第一章 矢丛上的联络和协变导数 (Connections and Covariant Derivatives in a Vector Bundle)

与主丛 P 类似, 矢丛 Q 的任意点 q 的切空间 T_qQ 也天然存在竖直子空间 $V_q \subset T_qQ$, 定义为

$$V_q := \{X \in T_qQ \mid \hat{\pi}_*(X) = 0\}.$$

因为 $\hat{\pi}$ 是伴丛上天生就有的, 但是要衡量水平子空间的话, 我们要引入矢丛 Q 的联络. 矢丛上的每根 fiber $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 是实 (复) 矢量空间, 用实 (复) 数 c 对 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 任一点 q 的数乘结果仍是 $\hat{\pi}^{-1}[x]$ 的点. 定义映射 $\zeta_c : Q \to Q$ 为

$$\zeta_c := cq = p \cdot cf \quad \forall q \in Q.$$

不难得出 ζ_c 是同胚映射.

定义 1.1

矢丛 Q 上的一个**联络**是对每点 $q \in Q$ 指定一个水平子空间 $H_p \subset T_qQ$, 满足

1. $T_qQ = V_q \oplus H_q$
2. $\zeta_{c*}[H_q] = H_{\zeta_c(q)} = H_{cq}, \quad \forall q \in Q, c \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), c \neq 0$
3. H_q 光滑地依赖于 q.

♣

笔记 不指定联络的情况下, 我们是否可以讨论竖直分量, 不是天然存在竖直子空间吗, 答案是否定的, 因为指定了水平子空间, 我们才能唯一指定 X 的竖直分量; 还有一点值得说明的是第二条要求, 和**??**不同, 矢丛上的联络定义的搬运只局限于数乘变换, 也就是说只有数乘的关系给出的联络是相同的.

定理 1.1

设 Q 为矢丛, $q \in Q$, 以 X^V 代表 $X \in T_qQ$ 的竖直分量, 则

$$(c_1X_1 + c_2X_2)^V = c_1X_1^V + c_2X_2^V \quad \forall X_1, X_2 \in T_qQ, c_1, c_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

♡

证明 对任意 $X_1, X_2 \in T_qQ$ 及标量 c_1, c_2，考虑线性组合 $X = c_1X_1 + c_2X_2$ 的分解：由切空间分解定理，存在唯一的竖直分量 $X^V \in V_qQ$ 和水平分量 X^H 使得

$$X = X^V + X^H$$

同理对 X_1, X_2 分解为：

$$\begin{cases} X_1 = X_1^V + X_1^H \\ X_2 = X_2^V + X_2^H \end{cases}$$

代入线性组合得：

$$c_1X_1 + c_2X_2 = c_1(X_1^V + X_1^H) + c_2(X_2^V + X_2^H) = (c_1X_1^V + c_2X_2^V) + (c_1X_1^H + c_2X_2^H)$$

由于 V_qQ 是线性子空间，$c_1X_1^V + c_2X_2^V \in V_qQ$，而水平分量的线性组合仍属于水平子空间。根据分解的唯一性可得：

$$(c_1X_1 + c_2X_2)^V = c_1X_1^V + c_2X_2^V$$

定理 1.2

设 Q 是带联络的矢丛, $\eta : I \to M$ 是底流形上的曲线,$x_0 \equiv \eta(0)$, 则 $\forall q \in \hat{\pi}^{-1}[x_0] \subset Q$,$\exists \eta(t)$ 的唯一水平提升曲线 $\hat{\eta}(t)$, 满足 $\hat{\eta}(0) = q$

♡

证明 参考定理**??**的说明.

定理 1.3

主丛 P 上的任一联络在其伴矢丛 Q 上自然诱导一个联络

证明 $\forall q\in Q,\exists p\in P,f\in F$ 给出 $q=p\cdot f$, 每一个 f 一定可以生出一个映射 $\psi_f:P\to Q$ 定义为

$$\psi_f(p):=p\cdot f\in Q.$$

利用这一映射就可以借助 $p\in P$ 的水平子空间 H_p 定义 q 点的水平子空间为

$$H_q:=\psi_{f*}[H_p].$$

但是 q 并不唯一对应于一个 p. 我们取轨道的另一个点 (p',f'), 则有 $q=\psi_{f'}(p')$. 我们依旧可以通过 $\psi_{f'}(p')$ 诱导出另一个水平子空间 $H'_q=\psi_{f'*}[H_{p'}]$. 好在 p,p' 是在同一根 fiber 上, 满足关系 $p'=pg$, 我们可以给出 ψ_f, 和 $\psi_{f'}$ 的关系

$$\psi_f(p)=p\cdot f=pg\cdot g^{-1}f=R_g(p)\cdot f'=\psi_{f'}(R_g(p))=(\psi_{f'}\circ R_g)(p).$$

故

$$H'_q=\psi_{f'*}[H_{pg}]=\psi_{f'*}[R_{g*}H_p]=(\psi_{f'*}\circ R_{g_*})[H_p]=(\psi_{f'}\circ R_g)_*[H_p]=\psi_{f*}[H_p]=H_q.$$

由此可见我们可以在 q 点诱导一个确定的水平子空间, 接下来我们证明这个子空间构成联络, 只需要验证满足定义**??**的三个条件即可.

笔记 可以按照相同的定义把联络的定义从主丛搬到更一般的纤维丛上. 即也可以用到伴丛上.

1. $(T_qQ=V_q\oplus H_q)$: $\forall X\in T_qQ$, 令 $Y\equiv\hat{\pi}_*X$, 以 $\tilde{Y}$ 代表 Y 在 p 的水平提升, 令 $X_2\equiv\psi_{f*}\tilde{Y}\in H_q$, 令 $X_1\equiv X-X_2$, 则

   $$\hat{\pi}_*X_1=\hat{\pi}_*X-\hat{\pi}_*X_2=Y-(\hat{\pi}_*\circ\psi_{f*})(\tilde{Y})=Y-(\hat{\pi}\circ\psi_f)_*\tilde{Y}=Y-\pi_*\tilde{Y}=Y-Y=0.$$

   分解的唯一性只需要我们验证 Y 是唯一的即可, 假设存在 $Y'\neq Y$, 但是 $Y'=\hat{\pi}_*X$, 因为推前映射是线性的故

   $$Y-Y'=\hat{\pi}_*X-\hat{\pi}_*X=\hat{\pi}_*(X-X)=\hat{\pi}_*0=0.$$

   与假设矛盾, 故分解的唯一性成立.
2. $(\zeta_{c*}[H_q]=H_{cq})$: 由 $q=p\cdot f$ 得到 $\zeta_c(q)=cq=p\cdot cf=\psi_{cf}(p)$, 又因为 $q=\psi_f(p)$, 所以

   $$\psi_{cf}(p)=\zeta_c(q)=\zeta_c(\psi_f(p))=(\zeta_c\circ\psi_f)(p).$$

   即 $\psi_{cf}=\zeta_c\circ\psi_f$, 那么

   $$\zeta_{c*}[H_q]=\zeta_{c*}[\psi_{f*}[H_p]]=(\zeta_{c*}\circ\psi_{f*})[H_p]=(\zeta_c\circ\psi_f)_*[H_p]=\psi_{cf*}[H_p]=H_{p\cdot cf}=H_{cq}.$$
3. 由于 H_p 光滑地依赖于 p, ψ_f 是光滑映射由底流形保证, 故 H_q 光滑地依赖于 q.

定理 1.4

设伴矢丛 Q 的联络由主丛 P 的联络诱导而得, $\tilde{\eta}(t)$ 是曲线 $\eta(t)$ 在 P 上的水平提升曲线, 则

$$\hat{\eta}(t)\text{ 是 }\eta(t)\text{ 在 }Q\text{ 上的水平提升曲线}\Leftrightarrow\text{当且仅当 }f\in F,\ \hat{\eta}(t)=\tilde{\eta}(t)\cdot f$$

证明

1. $(\Leftarrow)$ 首先我们有

   $$\hat{\eta}(t)=\tilde{\eta}(t)\cdot f=\psi_f(\tilde{\eta}(t)).$$

   则

   $$\frac{d}{dt}(\hat{\eta}(t))=\frac{d}{dt}\psi_f(\tilde{\eta}(t))=\psi_{f*}\frac{d}{dt}(\tilde{\eta}(t)).$$

   设 $Y=\frac{d}{dt}(\tilde{\eta}(t))\in H_{\tilde{\eta}(t))}$, 则 $\psi_{f*}Y\in H_{\hat{\eta}(t)}$, 即我们验证 $\hat{\eta}(t)$ 是水平曲线, 我们还应该验证它是 $\eta(t)$ 的水平

提升.

$$\hat{\pi}(\hat{\eta}(t))=\hat{\pi}(\tilde{\eta}(t)\cdot f)=(\hat{\pi}\circ\psi_f)(\tilde{\eta}(t))=\pi(\tilde{\eta}(t))=\eta(t).$$

导数第二个括号是因为我们在定义伴丛的时候, 给出 $\hat{\pi}(q):=\pi(p)$, 即

$$\pi(p)=\hat{\pi}(p\cdot f)=(\hat{\pi}\circ\psi_f)(p).$$

2. $(\Rightarrow)$ 令 $q\equiv\hat{\eta}(0),p\equiv\tilde{\eta}(0)$, 则存在 $f\in F$ 满足

$$q=p\cdot f.$$

构造曲线 $\mu(t)\equiv\tilde{\eta}(t)\cdot f$, 仿照左方向的证明, 可以给出 $\mu(t)$ 是一条水平曲线, 我们应该验证 $\mu(t)$ 和 $\hat{\eta}(t)$ 重合. 因为

$$\mu(0)=\tilde{\eta}(0)\cdot f=p\cdot f=q=\hat{\eta}(0).$$

由此可见 $\mu(t)$ 和 $\hat{\eta}(t)$ 均是过 q 点的水平提升曲线. 根据定理**??**给出两条曲线重合. 证明结束.

假设有一个流形 M, ∇_a 是 M 上的导数算符, v^a 是开集 $U\subset M$ 上的矢量场, 则 v^a 在任一 $x_0\in U$ 沿着 $T^a\in T_{x_0}M$ 的协变导数 $T^b\nabla_b v^a$ 有意义. 用数学的语言是, 设 I 是 $\mathbb{R}$ 的开区间, $\eta:I\to U$ 是曲线,$x_0\equiv(0)$, $T\equiv\left.\frac{d\eta(t)}{dt}\right|_{t=0}$, 则 $T^b\nabla_b v^a(\nabla_T v^a)$ 可以表示为

$$\nabla_T v^a\equiv T^b\nabla_b v^a=\lim_{s\to0}\frac{1}{s}(\tilde{v}^a|_{\eta(s)}-v^a|_{x_0}).$$

定理 1.5

设 FM 上的 $\tilde{\omega}$ 在 M 上生出 ∇_a, 在 TM 上生出 $q\mapsto H_q$, 则 $\eta(t)\subset M$ 在 Q 上的水平提升曲线 $\hat{\eta}(t)$ 是 $\eta(t)$ 上的平移矢量场.

♡

证明 令 $x_0=\eta(0),p=(x_0,e_\mu)$, 我们可以在底流形上平移标架得到标架场 $\overline{e}_\mu$, 满足

$$Y^b\nabla_b(\overline{e}_\mu)^a=0\quad Y=\frac{d}{dt}(\eta(t)).$$

所以我们可以给出在主丛上的水平提升曲线是

$$\tilde{\eta}(t)=(\eta(t),\overline{e}_\mu|_{\eta(t)}).$$

而根据定理1.4, 可以给出在 Q 上的水平提升曲线为 $\hat{\eta}(t)=\tilde{\eta}(t)\cdot f$, 即

$$\hat{\eta}(t)=(\eta(t),\overline{e}_\mu|_{\eta(t)})\cdot f^\mu.$$

仿照例**??**我们给出矢量场是

$$\overline{v}^a|_{\eta(t)}=(\overline{e}_\mu)^a|_{\eta(t)}f^\mu.$$

也就是说我们认为 $\hat{\eta}(t)$ 上的一个点就是一个矢量. 接下来我们需要证明这个矢量场是沿着 $\eta(t)$ 平移的.

$$Y^b\nabla_b\overline{v}^a=Y^b\nabla_b(f^\mu(\overline{e}_\mu)^a)=f^\mu Y_b(\overline{e}_\mu)^a=0.$$

由此我们说明了底流形上的导数算符, 和由 $\tilde{\omega}$ 生成的 Q 上的联络是互恰的. 互恰的形式由定理1.5表述.

定义 1.2 (截面场的协变导数)

设 Q 是带联络的矢丛, $\hat{\sigma}:U\to Q$ 是局域截面. 为定义 $\hat{\sigma}$ 沿点 $X_0\in U$ 的矢量 $T\in T_{x_0}U$ 的协变导数 $\nabla_T\hat{\sigma}$, 取曲线 $\eta:I\to U$ 使得 $x_0\equiv\eta(0),T\equiv\left.\frac{d\eta(t)}{dt}\right|_{t=0}$, 把 $\eta(t)$ 过点 $\hat{\sigma}(\eta(s))$ 的水平提升记作 $\hat{\eta}_s(t)$ 则

$$\nabla_T\hat{\sigma}:=\lim_{s\to0}\frac{1}{s}[\hat{\eta}_s(0)-\hat{\eta}_0(0)].$$

♣

笔记 书上 *P1150* 图反应了协变导数的关系, 这里叙述一下理解: 在 Q 上的局域截面, 不一定是水平截面, 也就给区域 U 选定了一个矢量场, 为了定义一个区域的协变导数, 我们需要知道求哪个方向的导数, 这就是 T 所反映的, 当确定方向后, 为了能够使得矢量进行运算, 我们需要将其放进一个矢量空间中, 平移确保了矢量在转换空间时没

有变形, 而根据定理1.5, 我们只需要选择 $\eta(t)$ 过 $\hat{\sigma}(\eta(s))$ 点的水平提升曲线 $\hat{\eta}_s(t)$, 这一曲线反应的是沿着 $\eta(t)$ 方向对 $\eta(s)$ 点的矢量进行平移. 根据我们的要求, 只需要取 $t=0$, 就将矢量平移到 x_0 点, 随后我们可以进行矢量的导数求解.

接下来我们厘清一些概念: 设 V 是 n 维矢量空间, $\{e_\mu\}$ 是 V 选定的基底, 每一个 $v\in V$ 均可以按照基矢进行分解得到, $\{v^\mu\}$. 但是矢量空间本质上是定义在流形上的一点的切空间, 而我们常说 V 是一个流形, 我们接下来说明二者之间的联系. v 在基矢的分解写为

$$v=e_\mu v^\mu.$$

原因是我们可以把 v^μ 看作一个坐标, 这样 V 就可以认为是 $\mathbb{R}^n$, 因此矢量空间就构成了一个平凡的流形, 为了更清楚表述, 我们将 v 改成

$$v=e_\mu x^\mu.$$

我们在流形 V 上选定一点 v_0, 则流形 V 可以看作是 v_0 的切空间, 原因是因为整个 V 的坐标是 x^μ, 我们可以生成 v_0 坐标基矢场 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_{v_0}$, 则有

$$\vec{v}\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_{v_0}x^\mu\in T_{v_0}V.$$

我们把 $\{e_\mu\}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_{v_0}$ 认同, 则我们在矢量空间选定一点 v_0, 则整个矢量空间可以看作是 v_0 的切空间. 这一概念其实我们经常使用. 也就是说 v_0 点的切空间是一个流形. 为此我们也有一个结论, 设在流形 V 上有一个曲线 $\gamma(t)$, 若其坐标的参数式给出, 我们有

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma(t)=\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{\gamma(0)}\left.\frac{dx^\mu(t)}{dt}\right|_{t=0}.$$

我们令 $v_0=\gamma(0)$, 我们还可以给出另一个等式

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma(t)\equiv&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[\gamma(t)-\gamma(0)]\\&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[e_\mu x^\mu(t)-e_\mu x^\mu(0)]\\&=e_\mu\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[x^\mu(t)-x^\mu(0)]\\&=e_\mu\left.\frac{dx^\mu(t)}{dt}\right|_{t=0}\end{aligned}$$

我们把 e_μ 和 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 认同, 所以在矢量空间下 $\frac{d}{dt}$ 即可以理解为求切矢, 也可以理解为求导. 也就是说协变导数给出了 v_0 的切空间的一个竖直矢量.

定理 1.6

$$\nabla_T\hat{\sigma}=(\hat{\sigma}_*T)^V.$$

证明 设 $\eta(s):I\to U$ 是含 x_0 的开集 $U\subset M$ 中的曲线,$I\subset\mathbb{R}$, 满足 $\eta(0)=x_0$, $\left.\frac{d\eta(t)}{dt}\right|_{t=0}=T$. 定义映射 $\phi:I\times I(\subset\mathbb{R}^2)\to\hat{\pi}^{-1}[U]$ 为

$$\phi(t,s):=\hat{\eta}_s(t),\quad\forall(t,s)\in I\times I.$$

其中 $\hat{\eta}_s(t)$ 是一条水平提升曲线,t 是水平提升曲线的参数, 当 $s=t$ 时, 此水平提升曲线和 $\hat{\sigma}(\eta(s))$ 相交.

令 $\lambda(t)=(t,t)$ 代表区域 $I\times I$ 的对角线, 则

$$\phi(\lambda(t))=\phi(t,t)=\hat{\eta}_t(t)=\hat{\sigma}(\eta(t)).$$

我们研究的是截面场的导数, 可以写为

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi(\lambda(t))=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\hat{\sigma}(\eta(t))=\hat{\sigma}_*\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\eta(t))=\hat{\sigma}_*T.$$

另一方面

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi(\lambda(t))=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi(t,t)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi(t,0)+\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\phi(0,s)$$
$$=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\hat{\eta}_0(t)+\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\hat{\eta}_s(0)$$

我们逐项来看

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\hat{\eta}_0(t)\in H_{\hat{\sigma}(0)}.$$

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\hat{\eta}_s(0)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[\hat{\eta}_s(0)-\hat{\eta}_0(0)]=\nabla_T\hat{\sigma}\in V_{\hat{\sigma}(0)}.$$

故

$$\nabla_T\hat{\sigma}=\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi(\lambda(t))\right)^V=(\hat{\sigma}_*T)^V.$$

定理 1.7

设 Q 是带联络的矢丛, $\eta: I\to M$ 是曲线,$x_1\equiv\eta(t_1), x_2\equiv\eta(t_2)$, 则矢量空间 $\hat{\pi}^{-1}[x_1]$ 与 $\hat{\pi}^{-1}[x_2]$ 之间存在同构映射 $\beta_{12}:\hat{\pi}^{-1}[x_1]\to\hat{\pi}^{-1}[x_2]$, 定义如下:

$$\forall q\in\hat{\pi}^{-1}[x_1], \text{以 } \hat{\eta}(t) \text{ 代表 } \eta(t) \text{ 满足 } \hat{\eta}(t_1)=q \text{ 的水平提升, 则 } \beta_{12}(q):=\hat{\eta}(t_2)$$

♡

证明

1. (线性性): 在 $\hat{\pi}^{-1}[x_1]$ 任取两点 $q,q'\in\hat{\pi}^{-1}[x_1]$ 对于标量给出 $a,b\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$, 构造曲线
$$\gamma(t)\equiv a\hat{\eta}(t)+b\hat{\eta}'(t).$$
其中 $\hat{\eta}(t_1)=q,\quad \hat{\eta}'(t_1)=q'$. 不难验证 $\gamma(t)$ 是过 $aq+aq'$ 的水平提升曲线. 则根据 β_{12} 的定义给出
$$\beta_{12}(aq+aq')=\gamma(t_2)=a\hat{\eta}(t_2)+b\hat{\eta}'(t_2)=a\beta_{12}(q)+b\beta_{12}(q').$$
线性性成立
2. (一一到上): 一一: 若 $\beta_{12}(q)=\beta_{12}(q')$, 则 $\hat{\eta}(t_2)=\hat{\eta}'(t_2)$, 根据定理**??**给出,$\hat{\eta}=\hat{\eta}'$, 则有 $\hat{\eta}(t_1)=\hat{\eta}'(t_1)$, 即
$$q=q'.$$
一一性成立.
到上: 到上要求像空间每点都有逆元, 这要求我们给出逆映射 β_{21}, 我们可以仿照定义给出
$$\forall q\in\hat{\pi}^{-1}[x_2], \text{以 } \hat{\eta}'(t) \text{ 代表 } \eta(t) \text{ 满足 } \hat{\eta}'(t_2)=q \text{ 的水平提升, 则 } \beta_{12}^{-1}(q):=\hat{\eta}'(t_1)$$
我们需要验证我们给出的定义是满足逆映射的要求, 首先给定一点 q_2 我们总可以找到对应的像 $\hat{\eta}'(t_1)$, 由于水平提升曲线是唯一的, 我们给出
$$\hat{\eta}_1=\hat{\eta}_2.$$
为了使得叙述更清楚, 我们使得 $\hat{\eta}$ 带上指标 $1,2$, 反应出 x_1,x_2 的水平提升曲线. 两个曲线相等也就意味着
$$\beta_{12}(\hat{\eta}_2(t_1))=\beta_{12}(\hat{\eta}_1(t_1))=\hat{\eta}_1(t_2)=\hat{\eta}_2(t_2).$$
即
$$\beta_{12}\circ\beta_{12}^{-1}=I.$$
同理, 可以验证 $\beta_{12}^{-1}\circ\beta_{12}=I$. 我们给出逆映射, 也就意味这到上性成立.

一一到上的线性矢量空间就是同构的.

设 Y 是 $U\subset M$ 上的矢量场, 可以定义截面 $\hat{\sigma}$ 沿着 Y 的协变导数 $\nabla_Y\hat{\sigma}$, 根据定理1.6,$\nabla_Y\hat{\sigma}$ 也是矢量, 故 $\nabla_Y\hat{\sigma}$ 也是一个截面, 含义是 $(\nabla_Y\hat{\sigma})(x)\equiv\nabla_T\hat{\sigma},\quad x\in U, T\equiv Y|_x$; 更进一步的说, 令 $\hat{\sigma}:U\to Q$ 和 $\hat{\sigma}':U\to Q$ 都是截面,λ 是 U 上的函数, 我们可以给出 $\hat{\sigma}+\hat{\sigma}'$ 和 $\lambda\hat{\sigma}$ 的定义, 使得它们的结果也是 U 上的截面.

- $(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}')(x) := \hat{\sigma}(x)+\hat{\sigma}'(x), \quad \forall x \in U$, 右面的加法是矢量空间的加法.
- $(\lambda\hat{\sigma})(x) := \lambda(x)\hat{\sigma}(x), \quad \forall x \in U$, 右面的数乘是矢量空间的数乘.

定理 1.8

设 $\hat{\sigma}: U \to Q$ 和 $\hat{\sigma}': U \to Q$ 都是截面,λ 是 U 上的函数, Y 和 Y' 都是 U 上的矢量场, 则

1. $\nabla_{Y+Y'}\hat{\sigma} = \nabla_Y\hat{\sigma} + \nabla_{Y'}\hat{\sigma}$;
2. $\nabla_Y(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}') = \nabla_Y\hat{\sigma} + \nabla_Y\hat{\sigma}'$;
3. $\nabla_{\lambda Y}\hat{\sigma} = \lambda\nabla_Y\hat{\sigma}$;
4. $\nabla_Y(\lambda\hat{\sigma}) = \lambda\nabla_Y\hat{\sigma} + Y(\lambda)\hat{\sigma}$,$Y(\lambda)$ 是 Y 作用在 λ 给出的函数.

♡

证明

1. 根据定理1.6, 我们有
$$\begin{aligned}\nabla_{Y+Y'}\hat{\sigma} &= (\hat{\sigma}_*(Y+Y'))^V \\ &= (\hat{\sigma}_*Y)^V + (\hat{\sigma}_*Y')^V \quad \text{定理1.1} \\ &= \nabla_Y\hat{\sigma} + \nabla_{Y'}\hat{\sigma}.\end{aligned}$$
2. 对于任一点 $x \in U$, 有 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\eta(t) = T = Y|_x$,$\eta(t)$ 是矢量场 Y 满足 $\eta(0)=x$ 的积分曲线. 我们可以给出
$$\begin{aligned}[\nabla_Y(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}')](x) = \nabla_T[(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}')] &= ((\hat{\sigma}+\hat{\sigma}')_*T)^V \quad \text{定理 1.6} \\ &= \left((\hat{\sigma}+\hat{\sigma}')_* \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\eta(t)\right)^V \\ &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}')(\eta(t))\right)^V \\ &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\hat{\sigma}(\eta(t))+\hat{\sigma}'(\eta(t)))\right)^V \\ &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\hat{\sigma}(\eta(t)) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\hat{\sigma}'(\eta(t))\right)^V \\ &= (\hat{\sigma}_*T+\hat{\sigma}'_*T)^V = (\hat{\sigma}_*T)^V + (\hat{\sigma}'_*T)^V \\ &= \nabla_T\hat{\sigma} + \nabla_T\hat{\sigma}' = \nabla_Y\hat{\sigma}(x) + \nabla_Y\hat{\sigma}'(x) \\ &= [\nabla_Y\hat{\sigma}+\nabla_Y\hat{\sigma}'](x).\end{aligned}$$
   故等式成立.
3. 这一条和第一条原理相同
$$\begin{aligned}\nabla_{\lambda Y}\hat{\sigma} &= (\hat{\sigma}_*(\lambda Y))^V \\ &= (\lambda\hat{\sigma}_*)^V \quad \text{推前映射线性性} \\ &= \lambda(\hat{\sigma}_*)^V \quad \text{定理1.1} \\ &= \lambda\nabla_Y\hat{\sigma}.\end{aligned}$$
4. 第四条和第二条类似, 由于第二条足够详细, 这里我们列出关键步骤.
$$\begin{aligned}\nabla_Y(\lambda\hat{\sigma})(x) &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\lambda\hat{\sigma})(\eta(t))\right)^V = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\lambda(\eta(t))\hat{\sigma}(\eta(t))\right)^V \\ &= \left(\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\lambda(\eta(t))\right)\hat{\sigma}(x) + \lambda(x)\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\hat{\sigma}(\eta(t))\right)\right)^V \\ &= (Y(\lambda))\hat{\sigma}(x) + \nabla_Y(\hat{\sigma})(x).\end{aligned}$$
   故
$$\nabla_Y(\lambda\hat{\sigma}) = (Y(\lambda))\hat{\sigma}(x) + \nabla_Y(\hat{\sigma})(x).$$

$\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\lambda(\eta(t))=Y(\lambda)$, 就是我们对 $\frac{d}{dt}$ 的不同理解给出的结论.

协变导数 $\nabla_T\hat{\sigma}$ 还可以表示为更便于计算的形式. 给定带联络的伴丛, 我们完全可以找到带联络的主丛 $(P,\tilde{\boldsymbol{\omega}})$, 主丛和伴丛上的联络是融洽的. 给定定义域 $U\subset M$, 我们有截面映射 $\hat{\sigma}:U\to Q,\sigma:U\to P$, 则 $\forall x\in U$, 我们可以给出 $\hat{\sigma}(x),\sigma(x)$, 如此可唯一确定一个 $f:U\to F$ 满足

$$\hat{\sigma}(x)=\sigma(x)\cdot f(x),\quad \forall x\in U.$$

仍旧在底流形上选取曲线 $\eta:I\to U,\forall s\in I$, 以 $\tilde{\eta}(s)$ 代表 $\eta(t)$ 过点 $\sigma(s)\equiv\sigma(\eta(s))$ 的水平提升曲线, 我们后面均把 $\eta(s)$ 简记为 s. 则我们给出

$$\hat{\sigma}(s)=\sigma(s)\cdot f(s)\quad \forall s\in I.$$

我们根据如上讨论, 确定了 $f(s)$, 我们构造 $\mu_s(t)$ 为

$$\mu_s(t)\equiv\tilde{\eta}_s(t)\cdot f(s).$$

定理1.4保证 $\mu_s(t)$ 是 $\eta(t)$ 在 Q 的水平提升曲线, 又因为

$$\mu_s(s)=\tilde{\eta}_s(s)\cdot f(s)=\sigma(s)\cdot f(s)=\hat{\sigma}(s).$$

即 $\mu_s(t)$ 过点 $\hat{\sigma}(s)$, 也就是说 $\mu_s(t)$ 是 $\eta(t)$ 过点 $\hat{\sigma}(s)$ 的水平提升曲线. 最后我们给出

$$\hat{\eta}_s(t)=\mu_s(t)=\tilde{\eta}_s(t)\cdot f(s).$$

当 $t=0$ 时, $\hat{\eta}_s(0)=\mu_s(0)=\tilde{\eta}_s(0)\cdot f(s)$, 而 $\tilde{\eta}_s(0)$ 与 $\sigma(0)$ 同 fiber, 也就是我们给出一个映射 $g:I\to G$ 使得

$$\tilde{\eta}_s(0)=\sigma(0)g(s)=\tilde{\eta}_0(0)g(s),\quad \forall s\in I.$$

当 $s=0$ 时, 不难看出 $g(0)=e$; 对于伴丛上的水平提升 $\hat{\eta}_s(0)$, 我们可以给出

$$\hat{\eta}_s(0)=\tilde{\eta}_0(0)g(s)\cdot f(s)=\tilde{\eta}_0(0)\cdot g(s)f(s)=\sigma(0)\cdot g(s)f(s).$$

有了这个式子, 我们就可以计算 $\nabla_T\hat{\sigma}$, 结果是

$$\begin{aligned}\nabla_T\hat{\sigma}&=\lim_{s\to0}\frac{1}{s}[\hat{\eta}_s(0)-\hat{\eta}_0(0)]\\&=\lim_{s\to0}\frac{1}{s}[\sigma(0)\cdot g(s)f(s)-\sigma(0)\cdot g(0)f(0)]\\&=\sigma(0)\cdot\lim_{s\to0}\frac{1}{s}[g(s)f(s)-g(0)f(0)]\text{可见伴丛最后一部分}\\&=\sigma(0)\cdot\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}g(s)f(s).\end{aligned}$$

修改指标 s 为 t 则

$$\begin{aligned}\nabla_T\hat{\sigma}&=\sigma(0)\cdot\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}g(t)f(t)\\&=\sigma(0)\cdot\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\chi_{g(t)}f(t).\end{aligned}$$

$\chi_g(t)$ 是伴丛上的左作用.

笔记 *$\sigma(0)$ 是人为选择的截面, 是否会因此导致结果不同, 一方面我们是出自定义1.2, 故不会导致不同, 另一方面, 主丛的一条 fiber, 对应与伴丛上的一个点, 选择截面更具体一点就是选择某个坐标系, 不会导致结果不变. 因为 g 在主丛上的自由性缩成了一个点.*

现在的 Q 是伴矢丛, 全体 χ_g 的集合, 就是某个群作用于矢量空间的映射, 就是 G 的表示, 也就是说

$$\hat{G}\equiv\{\chi_g:F\to F\mid\forall g\in G\}.$$

也就是说 χ_g 可以写为群的表示, 即

$$\chi_g=\rho(g).$$

则我们有

$$\nabla_T\hat{\sigma}=\sigma(0)\cdot\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(g(t))f(t).$$

$\rho(g(t))$ 是 $N\times N$ 方阵, $f(t)$ 是列阵, 我们再次简化上面式子为

$$\begin{aligned}\nabla_T\hat{\sigma} &= \sigma(0)\cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(g(t))f(t)\\ &= \sigma(0)\cdot\left[\rho(g(0))\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f(t)+\left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(g(t))\right]f(t)\right]\\ &= \sigma(0)\cdot\left[\hat{e}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f(t)+\left[\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(g(t))\right]f(t)\right].\end{aligned}$$

$g(0)=e$ 是前文推出的.

我们再度选择一个截面 $\sigma':U\to P$ 满足

$$\sigma'(\eta(t)) := \tilde{\eta}_0(t).$$

两个截面会把主丛上的联络拉成不同的底流形上的联络, 参考**??**.

$$\boldsymbol{\omega}\equiv\sigma^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}\quad \boldsymbol{\omega}'\equiv\sigma'^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}.$$

两个联络之间应该满足关系

$$\boldsymbol{\omega}'(Y)=\mathscr{A}d_{g_{UV^{-1}}}\boldsymbol{\omega}(Y)+L_{g_{UV^{-1}}*}g_{UV*}(Y).$$

根据式**??**, 可以确定 g_{UV}, 故

$$\tilde{\eta}_s(0)=\sigma(0)g(s)=\tilde{\eta}_0(0)g(s)\Rightarrow\sigma=\sigma'g(s).$$

由于我们修改过指标, 不难确定,$g_{UV}(\eta(t)) = g(\eta(t))^{-1}$(在不造成混淆的情况下, 省略 η), 而此时的 Y, 就是曲线 $\eta(t)$ 在 t 的切矢量 T. 故我们给出的两个联络应该满足

$$\boldsymbol{\omega}'(T)=\mathscr{A}d_{g(t)}\boldsymbol{\omega}(T)+L_{g(t)*}g_*^{-1}(T).$$

笔记 注意 $g(t)$ 是群元, 而 g^{-1} 是一个底流形到李群的映射.

而

$$\boldsymbol{\omega}'(T)=\sigma'^*\tilde{\boldsymbol{\omega}}'(T)=\tilde{\boldsymbol{\omega}}'(\sigma'_*(T))=0.$$

原因是因为 $\tilde{\eta}_0(t)$ 是水平提升曲线. 由于关于 $'$ 的联络为 0, 我们就得到不带 $'$ 的联络与 $g(t)$ 的关系,

$$\mathscr{A}d_{g(t)}\boldsymbol{\omega}(T)=-L_{g(t)*}g(t)_*^{-1}(T).$$

从 ∇_T 来看, 上面关于 $\mathscr{G}$ 的等式需要在两边加上 ρ_* 映射. 我们分开来看

$$\begin{aligned}\rho_*\left[\mathscr{A}d_{g(t)}\boldsymbol{\omega}(T)\right] &= \rho_*\left.\frac{d}{dm}\right|_{m=0}\exp\left(m\mathscr{A}d_{g(t)}\boldsymbol{\omega}(T)\right)\\ &= \rho_*\left.\frac{d}{dm}\right|_{m=0}I_{g(t)}\exp\left(m\boldsymbol{\omega}(T)\right)\quad\text{定理}\mathbf{??}\\ &= \left.\frac{d}{dm}\right|_{m=0}\rho\left[I_{g(t)}\exp\left(m\boldsymbol{\omega}(T)\right)\right]\\ &= \left.\frac{d}{dm}\right|_{m=0}\rho(I_{g(t)})\rho\exp\left(m\boldsymbol{\omega}(T)\right)\\ &= I_{\rho(g(t))*}\rho_*[\boldsymbol{\omega}(T)]\\ &= \mathscr{A}d_{\rho(g(t))}\left[\rho_*[\boldsymbol{\omega}(T)]\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_*[L_{g(t)*}g(t)_*^{-1}(T)] &= \rho_*\circ L_{g(t)*}\circ g_*^{-1}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\eta(t+s)\\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\rho(L_{g(t)}g^{-1}\eta(s+t)).\end{aligned}$$

为了避免和参数 t 混淆, 这里我们把代表曲线在 t 的切矢量写为 $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\eta(s+t)$ 我们代入计算得到

$$
\begin{aligned}
\rho_*[L_{g(t)*}g(t)_*^{-1}(T)] &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\rho(g(t))\rho(g(t+s)^{-1}) \\
&= \rho(g(t))\ \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\rho(g(t+s)^{-1}) \\
&= \rho(g(t))\ \frac{d}{dt}\bigg|_{t}\rho(g(t)^{-1})
\end{aligned}
$$

笔记 最后一个括号比较费解, 我们可以从两个角度理解它: 一种是纯代数角度, 采用换元法, 令 $t'=s+t$, 得到 $\frac{d}{dt'}\big|_{t'=t}\rho(g(t')^{-1})$, 由于 t 本身也是 $\eta(t)$ 的参数, 其实质意义 t' 一致. 故可以把 t' 写成 t; 另一种就是考虑符号代表的意义了, $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}\rho(g(t+s)^{-1})$ 可以理解为 $\rho_*\circ g_*^{-1}$ 把 $\eta(t)$ 在 t 处的切矢量, 映射到李代数元的表示空间中, 也就是曲线在群表示空间的切矢.

综上讨论, 给出

$$
\rho(g(t))\ \frac{d}{dt}\bigg|_{t}\rho(g(t)^{-1}) = -\mathscr{A}d_{\rho(g(t))}\left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right]] = -\rho(g(t))\left[\rho_*[\boldsymbol{\omega}(T)]\,\rho(g(t))^{-1}\right.
$$

最后一个等号是利用了矩阵群的性质, 可以对定理**??**两边求导, 令 $t=0$ 给出. 我们对上式最最后的整理以复合我们需要使用的形式

$$
\frac{d}{dt}\bigg|_{t}\rho(g(t)^{-1}) = -\left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right]\rho(g(t))^{-1}.
$$

当 $t=0$ 时

$$
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\rho(g(t)^{-1}) = -\left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right]\rho(g(0))^{-1} = -\left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right]\rho\left(e\right)^{-1} = -\left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right].
$$

因为 $\rho(g(t)^{-1})\rho(g(t))=I$, 故

$$
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\rho(g(t)) = -\ \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\rho(g(t)^{-1}) = \left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right].
$$

代入到 $\nabla_T\hat{\sigma}$, 得到

$$
\nabla_T\hat{\sigma} = \sigma(0)\cdot\left\{\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}f(t) + \left[\rho_*\boldsymbol{\omega}(T)\right]f(0)\right\}. \tag{1.1}
$$

有了以上屠龙宝刀, 下面就让我们开始打 boss 吧.

例 1.1 $P=FM, Q_1=TM, G=GL(n), F_1=\mathbb{R}^n, \chi: G\times F_1\to F_1, \chi$ 是伴丛上的左作用, 定义为

$$
(\chi_g(f))^\mu := g^\mu{}_\nu f^\nu.
$$

因此 $\hat{G}=\{g^\mu{}_\nu|g\in G\}=G$, 即存在 $\rho_1: G\to\hat{G}, \rho_1$ 在本例子中是恒等映射. 设 $U\subset M$, 试着求 $\hat{\sigma}: U\to Q$

选择辅助截面 $\sigma: U\to P$ 满足

$$
\sigma(x) = (x, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_x), \quad x\in U.
$$

其中, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\big|_x$ 某个坐标系的坐标基底. 我们接下来使用式1.1(具体到本例)

$$
\nabla_T\hat{\sigma} = \sigma(0)\cdot\left\{\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}f^\mu(t) + \left[\rho_{1*}\boldsymbol{\omega}(T)\right]^\mu{}_\nu f^\mu(0)\right\}.
$$

对于 $\boldsymbol{\omega}(T)$, 我们也写成带指标的形式给出

$$
\boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_\sigma(x_0)T^\sigma.
$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_\sigma(x_0)=\boldsymbol{\omega}(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\big|_{x_0})\in\mathscr{G}\quad T^\sigma=(dx^\sigma)(T)\in\mathbb{R}$, 则

$$
\left[\rho_{1*}\boldsymbol{\omega}(T)\right]^\mu{}_\nu = \left[\boldsymbol{\omega}(T)\right]^\mu{}_\nu = (\boldsymbol{\omega}_\sigma(x_0)T^\sigma)^\mu{}_\nu = T^\sigma(\boldsymbol{\omega}_\sigma(x_0))^\mu{}_\nu \equiv T^\sigma\boldsymbol{\omega}^\mu{}_{\nu\sigma}.
$$

最后一步只是符号的简单记法.

注意 $\hat{\sigma}$ 的集合意义就是底流形上的一个矢量场, 可以记为 v^a, 则 $f^\mu = v^\mu$, 故我们有

$$T^b\nabla_b v^a \equiv \nabla_T v^a = (x_0, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_{x_0}) \cdot \left\{ \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} v^\mu(t) + T^\sigma \boldsymbol{\omega}^\mu{}_{\nu\sigma} v^\nu(0) \right\}$$
$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{dv^\mu(t)}{dt} + T^\sigma \boldsymbol{\omega}^\mu{}_{\nu\sigma} v^\nu \right) \right]_{x_0}.$$

第二个等号只是切丛作为矢量的记号的转变.

这和我们以前定义导数算符时给出的克氏符一致, 结合 T_a, v^a 的任意性给出.$\boldsymbol{\omega}^\mu{}_{\nu\sigma} = \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$, 由此可见, 主丛 FM 的联络 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 经过 $\sigma : U \to P$ 在 U 上诱导的联络 $\boldsymbol{\omega}$ 就是我们熟知的克氏符. 我们可以消去曲线 t, 给出任意性

$$\frac{dv^\mu(t)}{dt}\bigg|_{x_0} = \frac{dv^\mu(x(t))}{dt}\bigg|_{x_0} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\sigma}\bigg|_{x_0} \frac{dx^\sigma(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\sigma}\bigg|_{x_0} T^\sigma.$$

故

$$T^b\nabla_b v^a = T^\sigma \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\sigma} + \omega^\mu{}_{\nu\sigma} v^\nu \right) \right]_{x_0}.$$

当选择另一个截面时 σ' 时, 上式只写为

$$T^b\nabla_b v^a = T'^\sigma \left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial v'^\mu}{\partial x'^\sigma} + \omega'^\mu{}_{\nu\sigma} v'^\nu \right) \right]_{x_0}.$$

这也是协变的意思.

例 1.2 例1.1讨论矢量场 v 在 x_0 点沿着矢量 T 的协变导数, 本例我们探讨 $U \subset M$ 上的任一标架场 $\{e_a\}$ (不一定是坐标基底场) 的第 μ 基矢场 e_μ 在 x_0 点沿着第 τ 基矢 $e_\tau|_x 0$ 的协变导数, 也就是说作为例1.1的特例, 本例满足

$$v|_U = e_\mu|_U$$
$$T|_{x_0} = e_\tau|_{x_0}$$

也就是说, 我们要求 $(\nabla_{e_\tau} e_\mu)|_{x_0}$, 我们同样使用式1.1, 我们来看 $f(t)$, 如何确定 $f(t)$ 需要给出 $\sigma(\eta(t)), \hat{\sigma}((\eta(t))$, 其中 $\eta(t)$ 满足两点: 过 x_0 点, 在 x_0 处的切矢是 e_τ. 而 σ 是选择的一个辅助截面, $\hat{\sigma}$ 是底流形上面的基矢场, 则

$$\hat{\sigma}(\eta(t)) = \sigma(\eta(t)) \cdot f(t) = (\eta(t), e_\lambda|_{\eta(t)}) \cdot f^\lambda(\eta(t)) = [e_\lambda f^\lambda]_{\eta(t)}.$$

而 $\hat{\sigma}(\eta(t)) = e_\mu|_{\eta(t)}$, 不难给出 $f(\eta(t)) = \delta^\lambda{}_\mu$.

笔记 *注意选择辅助截面 $\sigma(\eta(t))$ 的同时, 我们才确定了 $\hat{\sigma}(\eta(t))$, 这一特点只有本例有, 例1.1有绝对的矢量 v^a, 也就选择了某一截面 $\hat{\sigma}$. 在本例我们天然的使得 v 和标架场对应, 也就是说我们需要给出标架场才能, 确定 v, 由于二者的联系, 把 $f(t)$ 限制到了一个常数. 当然 $\sigma(\eta(t))$ 不一定是水平的, 也就意味着 $\hat{\sigma}(\eta(t))$ 与 $\sigma(\eta(t))$ 一致.*

则 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(t) = 0$, 我们来看 $[\rho_{1*}\boldsymbol{\omega}(T)]^\nu{}_\lambda f^\lambda(0)$

$$[\rho_{1*}\boldsymbol{\omega}(T)]^\nu{}_\lambda f^\lambda(0) = [\boldsymbol{\omega}(e_\tau|_{x_0})]^\nu{}_\lambda \delta^\lambda{}_\mu = \boldsymbol{\omega}(e_\tau|_{x_0})^\nu{}_\mu = \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}(x_0).$$

这里没有遵守指标平衡, 注意分辨实际意义. 故

$$(e_\tau)^b|_{x_0}\nabla_b(e_\mu)^a = (\nabla_{e_\tau} e_\mu)|_{x_0} = (x_0, e_\nu|_{x_0}) \cdot \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}(x_0) = [(e_\nu)^a \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}]_{x_0}.$$

e_ν 实质意义上是作为标架场的基底. 不过这里都是标架场, 容易混淆, 可以对比1.1理解. 我们省去计算给出

$$(e_\tau)^b|_{x_0}\nabla_b(e_\mu)^a = [(e_\nu)^a \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}]_{x_0} \tag{1.2}$$

有了以上讨论, 我们假设 $(FM, \tilde{\omega})$, 其中 $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \mapsto \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}$ 有两种途径

1. $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \xmapsto{\sigma^*} \boldsymbol{\omega} \xmapsto{\{e_\mu\}} \boldsymbol{\omega}^\nu{}_{\mu\tau}$
2. $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \xmapsto{\text{定理??}} \nabla_a, e(\tau)^b\nabla_b(e_\mu)^a = (e_\nu)^a\gamma^\nu{}_{\mu\tau}$ (式**??**),$\boldsymbol{\omega}(\nabla)^\nu{}_{\mu\tau} \equiv \gamma^\nu{}_{\mu\tau}$

以上两种途径的等价性, 在前文证明过, 结论是式**??**. 我们列举已知的殊途同归. 但是在这里又有一个全新的途径: $\tilde{\omega}$ 在 TM 上有 $q \to H_q, H_q$ 又在 M 上给出了联络 ∇, 定义是1.2, 例1.2(具体是式1.2) 证明了该途径和上面途径 2 殊途同归. 我们给出了三种联络的殊途同归. 途径 1 和途径 3 由定理1.5给出了互恰的形式.

例 1.3 $P = FM, Q_2 = T^*M, F_2 = \mathbb{R}^n = \mathscr{T}_{\mathbb{R}^n}(0,1)$, 结构群 G 仍然是 $GL(n)$, 左作用 χ_g 定义为

$$(\chi_g f)_\mu := (g^{-1})^\nu{}_\mu f_\nu, \quad \forall f_\nu \in F_2.$$

表示的映射为

$$\rho_2 : G \to \hat{G}_2 = \left\{ (g^{-1})^{\nu}{}_{\mu} | g \in GL(n) \right\}.$$

我们利用式1.1给出

$$\nabla_T \hat{\sigma} = \sigma(0) \cdot \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_\mu(t) + [\rho_{2*}(\boldsymbol{\omega}(T))]_{\mu}{}^{\nu} f_\nu(t) \right\}.$$

选择辅助截面为 $\sigma : U \to P, \sigma(x) := (x, \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_x)$

为了求 ρ_{2*}, 我们补充定理

定理 1.9

$\rho_1 : G \to \hat{G}$ 是矢量空间的群的表示,$\rho_2 : G \to \hat{G}$ 是对偶矢量空间群的表示, 两者满足

$$\rho_2(g) = [\rho_1(g^{-1})]^T.$$

二者相互作用的前提是被作用的 f_μ 摆成列阵.

♡

证明 我们把左作用写为方阵乘以列阵

$$(\chi_g f)_\mu = (g^{-1})^{\nu}{}_{\mu} f_\nu = ((g^{-1})^T)_{\mu}{}^{\nu} f_\nu.$$

则

$$(\rho_2 g) \times f = [(g^{-1})^T] \times f = [(\rho_1 g^{-1})]^T \times f.$$

第二个等号利用 ρ_1 是恒等映射.

笔记 上面这个定理, 本质上起源于矢量是逆变的, 而对偶矢量是协变的, 协变和逆变主要看转换矩阵是否与坐标基底变换矩阵是否相同, 相同是协变的, 不相同需要差一个逆. 再结合上对偶矢量是行阵, 这里写成列阵计算, 为了保证结果, 需要添加一个转置. 本质上是一个群元作用在矢量上.

令 $B = \boldsymbol{\omega}(T)$, 则

$$\rho_{2*} B = \rho_{2*} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp(sB) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \rho_2(\exp(sB)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} [\rho_1(\exp(-sB))]^T.$$

由于转置和求导并不矛盾, 故

$$\rho_{2*} B = \left[\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \rho_1(\exp(-sB)) \right]^T = -(\rho_{1*} B)^T.$$

则

$$\begin{aligned}
\nabla_T \hat{\sigma} &= \sigma(0) \cdot \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_\mu(t) + [\rho_{2*}(\boldsymbol{\omega}(T))]_{\mu}{}^{\nu} f_\nu(t) \right\} \\
&= \sigma(0) \cdot \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_\mu(t) - [\rho_{1*} \boldsymbol{\omega}(T)]^{\nu}{}_{\mu} f_\nu(0) \right\} \\
&= (x_0, \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{x_0}) \cdot \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_\mu(t) - T^\sigma \boldsymbol{\omega}^{\nu}{}_{\mu\sigma} f_\nu(0) \right\} \\
&= \left[(dx^\mu)_a \left(\frac{d f_\mu(t)}{dt} - \boldsymbol{\omega}^{\nu}{}_{\mu\sigma} T^\sigma f_\nu \right) \right]_{x_0} \quad \text{例??.}
\end{aligned}$$

例 1.4 $P = FM, Q_3 = (1,1)$ 张量丛,$F_3 = \mathscr{T}_{\mathbb{R}^n}(1,1)$, 左作用 χ_g 定义为

$$(\chi_g(f))^{\mu}{}_{\nu} := g^{\mu}{}_{\alpha} (g^{-1})^{\beta}{}_{\nu} f^{\alpha}{}_{\beta}.$$

表示群 $\hat{G}_3$ 为

$$\hat{G}_3 = \left\{ g^{\mu}{}_{\alpha} (g^{-1})^{\beta}{}_{\nu} | g \in GL(n) \right\}.$$

此时 F_3 是矢量空间的一一型张量, 以 ρ_1, ρ_2, ρ_3, 代表 G 到 $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3$ 的映射,$\rho_3(g) \in \hat{G}_3$ 作用于 F_3, 而 F_3 内的元素是 n^2 维矢量空间. 则 f 应该看作 $n^2 \times 1$ 的列阵, 而 $\rho_3(g)$ 可以看作是 $n^2 \times n^2$ 的矩阵. 按照 $\rho_3(g) f$ 应该看

作 $n^2\times n^2$ 的方阵与 $n^2\times 1$ 的矩阵相乘. μ,ν 代表 $2^2\times 2^2$ 的指标, 具体而言作为 2×2 分块矩阵的指标, f 以作为分块矩阵并以 $\hat{g}^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\beta}f^{\alpha}{}_{\beta}=g^{\mu}{}_{\alpha}(g^{-1})_{\nu}{}^{\beta}f^{\alpha}{}_{\beta}$ 作为参考.

$$f=\begin{bmatrix}f^1{}_1\\ f^1{}_2\\ f^2{}_1\\ f^2{}_2\end{bmatrix}\qquad \rho_3(g)\equiv\hat{g}=\begin{bmatrix}\hat{g}^1{}_{11}{}^1 & \hat{g}^1{}_{11}{}^2 & \hat{g}^1{}_{12}{}^1 & \hat{g}^1{}_{12}{}^2\\ \hat{g}^1{}_{21}{}^1 & \hat{g}^1{}_{21}{}^2 & \hat{g}^1{}_{22}{}^1 & \hat{g}^1{}_{22}{}^2\\ \hat{g}^2{}_{11}{}^1 & \hat{g}^2{}_{11}{}^2 & \hat{g}^2{}_{12}{}^1 & \hat{g}^2{}_{12}{}^2\\ \hat{g}^2{}_{21}{}^1 & \hat{g}^2{}_{21}{}^2 & \hat{g}^2{}_{22}{}^1 & \hat{g}^2{}_{22}{}^2\end{bmatrix}.$$

笔记 上面只是举 $n=2$ 为例展示了如何协调矩阵乘法和列向量, 本质上还应该是我们定义的乘法. 指标交换位置只会决定矩阵怎么排.

定义 1.3

P 和 Q 代表两个同阶的方阵则

$$(P\otimes Q)^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\beta}=P^{\mu}{}_{\alpha}Q_{\nu}{}^{\beta}.$$

定理 1.10

ρ_1,ρ_2 分别是例*1.1*和例*1.3*给出的表示映射.

$$\rho_3(g)=\rho_1(g)\otimes\rho_2(g).$$

证明 根据定义1.3验证即可.

故我们有

$$\nabla_T\hat{\sigma}=\sigma(0)\cdot\left\{\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f^{\mu}{}_{\nu}(t)+[\rho_{3*}\boldsymbol{\omega}(T)]^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\beta}f^{\alpha}{}_{\beta}(0)\right\}.$$

只考虑 $[\rho_{3*}\boldsymbol{\omega}(T)]$, 令 $B=\boldsymbol{\omega}(T)$ 给出

$$\begin{aligned}\rho_{3*}\boldsymbol{\omega}(T)&=\rho_{3*}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\exp(sB)\\&=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\rho_3\exp(sB)\\&=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\rho_1(\exp(sB))\otimes\rho_2(\exp(sB))\\&=\rho_1(e)\otimes\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\rho_2(\exp(sB))+\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\rho_1(\exp(sB))\otimes\rho_2(e)\\&=\rho_1(e)\otimes\rho_{2*}(B)+\rho_{1*}(B)\otimes\rho_2(e).\end{aligned}$$

笔记 但凡是线性的, 本质上都应该满足莱布尼兹律.

则

$$\begin{aligned}[\rho_{3*}B]^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\beta}&=\rho_1(e)^{\mu}{}_{\alpha}\rho_{2*}(B)_{\nu}{}^{\beta}+\rho_{1*}(B)^{\mu}{}_{\alpha}\rho_2(e)_{\nu}{}^{\beta}\\&=-\delta^{\mu}{}_{\alpha}\rho_{1*}(B)^{\beta}{}_{\nu}+\rho_{1*}(B)^{\mu}{}_{\alpha}\delta_{\nu}{}^{\beta}.\end{aligned}$$

$\rho_2\to\rho_1$ 的转变参考例1.3, 故

$$\begin{aligned}\nabla_T\hat{\sigma}&=\sigma(0)\cdot\left\{\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f^{\mu}{}_{\nu}(t)+[\rho_{3*}\boldsymbol{\omega}(T)]^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\beta}f^{\alpha}{}_{\beta}(0)\right\}\\&=\sigma(0)\cdot\left\{\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f^{\mu}{}_{\nu}(t)+(-\delta^{\mu}{}_{\alpha}\rho_{1*}(B)^{\beta}{}_{\nu}+\rho_{1*}(B)^{\mu}{}_{\alpha}\delta_{\nu}{}^{\beta})f^{\alpha}{}_{\beta}(0)\right\}\\&=\sigma(0)\cdot\left\{\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f^{\mu}{}_{\nu}(t)-\rho_{1*}(B)^{\beta}{}_{\nu}f^{\mu}{}_{\beta}+\rho_{1*}(B)^{\mu}{}_{\alpha}f^{\alpha}{}_{\nu}(0)\right\}\\&=(x_0,\left.\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right|_{x_0})\cdot\left\{\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f^{\mu}{}_{\nu}(t)-\rho_{1*}(B)^{\beta}{}_{\nu}f^{\mu}{}_{\beta}(0)+\rho_{1*}(B)^{\mu}{}_{\alpha}f^{\alpha}{}_{\nu}(0)\right\}.\end{aligned}$$

我们修改记法, 不难给出上式是 $(1,1)$ 型张量丛的协变导数.

$$\nabla_T\hat{\sigma} = (\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a (dx^\mu)_b \left[\frac{df^\mu{}_\nu}{dt} + T^\sigma \boldsymbol{\omega}^\mu{}_{\alpha\sigma} f^\alpha{}_\nu - T^\sigma \boldsymbol{\omega}^\beta{}_{\nu\sigma} f^\mu{}_\beta\right]_{x_0}.$$

例 1.5 在平凡主丛 $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$ 上指定联络 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, 令 $F = \mathbb{C}$, 在 F 上定义左作用 $\chi : U(1) \times F \to F$ 为

$$\chi_g(\phi) := e^{-iq\theta}\phi, \quad \forall g = e^{-i\theta} \in U(1), \phi \in F.$$

为了计算截面 $\hat{\sigma} : \mathbb{R}^4 \to Q$, 可以任意选择辅助截面 $\sigma : \mathbb{R}^4 \to P$, 它们之间满足

$$\hat{\sigma}(x) = \sigma(x) \cdot \phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

根据其物理意义,$\hat{\sigma}(x)$ 是物理上一个绝对的场 $\Phi(x)$, $\phi(x)$ 则是在选定 $\sigma(x)$ 后,$\Phi(x)$ 的分量. 在这里, 式1.1写为

$$\nabla_T\Phi = \sigma(0) \cdot \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi(t) + [\rho_*(\boldsymbol{\omega}(T))]\phi(0) \right\}.$$

选定洛伦兹惯性坐标系 $\{x^\mu\}$, 则

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi(t) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi(x^\mu(t)) \\
&= \left.\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right|_{x_0} \left.\frac{dx^\mu(t)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right|_{x_0} T^\mu = T^\mu(\partial_\mu\phi).
\end{aligned}$$

对于 $\rho_*(\boldsymbol{\omega}(T))$ 我们有

$$\begin{aligned}
\rho_*(\boldsymbol{\omega}(T)) &= \rho_*(\omega_\mu(x_0)T^\mu) = T^\mu\rho_*(\omega_\mu(x_0)) \\
&= T^\mu\rho_*(ke_r A^r_\mu(x_0)) \\
&= T^\mu k A^r_\mu(x_0)\rho_*(e_r) \\
&= T^\mu(-ikL_r A^r_\mu(x_0)).
\end{aligned}$$

对于 $U(1)$ 群而言 $k = e$, $L_r A^r_\mu = L_1 A^1_\mu = qA_\mu(x_0)$, 我们代回到 $\nabla_T\Phi$

$$\nabla_T\Phi = \sigma(0) \cdot T^\mu[\partial_\mu\phi - ieqA_\mu\phi]_{x_0} = \sigma(0) \cdot T^\mu(D_\mu\phi)_{x_0}.$$

这就是前面给出的协变导数.

例 1.6 仿照1.5, 我们也可以计算 $\overline{\phi}$ 场的协变导数算符.