Tagskiptur lambda-reikningur

Bjarki Baldursson Harksen

1. apríl 2023

HÁSKÓLI ÍSLANDS
RAUNVÍSINDADEILD

1.1 Fallaforritun

Gildingarforritun

Hefðbundin forritun sem notar reiknirit og ástandsbreytingar.

- Auðvelt fyrir tölvur og mennskt fólk að skilja.
- Erfitt að halda utan um ástand — villur spretta upp.

1.1 Fallaforritun

Gildingarforritun

Hefðbundin forritun sem notar reiknirit og ástandsbreytingar.

- Auðvelt fyrir tölvur og mennskt fólk að skilja.
- Erfitt að halda utan um ástand — villur spretta upp.

Fallaforritun

Forritun sem notar föll sem frumeiningu.

- Erfiðara að skilja.
- Lítið sem ekkert ástand — færri villur.

1.1 Fallaforritun

Forrit sem finnur summu allra ferningstala sem eru minni en 1000:

Python

```
>>> sum_of_squares = 0
>>> k = 0
>>> while k*k < 1000:
...     sum_of_squares += k*k
...     k += 1
...
>>> sum_of_squares
10416
```

1.1 Fallaforritun

Forrit sem finnur summu allra ferningstala sem eru minni en 1000:

Python

```
>>> sum_of_squares = 0
>>> k = 0
>>> while k*k < 1000:
...     sum_of_squares += k*k
...     k += 1
...
>>> sum_of_squares
10416
```

Haskell

```
ghci> sumOfSquares = (sum . takeWhile (<1000) . map (^2)) [0..]
ghci> sumOfSquares
10416
```

1.2 Tagskiptingar

Tagskiptingar eru notaðar í forritun til þess að skera úr um mismunandi gerðir af gildum.

Python

```
def twice(n: int) -> int:
    return n * 2
```

Haskell

```
twice :: Int -> Int
twice n = n * 2
```

1.2 Tagskiptingar

Tagskiptingar eru notaðar í forritun til þess að skera úr um mismunandi gerðir af gildum.

Python

```
def twice(n: int) -> int:
    return n * 2
```

```
>>> twice('1')
'11'
```

Haskell

```
twice :: Int -> Int
twice n = n * 2
```

```
ghci> twice '1'

<interactive>:2:7: error:
    • Couldn't match expected type 'Int'
      with actual type 'Char'
```

1.3 Reikningslíkön og lambda-reikningur

Reikningur er torskilgreint fyrirbæri. Í staðinn eru skoðuð *reikningslíkön*:

1.3 Reikningslíkön og lambda-reikningur

Reikningur er torskilgreint fyrirbæri. Í staðinn eru skoðuð *reikningslíkön*:

Turing-vélar

- Grundvöllur tölva og gildingarforritunar.
- Stærðfræðilega frábrugðin gildingarmálum.
- Passa ekki vel við tagskiptingu.

1.3 Reikningslíkön og lambda-reikningur

Reikningur er torskilgreint fyrirbæri. Í staðinn eru skoðuð *reikningslíkön*:

Turing-vélar

- Grundvöllur tölva og gildingarforritunar.
- Stærðfræðilega frábrugðin gildingarmálum.
- Passa ekki vel við tagskiptingu.

Lambda-reikningur

- Grundvöllur fallaforritunar.
- Má hugsa um sem hið einfaldasta mögulega fallamál.
- Auðveld að gefa tagskiptingu.

2.1 Formlegt mál fyrir lambda-reikning

Skilgreining 2.1

Látum Σ vera mengi tákna. *Formlegt mál* $\mathcal{L}$ yfir *stafrófið* Σ er mengi endanlegra runa í Σ. Endanleg runa í Σ nefnist *stæða*, og ef hún er innihaldin í $\mathcal{L}$ nefnist hún einnig *segð* málsins $\mathcal{L}$, eða $\mathcal{L}$*-segð*.

2.1 Formlegt mál fyrir lambda-reikning

Vandi

Hvað þýðir „$x = y$“?

- Táknrunan ('x', '$=$', 'y').
- Staðhæfingin „x er segð, y er segð, og x og y eru sama segðin.“

2.1 Formlegt mál fyrir lambda-reikning

Samkomulag

- Við notum einfaldar gæsalappir utan um tiltekin tákn og feitletraða lágstafi fyrir óþekkt tákn.
  - ‘*a*’ er ávallt fyrsti stafur stafrófsins.
  - Ef **x** er ‘*a*’, þá er **x** líka fyrsti stafur stafrófsins.
- Við notum einfaldar gæsalappir utan um tiltekna stæðu og feitletraða hástafi fyrir óþekkta stæðu.
  - ‘*abc*’ er ávallt stæða fyrstu þriggja stafa stafrófins.
  - Ef **A** er ‘*abc*’, þá er **A** líka stæða fyrstu þriggja stafa stafrófins.
- Við skrifum tákn og stæður hlið við hlið fyrir tilsvarandi samsetta stæðu.
  - Með **x** og **A** eins og að ofan er **Ax***bc* stæðan ‘*abcabc*’.

2.1 Formlegt mál fyrir lambda-reikning

Samkomulag

- Við notum einfaldar gæsalappir utan um tiltekin tákn og feitletraða lágstafi fyrir óþekkt tákn.
  - '*a*' er ávallt fyrsti stafur stafrófsins.
  - Ef **x** er '*a*', þá er **x** líka fyrsti stafur stafrófsins.
- Við notum einfaldar gæsalappir utan um tiltekna stæðu og feitletraða hástafi fyrir óþekkta stæðu.
  - '*abc*' er ávallt stæða fyrstu þriggja stafa stafrófins.
  - Ef **A** er '*abc*', þá er **A** líka stæða fyrstu þriggja stafa stafrófins.
- Við skrifum tákn og stæður hlið við hlið fyrir tilsvarandi samsetta stæðu.
  - Með **x** og **A** eins og að ofan er **Ax***bc* stæðan '*abcabc*'.

Við leyfum okkur að nota '$=$' til að miðla samsemd, þ.e. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ þýðir að **A** og **B** eru sama segðin.

2.1 Formlegt mál fyrir lambda-reikning

Skilgreining 2.3

Formlegt mál λ fyrir *lambda-reikning* er skilgreint yfir stafrófið $\mathcal{V} \cup \{`\lambda', `.', `(', `)'\}$, þar sem $\mathcal{V}$ er teljanlega óendanlegt mengi *breyta*. Segðir málsins eru gefnar með eftirfarandi myndunarreglum.

(i) Stæða af gerðinni **x** þar sem **x** er breyta er λ-segð.

(ii) Ef **M** er λ-segð og **x** er breyta, þá er $(\lambda\mathbf{x}.\,\mathbf{M})$ λ-segð.

(iii) Ef **M** og **N** eru λ-segðir, þá er $(\mathbf{M}\,\mathbf{N})$ λ-segð.

2.2 Einföldun λ-segða

Mismunandi λ-segðir geta „táknað“ sama hlutinn.

2.2 Einföldun λ-segða

Mismunandi λ-segðir geta „táknað“ sama hlutinn.

α-jafngildi

Ef $f(x) = x^2$ og $g(y) = y^2$, þá eru f og g sama fallið.
Við viljum eins að '$(\lambda x.\, x)$' og '$(\lambda y.\, y)$' séu jafngildar λ-segðir.

2.2 Einföldun λ-segða

Mismunandi λ-segðir geta „táknað“ sama hlutinn.

α-jafngildi

Ef $f(x) = x^2$ og $g(y) = y^2$, þá eru f og g sama fallið.
Við viljum eins að '$(\lambda x.\, x)$' og '$(\lambda y.\, y)$' séu jafngildar λ-segðir.

β-einföldun

Ef $f(x) = 2x^2 + 3$, þá er $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 = 5$.
Við viljum eins að '$((\lambda x.\, x)\, y)$' einfaldist í 'y'.

2.2 Reikningur λ-segða

Skilgreining 2.6

Látum $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ vera λ-segðir. Ef til eru stæður $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ þannig að rita megi $\mathbf{M} = \mathbf{ANB}$, þá nefnist $\mathbf{N}$ *hlutsegð* í $\mathbf{M}$.

2.2 Reikningur λ-segða

Skilgreining 2.6

Látum $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ vera λ-segðir. Ef til eru stæður $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ þannig að rita megi $\mathbf{M} = \mathbf{ANB}$, þá nefnist $\mathbf{N}$ *hlutsegð* í $\mathbf{M}$.
Ef breyta $\mathbf{x}$ kemur fyrir í hlutsegð í $\mathbf{M}$ af gerðinni $(\lambda \mathbf{x}. \mathbf{P})$, þá segjum við að breytan $\mathbf{x}$ sé *bundin* í $\mathbf{M}$ á þeim stað. Ef $\mathbf{x}$ kemur einhvers staðar fyrir á stað sem er ekki hluti af slíkri hlutyrðingu í $\mathbf{M}$, þá segjum við að $\mathbf{x}$ sé *frjáls* í $\mathbf{M}$ á þeim stað.

2.2 Reikningur λ-segða

Skilgreining 2.6

Látum $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ vera λ-segðir. Ef til eru stæður $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ þannig að rita megi $\mathbf{M} = \mathbf{ANB}$, þá nefnist $\mathbf{N}$ *hlutsegð* í $\mathbf{M}$.
Ef breyta $\mathbf{x}$ kemur fyrir í hlutsegð í $\mathbf{M}$ af gerðinni $(\lambda\mathbf{x}.\,\mathbf{P})$, þá segjum við að breytan $\mathbf{x}$ sé *bundin* í $\mathbf{M}$ á þeim stað. Ef $\mathbf{x}$ kemur einhvers staðar fyrir á stað sem er ekki hluti af slíkri hlutyrðingu í $\mathbf{M}$, þá segjum við að $\mathbf{x}$ sé *frjáls* í $\mathbf{M}$ á þeim stað.
Látum nú $\mathbf{Q}$ vera λ-segð og $\mathbf{x}$ vera breytu. Við segjum að $\mathbf{Q}$ sé *innsetjanleg* fyrir $\mathbf{x}$ í $\mathbf{M}$ ef fyrir hverja frjálsa breytu $\mathbf{y}$ í $\mathbf{Q}$ innihaldi $\mathbf{M}$ enga hlutsegð af gerðinni $(\lambda\mathbf{y}.\,\mathbf{P})$, þannig að $\mathbf{x}$ komi fyrir frjáls í $\mathbf{P}$.

2.2 Einföldun λ-segða

Skilgreining 2.8

Látum $\mathbf{M}, \mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{N}_m$ vera λ-segðir og $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ vera ólíkar breytur þannig að $\mathbf{N}_i$ sé innsetjanleg fyrir $\mathbf{x}_i$ í $\mathbf{M}$ fyrir öll $i = 1, \ldots, m$. Við táknum með $\mathbf{M}_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m}[\mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{N}_m]$ þá λ-segð sem fæst frá $\mathbf{M}$ með því að setja $\mathbf{N}_i$ í stað $\mathbf{x}_i$ alls staðar sem $\mathbf{x}_i$ kemur fyrir frjáls í $\mathbf{M}$, samtímis fyrir $i = 1, \ldots, m$.

2.2 Einföldun λ-segða

Skilgreining 2.10

Látum $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}.\, \mathbf{M})\mathbf{B}$ vera λ-segð og gerum ráð fyrir að breyta $\mathbf{y}$ sé innsetjanleg fyrir $\mathbf{x}$ í $\mathbf{M}$. Við ritum þá

$$\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}.\, \mathbf{M})\mathbf{B} \twoheadrightarrow_\alpha \mathbf{A}(\lambda \mathbf{y}.\, \mathbf{M}_\mathbf{x}[\mathbf{y}])\mathbf{B}$$

og skilgreinum þannig vensl $\twoheadrightarrow_\alpha$ yfir λ. Við segjum að $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{y}.\, \mathbf{M}_\mathbf{x}[\mathbf{y}])\mathbf{B}$ fáist með α-*umskipti* frá $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}.\, \mathbf{M})\mathbf{B}$.

2.2 Einföldun λ-segða

Skilgreining 2.10

Látum $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}.\, \mathbf{M})\mathbf{B}$ vera λ-segð og gerum ráð fyrir að breyta $\mathbf{y}$ sé innsetjanleg fyrir $\mathbf{x}$ í $\mathbf{M}$. Við ritum þá

$$\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}.\, \mathbf{M})\mathbf{B} \twoheadrightarrow_\alpha \mathbf{A}(\lambda \mathbf{y}.\, \mathbf{M}_\mathbf{x}[\mathbf{y}])\mathbf{B}$$

og skilgreinum þannig vensl $\twoheadrightarrow_\alpha$ yfir λ. Við segjum að $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{y}.\, \mathbf{M}_\mathbf{x}[\mathbf{y}])\mathbf{B}$ fáist með α-*umskipti* frá $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}.\, \mathbf{M})\mathbf{B}$.
Við skilgreinum auk þess vensl $\sim_\alpha$ yfir λ þannig að $\mathbf{P} \sim_\alpha \mathbf{Q}$ ef og aðeins ef til er runa $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_n$ af λ-segðum, þannig að

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_0 \twoheadrightarrow_\alpha \cdots \twoheadrightarrow_\alpha \mathbf{A}_n = \mathbf{Q}.$$

Við segjum þá að $\mathbf{P}$ og $\mathbf{Q}$ séu α-*jafngildar*. Við köllum rununa $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_n$ *útleiðslu* venslanna.

2.2 Einföldun λ-segða

Skilgreining 2.13

Látum $\mathbf{A}((\lambda\mathbf{x}.\,\mathbf{M})\,\mathbf{N})\mathbf{B}$ vera λ-segð og gerum ráð fyrir að $\mathbf{N}$ sé innsetjanleg fyrir $\mathbf{x}$ í $\mathbf{M}$. Við ritum þá

$$\mathbf{A}((\lambda\mathbf{x}.\,\mathbf{M})\,\mathbf{N})\mathbf{B} \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{A}\,\mathbf{M}_\mathbf{x}[\mathbf{N}]\,\mathbf{B}$$

og skilgreinum þannig vensl $\twoheadrightarrow_\beta$ yfir λ. Við segjum að $\mathbf{A}\,\mathbf{M}_\mathbf{x}[\mathbf{N}]\,\mathbf{B}$ fáist með β-*einföldun* frá $\mathbf{A}((\lambda\mathbf{x}.\,\mathbf{M})\,\mathbf{N})\mathbf{B}$.

Skilgreining 2.15

Setjum

$$\twoheadrightarrow_{\alpha,\beta} \coloneqq \twoheadrightarrow_{\alpha} \cup \twoheadrightarrow_{\beta}$$

$$\text{og} \quad \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow_{\alpha,\beta} \coloneqq \twoheadrightarrow_{\alpha} \cup \twoheadrightarrow_{\beta} \cup \twoheadleftarrow_{\beta},$$

Við skilgreinum vensl $\twoheadrightarrow$ og $\sim_\beta$ yfir λ þannig að

$$\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{Q} \text{ ef } \mathbf{P} = \mathbf{A}_0 \twoheadrightarrow_{\alpha,\beta} \cdots \twoheadrightarrow_{\alpha,\beta} \mathbf{A}_n = \mathbf{Q}$$

$$\text{og } \mathbf{P} \sim_\beta \mathbf{Q} \text{ ef } \mathbf{P} = \mathbf{A}_0 \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow_{\alpha,\beta} \cdots \twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow_{\alpha,\beta} \mathbf{A}_n = \mathbf{Q}.$$

Við köllum þá rununa $\mathbf{A}_0, \ldots, \mathbf{A}_n$ *útleiðslu* tilsvarandi vensla. Ef $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{Q}$ segjum við að $\mathbf{P}$ *einfaldist* í $\mathbf{Q}$, og ef $\mathbf{P} \sim_\beta \mathbf{Q}$ segjum við að $\mathbf{P}$ og $\mathbf{Q}$ séu β-*jafngild*.

2.2 Einföldun λ-segða

Setning 2.12

Venslin $\sim_\alpha$ eru jafngildisvensl.

Setning 2.17

Venslin $\sim_\beta$ eru jafngildisvensl.

2.3 Church-Rosser-setningin

Skilgreining 2.18

Við segjum að λ-segð $\mathbf{P}$ sé á β-*staðalformi* ef ekki eru til λ-segðir $\mathbf{P}', \mathbf{Q}$ þannig að $\mathbf{P} \sim_\alpha \mathbf{P}' \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{Q}$.
Ef $\mathbf{P}$ er á β-staðalformi, og $\mathbf{M} \sim_\beta \mathbf{P}$, þá er $\mathbf{M}$ sögð hafa $\mathbf{P}$ sem β-staðalform.

2.3 Church-Rosser-setningin

Skilgreining 2.18

Við segjum að λ-segð $\mathbf{P}$ sé á β-*staðalformi* ef ekki eru til λ-segðir $\mathbf{P}', \mathbf{Q}$ þannig að $\mathbf{P} \sim_\alpha \mathbf{P}' \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{Q}$.
Ef $\mathbf{P}$ er á β-staðalformi, og $\mathbf{M} \sim_\beta \mathbf{P}$, þá er $\mathbf{M}$ sögð hafa $\mathbf{P}$ sem β-staðalform.

Segð $\mathbf{P}$ er á β-staðalformi ef og aðeins ef $\mathbf{P}$ inniheldur enga hlutsegð af gerðinni $((\lambda \mathbf{x}.\, \mathbf{M})\, \mathbf{N})$.

2.3 Church-Rosser-setningin

Setning 2.21 (*Church-Rosser*)

Ef $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{M}$ og $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{N}$, þá er til λ-segð $\mathbf{Q}$ þannig að $\mathbf{M} \twoheadrightarrow \mathbf{Q}$ og $\mathbf{N} \twoheadrightarrow \mathbf{Q}$.

2.3 Church-Rosser-setningin

Setning 2.21 (*Church-Rosser*)

Ef $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{M}$ og $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{N}$, þá er til λ-segð $\mathbf{Q}$ þannig að $\mathbf{M} \twoheadrightarrow \mathbf{Q}$ og $\mathbf{N} \twoheadrightarrow \mathbf{Q}$.

Fylgisetning 2.22

Ef $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{M}$ og $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{N}$ og $\mathbf{M}$ og $\mathbf{N}$ eru á β-staðalformi, þá gildir $\mathbf{N} \sim_\alpha \mathbf{M}$.

2.3 Church-Rosser-setningin

Setning 2.21 (*Church-Rosser*)

Ef $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{M}$ og $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{N}$, þá er til λ-segð $\mathbf{Q}$ þannig að $\mathbf{M} \twoheadrightarrow \mathbf{Q}$ og $\mathbf{N} \twoheadrightarrow \mathbf{Q}$.

Fylgisetning 2.22

Ef $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{M}$ og $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{N}$ og $\mathbf{M}$ og $\mathbf{N}$ eru á β-staðalformi, þá gildir $\mathbf{N} \sim_\alpha \mathbf{M}$.

Fylgisetning 2.23

Ef $\mathbf{M} \sim_\beta \mathbf{N}$, þá er til λ-segð $\mathbf{Q}$ þannig að $\mathbf{M} \twoheadrightarrow \mathbf{Q}$ og $\mathbf{N} \twoheadrightarrow \mathbf{Q}$.

2.4 Fastapunktsfléttir

- Sérhver λ-segð hefur fastapunkt.
- Sérhverja jöfnu að λ-segðum má leysa.
- Endurkvæm föll.

2.4 Fastapunktsfléttir

- Sérhver λ-segð hefur fastapunkt.
- Sérhverja jöfnu að λ-segðum má leysa.
- Endurkvæm föll.

2.5 Hlutrakin föll

Á fjórða áratugnum komu fram þrjú mismunandi reikningslíkön.

- Turing-vélar (Alan Turing, 1936)
- Lambda-reikningur (Alonzo Church, 1936)
- Hlutrakin föll (Kurt Gödel, 1933)

Öll þrjú líkön eru jafngild.

3.1 Einföld tagskipting

Einföld tagskipting

- Einfaldasta tagskipting lambda-reiknings sem vert er að skoða.
- Inniheldur einungis grunntög og tög fyrir föll.
- Tvær útgáfur eru ráðandi:
  - *Church-útgáfa*: tög eru tilgreind hjá bindandi breytum í λ-segðum.
  - *Curry-útgáfa*: tög koma ekki fyrir í λ-segðum.

3.1 Einföld tagskipting

Skilgreining 3.1

Formlegt mál $\mathcal{S}$ fyrir *einföld tög* er skilgreint yfir stafrófið $\mathcal{V} \cup \{`\rightarrow', `(', `)'\}$, þar sem $\mathcal{V}$ er teljanlega óendanlegt mengi *tagbreyta*. Við köllum segðir þess (*einföld*) *tög*, og eru þær gefnar með eftirfarandi myndunarreglum.

(i) Stæða af gerðinni **a** þar sem **a** er tagbreyta er einfalt tag.

(ii) Ef σ og τ eru einföld tög, þá er $(\sigma \rightarrow \tau)$ einfalt tag

3.1 Einföld tagskipting

Skilgreining 3.1

Formlegt mál $\mathcal{S}$ fyrir *einföld tög* er skilgreint yfir stafrófið $\mathcal{V} \cup \{`\to', `(', `)'\}$, þar sem $\mathcal{V}$ er teljanlega óendanlegt mengi *tagbreyta*. Við köllum segðir þess (*einföld*) *tög*, og eru þær gefnar með eftirfarandi myndunarreglum.

(i) Stæða af gerðinni **a** þar sem **a** er tagbreyta er einfalt tag.

(ii) Ef σ og τ eru einföld tög, þá er $(\sigma \to \tau)$ einfalt tag

Skammstöfun

Við ritum $(\alpha \to \beta \to \gamma)$ í stað $(\alpha \to (\beta \to \gamma))$.

3.1 Einföld tagskipting

Skilgreining 3.4

Látum $\mathbf{P}$ vera λ-segð og τ vera einfalt tag. Segð af gerðinni $\mathbf{P}:\tau$ er kölluð *úthlutun*. Sagt er að úthlutunin *gefi* $\mathbf{P}$ tagið τ.

3.1 Einföld tagskipting

Skilgreining 3.4

Látum **P** vera λ-segð og τ vera einfalt tag. Segð af gerðinni $\mathbf{P}:\tau$ er kölluð *úthlutun*. Sagt er að úthlutunin *gefi* **P** tagið τ.
Látum Γ vera mengi úthlutana sem gefa aðeins breytum tög, og gerum ráð fyrir að ef $\mathbf{x}:\sigma, \mathbf{x}:\tau \in \Gamma$, þá sé $\sigma = \tau$. Við köllum þá Γ *samhengi*.

3.1 Einföld tagskipting

Skilgreining 3.4

Látum $\mathbf{P}$ vera λ-segð og τ vera einfalt tag. Segð af gerðinni $\mathbf{P}:\tau$ er kölluð *úthlutun*. Sagt er að úthlutunin *gefi* $\mathbf{P}$ tagið τ.
Látum Γ vera mengi úthlutana sem gefa aðeins breytum tög, og gerum ráð fyrir að ef $\mathbf{x}:\sigma, \mathbf{x}:\tau \in \Gamma$, þá sé $\sigma = \tau$. Við köllum þá Γ *samhengi*.
Sagt er að Γ *leiði af sér úthlutunina A* og ritað $\Gamma \vdash A$ ef þetta má leiða út með því að beita eftirfarandi útleiðslureglum endanlega oft:

(i) Ef $\mathbf{x}:\sigma \in \Gamma$, þá $\Gamma \vdash \mathbf{x}:\sigma$.

(ii) Ef $\Gamma, \mathbf{x}:\sigma \vdash \mathbf{M}:\tau$, þá $\Gamma \vdash (\lambda \mathbf{x}.\, \mathbf{M}):(\sigma \to \tau)$.

(iii) Ef $\Gamma \vdash \mathbf{M}:(\sigma \to \tau)$ og $\Gamma \vdash \mathbf{N}:\sigma$, þá $\Gamma \vdash (\mathbf{M}\,\mathbf{N}):\tau$.

3.1 Einföld tagskipting

Skilgreining 3.7

Látum $\mathbf{P}$ vera λ-segð og látum $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ vera upptalningu frjálsa breyta sem koma fyrir í $\mathbf{P}$. Sagt er að $\mathbf{P}$ sé *taganleg* ef til eru tög $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau$ þannig að

$$\mathsf{x}_1 : \sigma_1, \ldots, \mathsf{x}_n : \sigma_n \vdash \mathbf{P} : \tau.$$

3.2 Stöðlunarsetningin

Skilgreining 3.8

Sagt er að λ-segð **P** sé *veikt staðlandi* ef hún á sér β-staðalform.
Sagt er að **P** sé *strangt staðlandi* ef sérhver runa $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ sem uppfyllir $\mathbf{P} \twoheadrightarrow \mathbf{P}_1 \twoheadrightarrow \mathbf{P}_2 \twoheadrightarrow \cdots$ inniheldur segð á β-staðalformi.

3.2 Stöðlunarsetningin

Setning 3.15 (*Stöðlunarsetningin*)

Sérhver taganleg λ-segð er strangt staðlandi.

3.3 Höfuðtagsreikniritið

Höfuðtagsreikniritið

Nota má höfuðtagsreikniritið til þess að finna „almennasta“ tag sérhverrar taganlegrar λ-segðar, eða ákvarða að hún sé ekki taganleg.

3.3 Höfuðtagsreikniritið

Höfuðtagsreikniritið

Nota má höfuðtagsreikniritið til þess að finna „almennasta" tag sérhverrar taganlegrar λ-segðar, eða ákvarða að hún sé ekki taganleg.
Útfærslu þess í Haskell má finna á GitHub:
`https://github.com/mrbjarksen/principal-type`.

3.3 Höfuðtagsreikniritið

Skilgreining 3.16

Látum $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vera ólíkar tagbreytur og $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ vera einföld tög. Við táknum með $\tau_{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ það einfalt tag sem fæst með því að setja tagið σ_i inn fyrir tagbreytuna $\mathbf{a}_i$ fyrir $i = 1, \ldots, n$ samtímis.

3.3 Höfuðtagsreikniritið

Skilgreining 3.16

Látum $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vera ólíkar tagbreytur og $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ vera einföld tög. Við táknum með $\tau_{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ það einfalt tag sem fæst með því að setja tagið σ_i inn fyrir tagbreytuna $\mathbf{a}_i$ fyrir $i = 1, \ldots, n$ samtímis.
Fyrir samhengi $\Gamma = \{\mathsf{x}_1 : \tau_1, \ldots, \mathsf{x}_m : \tau_n\}$ ritum við einnig

$$\Gamma_{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] := \{\mathsf{x}_i : \tau_{i\,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \mid i = 1, \ldots, m\}.$$

3.3 Höfuðtagsreikniritið

Skilgreining 3.16

Látum $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vera ólíkar tagbreytur og $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ vera einföld tög. Við táknum með $\tau_{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ það einfalt tag sem fæst með því að setja tagið σ_i inn fyrir tagbreytuna $\mathbf{a}_i$ fyrir $i = 1, \ldots, n$ samtímis.
Fyrir samhengi $\Gamma = \{\mathsf{x}_1 : \tau_1, \ldots, \mathsf{x}_m : \tau_n\}$ ritum við einnig

$$\Gamma_{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] := \{\mathsf{x}_i : \tau_{i\,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \mid i = 1, \ldots, m\}.$$

Ef sett er $\mathfrak{S} := \{(\mathbf{a}_1, \sigma_1), \ldots, (\mathbf{a}_n, \sigma_n)\}$ leyfum við okkur einnig að rita $\tau[\mathfrak{S}]$ og $\Gamma[\mathfrak{S}]$ í stað $\tau_{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ og $\Gamma_{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$, og köllum þá $\mathfrak{S}$ *innsetningasafn*. Tvennd $(\mathbf{a}, \sigma)$ úr $\mathfrak{S}$ nefnist þá jafnframt *innsetning tagsins* σ *fyrir* $\mathbf{a}$.

3.3 Höfuðtagsreikniritið

Skilgreining 3.17

Látum $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n$ vera upptalningu frjálsa breyta λ-segðar $\mathbf{M}$, og gerum ráð fyrir að eftirfarandi skilyrði séu uppfyllt:

(i) Við höfum $\mathsf{x}_1 : \sigma_1, \ldots, \mathsf{x}_n : \sigma_n \vdash \mathbf{M} : \tau$.

(ii) Ef $\mathsf{x}_1 : \sigma_1', \ldots, \mathsf{x}_n : \sigma_n' \vdash \mathbf{M} : \tau'$, þá er til innsetningasafn $\mathfrak{S}$ þannig að $\sigma_i' = \sigma_i[\mathfrak{S}]$ fyrir öll $i = 1, \ldots, n$, og $\tau' = \tau[\mathfrak{S}]$.

Við segjum þá að tagið τ sé *höfuðtag* segðarinnar $\mathbf{M}$, og að parið (Γ, τ), með $\Gamma := \{\mathsf{x}_1 : \sigma_1, \ldots, \mathsf{x}_n : \sigma_n\}$, sé *höfuðpar* hennar.

3.3 Höfuðtagsreikniritið

Setning 3.25

Að gefinni λ-segð **M** skilar höfuðtagsreikniritið höfuðpari (Γ, τ) fyrir **M** ef **M** er taganleg, og $\perp$ ef hún er það ekki.

Frekari efni

Fjölmóta tög (e. *polymorphic types, System F*)

- Eins og einföld tög, nema líka með reglunni
  (iii) Ef σ er fjölmóta tag og $\mathbf{a}$ er tagbreyta, þá er $(\forall \mathbf{a}.\, \sigma)$ fjölmóta tag.
- Fjölmóta tag λ-segðar er óákvarðanlegt — engin ályktun.

Frekari efni

Fjölmóta tög (e. *polymorphic types, System F*)

- Eins og einföld tög, nema líka með reglunni
  - (iii) Ef σ er fjölmóta tag og $\mathbf{a}$ er tagbreyta, þá er $(\forall \mathbf{a}.\, \sigma)$ fjölmóta tag.
- Fjölmóta tag λ-segðar er óákvarðanlegt — engin ályktun.

Hindley-Milner tagskipting

- Útvíkkar lambda-reikning með myndunarreglunni
  - (iv) Ef $\mathbf{M}$ og $\mathbf{N}$ eru segðir og $\mathbf{x}$ er breyta, þá er $(\texttt{let}\ \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{N}\ \texttt{in}\ \mathbf{M})$ segð.
- Skilgreinir *tagmynstur* eins og fjölmóta tög, nema $\forall$ má bara vera yst.
- Tagmynstur segðar er ákvarðanlegt, t.d. með reikniriti W.