &= \nabla_a[\omega_\mu{}^\nu{}_b] + \omega_\mu{}^\lambda{}_a\omega_\lambda{}^\nu{}_b \quad \text{式11.9} \end{aligned}$$

代回得

$$\begin{aligned} R_{ab\mu}{}^{\nu} &= (e_\mu)^c 2\nabla_{[a}\nabla_{b]}(e^\nu)_c \\ &= 2(\nabla_{[a}[\omega_{|\mu|}{}^\nu{}_{b]}] + \omega_\mu{}^\lambda{}_{[a}\omega_{|\lambda|}{}^\nu{}_{b]}) \\ &= ((d\omega)_\mu{}^\nu)_{ab} + (\omega_\mu{}^\lambda \wedge \omega_\lambda{}^\nu)_{ab}. \end{aligned}$$

11.3 水平提升矢量场和水平提升曲线 (Horizontal Lifts)

假设主丛 P 上给定联络 $\tilde{\omega}$, 且 $\forall x \in M, p \in \pi^{-1}[x]$, 推前映射 $\pi_* : H_p \to T_x M$ 是同构映射 (具体参考定义11.2相关内容), 因此 $\forall Y \in T_x M$ 有唯一的 $\pi_*^{-1}(Y) \in H_p$ 称为 Y 在 p 点的**水平提升 (horizontal lift) 矢量**, 注意是这一条 fiber 上点点都有这个矢量, 即纤维 $\pi^{-1}[x]$ 上有一个水平提升矢量场 $\tilde{Y}$, 进一步假设 $\overline{Y}$ 是 M 上的 C^∞ 矢量场, 则在 P 上存在唯一的 C^∞ 矢量场 $\tilde{Y}$, 满足

$$\pi_*(\tilde{Y}_p) = \overline{Y}_{\pi(p)}, \quad \tilde{Y}_p \in H_p, \qquad \forall p \in P.$$

P 上的矢量场 $\tilde{Y}$ 是**水平提升矢量场**

定理 11.6

设 $\tilde{Y}$ 是水平提升矢量场, 则 $\forall p \in P, g \in G$ 有

$$R_{g*}(\tilde{Y}_p) = \tilde{Y}_{pg}.$$

证明 只需要证明 $R_{g*}\tilde{Y}_p - \tilde{Y}_{pg} = 0$, 因为 $R_{g*}\tilde{Y}_p - \tilde{Y}_{pg} \in H_{pg}$, 接下来只需要证明 $R_{g*}\tilde{Y}_p - \tilde{Y}_{pg} \in V_{pg}$ 则命题成立. 而竖直矢量场只需要 $\pi_*\tilde{Y}_p g = 0$, 我们来看

$$\pi_*(R_{g*}\tilde{Y}_p - \tilde{Y}_{pg}) = (\pi \circ R_g)_*\tilde{Y}_p - \pi_*\tilde{Y}_{pg} = (\pi)_*\tilde{Y}_p - \pi_*\tilde{Y}_{pg} = \overline{Y}_x - \overline{Y}_x = 0.$$

证明结束.

定理 11.7

设 $A \in \mathscr{G}$,$\tilde{Y}$ 是 M 上矢量场 $\overline{Y}$ 的水平提升, 则 P 上矢量场 A^* 与 $\tilde{Y}$ 的对易子为零, 即

$$[A^*, \tilde{Y}]_p = 0.$$

笔记 *正式证明之前, 我们先 hand-waving 一下, 我们知道矢量场的对易子等于第二个矢量沿着第一个矢量方向的导数, 也就是变化率, 而定理11.6告诉我们同 fiber 上的水平提升矢量场均相等, 也就是说对易子为 0.*

证明

$$\begin{aligned}[A^*,\tilde{Y}]_p &= (\mathscr{L}_{A^*}\tilde{Y})_p \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\phi_{-t*}\tilde{Y})_p - \tilde{Y}_p].\end{aligned}$$

ϕ 是由 $A*$ 产生的单参微分同胚群, 由定理4.5知道 $\phi_t(p) = p\exp(tA)$, 不难看出当 $g = \exp(tA)$ 时 $\phi_t = R_g$, 故

$$\phi_{-t*}\tilde{Y} = R_{g^{-1}*}\tilde{Y} = \tilde{Y}_p.$$

$$\begin{aligned}[A^*,\tilde{Y}_p] &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\phi_{-t*}\tilde{Y})_p - \tilde{Y}_p] \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\tilde{Y}_p - \tilde{Y}_p] \\ &= 0.\end{aligned}$$

设 I 是 $\mathbb{R}$ 的区间, $\tilde{\eta}: I \to P$ 称为曲线 $\eta: I \to M$ 的**水平提升曲线**, 若 $\tilde{\eta}(t)$ 每点的切矢都是水平矢量, 即 $\frac{d}{dt}\tilde{\eta}(t) \in H_{\tilde{\eta}(t)}$, 且 $\pi(\tilde{\eta}(t)) = \eta(t), \forall t \in I$.

定理 11.8

设 $\eta: I(0 \in I) \to M$ 是曲线,$x \equiv \eta(0)$, 则 $\forall p \in \pi^{-1}[x] \subset P$,$\exists\eta(t)$ 的唯一水平提升曲线 $\tilde{\eta}: I \to P$, 满足 $\tilde{\eta}(0) = p$.

♡

笔记 按理来说, 这里的位置应该是证明, 书中用文字讨论了非自相交曲线且点点存在切矢的情况, 这样借助了水平提升矢量场的积分曲线给出了 $\tilde{\eta}(t)$, 也比较好理解, 关键是如果是自相交曲线或者是切矢为 *0* 的情况, 就不能简单的借助积分曲线来解决问题了, 我们还是使用物理学家的手段从几何直观来理解这个定理所要传递的内容, 我们先举简单且适合的例子, 例如主丛是由一维李群和二维流形组成且为平凡主丛, 这时的水平提升其实比较好理解, 我们还是类比一下, 就像 *3* 维柱面一样, 其中母线平行于 z 轴, 这时 z 轴可以体现为一维李群, 而 xy 平面就是底流形, 且除去 *z=0* 的 $z = C$ 平面所截均为水平提升曲线, 确实满足定理要求, 当我们考虑水平直线或自相交曲线时, 唯一性其实比较直观, 当放开平凡主丛的限制, 影响其实也不大, 因为这里没有要求 $\tilde{\eta}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ 也就是说局域平凡便能满足, 而定义主丛时就要求了局域平凡, 再紧接着, 放开底流形维度的限制, 问题其实也不大, 情况与底流形为 *2* 维一致, 但是如果放开李群维度的限制, 这种类比就变得不再直观, 原因在于底流形上的一个点不再对应于一条直线, 而是一个平面, 这时的不太恰当但直观的想法是底流形是一维的, 那么此时 $\eta(t)$ 只是直线, 所以水平提升无非就是所有与底流形平行的直线, 我们把底流形再提升一维, 这时整个主丛便是四维流形, 问题便复杂起来, 首先,$I \subset \mathbb{R}$,I 可以理解为一维流形的开覆盖, 可以定义同胚映射 $\eta: I \to M$, 给出曲线 $\eta(t)$, 并满足 $x = \eta(0)$, 同时可以给出同胚映射 $\tilde{\eta}(t)$, 满足 $\tilde{\eta}(0) = p$, 这样由流形的定义, 可以给出 $\psi: \eta(t) \to \tilde{\eta}(t)$ 之间的映射是光滑的, 对于 $p \in \pi^{-1}[x]$ 完全可以截取 (也可以说是固定 p 点在结构群上的坐标) 与底流形同构的子空间 (可以说是与底流形完全一模一样), 在这里我们可以把底流形曲线一一映射过来, 这样存在性就保证了, 且由于这样的截取 p 和 x 也是对应的, 也就保证了唯一性.

定理 11.9

设 $P(M,G)$ 是主丛, $\tilde{\eta}: I \to P$ 是曲线 $\eta: I \to M$ 的水平提升, 则

$$\tilde{\eta}': I \to P\text{是曲线}\eta\text{的水平提升} \Leftrightarrow \exists g \in G\text{使得}\tilde{\eta}'(t) = \tilde{\eta}(t)g.$$

♡

证明 由于 $\tilde{\eta}', \tilde{\eta}$ 是 η 的水平提升, 则势必满足 $\pi(\tilde{\eta}'(0)) = \pi(\tilde{\eta}(0)) = x$, 不妨令 $p' = \tilde{\eta}'(0), p = \tilde{\eta}(0)$, 则有 p', p 同 fiber, 即

$$\exists g \in G, \text{使得} p' = pg.$$

接下来, 我们通过把 g 作用到 $\tilde{\eta}(t)$ 上得到曲线 $\tilde{\eta}(t)g$, 接下来我们只需要证明 $\tilde{\eta}(t)g$ 和 $\tilde{\eta}'(t)$ 是同一条曲线即可.

而根据定理11.6给出 $\tilde{\eta}(t)g$ 的切矢量为 $\overline{Y}_{pg}$, 而 $\tilde{\eta}'(t)$ 的矢量也是 $\overline{Y}_{pg}$, 在相同的点有相同切矢的两条曲线在相同的点的小邻域内重合, 随后不断的验证矢量是否相同, 最终给出曲线重合, 即 $\exists g \in G$ 满足 $\tilde{\eta}'(t) = \tilde{\eta}(t)g$

笔记 本次证明由个人推导，主要思路是通过寻找 $\tilde{\eta}(t)g$，并证明它与 $\tilde{\eta}'(t)$ 是同一条曲线，从而验证了双向成立，对于自相交曲线的话，还需要光滑性来保证成立，不过光滑性对流形而言天然成立，故上述定理适用于所有曲线.

上一节 5.7 进行复习，又回顾前五章的知识，第三章把导数算符称为流形 M 上的联络，本部分也给出了主丛上的联络，书上给出了这两个联络的关系，用如下定理表明.

定理 11.10

标架丛 FM(标架丛 $FM(M, GL(n))$) 的底流形 M 上的一个导数算符 ∇ 给出 FM 上的一个联络，反之亦然.

证明 1.M 上给定导数算符 ∇ 会给出 FM 的一个联络

M 上给定的导数算符 ∇ 决定一个沿曲线平移的法则，设 $\eta : I \to M$ 是曲线，$x \equiv \eta(0)$，在 T_xM 上指定一个标架 $\{e_\mu\}$，便给出 FM 的一点 $p = (x, e_\mu)$. 利用 ∇ 使得 $\{e_\mu\}$ 沿 $\eta(t)$ 平移得到底流形上的标架场 $\{\bar{e}_\mu\}$，便在 $\eta(t)$ 的 fiber 上可以得到 $(\eta(t), \bar{e}_\mu|_{\eta(t)})$，随着 t 的不断移动，便可以在 FM 上诱导出一条曲线 $\tilde{\eta}(t)$，满足 $\tilde{\eta}(0) = p, \pi(\tilde{\eta}(t)) = \eta(t)$. 至此，我们可以给 $p \in FM$ 的水平子空间 H_p 给出定义

$$H_p := \left\{ X \in T_pFM | M\text{上有曲线}\eta(t)\text{满足}x = \eta(0), X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{\eta}(t) \right\}.$$

笔记 有一点解释一下，怕我以后再有疑惑，这里诱导出的曲线是光滑的原因是因为 $\eta(t)$ 是光滑的，且映射 $\sigma : \eta(t) \to \tilde{\eta}(t)$ 的映射是 C^∞ (和11.8下方笔记中后面几行解释类似)，结果就是 $\tilde{\eta}(t)$ 是光滑的

我们来验证 H_p 满足定义11.2的要求:(a) $\forall X \in T_xFM$，令 $Y \equiv \pi_* X$，则 $\exists \eta(t) \subset M$ 满足 $x = \eta(0), y = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \eta(t)$，令 $X_2 \equiv \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{\eta}(t)$，则 $X_2 \in H_p$，再令 $X_1 \equiv X - X_2$，则

$$\begin{aligned}
\pi_* X_1 &\equiv \pi_*(X - X_2) = \pi_* X - \pi_*(X_2) \\
&= Y - \pi_* \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{\eta}(t) \\
&= Y - \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(\tilde{\eta}(t)) \\
&= Y - \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \eta(t) \\
&= Y - Y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

故 $X_1 \in V_p$，也就是说任一 $X \in T_pFM$ 总可以按照上述步骤分成竖直和水平分量，为了满足直和的要求还需要证明分解的唯一性，根据以上步骤，由于 X 是固定的，而 $X_1 = X - X_2$，所以只要我们说明 X_2 是唯一的即可，而 X_2 定义为 $\tilde{\eta}(t)$ 的切矢，对于非自相交曲线满足唯一性不难得到，对于自相交曲线会有一些混淆点，在于自相交点会有两个切矢切于曲线直观上看，这里有两个水平矢量，是不是就不唯一了，事实上我们仔细来看 H_p 的定义，发现这里只是在自相交点定义了两个水平子空间，对于每个水平子空间而言切矢的唯一性还是成立的，不违反定义11.1的要求，且定义11.2也没要要求 p 点只能指定一个水平子空间，故这里的唯一性还是成立.

(b). 证明 $R_{g*}[H_p] = H_{pg}$，首先我们证明 $\forall X \in H_p, R_{g*}X \in H_{pg}$:

对于 $p = (x, e_\mu) \Rightarrow pg = (x, e_\nu g^\nu{}_\mu)$，而 $X \in H_p \Rightarrow X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{\eta}(t)$，其中 $\tilde{\eta}(t) = (\eta(t), \bar{e}_\mu|_{\eta(t)})$，我们构造一条曲线

$$\tilde{\eta}'(t) \equiv (\eta(t), \bar{e}_\nu|_{\eta(t)} g^\nu{}_\mu).$$

这和定理11.9思路比较相似，由于 $g^\nu{}_\mu$ 是常数，不难给出 $\tilde{\eta}'(t)$ 是 $\eta(t)$ 诱导出的一条曲线，当 $t = 0$ 时，不难发现

$\tilde{\eta}'(t)$ 过 pg 点, 最终得到 $\tilde{\eta}'(t) = \tilde{\eta}(t)g = R_g\tilde{\eta}(t)$, 接下来我们来看

$$\begin{aligned} R_{g*}X = R_{g*} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{\eta}(t) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_g\tilde{\eta}(t) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{\eta}'(t) \in H_{pg}. \end{aligned}$$

即 $H_p \subset H_{pg}$, 同理如果 $\forall Y \in H_{pg}, R_{g^{-1}}Y \in H_p$ 也成立, 最终 $R_{g*}[H_p] = H_{pg}$ c.我们在前文说 $\eta(t)$ 是光滑的, 即 C^∞ 的, 那么其切矢量势必也是光滑的.

2.FM 上的一个联络会在 M 上诱导出一个导数算符

先对 M 上任一光滑矢量场 v 定义它在点 $\forall x_0 \in M$ 沿着任一矢量 T^b 方向的协变导数算符 $T^b\nabla_b v^a$. 借用书中的简化方法 $T^b\nabla_b v^a \equiv \nabla_T v$, 我们借用一条曲线 $\eta(t)$ 满足

$$\eta(0) = x_0, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \eta(t) = T.$$

设 $\tilde{\eta}$ 是 η 在 FM 上任一水平提升线, 则

$$\tilde{\eta}(t) = (\eta(t), \bar{e}_\mu|_{\eta(t)})(\text{简记为}\eta(t), e_\mu(t)), \quad \forall t \in I.$$

随后把 $v|_{\eta(t)}$ 借用标架展开

$$v|_{\eta(t)} = \bar{e}_\mu\ |_{\eta(t)}\ v^\mu(\eta(\eta(t)))(\text{简记为}e_\mu(t)v^\mu(t)).$$

借此可以定义 $\nabla_T v$ 为

$$\nabla_T v := e_\mu(0) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v^\mu(t).$$

笔记 到了这里, 我不禁发出疑问, 这和联络有什么关系? 哪里体现出了联络, 体现联络的点在水平提升线 $\tilde{\eta}(t)$ 上, 如果在底流形上没有导数算符, 标架场就局限在 x_0 一个点上, 而一个点是不能给出导数的, 我们可以借助主丛上的联络给出光滑的水平曲线, 通过 π 映射可以把它降到底流形上, 要求此水平曲线过 $p \in \pi^{-1}[x_0]$, 这样就在底流形上的 x_0 延拓成了含有标架场的曲线, 传统导数算符的定义为 $\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x^i}$, 只需要有标架即可, 即给出 $\nabla := e_\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, 由于同一水平面上给出的标架相同 (因为局域平凡, 标架相同只能限制在局域内), 所以借助标架定义的导数算符相同所以 $\pi[\eta(t)]$ 的任意性不会导致 x_0 点的导数算符发生变化, 接下来就是竖直方向的任意性不会影响导数算符的定义, 我们在下面证明, 这里给一个 *hand-waving*, 原则上导数算符是协变的,*pg* 从实质上只是改变坐标系, 协变的导数算符不会发生变化, 本个笔记所有思路均为个人所想, 如有误, 请告知.

原则由于 T, v 都是任意的, 我们可以说定义了 ∇, 不过这里只定义了对 $(1,0)$ 型张量的 ∇, 可以按照微分几何的知识推广到 (k,l) 型张量的导数算符. 上面定义中借助了人为选择的因素, 我们应该证明与人为选择因素无关. 人为选择因素无非就是 $\tilde{\eta}(t)$ 的竖直方向和水平方向, 水平方向我们再笔记中说明, 这里说竖直方向, 当 v 借用 pg 点的标架展开去定义导数算符时, 给出

$$\begin{aligned} \nabla_T v &= e_\nu(0)g^\nu{}_\mu \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v'^\mu(t) \\ &= e_\nu \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v'^\mu g^\nu{}_\mu \quad \text{简化写法} \\ &= e_\nu \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v^\nu. \end{aligned}$$

最后一步因为我们有

$$v'^\mu e_\nu g^\nu{}_\mu = v = v^\nu e_\nu.$$

故最后给出联络会诱导出一个导数算符. 书上用另一种方法说明了导数算符与水平方向的任意性无关, 不过需要借助下面定理11.11, 由于等式右面只是 x_0 点的值与周边无关故与曲线水平任意性无关, 和笔记中的思路类似.

定理 11.11

设在 FM 上给定联络 $\tilde{\omega}$, 在 $U\subset M$ 上给定截面 $\sigma: U\to FM$, 令 $\boldsymbol{\omega}\equiv\sigma^*\tilde{\omega}$, 则

$$\nabla_b(e_\mu)^a=\omega^\nu{}_{\mu b}(e_\nu)^a.$$

♡

$\{(e_\mu)^a\}$ 是 σ 在 U 上给出的标架场, 与 $\boldsymbol{\omega}=\sigma^*\tilde{\omega}$ 结合又给出 U 上的一组 $\mathscr{G}$ 值 0 形式场 $\omega_\tau=\boldsymbol{\omega}(e_\tau),\tau=1,\cdots,n$. 于是 $\forall x\in U$ 有 $\omega_\tau(x)\in\mathscr{G}$，将其矩阵元记作 $\omega^\nu{}_{\mu\tau}$（ν 为行，μ 为列），再以 $\{(e^\mu)_b\}$ 代表 $\{(e_\mu)^b\}$ 的对偶标架场，便有 $\omega^\nu{}_{\mu b}=\omega^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_b$, 此即定理中式子右边的 $\omega^\nu{}_{\mu b}\in\Lambda(1,\mathbb{R})$。

证明 这里按照我笔记的思路给出曲线, 先给出 FM 丛上的水平曲线 $\tilde{\eta}': I\to FM$, 经过 π 映射给出 $\eta(t)$ 还要求 $\eta(t)\subset U$, 对于 $\forall x_0\in U, T\in T_{x_0}M$ 要满足

$$\tilde{\eta}(0)=p,\quad \eta(0)=x_0,\quad \frac{d}{dt}\bigg|\eta(t)=T.$$

选截面 (截面是定理10.4给出的那个截面)$\sigma: U\to FM$ 使 $\sigma[\eta(t)]$ 代表 $\eta(t)$ 在截面的对应, 注意 $\tilde{\eta}'(t)$ 和 $\sigma[\eta(t)]$ 并不重合, 令 $V=U$, 另选截面 (依旧是定理10.4给出的截面)$\sigma': V\to FM$ 使 $\sigma'[\eta(t)]=\tilde{\eta}(t)$, 接下来我们总结一下符号

$$\begin{aligned}\sigma(t)&=(\eta(t),e_\mu|_{\eta(t)})\equiv(\eta(t),e_\mu(t))\\ \sigma'(t)&=(\eta(t),e'_\mu|_{\eta(t)})\equiv(\eta(t),e'_\mu(t))\quad e'_\mu(t)\text{沿线是平移的}.\end{aligned}$$

根据式子10.2有

$$\sigma'(t)=\sigma(t)g_{UV}(t)\equiv\sigma(t)g(t)\Longrightarrow(\eta(t),e'_\mu(t))=(\eta(t),e_\mu(t))g(t)=(\eta(t),e_\nu(t)g^\nu{}_\mu(t)).$$

则有 $e'_\mu(t)=e_\nu(t)g^\nu{}_\mu$, 令 $h\equiv g^{-1}$, 有

$$e_\nu(t)=e'_\mu h^\mu{}_\nu(t).$$

按照我们定义的导数算符有式子

$$\nabla_T e_\nu=e'_\mu(0)\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}h^\mu{}_\nu(t)\tag{11.10}$$

因为 $h=g^{-1}$, 则 $h^\mu{}_\sigma(t)g^\sigma{}_\nu(t)=\delta^\mu{}_\nu$, 对两边对 t=0 求导数,

$$0=[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}h^\mu{}_\sigma(t)]g^\sigma{}_\nu(0)+h^\mu{}_\sigma(0)[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g^\sigma{}_\nu(t)].$$

整理并右乘 $h^\nu{}_\rho(0)$ 得到

$$\begin{aligned}0&=[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}h^\mu{}_\sigma(t)]\delta^\sigma{}_\rho(0)+h^\mu{}_\sigma(0)[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g^\sigma{}_\nu(t)]h^\nu{}_\rho(0)\\ &=[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}h^\mu{}_\rho(t)]+h^\mu{}_\sigma(0)[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g^\sigma{}_\nu(t)]h^\nu{}_\rho(0)\\ &=[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}h^\mu{}_\nu(t)]+h^\mu{}_\sigma(0)[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g^\sigma{}_\rho(t)]h^\rho{}_\nu(0)\quad\text{更换指标并以红色表示}\end{aligned}$$

.

我们得到 $[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}h^\mu{}_\nu(t)]=-h^\mu{}_\sigma(0)[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g^\sigma{}_\rho(t)]h^\rho{}_\nu(0)$, 代入式11.10有

$$\nabla_T e_\nu=-e'_\mu(0)h^\mu{}_\sigma(0)[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g^\sigma{}_\rho(t)]h^\rho{}_\nu(0).$$

我们分开来看这几项首先 $e'_\mu(0)h^\mu{}_\sigma(0)=e_\sigma(0)$, 其次和定理11.3下方证明中的类似, 有 $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g^\sigma{}_\rho(t)=dg(T)^\sigma{}_\rho$ 故

$$\nabla_T e_\nu=-e_\sigma(0)[dg(T)^\sigma{}_\rho]h^\rho{}_\nu(0).$$

接下来我们接着向联络靠齐, 对于 x_0 处的切矢可以借助水平提升矢量的想法给出 σ'_*T, 在主丛上存在联络的形式场, 又因为 σ'_*T 是水平的, 故 $\tilde{\omega}(\sigma'_*T)=0$, 随后我们借助定义11.4和定义11.3的等价性可以给出定义11.4的底流形

的形式场

$$\boldsymbol{\omega}'(T) = (\sigma'^{*}\tilde{\boldsymbol{\omega}})T = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\sigma'_{*}T) = 0.$$

由于 $GL(n)$ 是矩阵群, 满足定理11.3的使用前提, 且 $\boldsymbol{\omega}'$ 就是 $\boldsymbol{\omega}_V$,g_{UV} 简记为 g, 固有

$$0 = g^{-1}(x_0)\boldsymbol{\omega}(T)g(x_0) + g^{-1}(x_0)dg(T).$$

故 $\boldsymbol{\omega}(T) = -[dg(T)]g^{-1}(x_0) = -[dg(T)]h(0)$, 加上指标有

$$[\boldsymbol{\omega}(T)]^{\sigma}{}_{\nu} = -[dg(T)]^{\sigma}{}_{\rho}h^{\rho}{}_{\nu}(0).$$

故

$$\nabla_T e_\nu = -e_\sigma(0)[dg(T)^{\sigma}{}_{\rho}]h^{\rho}{}_{\nu}(0) = e_\sigma(0)[\boldsymbol{\omega}(T)]^{\sigma}{}_{\nu} = e_\sigma(0)[\boldsymbol{\omega}]^{\sigma}{}_{\nu b}T^b.$$

最后一步只是采用了抽象指标来表示作用, 我们把等号左面的指标也找到

$$T^b\nabla_b(e_\nu)^a = (e_\sigma)^a\omega^{\sigma}{}_{\nu b}T^b.$$

我们的 T^b 是任意的, 故定理成立.

这个定理十分明确的指出了导数算符与底流形中的联络场的关系, 如果拿 $(e_\rho)^b$ 缩并定理11.11式子, 得到

$$(e_\rho)^b\nabla_b(e_\mu)^a = \omega^{\nu}{}_{\mu\rho}(e_\nu)^a. \tag{11.11}$$

就是式子11.7给出的联络系数 (指标的不对应自行更换), 我记得在上一节的笔记中存在克氏符写法的问题, 在这里回顾的话, 就是为了对应这里的形式, 也就是说上一节定义联络系数, 就是这里的形式场的矩阵元.

第十二章 伴丛 (Companion bundle)

设 $P(M,G)$ 是主丛, F 是流形, 且 G 对 F 有左作用 $\chi: G\times F\to F$(不要求 χ 作用是自由的). 对于 $g\in G, f\in F$, 可以把 $\chi_g(f)$ 简记为 gf, 在前面章节我们有 $P\xrightarrow{\pi}M$, 在本节我们在前面还要追加一个结构, 也就是把主丛再度提升为 $P\times F$, 然后我们可以十分自然的定义一个投影映射 $\tau: P\times F\to P$ 为

$$\tau(p,f):=p,\quad \forall p\in P, f\in F.$$

则目前我们有

$$P\times F\xrightarrow{\tau}P\xrightarrow{\pi}M.$$

仿照结构群对主丛定义的右作用并联合结构群对 F 的左作用给出 G 对 $P\times F$ 的自由右作用 $\xi:(P\times F)\times G\to P\times F$ 为

$$\xi_g(p,f):=(pg,g^{-1}f)\in P\times F,\quad \forall g\in G, p\in P, f\in F.$$

我们可以验证上述定义确实是自由右作用, 定义10.2第一条, 由于给定 g 后映射是 $\xi_g: P\times F\to P\times F$, 同胚已经满足, 我们只需要证明是 C^∞, 结合流形诱导的映射是 C^∞ 的来满足, 我们看第二点

$$\xi_{gh}(p,f)=(pgh,(gh)^{-1}f)=\xi_h(pg,g^{-1}f)=\xi_h(\xi_g(p,f))=(\xi_h\circ\xi_g)(p,f).$$

即为右作用, 自由也是因为恒等元是唯一的来满足.

根据定义10.4, 集合 $\{(pg,g^{-1}f)\mid g\in G\}$ 是过 (p,f) 的轨道, 把 ξ 在 $P\times F$ 上的每一轨道看作集合 Q 的一个元素, 记为 q. 下面将逐步证明 Q 是个流形, 就是我们本节所要介绍的**伴丛 (Companion bundle)**. $q\in Q$ 是一条轨道, 我们借轨道上任一点作为 q 的代表点, 并把 q 简记为 $p\cdot f$.

根据这样的记法可以带来一些直观的体现, 在轨道上选取另一点 (p',f') 来代表轨道可以简记为 $p'\cdot f'$, 再根据轨道的定义可以知道 $\exists g\in G$ 使得 $(p,f)g=(pg,g^{-1}f)$, 再利用我们的记法有 $pg\cdot g^{-1}f$, 接下来我们对 $p\cdot f$ 施加一些数学技巧给出

$$p\cdot f=p\cdot gg^{-1}f.$$

故有

$$p\cdot gg^{-1}f=pg\cdot g^{-1}f\Longrightarrow pg\cdot\overline{f}=p\cdot g\overline{f}(\overline{f}=g^{-1}f).$$

即左侧的群元可以移动到右侧; 同样的道理, 右侧的群元也可以移到左侧.

笔记 注意这里只是记法的问题, 实质上都是那条轨道.

我们前文不要求左作用一定是自由的, 我们想问自由这个性质到底体现到哪里? 如果我们给定 $p\cdot f=p'\cdot f'$, 并要求 $p'=p$, 即 $pg=p$. 如果是自由的话那么 $g=e$ 故 $f'=g^{-1}f=f$, 如果不是自由的, 就比如 f 在此时不是自由的, 同样给定 $p\cdot f=p'\cdot f'$, 如果此时要求 $f'=f$, 可不一定给出 $g^{-1}=e$, 故 $p'=p$ 不一定成立.

笔记 记住自由就是说只有恒等元作用于某一元素才能使得其等于本身.

存在两个同 Q 相关的自然的映射:

1. $\hat{\tau}: P\times F\to Q$, 定义为

$$\hat{\tau}(p,f):=p\cdot f\in Q.$$

Q 如果要成为流形需要满足 Q 构成拓扑空间, 且拓扑空间定义的拓扑为通常拓扑, 由于 $P\times F$ 是流形, 可以借助映射 $\hat{\tau}$ 定义 Q 的拓扑为:$\Phi\subset Q$ 为开当且仅当 $\hat{\tau}^{-1}[\Phi]\subset P\times F$ 为开. 给 Q 定义好拓扑后就可以构成拓扑空间; 根据 $\hat{\tau}$ 的定义, 不难看出其满足连续映射的定义.

笔记 由于这里没有写前五章内容, 这里尽量把所用到的给出. 通常拓扑是指指定的拓扑要求为 $\mathscr{T}=\{$ 空集或子集能表示为开区间之并 $\}$ 这也比较合理; 开集的定义是任一元素均有邻域属于该集合, 这样我们可以在整个集合内定义联络 (导数); 拓扑空间指的是指定了拓扑 $\mathscr{T}$ 的集合; 连续的定义使用的是推广到集合的定义, 具体内容为设 $(X,\mathscr{T}),(Y,\mathscr{S})$ 为拓扑空间, 映射 $f: X\to Y$ 称为连续的, 若 $f^{-1}[O]\in\mathscr{T}\in\mathscr{T}\quad\forall O\in\mathscr{S}$,

具体理解可以看书 *P20.*

2. $\hat{\pi}: Q \to M$ 定义为

$$\hat{\pi}(q) := \pi(p) \in M, \quad \forall q = p \cdot f \in Q.$$

由于 q 是一条轨道,$q = p \cdot f$ 的同时还可以记为 $pg \cdot fg$, 我们需要证明它们是否映射为 M 上的同一点. 好在 $\pi(pg) = \pi(p)$, 可以见图10.1.$\hat{\pi}: Q \to M$ 意味着给定 $p \in P$ 后有 $p \cdot f \in \hat{\pi}^{-1}[x]$, 可以在 Q 上找到纤维 $\hat{\pi}^{-1}[x]$, 于是 P 的纤维一一对应于 Q 的纤维, 写成映射的形式为

$$\hat{\tau}_p : F \to \hat{\pi}^{-1}[x], x = \pi(p).$$

以上的定义映射可以见下图12.1左边部分.

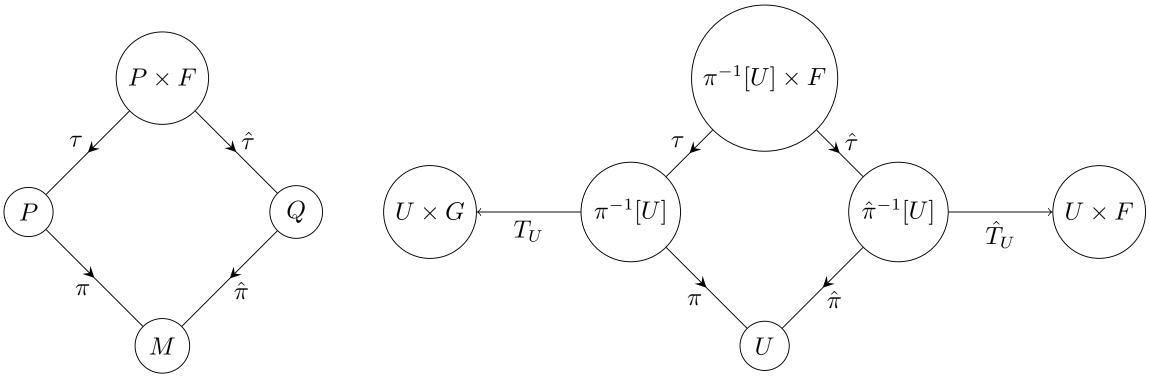

图 12.1: 主丛和伴丛的映射

给定 $P \times F \to M$ 两个渠道的映射, 我们好奇两个方向的逆映射是怎样的, 我们先来说明我们比较熟悉的方向 $M \to P \to P \times F$, 首先给定一点 $x \in M$, 那么 $\pi^{-1}(x)$ 会将其映射为 p 点所在的 fiber, 而 τ^{-1} 的逆映射应该作用到集合 $\pi^{-1}(x)$ 上, 我们先来观察 τ^{-1} 作用到 p 点的上给出 (p, F) 这一子流形, 所以 $\tau^{-1}[\pi(x)]$ 最后的结果为

$$\{(p, f) | f \in F, p \in \pi^{-1}(x)\} \equiv A.$$

接下来我们说明另一个方向, 我们同样考虑 x 点的逆映射, 由于 $\hat{\pi}$ 是借助 π 来定义的, 所以逆映射同样需要借用 $\pi^{-1}(x)$, 我们考虑一点 $p \in \pi^{-1}(x)$, 由于没有限制 $f \in F$ 所以对于借助 p 的 $\hat{\pi}$ 的逆映射 $\hat{\pi}^{-1}$ 作用在 x 点给出的集合为

$$\{p \cdot f \mid f \in F, \pi(p) = x\}.$$

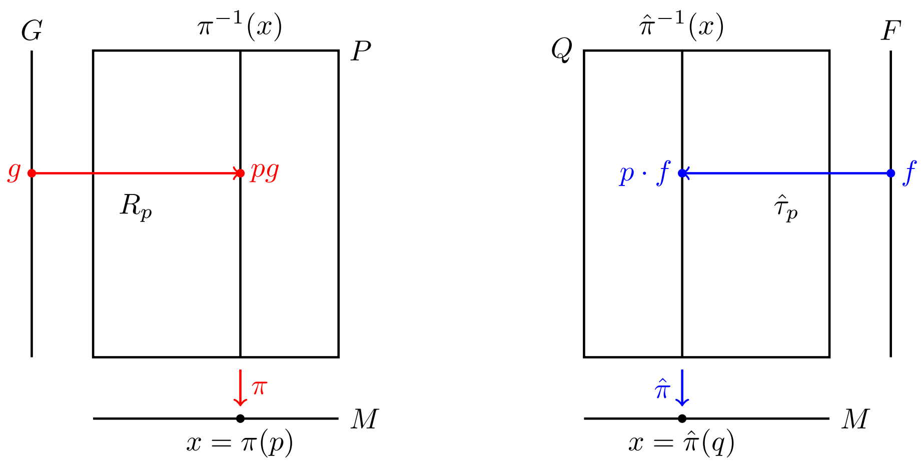

图 12.2: 主丛和伴丛的对应

看图12.2可以精确理解该概念, 和 p 点类似, 同 fiber 的其它点也可以给出 x 故最后给出

$$\hat{\pi}^{-1}(x) = \{p \cdot f | f \in F, p \in \pi^{-1}(x)\} \equiv B.$$

随后, 我们来看 $\hat{\tau}^{-1}$, 原则上应该作用于上面这个集合, 也就是 $\hat{\tau}^{-1}[B]$, 我们希望两条路殊途同归, 这里就需要满足 $\hat{\tau}^{-1}[B] = A$. 证明集合相等的方法我们已经熟悉, 这里直接开始, 对于 $\forall b = p \cdot f \in B$, 根据定义 10.4有

$$\hat{\tau}^{-1}(b) = (p, f)g = (pg, g^{-1}f) \in A, \forall g \in G.$$

故 $B \subset A$, 反过来对于 $\forall (p, f) \in A$

$$\hat{\tau}(p, f) = p \cdot f.$$

由于两个集合的范围相同, 故 $a \in B$, 则 $A \subset B$, 故 $A = B$, 综合以上理解, 对于点 x 殊途同归, 那么对于集合 $U \subset M$ 有

$$\hat{\tau}^{-1}[\hat{\pi}^{-1}[U]] = \pi^{-1}[U] \times F.$$

在定义10.5定义主丛时要求是局域平凡, 我们总可以找到 $U \subset M$ 是平凡主丛, 也就是图12.1右面所示, 但是 $\hat{T}_U$ 还没有定义, 是否存在一个 Q 上的微分同胚映射 $\hat{T}_U : \hat{\pi}^{-1}[U] \to U \times F$, 答案是存在, 定义如下

$$\hat{T}_U(q) := (\hat{\pi}(q), \breve{f}_U), \quad \forall q \in \hat{\pi}^{-1}[U].$$

其中 $\breve{f}_U$ 满足 $q = \breve{p}_U \cdot \breve{f}_U$(对于同一条轨道上, 可以选择轨道上任一点代表这个轨道, 而在一条轨道上, 如果 p 固定, f 便固定), 而 $\breve{p}_U$ 是 T_U 在纤维 $\pi^{-1}[\hat{\pi}(q)]$ 的特殊点, 即 $S_U(\breve{p}_U) = e$, 当 $\breve{p}_U$ 选定后, 对于 q 点而言 $\breve{f}_U$ 也就选中了.

接下来我们来说明 Q 是流形. 前文说明了 Q 构成拓扑空间, 而 $\hat{\pi}^{-1}[U] \subset Q$ 是开子集, 开子集等证明借助 $\hat{\pi}^{-1}[U] \times F$ 是 $P \times F$ 给出, 故结合上诱导拓扑则 $\hat{\pi}^{-1}[U]$ 也构成拓扑空间.

笔记 *设 $(Q, \mathscr{Q})$ 是拓扑空间,$\mathscr{Q}$ 是 Q 的拓扑, 而 $U \subset Q$, 所谓诱导拓扑就是给 U 定义一个拓扑 $\mathscr{U}$, 使得 $(U, \mathscr{U}) \subset (Q, \mathscr{Q})$,$\mathscr{U}$ 定义为*

$$\mathscr{U} := \{X \subset U \mid \exists Y \in \mathscr{Q} \quad s.t. X = U \cap Y\}.$$

更详细内容见书 P23.

根据流形的定义要求, 我们只需要证明 Q 的任一开子集 $\hat{\pi}^{-1}[U]$ 存在到 V_α($\mathbb{R}_n$ 中用通常拓扑衡量的开子集) 的同胚映射, 且两个开子集之间的交同胚给出的 V_α 和 V_β 之间的映射是 C^∞ 的. 直接证明比较困难, 因为这是对流形的要求, 不过我们可以借助于其它流形诱导出的 V_α 来给出 Q 是流形, 也就是说只要证明 $\hat{\pi}^{-1}[U]$ 同胚于某个流形, 再对其它子集进行相同的操作便得到 Q 是流形. 我们在前文还没有证明 $\hat{T}_U$ 是微分同胚, 我们先证明其是同胚映射, 并使得 Q 构成流形. 证明是同胚映射要分两步走

证明

1. $\hat{T}_U$ 是一一到上的: 证明一一到上最简单也最直观的就是需要两个集合之间的元素一一对应, 我们先列出需要证明的集合

$$\hat{\pi}^{-1}[U] = \{q \mid q = p \cdot f, p \in \pi^{-1}[U], f \in F\}$$
$$U \times F = \{(x, f) | x \in U, f \in F\}.$$

由 $\hat{\pi}[\pi^{-1}[U]] = \pi[\pi^{-1}[U]] = U$, 不难给出, 坐标关于 x 的分量是一一对应的, 接下来的问题只需要给出关于 f 的分量是一一对应的问题便解决了. 我们只要证明 $\pi^{-1}(x), \forall x \in U$ 成立即可

$$\hat{\pi}^{-1}(x) = \{p \cdot f(p) | p \in \pi^{-1}(x)\} = \{\breve{p}_U g \cdot f(\breve{p}_U g) | \forall g \in G\}.$$

这里写成 $f(p)$ 时因为对于固定 q 点, f 和 p 的选择有关, 当 $g = e$ 时, $f(\breve{p}_U g) = \breve{f}_U$, 我们构造集合

$$\{\breve{p}_U \cdot g\breve{f}_U \mid \forall g \in G\}.$$

根据定义10.1, 可以给出上面集合和 F 微分同胚, 我们知道 $p \cdot gf = pg \cdot f$, 故上面关于 q 点的集合又可以写为

$$\{\breve{p}_U g \cdot \breve{f}_U \mid \forall g \in G\} \equiv C.$$

ok, 我们观察集合 $\pi(\hat{x})^{-1}(x)$ 和 C, 发现每有一个 $g \in G$, 两个集合内都有一个点给出对应于 g, 且由于 $\hat{T}_U$ 关于 f 的映射, 把 $\hat{\pi}^{-1}(x)$ 的点映射为 C 上的点, 也就说 C 和 $\hat{\pi}^{-1}(x)$ 点点对应, 即由 $\hat{T}_U$ 一一到上成立.

笔记 总结下思路, 首先按开头的想法要证明两个集合之间的元素一一对应, 由于两个集合在映射 $\hat{T}_U$ 关于 x 方向定义域相同, 所以只要给出映射关于 f 的分量一一对应即可, 我们通过构造和 F 微分同胚的集合解决了问题.

2. 我们在证明一一到上时证明的是点点对应, 故其满足连续定义所要求的拓扑结构, 故正逆映射均为连续的. 连续定义见 P24 定义 3a.

笔记 介绍完数学方法后, 我们还是来一些 *hand-waving*,Q 是流形的来源在于 Q 是一个高维度流形向低维度流形的投影, 把 $(pg, g^{-1}f)$ 这一条轨道投影到一点, 大的流形局部同胚与 $\mathbb{R}^n$ 维, 把轨道看作一点无非就是去掉李群 G 作为流形时的维度, 这里也暗示了 Q 的维度是 $\dim M + \dim F$,(在这里维度的表示只是一个直观的想法), 所以 Q 也可以看作是 $P \times F$ 的嵌入子流形.

随后 $P \times F$ 是流形, 其和嵌入子流形的关系是 C^∞, 原因是根据流形定义要求的第二点流行中相交的两个区域同胚于不同的 $\mathbb{R}^n$ 如果要求其中一个映射是恒等映射, 另一个映射是 $\hat{T}_U$, 那么其正逆映射均为 C^∞, 最后 $\hat{T}_U$ 是微分同胚映射.

至此, 我们可以说 Q 和 P 十分相像, 流形 Q 配以上面要求后的数学结构称为**与主丛 $P(M,G)$ 相伴的纤维丛 [fiber bundle associated to principal fiber bundle $P(M,G)$]**, 简称为主丛 P 的伴丛, 简记为 $(P \times F)/\sim$. 流形 F 称为伴丛 Q 的**典型纤维 (typical fiber)**. 最后还有一个问题就是关于转换函数的问题, 我们根据 T_U 给出 $\hat{T}_U$, 同样可以根据 T_V 给出 $\hat{T}_V$, 其中 $U \cap V \neq \varnothing$, 根据定理10.3有知道 $\breve{p}$ 的转换关系, 我们想问 $\breve{f}$ 的关系是什么?

$$q = \breve{p}_U \cdot \breve{f}_U = \breve{p}_V \cdot \breve{f}_V = \breve{p}_U g_{UV}(x) \cdot \breve{f}_V = \breve{p}_U \cdot g_{UV}(x)\breve{f}_V.$$

故

$$\breve{f}_U = g_{UV}(x)\breve{f}_V.$$

仿照局域截面还可以定义伴丛 Q 的局域截面, 它是 C^∞ 映射 $\hat{\sigma}: U \to Q$, 满足

$$\hat{\pi}(\hat{\sigma}(x)) = x, \forall x \in U.$$

伴丛的知识基本已经结束了, 下面我们举一些例子来加深理解.

例 12.1 对任一主丛 $P(M,G)$ 都可以看作是自己的伴丛.

对主丛 $P(M,G)$ 构造自己的伴丛, 首先需要选定 typical fiber F, 我们可以选择结构群 G 作为 F, 随后应该定义结构群对 typical fiber 的左作用 $\chi: G \times G(F) \to G(F)$, 可以选择左平移为左作用, 即

$$\chi_g(h) = gh, \forall g, h \in G.$$

这样我们就可以得到伴丛 Q, 且有 $q = p \cdot g, p \in P, g \in G$, 我们可以很自然地定义映射 $\nu: Q \to P$ 为

$$\nu(q) := pg \in P, \forall q = p \cdot g \in Q.$$

从直观上看上面这个映射是微分同胚的, 验证的话, 首先一一到上性比较好验证, 连续性根据定义也不困难, 关键是怎么确定这个映射是 C^∞ 的, 这个可以借助 $P \times G(F)$ 是流形, 就是图12.1左侧我们可以看到流形 $P \times F$ 的存在开子集同胚于 P 和 Q, 且由于 $G = F$, 在 $P \times G(F)$ 势必存在开子集的交包含 P 和 Q, 故交之间的映射是 C^∞ 的, 也就是 ν 是 C^∞, 故 ν 是微分同胚映射, 也就是说 $P(M,G)$ 自身就是自己的伴丛.

例 12.2 我们在例10.3中定义了一个非平凡主丛, 我们将其引过来并记作 $S^1(S^1, Z_2)$. 我们来看看如何定义这样非平凡主丛的伴丛.

令 $F = \mathbb{R}$, 则定义左作用 $\chi: Z_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$\chi_e(f) = \chi_h(f) := f, \forall f \in \mathbb{R}.$$

另外对于 $S^1 \times \mathbb{R}$ 有右作用 $\xi: (S^1 \times \mathbb{R}) \times G \to S^1 \times \mathbb{R}$ 为

$$\xi_e(p_\theta, f) = (p_\theta, f)$$
$$\xi_h(p_\theta, f) = (p_{\theta+\pi}, f)$$

右作用依赖于 P, F 上的作用, 依照 $P \times F$ 右作用可以给出 Q 的轨道, 接下来我们来看看 Q,Q 上每点对应的是集合

$$\{(p_\theta, f), (p_{\theta+\pi}, f)\}\,.$$

故 Q 是这样一个流形, 其水平截面为 S^1, 而竖直方向是流形 F, 也就是说 Q 微分同胚于 $S^1 \times F$, 也就是说 Q 是整体平凡伴丛, 可以给出微分同胚映射

$$\hat{T}_M(q) := (\pi(p_\theta), f), \quad \forall q = p_\theta \cdot f.$$

例子12.2给出平凡主丛最主要的原因是因为 F 上的左作用足够简单, 简单到可以认为就是把流形 F 在底流形的维度进行复制粘贴. 我们可以推广到任意主丛上, 对任一主丛, 取 F 为任意流形定义左作用为 $\chi : G \times F \to F$ 为

$$\chi_g(f) := f, \quad \forall g \in G, f \in F.$$

故可以给出 Q 为

$$q = \{(pg, f) \mid \forall g \in G\} \subset P \times F.$$

自然存在微分同胚映射

$$\hat{T}_M = (pg, f).$$

故以上步骤给出的伴丛是平凡伴丛.

例 12.3 依旧选择例10.3的非平凡主丛 $S^1(S^1, Z_2)$, 仍取 $F = \mathbb{R}$, 但左作用 $\chi : Z_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\chi_e(f) := f, \chi_h(f) := -f, \forall f \in \mathbb{R}.$$

我们来看这样的伴丛 Q 会发生什么样的变化, 要给出伴丛, 我们需要给出 $\xi : (S^1 \times \mathbb{R}) \times Z_2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ 来确定轨道, 给出的左作用为

$$\xi_e(p_\theta, f) = (p_\theta, f)$$
$$\xi_h(p_\theta, f) = (p_{\theta+\pi}, -f).$$

也就是说对于 Q 上一点 q 实际上对应的是

$$\{(p_\theta, f), (p_{\theta+\pi}, -f)\}\,.$$

这对应于什么流形呢? 我们再次回到例12.2, 不难发现例12.2无非就是一个圆柱面并且取了对径认同也就是说, 对于圆柱面对着直径切开, 拿其中一半再度接上, 便是我们在例12.2所得的流形. 而在本例无非就是沿直径切开后, 取其中一半并把一个头翻转 180 度, 并接上, 就是我们所说的莫比乌斯环. 结构如下图所示.

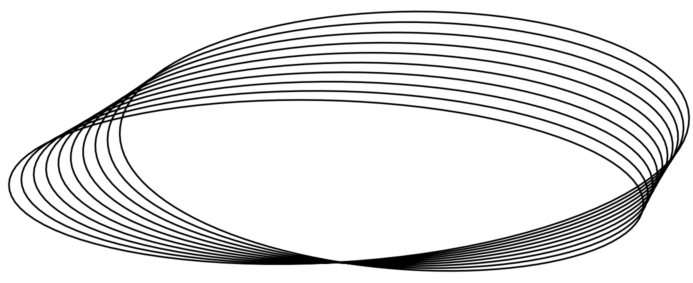

图 12.3: 莫比乌斯环

笔记 还有一点值得说明的是, 我第一次在书上看到按照12.2给出的是莫比乌斯环时是不太相信的, 主要原因是因

为莫比乌斯环在我的认知中是一个连续翻转的结构, 但是例子中并没有强调这一点; 实际上例12.2的定义更准确来说是定义了一个和莫比乌斯同胚的结构. 关于更详细了解莫比乌斯环的知识, 这里有视频(点击跳转)

例 12.4 (切丛) 维数是 n 的底流形 M 的标架丛 FM 的结构群 $G=GL(n)$ 借助合适的群作用可以给出 FM 的伴丛是切丛.

取流形 $F=\mathbb{R}^n$($\mathbb{R}^n$ 是矢量空间), 则 $f=(f^1,\cdots,f^n)\in F$, 并定义左作用 $\chi:G\times F\to F$ 为

$$(\chi_g(f))^\mu := g^\mu{}_\nu f^\nu,\quad \forall g\in GL(n), f\in F.$$

我们接下来就可以给出 FM 的伴丛 Q, 首先需要右作用 $\xi:(FM\times F)\times G\to FM\times F$ 为

$$\xi_g(p,f)=\xi_g((x,e_\mu),f^\sigma)=((x,e_\mu)g,g^{-1}(f^\rho))=((x,e_\nu g^\nu{}_\mu),(g^{-1})^\rho{}_\sigma f^\sigma).$$

接下来我们来看这样给出的伴丛为什么是切丛? 给点 $m_1=((x,e_\mu),f^\rho)\in FM\times F$ 可以构造一个矢量

$$v_a=(e_\mu)_a f^\mu\in T_xM.$$

如果给另一个点 $m_2=((x,e'_\mu),f'^\rho)\in FM\times F$,$m_1$ 和 m_2 对应于底流形上同一个点 x, 同样可以构造 m_2 点的矢量

$$v'_a=(e'_\mu)f'^\mu\in T_xM.$$

如果 m_1 和 m_2 同轨道的话, 它们之间满足关系 $m_2=m_1g$, 即

$$m_2=m_1g=((x,e_\nu g^\nu{}_\mu),(g^{-1})^\rho{}_\sigma f^\sigma).$$

故

$$v'_a=(e_\nu)_a g^\nu{}_\mu(g^{-1})^\mu{}_\sigma f^\sigma=(e_\nu)_a\delta^\nu{}_\sigma f^\sigma=(e_\nu)_a f^\nu=(e_\mu)_a f^\mu=v_a.$$

也就说同轨道的点给出 T_xM 上的同一个矢量. 这就表明 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 和 T_xM 存在一一对应关系, 于是 Q 可以看作 M 的切丛 TM. 此时伴丛 Q 的局域截面, 对应于 M 上的一个矢量场.

例 12.5 (余切丛)有了切丛, 我们就可以定义余切丛, 本例来看如何定义余切丛.

仍然取 $P=FM$,$G=GL(n)$, $F=(\mathbb{R}^n)^*=\mathscr{T}_{\mathbb{R}^n}(0,1)$, 则 $f\in F$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对偶矢量, 记作 $(f_1,\cdots,f_n)$, 定义 $\chi:G\times F\to F$ 为

$$(\chi_g(f))_\mu := (g^{-1})^\nu{}_\mu f_\nu,\quad \forall g\in GL(n), f\in F \tag{12.1}$$

这个作用我们暂且先接受, 为何这么定义后续讨论. 给定点 $((x,e_\mu),f_\rho)\in FM\times F$ 可以构造 $x\in M$ 的对偶矢量

$$\beta\equiv e^\mu f_\mu\in T^*_xM,.$$

$\{e^\mu\}$ 是 $\{e_\mu\}$ 的对偶基底. 接下来的思路只要证明同轨道的点对应于同一个对偶矢量, 就可以给出此时的 Q 时余切丛, 开始之前, 我们应该来看为什么 F 上的左作用按照式12.1定义, 对于对偶矢量我们有

$$\beta_a=(e^\mu)_a f_\mu.$$

对偶基矢作用于基矢上有作用

$$e^\mu e_\mu=C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

当基矢量发生线性变换 $e'_\rho=e_\mu g^\mu{}_\rho$ 后, 我们需要重新求得对偶基矢满足上式且 C 不变给出

$$e_\mu g^\mu{}_\rho(g^{-1})^\rho{}_\mu e^\mu=C.$$

不难得出

$$e'^\rho=(g^{-1})^\rho{}_\mu e^\mu.$$

随后我们给出关于 f_μ 的变化

$$f'_\mu=g^\nu{}_\mu f_\nu.$$

事情到这里发现这里和12.1差了一个逆, 是不是我们哪里有算错, 仔细检查后发现没有算错, 那问题出现在了哪里; 实际上, 问题出现在了 $\xi_g=(R_g(p),\chi_{g^{-1}}(f))$ 上, 仔细观察发现 χ_g 和 g 作用到 f_μ 上正好差了一个逆. 最后, 我们

给出式12.1要求的左作用. 我们通过坐标变换给出的左作用, 接下来我们验证一下同轨道的点给出相同的对偶矢量. 还是给出 $m_1 = ((x, e_\mu), f_\rho)$, 这时构造的对偶矢量为

$$\beta_a = (e^\mu)_a f_\mu.$$

另取一点 $m_2 = m_1 g = ((x, e_\mu g^\mu{}_\nu), g^\rho{}_\sigma f_\rho)$, 此时给出的为

$$\beta'_a = (g^{-1})^\nu{}_\mu (e^\mu)_a g^\rho{}_\nu f_\rho = (e^\mu)_a f_\rho = \beta_a.$$

故同轨道的点给出的是 $T_x^* M$ 的矢量. 最后我们给出了主丛的伴丛为余切丛的构造方法. 局域截面是对偶矢量场.

笔记 这里的主丛取得是标架丛, 每个标架对应于一个对偶标架, 故标架丛同胚于对偶标架丛 FM^*, 我们可以给出 $\xi_g : (FM^* \times F) \times G \to FM^* \times F$ 使得上面定义有更自然的结构.

$$\xi_g(p, f) = \xi_g((x, e^\mu), f_\sigma) = ((x, (g^{-1})^\mu{}_\nu e^\nu), g_\rho{}^\sigma f_\sigma).$$

例 12.6 (1,1) 型张量丛 仍然以标架丛 FM 为主丛, 我们来看如何给出张量丛.

首先还应该选择 F, 此时 F 应该为 $\mathbb{R}^n$ 上 (1,1) 型张量,$f^\mu{}_\nu$ 代表在坐标基上的分量, 随后我们定义左作用, 参考例12.4和例12.5给出 $\chi : G \times F \to F$ 为

$$(\chi_g(f))^\mu{}_\nu := g^\mu{}_\alpha (g^{-1})^\beta{}_\nu f^\alpha{}_\beta \quad \forall g \in GL(n), f \in F.$$

现在每点 $((x, e_\mu), f^\rho{}_\sigma) \in FM \times F$ 自然给出 $x \in M$ 上的一个 (1,1) 型张量为

$$T^a{}_b \equiv f^\mu{}_\nu (e_\mu)^a (e^\nu)_b.$$

和前面两个例子一样的道理, 如果 $P \times F$ 上的点同轨道, 那么就应该对应于同一个张量, 故此时的伴丛是 (1,1) 型张量丛. 局域截面是 (1,1) 型张量丛.

例12.4, 例12.5和12.6给出的是一样的例子, 由此可以推广至 (k, l) 型张量丛的构造. 我们重新回顾如何构造伴丛的, 给定主丛 $P(M, G)$, 然后我们选择不同的 F, 并在 F 上定义左作用. 根据定义7.1不难发现 $\hat{G} \equiv \{\chi_g : F \to F \mid g \in G\}$ 是李变换群. 根据定义7.2 的表述, 可以给出 F 是 G 的实现空间. 根据定义7.3当 F 是矢量空间且 $\chi_g : F \to F$ 是线性变换时, 此时 $\hat{G}$ 是一个表示,F 是表示空间, 此时得到的伴丛 Q 称为**伴矢丛 (associated vector bundle)**, 也简称为**矢丛**. 切丛, 余切丛和 (k,l) 张量丛都是矢丛.

由于 F 是矢量空间, 由图12.2, 我们知道存在同胚映射 $\hat{\tau}_p$ 使得 $\hat{\pi}^{-1}(x)$ 也是一个矢量空间, 我们可以借助 F 上的矢量加法和数乘定义出 $\hat{\pi}^{-1}(x)$ 的加法和数乘为

$$q_1 \pm q_2 := p \cdot (f_1 \pm f_2), \quad \alpha q_1 := p \cdot \alpha f_1, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

零元定义为

$$0 := p \cdot 0.$$

上面定义目前看来比较合理, 但还是存在一些问题, 我们知道 Q 上的点是 $P \times F$ 上的一条轨道, 我们可以选取轨道上的任一点代表 q 点, 上面选择了 $p \cdot f$, 我们同样可以选择 $p' \cdot f'$, 那么重复上面的定义给出的两套规则是否相同? 这是需要我们证明的, 我们有

$$\begin{aligned}
p' \cdot (f'_1 \pm f'_2) &= pg \cdot (g^{-1} f_1 \pm g^{-1} f_2) \\
&= pg \cdot (\chi_{g^{-1}} f_1 \pm \chi_{g^{-1}} f_2) \\
&= pg \cdot \chi_{g^{-1}} (f_1 \pm f_2) \quad \chi_g \text{是线性的} \\
&= pg \cdot g^{-1} (f_1 \pm f_2) \\
&= pgg^{-1} \cdot (f_1 \pm f_2) \\
&= p \cdot (f_1 \pm f_2).
\end{aligned}$$

数乘和零元也可按照上面方法验证. 也就是说 $\hat{\pi}^{-1}(x)$ 是一个矢量空间, 这也是我们简称为矢丛的原因. 每个矢量空间都有零元, 也就是说不管平凡与否, 任意矢丛都有一个整体截面 $\hat{\sigma}$, 满足 $\hat{\sigma}(x) = 0 \in \hat{\pi}^{-1}(x) \quad \forall x \in M$, 称为**零截面**.

第三部分

纤维丛在场论中的应用

本章部分进入纤维丛在物理场中的应用,前面三章是数学基础,纤维丛理论特别适用于规范场论,本章的目的还是架桥的工作. 正式进入之前,先复习一下物理中的相关知识点.

第十三章 拉式理论和哈式理论

13.1 拉式理论

13.1.1 有限自由度的拉式理论

N 维系统有 N 个独立的广义坐标, 每组广义坐标 $(q^1, q^2, \cdots, q^N)$ 确定系统的一个**位形 (configuration)**, 因此广义坐标又称为**位形变量 (configuration variables)**. 所有可能的位形的集合 $\mathscr{C}$ 称为系统的**位形空间 (configuration variables)**, 位形空间是一个 N 维流形. 系统的演化无非就是位形随着时间而变化, 对应到位形空间就是一条以时间 t 为参数的曲线 $\eta(t)$, 可以给出参数式

$$q^i = q^i(t).$$

曲线的切矢就是我们认知的**广义速度**, 其坐标分量可以表示为

$$\dot{q}^i(t) = \frac{dq^i(t)}{dt}.$$

在演化曲线上取两个点 Q_0, Q_1, 满足 $Q_0 = \eta(t_0), Q_1 = \eta(t_1)$ 且 $t_1 > t_0$, 则介于初位形 Q_0 和末位形 Q_1 之间的曲线 $\eta(t)$ 称为**路径 (path)**, 两点之间的曲线有很多种情况, 也就意味着路径不唯一, 但是反应动力学规律的曲线只有一条, 称为**正路**, 其余路径称为**旁路**.

如何在路径中找到正路便是引入拉式函数和作用量的目的. 系统的**拉式函数 [(Lagrangian function)(又叫拉式量)]**L 是这样一个函数

$$L(t) = L(q^i(t), \dot{q}^i(t)).$$

其积分称为该路径的**作用量 (action)**S, 满足

$$S := \int_{t_0}^{t_1} L(q^i(t), \dot{q}^i(t))dt.$$

正路与旁路的区别由**哈式原理 (Hamilton principle)(又称变分原理)** 给出, 哈式原理要求作用量取极值.

S 是一个关于函数的函数, 称为**泛函 (functional)**, 泛函的定义如下:

定义 13.1 (Functional)

一个泛函 (functional) F 是从一个函数空间 $\mathscr{F}$ 到实数集合 (或复数集合)$\mathbb{R}$ 的映射:

$$F : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$$

其中，$\mathscr{F}$ 是定义域中的函数空间，而 $F(f)$ 是将 $f \in \mathscr{F}$ 映射到一个实数或复数。 ♣

笔记 *例如，设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的一个函数，则一个常见的积分型泛函为：*

$$F(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

这个泛函将函数 $f(x)$ 映射为它在区间 $[a, b]$ 上的积分值。

另一种常见的泛函形式是微分型泛函，它将一个函数映射到它的导数：

$$F(f) = f'(x)$$

S 就是积分型泛函, 普通的函数求极值只需要求微分并找到 $df = 0$ 时的参数值即可, 但是泛函求极值需要涉及变分运算.

我们先来看看如何求 S 的极值. 考虑任一 $Q_0 \to Q_1$ 的单参路径族 $q^i = (t, \lambda)$, 满足当 $\lambda = 0$ 时此时 q^i 所给出的曲线是正路;$\lambda \neq 0$ 时, 此时给出的曲线是旁路. 这也是可以做到的, 根据物理意义, 总存在正路, 对路径做微小偏

移并用参数 λ 表示可以给出曲线族来. 此时的 S 是 λ 的函数, 用下式表示

$$S(\lambda)=\int_{t_0}^{t_1}L(q^i(t,\lambda),\dot{q}^i(t,\lambda))dt$$

我们知道正路要求 S 取极值, 那么也就意味着其在曲线族依旧取得极值, 也就是说 S 在单参族内求极值问题转变为一元函数 $S(\lambda)$ 求导问题, 即

$$\left.\frac{dS(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left.\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}dt=\int_{t_0}^{t_1}\left.\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial\lambda}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial\dot{q}^i}{\partial\lambda}\right)\right|_{\lambda=0}dt.$$

令

$$\begin{aligned}\delta S&\equiv\left.\frac{dS(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}\\ \delta q^i&\equiv\left.\frac{\partial q^i(t,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}\\ \delta\dot{q}^i&\equiv\left.\frac{\partial\dot{q}^i(t,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}\end{aligned}$$

把 $\delta S,\delta q^i,\delta\dot{q}^i$ 分别称为 $S,q^i,\dot{q}^i$ 在所选的单参组内的**变分 (variation)**, 则我们得到变分关系

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i\right)dt.$$

我们可以把 $\lambda=0$ 简化不写, 因为正路中要求了 $\lambda=0$. 而且要求了 $\delta S=0$, 我们来看可以给出什么, 首先因为对 λ 求导和对 t 求导可以交换顺序, 我们有

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\frac{d}{dt}\delta q^i.$$

根据分部积分法有

$$\int_{t_0}^{t_1}[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}]dt\frac{d}{dt}\delta q^i=\int_{t_0}^{t_1}[\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i)-(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i})\delta q^i]dt.$$

我们要求的所有曲线族均是 $Q_0\to Q_1$, 也就是说我们可以计算

$$\begin{aligned}\delta q^i|_{t_0}&=\lim_{\lambda\to0}\frac{1}{\lambda}[q^i(t_0,\lambda)-q^i(t_0,0)]=0\\ \delta q^i|_{t_1}&=\lim_{\lambda\to0}\frac{1}{\lambda}[q^i(t_1,\lambda)-q^i(t_1,0)]=0.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i-(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i})\delta q^i\right)dt+\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i\right|_{t_0}^{t_1}\\ &=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i})\right)\delta q^i dt\\ &\equiv\int_{t_0}^{t_1}\Lambda_i\delta q^i dt.\end{aligned}$$

我们可以给出如下定理

定理 13.1

$\eta(t)$ 为正路 $\Longleftrightarrow$ $\delta S=0$ 对于 $\forall$ 含 $\eta(t)$ 的单参路径族 $\Longleftrightarrow$ $\eta(t)$ 的 $\Lambda_i=0(i=1,\cdots N)$

证明 第一个 $\Longleftrightarrow$ 是哈密顿原理要求的, 我们来证明第二个 $\Longleftrightarrow$.

首先证明 $\Rightarrow$, 假设存在 $\tilde{t}\in(t_0,t_1)$ 使得 $\Lambda_1(\tilde{t})\neq0$, 不妨令 $\Lambda_1(\tilde{t})>0$, 则其存在邻域满足 $\Lambda_\Delta>0$. 对于单参族 $q^i=q^i(t,\lambda)$, 我们可以要求除去 Δ 外的所有区间内使得 $\Lambda_1=0$, 且 $\delta^1>0,\delta^2\cdots\delta^N=0$, 则此时 $\delta S>0$, 与假设矛盾, 对于 $\Lambda_\Delta<0$ 的情况也与假设矛盾, 现在摆在脑海里使得我们拒绝承认这个定理的想法是, 我可以选择合适的 $\Lambda\neq0$, 但是经过积分后 $\delta S=0$, 这种情况我们该怎么排除掉, 这种情况建立在一个微妙的平衡上, 正负相互抵消, 看起来似乎是符合要求的, 但是我们把这种情况下再延申一下, 此时给出的 $\eta(t)$ 在 (t_0,t_1) 范围内成立, 但是如果在 $(t_0,t_1-\Delta)$ 的范围内, 这种微妙的平衡立马就被打破了, 我们要找的路径选择的点是任意的, 如果 $Q_0\to Q_1$

是正路, 那么从端点到曲线的任意点也应该是正路, 故 $\Lambda_1 = 0$, 同样的道理给出 $\Lambda_i = 0$.

其次 $\Leftarrow$ 方向, 只要我们代入计算就会给出 $\delta S = 0$

定理13.1给出 $\eta(t)$ 为正路的充要条件是它的拉式函数 $L = L(q^i, \dot{q}^i)$ 满足

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \quad i = 1, \cdots, N \tag{13.1}$$

系统的 L 的函数形式给定后, 式13.1的 N 个 2 阶常微分方程, 称为**欧拉-拉格朗日方程**, 简称 **拉式方程**. 给定初始条件后有唯一解, 对应与 $\mathscr{C}$ 种以 t 为参数的曲线.

当然拉式函数也可以显含时间, 即 $L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$ 但是 t 不会与参数 λ 有关, 故以上讨论和结论仍然适用.

一般而言, 想要把某一理论 (有限自由度) 改编成拉式形式, 就是在寻找合适的拉式函数, 就比如牛顿引力理论的拉式函数就是

$$L = T - V.$$

13.1.2 经典场论的拉式形式

最为经典的场是电磁场, 无源的电磁场在洛伦兹规范下满足如下方程

$$\partial^a \partial_a A_b = 0.$$

还有两种重要的经典场. 在早期研究量子力学中, 薛定谔给出方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi.$$

以相对论的观点发现不是洛伦兹协变的, 原因是还有对时间 t 的一阶导数, 但对于坐标却是二阶导的, 时空不平权. 因此需要修改, 有两种思路, 一是把对时空坐标的导数改为两阶, 给出的方程为

$$\partial^a \partial_a \phi - m^2 \phi = 0 \quad m\text{为常数}.$$

称为 Klein-Gordon 方程, 简称 KG 方程. 但是 KG 方程存在两个问题:1. 存在负能解;2. 概率密度可以是负. 这是无法接受的. 第二种修改方案是 Dirac 方程, 此时不存在负概率密度的问题, 但仍然存在负能解. 上面的问题都在量子场论中得到解释, 更为详细的内容参考量子场论.

我们还是回到经典场的拉式形式. 我们首先来看闵式时空的实标量场. 闵式时空可以指定坐标 $\{t, x^i\}$, 指定 $t = \hat{t}$, 就是指出了一个同时面, 也是在 $\hat{t}$ 时刻的全空间. 随后还要指定 ϕ 在空间各点的值, 才能唯一指定 ϕ 的状态, 即指定 ϕ 的位形. 此时 $\hat{t}$ 的位形变量可以记为 $\phi(x, \hat{t})$, 不同于有限自由度的位形变量, 由于 x 的连续取值导致场是一个无限自由度的系统. 随着 t 的不断变动, ϕ 的状态开始演化, 我们指定系统在 $\Sigma_0 \to \Sigma_1$ 中间进行演化, 并把满足相应规则的 $\phi(x, t)$ 称为正路, 其余称为旁路. 此时我们可以指定拉式量随时间变化的函数关系

$$L(t) = L[\phi(x, t), \dot{\phi}(x, t)].$$

其中 $\dot{\phi}(x, t) = \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}$, 此时 L 已经是 $\phi, \dot{\phi}$ 的泛函了. 我们可以给出路径的作用量为

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt.$$

但是 $L(t)$ 依旧是一个不好确定的量, 它不像第一节中的 $L(t)$ 是个函数, 这里的 $L(t)$ 空间场的泛函, 我们可以引进拉式密度 $\mathscr{L}$ (单位体积的拉式量) 的函数, 来计算出 $L(t)$. 而 $\mathscr{L}$ 的函数变量是什么, 首先我们有

$$L(t) = \int_{\Sigma_t} \mathscr{L}(x) d^3x.$$

这才是我们需要思考的问题, 上面这个积分是计算在 t 时刻所有可能的 $\mathscr{L}(t)$, 如果给定 $\phi(x, t), \partial_i \phi(x, t)$, 场便确定了, 不同的 $\phi(x, t), \partial_i \phi(x, t)$ 给定不同的场, 故 $\mathscr{L}$ 应该是 $\phi(x, t), \partial_i \phi(x, t)$ 的函数, 又因为 $L(t)$ 和 $\dot{\phi}(x, t)$ 有关, 故我们最终给出

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi(x, t), \dot{\phi}(x, t), \partial_i \phi(x, t)).$$

上面给出 $\mathscr{L}$ 是默认把时间空间分开, 实际上我们可以使用更为统一的表述. 我们把作用量定义为

$$S := \int_U \mathscr{L}.$$

其中 $U \subset \mathbb{R}^4$ (且 U 的闭包 $\overline{U}$ 紧致),$\mathscr{L}$ 就是场量 ϕ 和时空导数 $\partial_a\phi$ 的局域函数. 即

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi, \partial_a\phi).$$

笔记 我们给出紧致的定义, 首先给出有限子覆盖的定义

定义 13.2 (finite subcover)

设 $\{O_\alpha\}$ 是 $A \subset X$ 的开覆盖. 若 $\{O_\alpha\}$ 的有限个元素构成的子集 $\{O_{\alpha_1} \cdots O_{\alpha_2}\}$ 也覆盖 A, 就说 $\{O_\alpha\}$ 有**有限子覆盖 (finite subcover)**.

其次是紧致的定义

定义 13.3 (compact)

$A \subset X$ 叫**紧致的 (compact)**, 若它的任一开覆盖都有有限子覆盖.

我们还有定理 $A \subset \mathbb{R}$ 为紧致, 当且仅当 A 为有界闭集, 这里要求 $\overline{U}$ 是紧致的, 就是要求其有界且为闭集.

求场的演化的问题具体表述就是: 给定 ϕ 场在 U 的边界上 $\hat{U}$ 上的适当值 $\phi|_{\hat{U}}$ 后, 寻找定义在 $\overline{U}$ 的正路满足一下条件

1. 在 U 内满足对应的演化方程;
2. 在 $\hat{U}$ 的值等于对应的边界值 $\phi|_{\hat{U}}$

有了这样定义的拉式密度 $\mathscr{L}$ 后,$L(t)$ 的作用完全可以被 $\mathscr{L}$ 取代.$\mathbb{R}^4$ 上的标量场 ϕ 称为一个 **四维场位形**. 给定四维场位形后, $\mathscr{L}$ 便确定了, 进而可以求出作用量 S, 故 S 是 ϕ 的泛函, 紧接着根据哈式原理, 可以求出对应的正路.

我们这里同样引入参数 λ, 上一节的单参曲线族变成了现在的单参 4 维场位形族 $\phi(\lambda)$. ϕ 的变分的定义 $\delta\phi$ 定义为

$$\delta\phi := \lim_{\lambda\to 0} \frac{\phi(\lambda) - \phi(0)}{\lambda} \equiv \left.\frac{d\phi(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

$\phi(\lambda), \delta\phi$ 都是 $\mathbb{R}^4$ 上的标量场. 给定 $\phi(\lambda)$ 后, 映射 $S : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ 就可以给出 $S(\lambda)$, 则 S 的变分是

$$\delta S := \left.\frac{dS(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

哈式原理要求在下面两个条件下给出 $\delta S = 0$

$$\phi(0) = \phi; \quad \phi(\lambda)|_{\hat{U}} = \phi(0)|_{\hat{U}}, \forall\lambda.$$

我们来看

$$\delta S = \int_U \left.\frac{d\mathscr{L}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

而

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\mathscr{L}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\left.\frac{d\phi(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\left.\frac{d(\partial_a\phi(\lambda))}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \\
&= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\delta(\partial_a\phi) \\
&= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\partial_a(\delta\phi).
\end{aligned}$$

故

$$\delta S = \int_U \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \int_U \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\partial_a(\delta\phi).$$

而

$$\int_U \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\partial_a(\delta\phi) = \int_U \left[\partial_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\delta\phi\right) - \delta\phi\partial_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\right)\right].$$

根据高斯定理我们有

$$\int_U \partial_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\delta\phi\right) = \int_{\hat{U}} n_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\delta\phi\right).$$

其中 n_a 为边界的单位法矢量, 又因为 $\delta\phi|_{\dot{U}} = 0$, 故上式为 0. 最终我们给出

$$\delta S = \int_U \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} - \partial_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \right) \delta\phi = 0.$$

而位形的变分 $\delta\phi$ 一般不为 0, 故给出标量场 ϕ 的演化方程

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} - \partial_a \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_a \phi)} = 0 \tag{13.2}$$

我们给出闵式时空的拉式密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}[\eta^{ab}(\partial_a\phi)\partial_b\phi + m^2\phi^2].$$

代入上式便可以给出 KG 方程.

13.2 有限自由度系统的哈式理论

13.2.1 有限自由度系统的哈式理论

拉式理论的基本变量是广义坐标 q^i 和广义速度 $\dot{q}^i$, 它们的一组值代表系统的一个状态. 而哈式理论的基本变量是广义坐标 q^i 和广义动量 p_i. 给定拉式函数 $L(q^i, \dot{q}^i)$ 后, p_i 由下面式子定义

$$p_i := \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, \cdots, N.$$

位形变量和动量变量称为互相共轭的一对**正则变量 (canonical variables)**, 它们的一组值 (q^i, p_i) 代表系统的一个状态. 量 $H = p_i\dot{q}^i - L(q, \dot{q})$ 称为系统的 **哈式量 (Hamiltonian)**

$$dH = \dot{q}^i dp_i + p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i = \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i.$$

上式右面不含有 $d\dot{q}^i$, 这就意味着 H 与 q^i, p^i 有关, 即 $H = H(q, p)$.

以下讨论取决于 N 个 q^i 可否全部反解出当已知 p, L 时, 即

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(q, p), \quad i = 1, \cdots, N.$$

满足以上要求的拉式函数 $L(q^i, \dot{q}^i)$ 称为**正规 (regular) 的**, 相应的哈式理论称为**有正规拉式量的哈式理论**. 此时我们有

$$H(p, q) = p_i\dot{q}^i(q, p) - L(q, \dot{q}^i(q, p)).$$

故

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{\partial p_j}{\partial p_i}\dot{q}^j + p_j\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \delta^i{}_j\dot{q}^j = \dot{q}^i \\
\frac{\partial H}{\partial q^i} &= p_j\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -\frac{d}{dt}p_i = -\dot{p}_i.
\end{aligned}$$

即

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, \cdots, N \tag{13.3}$$

当给定系统的拉式函数, 其哈式函数也就给定了, 而拉式方程也就转变成了式13.32N 个一阶常微分方程, 称为**哈式正则方程 (Hamiltonian canonical equations)**. (q^i, p_i) 代表一个状态, 所有状态的集合称为系统的**相空间 (phase space)**, 记作 Γ, 是 $2N$ 维流形. 在相空间中指定一点, 可以以此为初值, 结合微分方程组式13.3, 给出相空间的一条曲线, 反应系统的运动状态.

13.2.2 未完待续

第十四章 物理场的整体规范不变性 (Global Gauge Invariance of Physical Fields)

14.1 阿贝尔情况 (The Abelian Case)

设 ϕ_1 和 π_2 是闵式时空 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 中两个互相独立的, 有相同质量参数 m 的实标量场, 则两者分别服从 KG 方程

$$\partial^a\partial_a\phi_1 - m^2\phi_1 = 0$$
$$\partial^a\partial_a\phi_2 - m^2\phi_2 = 0.$$

两者的总的拉式密度为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2 = -\frac{1}{2}[(\partial^a\phi_1)\partial_a\phi_1 + m^2\phi_1^2 + (\partial^a\phi_2)\partial_a\phi_2 + m^2\phi_2^2].$$

引入复标量场及其共轭

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \overline{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2).$$

可以使用 $\phi, \overline{\phi}$ 代替 ϕ_1, ϕ_2, 此时 KG 方程写为

$$\partial^a\partial_a\phi - m^2\phi = 0, \quad \partial^a\partial_a\overline{\phi} - m^2\overline{\phi} = 0.$$

拉式密度改写为

$$\mathscr{L} = -[(\partial^a\overline{\phi})\partial_a\phi + m^2\phi\overline{\phi}]G \tag{14.1}$$

如果对复标量场 $\{\phi, \overline{\phi}\}$ 按照下面式子进行场变换 $\phi \mapsto \phi'$

$$\phi' = e^{-iq\theta}\phi, \quad \overline{\phi'} = e^{iq\theta}\overline{\phi}. \tag{14.2}$$

其中 q 是整数 θ 为任意常实数, 不难发现

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L}.$$

因为拉式密度 $\mathscr{L}$ 在式14.2代表的场的变换下不变. 这种不变性称为场的**内部对称性 (internal symmertry)**, 以区别于由 killing 矢量场代表的**时空对称性 (spacetime symmetry)**. 根据 Nother 定理, 时空对称性和内部对称性都会导致一种守恒律. 我们可以得到一个定理.

笔记 *Nother 定理: 每一个连续对称性, 就会对应一种守恒律.*

定理 14.1 (电荷守恒律)

复标量场 ϕ 的拉式密度 $\mathscr{L}$ 在式14.2的内部对称性下的不变性导致一个守恒律 (物理上解释为电荷守恒律). ♡

证明 以 $\phi_0 \equiv \phi(0)$ 代表初始的复标量场, 对场进行式14.2的变换, 全体 ϕ' 的集合是

$$\{\phi(\theta) = e^{-iq\theta}\phi_0 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\}.$$

上面集合是一个单参复标量场族, 每给出 p 点的坐标, 就会给出场在 p 点的值. 在上面的场族中,$\mathscr{L}$ 借助下式构成 θ 的一元函数

$$\mathscr{L}(\theta) = \mathscr{L}(\phi(\theta), \partial_a\phi(\theta); \overline{\phi}(\theta), \partial_a\overline{\phi}(\theta)).$$

因为内部对称性,$\frac{d\mathscr{L}(\theta)}{d\theta}=0$, 故

$$
\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0}\mathscr{L}(\theta) \\
&= \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(\theta)}\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi(\theta))}\frac{d(\partial_a\phi(\theta))}{d\theta}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\overline{\phi}(\theta)}\frac{d\overline{\phi}(\theta)}{d\theta}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\overline{\phi}(\theta))}\frac{d(\partial_a\overline{\phi}(\theta))}{d\theta}\right]_{\theta=0}.
\end{aligned}
$$

我们先来求第一项, 首先

$$
\left.\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0}(e^{-iq\theta}\phi_0)=-iq\phi_0.
$$

其次,$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(\theta)}$ 是对第一宗量 $\phi(\theta)$ 求偏导, 与 θ 无关, 我们可以先计算 $\theta=0$, 故有

$$
\left.\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(\theta)}\right|_{\theta=0}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_0}=\partial_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi_0)}\quad\text{第二个等号借用式13.2.}
$$

故

$$
\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(\theta)}\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}\right]_{\theta=0}=-iq\phi_0\partial_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi_0)}.
$$

对于第二项, 有

$$
\left.\frac{d(\partial_a\phi(\theta))}{d\theta}\right|_{\theta=0}=\partial_a(\left.\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0})=-iq(\partial_a\phi_0).
$$

以及

$$
\left.\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi(\theta))}\right|_{\theta=0}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi_0)}.
$$

故

$$
\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi(\theta))}\frac{d(\partial_a\phi(\theta))}{d\theta}\right]_{\theta=0}=-iq(\partial_a\phi_0)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi_0)}.
$$

前两项明显满足莱布尼兹律最终给出结果 $-iq\partial_a(\phi_0\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a)\phi_0})$, 而 $\mathscr{L}$ 的形式我们也知道, 可以给出

$$
\frac{\partial\mathscr{L}(0)}{\partial(\partial_a\phi_0)}=\frac{\partial(-[(\partial^a\overline{\phi}_0)\partial_a\phi_0+m^2\phi_0\overline{\phi}_0])}{\partial(\partial_a\phi_0)}=-(\partial^a\overline{\phi}_0).
$$

故前两项之和为 $iq\partial_a(\phi_0\partial^a\overline{\phi}_0)$, 第三项和第四项之和步骤和前面完全相同, 不过需要添加负号, 并对 ϕ_0 取复共轭. 最后给出

$$
0=iq\partial_a(\phi_0\partial^a\overline{\phi}_0-\overline{\phi}_0\partial^a\phi_0).
$$

我们去掉下标 0, 以 ϕ 代表正路场. 给出

$$
iq\partial_a(\phi\partial^a\overline{\phi}-\overline{\phi}\partial^a\phi)=0.
$$

令

$$
J^a\equiv ieq(\phi\partial^a\overline{\phi}-\overline{\phi}\partial^a\phi).
$$

其中 e 代表基本电荷. 则有 $\partial_aJ^a=0$, 故 J^a 代表某种守恒流密度.

注

1. 物理上把 J^0 解释为场的电荷密度, $\partial_\mu J^\mu$ 反应的是电荷守恒律.
2. 式14.2代表的场变换叫做**规范变换 (gauge transformoration)** 关键点聚焦于对称变换, 而式14.2中的变换因为与时空点无关, 又叫做**整体规范变换**

上面的整体规范变换也可以推广到多分量的复场, 考虑含有 N 个复分量的复场 $\{\phi_n,n=1,\cdots,N\}$, 如果这个复场的拉式密度满足

$$
\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi_n\overline{\phi}_n,\partial_a\phi_n\partial^a\overline{\phi_n},\cdots).
$$

上述式子意思是 $\mathscr{L}$ 依赖于场, 但是每一含有 ϕ_n 的项必有 $\overline{\phi}_n$, 含 $\partial_a\phi_n$ 的项必含 $\partial^a\overline{\phi}_n$, 这样就会使得场在如下的

变换下, 保证拉式密度不变.

$$\phi_n' = e^{-iq_n\theta}\phi_n, \quad \overline{\phi'}_n = e^{-iq_n\theta}\overline{\phi}_n \quad i = 1, \cdots, N.$$

上面的场变换也可以写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} \phi_1' \\ \vdots \\ \phi_N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-iq_1\theta} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-iq_N\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1' & \dots & \phi_N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{iq_1\theta} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{iq_N\theta} \end{bmatrix}.$$

从群论的角度来看, 式14.2代表的变换是酉群 $U(1)$, 可见例5.1. 事实上集合

$$\hat{G} \equiv \{\text{diag}(e^{-iq\theta}, \cdots, e^{-iq_N\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

是群, 而且同态映射

$$\rho : U(1) \to \hat{G}, \quad e^{-i\theta} \mapsto \text{diag}(e^{-iq_1\theta}, \cdots, e^{-iq_N\theta}).$$

是 $U(1)$ 群的表示. 注意分清李群和表示的维数, 在本例而言第一个表示的维度是 1, 和 $U(1)$ 群一样, 第二个是 N. 注意辨别.

14.2 非阿贝尔情况 (The Non-Abelian Case)

上一小节的整体规范变换只涉及阿贝尔群 $U(1)$, 本节我们来看非阿贝尔群 $SU(2)$. 在物理中质子与质子之间的强相互作用力和中子与中子的强相互作用力是一样的, 与粒子所带电荷不同. 海森堡于是提出质子和中子可看作一种粒子 (核子 necleon) 的不同状态 (同位旋态). 核子的同位旋可以用以下波函数描述

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}.$$

由于不同状态的核子的强相互作用力是相同的, 也就意味着在同位旋态之间的变换保持拉式密度不变. 我们先来看如何实现同位旋变换, 应该满足方程

$$\begin{bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \quad U_{11}, U_{12}, U_{21}, U_{22} \in \mathbb{C}.$$

以 U 代表矩阵, 则上式可以写为 $\phi' = U\phi$, 我们先来看 U 满足什么条件, 量子力学中要求波函数的概率是归一的, 也就是

$$(\phi, \phi) = 1 = (\phi', \phi') = (U\phi, U\phi) = (U^\dagger U\phi, \phi).$$

表明 $U^\dagger U = I$, 所以 $U \in U(2)$, 对两边取行列式得

$$1 = \det I = \det(U^\dagger U) = \det U^\dagger \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U|^2.$$

故有 $\det U = e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$. 令 $U = U_1 U_2$, 其中 $U_2 = \text{diag}(e^{i\frac{\alpha}{2}}, e^{i\frac{\alpha}{2}})$, 则 $\det U_2 = e^{i\alpha}$, 我们有

$$e^{i\alpha} = \det U = \det U_1 U_2 = \det U_1 \det U_2 = \det U_1 e^{i\alpha}.$$

故 $\det U_1 = 1$, 又因为 $U_2\phi = e^{i\frac{\alpha}{2}}\phi$, 只给波函数带来相位变化, 而又因为波函数的相位变化不会带来物理实质的改变, 故 $U_2\phi$ 和 ϕ 是同一量子态. 故我们可以使用 U_1 代替 U 实现同位旋状态的改变, 并省略下标给出

$$\phi' = U\phi, \quad \det U = 1.$$

省略下标后的 U(即U_1) $\in SU(2)$.

ϕ 在量子场论中代表场算符, 因此 $\phi' = U\phi$ 是场变换 (内部变换), 核子系统的拉式密度 $\mathscr{L}$ 在 $SU(2)$ 变换下

不变, 对应的守恒律就是同位旋守恒. 为了不过分陷于物理, 这里点到即止.

这里我们来看 $SU(2)$ 怎么样表达. 因为 $U \in SU(2)$, 故

$$U = \text{Exp}(A) \quad A \in \mathscr{SU}(2) = \text{span}(-\frac{i}{2}\tau_1, -\frac{i}{2}\tau_2, -\frac{i}{2}\tau_3).$$

其中 τ_1, τ_2, τ_3 见例6.4, 则 A 可以写为

$$A = -\frac{i}{2}(\theta^1\tau_1 + \theta^2\tau_2 + \theta^3\tau_3) = -\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}.$$

则 U 可以表示为

$$U(\vec{\theta}) = \text{Exp}(-\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}.$$

因 τ_1, τ_2, τ_3 是 2×2 复矩阵, 则 $e^{-i\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}$ 也是. 把群元写成 $e^{-\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}$ 实际上采用的是 3 维李群 $SU(2)$ 的 (复)2 维表示, 也是 $SU(2)$ 的自身表示. 表示的维数指的是李群可以使用李群的矩阵表示作用的表示空间的维数. 表示空间在这里具体体现为 ϕ 的维数, 也就是 2 维. 我们以 V 来代表表示空间. 根据不同的物理需要, 还会用到 $SU(2)$[或 SU(3),SU(4),$\cdots$,SU(N)] 等其它维的表示.

一般而言, 规范场论涉及一个李群 (内部变换群)G 和一个或多个矩阵李群 $\hat{G}$, 而且存在同态映射 ρ

$$\rho : G \to \hat{G}.$$

笔记 内部变换群不一定是矩阵群 G, 但是可以有矩阵表示, 就是矩阵李群 $\hat{G}$

因而 $\hat{G}$ 是 G 的表示. 设 $R \equiv \dim G$, 以 $\{e_1, \cdots, e_R\}$ 代表李群 G 的李代数 $\mathscr{G}$ 的一组基矢, 则任一 $A \in \mathscr{G}$ 可以写为

$$A = \theta^r e_R = \vec{\theta}\cdot\vec{e}, \quad \theta^r \in \mathbb{R}.$$

在李群 G 中 $\exists\, g$ 可以写成如下形式.

$$g = \exp(\theta^r e_r).$$

注 存在不能表示为指数形式的李群, 但是以下讨论的实质性内容和结论仍然成立

以 V 代表 $\rho : G \to \hat{G}$ 的表示空间, 设 $N \equiv \dim V$, 我们在 V 上选定基底, 则矩阵 $\hat{G}$ 可以表示为 $N\times N$ 矩阵. 以 $\hat{\mathscr{G}}$ 代表 $\hat{G}$ 的李代数, 则同态映射 $\rho : G \to \hat{G}$ 在恒等元的推前映射是李代数同态, 使用了3.2. U 作为群元 g 的表示可以写作

$$U(\vec{\theta}) = \text{Exp}[\rho_*(\theta_r e_r)] = \text{Exp}(\theta^r \rho_* e_r).$$

笔记 上面内容利用了附录 G 习题 10 的结论, 这里主要说一下思路: 首先 $\rho(g) \in \hat{G}$, 而 g 可以写作 $\exp(A)$, 习题 10 给的结论是

$$\rho(\exp(A)) = \exp(\rho_* A).$$

我们给一个简单的证明, 首先对于等式的左方,$\exp(tA)$ 是 G 上的单参子群, 通过映射 ρ 成为 $\hat{G}$ 的单参子群. $\exp(t\rho_* A)$ 很明显是 $\hat{G}$ 上的单参子群, 而又因为 ρ 是同态映射, 则借助群乘法诱导的推前映射给出的矢量场与 G 上的矢量场一致. 接下来只要我们证明二者在恒等元处的切矢量相同, 便可以给出 $\exp(tA) = \exp(t\rho_* A)$, 再令 $t = 1$ 即可.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\rho(\exp tA)) = \rho_* \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\exp tA) = \rho_* A.$$

证明结束.

引入符号令

$$-iL_r \equiv \rho_* e_r \in \hat{\mathscr{G}} \tag{14.3}$$

则有

$$U(\vec{\theta}) = \text{Exp}(-iL_r\theta^r) = e^{-i\vec{L}\cdot\vec{\theta}}.$$

相应的整体变换可以表示为

$$\phi' = U(\vec{\theta})\phi = e^{-i\vec{L}\cdot\vec{\theta}}\phi.$$

$\phi \in V$ 代表有 N 个复分量的场量, 是 $\phi_1, \cdots, \phi_N$ 排成列阵. 对于 $\overline{\phi}$ 我们在后续章节讨论, 详情见节15.3.2. 现在所要知道的是

$$\overline{\phi'} = \overline{\phi} U(\vec{\theta}) = \phi e^{i\vec{L}\cdot\vec{\theta}}.$$

第十五章 物理场的局域不变性 (Local Gauge Invariance of Physical Fields)

在上一节, 我们讨论的是一个整体单位一个规范变换, 即对于时空整体进行的变换, 也就是 $U(\vec{\theta})$ 中 θ 是一个常数. 这样的变换足够简单, 甚至不会带来物理效应的改变, 但是还存在 θ 依赖于时空点的变换 (局域规范变换) 这会带来什么样的结果? (历史部分见书 P1122)

15.1 阿贝尔情况下的局域规范不变性

以 $\phi(x)$ 代表复标量场 ϕ 与坐标系结合而得的 4 元函数, 则 $\phi'(x),\overline{\phi'}(x)$ 满足下式

$$\phi'(x)=e^{-iq\theta(x)}\phi(x),\quad \overline{\phi'}(x)=e^{iq\theta(x)}\overline{\phi}(x).$$

我们再次考虑复标量场的拉式密度 (式14.1), 观察局域规范变换下的拉式密度是如何变换的. 首先 $m^2\phi\overline{\phi}$ 肯定是不变的, 问题是另一项 $[\partial^\mu\overline{\phi}(x)]\partial_\mu\phi(x)$, 由于存在对 $\theta(x)$ 项的导数, 附加项的存在导致不变性丢失. 即 $\mathscr{L}'\neq\mathscr{L}$, 物理上是这么理解这一现象的. 定理14.1中把 $\mathscr{L}$ 的规范不变性解释为电荷守恒律, 而局域的拉式密度的改变, 也就意味着有电荷的变动, 而有电荷的变动就会辐射电磁场. 应该期望不变的是结合上电磁场的拉式密度给出的总的拉式密度. 我们还用 $\mathscr{L}$ 代表总的拉式密度, 而 $\mathscr{L}_0$ 代表 $\phi(x)$ 原来的拉式密度, 故有

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_{int}+\mathscr{L}_{EM}.$$

电磁场的拉式密度 $L_{EM}=-\frac{1}{16\pi}F^{ab}F_{ab}$,$\mathscr{L}_{int}$ 代表相互作用项.

笔记 *我还没有学过电磁场的拉式密度, 有机会了会补充到这里. 上面式子来源于 P838 例 1.*

令 $\mathscr{L}_1\equiv\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_{int}$, 如何寻找 $\mathscr{L}_1$ 的表达式, 书上给出的方法是替换 ∂_μ, 为

$$\partial_\mu\mapsto\partial_\mu-ieqA_\mu.$$

令 $D_\mu=\partial_\mu-ieqA_\mu$, 拉式密度 $\mathscr{L}_1$ 使用以下式子表述

$$\mathscr{L}_1=-[(D^\mu\overline{\phi})D_\mu\phi+m^2\phi\overline{\phi}].$$

D_μ 其实是协变导数算符, 定义如下

$$D_\mu\phi(x)\equiv(\partial_\mu-ieqA_\mu)\phi(x)\quad D_\mu\overline{\phi}(x)\equiv(\partial_\mu+ieqA_\mu)\overline{\phi}(x)\tag{15.1}$$

在这样的替代下, 规范变换可以满足 $\mathscr{L}_0,\mathscr{L}_{EM}$ 都不变, 我们来看,$U(1)$ 群作用于 ϕ 要保证 $\mathscr{L}_1$ 不变性的话就要满足下式

$$D'_\mu\phi'(x)=e^{-iq\theta(x)}D_\mu\phi(x)\quad D'^\mu\overline{\phi'}(x)=e^{iq\theta(x)}D^\mu\overline{\phi}(x).$$

对于左面式子括号的左面我们有

$$\begin{aligned}D'_\mu\phi'(x)&=(\partial_\mu-ieqA'_\mu)\phi'(x)=(\partial_\mu-ieqA'_\mu)(e^{-iq\theta(x)}\phi(x))\\&=-iqe^{-iq\theta(x)}\phi(x)(\partial_\mu\theta(x))+e^{-iq\theta(x)}\partial_\mu\phi(x)-ieqA'_\mu e^{-iq\theta(x)}\phi(x).\end{aligned}$$

对于左面式子括号的右面我们有

$$\begin{aligned}e^{-iq\theta(x)}D_\mu\phi(x)&=e^{-iq\theta(x)}(\partial_\mu-ieqA_\mu)\phi(x)\\&=e^{-iq\theta(x)}\partial_\mu\phi(x)-ieqA_\mu e^{-iq\theta(x)}\phi(x).\end{aligned}$$

故左面式子给出

$$A'_\mu=A_\mu-\frac{1}{e}(\partial_\mu\theta(x)).$$

对于右面式子括号的右面我们有

$$\begin{aligned}D'^{\mu}\overline{\phi'}(x) &= (\partial^{\mu} + ieqA'^{\mu})(e^{iq\theta(x)}\overline{\phi}(x)) \\ &= iqe^{iq\theta(x)}\overline{\phi}(x)e^{iq\theta(x)}(\partial^{\mu}\theta(x)) + e^{iq\theta(x)}\partial^{\mu}\overline{\phi}(x) + ieqA'^{\mu}e^{iq\theta(x)}\overline{\phi}(x).\end{aligned}$$

对于右面式子括号的右面我们有

$$\begin{aligned}e^{iq\theta(x)}D^{\mu}\overline{\phi}(x) &= e^{iq\theta(x)}(\partial^{\mu} + ieqA^{\mu})\overline{\phi}(x) \\ &= e^{iq\theta(x)}\partial^{\mu}\overline{\phi}(x) + ieqA^{\mu}e^{iq\theta(x)}\overline{\phi}(x).\end{aligned}$$

我们可以给出

$$A'^{\mu} = A^{\mu} - \frac{1}{e}(\partial^{\mu}\theta(x)).$$

要使得 $\mathscr{L}_1$ 不变, 只需要满足 $A'_{\mu} = A_{\mu} - \frac{1}{e}(\partial_{\mu}\theta(x))$ 不变, 而这个式子就是我们认知的电磁 4 势的规范变换. 也就是说 $\mathscr{L}_1, L_{EM}$ 不变都要要求规范变换, 这就是我们本节所要介绍的局域规范变换的阿贝尔情况.

经过以上讨论, 我们对电磁理论有了更深刻的认识, 首先分布在闵式时空中的复标量场的整体规范变换不变性告诉我们电荷守恒律, 也就是时空中存在电荷, 而局域规范不变性又要求电磁场的存在, 且其电磁四势 A^{μ} 按照规范变换也有了来源.

我们可以根据自由带电粒子场的拉式密度 $\mathscr{L}_0$ 求出受到电磁场约束的粒子的拉式密度 $\mathscr{L}_1$, 只需要 $\partial_{\mu} \mapsto D_{\mu}$, 这种思想称为**最小替代法则 (minimal replacement)** 或 **最小耦合原则 (principle of minimal coupling)**

15.2 非阿贝尔情况下的局域规范不变性

我们把复标量场推广到多分量粒子场 $\phi(x)$,$\phi(x)$ 的自由拉式密度 $\mathscr{L}_0$ 在整体规范下不变; 现在我们有内部变换群 G, 它的表示为 $\hat{G}$, 表示群会给粒子场带来如下变换

$$\phi'(x) = U(\vec{\theta}(x))\phi(x) = e^{-i\vec{L}\cdot\vec{\theta}(x)}\phi(x), \quad \overline{\phi'}(x) = \overline{\phi}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} = \overline{\phi}(x)e^{i\vec{L}\cdot\vec{\theta}(x)}.$$

上一节中为了保证系统在局域规范变换下的不变性, 引进附加场. 受此启发, 可以猜想

1. 多分量复粒子场 $\phi(x)$ 也伴有 $R(\dim G)$ 个附加场, 称为**规范场 (gauge field)** 或 **YM 场**, 相应地也会有 R 个 4 势, 称作 **规范势**, 是集合

$$\{A_a^r \mid r = 1, \cdots, R\}.$$

2. 全系统总的拉式密度 $\mathscr{L}$ 也可以表示为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_{YM}.$$

$\mathscr{L}_1$ 为粒子在场中运动的拉式密度,$\mathscr{L}_{YM}$ 代表 YM 场的拉式密度.

仿照上一节我们给出

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}(D_{\mu}\phi, \phi; D_{\mu}\overline{\phi}, \overline{\phi}).$$

这里协变导数算符作用于 $\phi(x), \overline{\phi}(x)$ 定义为

$$D_{\mu}\phi(x) \equiv (\partial_{\mu} - ik\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu}(x))\phi(x) \quad D_{\mu}\overline{\phi}(x) \equiv (\partial_{\mu} + ik\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu}(x))\overline{\phi}(x).$$

k 是耦合常数 (当内部结构群是 U(1) 时 $k = e$),$\vec{L}$ 就是上一节的 q, 而 $\vec{A}_{\mu}(x)$ 代表四势的第 μ 分量, 这里带着 (x) 是为了叙述更清晰, 上一节其实也应该带着 (x), 且带着 $\vec{\ }$ 是为了反应

$$\vec{L}\cdot\vec{A}_{\mu} = L_{\nu}A_{\mu}^{\nu} = L_1A_{\mu}^1 + \cdots + L_RA_{\mu}^R.$$

内部变换群对场给出的诱导变换写作如下形式

$$\phi'(x) = U(\vec{\theta}(x))\phi(x) = e^{-i\vec{L}\cdot\vec{\theta}(x)}\phi(x), \quad \overline{\phi'}(x) = \overline{\phi}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} = \overline{\phi}(x)e^{i\vec{L}\cdot\vec{\theta}(x)}.$$

如果局部规范变换要满足拉式密度不变的话, 要给出如下要求

$$D'_{\mu}\phi'(x) = U(\vec{\theta}(x))D_{\mu}\phi(x), \quad D'_{\mu}\overline{\phi'}(x) = [D_{\mu}\overline{\phi}(x)]U(\vec{\theta}(x))^{-1}.$$

接下来我们来看局部规范变换会带来什么要求, 下面我们来看左面式子等号左方

$$\begin{aligned}D'_\mu\phi'(x) &= (\partial_\mu - ik\vec{L}\cdot\vec{A'}_\mu(x))\phi'(x) = (\partial_\mu - ik\vec{L}\cdot\vec{A'}_\mu(x))U(\vec{\theta}(x))\phi(x)\\ &= (\partial_\mu U(\vec{\theta}(x))\phi(x) + U(\vec{\theta}(x))\partial_\mu(\phi(x)) - ik\vec{L}\cdot\vec{A'}_\mu(x)U(\vec{\theta}(x))\phi(x).\end{aligned}$$

随后是右方

$$\begin{aligned}U(\vec{\theta}(x))D_\mu\phi(x) &= U(\vec{\theta}(x))(\partial_\mu - ik\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x))\phi(x)\\ &= U(\vec{\theta}(x))\partial_\mu\phi(x) - ikU(\vec{\theta}(x))\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x)\phi(x).\end{aligned}$$

最后给出

$$-i\vec{L}\cdot\vec{A'}_\mu(x)U(\vec{\theta}(x)) = -iU(\vec{\theta}(x))\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x) - k^{-1}(\partial_\mu U(\theta(\vec{x}))).$$

右乘 $U(\vec{\theta}(x))^{-1}$ 给出

$$-i\vec{L}\cdot\vec{A'}_\mu(x) = -iU(\vec{\theta}(x))\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} - k^{-1}(\partial_\mu U(\theta(\vec{x})))U(\vec{\theta}(x))^{-1}.$$

接下来我们来看共轭项还是先看左方

$$\begin{aligned}D'_\mu\overline{\phi'}(x) &= (\partial_\mu + ik\vec{L}\cdot\vec{A'}_\mu(x))(\overline{\phi}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1})\\ &= [\partial_\mu\overline{\phi}(x)]U(\vec{\theta}(x))^{-1} + \overline{\phi}(x)\partial_\mu(U(\vec{\theta}(x))^{-1}) + ik\vec{L}\cdot\vec{A'}_\mu(x)\overline{\phi}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1}.\end{aligned}$$

接下来是右方

$$\begin{aligned}[D_\mu\overline{\phi}(x)]U(\vec{\theta}(x))^{-1} &= [\partial_\mu + ik\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x)\overline{\phi}(x)]U(\vec{\theta}(x))^{-1}\\ &= (\partial_\mu\overline{\phi}(x))U(\vec{\theta}(x))^{-1} + ik\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x)\overline{\phi}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1}.\end{aligned}$$

根据共轭项我们同样可以给出

$$ik\vec{L}\cdot\vec{A'}_\mu(x)\overline{\phi}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} = ik\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x)\overline{\phi}(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} - \overline{\phi}(x)\partial_\mu(U(\vec{\theta}(x))^{-1}).$$

乍一看, 共轭项给出的等式似乎与 ϕ 给出的等式不同, 但是其本质上是一样的, 要牢记非阿贝尔的情况体现在 $\overline{\phi}$ 和变换群 $U(\theta)$ 之间的不可交换, 但是对于数而言是可以交换位置的. 而 $\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu$ 在 μ 取定时就是一个数. 我们可以在左方提出公因相 $\overline{\phi}(x)$, 并在左侧乘以 $U(\vec{\theta}(x))$, 给出

$$ik\vec{L}\cdot\vec{A'}_\mu(x) = U(\vec{\theta}(x))ik\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} - U(\vec{\theta}(x))\partial_\mu(U(\vec{\theta}(x))^{-1}).$$

接下来还有最后一项似乎不一致实际上, 我们有

$$0 = \partial_\mu[U(\vec{\theta}(x))U(\vec{\theta}(x))^{-1}] = U(\vec{\theta}(x))\partial_\mu(U(\vec{\theta}(x))^{-1}) + \partial_\mu(U(\vec{\theta}(x)))U(\vec{\theta}(x))^{-1}.$$

结合后我们最后给出满足拉式密度不变的规范变换是

$$-i\vec{L}\cdot\vec{A'}_\mu(x)U(\vec{\theta}(x)) = -iU(\vec{\theta}(x))\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x) - k^{-1}(\partial_\mu U(\theta(\vec{x})))U(\theta(\vec{x}))^{-1}$$

引入简化记号

$$\hat{A}_\mu(x) \equiv -i\vec{L}\cdot\vec{A}_\mu(x) = -iL_rA^r_\mu(x) \in \hat{\mathscr{G}}.$$

最后规范变换给出

$$\hat{A}'_\mu(x) = U(\vec{\theta}(x))\hat{A}_\mu(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} - k^{-1}(\partial_\mu U(\theta(\vec{x})))U(\theta(\vec{x}))^{-1} \tag{15.2}$$

当内部群是 $U(1)$ 时回到阿贝尔的情况. 我们给出了 $\mathscr{L}_1$ 的规范变换, 可是对于 $\mathscr{L}_{YM}$ 我们没有一点认知. 不过可以从电磁场中得到一些启发, 电磁场的拉式密度与电磁场张量有关, 电磁场作为特殊情况, 当内部变换群是 $U(1)$ 时, 理应回到电磁场的拉式密度, 接下来的问题是如何根据规范势 $A^r_\mu(x)$ 给出规范场强. 书中的定义为

$$F^r_{\mu\nu}(x) := \partial_\mu A^r_\nu(x) - \partial_\nu A^r_\mu(x) + k\sum_{s,t=1}^{R} C^r{}_{st}A^s_\mu(x)A^t_\nu(x) \quad r = 1,\cdots,R \tag{15.3}$$

其中 $C^r{}_{st}$ 是 $\hat{\mathscr{G}}$ 在基底 $\{e_r\}$ 下的结构常数 (可见定义6.2). 我们给出 $\mathscr{L}_{YM}$ 的定义

$$\mathscr{L}_{YM} = -\frac{1}{16\pi}\sum_{r=1}^{R} F^r_{\mu\nu}F^{r\mu\nu}.$$

这里同样引入简化记号 $\hat{F}_{\mu\nu}(x) = -iL_rF^r_{\mu\nu}(x)$, 我们先把式15.3中的 R 个等式乘以对应的 $-iL_r$, 并对 r 求和, 给出

$$-iL_rF^r_{\mu\nu}(x) = -iL_r\partial_\mu A^r_\nu(x) + iL_r\partial_\nu A^r_\mu(x) - ikL_rC^r{}_{st}A^s_\mu(x)A^t_\nu(x) \tag{15.4}$$

我们来看项 $-ikL_rC^r{}_{st}A^s_\mu(x)A^t_\nu(x)$, 根据式子 14.3我们有

$$(-iL^r)(-iL_r) = (\rho_*e^r)(\rho_*e_r) = \rho_*(e^re_r) = I.$$

故

$$\begin{aligned}-ikL_rC^r{}_{st}A^s_\mu(x)A^t_\nu(x) &= -ikL_rC^r{}_{st}(-i(L^s)_a(\hat{A}_\mu(x))^a(-i(L^t)_b(\hat{A}_\nu(x))^b\\ &= kC^r{}_{st}(-iL_r)^c(-iL^s)_a(-iL^t)_b(\hat{A}_\mu(x))^a(\hat{A}_\nu(x))^b\\ &= kC^r{}_{st}(\rho_*e_r)^c(\rho_*e^s)_a(\rho_*e^t)_b(\hat{A}_\mu(x))^a(\hat{A}_\nu(x))^b\\ &= kC^c{}_{ab}(\hat{A}_\mu(x))^a(\hat{A}_\nu(x))^b\\ &= k[\hat{A}_\mu(x),\hat{A}_\nu(x)].\end{aligned}$$

笔记 上面式子表达有些乱, 我这里说明一下思路, 首先 ρ_* 是李代数同态映射, 故其保证了李代数不变, 而 $-iL_r$ 就是通过 ρ_* 映射过来的基矢量, 李群 G 上的结构常数结合上表示群上的基矢 $-iL_r$ 给出可以作用在 $\hat{A}$ 上的结构张量, 故最后给出李括号.

把简化记号和对最后一项的讨论代入式15.4后给出

$$\hat{F}^r_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{A}_\nu(x) - \partial_\nu\hat{A}_\mu(x) + k[\hat{A}_\mu(x),\hat{A}_\nu(x)].$$

接下来我们来看式15.2给出的变换关系如何给出 $\hat{F'}_{\mu\nu}$, 我们逐项来看, 第一项

$$\begin{aligned}\partial_\mu\hat{A}'_\nu(x) =&\partial_\mu(U(\vec{\theta}(x))\hat{A}_\nu(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} - k^{-1}(\partial_\nu U(\theta(\vec{x})))U(\theta(\vec{x}))^{-1})\\ =&[\partial_\mu U(\vec{\theta}(x))]\hat{A}_\nu(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} + U(\vec{\theta}(x))[\partial_\mu\hat{A}_\nu(x)]U(\vec{\theta}(x))^{-1} + U(\vec{\theta}(x))\hat{A}_\nu(x)[\partial_\mu U(\vec{\theta}(x))^{-1}]\\ &- k^{-1}(\partial_\mu\partial_\nu U(\theta(\vec{x})))U(\theta(\vec{x}))^{-1} - k^{-1}(\partial_\nu U(\theta(\vec{x})))[\partial_\mu U(\theta(\vec{x}))^{-1}].\end{aligned}$$

第二项

$$\begin{aligned}\partial_\nu\hat{A}'_\mu(x) =&\partial_\nu(U(\vec{\theta}(x))\hat{A}_\mu(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} - k^{-1}(\partial_\mu U(\theta(\vec{x})))U(\theta(\vec{x}))^{-1})\\ =&[\partial_\nu U(\vec{\theta}(x))]\hat{A}_\mu(x)U(\vec{\theta}(x))^{-1} + U(\vec{\theta}(x))[\partial_\nu\hat{A}_\mu(x)]U(\vec{\theta}(x))^{-1} + U(\vec{\theta}(x))\hat{A}_\mu(x)[\partial_\mu U(\vec{\theta}(x))^{-1}]\\ &- k^{-1}(\partial_\nu\partial_\mu U(\theta(\vec{x})))U(\theta(\vec{x}))^{-1} - k^{-1}(\partial_\mu U(\theta(\vec{x})))[\partial_\nu U(\theta(\vec{x}))^{-1}]\end{aligned}$$

第三项, 计算过程较长, 这里简化一下符号, 原则是不写输入的参数, 只保留主体.

$$\begin{aligned}k[\hat{A'}_\mu,\hat{A'}_\nu] =&k[U\hat{A}_\mu U^{-1} - k^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}, U\hat{A}_\nu U^{-1} - k^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}]\\ =&k\{[U\hat{A}_\mu U^{-1}, U\hat{A}_\nu U^{-1}] - [U\hat{A}_\mu U^{-1}, k^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}]\\ &- [k^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}, U\hat{A}_\nu U^{-1}] + [k^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}, k^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}]\}.\end{aligned}$$

根据定理5.3结合 $\hat{A}\in\hat{\mathscr{G}}$, 可以确定上面的李括号就是对易子. 故有

$$[U\hat{A}_\mu U^{-1}, U\hat{A}_\nu U^{-1}] = U\hat{A}_\mu\hat{A}_\nu U^{-1} - U\hat{A}_\nu\hat{A}_\mu U^{-1} = U[\hat{A}_\mu,\hat{A}_\nu]U^{-1}.$$

$$\begin{aligned}[U\hat{A}_\mu U^{-1}, k^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}] &= U\hat{A}_\mu U^{-1}k^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1} - k^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}U\hat{A}_\mu U^{-1}\\ &= -k^{-1}U\hat{A}_\mu(\partial_\nu U^{-1}) - k^{-1}(\partial_\nu U)\hat{A}_\mu U^{-1}.\end{aligned}$$

第二部用了分部积分.

$$[k^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}, U\hat{A}_\nu U^{-1}] = k^{-1}(\partial_\mu U)\hat{A}_\nu U^{-1} + k^{-1}U\hat{A}_\nu(\partial_\mu U^{-1}).$$

$$[k^{-1}(\partial_\mu U)U^{-1}, k^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}] = -k^{-2}(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1}) + k^{-2}(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}).$$

所以对易子项给出的结果是

$$\begin{aligned} k[\hat{A'}_\mu, \hat{A'}_\nu] =& kU[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]U^{-1} + U\hat{A}_\mu(\partial_\nu U^{-1}) + (\partial_\nu U)\hat{A}_\mu U^{-1} \\ &- (\partial_\mu U)\hat{A}_\nu U^{-1} - U\hat{A}_\nu(\partial_\mu U^{-1}) - k^{-1}(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1}) + k^{-1}(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}). \end{aligned}$$

我们沿用省略的记法并综合以上式子给出

$$\begin{aligned} \hat{F'}^r_{\mu\nu} =& (\partial_\mu U)\hat{A}_\nu U^{-1} + U(\partial_\mu \hat{A}_\nu)U^{-1} + U\hat{A}_\nu(\partial_\mu U^{-1}) - k^{-1}(\partial_\mu\partial_\nu U)U^{-1} - k^{-1}(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}) \\ &- (\partial_\nu U)\hat{A}_\mu U^{-1} - U(\partial_\nu \hat{A}_\mu)U^{-1} - U\hat{A}_\mu(\partial_\nu U^{-1}) + k^{-1}(\partial_\nu\partial_\mu U)U^{-1} + k^{-1}(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1}) \\ &+ kU[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]U^{-1} + U\hat{A}_\mu(\partial_\nu U^{-1}) + (\partial_\nu U)\hat{A}_\mu U^{-1} \\ &- (\partial_\mu U)\hat{A}_\nu U^{-1} - U\hat{A}_\nu(\partial_\mu U^{-1}) - k^{-1}(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1}) + k^{-1}(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^{-1}) \\ =& U(\partial_\mu A_\nu)U^{-1} - U(\partial_\nu A_\mu)U^{-1} + U(k^{-1}[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu])U^{-1} = U\hat{F'}^r_{\mu\nu}U^{-1}. \end{aligned}$$

结论就是式15.2带来的变换使得 YM 场的场强张量带来

$$\hat{F}^r_{\mu\nu} \mapsto \hat{F'}^r_{\mu\nu} = U\hat{F'}^r_{\mu\nu}U^{-1} \tag{15.5}$$

拉式密度不变我们稍后证明. 见15.3.3

15.3 选读部分

15.3.1 推前映射的进一步解释

一般的规范场涉及一个内部变换群 G 和几个表示群 $\hat{G}_i(i = 1, \cdots, I)$, 有表示群也就意味着存在 I 个同态映射 $\rho_i : G \to \hat{G}_i$, 当 $G = U(1)$, 且只有一个表示群 $\hat{G}$ 表示为

$$\hat{G} = \{\mathrm{diag}(e^{-iq_1\theta}, \cdots, e^{-iq_N\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

1. $q_1, \cdots, q_N$ 不全为零时, 这时 $\rho : G \to \hat{G}$ 是同构映射.
2. 当 $q_1 = \cdots = q_N = 0$, 此时 $\hat{G}$ 只含有恒等元,ρ 不能保证同构映射, 但是同态还满足, 只是群乘法的作用让 0 隐藏掉了. 说明这个情况旨在表示 $\rho : G \to \hat{G}$ 不是同构的情况.

我们回到最一般的情况, 虽然无法保证所有的 ρ_i 是同构映射, 但是规范场论有这样一个默认前提.

命题 15.1 (默认前提)

若 $g \in G$ 满足 $\rho_i(g) = \hat{e}_i \in \hat{G}_i, i = 1, \cdots, I$, 则 $g = e \in G$

我们来说明默认前提的理由: 假设这一前提不成立, 即 G 包含满足如下条件的非独点子集 $N \subset G$

$$n \in N \Leftrightarrow \rho_i(n) = \hat{e}_i \in \hat{G}_i, \quad i = 1, \cdots, I.$$

假设 $g \in G, n \in N$, 则有

$$\rho_i(gng^{-1}) = \rho_i(g)\rho_i(n)\rho_i(g^{-1}) = \rho_i(g)\hat{e}_i\rho_i(g^{-1}) = \rho_i(g)\rho_i(g^{-1}) = \rho_i e = \hat{e}_i.$$

根据定义1.7, 可见 N 是正规子群. 由此可见把 G 选为内部变换群太大, 应该使用商群 $G' \equiv G/N$, 根据定理8.4, 正规子群的地位和理想的地位一致, 可以根据理想构造商代数给出商群.

定义 15.1 (quotient group)

商群 *(quotient group)*, 写为 G/N 并念作 $G \bmod N$ (mod 是模的简写), 在数学中, 给定一个群 G 和 G 的正规子群 N, G 在 N 上的商群或因子群, 在直觉上是把正规子群 N "萎缩"为单位元的群。

随后可以定义商群 G' 的表示, 定义同态映射 $\rho_i' : G' \to \hat{G}_i$, 商群自然满足默认前提. 默认前提指定的是李群与表示的关系. 可以翻译成李代数的要求

$$\rho_{i*}'(A) = 0, \quad i = 1, \cdots, I \Rightarrow A = 0 \in \mathscr{G}. \tag{15.6}$$

15.3.2 加强共轭的理解

本部分加深对 $\overline{\phi}(x)$ 的理解, 规范场论中的内部变换群 G 的表示 $\hat{G}$ 的表示空间是 N 维复矢量空间 V, 每一 $\hat{g} \in \hat{G}$ 是 $V \to V$ 的可逆线性映射. 为了适应规范场论的需要, 对 V 和 $\hat{G}$ 还应提出要求. 要求 V 是 (复) 内积空间. 见书 P667, 且 $\hat{g}$ 作用后内积是不变的, 则 $\hat{G}$ 构成酉群. 使用 $\tilde{U}(V)$ 代表 V 上全体保内积映射的群.

我们仔细来看 $\overline{\phi}(x)$ 到底代表什么. 当 $\dim V = 1$ 时, $\phi(x)$ 就是简单的复数, 故 $\overline{\phi}(x)$ 自然就是 $\phi(x)$ 的共轭复数. 而对于 $\dim V = 1$ 时, 问题就变得复杂起来. 因为我们并未给 $\overline{\phi}(x)$ 下过任何定义. 既然 $\phi(x) \in V$, 我们就规定 $\overline{\phi}(x) \in V^*$, 定义为 ((x) 省略)

$$\overline{\phi}(\psi) = (\phi, \psi), \quad \forall \psi \in V \tag{15.7}$$

上面这个式子给出了 $\phi \mapsto \overline{\phi}$ 的一一到上映射.($\overline{\phi}, \phi$ 就是狄拉克记号中的左矢和右矢), 一一到上的映射说明两者矢量空间是同构的, 我们可以借助 V 定义 $V*$ 上的内积为

$$(\overline{\phi}, \overline{\psi}) := (\psi, \phi).$$

笔记 上面这样的定义也隐含着 $(\overline{\phi}, \overline{\psi}) = \overline{(\phi, \psi)}$ 的意思.

因为我们要求 $\hat{G}$ 是保内积的, 故同态映射 ρ 又可以认为是 $\rho : G \to \tilde{U}(V)$. 根据 ρ 可以诱导出 $\overline{\rho} : G \to \hat{G}(V^*)$,$\hat{G}(V^*)$ 代表 $V^* \to V^*$ 上的可逆线性映射. 定义为

$$\overline{\rho}(g)\overline{\phi} := \overline{\rho(g)\phi}, \quad \forall g \in G, \overline{\phi} \in V^*.$$

因为 $\rho(g)$ 是保内积的, 我们有

$$(\overline{\rho}(g)\overline{\phi}, \overline{\rho}(g)\overline{\psi}) = (\overline{\rho(g)\phi}, \overline{\rho(g)\psi}) = (\rho(g)\psi, \rho(g)\phi) = (\psi, \phi) = (\overline{\phi}, \overline{\psi}).$$

故 $\overline{\rho}(g)$ 我们可以认为 $\overline{\rho} : G \to \tilde{U}(V^*)$.

定理 15.1

$\overline{\rho} : G \to \tilde{U}(V^*)$ 是同态, 因而也是 G 的表示.

证明 我们先来证明一个等式, 考虑 $[\overline{\rho}(g)\overline{\phi}](\psi)$, 故我们有

$$\begin{aligned}
[\overline{\rho}(g)\overline{\phi}](\psi) &= [\overline{\rho(g)\phi}](\psi) = (\rho(g)\phi, \psi) \quad \text{式15.7} \\
&= (\rho(g)^{-1}\rho(g)\phi, \rho(g)^{-1}\psi) \quad \text{保护内积不变} \\
&= (\phi, \rho(g)^{-1}\psi) \\
&= \overline{\phi}(\rho(g)^{-1}\psi) \quad \text{式15.7} \\
&= [\overline{\phi} \circ \rho(g)^{-1}](\psi).
\end{aligned}$$

则我们有

$$\overline{\rho}(g)\overline{\phi} = \overline{\phi} \circ \rho(g)^{-1} \tag{15.8}$$

我们来看如何满足同态

$$[\overline{\rho}(g_1)\overline{\rho}(g_2)]\overline{\phi}=\overline{\rho}(g_1)[\overline{\rho}(g_2)\overline{\phi}]=[\overline{\rho}(g_2)\overline{\phi}]\circ\rho(g_1)^{-1}=\overline{\phi}\circ\rho(g_2)^{-1}\circ\rho(g_1)^{-1}$$
$$=\overline{\phi}\circ\rho(g_2^{-1}g_1^{-1})=\overline{\phi}\circ\rho((g_1g_2)^{-1})=\overline{\phi}\rho(g_1g_2)^{-1}=\overline{\rho}(g_1g_2)\overline{\phi}.$$

即

$$\overline{\rho(g_1g_2)}=\overline{\rho}(g_1)\overline{\rho}(g_2).$$

我们给出同态性成立.

在表示空间 V 选定基底 $\{\varepsilon_n\}$ 后, $\phi\in V$ 可以表示为列阵, 对偶空间 V^* 的矢量作用到 V 给出的是实数或复数, 这也就要求着 $\overline{\phi}$ 是行阵, 直观上感觉应该满足

$$\overline{\phi}=\left[\overline{\phi}_1,\cdots,\overline{\phi}_N\right].$$

事实上, 该式的成立应该满足一定的条件. 我们知道 $\phi^\dagger$ 满足上式, 所以更详细的应该是在什么条件下,$\overline{\phi}=\phi^\dagger$. 假设 $\phi,\psi\in V$, 借助基矢展开应该有

$$\phi=\sum_{n=1}^{N}\phi_n\varepsilon_n,\quad \psi=\sum_{m=1}^{N}\psi_m\varepsilon_m.$$

故有

$$\overline{\phi}(\psi)=(\sum_{n=1}^{N}\phi_n\varepsilon_n,\sum_{m=1}^{N}\phi_m\varepsilon_m)=\sum_{m,n=1}^{N}\overline{\phi}_n\psi_n(\varepsilon_n,\varepsilon_m)=\sum_{n,m=1}^{N}\overline{\phi}_n\psi_mH_{nm}.$$

其中 $H_{nm}=(\varepsilon_n,\varepsilon_m)$

笔记 注意内积第一个槽想要提出数来, 应该加复共轭.

如果 H_{nm} 正定, 则总可以选择正交归一基底使得 $H_{nm}=\delta_{nm}$, 此时有 $\overline{\phi}(\psi)=\sum_{n=1}^{N}=\phi^\dagger(\psi)$, 故 $\overline{\phi}=\phi^\dagger$, 但是如果内积非正定, 我们不能使得 $H_{nm}=\delta_{nm}$, 因为总有一项或几项和其它符号不同. 我们在用一行或一列矩阵表示矢量时, 通常只使用一个指标, 但是在本质上应该是

$$\psi_{m1}=\psi_m,\quad \phi^\dagger_{1n}=\overline{\phi}_n.$$

结合上式 $\overline{\phi}(\psi)$ 可以有全新的表述

$$\overline{\phi}(\psi)=\sum_{n,m=1}^{N}\phi^\dagger_{1n}H_{nm}\psi_{m1}=\phi^\dagger H\psi.$$

故

$$\overline{\phi}=\phi^\dagger H.$$

当内积正定并选择正交归一基底时 $H=I$, 上式回到 $\overline{\phi}=\phi^\dagger$. 我们来看不相等的情况下的内积

$$(\phi,\psi)=\overline{\phi}(\psi)=\phi^\dagger H\psi.$$

当表示群 $\rho(g)$ 作用在其上我们来看保内积条件又有怎样的表述.

$$(\rho(g)\phi,\rho(g)\psi)=[\rho(g)\phi]^\dagger H\rho(g)\psi=\phi^\dagger\rho(g)^\dagger H\rho(g)\psi.$$

我们给出保证内积不变的条件为 $H=\rho(g)^\dagger H\rho(g)$, 对形式做一些变化得出

$$\rho(g)^{-1}=H^{-1}\rho(g)^\dagger H.$$

当内积正定时选择正交归一基底的话, 可以给出 $\rho(g)$ 是酉矩阵.

现在我们可以重新给出局域规范变换 $\phi'=U\phi$, 我们前文直接给出对偶量的变化, 现在我们遗忘以前的结论, 推导出 $\overline{\phi'}$ 应该怎么变.

$$\overline{\phi'}=\phi'^\dagger H=(U\phi)^\dagger H=\phi^\dagger U^\dagger H=\phi^\dagger HH^{-1}U^\dagger H=\phi^\dagger HU^{-1}=\overline{\phi}U^{-1}.$$

15.3.3 YM 场拉式密度不变性简略证明

物理学常见的内部变换群 G 通常有 $U(1)$ 和单紧李群以及更为复杂的群 (即若干个 U(1) 的和或若干个单紧李群的直积)

笔记 *(内容来自 deepseek-R1, 注意辨别真假)* **单紧李群**是兼具紧致性和单性的李群，其核心特征如下：

- 李群结构：光滑流形，群运算 (乘法和取逆) 均为光滑映射。例如：
  - 特殊正交群 $SO(n)$
  - 酉群 $SU(n)$
- 紧致性：作为拓扑空间是紧致的 (欧氏空间中闭合且有界)。例如：
  - $SO(n)$ 和 $SU(n)$ 的矩阵元素模长受限
  - 反例：一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 因行列式可无限大而**非紧**
- 单性：李代数为单李代数 (无非平凡理想)，对应李群无闭连通正规子群。例如：
  - $\mathfrak{su}(2)$ 无理想，故 $SU(2)$ 单
  - 反例：$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ 可分解，故 $SO(4)$ 非单

这里只给出单紧李群下的 $\mathscr{L}'_{YM} = \mathscr{L}_{YM}$. 规范场论通常有多个物质场, 通常每个场都有一个表示, 不妨令 A 场有表示

$$\rho_A : G \to \hat{g}_A.$$

我们知道

$$\mathscr{L}_{YM} = -\frac{1}{16\pi}\sum_{r=1}^{R} F^r_{\mu\nu}F^{r\mu\nu}.$$

可见 $\mathscr{L}_{YM}$ 与表示无关, 单李群的性质要求没有正规子群, 参考节15.3.1给的例子, 这时李群的表示要么是忠实的, 要么就是平凡的. 而平凡表示没有任何意义, 我们总会选择另一种情况, 忠实表示 ρ, 也就是线性同构. 由此给出的切映射 $\rho_* : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(V)$ 是同构的. 那么李代数 $\mathscr{G}$ 上的广义嘉当度规 K, 和李代数 $\mathscr{L}(V)$ 上的广义嘉当度规 $\tilde{K}$ 只会相差一个非 0 实数的程度. 即

$$\tilde{K} = \lambda_\rho K.$$

前置工作已经准备完成, 接下来我们分为两步证明 $\mathscr{L}'_{YM} = \mathscr{L}_{YM}$, 首先选定内部变换群的李代数内的一组正交基底 $\{e_r\}\quad r = 1, \cdots, R = \dim G$, 将基底与 $F^r_{\mu\nu}(x)$ 结合给出

$$F_{\mu\nu}(x) = e_r F^r_{\mu\nu}(x).$$

因为 $F^r_{\mu\nu}(x)$ 只是一组数, 故 $F_{\mu\nu} \in \mathscr{G}$, 而

$$\rho_* F_{\mu\nu}(x) = F^r_{\mu\nu}(x)\rho_* e_r = -iL_r F^r_{\mu\nu}(x) = \hat{F}_{\mu\nu}(x).$$

我们后续省略掉 (x) 并给出如下等式

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\hat{F}_{\mu\nu}, \hat{F}^{\mu\nu}) &= \mathrm{tr}[(\rho_* F_{\mu\nu}), (\rho_* F^{\mu\nu})] = \mathrm{tr}[(\rho_* \sum_{r=1}^{R}) F^r_{\mu\nu} e_r, (\rho_* \sum_{s=1}^{R} F^{s\mu\nu} e_s)] \\
&= \sum_{r,s=1}^{R} F^r_{\mu\nu} F^{s\mu\nu} \mathrm{tr}[\rho_*(e_r)\rho_*(e_s)] = \sum_{r,s=1}^{R} F^r_{\mu\nu} F^{s\mu\nu} \tilde{K}(e_r, e_s) \text{见广义嘉当度规定义} \\
&= \lambda_\rho \sum_{r,s=1}^{R} F^r_{\mu\nu} F^{s\mu\nu} K(e_r, e_s) \\
&= -\lambda_\rho \sum_{r,s=1}^{R} F^r_{\mu\nu} F^{s\mu\nu} \delta_{rs} \text{见定理8.9上方内容} \\
&= 16\pi \mathscr{L}_{YM}.
\end{aligned}$$

有了如上等式便可以利用求迹的性质给出

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\hat{F}'_{\mu\nu}\hat{F}'^{\mu\nu}) &= \mathrm{tr}(U\hat{F}_{\mu\nu}U^{-1}U\hat{F}^{\mu\nu}U^{-1}) \quad \text{式15.5} \\ &= \mathrm{tr}(UU^{-1}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}) \\ &= tr(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}).\end{aligned}$$

故最后给出 $\mathscr{L}$ 不变.

笔记 关于规范场论的内容大部分还是浅尝辄止的, 主要是我目前没有系统的了解过规范场论, 对电磁场还算了解, 更复杂的情况还有待学习, 最后我总结一下关于这部分我的体会和认识.

关于拉式理论和哈式理论这里就不再详细说明, 关于哈式理论还有约束的问题, 我还是有所欠缺.

对于规范我个人的认识是只要变换不影响物理实质我们就可以把它们认为是同一件事物, 感觉在数学上比较相似的点在于伴丛上的元素生成时把轨道认同为同一点.

其次是阿贝尔情况和非阿贝尔情况, 区别还是在于是否能否满足交换律的行为, 满足交换律的情况一般为数, 这也是讨论阿贝尔情况时主要讨论 $U(1)$ 群的情况, 对于非阿贝尔情况需要注意的是到底哪些项不满足交换律, 这一点特别容易算错, 主要是我们接触阿贝尔的情况最多.

最后叙述一下我在本次学习中形成的物理图像. 整个系统处于四维闵式时空中, 我们给出了每一点的拉式密度, 由于拉式密度的构型我们发现整体存在内部对称性, 由于我们讨论物理系统不能总是那整体讨论, 这样会忽略细节, 故希望把内部的对称拓展到局域并探讨了局域成立的条件; 其中, 阿贝尔情况较为简单, 而非阿贝尔的情况较为复杂. 非阿贝尔的情况涉及的场在时空点的构造不再是一个数, 而是多个变量, 我们把它理解为矢量, 并表示为列向量的形式. 但是要注意, 每个变量依旧是独立变化的, 也就是说内部变换群可以单独作用到某个元素上, 为了满足这样的情况, 我们引入了群的矩阵表示, 主要目的还是为了研究某一自变量的变换满足什么样的情况, 不会导致拉式密度变化. 对于拉式密度的构造还是需要一些基本认识, 我们再论.

第十六章 截面的物理意义 (Physical Meaning of Cross Sections)

给定李群 G, 其表示群为 $\hat{G}$, 并满足同态映射 $\rho : G \to \hat{G}$, 表示空间是复 N 维矢量空间 V. 我们使用丛语言重新表述规范变换理论, 那么底流形为 $\mathbb{R}^4$, 选择结构群为 G 并构造平凡主丛 $P = \mathbb{R}^4 \times G$, 还需要定义右作用 $R : (\mathbb{R} \times G) \to \mathbb{R}^4 \times G$ 为

$$R_{g_1}(x, g_2) := (x, g_2 g_1), \quad \forall g_1 \in G, \forall (x, g_1) \in \mathbb{R}^4 \times G.$$

设 $\sigma : \mathbb{R}^4 \to P$ 和 $\sigma' : \mathbb{R}^4 \to P$ 的两个 (整体截面), 则在同一根 fiber 上会有群元满足

$$\sigma'(x) = \sigma(x) g^{-1}(x).$$

g 可以看作映射 $g : \mathbb{R}^4 \to G.g^{-1}$ 同样也是这样一个映射, 其定义是

$$g^{-1}(x) := g(x)^{-1} \tag{16.1}$$

笔记 式10.2也给出了截面之间应该满足的式子, 对比一下有 $g_{UV}(x) = g^{-1}(x)$ 这里只是符号的一点差异.

对于每个 $fiber$ 我们可以给出一个群元场, 使得任何 $g(x) \in G$ 满足上式. 通过同态映射我们可以给出 $\rho(g(x)) \in \hat{G}$, 作为表示群可以给出一个局域规范变换, 只需要令 $U(x) = \rho(x)$. 故对于粒子场 $\phi(g(x)) \in V$ 可以给出

$$\phi'(x) = U(x)\phi(x) = \rho(g(x))\phi(x).$$

为了进一步得到物理结果, 我们需要给 P 一个伴丛, 令典型纤维 $F = V$, 则任一 $f_1 \in F$ 是一个 $N \times 1$ 的列阵. 并定义左作用 $\chi : G \times F \to F$ 为

$$\chi_{g_1}(f_1) := \rho(g_1) f_1, \quad \forall g_1 \in G, f_1 \in F.$$

我们得到了一个伴矢丛 Q.

我们对于底流形上给定一个 F 值映射 f, 即 $f : \mathbb{R}^4 \to F$, 我们可以给出一个伴丛上的元素 $\sigma(x) \cdot f(x)$, 可以记作

$$\Phi(x) \equiv \sigma(x) \cdot f(x) \in \hat{\pi}^{-1}[x] \subset Q.$$

通过群元 $g(x)$ 我们给以给 $\Phi(x)$ 进行一个变换, 即

$$\Phi'(x) = \sigma'(x) \cdot f'(x).$$

其中 $\sigma'(x) = \sigma(x) g^{-1}(x), f'(x) = \rho(g(x)) f(x)$. 我们在上一节猜测规范变换和轨道认同为同一点相似, 体现就在这里. 我们来看

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \sigma'(x) \cdot f'(x) = \sigma(x) g^{-1}(x) \cdot \rho(g(x)) f(x) \\
&= \sigma(x) \cdot \rho(g^{-1}(x)) \rho(g(x)) f(x) \quad \text{看下方笔记} \\
&= \sigma(x) \cdot \rho(g^{-1}(x) g(x)) f(x) \quad \text{同态} \\
&= \sigma(x) \cdot \rho(e) f(x) \\
&= \sigma(x) \cdot f(x) = \Phi(x).
\end{aligned}$$

笔记 可能会对第二行代表的等式产生疑问, 我们在前文中讲的是可以把 g 在 $\cdot$ 左右移动, 不需要施加变换, 为什么这里还要加上同态映射. 我们从两个角度理解问题, 首先 $f(x)$ 属于 V 作用它时自然需要表示群 $\hat{G}$ 作用; 第二两次的区别主要在于定义 $\chi_{g(x)}$ 不同, 真正可以移动的应该是定义的作用.

我们来看 $\Phi(x)$ 有什么样的说法:$\Phi(x) \in Q$, 通过群元作用得到 $\Phi'(x)$ 我们证明了不会使得 $\Phi(x)$ 在 Q 上的位置发生改变. 但是 $\sigma(x), f(x)$ 均进行了变换. 从整体来看是某一群元作用到某一系统, 只改变系统内的表示, 但是实质没有改变. 这不就是我们对规范的要求吗? 在说明伴丛时我们提到, 当给定 q 和 p, f 便唯一确定下来. 翻译成物理语言就是我们研究某一系统, 当选定某一规范, 可使用具体的数来表示整个系统, 而规范改变, 数也会随之改变. 也就是说选定主丛上的截面也就是给物理系统选定了规范. 当我们固定规范, 并使得 $f(x)$ 在同一 fiber 上流动时, 改变的只有这些数. 同时也代表着物理场的改变.

我们把 $\sigma(x)$ 命名为**内部标架 (internal frame)**, 并把 $\Phi(x)$ 命名为**内部矢量 (internal vector)**. 这是因为两者之间的行为和矢量与标架的行为十分相似. 称为内部代表着二者又区别于标架和矢量. 因为这里的 $\sigma(x)$ 是规范, 我们只需要注意这一点, 后完全可以按照矢量和标架的关系来理解它. 更为深刻的一点是因为二者的行为十分相似, 我们可以认为标架也是某一种规范. 而 $f(x)$ 在这里我们就可以认为是 $\Phi(x)$ 在内部标架的分量. 我们令 $\phi(x) \equiv \Phi(x)$ 来体现二者之间的联系.

我们对本章作一个总结: 并给出如下定理

定理 16.1 (局域截面的物理意义)

给定李群 G 作为物理系统的内部变换群, $\mathbb{R}^4$ 作为底流形 M, 同时典型纤维 F 也选择 $\mathbb{R}^4$, 按照如下方式定义左右作用

1. *左作用: $R_{g_1}(x, g_2) = (x, g_1 g_2)$*
2. *右作用: $\chi_{g_1}(f_1) = \rho(g_1) f_1$, ρ 是群的表示映射.*

则由此构造的主丛上的局域截面是一个规范选择, 而伴丛上的局域截面则是一个粒子场. ♡

第十七章 规范势与联络 (Gauge Potential and Connection)

给定平凡主丛 $P=\mathbb{R}^4\times G$. 在物理中规范选择会导致规范势 $A_\mu^r\to A_\mu'^r$, 我们希望 A_μ^r 也能使用丛语言表述, 我们来看如何实现. 我们目前已有的结论规范变换就是截面之间的变换, 规范变换会导致规范势的变换, 而且 A 是李群 G 上面的矢量. 根据联络的定义11.2, 我们完全可以实现规范势和联络的对应. 那怎么实现规范变换呢, 可以借助联络的定义11.4给出.

在引进规范势时 (见节15.2), 给出的是 A_a^r, 其中 r 代表数量, 而下标 a 代表的是 1 形式场.A_a^r 结合李代数 $\hat{G}$ 上的基矢 e_r 可以给出李群上的 $\lambda(1,\mathscr{G})$, 我们应该指定其和联络之间的映射, 令

$$\omega_\mu(x)\equiv ke_rA_\mu^r(x),\quad k\in\mathbb{C}.$$

$A_\mu^r(x)\in\mathbb{R}$,$e_r\in\mathscr{G}$, 则 $\omega_\mu(x)\in\mathscr{G}$, 更详细一点 $\omega_\mu\in\Lambda_{\mathbb{R}^4}(0,\mathscr{G})$. 设 $\{x^\mu\}$ 是 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 的洛伦兹系, 对偶矢量 (1 形式) 可以写为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_\mu dx^\mu\in\Lambda_{\mathbb{R}^4}(1,\mathscr{G}).\tag{17.1}$$

笔记 *上面的形式只是利用 A_μ^r, 构造了 $\boldsymbol{\omega}$, 注意这个是联络的水平分量为 0.*

设 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 是 P 上的联络,U,V 都是 $\mathbb{R}^4$ 上的开子集, $U\cap V\neq\varnothing$. 其次我们会有截面 σ_U,σ_V, 按照定义11.4附近定义底流形上联络场的方式给出 $\boldsymbol{\omega}_U\equiv\sigma_U^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{\omega}_V\equiv\sigma_V^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 由于 $U\cap V\neq\varnothing$ 二者必有交集, 交集部分应该满足转换关系

$$\boldsymbol{\omega}_V(Y)=\mathscr{A}d_{g_{UV}(x)^{-1}}\boldsymbol{\omega}_U(Y)+L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y).$$

我们令 V 是带 $'$ 的系统, 修改一下符号使之更适用于现在的符号

$$\boldsymbol{\omega}'(Y)=\mathscr{A}d_{g(x_0)}\boldsymbol{\omega}(Y)+L_{g(x_0)*}g_*^{-1}(Y).\tag{17.2}$$

到目前为止我们只是凭借主观构造的式17.1, 我们如果能够验证17.1满足17.2. 那么一切皆大欢喜.Y 是底流形上的任意矢量, 但是根据线性性只需要坐标基矢满足即可. 令 $Y=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\big|_{x_0}$ 并把式17.1代入式17.2 我们有

$$\boldsymbol{\omega}(Y)=\omega_\nu(x_0)dx^\nu\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{x_0}=\omega_\mu(x_0).$$

故我们只需要验证

$$\omega'_\mu(x_0)=\mathscr{A}d_{g(x_0)}\omega_\mu(x_0)+L_{g(x_0)*}g_*^{-1}(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{x_0})\tag{17.3}$$

根据 15.2关于 $\hat{A}_\mu$ 的规范变换 (省略括号中的符号) 给出

$$\hat{A}_\mu(x)=U(x)\hat{A}_\mu(x)U(x)^{-1}-k^{-1}(\partial_\mu U(x))U(x)^{-1}.$$

我们定义 $\hat{\omega}_\mu(x)$ 为

$$\hat{\omega}_\mu(x):=k\hat{A}_\mu(x)\equiv k(\rho_*(e_r)A_\mu^r(x))=\rho_*(ke_rA_\mu^r(x))=\rho_*(\omega_\mu(x)).$$

这样我们就可以给出 $\hat{A}_\mu$ 的变换诱导的 $\hat{\omega}_\mu$ 满足的关系式

$$\hat{\omega}_\mu(x)=\rho(g(x))\hat{\omega}_\mu(x)\rho(g(x))^{-1}-[\partial_\mu\rho(g(x))]\rho(g(x))^{-1}=\rho(g(x))\hat{A}_\mu(x)\rho(g(x))^{-1}+\rho(g(x))[\partial_\mu\rho(g(x))^{-1}].$$

笔记 *U 作为群的表示, 自然可以写作 $\rho(g(x))$*

令 $x=x_0$, 给出

$$\hat{\omega}_\mu(x_0)=\rho(g(x_0))\hat{\omega}_\mu(x_0)\rho(g(x_0))^{-1}+\rho(g(x_0))[\partial_\mu|_{x_0}\rho(g(x))^{-1}].$$

我们先来看较为复杂的第二项, 其中 $\rho(g(x_0))[\partial_\mu|_{x_0}\rho(g(x))^{-1}]$, 我们改写一下

$$\begin{aligned}\rho(g(x_0))[\partial_\mu|_{x_0}\rho(g(x))^{-1}] &= \rho(g(x_0))\rho_*(\partial_\mu|_{x_0}(g^{-1}(x)) \quad g^{-1}\text{ 是一种映射, 定义见式16.1}\\ &= \rho(g(x_0))\rho_* g_*^{-1}(\partial_\mu|_{x_0}x)\\ &= \rho(g(x_0))\rho_* g_*^{-1}(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\eta(t)).\end{aligned}$$

$\partial_\mu|_{x_0}\rho(g(x)^{-1})$, 只是 x 在 x_0 的切矢推前到李群中的像, 我们换一种表示就是在底流形上的一条坐标线 $\eta(t)$(满足 $t=0$ 时, $\eta(t)=x_0, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\eta(t)=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$) 被同态映射到李群, 可以根据李群中的曲线求得切矢. 有了这么一个操作后第二项便可以进行操作

$$\begin{aligned}\rho(g(x_0))[\partial_\mu|_{x_0}\rho(g(x))^{-1}] &= \rho(g(x_0))\rho_* g_*^{-1}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\eta(t))\\ &= \rho(g(x_0))(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}[\rho g^{-1}(\eta(t))])\\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(g(x_0))[\rho g^{-1}(\eta(t))] \quad \text{常数提进来}\\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}L_{\rho(g(x_0))}[\rho g^{-1}(\eta(t))]\\ &= L_{\rho(g(x_0))*}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}[\rho g^{-1}(\eta(t))]\\ &= L_{\rho(g(x_0))*}\rho_* g^{-1}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\eta(t)\\ &= L_{\rho(g(x_0))*}\rho_* g^{-1}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\\ &= \rho_*\left[(L_{g(x_0)*}g_*^{-1})\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right].\end{aligned}$$

最后一步比较简单利用 ρ 的同态便可以证明, 又因为是 G 的习题, 这里就不再证明了.

接下来我们来看第一项

$$\begin{aligned}\rho(g(x_0))\hat{\omega}_\mu(x_0)\rho(g(x_0))^{-1} &= \rho(g(x_0))\rho_*(\omega_\mu(x_0))\rho(g(x_0))^{-1}\\ &= \rho(g(x_0))\rho_*(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}e^{t\omega_\mu(x_0)})\rho(g(x_0))^{-1} \quad \text{e 指数是构造的}\\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(g(x_0)\rho e^{t\omega_\mu(x_0)}\rho(g(x_0))^{-1} \quad \text{提入常数}\\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho[(g(x_0)e^{t\omega_\mu(x_0)}(g(x_0))^{-1}] \quad \text{同态保群乘法}\\ &= \rho_*[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(g(x_0)e^{t\omega_\mu(x_0)}(g(x_0))^{-1}]\\ &= \rho_*\left[(g(x_0)\left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}e^{t\omega_\mu(x_0)}\right](g(x_0))^{-1}\right]\\ &= \rho_*[g(x_0)\omega_\mu(x_0)(g(x_0))^{-1}]\\ &= \rho_*(\mathscr{A}d_{g(x_0)}\omega_\mu(x_0)) \quad \text{伴随表示定义.}\end{aligned}$$

我们就可以给出等式

$$\rho_*\omega_\mu(x_0)=\hat{\omega}(x_0)=\rho_*(\mathscr{A}d_{g(x_0)}\omega_\mu(x_0))+\rho_*\left[(L_{g(x_0)*}g_*^{-1})\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right].$$

根据式子15.6可以给出

$$\omega_\mu(x_0)=\hat{\omega}(x_0)=(\mathscr{A}d_{g(x_0)}\omega_\mu(x_0))+\left[(L_{g(x_0)*}g_*^{-1})\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right].$$

就是式子17.3, 最后我们可以给出 $\boldsymbol{\omega}$ 是联络, 而且是底流形上的联络, 规范势的变换实际上是因为, 选择不同的截

面导致主丛上的联络场 $\tilde{\omega}$ 会映射出不同的 ω, 总而言之, 主丛上的联络就是一个规范势.

第十八章 规范场强与曲率 (Gauge Field Strength and Curvature)

先探究如何定义主丛上的曲率, 给定流形 K 是流形, 则 $\Lambda_K(i,\mathscr{G})$ 是流形 K 上 $\mathscr{G}$ 取值的 i 形式场.

定义 18.1 (Bracket)

$\forall \boldsymbol{\phi} \in \Lambda_K(i,\mathscr{G}), \boldsymbol{\psi} \in \Lambda_K(j,\mathscr{G})$, 定义**括号**$[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!] \in \Lambda_K(i+j,\mathscr{G})$ 为

$$[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!](X_1,\cdots,X_{i+j}) := \frac{1}{i!j!}\sum_{\pi}\delta_\pi[\boldsymbol{\phi}(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(i)}),\boldsymbol{\psi}(X_{\pi(i+1)}),\cdots,X_{\pi(i+j)}].$$

$X_1,\cdots,X_{i+j}$ 是 K 上的矢量场, π 代表 $(1,\cdots,i+j)$ 的一种排列, δ_π 偶排列取 $+1$, 奇排列取 -1. 右面的方括号是李群 $\mathscr{G}$ 的李括号.

♣

例 18.1 计算 $i=2, j=1$ 的括号.

$$\begin{aligned}&[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!](X_1,X_2,X_3)\\ =&\frac{1}{2!1!}\{[(\boldsymbol{\phi}(X_1,X_2)),\boldsymbol{\psi}(X_3)]+[(\boldsymbol{\phi}(X_2,X_3)),\boldsymbol{\psi}(X_1)]+[(\boldsymbol{\phi}(X_3,X_1)),\boldsymbol{\psi}(X_2)]\}\\ &-\frac{1}{2!1!}\{[(\boldsymbol{\phi}(X_2,X_1)),\boldsymbol{\psi}(X_3)]+[(\boldsymbol{\phi}(X_1,X_3)),\boldsymbol{\psi}(X_2)]+[(\boldsymbol{\phi}(X_3,X_2)),\boldsymbol{\psi}(X_1)]\}.\end{aligned}$$

例 18.2 $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda_K(1,\mathscr{G})$, 计算 $[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}](X_1,X_2)$

$$\begin{aligned}[\![\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}]\!](X_1,X_2) &= [\boldsymbol{\omega}(X_1),\boldsymbol{\omega}(X_2)]-[\boldsymbol{\omega}(X_2),\boldsymbol{\omega}(X_1)]\\ &=2[\boldsymbol{\omega}(X_1),\boldsymbol{\omega}(X_2)].\end{aligned}$$

定义 18.2 (Graded Lie Algrbra)

流形 K 上全体 $\mathscr{G}$ 值形式场的集合并定义18.1给出的括号形成的数学结构称为**阶化李代数**.

♣

在定义11.3之前我们补充了关于矢量空间的形式场的知识. 在这里我们给出普通取值的 i-form-field ϕ^r, 并结合上李代数上的基矢 $\{e_r\}$, 给出 $\mathscr{G}$ 取值的 i-form-field ϕ. 具体关系为

$$\boldsymbol{\phi} = e_r\phi^r.$$

也就是说任意一个 $\mathscr{G}$ 取值的 $\boldsymbol{\phi}$ 可以表示为 $R(=\dim\mathscr{G})$ 项之和, 每一项可以写成李代数元乘以 $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 取值的 i-form-field. 我们给出

$$\boldsymbol{\phi} = A\alpha, \quad A\in\mathscr{G}, \alpha\in\Lambda_K(i,\mathbb{R}(\mathbb{C})).$$

我们有如下定理

定理 18.1

设 $A,B\in\mathscr{G}, \alpha\in\Lambda_K(i,\mathbb{R}(\mathbb{C})), \beta\in\Lambda_K(j,\mathbb{R}(\mathbb{C}))$, 则我们可以计算括号得

$$[\![A\alpha,B\beta]\!] = [A,B](\alpha\wedge\beta).$$

♡

证明

$$
\begin{aligned}
[\![A\alpha, B\beta]\!](X_1,\cdots,X_j) &= \frac{1}{i!j!}\sum_\pi \delta_\pi[A\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(i)}), B\beta(X_{\pi(i+1)}\cdots X_{\pi(i+j)})] \\
&= \frac{1}{i!j!}\sum_\pi \delta_\pi[A,B]\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(i)})\beta(X_{\pi(i+1)}\cdots X_{\pi(i+j)}) \quad \text{李括号是双线性的} \\
&= [A,B]\frac{1}{i!j!}\sum_\pi \delta_\pi\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(i)})\beta(X_{\pi(i+1)}\cdots X_{\pi(i+j)}) \\
&= [A,B]\frac{1}{i!j!}\sum_\pi \delta_\pi\alpha_{\pi(1),\cdots,\pi(i)}\beta_{\pi(i+1)\cdots\pi_{i+j}}X_{\pi(1)}\cdots X_{\pi(i+j)}.
\end{aligned}
$$

我们可以借助代表反称的方括号来表述上面式子

$$
\begin{aligned}
[\![A\alpha, B\beta]\!](X_1,\cdots,X_j) &= [A,B]\frac{(i+j)!}{i!j!}\alpha_{[1\cdots i}\beta_{i+1,\cdots i+j]}(X_1,\cdots X_{i+j}) \\
&= [A,B](\alpha\wedge\beta)_{1,\cdots i+j}(X_1,\cdots,X_{i+j}).
\end{aligned}
$$

最后我们给出结论

$$
[\![A\alpha, B\beta]\!] = [A,B](\alpha\wedge\beta).
$$

定理 18.2

$\forall \boldsymbol{\phi}\in\Lambda_K(i,\mathscr{G}), \boldsymbol{\psi}\in\Lambda_K(j,\mathscr{G}), \boldsymbol{\rho}\in\Lambda_K(k,\mathscr{G})$, 有

1. $[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!] = -(-1)^{ij}[\![\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\phi}]\!]$
2. $(-1)^{ik}[\![[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!],\boldsymbol{\rho}]\!] + (-1)^{kj}[\![[\![\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\phi}]\!],\boldsymbol{\psi}]\!] + (-1)^{ji}[\![[\![\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\rho}]\!],\boldsymbol{\phi}]\!] = 0$

笔记 上面两个性质分明对应于李代数的两个最基本的代数结构.

证明 选择李代数 $\mathscr{G}$ 上的基矢 $\{e_r\}$, 给出 $\phi^a\in\Lambda_K(i,\mathbb{R}(\mathbb{C}))$, $\psi^b\in\Lambda_K(j,\mathbb{R}(\mathbb{C}))$,$\rho^r\in\Lambda_K(k,\mathbb{R}(\mathbb{C}))$, 则有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi} &= e_a\phi^a \\
\boldsymbol{\psi} &= e_b\psi^b \\
\boldsymbol{\rho} &= e_r\rho^r.
\end{aligned}
$$

1. 第一项对应于李括号的第一条性质 $[A,B]=-[B,A]$, 证明如下

$$
\begin{aligned}
[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!] &= [\![e_a\phi^a, e_b\psi^b]\!] \\
&= [e_a,e_b](\phi^a\wedge\psi^b) \\
&= -[e_b,e_a](-1)^{ij}(\phi^b\wedge\psi^a) \\
&= -(-1)^{ij}[\![e_b\psi^b, e_a\phi^a]\!] \\
&= -(-1)^{ij}[\![\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\phi}]\!].
\end{aligned}
$$

2. 第二条则是对应于雅可比恒等式 $[A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]=0$, 这里选择验证的方法.

$$
\begin{aligned}
& (-1)^{ik}[\![[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!],\boldsymbol{\rho}]\!] + (-1)^{kj}[\![[\![\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\phi}]\!],\boldsymbol{\psi}]\!] + (-1)^{ji}[\![[\![\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\rho}]\!],\boldsymbol{\phi}]\!] \\
= \;& (-1)^{ik}[\![[e_a,e_b](\phi^a)\wedge(\psi^b)], e_r\rho^r]\!] + \cdots \\
= \;& [[e_a,e_b],e_r](-1)^{ik}(\phi^a\wedge\psi^b)\wedge\rho^r + \cdots \\
= \;& [[e_a,e_b],e_r](-1)^{ik}(\phi^a\wedge\psi^b\wedge\rho^r) + [[e_r,e_a],e_b](-1)^{kj}(\rho^r\wedge\phi^a\wedge\psi^b) + [[e_b,e_r],e_a](-1)^{ji}(\psi^b\wedge\rho^r\wedge\phi^a) \\
= \;& (-1)^{ik}(\phi^a\wedge\psi^b\wedge\rho^r)([[e_a,e_b],e_r] + [[e_r,e_a],e_b] + [[e_b,e_r],e_a]) \\
= \;& 0.
\end{aligned}
$$

定理 18.3

设 M, N 是流形, $\mathscr{G}$ 是李代数, $A \in \mathscr{G}, f: M \to N$ 是 C^∞ 映射, $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N(i, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$, 则

1. $d(A\boldsymbol{\alpha}) = Ad\boldsymbol{\alpha}$
2. $f^*(A\boldsymbol{\alpha}) = Af^*\boldsymbol{\alpha}$
3. $f^*(d\boldsymbol{\alpha}) = d(f^*\boldsymbol{\alpha})$

$f^*(A\boldsymbol{\alpha})$ 是拉回映射, 目的是诱导出 M 上的 *i-form-field*.

证明 在定义11.3前面给出了 $\mathscr{V}$ 值的微分形式的定义, 具体体现到这里就是第一条. 对于第二条, 拉回映射是线性映射, 对于这里对于不是形式场的 A 而言, 可以通过线性关系把 A 提出映射, 这一点由拉回映射的线性性保证. 对于第三条我们假设 X^i 是流形 M 上的矢量场, 故有

$$\begin{aligned} d(f^*\boldsymbol{\alpha})(X^1, \cdots, X^i) &= [d \circ f^*\boldsymbol{\alpha}](X^1, \cdots, X^i) \\ &= d \circ [f^*\boldsymbol{\alpha}(X^1, \cdots, X^i)] \\ &= d\boldsymbol{\alpha}(X^1_*, \cdots X^i_*) \\ &= f^*(d\boldsymbol{\alpha})(X^1, \cdots X^i). \end{aligned}$$

故 $d(f^*\boldsymbol{\alpha}) = f^*(d\boldsymbol{\alpha})$

定理 18.4

设 $\boldsymbol{\phi} \in \Lambda_K(i, \mathscr{G}), \boldsymbol{\psi} \in \Lambda_K(j, \mathscr{G})$, 则

$$d[\![\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}]\!] = [\![d\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}]\!] + (-1)^i [\![\boldsymbol{\phi}, d\boldsymbol{\psi}]\!].$$

证明 我们还是选择李代数 $\mathscr{G}$ 上的基矢 $\{e_r\}$, 给出 $\phi^a \in \Lambda_K(i, \mathbb{R}(\mathbb{C})), \psi^b \in \Lambda_K(i, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$

$$\boldsymbol{\phi} = e_a\phi^a, \quad \boldsymbol{\psi} = e_b\psi^b.$$

则

$$\begin{aligned} d[\![\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}]\!] &= d[\![e_a\phi^a, e_b\psi^b]\!] = d([e_a, e_b](\phi^a \wedge \psi^b)) \\ &= [e_a, e_b]d(\phi^a \wedge \psi^b) \\ &= [e_a, e_b]d(\phi^a \wedge \psi^b) = [e_a, e_b]d((\phi^a \wedge \phi^b)_{c_1, \cdots, c_i, d_{i+1}, \cdots d_{i+j}}) \\ &= [e_a, e_b]d(\frac{(i+j)!}{i!j!}\phi^a_{[c_1, \cdots, c_i}\phi^b_{d_{i+1}, \cdots, d_{i+j}]}). \end{aligned}$$

作为形式场我们借助流形上的对偶坐标基矢场可以给出

$$
\begin{aligned}
&d[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!]\\
=&[e_a,e_b]d(\frac{(i+j)!}{i!j!}\phi^a_{[c_1,\cdots,c_i}\psi^b_{d_{i+1},\cdots,d_{i+j}]})\\
=&[e_a,e_b]d(\frac{(i+j)!}{i!j!}\phi^a_{\mu_1,\cdots,\mu_i}\psi^b_{\nu_{i+1},\cdots,\nu_{i+j}}(dx^{\mu_1}_{[c_1})\cdots(dx^{\mu_i})_{c_i}(dx^{\nu_{i+1}})_{d_{i+1}}\cdots(dx^{\nu_{i+j}})_{d_{i+j}]})\\
=&[e_a,e_b]d(\frac{1}{i!j!})\phi^a_{\mu_1,\cdots,\mu_i}\psi^b_{\nu_{i+1},\cdots,\nu_{i+j}}(dx^{\mu_1}_{c_1}\wedge\cdots\wedge(dx^{\mu_i})_{c_i}\wedge(dx^{\nu_{i+1}})_{d_{i+1}}\wedge\cdots\wedge(dx^{\nu_{i+j}})_{d_{i+j}})\\
=&[e_a,e_b]d\sum_C\phi^a_{\mu_1,\cdots,\mu_i}\psi^b_{\nu_{i+1},\cdots,\nu_{i+j}}(dx^{\mu_1}_{c_1}\wedge\cdots\wedge(dx^{\mu_i})_{c_i}\wedge(dx^{\nu_{i+1}})_{d_{i+1}}\wedge\cdots\wedge(dx^{\nu_{i+j}})_{d_{i+j}})\\
=&[e_a,e_b]\sum_C(((d\phi^a_{\mu_1,\cdots,\mu_i})\wedge(dx^{\mu_1})_{c_1}\cdots\wedge(dx^{\mu_i})_{c_i})\wedge\left(\psi^b_{\nu_{i+1},\cdots,\nu_{i+j}}(dx^{\nu_{i+1}})_{d_{i+1}}\wedge\cdots\wedge(dx^{\nu_{i+j}})_{d_{i+j}})\right)\\
&+(-1)^i[e_a,e_b]\sum_C((\phi^a_{\mu_1,\cdots,\mu_i}(dx^{\mu_1})_{c_1}\cdots\wedge(dx^{\mu_i})_{c_i})\wedge\left((d\psi^b_{\nu_{i+1},\cdots,\nu_{i+j}})\wedge(dx^{\nu_{i+1}})_{d_{i+1}}\wedge\cdots\wedge(dx^{\nu_{i+j}})_{d_{i+j}})\right)\\
=&[e_a,e_b](d\phi)^a\wedge\psi^b+(-1)^i[e_a,e_b](\phi^a\wedge\psi^b)\\
=&[\![d\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!]+(-1)^i[\![\boldsymbol{\phi},d\boldsymbol{\psi}]\!].
\end{aligned}
$$

笔记 *上面证明过程用了许多第五章的内容,如果看不懂,建议结合第五章内容看,这里说一些从证明中学到的一些东西,我们定义的微分形式,是一个全反称的量交换指标存在等式关系,而楔形积的定义其实是定义了一种映射 $\Lambda_K(l,\mathbb{R}(\mathbb{C}))\times\Lambda_K(m,\mathbb{R}(\mathbb{C}))\to\Lambda_K(l+m,\mathbb{R}(\mathbb{C}))$ 由于微分形式的特殊定义我们给出了微分形式场的展开形式为*

$$\boldsymbol{\omega}_{a_1\cdots a_n}=\sum_C\omega_{\mu_1\cdots\mu_2}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}.$$

其中 $\omega_{\mu_1\cdots\mu_2}$ 只是一组数,$(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}$ 是使用对偶基底 (1 形式) 映射上来的 l 形式场. $\sum_C$ 是对 n 个数中 l 个进行求和, 也就是 μ 的取值. 我们通常习惯爱因斯坦求和约定, 希望把求和号约去, 爱因斯坦求和是每个 μ 均能取到 n 个数, 但是由于微分形式的特殊性, 相同的数会约去, 且不同的数的排列也被反称消掉, 故上面式子又可以写为

$$\boldsymbol{\omega}_{a_1\cdots a_n}=\frac{1}{l!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_2}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}.$$

这里可以看书 P123 选读部分. 之后借用微分算符的性质给出了最后的证明.(书上定理 5-1-14) 实际上最后一步本质上是外微分算符满足的莱布尼兹律

$$d(\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta})=d\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}+(-1)^i\boldsymbol{\alpha}\wedge d\boldsymbol{\beta}.$$

定理 18.5

设 $f:M\to N$ 是 C^∞ 映射,$\boldsymbol{\phi}\in\Lambda_N(1,\mathscr{G}),\boldsymbol{\psi}\in\Lambda_N(j,\mathscr{G})$, 则

1. $f^*[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!]=[\![f^*\boldsymbol{\phi},f^*\boldsymbol{\psi}]\!]$
2. $d(f^*\boldsymbol{\phi})=f^*(d\boldsymbol{\phi})$

证明

1. 我们先来看第一个

$$
\begin{aligned}
f^*[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!]&=f^*[e_a,e_b]\phi^a\wedge\psi^b\\
&=[e_a,e_b]f^*(\phi^a\wedge\psi^b)\\
&=[e_a,e_b](f^*\phi^a\wedge f^*\psi^b)\text{借助基矢变换一下就得到了}\\
&=[\![f^*\boldsymbol{\phi},f^*\boldsymbol{\psi}]\!].
\end{aligned}
$$

2. 这个就更简单了, 代入定理18.3第三条验证即可.

定义 18.3

设 $P(M,G)$ 是带联络 $\tilde{\omega}$ 的主丛.

1. $\forall\varphi\in\Lambda_P(i,\mathscr{G})$, 定义 $\varphi^H\in\Lambda_P(i,\mathscr{G})$ 为
$$\varphi^H(X_1,\cdots,X_i):=\varphi(X_1^H,\cdots,X_i^H).$$
$X_1,\cdots,X_i$ 是 P 上任意矢量场, $X_1^H,\cdots,X_i^H$, 是前面矢量场的水平分量.
2. $\phi\in\Lambda_P(i,\mathscr{G})$ 的**协变外微分** ***(exterior covariant differential)*** $D\varphi$ 定义为
$$D\varphi=(d\varphi)^H\in\Lambda_P(I+1,\mathscr{G}).$$
3. 联络 $\tilde{\omega}\in\Lambda_P(1,\mathscr{G})$ 的曲率 $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ 定义为
$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}:=D\tilde{\omega}=(d\tilde{\omega})^H.$$

♣

定理 18.6 (嘉当第二结构方程)
$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}=d\tilde{\omega}+\frac{1}{2}[\![\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!].$$

♡

证明 $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ 是一个二形式场, 作用到 p 点的 X,Y 矢量可以有
$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_p(X,Y)=(d\tilde{\omega})_p^H(X,Y)=(d\tilde{\omega})_p(X^H,Y^H).$$
而参考例18.2等号右面第二项可以写为
$$\frac{1}{2}[\![\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!]_p(X,Y)=[\tilde{\omega}|_p(X),\tilde{\omega}|_p(Y)].$$
故我们要证明的式子就变为
$$(d\tilde{\omega})_p(X^H,Y^H)=d\tilde{\omega}_p(X,Y)+[\tilde{\omega}|_p(X),\tilde{\omega}|_p(Y)]. \tag{18.1}$$
接下来我们分类讨论这一问题

1. $X,Y\in H_p$: 作为水平矢量不难给出 $\tilde{\omega}(X)=0=\tilde{\omega}_p(Y)$, 而且作为水平矢量我们有 $X^H=X,Y^H=Y$, 故这种情况下成立.
2. $X,Y\in V_p$: 根据竖直矢量的定义 (10.9) 可以给出
$$X=A_p^*,Y=B_p^*.$$
作为竖直矢量场, 水平分量为 0, 即 $(d\tilde{\omega})_p(X^H,Y^H)=(d\tilde{\omega})_p(0,0)=0$, 那么式子18.1就转变为
$$d\tilde{\omega}_p(A_p^*,B_p^*)=-[\tilde{\omega}|_p(A_p^*),\tilde{\omega}|_p(B_p^*)].$$
开始之前我们先证明一个有用的等式, 设 ω 是 $\Lambda(1,\mathbb{R}(\mathbb{C})$, 当其作用到矢量 u,v 上我们有
$$\begin{aligned}d\omega(u,v)&=u^av^b2\nabla_{[a}\omega_{b]}=u^av^b(\nabla_a\omega_b-\nabla_b\omega_a)\\&=u^a(\nabla_av^b\omega_b-\omega_b\nabla_av^b)-v^b(\nabla_bu^a\omega_b-\omega_a\nabla_bu^a)\\&=u^a\nabla_av^b\omega_b-u^a\omega_b\nabla_av^b-v^b\nabla_bu^a\omega_b+v^b\omega_a\nabla_bu^a\\&=u(\omega(v))-v(\omega(u))-\omega_b(u(v^b))+\omega_av(u^a)\\&=u(\omega(v))-v(\omega(u))-\omega_a(u(v^a))+\omega_av(u^a)\quad\text{修改哑指标}\\&=u(\omega(v))-v(\omega(u))-\omega_a(u(v^a)-v(u^a))\\&=u(\omega(v))-v(\omega(u))-\omega([u,v]).\end{aligned}$$
我们使用了导数算符的定义中的要求 $u^a\nabla_av=u(v)$, 以及矢量场的对易子 (李括号). 我们知道对于 $\tilde{\omega}\in\Lambda(1,\mathscr{G})$ 总可以写为
$$\tilde{\omega}=e_r\tilde{\omega}^r.$$

对于普通取值的形式场我们给出

$$d\tilde{\omega}_p(A_p^*, B_p^*) = A_p^*(\tilde{\omega}(B_p^*)) - B_p^*(\tilde{\omega}(A_p^*)) - \tilde{\omega}([A_p^*, B_p^*]).$$

对两边同乘以 e_r 得

$$d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p(A_p^*, B_p^*) = e_r A_p^*(\tilde{\omega}(B_p^*)) - e_r B_p^*(\tilde{\omega}(A_p^*)) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}([A_p^*, B_p^*]).$$

到目前为止我们还没有给过矢量作用于 $\mathscr{G}$ 值的定义, 我们这里进行补充

定义 18.4

对于流形 M 上的矢量场 X, 和 $F \in \Lambda_M(0, \mathscr{G})$ 定义

$$X(F) := dF(X).$$

♣

我们补充一个定理

定理 18.7

设 X 是流形 M 上得一个矢量场, e_r 是李代数 $\mathscr{G}$ 的基矢量, f 是流形上的标量场. 有

$$e_r X(f) = X(e_r f).$$

♡

证明 令 $F \equiv e_r f \in \Lambda(0, \mathscr{G})$, 只需下式对 $\forall p \in M$ 成立即可

$$e_r X_p(f) = X_p(F).$$

我们来看

$$e_r X_p(f) = e_r df|_p(X_p) = dF|_p(X_p) = X_p(F).$$

第一个等号就是对偶矢量场的定义.

最后我们可以给出

$$= A_p^*(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(B_p^*)) - B_p^*(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(A_p^*)) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}([A_p^*, B_p^*]).$$

根据联络定义11.3第一条给出 $\forall p \in P$,$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(B^*)_p = B$ 是一个常数, 而矢量作用于常数给出 0, 故最后给出

$$d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p(A_p^*, B_p^*) = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}([A_p^*, B_p^*]) = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}([A, B]_p^*) = -[A, B]_p.$$

第二个等号见定理10.10.

3. $X \in V_p, Y \in H_p \Rightarrow X = A_p^*$, 选择底流形在 x 点的矢量为 Z, 则 Y 可以看作 Z 的水平提升在 p 点的取值 $\tilde{Z}_p$, 此时式子18.1转变为

$$d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p(A_p^*, \tilde{Z}_p) = 0.$$

仿照第二条给出

$$d\tilde{\omega}(A^*, \tilde{Z}) = A^*(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{Z})) - \tilde{Z}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(A^*)) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}([A^*, \tilde{Z}]).$$

根据定理11.7给出第三项为 0, 第一项又可以写为 $A^*(0) = 0$, 第二项改为 $\tilde{Z}(A)$, 因为 A 是常矢量, 故第二项也为 0. 最终我们给出第三种情况成立.

上面三种情况就包含了所有的情况, 也就是说我们验证了嘉当第二结构方程成立.

定理 18.8 (Bianchi 恒等式)

$$D\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = 0.$$

♡

证明

$$\begin{aligned}
d\tilde{\mathbf{\Omega}} &= d(d\tilde{\omega}+\frac{1}{2}[\![\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!]) = 0+\frac{1}{2}d[\![\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!] \\
&= \frac{1}{2}\left([\![d\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!]-[\![\tilde{\omega},d\tilde{\omega}]\!]\right) \quad \text{定理18.4} \\
&= \frac{1}{2}\left([\![d\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!]+[\![\tilde{d\omega},\tilde{\omega}]\!]\right) \text{定理18.3} \\
&= [\![d\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!].
\end{aligned}$$

故

$$D\tilde{\mathbf{\Omega}}(X,Y,Z)=(d\tilde{\mathbf{\Omega}})^H(X,Y,Z)=d\tilde{\mathbf{\Omega}}(X^H,Y^H,Z^H)=[\![d\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!](X^H,Y^H,Z^H).$$

而

$$[\![d\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!](X^H,Y^H,Z^H)=\frac{1}{2}\left([d\tilde{\omega}(X^H,Y^H),\tilde{\omega}(Z^H)]+\cdots\right).$$

因为

$$\tilde{\omega}(X^H)=0,\quad \tilde{\omega}(Y^H)=0,\quad \tilde{\omega}(Z^H)=0.$$

且求和式子每一项都有 0 项, 故最后给出 $[\![d\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!](X^H,Y^H,Z^H)=0$, 即

$$D\tilde{\mathbf{\Omega}}=0.$$

定理 18.9

$$d\tilde{\mathbf{\Omega}}=[\![\tilde{\mathbf{\Omega}},\tilde{\omega}]\!].$$

♡

证明

$$\begin{aligned}
[\![\tilde{\mathbf{\Omega}},\tilde{\omega}]\!] &= [\![d\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!]+\frac{1}{2}[\![[\![\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!],\tilde{\omega}]\!] \\
&= [\![d\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!]+0 \quad \text{参考定理18.2并注意三项相同} \\
&= d\tilde{\mathbf{\Omega}}.
\end{aligned}$$

最后一步见定理18.8下方证明的第一条式子.

定理 18.10

$$R_g^*\tilde{\omega}=\mathscr{A}d_{g^{-1}}\circ\tilde{\omega},\quad \forall g\in G.$$

R 是主丛上的右作用, 等号右面也常写为 $\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\omega}$

♡

证明 $\forall g\in G, p\in P, X\in T_pP$ 有

$$(R_g^*\tilde{\omega}_{pg})(X)=\tilde{\omega}_{pg}(R_{g*}X)=\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\omega}_p(X).$$

第一个等号使用的是拉回映射和推前映射的关系, 第二个等号是定义11.3的公式

此定理给出了一个 P 上 1 形式场到 P 上的 1 形式场的映射.

定理 18.11

1. $d(\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\omega})=\mathscr{A}d_{g^{-1}}d\tilde{\omega}$
2. $[\![\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\omega},\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\omega}]\!]=\mathscr{A}d_{g^{-1}}[\![\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\!]$

♡

证明

1. 我们知道 $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = e_r\tilde{\omega}^r \quad e_r \in \mathscr{G}, \tilde{\omega}^r \in \Lambda(i, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$, 故我们有

$$\begin{aligned} d(\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}) &= d(\mathscr{A}d_{g^{-1}}(e_r\tilde{\omega}^r)) \\ &= d(\tilde{\omega}^r(\mathscr{A}d_{g^{-1}}e^r)) \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}e^r d(\tilde{\omega}^r) \quad \text{定理18.3第一条} \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}d\tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \mathscr{G}\text{值外微分定义, 见定义11.3上方补充.} \end{aligned}$$

2. 对于第二点

$$\begin{aligned} [\![\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}]\!] &= [\![\mathscr{A}d_{g^{-1}}e_r\tilde{\omega}^r, \mathscr{A}d_{g^{-1}}e_r\tilde{\omega}^r]\!] \\ &= [\![\tilde{\omega}^r\mathscr{A}d_{g^{-1}}e_r, \tilde{\omega}^r\mathscr{A}d_{g^{-1}}e_r]\!] \\ &= [\mathscr{A}d_{g^{-1}}e_r, \mathscr{A}d_{g^{-1}}e_r](\tilde{\omega}^r \wedge \tilde{\omega}^r) \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}[e_r, e_r](\tilde{\omega}^r \wedge \tilde{\omega}^r) \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}[\![\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}]\!]. \end{aligned}$$

笔记 $\mathscr{A}d_{g^{-1}}$ 诱导的李代数是保李括号的, 由伴随映射是自同构映射确保群乘法不变给出.

定理 18.12

$$R_g^*\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \mathscr{A}d_{g^{-1}} \circ \tilde{\boldsymbol{\Omega}}, \quad \forall g \in G.$$

证明

$$\begin{aligned} R_g^*\tilde{\boldsymbol{\Omega}} &= R_g^*(d\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2}[\![\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}]\!]) \\ &= d(R_g^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}) + \frac{1}{2}[\![R_g^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}, R_g^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}]\!] \quad \text{定理18.5} \\ &= d(\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}) + \frac{1}{2}[\![\mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}]\!] \quad \text{定理18.10} \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}\left(d\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2}[\![\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}]\!]\right) \quad \text{定理18.11} \\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}. \end{aligned}$$

主丛上的曲率我们已经定义完毕, 接下来我们来看看其中的物理意义是什么. 实际上主丛上的曲率就对应着底流形上的规范场强. 对于规范场强我们先来看比较简单的情况——$U(1)$ 群,$U(1)$ 群对应于电磁场的理论. 对于电磁场强我们有 $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{A}$, 我们知道电磁场强在规范变换下不改变物理实质, 具体体现为 $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}$, 我们先给出 $U(1)$ 群下联络 $\boldsymbol{\omega}$ 和规范势 $\boldsymbol{A}$ 以及场强 F 的关系.

$$\boldsymbol{\omega} = kA_\mu dx^\mu = k\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{F} = k^{-1}d\boldsymbol{\omega}.$$

两者只差一个常数, 接下来我们只需要验证由截面变换诱导出的变换不会使得场强发生改变, 由于 k 不会改变实质, 我们暂且令其为 1.

根据定理11.3给出

$$\boldsymbol{\omega}' = g\boldsymbol{\omega}g^{-1} + gdg^{-1}.$$

具体差异参考式16.1, 因为这里是阿贝尔群故

$$\boldsymbol{\omega}' = g\boldsymbol{\omega}g^{-1} + gdg^{-1} = \boldsymbol{\omega}gg^{-1} + gdg^{-1} = \boldsymbol{\omega} + gdg^{-1}.$$

我们来看下面等式

$$d(gdg^{-1}) = dg \wedge dg^{-1} + (-1)^i gd(dg^{-1}) = dg \wedge dg^{-1}.$$

笔记 由于矩阵群的缘故, 所有的都用矩阵表示, 本来不能直接相乘的元素混淆在了一起, 注意这里是联络等式, 乘法要满足形式场. 而形式场只会在维数大于二时和普通乘法有所区分.

由于 $g^{-1}g = I$, 故我们有

$$(dg^{-1})g + (g^{-1})dg = 0.$$

由于是阿贝尔群故有 $dg = gg(dg^{-1})$ 故

$$d(gdg^{-1}) = ggd(g^{-1}) \wedge d(g^{-1}) = 0.$$

由此可见规范场强不变.

设 $U \subset M$ 是开子集, 我们有局域截面 $\sigma_U : U \to P$, 如前所述 $\boldsymbol{\omega}_U \equiv \sigma^* \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 在物理上代表规范势; 仿照这种情况, 令 $\boldsymbol{\Omega}_U \equiv \sigma_U^* \tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ 下面我们证明 $\boldsymbol{\Omega}_U$ 在物理上代表**规范场强 (gauge field strength)**, 我们还需要补充一个定理

定理 18.13

$$\boldsymbol{\Omega}_U = d\boldsymbol{\omega}_U + \frac{1}{2}[\![\boldsymbol{\omega}_U, \boldsymbol{\omega}_U]\!].$$

♡

证明

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} = \sigma_U^* \tilde{\boldsymbol{\Omega}} &= \sigma_U^* (d\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2}[\![\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}]\!]) \\
&= d(\sigma_U^* \tilde{\boldsymbol{\omega}}) + \frac{1}{2}[\![\sigma_U^* \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \sigma_U^* \tilde{\boldsymbol{\omega}}]\!] \quad \text{定理18.5} \\
&= d(\boldsymbol{\omega}) \frac{1}{2}[\![\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]\!].
\end{aligned}$$

定理 18.14 (规范场强和曲率的桥梁)

令 $\boldsymbol{F} = \frac{1}{2} e_r F^r_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, 则 $\boldsymbol{\Omega} = k\boldsymbol{F}$, 其中 $F^r_{\mu\nu}$ 由式*15.3*给出.

♡

证明 根据定理18.13给出, 物理中的规范势就是这里的联络, 即 $\boldsymbol{\omega} = k e_r A^r_\mu dx^\mu$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} &= d\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}[\![\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]\!] \\
&= d(k e_r A^r_\mu dx^\mu) + \frac{1}{2}[\![k e_s A^s_\mu dx^\mu, k e_t A^t_\nu dx^\nu]\!] \\
&= k e_r (dA^r_\mu) \wedge (dx^\mu) + \frac{1}{2} k^2 A^s_\mu A^t_\nu [e_s, e_t] dx^\mu \wedge dx^\nu.
\end{aligned}$$

我们先来计算

$$\begin{aligned}
(dA^r_\mu) \wedge (dx^\mu) = ((\frac{\partial A^r_\mu}{\partial x^\nu}) dx^\nu) \wedge dx^\mu &= (\partial_\nu A^r_\mu) dx^\nu \wedge dx^\mu \\
&= (\partial_{[\nu} A^r_{\mu]}) dx^\nu \wedge dx^\mu \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu A^r_\nu - \partial_\nu A^r_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu.
\end{aligned}$$

则我们有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} &= k e_r (dA^r_\mu) \wedge (dx^\mu) + \frac{1}{2} k^2 A^s_\mu A^t_\nu [e_s, e_t] dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \frac{1}{2} k e_r (\partial_\mu A^r_\nu - \partial_\nu A^r_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu + \frac{1}{2} k^2 A^s_\mu A^t_\nu C^r{}_{st} e_r dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \frac{1}{2} k e_r (\partial_\mu A^r_\nu - \partial_\nu A^r_\nu + k C^r{}_{st} A^s_\mu A^t_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= k\boldsymbol{F}.
\end{aligned}$$

笔记 由此可见, 底流形上的 $\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 是一回事, 只是差了一个常数 k.

接下来我们来看在矩阵群的情况下括号运算 $[\![,]\!]$ 的表达式, 设 $\mathscr{G}$ 上的元素是 $N \times N$ 实 (复) 矩阵, 则 $\boldsymbol{\phi} \in \Lambda_K(i, \mathscr{G}), \boldsymbol{\psi} \in \Lambda_K(j, \mathscr{G})$, 则作为 $\mathscr{G}$ 值的形式场, 不难给出 $\boldsymbol{\phi}(X_1, \cdots X_i)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(X_1, \cdots X_j)$ 是一个 $N \times N$ 实 (复) 矩

阵. 我们以 $N=2$ 为例, 观测具体形式

$$\boldsymbol{\phi}(X_1,\cdots X_i)\begin{bmatrix}\phi(X_1,\cdots X_i)^1{}_1 & \phi(X_1,\cdots X_i)^1{}_2\\ \phi(X_1,\cdots X_i)^2{}_1 & \phi(X_1,\cdots X_i)^2{}_2\end{bmatrix}\in\mathscr{G}.$$

我们定义矩阵元为

$$\phi^{v}{}_{\nu}(X_1,\cdots X_i):=\boldsymbol{\phi}^{\mu}{}_{\nu}(X_1,\cdots X_i).$$

故我们可以定义矩阵的楔积为

定义 18.5

设 $\mathscr{G}$ 是矩阵李代数.$\mathscr{G}$ 值形式 $\boldsymbol{\phi}\in\Lambda_K(i,\mathscr{G}),\boldsymbol{\psi}\in\Lambda_K(j,\mathscr{G})$ 的楔积定义为矩阵乘法, 只不过把原来的乘积换成了楔积.

♣

例 18.3 $N=2$ 时 $\boldsymbol{\phi}\wedge\boldsymbol{\psi}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}\wedge\boldsymbol{\psi}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}^1{}_1 & \boldsymbol{\phi}^1{}_2\\ \boldsymbol{\phi}^2{}_1 & \boldsymbol{\phi}^2{}_2\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}^1{}_1 & \boldsymbol{\psi}^1{}_2\\ \boldsymbol{\psi}^2{}_1 & \boldsymbol{\psi}^2{}_2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}^1{}_1\wedge\boldsymbol{\psi}^1{}_1+\boldsymbol{\phi}^1{}_2\wedge\boldsymbol{\psi}^2{}_1 & \boldsymbol{\phi}^1{}_1\wedge\boldsymbol{\psi}^1{}_2+\boldsymbol{\phi}^1{}_2\wedge\boldsymbol{\psi}^2{}_2\\ \boldsymbol{\phi}^2{}_1\wedge\boldsymbol{\psi}^1{}_1+\boldsymbol{\phi}^2{}_2\wedge\boldsymbol{\psi}^2{}_1 & \boldsymbol{\phi}^2{}_1\wedge\boldsymbol{\psi}^1{}_2+\boldsymbol{\phi}^2{}_2\wedge\boldsymbol{\psi}^2{}_2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

我们可以借助指标给出矩阵楔积形式的定义为

定义 18.6

设 $\{e_r\mid r=1,\cdots,R\}$ 是 $\mathscr{G}$ 的基底, 把 $\boldsymbol{\phi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 分别写成 $\boldsymbol{\phi}=e_r\phi^r$ 和 $\boldsymbol{\psi}=e_s\psi^s$,$\phi^r\in\Lambda_K(i,\mathbb{R}(\mathbb{C}))$,$\phi^s\in\Lambda_K(j,\mathbb{R}(\mathbb{C}))$, 利用指标定义为

$$\boldsymbol{\phi}\wedge\boldsymbol{\psi}:=e_re_s(\phi^r\wedge\psi^s).$$

e_re_s 代表矩阵 e_r 和 e_s 之积.

♣

我们给了两个定义, 下面证明两个定义的等价性, 以加深理解.

证明

1. (定义18.5 $\Rightarrow$ 定义 18.6): $\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}$ 既然是矩阵李代数的元素, 那么势必可以按照矩阵李代数基底展开.

$$\boldsymbol{\phi}=e_r\phi^r\quad\boldsymbol{\psi}=e_s\psi^s.$$

注意上面的 r,s 指标代表基底的个数, 并不是我们理解的张量分量的指标. 我们补上矩阵分量的指标给出

$$\boldsymbol{\phi}^{\mu}{}_{\rho}=(e_r\phi^r)^{\mu}{}_{\rho}\quad\boldsymbol{\psi}^{\rho}{}_{\nu}=(e_s\psi^s)^{\rho}{}_{\nu}.$$

按照定义18.5的定义给出

$$\boldsymbol{\phi}\wedge\boldsymbol{\psi}=(e_r\phi^r)^{\mu}{}_{\rho}\wedge(e_s\psi^s)^{\rho}{}_{\nu}=(e_r)^{\mu}{}_{\rho}(e_s)^{\rho}{}_{\nu}(\phi^r\wedge\psi^s).$$

由于楔积只是形式场的乘法, 对于楔积而言,e_r,e_s 就只是常数, 我们可以把它们提出来, 给出上式, 不难发现上式就是我们的定义18.6.

2. (定义18.6 $\Rightarrow$ 18.5): 由于 e_re_s 代表矩阵的积. 我们可以给出定义18.6给出的矩阵形式, 假设矩阵是 $N\times N$ 维

矩阵:

$$\boldsymbol{\phi}\wedge\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}(e_r)^1{}_1 & \cdots & (e_r)^1{}_N\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (e_r)^N{}_1 & \cdots & (e_r)^N{}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(e_s)^1{}_1 & \cdots & (e_s)^1{}_N\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (e_s)^N{}_1 & \cdots & (e_s)^N{}_N\end{bmatrix}(\phi^r\wedge\psi^s)$$

$$=\begin{bmatrix}\left(\sum\limits_{\rho=1}^{N}(e_r)^1{}_\rho(e_s)^\rho{}_1\right)(\phi^r\wedge\psi^s) & \cdots & \left(\sum\limits_{\rho=1}^{N}(e_r)^1{}_\rho(e_s)^\rho{}_N\right)(\phi^r\wedge\psi^s)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(\sum\limits_{\rho=1}^{N}(e_r)^N{}_\rho(e_s)^\rho{}_1\right)(\phi^r\wedge\psi^s) & \cdots & \left(\sum\limits_{\rho=1}^{N}(e_r)^N{}_\rho(e_s)^\rho{}_N\right)(\phi^r\wedge\psi^s)\end{bmatrix}.$$

我们来看其中一项

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\rho=1}^{N}(e_r)^1{}_\rho(e_s)^\rho{}_1\right)(\phi^r\wedge\psi^s)&=\sum_{\rho=1}^{N}(e_r\phi^r)^1{}_\rho\wedge(e_s\psi^s)^\rho{}_1\\&=\sum_{\rho=1}^{N}\boldsymbol{\phi}^1{}_\rho\wedge\boldsymbol{\psi}^\rho{}_1.\end{aligned}$$

就是我们给出的定义18.5的第一项的定义, 其余项类似.

由此可见两个定义是等价的.

定理 18.15

是 $\mathscr{G}$ 是矩阵李代数,$\boldsymbol{\phi}\in\Lambda_K(i,\mathscr{G}),\boldsymbol{\psi}\in\Lambda_K(j,\mathscr{G})$, 则

$$[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!]=\boldsymbol{\phi}\wedge\boldsymbol{\psi}-(-1)^{ij}\boldsymbol{\psi}\wedge\boldsymbol{\phi}.$$

♡

证明

$$\begin{aligned}[\![\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}]\!]=[\![e_r\phi^r,e_s\psi^s]\!]&=[e_r,e_s](\phi^r\wedge\psi^s)\quad\text{第二个等号18.1}\\&=(e_re_s-e_se_r)(\phi^r\wedge\psi^s)\quad\text{定理5.3}\\&=e_re_s(\phi^r\wedge\psi^s)-e_se_r(-1)^{ij}(\psi^s\wedge\phi^r)\\&=\boldsymbol{\phi}\wedge\boldsymbol{\psi}-(-1)^{ij}\boldsymbol{\psi}\wedge\boldsymbol{\phi}.\end{aligned}$$

定理 18.16

设 G 是矩阵李群, 则

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}=d\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_U=d\boldsymbol{\omega}_U+\boldsymbol{\omega}_U\wedge\boldsymbol{\omega}_U.$$

♡

证明

1. 由定理18.6知道

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}&=d\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\frac{1}{2}[\![\tilde{\boldsymbol{\omega}},\tilde{\boldsymbol{\omega}}]\!]\\&=d\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}-(-1)^{1\times1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}})\\&=d\tilde{\boldsymbol{\omega}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}.\end{aligned}$$

2. 第二个定理借助式18.13, 并和前一条证明一致, 这里不再赘述.

定理 18.17

设 $g_{UV}: U\cap V \to G$ 是局域平凡 T_U 与 T_V 之间的转换函数, 则在 $U\cap V$ 上有

$$\mathbf{\Omega}_V = \mathscr{A}d_{g_{UV}^{-1}}\mathbf{\Omega}_U.$$

♡

证明 以 σ_U 和 σ_V 分别代表与 T_U 和 T_V 相应的局域截面, 则

$$\mathbf{\Omega}_V(X,Y) = (\sigma_V^*\tilde{\mathbf{\Omega}})(X,Y) = \tilde{\mathbf{\Omega}}(\sigma_{V*}X, \sigma_{V*}Y).$$

根据式11.5我们知道

$$\sigma_{V*}X = R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}X + \left[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(X)\right]^*_{\sigma_V(x)}$$
$$\sigma_{V*}Y = R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y + \left[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(Y)\right]^*_{\sigma_V(x)}.$$

对第一行进行分析令 $R(X) = R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}X, L(X) = \left[L^{-1}_{g_{UV}(x)*}g_{UV*}(X)\right]^*_{\sigma_V(x)}$, 首先 $L(X)$ 是竖直矢量场在 $\sigma_V(x)$ 的值. 你可以从图11.2得出, 当然你也可以分析,$g_{UV*}(Y)$ 是 $g(x)$ 给出的推前映射, 会把底流形上的矢量 X 映射到 G 上的矢量, 接下来就是 G 上的矢量变换. 对于第二行式子同理. 我们根据定义18.3给出

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{\Omega}}(\sigma_{V*}X, \sigma_{V*}Y) &= \tilde{\mathbf{\Omega}}(R(X)+L(X), R(Y)+L(Y))\\ &= \tilde{\mathbf{\Omega}}(R(X),R(Y)) + \tilde{\mathbf{\Omega}}(R(X),L(Y)) + \tilde{\mathbf{\Omega}}(L(X)+R(Y)) + \tilde{\mathbf{\Omega}}(L(X),L(Y))\\ &= \tilde{\mathbf{\Omega}}(R(X),R(Y)).\end{aligned}$$

后三项均为 0, 因为输入了单竖直矢量. 故

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_V(X,Y) &= \tilde{\mathbf{\Omega}}(R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}X, R_{g_{UV}(x)*}\sigma_{U*}Y)\\ &= R^*_{g_{UV}(x)}\mathbf{\Omega}_V(\sigma_{U*}X, \sigma_{U*}Y)\\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}_{UV(x)}}(\sigma_{U*}X, \sigma_{U*}Y) \quad \text{定理18.10}\\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}_{UV(x)}}(\sigma_U^*\tilde{\mathbf{\Omega}}(X,Y))\\ &= \mathscr{A}d_{g^{-1}_{UV(x)}}\ \sigma_U^*\tilde{\mathbf{\Omega}}(X,Y).\end{aligned}$$

故

$$\mathbf{\Omega}_V = \mathscr{A}d_{g_{UV}^{-1}}\mathbf{\Omega}_U.$$

定理 18.18

当结构群是矩阵群是, 定理18.17给出的公式转变为

$$\mathbf{\Omega} = g_{UV}^{-1}\Omega_U g_{UV}.$$

♡

笔记 主要是因为在矩阵群时 $\mathscr{A}d_g A = gAg^{-1}$

第十九章 矢丛上的联络和协变导数 (Connections and Covariant Derivatives in a Vector Bundle)

与主丛 P 类似, 矢丛 Q 的任意点 q 的切空间 T_qQ 也天然存在竖直子空间 $V_q \subset T_qQ$, 定义为

$$V_q := \{X \in T_qQ \mid \hat{\pi}_*(X) = 0\}.$$

因为 $\hat{\pi}$ 是伴丛上天生就有的, 但是要衡量水平子空间的话, 我们要引入矢丛 Q 的联络. 矢丛上的每根 fiber $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 是实 (复) 矢量空间, 用实 (复) 数 c 对 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 任一点 q 的数乘结果仍是 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 的点. 定义映射 $\zeta_c : Q \to Q$ 为

$$\zeta_c := cq = p \cdot cf \quad \forall q \in Q.$$

不难得出 ζ_c 是同胚映射.

定义 19.1

矢丛 Q 上的一个**联络**是对每点 $q \in Q$ 指定一个水平子空间 $H_p \subset T_qQ$, 满足

1. $T_qQ = V_q \oplus H_q$
2. $\zeta_{c*}[H_q] = H_{\zeta_c(q)} = H_{cq}, \quad \forall q \in Q, c \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), c \neq 0$
3. H_q 光滑地依赖于 q.

♣

笔记 不指定联络的情况下, 我们是否可以讨论竖直分量, 不是天然存在竖直子空间吗, 答案是否定的, 因为指定了水平子空间, 我们才能唯一指定 X 的竖直分量; 还有一点值得说明的是第二条要求, 和11.2不同, 矢丛上的联络定义的搬运只局限于数乘变换, 也就是说只有数乘的关系给出的联络是相同的.

定理 19.1

设 Q 为矢丛, $q \in Q$, 以 X^V 代表 $X \in T_qQ$ 的竖直分量, 则

$$(c_1X_1 + c_2X_2)^V = c_1X_1^V + c_2X_2^V \quad \forall X_1, X_2 \in T_qQ, c_1, c_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

♡

证明 对任意 $X_1, X_2 \in T_qQ$ 及标量 c_1, c_2，考虑线性组合 $X = c_1X_1 + c_2X_2$ 的分解：由切空间分解定理，存在唯一的竖直分量 $X^V \in V_qQ$ 和水平分量 X^H 使得

$$X = X^V + X^H$$

同理对 X_1, X_2 分解为：

$$\begin{cases} X_1 = X_1^V + X_1^H \\ X_2 = X_2^V + X_2^H \end{cases}$$

代入线性组合得：

$$c_1X_1 + c_2X_2 = c_1(X_1^V + X_1^H) + c_2(X_2^V + X_2^H) = (c_1X_1^V + c_2X_2^V) + (c_1X_1^H + c_2X_2^H)$$

由于 V_qQ 是线性子空间，$c_1X_1^V + c_2X_2^V \in V_qQ$，而水平分量的线性组合仍属于水平子空间。根据分解的唯一性可得：

$$(c_1X_1 + c_2X_2)^V = c_1X_1^V + c_2X_2^V$$

定理 19.2

设 Q 是带联络的矢丛, $\eta : I \to M$ 是底流形上的曲线,$x_0 \equiv \eta(0)$, 则 $\forall q \in \hat{\pi}^{-1}[x_0] \subset Q$,$\exists\eta(t)$ 的唯一水平提升曲线 $\hat{\eta}(t)$, 满足 $\hat{\eta}(0) = q$

♡

证明 参考定理11.8的说明.

定理 19.3

主丛 P 上的任一联络在其伴矢丛 Q 上自然诱导一个联络

证明 $\forall q \in Q, \exists p \in P, f \in F$ 给出 $q = p \cdot f$, 每一个 f 一定可以生出一个映射 $\psi_f : P \to Q$ 定义为

$$\psi_f(p) := p \cdot f \in Q.$$

利用这一映射就可以借助 $p \in P$ 的水平子空间 H_p 定义 q 点的水平子空间为

$$H_q := \psi_{f*}[H_p].$$

但是 q 并不唯一对应于一个 p. 我们取轨道的另一个点 (p', f'), 则有 $q = \psi_{f'}(p')$. 我们依旧可以通过 $\psi_{f'}(p')$ 诱导出另一个水平子空间 $H'_q = \psi_{f'*}[H_{p'}]$. 好在 p, p' 是在同一根 fiber 上, 满足关系 $p' = pg$, 我们可以给出 ψ_f, 和 $\psi_{f'}$ 的关系

$$\psi_f(p) = p \cdot f = pg \cdot g^{-1} f = R_g(p) \cdot f' = \psi_{f'}(R_g(p)) = (\psi_{f'} \circ R_g)(p).$$

故

$$H'_q = \psi_{f'*}[H_{pg}] = \psi_{f'*}[R_{g*} H_p] = (\psi_{f'*} \circ R_{g_*})[H_p] = (\psi_{f'} \circ R_g)_*[H_p] = \psi_{f*}[H_p] = H_q.$$

由此可见我们可以在 q 点诱导一个确定的水平子空间, 接下来我们证明这个子空间构成联络, 只需要验证满足定义11.2的三个条件即可.

笔记 可以按照相同的定义把联络的定义从主丛搬到更一般的纤维丛上. 即也可以用到伴丛上.

1. $(T_q Q = V_q \oplus H_q)$: $\forall X \in T_q Q$, 令 $Y \equiv \hat{\pi}_* X$, 以 $\tilde{Y}$ 代表 Y 在 p 的水平提升, 令 $X_2 \equiv \psi_{f*} \tilde{Y} \in H_q$, 令 $X_1 \equiv X - X_2$, 则
$$\hat{\pi}_* X_1 = \hat{\pi}_* X - \hat{\pi}_* X_2 = Y - (\hat{\pi}_* \circ \psi_{f*})(\tilde{Y}) = Y - (\hat{\pi} \circ \psi_f)_* \tilde{Y} = Y - \pi_* \tilde{Y} = Y - Y = 0.$$
分解的唯一性只需要我们验证 Y 是唯一的即可, 假设存在 $Y' \neq Y$, 但是 $Y' = \hat{\pi}_* X$, 因为推前映射是线性的故
$$Y - Y' = \hat{\pi}_* X - \hat{\pi}_* X = \hat{\pi}_*(X - X) = \hat{\pi}_* 0 = 0.$$
与假设矛盾, 故分解的唯一性成立.
2. $(\zeta_{c*}[H_q] = H_{cq})$: 由 $q = p \cdot f$ 得到 $\zeta_c(q) = cq = p \cdot cf = \psi_{cf}(p)$, 又因为 $q = \psi_f(p)$, 所以
$$\psi_{cf}(p) = \zeta_c(q) = \zeta_c(\psi_f(p)) = (\zeta_c \circ \psi_f)(p).$$
即 $\psi_{cf} = \zeta_c \circ \psi_f$, 那么
$$\zeta_{c*}[H_q] = \zeta_{c*}[\psi_{f*}[H_p]] = (\zeta_{c*} \circ \psi_{f*})[H_p] = (\zeta_c \circ \psi_f)_*[H_p] = \psi_{cf*}[H_p] = H_{p \cdot cf} = H_{cq}.$$
3. 由于 H_p 光滑地依赖于 p, ψ_f 是光滑映射由底流形保证, 故 H_q 光滑地依赖于 q.

定理 19.4

设伴矢丛 Q 的联络由主丛 P 的联络诱导而得, $\tilde{\eta}(t)$ 是曲线 $\eta(t)$ 在 P 上的水平提升曲线, 则

$$\hat{\eta}(t) \text{ 是 } \eta(t) \text{ 在 } Q \text{ 上的水平提升曲线} \Leftrightarrow \text{当且仅当 } f \in F, \hat{\eta}(t) = \tilde{\eta}(t) \cdot f$$

证明

1. $(\Leftarrow)$ 首先我们有
$$\hat{\eta}(t) = \tilde{\eta}(t) \cdot f = \psi_f(\tilde{\eta}(t)).$$
则
$$\frac{d}{dt}(\hat{\eta}(t)) = \frac{d}{dt}\psi_f(\tilde{\eta}(t)) = \psi_{f*}\frac{d}{dt}(\tilde{\eta}(t)).$$
设 $Y = \frac{d}{dt}(\tilde{\eta}(t)) \in H_{\tilde{\eta}(t))}$, 则 $\psi_{f*} Y \in H_{\hat{\eta}(t)}$, 即我们验证 $\hat{\eta}(t)$ 是水平曲线, 我们还应该验证它是 $\eta(t)$ 的水平

提升.

$$\hat{\pi}(\hat{\eta}(t)) = \hat{\pi}(\tilde{\eta}(t)\cdot f) = (\hat{\pi}\circ\psi_f)(\tilde{\eta}(t)) = \pi(\tilde{\eta}(t)) = \eta(t).$$

导数第二个括号是因为我们在定义伴丛的时候, 给出 $\hat{\pi}(q) := \pi(p)$, 即

$$\pi(p) = \hat{\pi}(p\cdot f) = (\hat{\pi}\circ\psi_f)(p).$$

2. ($\Rightarrow$) 令 $q \equiv \hat{\eta}(0), p \equiv \tilde{\eta}(0)$, 则存在 $f \in F$ 满足

$$q = p\cdot f.$$

构造曲线 $\mu(t) \equiv \tilde{\eta}(t)\cdot f$, 仿照左方向的证明, 可以给出 $\mu(t)$ 是一条水平曲线, 我们应该验证 $\mu(t)$ 和 $\hat{\eta}(t)$ 重合. 因为

$$\mu(0) = \tilde{\eta}(0)\cdot f = p\cdot f = q = \hat{\eta}(0).$$

由此可见 $\mu(t)$ 和 $\hat{\eta}(t)$ 均是过 q 点的水平提升曲线. 根据定理11.8给出两条曲线重合. 证明结束.

假设有一个流形 M, ∇_a 是 M 上的导数算符, v^a 是开集 $U \subset M$ 上的矢量场, 则 v^a 在任一 $x_0 \in U$ 沿着 $T^a \in T_{x_0}M$ 的协变导数 $T^b\nabla_b v^a$ 有意义. 用数学的语言是, 设 I 是 $\mathbb{R}$ 的开区间, $\eta : I \to U$ 是曲线,$x_0 \equiv (0)$, $T \equiv \left.\frac{d\eta(t)}{dt}\right|_{t=0}$, 则 $T^b\nabla_b v^a(\nabla_T v^a)$ 可以表示为

$$\nabla_T v^a \equiv T^b\nabla_b v^a = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\tilde{v}^a|_{\eta(s)} - v^a|_{x_0}).$$

定理 19.5

设 FM 上的 $\tilde{\omega}$ 在 M 上生出 ∇_a, 在 TM 上生出 $q\mapsto H_q$, 则 $\eta(t)\subset M$ 在 Q 上的水平提升曲线 $\hat{\eta}(t)$ 是 $\eta(t)$ 上的平移矢量场.

证明 令 $x_0 = \eta(0), p = (x_0, e_\mu)$, 我们可以在底流形上平移标架得到标架场 $\overline{e}_\mu$, 满足

$$Y^b\nabla_b(\overline{e}_\mu)^a = 0 \quad Y = \frac{d}{dt}(\eta(t)).$$

所以我们可以给出在主丛上的水平提升曲线是

$$\tilde{\eta}(t) = (\eta(t), \overline{e}_\mu|_{\eta(t)}).$$

而根据定理19.4, 可以给出在 Q 上的水平提升曲线为 $\hat{\eta}(t) = \tilde{\eta}(t)\cdot f$, 即

$$\hat{\eta}(t) = (\eta(t), \overline{e}_\mu|_{\eta(t)})\cdot f^\mu.$$

仿照例12.4我们给出矢量场是

$$\overline{v}^a|_{\eta(t)} = (\overline{e}_\mu)^a|_{\eta(t)}f^\mu.$$

也就是说我们认为 $\hat{\eta}(t)$ 上的一个点就是一个矢量. 接下来我们需要证明这个矢量场是沿着 $\eta(t)$ 平移的.

$$Y^b\nabla_b\overline{v}^a = Y^b\nabla_b(f^\mu(\overline{e}_\mu)^a) = f^\mu Y_b(\overline{e}_\mu)^a = 0.$$

由此我们说明了底流形上的导数算符, 和由 $\tilde{\omega}$ 生成的 Q 上的联络是互恰的. 互恰的形式由定理19.5表述.

定义 19.2 (截面场的协变导数)

设 Q 是带联络的矢丛, $\hat{\sigma} : U \to Q$ 是局域截面. 为定义 $\hat{\sigma}$ 沿点 $X_0 \in U$ 的矢量 $T \in T_{x_0}U$ 的协变导数 $\nabla_T\hat{\sigma}$, 取曲线 $\eta : I \to U$ 使得 $x_0 \equiv \eta(0), T \equiv \left.\frac{d\eta(t)}{dt}\right|_{t=0}$, 把 $\eta(t)$ 过点 $\hat{\sigma}(\eta(s))$ 的水平提升记作 $\hat{\eta}_s(t)$ 则

$$\nabla_T\hat{\sigma} := \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[\hat{\eta}_s(0) - \hat{\eta}_0(0)].$$

笔记 书上 *P1150* 图反应了协变导数的关系, 这里叙述一下理解: 在 Q 上的局域截面, 不一定是水平截面, 也就给区域 U 选定了一个矢量场, 为了定义一个区域的协变导数, 我们需要知道求哪个方向的导数, 这就是 T 所反映的, 当确定方向后, 为了能够使得矢量进行运算, 我们需要将其放进一个矢量空间中, 平移确保了矢量在转换空间时没

有变形, 而根据定理19.5, 我们只需要选择 $\eta(t)$ 过 $\hat{\sigma}(\eta(s))$ 点的水平提升曲线 $\hat{\eta}_s(t)$, 这一曲线反应的是沿着 $\eta(t)$ 方向对 $\eta(s)$ 点的矢量进行平移. 根据我们的要求, 只需要取 $t=0$, 就将矢量平移到 x_0 点, 随后我们可以进行矢量的导数求解.

接下来我们厘清一些概念: 设 V 是 n 维矢量空间, $\{e_\mu\}$ 是 V 选定的基底, 每一个 $v\in V$ 均可以按照基矢进行分解得到, $\{v^\mu\}$. 但是矢量空间本质上是定义在流形上的一点的切空间, 而我们常说 V 是一个流形, 我们接下来说明二者之间的联系. v 在基矢的分解写为

$$v=e_\mu v^\mu.$$

原因是我们可以把 v^μ 看作一个坐标, 这样 V 就可以认为是 $\mathbb{R}^n$, 因此矢量空间就构成了一个平凡的流形, 为了更清楚表述, 我们将 v 改成

$$v=e_\mu x^\mu.$$

我们在流形 V 上选定一点 v_0, 则流形 V 可以看作是 v_0 的切空间, 原因是因为整个 V 的坐标是 x^μ, 我们可以生成 v_0 坐标基矢场 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_{v_0}$, 则有

$$\vec{v}\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_{v_0}x^\mu\in T_{v_0}V.$$

我们把 $\{e_\mu\}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_{v_0}$ 认同, 则我们在矢量空间选定一点 v_0, 则整个矢量空间可以看作是 v_0 的切空间. 这一概念其实我们经常使用. 也就是说 v_0 点的切空间是一个流形. 为此我们也有一个结论, 设在流形 V 上有一个曲线 $\gamma(t)$, 若其坐标的参数式给出, 我们有

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma(t)=\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\gamma(0)}\left.\frac{dx^\mu(t)}{dt}\right|_{t=0}.$$

我们令 $v_0=\gamma(0)$, 我们还可以给出另一个等式

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma(t)\equiv&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[\gamma(t)-\gamma(0)]\\&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[e_\mu x^\mu(t)-e_\mu x^\mu(0)]\\&=e_\mu\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[x^\mu(t)-x^\mu(0)]\\&=e_\mu\left.\frac{dx^\mu(t)}{dt}\right|_{t=0}\end{aligned}$$

我们把 e_μ 和 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 认同, 所以在矢量空间下 $\frac{d}{dt}$ 即可以理解为求切矢, 也可以理解为求导. 也就是说协变导数给出了 v_0 的切空间的一个竖直矢量.

定理 19.6

$$\nabla_T\hat{\sigma}=(\hat{\sigma}_*T)^V.$$

♡

证明 设 $\eta(s):I\to U$ 是含 x_0 的开集 $U\subset M$ 中的曲线,$I\subset\mathbb{R}$, 满足 $\eta(0)=x_0$, $\left.\frac{d\eta(t)}{dt}\right|_{t=0}=T$. 定义映射 $\phi:I\times I(\subset\mathbb{R}^2)\to\hat{\pi}^{-1}[U]$ 为

$$\phi(t,s):=\hat{\eta}_s(t),\quad\forall(t,s)\in I\times I.$$

其中 $\hat{\eta}_s(t)$ 是一条水平提升曲线,t 是水平提升曲线的参数, 当 $s=t$ 时, 此水平提升曲线和 $\hat{\sigma}(\eta(s))$ 相交.

令 $\lambda(t)=(t,t)$ 代表区域 $I\times I$ 的对角线, 则

$$\phi(\lambda(t))=\phi(t,t)=\hat{\eta}_t(t)=\hat{\sigma}(\eta(t)).$$

我们研究的是截面场的导数, 可以写为

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi(\lambda(t))=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\hat{\sigma}(\eta(t))=\hat{\sigma}_*\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\eta(t))=\hat{\sigma}_*T.$$

另一方面

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi(\lambda(t))=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi(t,t)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi(t,0)+\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\phi(0,s)$$
$$=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\hat{\eta}_0(t)+\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\hat{\eta}_s(0)$$

我们逐项来看

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\hat{\eta}_0(t)\in H_{\hat{\sigma}(0)}.$$

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\hat{\eta}_s(0)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[\hat{\eta}_s(0)-\hat{\eta}_0(0)]=\nabla_T\hat{\sigma}\in V_{\hat{\sigma}(0)}.$$

故

$$\nabla_T\hat{\sigma}=\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi(\lambda(t))\right)^V=(\hat{\sigma}_*T)^V.$$

定理 19.7

设 Q 是带联络的矢丛, $\eta: I\to M$ 是曲线,$x_1\equiv\eta(t_1), x_2\equiv\eta(t_2)$, 则矢量空间 $\hat{\pi}^{-1}[x_1]$ 与 $\hat{\pi}^{-1}[x_2]$ 之间存在同构映射 $\beta_{12}:\hat{\pi}^{-1}[x_1]\to\hat{\pi}^{-1}[x_2]$, 定义如下:

$$\forall q\in\hat{\pi}^{-1}[x_1],\ \text{以 } \hat{\eta}(t) \text{ 代表 } \eta(t) \text{ 满足 } \hat{\eta}(t_1)=q \text{ 的水平提升, 则 } \beta_{12}(q):=\hat{\eta}(t_2)$$

♡

证明

1. (线性性): 在 $\hat{\pi}^{-1}[x_1]$ 任取两点 $q,q'\in\hat{\pi}^{-1}[x_1]$ 对于标量给出 $a,b\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$, 构造曲线
$$\gamma(t)\equiv a\hat{\eta}(t)+b\hat{\eta}'(t).$$
其中 $\hat{\eta}(t_1)=q,\quad\hat{\eta}'(t_1)=q'$. 不难验证 $\gamma(t)$ 是过 $aq+aq'$ 的水平提升曲线. 则根据 β_{12} 的定义给出
$$\beta_{12}(aq+aq')=\gamma(t_2)=a\hat{\eta}(t_2)+b\hat{\eta}'(t_2)=a\beta_{12}(q)+b\beta_{12}(q').$$
线性性成立

2. (一一到上): 一一: 若 $\beta_{12}(q)=\beta_{12}(q')$, 则 $\hat{\eta}(t_2)=\hat{\eta}'(t_2)$, 根据定理11.8给出,$\hat{\eta}=\hat{\eta}'$, 则有 $\hat{\eta}(t_1)=\hat{\eta}'(t_1)$, 即
$$q=q'.$$
一一性成立.
到上: 到上要求像空间每点都有逆元, 这要求我们给出逆映射 β_{21}, 我们可以仿照定义给出
$$\forall q\in\hat{\pi}^{-1}[x_2],\ \text{以 } \hat{\eta}'(t) \text{ 代表 } \eta(t) \text{ 满足 } \hat{\eta}'(t_2)=q \text{ 的水平提升, 则 } \beta_{12}^{-1}(q):=\hat{\eta}'(t_1)$$
我们需要验证我们给出的定义是满足逆映射的要求, 首先给定一点 q_2 我们总可以找到对应的像 $\hat{\eta}'(t_1)$, 由于水平提升曲线是唯一的, 我们给出
$$\hat{\eta}_1=\hat{\eta}_2.$$
为了使得叙述更清楚, 我们使得 $\hat{\eta}$ 带上指标 $1,2$, 反应出 x_1,x_2 的水平提升曲线. 两个曲线相等也就意味着
$$\beta_{12}(\hat{\eta}_2(t_1))=\beta_{12}(\hat{\eta}_1(t_1))=\hat{\eta}_1(t_2)=\hat{\eta}_2(t_2).$$
即
$$\beta_{12}\circ\beta_{12}^{-1}=I.$$
同理, 可以验证 $\beta_{12}^{-1}\circ\beta_{12}=I$. 我们给出逆映射, 也就意味这到上性成立.

一一到上的线性矢量空间就是同构的.

设 Y 是 $U\subset M$ 上的矢量场, 可以定义截面 $\hat{\sigma}$ 沿着 Y 的协变导数 $\nabla_Y\hat{\sigma}$, 根据定理19.6,$\nabla_Y\hat{\sigma}$ 也是矢量, 故 $\nabla_Y\hat{\sigma}$ 也是一个截面, 含义是 $(\nabla_Y\hat{\sigma})(x)\equiv\nabla_T\hat{\sigma},\quad x\in U, T\equiv Y|_x$; 更进一步的说, 令 $\hat{\sigma}:U\to Q$ 和 $\hat{\sigma}':U\to Q$ 都是截面,λ 是 U 上的函数, 我们可以给出 $\hat{\sigma}+\hat{\sigma}'$ 和 $\lambda\hat{\sigma}$ 的定义, 使得它们的结果也是 U 上的截面.

- $(\hat\sigma+\hat\sigma')(x):=\hat\sigma(x)+\hat\sigma'(x),\quad \forall x\in U$, 右面的加法是矢量空间的加法.
- $(\lambda\hat\sigma)(x):=\lambda(x)\hat\sigma(x),\quad \forall x\in U$, 右面的数乘是矢量空间的数乘.

定理 19.8

设 $\hat\sigma:U\to Q$ 和 $\hat\sigma':U\to Q$ 都是截面,λ 是 U 上的函数, Y 和 Y' 都是 U 上的矢量场, 则

1. $\nabla_{Y+Y'}\hat\sigma=\nabla_Y\hat\sigma+\nabla_{Y'}\hat\sigma$;
2. $\nabla_Y(\hat\sigma+\hat\sigma')=\nabla_Y\hat\sigma+\nabla_Y\hat\sigma'$;
3. $\nabla_{\lambda Y}\hat\sigma=\lambda\nabla_Y\hat\sigma$;
4. $\nabla_Y(\lambda\hat\sigma)=\lambda\nabla_Y\hat\sigma+Y(\lambda)\hat\sigma$,$Y(\lambda)$ 是 Y 作用在 λ 给出的函数.

♡

证明

1. 根据定理19.6, 我们有

$$\begin{aligned}\nabla_{Y+Y'}\hat\sigma&=(\hat\sigma_*(Y+Y'))^V\\&=(\hat\sigma_*Y)^V+(\hat\sigma_*Y')^V\quad\text{定理19.1}\\&=\nabla_Y\hat\sigma+\nabla_{Y'}\hat\sigma.\end{aligned}$$

2. 对于任一点 $x\in U$, 有 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\eta(t)=T=Y|_x$,$\eta(t)$ 是矢量场 Y 满足 $\eta(0)=x$ 的积分曲线. 我们可以给出

$$\begin{aligned}[\nabla_Y(\hat\sigma+\hat\sigma')](x)=\nabla_T[(\hat\sigma+\hat\sigma')]&=((\hat\sigma+\hat\sigma')_*T)^V\quad\text{定理 19.6}\\&=\left((\hat\sigma+\hat\sigma')_*\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\eta(t)\right)^V\\&=\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\hat\sigma+\hat\sigma')(\eta(t))\right)^V\\&=\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\hat\sigma(\eta(t))+\hat\sigma'(\eta(t)))\right)^V\\&=\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\hat\sigma(\eta(t))+\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\hat\sigma'(\eta(t))\right)^V\\&=(\hat\sigma_*T+\hat\sigma'_*T)^V=(\hat\sigma_*T)^V+(\hat\sigma'_*T)^V\\&=\nabla_T\hat\sigma+\nabla_T\hat\sigma'=\nabla_Y\hat\sigma(x)+\nabla_Y\hat\sigma'(x)\\&=[\nabla_Y\hat\sigma+\nabla_Y\hat\sigma'](x).\end{aligned}$$

故等式成立.

3. 这一条和第一条原理相同

$$\begin{aligned}\nabla_{\lambda Y}\hat\sigma&=(\hat\sigma_*(\lambda Y))^V\\&=(\lambda\hat\sigma_*)^V\quad\text{推前映射线性性}\\&=\lambda(\hat\sigma_*)^V\quad\text{定理19.1}\\&=\lambda\nabla_Y\hat\sigma.\end{aligned}$$

4. 第四条和第二条类似, 由于第二条足够详细, 这里我们列出关键步骤.

$$\begin{aligned}\nabla_Y(\lambda\hat\sigma)(x)&=\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\lambda\hat\sigma)(\eta(t))\right)^V=\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\lambda(\eta(t))\hat\sigma(\eta(t))\right)^V\\&=\left(\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\lambda(\eta(t))\right)\hat\sigma(x)+\lambda(x)\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\hat\sigma(\eta(t))\right)\right)^V\\&=(Y(\lambda))\hat\sigma(x)+\nabla_Y(\hat\sigma)(x).\end{aligned}$$

故

$$\nabla_Y(\lambda\hat\sigma)=(Y(\lambda))\hat\sigma(x)+\nabla_Y(\hat\sigma)(x).$$

$\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\lambda(\eta(t))=Y(\lambda)$, 就是我们对 $\frac{d}{dt}$ 的不同理解给出的结论.

协变导数 $\nabla_T\hat{\sigma}$ 还可以表示为更便于计算的形式. 给定带联络的伴丛, 我们完全可以找到带联络的主丛 $(P,\tilde{\boldsymbol{\omega}})$, 主丛和伴丛上的联络是融洽的. 给定定义域 $U\subset M$, 我们有截面映射 $\hat{\sigma}:U\to Q,\sigma:U\to P$, 则 $\forall x\in U$, 我们可以给出 $\hat{\sigma}(x),\sigma(x)$, 如此可唯一确定一个 $f:U\to F$ 满足

$$\hat{\sigma}(x)=\sigma(x)\cdot f(x),\quad \forall x\in U.$$

仍旧在底流形上选取曲线 $\eta:I\to U,\forall s\in I$, 以 $\tilde{\eta}(s)$ 代表 $\eta(t)$ 过点 $\sigma(s)\equiv\sigma(\eta(s))$ 的水平提升曲线, 我们后面均把 $\eta(s)$ 简记为 s. 则我们给出

$$\hat{\sigma}(s)=\sigma(s)\cdot f(s)\quad \forall s\in I.$$

我们根据如上讨论, 确定了 $f(s)$, 我们构造 $\mu_s(t)$ 为

$$\mu_s(t)\equiv\tilde{\eta}_s(t)\cdot f(s).$$

定理19.4保证 $\mu_s(t)$ 是 $\eta(t)$ 在 Q 的水平提升曲线, 又因为

$$\mu_s(s)=\tilde{\eta}_s(s)\cdot f(s)=\sigma(s)\cdot f(s)=\hat{\sigma}(s).$$

即 $\mu_s(t)$ 过点 $\hat{\sigma}(s)$, 也就是说 $\mu_s(t)$ 是 $\eta(t)$ 过点 $\hat{\sigma}(s)$ 的水平提升曲线. 最后我们给出

$$\hat{\eta}_s(t)=\mu_s(t)=\tilde{\eta}_s(t)\cdot f(s).$$

当 $t=0$ 时, $\hat{\eta}_s(0)=\mu_s(0)=\tilde{\eta}_s(0)\cdot f(s)$, 而 $\tilde{\eta}_s(0)$ 与 $\sigma(0)$ 同 fiber, 也就是我们给出一个映射 $g:I\to G$ 使得

$$\tilde{\eta}_s(0)=\sigma(0)g(s)=\tilde{\eta}_0(0)g(s),\quad \forall s\in I.$$

当 $s=0$ 时, 不难看出 $g(0)=e$; 对于伴丛上的水平提升 $\hat{\eta}_s(0)$, 我们可以给出

$$\hat{\eta}_s(0)=\tilde{\eta}_0(0)g(s)\cdot f(s)=\tilde{\eta}_0(0)\cdot g(s)f(s)=\sigma(0)\cdot g(s)f(s).$$

有了这个式子, 我们就可以计算 $\nabla_T\hat{\sigma}$, 结果是

$$\begin{aligned}
\nabla_T\hat{\sigma}&=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[\hat{\eta}_s(0)-\hat{\eta}_0(0)]\\
&=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[\sigma(0)\cdot g(s)f(s)-\sigma(0)\cdot g(0)f(0)]\\
&=\sigma(0)\cdot\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[g(s)f(s)-g(0)f(0)]\text{可见伴丛最后一部分}\\
&=\sigma(0)\cdot\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}g(s)f(s).
\end{aligned}$$

修改指标 s 为 t 则

$$\begin{aligned}
\nabla_T\hat{\sigma}&=\sigma(0)\cdot\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g(t)f(t)\\
&=\sigma(0)\cdot\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\chi_{g(t)}f(t).
\end{aligned}$$

$\chi_g(t)$ 是伴丛上的左作用.

笔记 *$\sigma(0)$ 是人为选择的截面, 是否会因此导致结果不同, 一方面我们是出自定义19.2, 故不会导致不同, 另一方面, 主丛的一条 fiber, 对应与伴丛上的一个点, 选择截面更具体一点就是选择某个坐标系, 不会导致结果不变. 因为 g 在主丛上的自由性缩成了一个点.*

现在的 Q 是伴矢丛, 全体 χ_g 的集合, 就是某个群作用于矢量空间的映射, 就是 G 的表示, 也就是说

$$\hat{G}\equiv\{\chi_g:F\to F\mid\forall g\in G\}.$$

也就是说 χ_g 可以写为群的表示, 即

$$\chi_g=\rho(g).$$

则我们有

$$\nabla_T\hat{\sigma}=\sigma(0)\cdot\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(g(t))f(t).$$

$\rho(g(t))$ 是 $N \times N$ 方阵, $f(t)$ 是列阵, 我们再次简化上面式子为

$$\begin{aligned}\nabla_T \hat{\sigma} &= \sigma(0) \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(g(t)) f(t) \\ &= \sigma(0) \cdot \left[\rho(g(0)) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(t) + \left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(g(t))\right] f(t)\right] \\ &= \sigma(0) \cdot \left[\hat{e} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(t) + \left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \rho(g(t))\right] f(t)\right].\end{aligned}$$

$g(0) = e$ 是前文推出的.

我们再度选择一个截面 $\sigma' : U \to P$ 满足

$$\sigma'(\eta(t)) := \tilde{\eta}_0(t).$$

两个截面会把主丛上的联络拉成不同的底流形上的联络, 参考11.4.

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \sigma^* \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad \boldsymbol{\omega}' \equiv \sigma'^* \tilde{\boldsymbol{\omega}}.$$

两个联络之间应该满足关系

$$\boldsymbol{\omega}'(Y) = \mathscr{A}d_{g_{UV^{-1}}} \boldsymbol{\omega}(Y) + L_{g_{UV^{-1}}*} g_{UV*}(Y).$$

根据式10.2, 可以确定 g_{UV}, 故

$$\tilde{\eta}_s(0) = \sigma(0) g(s) = \tilde{\eta}_0(0) g(s) \Rightarrow \sigma = \sigma' g(s).$$

由于我们修改过指标, 不难确定,$g_{UV}(\eta(t)) = g(\eta(t))^{-1}$(在不造成混淆的情况下, 省略 η), 而此时的 Y, 就是曲线 $\eta(t)$ 在 t 的切矢量 T. 故我们给出的两个联络应该满足

$$\boldsymbol{\omega}'(T) = \mathscr{A}d_{g(t)} \boldsymbol{\omega}(T) + L_{g(t)*} g_*^{-1}(T).$$

笔记 注意 $g(t)$ 是群元, 而 g^{-1} 是一个底流形到李群的映射.

而

$$\boldsymbol{\omega}'(T) = \sigma'^* \tilde{\boldsymbol{\omega}}'(T) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}'(\sigma'_*(T)) = 0.$$

原因是因为 $\tilde{\eta}_0(t)$ 是水平提升曲线. 由于关于 $'$ 的联络为 0, 我们就得到不带 $'$ 的联络与 $g(t)$ 的关系,

$$\mathscr{A}d_{g(t)} \boldsymbol{\omega}(T) = -L_{g(t)*} g(t)_*^{-1}(T).$$

从 ∇_T 来看, 上面关于 $\mathscr{G}$ 的等式需要在两边加上 ρ_* 映射. 我们分开来看

$$\begin{aligned}\rho_* \left[\mathscr{A}d_{g(t)} \boldsymbol{\omega}(T)\right] &= \rho_* \left.\frac{d}{dm}\right|_{m=0} \exp\left(m \mathscr{A}d_{g(t)} \boldsymbol{\omega}(T)\right) \\ &= \rho_* \left.\frac{d}{dm}\right|_{m=0} I_{g(t)} \exp\left(m \boldsymbol{\omega}(T)\right) \quad \text{定理8.1} \\ &= \left.\frac{d}{dm}\right|_{m=0} \rho\left[I_{g(t)} \exp\left(m \boldsymbol{\omega}(T)\right)\right] \\ &= \left.\frac{d}{dm}\right|_{m=0} \rho(I_{g(t)}) \rho \exp\left(m \boldsymbol{\omega}(T)\right) \\ &= I_{\rho(g(t))*} \rho_* [\boldsymbol{\omega}(T)] \\ &= \mathscr{A}d_{\rho(g(t))} \left[\rho_* [\boldsymbol{\omega}(T)]\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_* [L_{g(t)*} g(t)_*^{-1}(T)] &= \rho_* \circ L_{g(t)*} \circ g_*^{-1} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \eta(t+s) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \rho(L_{g(t)} g^{-1} \eta(s+t)).\end{aligned}$$

为了避免和参数 t 混淆, 这里我们把代表曲线在 t 的切矢量写为 $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\eta(s+t)$ 我们代入计算得到

$$\begin{aligned}\rho_*[L_{g(t)*}g(t)_*^{-1}(T)] &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\rho(g(t))\rho(g(t+s)^{-1})\\ &= \rho(g(t))\,\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\rho(g(t+s)^{-1})\\ &= \rho(g(t))\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t}\rho(g(t)^{-1})\end{aligned}$$

笔记 最后一个括号比较费解, 我们可以从两个角度理解它: 一种是纯代数角度, 采用换元法, 令 $t'=s+t$, 得到 $\frac{d}{dt'}\big|_{t'=t}\rho(g(t')^{-1})$, 由于 t 本身也是 $\eta(t)$ 的参数, 其实质意义 t' 一致. 故可以把 t' 写成 t; 另一种就是考虑符号代表的意义了, $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\rho(g(t+s)^{-1})$ 可以理解为 $\rho_*\circ g_*^{-1}$ 把 $\eta(t)$ 在 t 处的切矢量, 映射到李代数元的表示空间中, 也就是曲线在群表示空间的切矢.

综上讨论, 给出

$$\rho(g(t))\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t}\rho(g(t)^{-1}) = -\mathscr{A}d_{\rho(g(t))}\left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right]] = -\rho(g(t))\left[\rho_*[\boldsymbol{\omega}(T)]\,\rho(g(t))\right)^{-1}.$$

最后一个等号是利用了矩阵群的性质, 可以对定理8.1两边求导, 令 $t=0$ 给出. 我们对上式最最后的整理以复合我们需要使用的形式

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t}\rho(g(t)^{-1}) = -\left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right]\rho(g(t))^{-1}.$$

当 $t=0$ 时

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\rho(g(t)^{-1}) = -\left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right]\rho(g(0))^{-1} = -\left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right]\rho\left(e\right)^{-1} = -\left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right].$$

因为 $\rho(g(t)^{-1})\rho(g(t))=I$, 故

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\rho(g(t)) = -\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\rho(g(t)^{-1}) = \left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right].$$

代入到 $\nabla_T\hat{\sigma}$, 得到

$$\nabla_T\hat{\sigma} = \sigma(0)\cdot\left\{\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}f(t) + \left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right]f(0)\right\}. \tag{19.1}$$

有了以上屠龙宝刀, 下面就让我们开始打 boss 吧.

例 19.1 $P=FM, Q_1=TM, G=GL(n), F_1=\mathbb{R}^n, \chi: G\times F_1\to F_1$,$\chi$ 是伴丛上的左作用, 定义为

$$(\chi_g(f))^\mu := g^\mu{}_\nu f^\nu.$$

因此 $\hat{G}=\{g^\mu{}_\nu|g\in G\}=G$, 即存在 $\rho_1: G\to\hat{G}$,ρ_1 在本例子中是恒等映射. 设 $U\subset M$, 试着求 $\hat{\sigma}: U\to Q$

选择辅助截面 $\sigma: U\to P$ 满足

$$\sigma(x) = (x, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_x), \quad x\in U.$$

其中, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\big|_x$ 某个坐标系的坐标基底. 我们接下来使用式19.1(具体到本例)

$$\nabla_T\hat{\sigma} = \sigma(0)\cdot\left\{\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}f^\mu(t) + \left[\rho_{1*}\boldsymbol{\omega}(T)\right]^\mu{}_\nu f^\mu(0)\right\}.$$

对于 $\boldsymbol{\omega}(T)$, 我们也写成带指标的形式给出

$$\boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_\sigma(x_0)T^\sigma.$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_\sigma(x_0)=\boldsymbol{\omega}(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\big|_{x_0})\in\mathscr{G}\quad T^\sigma=(dx^\sigma)(T)\in\mathbb{R}$, 则

$$\left[\rho_{1*}\boldsymbol{\omega}(T)\right]^\mu{}_\nu = [\boldsymbol{\omega}(T)]^\mu{}_\nu = (\boldsymbol{\omega}_\sigma(x_0)T^\sigma)^\mu{}_\nu = T^\sigma(\boldsymbol{\omega}_\sigma(x_0))^\mu{}_\nu \equiv T^\sigma\boldsymbol{\omega}^\mu{}_{\nu\sigma}.$$

最后一步只是符号的简单记法.

注意 $\hat{\sigma}$ 的集合意义就是底流形上的一个矢量场, 可以记为 v^a, 则 $f^\mu = v^\mu$, 故我们有

$$\begin{aligned}T^b\nabla_b v^a \equiv \nabla_T v^a &= (x_0, \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{x_0}) \cdot \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} v^\mu(t) + T^\sigma \boldsymbol{\omega}^\mu{}_{\nu\sigma} v^\nu(0) \right\} \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{dv^\mu(t)}{dt} + T^\sigma \boldsymbol{\omega}^\mu{}_{\nu\sigma} v^\nu \right) \right]_{x_0}.\end{aligned}$$

第二个等号只是切丛作为矢量的记号的转变.

这和我们以前定义导数算符时给出的克氏符一致, 结合 T_a, v^a 的任意性给出.$\boldsymbol{\omega}^\mu{}_{\nu\sigma} = \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$, 由此可见, 主丛 FM 的联络 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 经过 $\sigma: U \to P$ 在 U 上诱导的联络 $\boldsymbol{\omega}$ 就是我们熟知的克氏符. 我们可以消去曲线 t, 给出任意性

$$\left.\frac{dv^\mu(t)}{dt}\right|_{x_0} = \left.\frac{dv^\mu(x(t))}{dt}\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\sigma}\right|_{x_0} \left.\frac{dx^\sigma(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\sigma}\right|_{x_0} T^\sigma.$$

故

$$T^b\nabla_b v^a = T^\sigma \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\sigma} + \omega^\mu{}_{\nu\sigma} v^\nu \right) \right]_{x_0}.$$

当选择另一个截面时 σ' 时, 上式只写为

$$T^b\nabla_b v^a = T'^\sigma \left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial v'^\mu}{\partial x'^\sigma} + \omega'^\mu{}_{\nu\sigma} v'^\nu \right) \right]_{x_0}.$$

这也是协变的意思.

例 19.2 例19.1讨论矢量场 v 在 x_0 点沿着矢量 T 的协变导数, 本例我们探讨 $U \subset M$ 上的任一标架场 $\{e_a\}$ (不一定是坐标基底场) 的第 μ 基矢场 e_μ 在 x_0 点沿着第 τ 基矢 $e_\tau|_x 0$ 的协变导数, 也就是说作为例19.1的特例, 本例满足

$$v|_U = e_\mu|_U$$

$$T|_{x_0} = e_\tau|_{x_0}$$

也就是说, 我们要求 $(\nabla_{e_\tau} e_\mu)|_{x_0}$, 我们同样使用式19.1, 我们来看 $f(t)$, 如何确定 $f(t)$ 需要给出 $\sigma(\eta(t)), \hat{\sigma}((\eta(t))$, 其中 $\eta(t)$ 满足两点: 过 x_0 点, 在 x_0 处的切矢是 e_τ. 而 σ 是选择的一个辅助截面, $\hat{\sigma}$ 是底流形上面的基矢场, 则

$$\hat{\sigma}(\eta(t)) = \sigma(\eta(t)) \cdot f(t) = (\eta(t), e_\lambda|_{\eta(t)}) \cdot f^\lambda(\eta(t)) = [e_\lambda f^\lambda]_{\eta(t)}.$$

而 $\hat{\sigma}(\eta(t)) = e_\mu|_{\eta(t)}$, 不难给出 $f(\eta(t)) = \delta^\lambda{}_\mu$.

笔记 *注意选择辅助截面 $\sigma(\eta(t))$ 的同时, 我们才确定了 $\hat{\sigma}(\eta(t))$, 这一特点只有本例有, 例19.1有绝对的矢量 v^a, 也就选择了某一截面 $\hat{\sigma}$. 在本例我们天然的使得 v 和标架场对应, 也就是说我们需要给出标架场才能, 确定 v, 由于二者的联系, 把 $f(t)$ 限制到了一个常数. 当然 $\sigma(\eta(t))$ 不一定是水平的, 也就意味着 $\hat{\sigma}(\eta(t))$ 与 $\sigma(\eta(t))$ 一致.*

则 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(t) = 0$, 我们来看 $[\rho_{1*}\boldsymbol{\omega}(T)]^\nu{}_\lambda f^\lambda(0)$

$$[\rho_{1*}\boldsymbol{\omega}(T)]^\nu{}_\lambda f^\lambda(0) = [\boldsymbol{\omega}(e_\tau|_{x_0})]^\nu{}_\lambda \delta^\lambda{}_\mu = \boldsymbol{\omega}(e_\tau|_{x_0})^\nu{}_\mu = \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}(x_0).$$

这里没有遵守指标平衡, 注意分辨实际意义. 故

$$(e_\tau)^b|_{x_0}\nabla_b(e_\mu)^a = (\nabla_{e_\tau} e_\mu)|_{x_0} = (x_0, e_\nu|_{x_0}) \cdot \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}(x_0) = [(e_\nu)^a \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}]_{x_0}.$$

e_ν 实质意义上是作为标架场的基底. 不过这里都是标架场, 容易混淆, 可以对比19.1理解. 我们省去计算给出

$$(e_\tau)^b|_{x_0}\nabla_b(e_\mu)^a = [(e_\nu)^a \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}]_{x_0} \tag{19.2}$$

有了以上讨论, 我们假设 $(FM, \tilde{\omega})$, 其中 $\tilde{\omega} \mapsto \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}$ 有两种途径

1. $\tilde{\omega} \xmapsto{\sigma^*} \boldsymbol{\omega} \xmapsto{\{e_\mu\}} \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}$
2. $\tilde{\omega} \xmapsto{\text{定理11.10}} \nabla_a, e(\tau)^b\nabla_b(e_\mu)^a = (e_\nu)^a\gamma^\nu{}_{\mu\tau}$ (式11.7),$\boldsymbol{\omega}(\nabla)^\nu{}_{\mu\tau} \equiv \gamma^\nu{}_{\mu\tau}$

以上两种途径的等价性, 在前文证明过, 结论是式11.11. 我们列举已知的殊途同归. 但是在这里又有一个全新的途径: $\tilde{\omega}$ 在 TM 上有 $q \to H_q$,H_q 又在 M 上给出了联络 ∇, 定义是19.2, 例19.2(具体是式19.2) 证明了该途径和上面途径 2 殊途同归. 我们给出了三种联络的殊途同归. 途径 1 和途径 3 由定理19.5给出了互恰的形式.

例 19.3 $P=FM, Q_2=T^*M, F_2=\mathbb{R}^n=\mathscr{T}_{\mathbb{R}^n}(0,1)$, 结构群 G 仍然是 $GL(n)$, 左作用 χ_g 定义为

$$(\chi_g f)_\mu := (g^{-1})^\nu{}_\mu f_\nu, \quad \forall f_\nu \in F_2.$$

表示的映射为

$$\rho_2 : G \to \hat{G}_2 = \left\{ (g^{-1})^\nu{}_\mu | g \in GL(n) \right\}.$$

我们利用式19.1给出

$$\nabla_T \hat{\sigma} = \sigma(0) \cdot \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_\mu(t) + [\rho_{2*}(\boldsymbol{\omega}(T))]_\mu{}^\nu f_\nu(t) \right\}.$$

选择辅助截面为 $\sigma : U \to P, \sigma(x) := (x, \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_x)$

为了求 ρ_{2*}, 我们补充定理

定理 19.9

$\rho_1 : G \to \hat{G}$ 是矢量空间的群的表示,$\rho_2 : G \to \hat{G}$ 是对偶矢量空间群的表示, 两者满足

$$\rho_2(g) = [\rho_1(g^{-1})]^T.$$

二者相互作用的前提是被作用的 f_μ 摆成列阵.

♡

证明 我们把左作用写为方阵乘以列阵

$$(\chi_g f)_\mu = (g^{-1})^\nu{}_\mu f_\nu = ((g^{-1})^T)_\mu{}^\nu f_\nu.$$

则

$$(\rho_2 g) \times f = [(g^{-1})^T] \times f = [(\rho_1 g^{-1})]^T \times f.$$

第二个等号利用 ρ_1 是恒等映射.

笔记 上面这个定理, 本质上起源于矢量是逆变的, 而对偶矢量是协变的, 协变和逆变主要看转换矩阵是否与坐标基底变换矩阵是否相同, 相同是协变的, 不相同需要差一个逆. 再结合上对偶矢量是行阵, 这里写成列阵计算, 为了保证结果, 需要添加一个转置. 本质上是一个群元作用在矢量上.

令 $B = \boldsymbol{\omega}(T)$, 则

$$\rho_{2*}B = \rho_{2*} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(sB) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \rho_2(\exp(sB)) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [\rho_1(\exp(-sB))]^T.$$

由于转置和求导并不矛盾, 故

$$\rho_{2*}B = \left[\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \rho_1(\exp(-sB)) \right]^T = -(\rho_{1*}B)^T.$$

则

$$\begin{aligned}
\nabla_T \hat{\sigma} &= \sigma(0) \cdot \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_\mu(t) + [\rho_{2*}(\boldsymbol{\omega}(T))]_\mu{}^\nu f_\nu(t) \right\} \\
&= \sigma(0) \cdot \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_\mu(t) - [\rho_{1*}\boldsymbol{\omega}(T)]^\nu{}_\mu f_\nu(0) \right\} \\
&= (x_0, \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{x_0}) \cdot \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_\mu(t) - T^\sigma \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\sigma} f_\nu(0) \right\} \\
&= \left[(dx^\mu)_a \left(\frac{df_\mu(t)}{dt} - \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\sigma} T^\sigma f_\nu \right) \right]_{x_0} \qquad \text{例12.5.}
\end{aligned}$$

例 19.4 $P=FM, Q_3=(1,1)$ 张量丛,$F_3=\mathscr{T}_{\mathbb{R}^n}(1,1)$, 左作用 χ_g 定义为

$$(\chi_g(f))^\mu{}_\nu := g^\mu{}_\alpha (g^{-1})^\beta{}_\nu f^\alpha{}_\beta.$$

表示群 $\hat{G}_3$ 为

$$\hat{G}_3 = \left\{ g^\mu{}_\alpha (g^{-1})^\beta{}_\nu | g \in GL(n) \right\}.$$

此时 F_3 是矢量空间的一一型张量, 以 ρ_1, ρ_2, ρ_3, 代表 G 到 $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3$ 的映射,$\rho_3(g) \in \hat{G}_3$ 作用于 F_3, 而 F_3 内的元素是 n^2 维矢量空间. 则 f 应该看作 $n^2 \times 1$ 的列阵, 而 $\rho_3(g)$ 可以看作是 $n^2 \times n^2$ 的矩阵. 按照 $\rho_3(g)f$ 应该看作 $n^2 \times n^2$ 的方阵与 $n^2 \times 1$ 的矩阵相乘. μ, ν 代表 $2^2 \times 2^2$ 的指标, 具体而言作为 2×2 分块矩阵的指标,f 以作为分块矩阵并以 $\hat{g}^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\beta} f^{\alpha}{}_{\beta} = g^{\mu}{}_{\alpha}(g^{-1})_{\nu}{}^{\beta} f^{\alpha}{}_{\beta}$ 作为参考.

$$f = \begin{bmatrix} f^1{}_1 \\ f^1{}_2 \\ f^2{}_1 \\ f^2{}_2 \end{bmatrix} \qquad \rho_3(g) \equiv \hat{g} = \begin{bmatrix} \hat{g}^1{}_{11}{}^1 & \hat{g}^1{}_{11}{}^2 & \hat{g}^1{}_{12}{}^1 & \hat{g}^1{}_{12}{}^2 \\ \hat{g}^1{}_{21}{}^1 & \hat{g}^1{}_{21}{}^2 & \hat{g}^1{}_{22}{}^1 & \hat{g}^1{}_{22}{}^2 \\ \hat{g}^2{}_{11}{}^1 & \hat{g}^2{}_{11}{}^2 & \hat{g}^2{}_{12}{}^1 & \hat{g}^2{}_{12}{}^2 \\ \hat{g}^2{}_{21}{}^1 & \hat{g}^2{}_{21}{}^2 & \hat{g}^2{}_{22}{}^1 & \hat{g}^2{}_{22}{}^2 \end{bmatrix}.$$

笔记 上面只是举 $n = 2$ 为例展示了如何协调矩阵乘法和列向量, 本质上还应该是我们定义的乘法. 指标交换位置只会决定矩阵怎么排.

定义 19.3

P 和 Q 代表两个同阶的方阵则

$$(P \otimes Q)^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\beta} = P^{\mu}{}_{\alpha} Q_{\nu}{}^{\beta}.$$

定理 19.10

ρ_1, ρ_2 分别是例*19.1*和例*19.3*给出的表示映射.

$$\rho_3(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g).$$

证明 根据定义19.3验证即可.

故我们有

$$\nabla_T \hat{\sigma} = \sigma(0) \cdot \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f^{\mu}{}_{\nu}(t) + [\rho_{3*}\boldsymbol{\omega}(T)]^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\beta} f^{\alpha}{}_{\beta}(0) \right\}.$$

只考虑 $[\rho_{3*}\boldsymbol{\omega}(T)]$, 令 $B = \boldsymbol{\omega}(T)$ 给出

$$\begin{aligned} \rho_{3*}\boldsymbol{\omega}(T) &= \rho_{3*} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(sB) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \rho_3 \exp(sB) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \rho_1(\exp(sB)) \otimes \rho_2(\exp(sB)) \\ &= \rho_1(e) \otimes \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \rho_2(\exp(sB)) + \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \rho_1(\exp(sB)) \otimes \rho_2(e) \\ &= \rho_1(e) \otimes \rho_{2*}(B) + \rho_{1*}(B) \otimes \rho_2(e). \end{aligned}$$

笔记 但凡是线性的, 本质上都应该满足莱布尼兹律.

则

$$\begin{aligned} [\rho_{3*}B]^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\beta} &= \rho_1(e)^{\mu}{}_{\alpha} \rho_{2*}(B)_{\nu}{}^{\beta} + \rho_{1*}(B)^{\mu}{}_{\alpha} \rho_2(e)_{\nu}{}^{\beta} \\ &= -\delta^{\mu}{}_{\alpha} \rho_{1*}(B)^{\beta}{}_{\nu} + \rho_{1*}(B)^{\mu}{}_{\alpha} \delta_{\nu}{}^{\beta}. \end{aligned}$$

$\rho_2 \to \rho_1$ 的转变参考例19.3, 故

$$\begin{aligned}
\nabla_T \hat{\sigma} &= \sigma(0) \cdot \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f^\mu{}_\nu(t) + [\rho_{3*}\boldsymbol{\omega}(T)]^\mu{}_{\nu\alpha}{}^\beta f^\alpha{}_\beta(0) \right\} \\
&= \sigma(0) \cdot \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f^\mu{}_\nu(t) + (-\delta^\mu{}_\alpha \rho_{1*}(B)^\beta{}_\nu + \rho_{1*}(B)^\mu{}_\alpha \delta_\nu{}^\beta) f^\alpha{}_\beta(0) \right\} \\
&= \sigma(0) \cdot \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f^\mu{}_\nu(t) - \rho_{1*}(B)^\beta{}_\nu f^\mu{}_\beta + \rho_{1*}(B)^\mu{}_\alpha f^\alpha{}_\nu(0) \right\} \\
&= (x_0, \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{x_0}) \cdot \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f^\mu{}_\nu(t) - \rho_{1*}(B)^\beta{}_\nu f^\mu{}_\beta(0) + \rho_{1*}(B)^\mu{}_\alpha f^\alpha{}_\nu(0) \right\}.
\end{aligned}$$

我们修改记法, 不难给出上式是 $(1,1)$ 型张量丛的协变导数.

$$\nabla_T \hat{\sigma} = (\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a (dx^\mu)_b \left[\frac{df^\mu{}_\nu}{dt} + T^\sigma \boldsymbol{\omega}^\mu{}_{\alpha\sigma} f^\alpha{}_\nu - T^\sigma \boldsymbol{\omega}^\beta{}_{\nu\sigma} f^\mu{}_\beta \right]_{x_0}.$$

例 19.5 在平凡主丛 $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$ 上指定联络 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, 令 $F = \mathbb{C}$, 在 F 上定义左作用 $\chi : U(1) \times F \to F$ 为

$$\chi_g(\phi) := e^{-iq\theta}\phi, \quad \forall g = e^{-i\theta} \in U(1), \phi \in F.$$

为了计算截面 $\hat{\sigma} : \mathbb{R}^4 \to Q$, 可以任意选择辅助截面 $\sigma : \mathbb{R}^4 \to P$, 它们之间满足

$$\hat{\sigma}(x) = \sigma(x) \cdot \phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

根据其物理意义,$\hat{\sigma}(x)$ 是物理上一个绝对的场 $\Phi(x)$, $\phi(x)$ 则是在选定 $\sigma(x)$ 后,$\Phi(x)$ 的分量. 在这里, 式19.1写为

$$\nabla_T \Phi = \sigma(0) \cdot \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(t) + [\rho_*(\boldsymbol{\omega}(T))]\phi(0) \right\}.$$

选定洛伦兹惯性坐标系 $\{x^\mu\}$, 则

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(t) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(x^\mu(t)) \\
&= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right|_{x_0} \left. \frac{dx^\mu(t)}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right|_{x_0} T^\mu = T^\mu (\partial_\mu \phi).
\end{aligned}$$

对于 $\rho_*(\boldsymbol{\omega}(T))$ 我们有

$$\begin{aligned}
\rho_*(\boldsymbol{\omega}(T)) &= \rho_*(\omega_\mu(x_0) T^\mu) = T^\mu \rho_*(\omega_\mu(x_0)) \\
&= T^\mu \rho_*(k e_r A^r_\mu(x_0)) \\
&= T^\mu k A^r_\mu(x_0) \rho_*(e_r) \\
&= T^\mu(-ikL_r A^r_\mu(x_0)).
\end{aligned}$$

对于 $U(1)$ 群而言 $k = e$, $L_r A^r_\mu = L_1 A^1_\mu = qA_\mu(x_0)$, 我们代回到 $\nabla_T \Phi$

$$\nabla_T \Phi = \sigma(0) \cdot T^\mu [\partial_\mu \phi - ieqA_\mu \phi]_{x_0} = \sigma(0) \cdot T^\mu (D_\mu \phi)_{x_0}.$$

这就是前面给出的协变导数.

例 19.6 仿照19.5, 我们也可以计算 $\overline{\phi}$ 场的协变导数算符.