

Laboratório  
Nacional de  
Computação  
Científica

/prj/prjmurad/mrborges/Dropbox/latex/figu

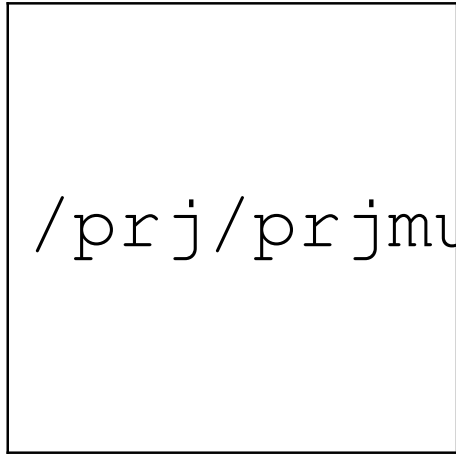
# Geração Numérica de Campos Aleatórios

**Autor:** Marcio Borges

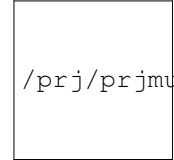
Petrópolis-RJ  
20 de junho de 2022

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Geração Numérica de Campos Aleatórios</b>	<b>1</b>
1.1	Campos . . . . .	1
1.1.1	Formato dos arquivos de dados . . . . .	1
1.1.2	Descrição dos campos . . . . .	2
1.1.3	Funções de Covariância Adotadas . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Métodos de Geração de Campos Aleatórios</b>	<b>3</b>
2.1	Expansão de Karhunen-Loève (KL) . . . . .	4
2.2	Método da Decomposição LU - campos condicionados . . . . .	5
2.3	Método Labtran-Geo . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Informação Útil</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Programas OCTAVE/MATLAB</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Programas FORTRAN</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Method for generating permeability fields</b>	<b>12</b>



/prj/prjmurad/mrborges/Dropb



/prj/prjmurad/mrborge

## 1 GERAÇÃO NUMÉRICA DE CAMPOS ALEATÓRIOS

O conhecimento sobre a heterogeneidade de um meio poroso normalmente é incompleto devido a escassez de informações sobre o mesmo, o que nos leva à necessidade de fazermos uma descrição probabilística de suas propriedades. Neste sentido, as heterogeneidades das propriedades dos reservatórios (por exemplo, a permeabilidade, a porosidade e o módulo de Young) são representadas por campos aleatórios, com propriedades estatísticas específicas que serão gerados por três metodologias: Decomposição LU, Decomposição de Karhunen-Loève e Labtran-Geo. Desta forma, o objetivo deste relatório é apresentar os geradores construídos para serem utilizados no projeto: MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS EM RESERVATÓRIOS HETEROGÊNEOS COM ACOPLAMENTO GEOMECÂNICO dentro da rede SIGER.

### 1.1 Campos

Neste trabalho, serão gerados somente campos em domínios retangulares com malhas também retangulares. Para padronizar tanto a geração quanto a utilização destes campos nos simuladores desenvolvidos apresentamos, a seguir, a formatação dos campos. Tomaremos como exemplo a representação esquemática de um campo aleatório posto em um domínio retangular  $\Omega$  com dimensões físicas  $L_1 \times L_2$ , discretizado em uma malha de  $n_1 \times n_2$  elementos ( $10 \times 5$  neste exemplo), conforme apresentado na Fig. 1.

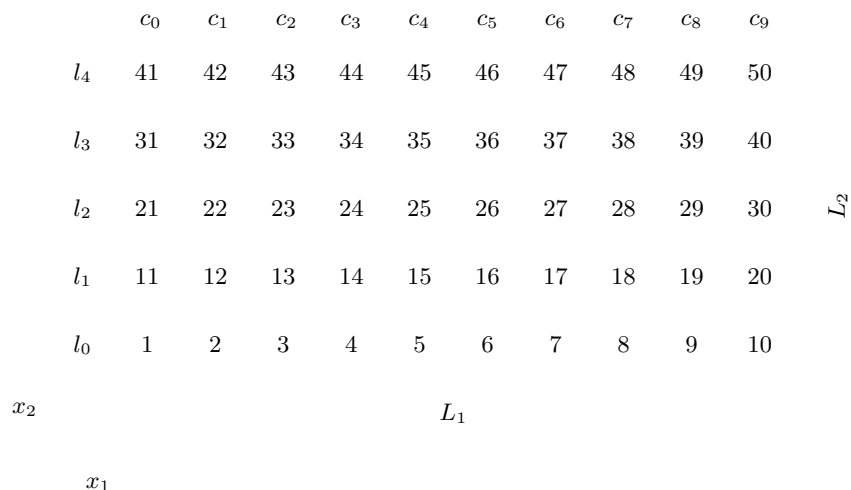
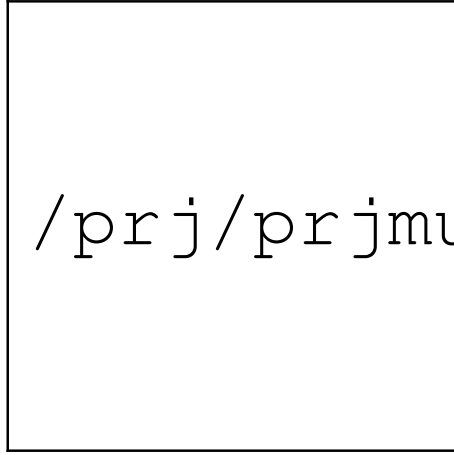
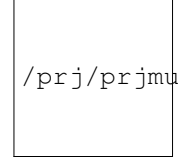


Figura 1: Representação esquemática de um campo aleatório posto em um domínio bidimensional  $\Omega$ .



/prj/prjmurad/mrborges/Dropb



/prj/prjmurad/mrborges

```
1.000000
0.400000
10
5
1
0.500000
2
2
0
0.909149 -0.661580 -0.397227 0.308463 0.180042
0.015598 -0.849240 -0.458387 0.201703 0.100701
192837465
1
0.110745 -0.825363 0.365615 0.268071 ...
```

que, de acordo com a Fig. 1, as quatro primeiras linhas trazem informações sobre as dimensões físicas de  $\Omega$ , sendo que a primeira representa o valor de  $L_1$ , a segunda  $L_2$ , a terceira  $n_1$ , e a quarta  $n_2$ . Estes dois últimos valores são os números de blocos na direção  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente. Os dois valores seguintes (quinta e sexta linhas) trazem informações sobre a covariância do campo. O quinto valor indica que o campo é exponencial se for igual a 1 e fractal caso seja 2. O valor da sexta linha é o do coeficiente de correlação  $\lambda$  se o campo é exponencial ou o expoente de Hurst  $\beta$ , se o campo é fractal. Os dois valores seguintes (sétima e oitava linha) não possuem utilidade.

Após as oito primeiras linhas, estão as indicações sobre o valor e a posição de cada bloco. O número zero indica a primeira linha ( $l_0$ ). Para este caso específico os dez números seguintes são os valores do campo nos blocos de 1 a 10, respectivamente. O número 192837465 é uma “bandeira” que indica o final de uma linha.

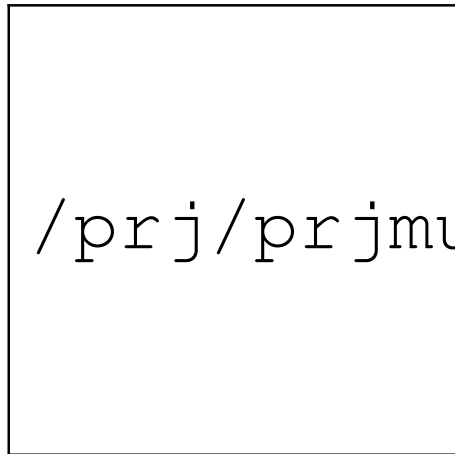
### 1.1.2 Descrição dos campos

Neste projeto consideraremos campos de permeabilidades aleatórios, escalares, com distribuição log-normal:

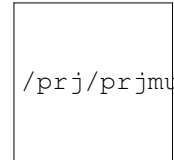
$$K(\mathbf{x}) = K_0 e^{\varrho Y(\mathbf{x})}, \quad (1)$$

onde  $K_0$ ,  $\varrho \in \mathbb{R}$  e  $Y(\mathbf{x})$  é um campo gaussiano aleatório, estacionário, caracterizado por sua média  $\langle Y(\mathbf{x}) \rangle = 0$  e sua função de covariância

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle Y(\mathbf{x})Y(\mathbf{y}) \rangle, \quad (2)$$



/prj/prjmurad/mrborges/Dropb



/prj/prjmurad/mrborge

do campo correlacionado. O coeficiente de variação é utilizado como uma medida adimensional da heterogeneidade do campo de permeabilidades.

### 1.1.3 Funções de Covariância Adotadas

Consideramos neste trabalho formações geológicas caracterizadas por campos aleatórios com dois tipos de função de covariância: fractal e exponencial.

Para modelos em que introduzimos variabilidade sobre todas as escalas de comprimento, tal como no caso de formações sedimentares (Hewett, 1986) usamos campos nos quais a sua função de covariância é dada pela lei de potência:

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-\beta}, \quad \beta > 0. \quad (4)$$

O expoente  $\beta$ , chamado de coeficiente de Hurst, controla a importância relativa dos comprimentos de escala “grandes” e “pequenos” na geologia. Portanto, maiores valores de  $\beta$  enfatizam os comprimentos de escala “pequenos”. Por outro lado, para menores valores de  $\beta$  os comprimentos de escala “grandes” são enfatizados. No caso em que  $\beta \rightarrow \infty$  obtém-se o caso em que as variáveis são independentes.

Nos casos em que somente as pequenas escalas prevalecem consideraremos campos com função de covariância exponencial:

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\lambda}\right) \quad (5)$$

onde  $\lambda > 0$  é o comprimento de correlação.

## 2 MÉTODOS DE GERAÇÃO DE CAMPOS ALEATÓRIOS

Vários métodos têm sido utilizados para gerar campos aleatórios, tais como: *Turning Bands Method* (Mantoglou e Wilson, 1982; Oh, 1998), Método de Decomposição LU de Matrizes (*Matrix Composition Method*) (Clifton e Neuman, 1982; Elishakoff, 1983), Adição Sucessiva Aleatória (*Successive Random Addition*) (Oh, 1998; Kikkinides e Burganos, 1999, 2000), Métodos Espectrais (*Spectral Methods*) (?), Método da Convolução (?Glimm et al., 1993), Método da Expansão KL (Karhunen, 1946; Loève, 1955) e o Método LABTRAN-GEO (Borges et al., 2008). Todos estes métodos apresentam vantagens e desvantagens tanto do ponto de vista computacional quanto da qualidade estatística dos campos. Mais especificamente, no presente projeto,

/prj/prjmurad/mrborges/Dropb

/prj/prjmurad/mrborges

## 2.1 Expansão de Karhunen-Loève (KL)

Uma das metodologias escolhidas para a geração de campos aleatórios, neste projeto, é o Método de Karhunen-Loève desenvolvido, de forma independente, por Karhunen (1946) e Loève (1955) com base na decomposição da função de covariância em seus auto-pares. Neste método, um campo aleatório pode ser representado como uma expansão envolvendo um conjunto de funções determinísticas com seus respectivos coeficientes aleatórios.

**Definição:** Considere um campo aleatório  $Y(\mathbf{x}, \omega)$  definido sobre um espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  composto pelo espaço amostral, conjunto de eventos e uma medida de probabilidade, respectivamente, e indexado a um domínio limitado  $\mathcal{D}$ . O campo  $Y$  pode ser escrito como

$$Y(\mathbf{x}, \omega) = \langle Y(\mathbf{x}) \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \phi_i(\mathbf{x}) \xi_i(\omega), \quad (6)$$

onde  $\lambda_i$  e  $\phi_i$  são os auto-valores e as auto-funções da função de covariância  $\mathcal{C}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , respectivamente. Por definição,  $\mathcal{C}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é limitada, simétrica e definida positiva e tem a seguinte auto-decomposição:

$$\mathcal{C}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{y}). \quad (7)$$

Os auto-valores e auto-funções de (7) são as soluções da equação integral de Fredholm dada por

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{C}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lambda_i \phi_i(\mathbf{y}). \quad (8)$$

A solução de (8) forma um conjunto completo de auto-funções ortogonais, quadrado-integráveis, que satisfazem a equação

$$\int_{\mathcal{D}} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij}, \quad (9)$$

na qual  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker.

O conjunto de variáveis aleatórias não-correlacionadas  $\xi_i(\omega)$  pode ser expresso como

$$\xi_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{\mathcal{D}} \tilde{Y} \phi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (10)$$

onde  $\tilde{Y}$  é a flutuação.

Se os autovalores  $\lambda_i$  decaem rapidamente então podemos truncar a ex-

/prj/prjmurad/mrborges/Dropb

/prj/prjmurad/mrborges

A correspondente função de covariância é dada por

$$\mathcal{C}_{\hat{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \phi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{y}). \quad (12)$$

A implementação numérica da expansão Karhunen-Loève esta associada à resolução, eficiente, da equação integral (8) para a obtenção dos pares  $\{\lambda_i, \phi_i\}$ . Neste projeto, o método de Galerkin será utilizado para a aproximação deste problema. Como podemos observar, este é um método bastante elegante e direto para geração de campos aleatórios. Por outro lado, o método apresenta um alto custo computacional, advindo da decomposição da matriz e, principalmente, da grande quantidade de memória requerida quando o número de pontos  $n$  ( $n = n_1 \times n_2$ ), que representa a quantidade de blocos geológicos usados (com propriedades assumidas constantes no interior de cada bloco), aumenta substancialmente. Lembramos que a matriz  $\mathcal{C}$  tem dimensão  $n \times n$ . Por exemplo, para gerar um campo bidimensional com uma malha de  $50 \times 50$  pontos, necessitamos de uma matriz  $\mathcal{C}$  de  $2500 \times 2500$  componentes, o que requer cerca de  $50MB$  de memória. Já um campo com uma malha de  $200 \times 200$  pontos requer cerca de  $12,8GB$  de memória. Essa característica praticamente inviabiliza a sua utilização para a geração de campos postos em malhas “finas”.

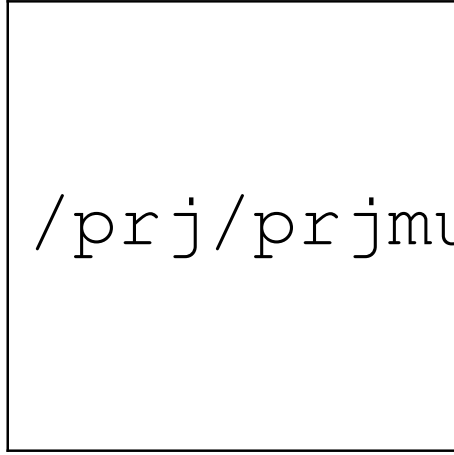
## 2.2 Método da Decomposição LU - campos condicionados

Considere a distribuição, sobre um campo  $\Omega$ , de um atributo  $\xi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . O objetivo é a geração de  $M$  realizações do campo  $\xi$ , igualmente prováveis. Cada realização é denotada pelo sobrescrito  $l$ :  $\{\xi^{(l)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega\}$  e  $l = 1, \dots, M$ . Um conjunto de campos é dito ser condicionado se as realizações resultantes possuem a seguinte característica:

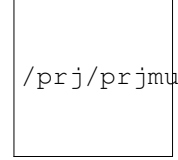
$$\xi^{(l)}(\mathbf{x}_\alpha) = \xi(\mathbf{x}_\alpha), \forall l. \quad (13)$$

Segundo Deutsch e Journel (1992), quando o número de dados que serão condicionados mais o número de nós simulados é pequeno (menor do que poucas centenas) e um grande número de realizações for requerido, a geração de campos através do método da decomposição LU da matriz de covariância é recomendado.

Seja  $\xi(\mathbf{x})$  um campo gaussiano, estacionário com função de covariância  $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ . Sejam  $\mathbf{x}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , os locais nos quais os dados serão condicionados e  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  os  $N$  nós que serão simulados. A matriz de covariância  $(n + N) \times (n + N)$  é particionada da seguinte forma:



/prj/prjmurad/mrborges/Dropb



/prj/prjmurad/mrborge

$\{\xi^{(l)}(\mathbf{x}_k), \quad k = 1, \dots, n + N\}$  é obtido pela multiplicação de  $\mathbf{L}$  pelo vetor  $\omega_{(n+N) \cdot n}^{(l)}$ .

$$\xi^{(l)} = \begin{bmatrix} [\xi(\mathbf{x}_\alpha)]_{n \cdot 1} \\ [\xi^{(l)}(\mathbf{x}_j)]_{N \cdot 1} \end{bmatrix} = \mathbf{L} \omega^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2^{(l)} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

onde  $[\xi(\mathbf{x}_\alpha)]_{n \cdot 1}$  é o vetor dos  $n$  dados condicionados e  $[\xi^{(l)}(\mathbf{x}_j)]_{N \cdot 1}$  é vetor do  $N$  valores de  $\xi$  condicionalmente simulados. A identificação dos dados condicionantes é escrito como  $\mathbf{L}_{11}\omega_1 = [\xi(\mathbf{x}_\alpha)]$ , assim o vetor  $\omega_1$  é construído da seguinte forma:

$$\omega_1 = [\omega_1]_{n \cdot 1} = \mathbf{L}_{11}^{-1} \cdot [\xi(\mathbf{x}_\alpha)]_{n \cdot 1}. \quad (16)$$

O vetor  $\omega_2^{(l)} = [\omega_2^{(l)}]_{N \cdot 1}$  é o vetor de  $N$  variáveis aleatórias gaussianas independentes.

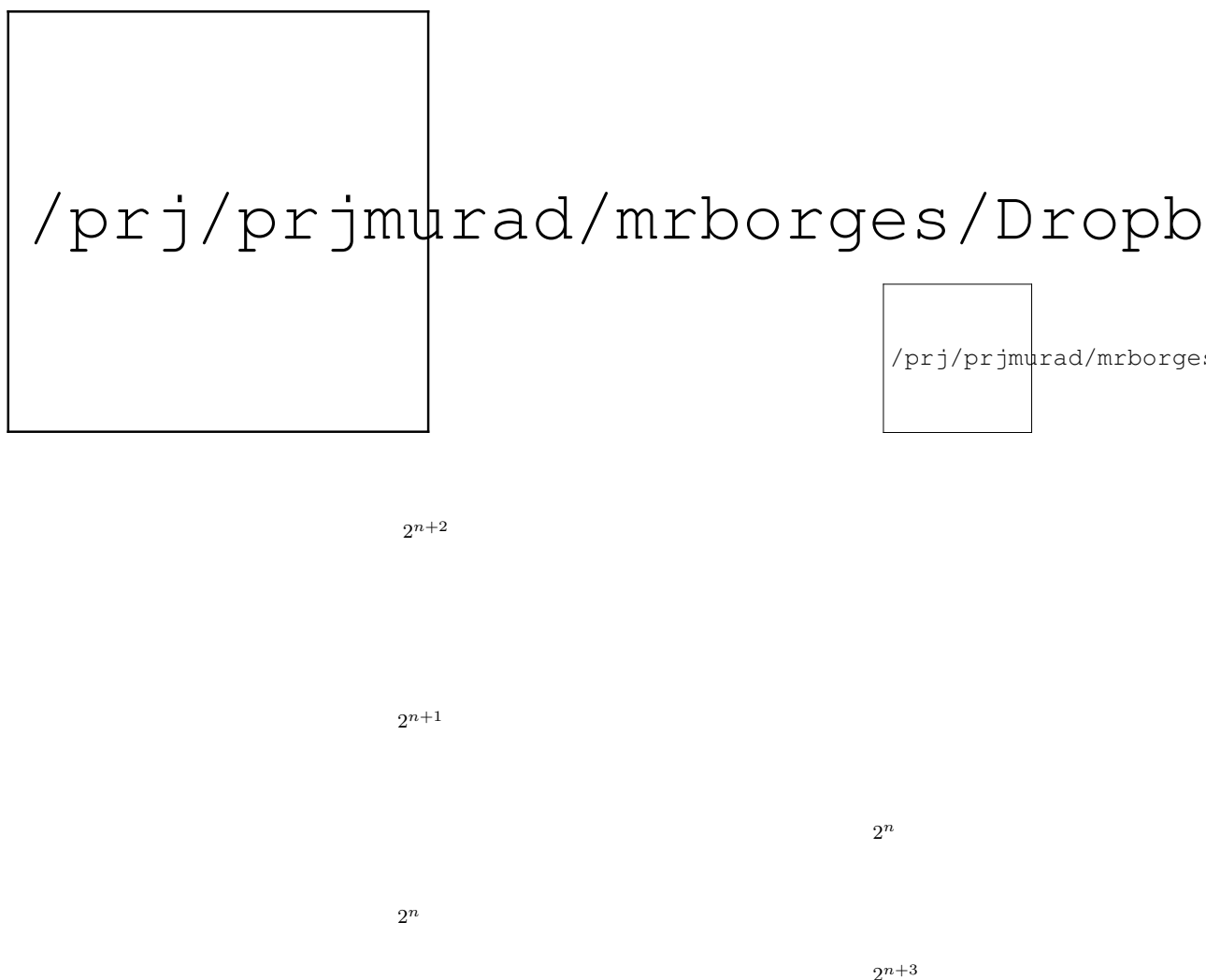
Como podemos observar, este é um método bastante elegante e direto para geração de campos aleatórios. Por outro lado, o método apresenta um alto custo computacional, advindo da decomposição da matriz e, principalmente, da grande quantidade de memória requerida quando o número de pontos  $n$ , que representa a quantidade de blocos geológicos usados (com propriedades assumidas constantes no interior de cada bloco), aumenta substancialmente. Lembramos que a matriz  $\mathbf{C}$  tem dimensão  $n \times n$ . Por exemplo, para gerar um campo bidimensional com uma malha de  $50 \times 50$  pontos, precisamos de uma matriz  $\mathbf{C}$  de  $2500 \times 2500$  componentes, o que requer cerca de  $50MB$  de memória. Já um campo com uma malha de  $200 \times 200$  pontos requer cerca de  $12,8GB$  de memória. Essa característica praticamente inviabiliza a sua utilização para a geração de campos postos em malhas “finas”.

## 2.3 Método Labtran-Geo

O grande custo computacional associado ao método LU, descrito anteriormente, motivou a busca por alternativas mais eficientes, do ponto de vista computacional, para geração de campos aleatórios. Um desses métodos é o LABTRAN-GEO, desenvolvido por Borges et al. (2008), que passaremos a descrever.

Neste caso, o campo correlacionado  $Y(\vec{x})$  é obtido através da soma sucessiva de campos gaussianos independentes. A ideia original para a construção numérica dos campos foi obtida no trabalho de Glimm e Sharp (1991), os quais para simplificar sua análise sobre o crescimento da região de mistura entre dois fluidos, escoando em meios porosos, idealizaram campos aleatórios hierárquicos. Portanto, da forma original como os campos foram idealizados,





(a) Diferentes níveis de malha (b) Rede de malhas uniformes encaixadas.

Figura 2: Malhas uniformes.

$$\langle Y_{n,ij}Y_{n,kl} \rangle = \delta_{ij,kl}2^{-n\beta} \quad \text{ou} \quad \langle Y_{n,ij}Y_{n,ij} \rangle = 2^{-n\beta},$$

onde  $\delta$  é o delta de Kronecker.

As variáveis assumem valores constantes nos elementos aos quais estão associadas ( $Y$  fica definido no plano). Para variáveis definidas em malhas distintas ( $n \neq n'$ ), temos:

$$\langle Y_n(\mathbf{x})Y_{n'}(\mathbf{y}) \rangle = 0, \quad \text{para todo } n \neq n'.$$

Neste desenvolvimento o campo correlacionado  $Y(\mathbf{x})$  é definido por:

$$Y(\mathbf{x}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mathbf{x}). \tag{17}$$

Podemos demonstrar que o campo  $Y(\mathbf{x})$  assim definido possui uma função de covariância da forma dada pela Eq. (2).

Esta primeira versão do método foi testada e apresentou alguns proble

/prj/prjmurad/mrborges/Dropb

/prj/prjmurad/mrborges

mudança na base, utilizada para determinar o tamanho das malhas, a qual era fixa na construção anterior (valor 2). Usaremos agora a base  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b > 1$ . O objetivo desta mudança foi melhorar a aproximação da função de covariância, que é feita por segmentos de retas, mediante o aumento considerável destes segmentos na sua representação. A segunda modificação foi a realização de um deslocamento de malhas em cada nível  $n$ . Neste caso utilizamos  $m = b^n$  (tomamos  $m \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $m$  é arredondado para o valor inteiro mais próximo) malhas para cada nível  $n$ . As malhas são deslocadas em uma unidade (tamanho do menor de  $b^n$  dentre todas as malhas) nas direções  $x$  e  $y$  com relação à malha anterior. Este procedimento é introduzido para resolver o problema da falta de auto-similaridade do campo obtido.

Então, consideramos o conjunto de variáveis independentes,  $Y_{n_m,ij}$ , com as seguintes média e covariância:

- Para cada malha  $m$ :

$$\begin{aligned}\langle Y_{n_m,ij} \rangle &= 0 \\ \langle Y_{n_m,ij} Y_{n_m,kl} \rangle &= \frac{1}{b^n} (\delta_{ij,kl} b^{-n\beta}) \\ \langle Y_{n_m,ij} Y_{n_m,ij} \rangle &= \frac{b^{-n\beta}}{b^n}\end{aligned}$$

- Em cada nível  $n$ :

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m,ij} \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m,ij} \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m,kl} \right\rangle &= \delta_{ij,kl} b^{-n\beta} \\ \left\langle \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m,ij} \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m,ij} \right\rangle &= b^{-n\beta}\end{aligned}$$

onde  $m = 1, 2, \dots, b^n$  é o número de malhas em cada nível  $n$ .

As variáveis assumem valores constantes em cada elemento da malha e para variáveis definidas em níveis distintos ( $n_m \neq n'_m$ ) temos:

/prj/prjmurad/mrborges/Dropb

/prj/prjmurad/mrborges

$$\langle Y_{n_m}(\vec{x}) Y_{n_{m'}}(\vec{y}) \rangle = 0, \quad \text{para todo } m \neq m'.$$

Então, definimos  $Y(\vec{x})$  como

$$Y(\vec{x}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{x}) \right). \quad (18)$$

De forma similar ao que feito na primeira construção mostraremos que  $Y(\vec{x})$  possui uma função de covariância dada por uma lei de potência do tipo da Eq. (2). Para isto, tomamos dois pontos no plano,  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ :

$$\begin{aligned} \langle Y(\vec{x}) Y(\vec{y}) \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{x}) \right) \sum_{n'=0}^{\infty} \left( \sum_{m'=1}^{b^{n'}} Y_{n'_m}(\vec{y}) \right) \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \left\langle \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{x}) \right) \left( \sum_{m'=1}^{b^{n'}} Y_{n'_m}(\vec{y}) \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

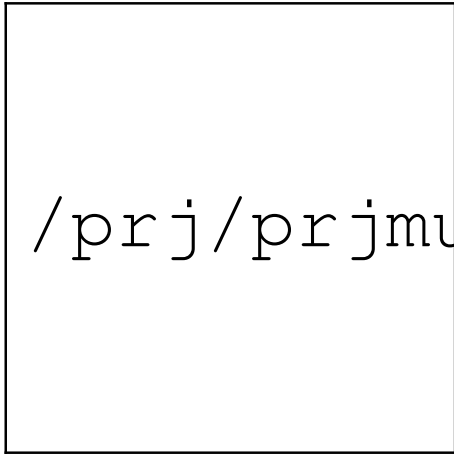
Seja  $d = |\vec{x} - \vec{y}|$  e  $n_m^o$  um nível qualquer, a mesma análise feita para a primeira versão do método pode ser aplicada aqui. Se  $d \geq b^{n_m^o}$ , os pontos  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  estão em elementos distintos de malhas com espaçamento menor do que  $b^{n_m^o}$  e temos que

$$\left\langle \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{x}) \right) \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{y}) \right) \right\rangle = 0,$$

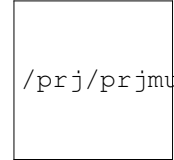
para  $n_m < n_m^o$ . Por outro lado, se  $d < b^{n_m^o}$ , os pontos  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  estão no mesmo elemento de malhas com espaçamento  $b^{n_m} > b^{n_m^o}$ , e então,

$$\left\langle \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{x}) \right) \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{y}) \right) \right\rangle = b^{-n\beta}.$$

Portanto, retornando ao somatório (19) temos que:



/prj/prjmurad/mrborges/Dropb



/prj/prjmurad/mrborge

$$= \sum_{n=0}^{n^o-1} \underbrace{\left\langle \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{x}) \right) \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{y}) \right) \right\rangle}_{=0} \\ + \sum_{n=n^o}^{\infty} \underbrace{\left\langle \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{x}) \right) \left( \sum_{m=1}^{b^n} Y_{n_m}(\vec{y}) \right) \right\rangle}_{=\frac{1}{b^{n\beta}}}.$$

Como  $d = |\vec{x} - \vec{y}| \approx b^{(n^o+1)}$ , então:

$$\langle Y(\vec{x})Y(\vec{y}) \rangle = \sum_{n=n^o+1}^{\infty} \frac{1}{b^{n\beta}} = \underbrace{\frac{1}{b^{(n^o+1)\beta}}}_{=\frac{1}{d^\beta}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{n\beta}}}_{=c},$$

e obtemos o resultado esperado:

$$\langle Y(\vec{x})Y(\vec{y}) \rangle \approx \frac{c}{|\vec{x} - \vec{y}|^\beta}, \quad \text{com } c = \frac{1}{1 - b^{-\beta}}.$$

### 3 INFORMAÇÃO ÚTIL

Seja  $Y$  uma variável aleatória Gaussiana, então  $X = \exp(Y)$  é uma variável aleatória com distribuição log-normal com as seguintes média e variância:

$$\mu_X = \exp\left(\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2}\right) \quad (20)$$

$$\sigma_X^2 = \exp(2\mu_Y + \sigma_Y^2) [\exp(\sigma_Y^2) - 1].$$

Por outro lado,

$$\mu_Y = \ln(\mu_X) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right) \quad (21)$$

/prj/prjmurad/mrborges/Dropb

/prj/prjmurad/mrborge

*General Public License*). Os programas são totalmente compatíveis com a linguagem e ambiente MATLAB (<http://www.mathworks.com/products/matlab>).

Em cada um dos diretórios que agrupam os programas desenvolvidos para cada metodologia de geração de campos existe um **programa principal** no qual são realizadas as entradas dos parâmetros. Os programas principais são: `gLU.m` e `gLU3D.m` para o Método da Decomposição LU, nos casos bi e tri-dimensional, respectivamente; e `KL_cond.m` para o Método da Expansão de Karhunen-Loève.

Nos programas principais, citados anteriormente, a entrada de dados é bastante similar:

```
ntipo = 2;          % define o tipo de covariancia (1-fractal;
                    % 2-exponencial; 3-exponencial quadratica)
Lx    = 1.0;        % dimensao fisica do Dominio (x)
Ly    = 1.0;        % dimensao fisica do Dominio (y)
nx    = 100;        % numero de elementos na direcao x
ny    = 100;        % numero de elementos na direcao y
varY   = 1.0;       % variancia dos campos
beta  = 0.5;        % valor do coeficiente de Hurst
                    % (campos fractais)
cutoff = Lx/nx;     % tamanho do cutoff
etax   = .25;       % valor do comprimento de correlacao
                    % na direcao x (campos exponenciais)
etay   = .125;      % valor do comprimento de correlacao
                    % na direcao y (campos exponenciais)
Nrand  = 10;        % numero de campos gerados
TIPOINPUT = 10;     % se == 1 entrada dos pontos condicionados
                    % (arquivo input_cond.dat)
```

## 5 PROGRAMAS FORTRAN

Estão disponibilizadas versões dos Métodos da Decomposição LU e Labtran-Geo, esta última em uma versão que permite o condicionamento de pontos conhecidos, construídas na linguagem FORTRAN 90. Os programas são: `LU.f90` e `LABTRAN_GEO.f90`, respectivamente. A utilização dos programas é bastante simples e os dados de entrada encontram-se no arquivo `entra.in` no diretório `in` de cada método. A seguir mostramos um exemplo do arquivo de entrada com os parâmetros descritos. Os arquivos são bastante seme-

/prj/prjmurad/mrborges/Dropb

/prj/prjmurad/mrborge

0	999	# numero inicial e final dos campos
1.00000	1.00000	# Dimensoes Lx e Ly
100	100	# numero de elementos nas direcoes x e y
1		# tipo de campo (1=exponencial e 2=fractal
20.10000	1.000000	# coeficiente de hurst (ou comprimento de
9876	5432	1110
campos/e100x100_20_		# nome basico dos campos
5		# numero de pontos condicionados
0.71000	0.63000	1.00000 # coordenada x, coordenada y e va
0.09750	0.27000	1.00000
0.55000	0.95000	1.00000
0.96000	0.15000	1.00000
0.41000	0.70000	1.00000

## 6 METHOD FOR GENERATING PERMEABILITY FIELDS

We consider random heterogeneous permeability fields  $\kappa(\mathbf{x}, \omega)$

Govinder et al. (2014)

## REFERÊNCIAS

- M. R. Borges, F. Pereira, e H. P. Amaral Souto. Efficient generation of multi-scale random fields: A hierarchical approach. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, page n/a, 2008. URL 10.1002/cnm.1134.
- P. M. Clifton e S. P. Neuman. Effects of kriging and inverse modeling on conditional simulation of the avra valley aquifer in southern arizona. *Water Resources Research*, 18(4):1215–1234, 1982.
- Clayton V. Deutsch e A. G. Journel. *GSLIB: geostatistical software library and user's guide*, volume 1. Oxford University Press, 1992.
- L. Elishakoff. *Probability Methods in the Theory of Structures*. Jonh Wiley & Sons, New York, 1983.
- J. Glimm, W. B. Lindquist, F. Pereira, e Q. Zhang. A theory of macrodispersion for the scale-up problem. *Computational Geosciences*, 13(1):97–122, 1993.
- J. Glimm e D. H. Sharp. A random field model for anomalous diffusion in heterogeneous porous media. *Journal of Statistical Physics*, 62(1-2):415–424, 1991.

/prj/prjmurad/mrborges/Dropb

/prj/prjmurad/mrborges

K. Karhunen. Zur spektraltheorie stochastischer prozesse. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, 1946.

E. S. Kikkinides e V. N. Burganos. Structure and flow properties of binary media generated by fractional brownian motion models. *Physical Review E*, 59(6):7185–7194, 1999.

E. S. Kikkinides e V. N. Burganos. Permeation properties of three-dimensional self-affine reconstructions of porous materials. *Physical Review E*, 62(5): 6906–6915, 2000.

M. M. Loève. *Probability Theory*. Princeton, N.J., 1955.

A. Mantoglou e J. L. Wilson. The turning bands method for simulation of random fields using the line integration by a spectral method. *Water Resources Research*, 18(5):1379–1394, 1982.

W. Oh. *Random field simulation and an application of kriging to image thresholding*. Tese de Doutorado, State University of New York, 1998.