

Bases de Karhunen-Loève: aplicações à Mecânica dos Sólidos

Rubens Sampaio

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, Rua Marquês de São Vicente 225, CEP 22453-900, Gávea, Rio de Janeiro - RJ, Brasil.
rsampaio@mec.puc-rio.br

Claudio Wolter

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, Rua Marquês de São Vicente 225, CEP 22453-900, Gávea, Rio de Janeiro - RJ, Brasil.
cwolter@mec.puc-rio.br

Resumo: A expansão ou decomposição de Karhunen-Loève, também conhecida na literatura como decomposição ortogonal própria, trata-se de uma poderosa técnica espectral para análise e síntese de sistemas dinâmicos. Ela consiste em decompor um tensor autocorrelação espacial, o qual pode ser gerado através de simulações numéricas ou diretamente calculado de dados experimentais, neste caso sem qualquer conhecimento a priori sobre o sistema. A decomposição deste tensor produz autofunções chamadas de modos empíricos ou modos ortogonais próprios os quais formam uma base ortonormal, onde a dinâmica pode ser projetada, levando a uma redução ótima da dimensão do sistema. Os autovalores associados às autofunções fornecem uma medida da energia contida no respectivo modo empírico. Também deve-se ressaltar que a expansão de Karhunen-Loève possui a importante propriedade de ser uma expansão ótima, significando que, dado um mesmo número de modos, nenhuma outra decomposição linear é capaz de melhor representar aquela particular dinâmica que a gerou. Historicamente, ela começou a ser utilizada no estudo de escoamentos turbulentos e acabou permanecendo por muito tempo confinada ao âmbito da Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor. Entretanto, recentemente, ela começou a atrair a atenção da comunidade científica envolvida com dinâmica estrutural. O propósito do presente trabalho é apresentar toda a teoria envolvida na expansão com um enfoque voltado para a Mecânica dos Sólidos, especialmente no que diz respeito à relação dos modos empíricos com os modos de vibração de sistemas lineares.

Palavras-chave: Expansão de Karhunen-Loève, análise modal, sistemas lineares, sistemas de vibroimpacto.

Introdução

A modelagem matemática de sistemas dinâmicos preocupa-se, basicamente, com a tradução dos fenômenos naturais observados à nossa volta para uma linguagem clara e universal que permita uma melhor interpretação ou entendimento dos padrões governantes contidos nestes fenômenos. Apesar de sua imensa importância, a modelagem não pode ser vista como um fim em si. Muitas vezes, o modelo obtido, geralmente representado por sistemas de equações diferenciais ordinárias ou parciais, mesmo possuindo excelente grau de precisão, quando comparado com dados experimentais, pode ser muito complexo para determinado uso prático. Além disso, no caso de equações diferenciais parciais, que raramente possuem solução analítica, os métodos aproximados de discretização comumente empregados, tais como o método de elementos finitos, resultam em sistemas com um número muito grande de graus de liberdade.

Nestes casos, faz-se necessário o emprego de alguma estratégia de simplificação, genericamente denominada de redução de modelos, onde um pouco da precisão deve ser sacrificada em prol de um determinado objetivo. Este pode ser, por exemplo, o projeto de um controlador que atue em tempo real e não seja, portanto, computacionalmente muito exigente ou, ainda, a realização de uma análise paramétrica. Desta forma, o modelo reduzido deve reproduzir, de maneira adequada, o comportamento espacial e temporal do sistema dinâmico original.

No caso de sistemas lineares, há, na literatura, várias técnicas de redução disponíveis. Infelizmente, o mesmo não pode ser dito quando não-linearidades estão presentes. Embora a teoria de sistemas não-lineares e caóticos tenha sofrido grandes avanços, ainda há ausência de uma metodologia mais geral, fazendo com que cada problema seja atacado de forma individual. O objetivo deste trabalho é apresentar uma técnica que pode servir para preencher esta lacuna: a expansão ou decomposição de Karhunen-Loève (KLE, de *Karhunen-Loève expansion*), que pode ser aplicada a qualquer tipo de sistema dinâmico, mas será estudada no âmbito da dinâmica estrutural.

Sistemas dinâmicos quaisquer (lineares ou não, determinísticos ou estocásticos) têm, geralmente, formas espaciais recorrentes no tempo denominadas de estruturas coerentes. Estas são energeticamente dominantes e podem ser utilizadas na confecção de um modelo de dimensão reduzida. A expansão de Karhunen-Loève é uma metodologia estatística que permite a determinação destas estruturas. Ela consiste na construção de um tensor autocorrelação espacial a partir de dados obtidos de experimentos físicos ou numéricos de um determinado sistema. A decomposição espectral deste tensor fornece autofunções denominadas de modos empíricos ou modos

ortogonais próprios (POMs, de *proper orthogonal modes*) que nada mais são que as estruturas coerentes daquela dinâmica. Além disso, os respectivos autovalores, denominados valores ortogonais próprios (POVs de *proper orthogonal values*), fornecem uma medida da energia contida em cada modo.

A vantagem desta técnica consiste em ser ela uma decomposição linear, fazendo uso de toda a teoria de espaços e operadores lineares para a representação da dinâmica. Esta é representada como uma combinação linear de funções espaciais (os POMs), cujos coeficientes temporais são obtidos através da projeção da dinâmica sobre cada um dos modos, exatamente como em uma série de Fourier. O número de modos usados define a dimensão do modelo reduzido usado para representar a dinâmica. A KLE define, como veremos, uma expansão que é ótima em um certo sentido e esta talvez seja sua mais importante propriedade, pois implica no fato de nenhuma outra decomposição linear poder melhor representar aquela dinâmica particular que a gerou. Esta compressão de informação leva a modelos reduzidos de dimensão pequena. Estes são, finalmente, obtidos a partir do método de Galerkin usando-se como funções teste os POMs. Esta metodologia é, normalmente, chamada de método de Karhunen-Loève-Galerkin (KLG). É interessante notar que no caso da KLE ser aplicada a dados coletados de um experimento físico, é possível a formulação de um modelo matemático para um sistema dinâmico sem qualquer tipo de conhecimento anterior sobre ele. Este fato constitui-se em outra grande motivação para o estudo deste método.

Revisão bibliográfica

A expansão de Karhunen-Loève surgiu na literatura de análise e processamento de sinais, onde também é conhecida como análise de componentes principais (*principal components analysis* ou PCA). É uma ferramenta usada na compressão de sinais e logo sua aplicação foi estendida para o processamento de imagens. Para maiores detalhes sobre a história da decomposição, consultar [4, 8].

As primeiras aplicações da KLE, no âmbito da engenharia mecânica, surgiram no estudo de escoamentos turbulentos [16], onde ela também tornou-se conhecida como decomposição ortogonal própria. Turbulência é um fenômeno extremamente complexo, normalmente abordado sob o ponto de vista estocástico e cujo estudo por métodos tradicionais, até agora, não foi possível. Entretanto, anos de observação serviram para detetar a existência de estruturas coerentes nestes escoamentos, de forma que a KLE tornou-se uma poderosa ferramenta nas pesquisas sobre turbulência, através da determinação e posterior análise da interação destas estruturas. Além disso, o uso dos POMs no método de Galerkin fornece um modelo reduzido que preserva o caráter não-linear intrínseco da turbulência, permitindo o estudo de fenômenos como ciclos limite e bifurcações.

Um tratamento extremamente completo e rigoroso da expansão foi apresentado por Sirovich, em [26, 27, 28]. No primeiro artigo, toda a teoria é desenvolvida de forma bem geral, ou seja, considerando-se um campo vetorial multidimensional complexo e as principais propriedades são demonstradas, ainda que de maneira bastante sucinta. Neste mesmo artigo, também é apresentado um novo método de construção prática da expansão, conhecido como método dos retratos (*snapshot method*). Até então, só conhecia-se o chamado método direto. No segundo artigo, discute-se de que maneira certas simetrias existentes em sistemas físicos podem simplificar a implementação da decomposição, o que é exemplificado com alguns problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor. Finalmente, no terceiro artigo, Sirovich mostra como a expansão pode ser usada juntamente com o método de Galerkin para produzir um sistema de dimensão reduzida que, ainda assim, reproduz as características do sistema original. Também discute a robustez do método relativamente à variação de alguns parâmetros presentes nos exemplos anteriormente discutidos.

Um trabalho didático sobre a expansão foi elaborado por Newman, em [20, 21], que, apesar de baseado em grande parte nos artigos de Sirovich citados acima, discute de forma muito mais profunda as hipóteses necessárias à aplicação da expansão a sistemas dinâmicos em geral. Infelizmente, o desenvolvimento teórico só foi feito para o caso escalar. Na segunda parte, aplica-se a metodologia a um problema simples de difusão de calor, servindo para ilustrar suas principais propriedades. Apresentam-se, ainda, os resultados da aplicação da KLE na modelagem e simulação de um processo de fabricação de grande interesse para a indústria de semicondutores: a deposição termo-química rápida de vapor (*rapid thermal chemical vapor deposition* ou RTCVD).

Em uma generalização importante da expansão, Breuer e Sirovich mostraram, em [3], como ela pode ser usada para determinação das autofunções de operadores lineares quaisquer. Este resultado está intimamente relacionado com a determinação dos modos de vibração de estruturas lineares, como será discutido neste texto. Como aplicação, os autores estudaram a determinação das autofunções do operador Laplaciano, no caso da vibração de uma membrana em dois domínios espaciais distintos: um retângulo para o qual há solução analítica e um domínio em forma de estádio, onde esta inexistente. Há, ainda, neste artigo, uma discussão cuidadosa a respeito do esforço computacional e custo de armazenamento de dados necessários à construção prática da decomposição usando-se ambos os métodos, o direto e o dos retratos.

Uma possível extensão da abordagem tradicional foi proposta por Sirovich *et al.* em [29]. Neste trabalho, o tensor autocorrelação foi calculado a partir da derivada temporal do campo vetorial e não diretamente deste,

como usualmente é feito. Teoricamente, o uso da derivada do campo ofereceria uma maior quantidade de informações, permitindo o uso de menos modos para representação da dinâmica.

Park e Cho discutem, em [23], o uso dos POMs como funções teste no método de Galerkin, para obtenção de um modelo de ordem reduzida no caso de sistemas de parâmetros distribuídos (sistemas contínuos). Como exemplo, foi estudado um problema de condução de calor não-linear, em um domínio irregular. Alguns resultados interessantes obtidos foram a necessidade de aplicação do método dos retratos de maneira não-uniforme, para uma boa representação da dinâmica transiente, e a robustez do modelo reduzido, o qual foi capaz de reproduzir extremamente bem a dinâmica, no caso de uma condição de contorno variando de forma aleatória. Para alcançar este objetivo, no entanto, notou-se que o número de modos usados deveria ser tal que a energia contida neles chegasse a 99,9999%, no caso deste problema específico, (a recomendação usual feita por Sirovich [26] é de 99%). Ainda com relação à robustez, também observou-se que a variação do parâmetro difusividade da equação de condução não afetava de forma significativa a capacidade do modelo reduzido, obtido com um determinado valor deste parâmetro, de conseguir simular bem o sistema original para os outros valores. As soluções fornecidas pelo modelo reduzido eram comparadas com a solução *exata* obtida através do método de diferenças finitas.

Paralelamente, Graham e Kevrekidis [6] publicaram um artigo destacando as duas principais limitações da aplicação tradicional da decomposição na geração de um modelo reduzido não-linear via projeção de Galerkin. A primeira seria o fornecimento de informações úteis perto de apenas um estado final particular do sistema (atrator), sendo que pode haver mais de um estado possível a depender da condição inicial. Foi proposta, então, o uso de várias trajetórias no espaço de fase para o cálculo dos POMs, diferentemente do que é usualmente feito, quando o método dos retratos é aplicado a um conjunto de dados obtidos de uma única trajetória. Todavia, também ressaltou-se que esta forma de aplicação é muito mais difícil de ser implementada experimentalmente. A segunda limitação estudada foi o fato de eventos dinâmicos raros, porém de importância em alguns sistemas, serem desprezados ou minimizados pela abordagem clássica. Para contornar este problema, os autores propõem a amostragem dos dados necessários à aplicação do método dos retratos baseada no comprimento de arco da trajetória, no espaço de fase, em vez de no tempo, como usualmente é feito.

A interpretação geométrica da KLE é particularmente bem apresentada por Tamura *et. al* em [34], onde ela é usada para estudar o campo de pressão aleatório causado pela ação do vento em prédios. Outros artigos recentes com novas aplicações incluem o uso dos POMs em uma rede neural para previsão do escoamento de dois fluidos miscíveis, óleo e solvente, em meios porosos [30] e a solução do problema inverso de convecção natural, isto é, a partir da medição de temperatura em diversos pontos de um domínio espacial, identificar o comportamento temporal da fonte de calor relevante.

O trabalho original de Lumley [16] deu origem a inúmeras outras aplicações na área de termociências. O uso destas fontes e a continuação da sua própria pesquisa com inúmeros colaboradores acabou por resultar na publicação de um livro com dois deles [8]. Esta referência apresenta um tratamento extremamente completo e rigoroso da decomposição, dentro do contexto bem mais amplo e matemático da teoria de sistemas dinâmicos. Toda a teoria é aplicada a inúmeros problemas de turbulência, onde busca-se um entendimento sobre fenômenos complexos modelados pela equação de Navier-Stokes, através da obtenção de modelos reduzidos representados por sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Uma outra linha de pesquisa recente utiliza a KLE como ferramenta para detecção de falhas em um sistema qualquer, através do monitoramento de um determinado sinal característico. Como exemplo, podemos citar os artigos de Tumer *et al.* [35, 36], nos quais estuda-se como a decomposição pode fornecer informações a respeito de problemas em processos de fabricação, em especial em operações de torneamento mecânico e processos de sinterização seletiva a *laser*. Na mesma linha, Feldmann *et al.* [5] propuseram usar a KLE para monitorar e prevenir possíveis falhas nos trilhos utilizados pelo trem alemão de alta velocidade ICE (*Intercity Express*), através da decomposição de sinais de aceleração obtidos com um vagão instrumentado. Neste trabalho, a KLE foi aplicada não à variação em relação ao sinal médio, mas sim à variação em relação a um sinal inicial tomado como padrão.

Na área de dinâmica estrutural, o uso da KLE para análise e simulação é bem recente e ainda limitado. Kreuzer e Kust [11] a utilizaram na análise da vibração torcional de colunas de perfuração, modeladas como um eixo esbelto linear sujeito a uma condição de contorno não-linear, em uma das extremidades, representando o efeito de corte da broca. Steindl *et al.* [32] utilizaram os POMs para obter modelos de dimensão reduzida via projeção de Galerkin, para o caso da vibração de tubos com escoamento interno de fluidos. Ma e Vakakis [18] estudaram a dinâmica transiente de um pórtico bidimensional constituído por elementos de viga acoplados por juntas fixas e sujeitos a vibrações axial e de flexão. A vantagem da KLE, neste caso, é que, por não lidar com modos físicos, não há nenhuma limitação com relação ao fato deste tipo de estrutura extremamente flexível e com baixo amortecimento possuir altas densidades modais. Neste artigo, estudou-se o comportamento dos POMs para diferentes formas e direções de forçamento.

Feeny e Kappagantu [4] mostraram a relação existente entre os modos de vibração de estruturas modeladas

por sistemas de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e os modos empíricos, obtidos através da KLE. Discute-se, neste trabalho, a convergência dos modos empíricos para os modos de vibração, quando o amortecimento tende a zero e também o que acontece no caso em que a estrutura está submetida a forçamentos harmônicos. Infelizmente, só foi tratado um caso muito simples: um massa-mola-amortecedor com três graus de liberdade.

Kim [10] apresentou pela primeira vez o emprego da KLE no domínio da frequência. Esta aplicação é vista como uma extensão natural da aplicação no domínio do tempo, para sistemas lineares, e pode, igualmente, ser usada na geração de modelos reduzidos. Foram estudados dois sistemas com entrada e saída únicas. A grande dificuldade desta abordagem surge no caso de sistemas com múltiplas entradas e saídas. A escolha de quais pares entrada-saída devem ser utilizados para a geração da resposta em frequência ainda é um problema a ser investigado.

Lall *et. al* [13] propuseram uma nova estratégia para o controle de sistemas não-lineares baseada na KLE. Ela consiste em usar a expansão para construir gramianos de controlabilidade e observabilidade empíricos, os quais, por sua vez, são empregados na obtenção de um modelo reduzido através de truncamento balanceado. Mostra-se, também, que os gramianos empíricos reduzem-se aos gramianos tradicionais, no caso de sistemas lineares.

Atualmente, a metodologia tem despertado interesse crescente da comunidade envolvida com dinâmica estrutural. Trabalhos recentes incluem o de Ma *et. al* [17], onde modos normais não-lineares localizados são estudados em estruturas acopladas por elementos fracamente não-lineares, o de Lenaerts *et. al* [14], em que é proposto um procedimento de otimização baseado na diferença entre os POMs obtidos de dados experimentais e numéricos, para a identificação de parâmetros não-lineares em estruturas mecânicas, o de Azeez e Vakakis [2] onde sistemas de vibroimpacto são estudados com o auxílio da KLE e, finalmente, o de Steindl e Troger [31] que realiza uma comparação entre o método de Galerkin linear usando POMs como funções teste e o método Galerkin não-linear, na redução de dimensão de sistemas não-lineares.

Hipóteses sobre a dinâmica

Hipóteses básicas

Seja $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ a variável de estado a qual define o campo vetorial que descreve a dinâmica de um sistema, em um domínio espacial \mathcal{D} e em um intervalo de tempo $T = [0, \infty)$.

Quando esta dinâmica é extremamente dependente de condições iniciais, de maneira que pequenas perturbações nestas condições iniciais fornecem realizações completamente diferentes e sendo estas perturbações indetectáveis pelos sensores disponíveis, uma forma de se modelar o campo associado é como um processo estocástico vetorial, tendo como parâmetros o tempo e o espaço. Este tipo de dinâmica é justamente aquela presente em escoamentos turbulentos e por isso não é de se surpreender que esta metodologia tenha sido, inicialmente, aplicada ao estudo destes escoamentos [6, 26, 27, 28]. Dinâmicas mais simples também podem ser tratadas por esta metodologia, como será mostrado adiante.

Pensando desta forma, temos que cada condição inicial fornece uma realização particular da dinâmica a qual pode ser vista como o resultado de uma experiência envolvendo o fenômeno físico aleatório. Um modelo probabilístico associa a cada resultado da experiência um ponto ω chamado ponto amostra e o conjunto de todos os pontos amostra ω é denominado de espaço de amostras, denotado por Ω [1]. Define-se um evento como um subconjunto de Ω ao qual pode-se associar uma medida de probabilidade, sendo que esta será definida mais à frente. Assim, todo evento é um subconjunto do espaço de amostras, porém nem todo subconjunto do espaço de amostras é um evento. Sabe-se que é possível se obter alguns subconjuntos de um espaço de amostras não enumerável sobre os quais não se pode fazer afirmações consistentes sobre suas medidas de probabilidade [15]. Felizmente, estes conjuntos não possuem interesse em engenharia e podemos afirmar que, na prática, qualquer subconjunto de Ω , selecionado com bom senso, irá constituir um evento [1].

A família \mathcal{A} de subconjuntos A_i do espaço de amostra Ω aos quais podemos associar medidas de probabilidade satisfaz as seguintes propriedades:

1. $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow A_i^c \in \mathcal{A}$.
2. $A_i \in \mathcal{A}, \quad i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Diz-se, então, que \mathcal{A} é fechada com relação às operações de complementação e união. Como as operações de interseção e diferença podem ser obtidas indiretamente a partir das duas primeiras, conclui-se que \mathcal{A} também é fechada relativamente a estas outras duas operações. Tal família é chamada de σ -álgebra.

Podemos, agora, definir medida de probabilidade. Esta é uma função P cujo domínio é a σ -álgebra e cujo contra-domínio é o intervalo $[0, 1]$ na reta real. Há algumas formas de se definir a função P . A definição como

freqüência relativa diz que a probabilidade $P(A)$ de um evento A é o limite

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}, \quad (1)$$

sendo n_A o número de vezes que o evento A ocorreu e n o número de vezes que a experiência foi executada. Apesar desta definição parecer razoável, seu uso como base de uma teoria dedutiva é questionável, pois apesar de os números n_A e n resultados de um experimento físico poderem ser grandes, sempre serão finitos e sua razão não poderá ser igualada e nem mesmo aproximada por um limite [22].

Já a definição clássica caracteriza a probabilidade de um evento sem a necessidade de experimentação. Ela é dada por

$$P(A) = \frac{N_A}{N}, \quad (2)$$

sendo N o número de possíveis resultados e N_A o número de resultados favoráveis ao evento A , considerando-se que todos os resultados são equiprováveis. A definição clássica também pode ser questionada em várias bases [22]. Uma delas, por exemplo, é o uso do termo *equiprováveis*, fazendo, na definição, uso do conceito a ser definido.

O tratamento axiomático, apesar de relativamente recente, talvez seja a melhor forma de se definir a medida de probabilidade e ainda a mais usada. Ele é baseado em três axiomas e toda a teoria é desenvolvida a partir deles. O primeiro axioma diz que a probabilidade de um evento é um número não-negativo:

$$P(A) \geq 0. \quad (3)$$

O segundo define a probabilidade do espaço de amostras, também chamado de evento certo:

$$P(\Omega) = 1, \quad (4)$$

Finalmente, o terceiro axioma diz que se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos, isto é, os conjuntos A e B são disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), então

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B). \quad (5)$$

Há, ainda, uma quarta forma de se definir a medida de probabilidade, combinando-se a definição axiomática e a clássica, sendo que esta é tratada como uma hipótese e os axiomas tornam-se teoremas [22].

Desta forma, modelar a dinâmica como um processo estocástico consiste, inicialmente, em ver o campo vetorial como uma família de vetores aleatórios sujeita a dois parâmetros, tempo e espaço:

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^k\}_{t \in [0, \infty), \mathbf{x} \in \mathcal{D}}. \quad (6)$$

Isto significa que considerando o espaço de amostras Ω como o conjunto de todas as realizações determinísticas possíveis, a escolha de um evento $\omega \in \Omega$ fornece uma das possíveis realizações da dinâmica

$$\mathbf{u}(\cdot, \cdot, \omega) : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^k. \quad (7)$$

Deve ser notado que o desenvolvimento aqui apresentado considera o caso mais geral possível, em que o campo vetorial é complexo e de dimensão k . Em muitos problemas, estaremos trabalhando com campos reais com, no máximo, três dimensões, ou seja, \mathbb{R}^3 . Entretanto, este e outros casos particulares poderão ser, imediatamente, obtidos a partir do desenvolvimento geral.

A segunda parte de uma modelagem estocástica seria, então, a definição da σ -álgebra, a partir da descrição do espaço de amostras Ω , e da medida de probabilidade definida por uma função densidade de probabilidade, associadas ao problema dinâmico. Obviamente, há grandes dificuldades envolvidas na formulação desta descrição matemática [20]. Felizmente, a metodologia utilizada neste trabalho não necessita destas especificações, como será visto mais à frente. Todavia, conceitos da teoria da probabilidade como valor esperado reterão seu significado usual. Por exemplo, o campo vetorial médio é definido como

$$E[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = \int_{\Omega} \mathbf{u} p_{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}(\mathbf{U}) d\mathbf{U}, \quad (8)$$

sendo $p_{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}(\mathbf{U})$ a função densidade de probabilidade, de maneira que a variação com relação ao campo médio dada por

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - E[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \quad (9)$$

é um processo estocástico com média nula, isto é, $E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{0}$.

Processos estocásticos de segunda ordem, estacionariedade e ergodicidade

Há, ainda, outras hipóteses a serem feitas sobre o campo vetorial. Uma variável aleatória de segunda ordem u satisfaz $E[|u|^2] < \infty$. Um processo estocástico de segunda ordem é definido como uma família de variáveis aleatórias de segunda ordem. Será feita a hipótese de que ambos os campos vetoriais $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\}$ e $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\}$ são processos estocásticos de segunda ordem. Esta suposição é necessária para podermos definir os momentos de segunda ordem do processo [20]. Para $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\}$, temos que sua média é definida por

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, t) = E[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]. \quad (10)$$

A autocovariância do processo é o tensor

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = E[(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, t)) \otimes (\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}', t') - \bar{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}', t'))], \quad (11)$$

onde a barra superior indica o complexo conjugado e o símbolo \otimes o produto tensorial ou externo. Finalmente, o tensor autocorrelação é dado por

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = E[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}', t')]. \quad (12)$$

Já o campo $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\}$ é, por definição, um processo de média zero, ou seja, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ e, para este caso especial, os tensores autocovariância e autocorrelação se igualam, $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \mathbf{R}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$. É possível, ainda, definir o tensor autocorrelação espacial, para este campo, como

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t) = E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', t)]. \quad (13)$$

Uma propriedade importante da autocorrelação espacial e que será formalmente demonstrada adiante é o fato de ela ser Hermitiana, isto é,

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t) = \mathbf{R}^*(\mathbf{x}', t, \mathbf{x}, t) \quad (14)$$

ou, analogamente,

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \bar{R}_{ji}(\mathbf{x}', \mathbf{x}). \quad (15)$$

Outra hipótese necessária ao desenvolvimento da expansão é o da estacionariedade no sentido estrito do processo estocástico. Esta definição implica na função densidade de probabilidade conjunta do campo $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_1 + t_0), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_2 + t_0), \dots, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_n + t_0)\}$ não depender de t_0 , $\forall n$.

Há duas razões pelas quais se fazem estas hipóteses. A primeira é que gostaríamos que o tensor autocorrelação espacial do processo seja independente do tempo. Entretanto, para isso, bastaria garantir a estacionariedade no sentido amplo do processo, caso em que a função autocorrelação é apenas uma função da diferença entre os tempos, ou seja,

$$E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t + t_0) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', t' + t_0)] = E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', t')], \quad \forall t_0 \in [0, \infty). \quad (16)$$

Contudo, a estacionariedade no sentido estrito implica, necessariamente, na estacionariedade no sentido amplo, de forma que o tensor autocorrelação do processo será independente do tempo:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', t)], \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (17)$$

A segunda razão pela qual é feita a hipótese de estacionariedade no sentido estrito é porque esta é uma condição necessária para se garantir a ergodicidade do processo. Por ergodicidade, entenda-se a propriedade de se poder estimar média e momentos do processo (sobre todos os pontos amostras ou realizações possíveis) a partir de médias temporais tomadas sobre apenas uma realização do mesmo. Desta forma, exemplificando com a média, temos que ela poderia ser estimada por

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt, \quad (18)$$

sendo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ uma função típica do processo.

Experimentalmente, trabalha-se com dados amostrados, caso em que o valor esperado de $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\}$ será estimado pela média

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_n) \quad (19)$$

de N amostras $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_n)$ de $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Isto significa que a partir de um único experimento, é possível se obter os momentos do processo, não sendo necessário repeti-lo, simplificando enormemente o cálculo. Definindo-se um

atrator, de maneira pouco rigorosa, como um conjunto no espaço de fase para o qual todas as soluções com condições iniciais suficientemente próximas se dirigem, a ergodicidade implica em médias temporais e médias sobre a região do espaço de fase contendo o atrator coincidirem. Isto, por sua vez, significa que as condições iniciais são *esquecidas* com o passar do tempo [6, 8]. Portanto, um sistema dinâmico contendo mais de um atrator não pode ser ergódico, já que condições iniciais diferentes levam a regiões distintas do espaço de fase, invalidando a Eq. (18).

Em geral, a condição de ergodicidade é muito restritiva, sendo difícil prová-la para processos físicos, até porque, em situações práticas, não existem processos completamente estacionários. Entretanto, a menos que razões muito fortes o impeçam, é usual supor ergodicidade em tais processos [1]. Além disso, é impossível o cálculo de médias sobre integrais infinitas. Há, então, duas escalas de tempo no problema: aquele necessário para a média convergir a um valor preciso e o tempo característico da não-estacionariedade. Evidentemente, o primeiro deve ser bem menor que o segundo, a fim da aproximação manter-se válida.

A última hipótese a ser feita diz respeito à continuidade no sentido da média quadrática do processo $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\}$. Um processo estocástico (escalar) de segunda ordem $\{w(t)\}$ é dito contínuo na média quadrática se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E \left[|w(t + \epsilon) - w(t)|^2 \right] = 0. \quad (20)$$

No caso deste trabalho, será suposto que o processo estocástico vetorial é contínuo na média quadrática em seu argumento espacial, de maneira que a expressão acima é generalizada na forma

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E [(\mathbf{v}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \otimes (\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, t) - \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t))] = \mathbf{0}. \quad (21)$$

A continuidade na média quadrática é necessária para se garantir a continuidade da autocorrelação espacial em seu domínio \mathcal{D} , condição esta essencial na teoria de decomposição espectral deste operador a ser apresentada mais à frente. É simples verificar porque a continuidade do processo implica na continuidade da autocorrelação. Expandindo (21) e usando o fato de que $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ é Hermitiana (14), obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, t)] - E[\mathbf{v}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)] - \\ - E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, t)] + E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)] = \\ = \mathbf{R}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}) - \mathbf{R}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \\ = \mathbf{R}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}) - 2\mathbf{R}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (22)$$

Logo, podemos observar que a expressão acima tenderá a zero, quando $\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \mathbf{0}$.

Além disso, descontinuidades em $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ poderiam levar a valores negativos do seu espectro de potência e energias negativas não são razoáveis do ponto de vista físico.

Expansões ortogonais em espaços de Hilbert

O conceito de espaços de Hilbert é fundamental no desenvolvimento deste trabalho. No entanto, não se tem por objetivo apresentar aqui todo o escopo da análise funcional envolvido no tema, mas somente os conceitos básicos com os quais muitas vezes o engenheiro não toma contato e que são intrínsecos e de extrema importância no entendimento deste e de outros métodos espectrais, tais como análise modal e séries de Fourier. Uma apresentação bem mais profunda e onde está baseado a maior parte deste material pode ser encontrada em [12].

Espaço vetorial

Inicialmente, definiremos espaço vetorial. Como será visto, este conceito pode ser muito mais geral do que aquele comumente utilizado por engenheiros. Um espaço vetorial sobre um campo K é um conjunto X de elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ (chamados *vetores*) sobre o qual são definidas duas operações algébricas: a soma vetorial e a multiplicação de vetores por escalares, ou seja, por elementos de K . K é denominado campo escalar e o espaço vetorial é dito real, quando $K = \mathbb{R}$, e complexo, quando $K = \mathbb{C}$.

A soma vetorial associa a cada par (\mathbf{x}, \mathbf{y}) de vetores um novo vetor $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ chamado de *soma* de \mathbf{x} e \mathbf{y} de tal forma que as seguintes propriedades sempre valem: a soma é comutativa e associativa, isto é, para todos os vetores, temos que

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.

Além disso, existe um vetor $\mathbf{0}$, chamado de *vetor nulo* e, para todo vetor x , existe um vetor $-x$, de maneira que, para qualquer vetor do espaço, temos

$$3. \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}.$$

$$4. \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Já a multiplicação por escalares, associa a cada vetor \mathbf{x} e escalar α um vetor $\alpha\mathbf{x}$, chamado de *produto* de α por \mathbf{x} , de forma que para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ e $\alpha, \beta \in K$, observa-se que

$$1. \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}.$$

$$2. 1\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

$$3. \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}.$$

$$4. (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x},$$

sendo estas duas últimas leis distributivas.

O exemplo mais imediato de espaço vetorial é o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n em que os elementos do conjunto que o definem são ênuplas de números reais, escritos na forma $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Outro exemplo simples, porém um pouco menos intuitivo é o espaço denotado por $C[a, b]$, em que cada ponto é uma função real e contínua, com variável independente também real t , definida no intervalo $J = [a, b]$. As operações algébricas são, simplesmente,

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t),$$

$$(\alpha\mathbf{x})(t) = \alpha\mathbf{x}(t).$$

Espaço métrico

Antes de introduzirmos os espaços de Hilbert, precisamos do conceito de espaços métricos, os quais admitem duas importantes classificações entre outras possíveis: eles podem ser completos ou incompletos e separáveis ou não. Além disso, serão apresentadas algumas definições básicas da teoria de conjuntos, essenciais à descrição dos espaços métricos.

Um espaço métrico é um par (X, d) , sendo X um conjunto e d uma *métrica em X* , isto é, uma função definida em $X \times X$ tal que para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ temos os seguintes axiomas:

$$1. d \text{ é real, finita e não-negativa.}$$

$$2. d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

$$3. d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

$$4. d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Este último axioma também é conhecido como desigualdade triangular, uma vez que pode-se fazer uma analogia com a geometria elementar, a qual garante que o lado de um triângulo nunca será maior que a soma dos outros dois.

O espaço Euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 com o qual estamos habituados é um espaço métrico. Dados dois elementos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, temos que a métrica definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \quad (23)$$

atende aos quatro axiomas. O espaço funcional $C[a, b]$ apresentado anteriormente também é um espaço métrico, com métrica dada por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{t \in J} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|.$$

Apresentaremos, agora, uma série de definições necessárias à caracterização da separabilidade de um espaço métrico.

Uma ε -vizinhança de um ponto \mathbf{x}_0 de um espaço métrico X é o conjunto aberto

$$B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in X \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \varepsilon\}. \quad (24)$$

$B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ também é chamado de bola aberta com centro \mathbf{x}_0 e raio ε . Por uma vizinhança, entenda-se qualquer subconjunto de X (aberto ou fechado) contendo uma ε -vizinhança de \mathbf{x}_0 .

Seja M um subconjunto de um espaço métrico X . Então, um ponto \mathbf{x}_0 de X (que pode ou não estar em M) é dito um *ponto de acumulação* de M se toda vizinhança de \mathbf{x}_0 contiver pelo menos um ponto $\mathbf{y} \in M$ diferente de \mathbf{x}_0 . O conjunto de todos os pontos de acumulação de M é chamado de *fecho* de M e denotado por

\overline{M} . (Deve-se observar que esta é a mesma notação usada para complexo conjugado, porém será evidente no contexto a qual dos dois casos ela se refere). No caso em que $\overline{M} = X$, então M é dito *denso* em X . Finalmente, X é dito *separável* se possuir um subconjunto enumerável que seja denso em X . Por subconjunto enumerável, entenda-se um subconjunto finito ou, então, um subconjunto infinito sobre o qual é possível estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais \mathbb{N} . Como será visto mais à frente, espaços métricos separáveis são mais simples do que os não-separáveis [12].

Outra definição muito importante e essencial para a definição de espaços de Hilbert é a de espaço métrico completo. Para defini-lo, precisamos dos conceitos de seqüências convergentes e de Cauchy.

Uma seqüência $\{\mathbf{x}_n\}$ em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita convergente se existe um $\mathbf{x} \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0, \quad (25)$$

sendo \mathbf{x} denominado o limite da seqüência $\{\mathbf{x}_n\}$.

Uma seqüência $\{\mathbf{x}_n\}$ em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita de *Cauchy* se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe um $N(\varepsilon)$ tal que

$$d(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) < \varepsilon, \quad \forall m, n > N. \quad (26)$$

O espaço X é dito *completo* se toda seqüência de Cauchy em X converge. Pode-se provar [12] que a recíproca é sempre verdadeira, ou seja, toda seqüência convergente em um espaço métrico é de Cauchy.

Espaços produto interno e de Hilbert

Um espaço produto interno nada mais é do que um espaço vetorial X com um produto interno definido em X . Um espaço de Hilbert \mathcal{H} é, simplesmente, um espaço produto interno completo (na métrica induzida pelo produto interno). Aqui, um *produto interno* em X é um mapa com domínio $X \times X$ e contra-domínio no campo escalar K determinado por X , isto é, a cada par de vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} há um escalar associado o qual é escrito como $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ e chamado de *produto interno* de \mathbf{x} e \mathbf{y} . Para todos os vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ e escalares α , o produto interno satisfaz

1. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.
2. $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$.
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$,
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Um produto interno em X define a seguinte *norma* também em X

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \quad (27)$$

e uma *métrica* em X dada por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}. \quad (28)$$

O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n é um espaço de Hilbert com produto interno (neste caso também chamado de produto escalar) definido por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

e cuja norma pode ser obtida a partir de

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

A métrica obtida a partir de (28) já foi mostrada em (23).

Talvez o conceito mais importante emergindo da definição de espaço produto interno seja o de ortogonalidade. Um elemento \mathbf{x} de um espaço produto interno X é dito *ortogonal* a um elemento $\mathbf{y} \in X$ se

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \quad (29)$$

caso em que também escreve-se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Um *conjunto ortogonal* Q em um espaço produto interno X é um subconjunto $Q \subset X$ cujos elementos são ortogonais aos pares. Um *conjunto ortonormal* $P \subset X$ é um conjunto ortogonal cujos elementos possuem norma unitária, isto é, para todos os vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \\ 1, & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{cases} \quad (30)$$

Conjuntos ortonormais de interesse em espaços de Hilbert são aqueles que contêm um *número suficiente* de elementos, de maneira que todo elemento do espaço possa ser representado ou aproximado com a devida precisão através do uso deste conjunto. Para isso, define-se um conjunto ortonormal *total* P em um espaço de Hilbert \mathcal{H} como aquele capaz de gerar um conjunto com todas as combinações lineares de seus elementos (denotado por $\text{ger}\{P\}$) que é denso em \mathcal{H} , ou seja,

$$\overline{\text{ger}\{P\}} = \mathcal{H}. \quad (31)$$

Desta forma, sendo P total em \mathcal{H} , garante-se que não existe nenhum $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ diferente de zero que seja ortogonal a todo elemento de P , isto é, temos que

$$\mathbf{x} \perp P \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (32)$$

Pode-se provar que, em todo espaço de Hilbert $\mathcal{H} \neq \{\mathbf{0}\}$, existe um conjunto ortonormal total [12]. Além disso, uma vez que todo conjunto ortonormal é linearmente independente, muitas vezes chama-se um conjunto P satisfazendo a (31) ou (32) de uma base ortonormal para \mathcal{H} . Todavia, existem espaços de Hilbert de dimensão infinita cujo conjunto ortonormal total é não-enumerável. Como estes casos não são de interesse em engenharia, definiremos uma *base* (ou base de Schauder) $\{\mathbf{e}_n\}$ em espaços de Hilbert como um conjunto ortonormal total enumerável, de maneira que cada elemento $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ possua uma única *expansão* com respeito a $\{\mathbf{e}_n\}$, caracterizada por uma também única sequência de escalares $\{\alpha_n\}$, da forma

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{e}_n \quad (33)$$

e com a propriedade de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n)\| = 0. \quad (34)$$

A simplicidade de espaços de Hilbert separáveis anteriormente citada surge exatamente neste ponto da teoria, pois prova-se que sendo \mathcal{H} separável, então todo conjunto ortonormal em \mathcal{H} é enumerável, fornecendo uma base para a expansão de qualquer vetor.

A grande vantagem de uma base sobre um conjunto somente linearmente independente é que os coeficientes da expansão (33) podem ser facilmente determinados fazendo-se o produto interno do vetor por cada um dos elementos da base, ou seja,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j \rangle = \alpha_j. \quad (35)$$

Desta forma, a expansão (33) pode ser reescrita como

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n, \quad (36)$$

sendo que cada produto interno $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle$ é chamado de *coeficiente de Fourier* de \mathbf{x} com respeito ao conjunto ortonormal $\{\mathbf{e}_n\}$. Além da facilidade da determinação dos coeficientes, outra vantagem da ortonormalidade torna-se aparente se quisermos adicionar mais um termo $\alpha_{n+1} \mathbf{e}_{n+1}$ para representar

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \alpha_{n+1} \mathbf{e}_{n+1} \in \text{ger}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}\}.$$

Neste caso, só é necessário calcular-se um coeficiente a mais, já que os outros permanecem inalterados.

Deve-se observar, ainda, que a convergência da expansão representada em (34) é automaticamente garantida, no caso de uma base, pela relação de Parseval:

$$\sum_n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n \rangle|^2 = \|\mathbf{x}\|^2. \quad (37)$$

Finalmente, é importante ressaltar que uma base $\{\mathbf{e}_n\}$ não é única para um dado espaço de Hilbert, podendo esta ser usada para gerar uma infinidade de outras bases através da relação

$$\mathbf{f}_m = \sum_n \alpha_{mn} \mathbf{e}_n, \quad (38)$$

para coeficientes satisfazendo

$$\sum_k \bar{\alpha}_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij}. \quad (39)$$

Espaços de Hilbert isomórficos

Um exemplo importante de um espaço de Hilbert que será extensivamente usado neste trabalho é o espaço denotado por $\mathcal{L}_2^n(\mathcal{D})$ cujos elementos são funções vetoriais (reais ou complexas) satisfazendo

$$\mathbf{f} \in \mathcal{L}_2^n(\mathcal{D}) \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x} < \infty \quad (40)$$

e com produto interno definido por

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{\mathcal{D}} \sum_j f_j(\mathbf{x}) \bar{g}_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (41)$$

sendo $j = 1, \dots, \dim \mathcal{L}_2^n(\mathcal{D})$.

Uma variável aleatória x é dita derivada de uma operação linear sobre um processo estocástico de segunda ordem $\{X(t)\}$ se $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i X(t_i)$ ou se x é o limite na média quadrática de uma seqüência de combinações lineares como esta [20]. A coleção de todas as variáveis aleatórias derivadas desta forma de um dado processo $\{X(t)\}$ é um espaço de Hilbert de dimensão infinita que será denotado por \mathcal{H}_X e com produto interno dado por

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_X} = E[x\bar{y}]. \quad (42)$$

Ambos os espaços de Hilbert acima são separáveis [20] e, portanto, possuem uma base ortonormal enumerável.

A fim de definirmos o que são espaços de Hilbert isomórficos, é necessário o conceito de operadores lineares. Um operador linear \mathbf{T} é um mapeamento com as seguintes propriedades:

1. o domínio $D(\mathbf{T})$ de \mathbf{T} é um espaço vetorial e a imagem $I(\mathbf{T})$ pertence a um espaço vetorial sobre o mesmo campo.
2. Para quaisquer vetores \mathbf{x}, \mathbf{y} pertencentes a $D(\mathbf{T})$ e escalares α , temos que

$$\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{y}, \quad (43)$$

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{x}. \quad (44)$$

Um isomorfismo de um espaço de Hilbert \mathcal{H} em um espaço de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$ sobre um mesmo campo é um operador linear bijetivo $\mathbf{T} : \mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ tal que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$,

$$\langle \mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad (45)$$

Como \mathbf{T} é linear, ele preserva a estrutura do espaço vetorial e, portanto, \mathbf{T} é também uma isometria (preserva distâncias). Por isso e pela bijetividade de \mathbf{T} , segue que \mathcal{H} e $\tilde{\mathcal{H}}$ são indistinguíveis tanto métrica quanto algebricamente. São o mesmo espaço, a não ser pela natureza dos seus elementos.

Pode-se provar [12] que dois espaços de Hilbert \mathcal{H} e $\tilde{\mathcal{H}}$, ambos reais ou complexos, são isomórficos se e somente se possuem a mesma dimensão. Logo, pode-se concluir que os espaços \mathcal{L}_2^n e \mathcal{H}_X descritos acima são isomórficos e, portanto, indistinguíveis como espaços de Hilbert.

Vejam, agora, como aplicar a teoria acima ao nosso campo vetorial $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\}$. Devido à hipótese de estacionariedade no sentido estrito com relação ao parâmetro tempo, este pode ser considerado como fixo e o campo $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\}$ como um conjunto de variáveis aleatórias parametrizadas pela variável espacial \mathbf{x} . Ao se interpretar o campo desta maneira, este será denotado por $\{v_{j\mathbf{x}}(t)\}$, sendo que v_j indica uma das componentes de \mathbf{v} .

O espaço de Hilbert \mathcal{H}_v é definido como a coleção de todas as variáveis aleatórias derivadas de operações lineares sobre processo estocástico $\{v_{j\mathbf{x}}(t)\}$, isto é,

$$y(t) = \sum_{k=1}^M \alpha_k v_{1\mathbf{x}_k}(t) + \sum_{k=1}^R \beta_k v_{2\mathbf{x}_k}(t) + \dots + \sum_{k=1}^S \gamma_k v_{n\mathbf{x}_k}(t), \quad (46)$$

cujos produto interno é a correlação espacial

$$\langle y(t)z(t) \rangle = E[y_{\mathbf{x}}(t)\bar{z}_{\mathbf{x}'}(t)] = R_{yz}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (47)$$

Como foi visto, \mathcal{H}_v possui uma base ortonormal que será denotada por $\{b_1(t), b_2(t), \dots\}$, de forma que pode-se escrever a seguinte expansão:

$$v_{j\mathbf{x}}(t) = \sum_k \sigma_{jk}(\mathbf{x}) b_k(t) \quad (48)$$

ou, analogamente,

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}(t) = \sum_k \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) b_k(t), \quad (49)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}_{\mathbf{x}}(t), b_k(t) \rangle$ os coeficientes de Fourier. Logo, a base consiste em variáveis aleatórias parametrizadas pelo tempo, enquanto os coeficientes de Fourier são funções espaciais $\mathcal{L}_2^n(\mathcal{D})$ completamente determinísticas.

A segunda forma de se interpretar o campo vetorial é considerar que para cada valor de $t \in [0, \infty)$, a escolha de um $\omega \in \Omega$, fornece uma das possíveis realizações da dinâmica, que vem a ser uma função determinística pertencente a $\mathcal{L}_2^n(\mathcal{D})$, isto é, $\mathbf{v}(\cdot, t, \omega) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}^n$. Esta interpretação do campo vetorial será denotada por $\{\mathbf{v}(\cdot, t)\}$. Como é sabido, $\mathcal{L}_2^n(\mathcal{D})$ possui uma base ortonormal $\{\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots\}$, de maneira que também é possível se escrever a expansão

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = \sum_k a_k(t) \psi_k(\mathbf{x}), \quad (50)$$

sendo $a_k(t) = \langle \mathbf{v}(\cdot, t), \psi_k \rangle$ os coeficientes de Fourier. Neste caso, temos que a base é formada por funções espaciais determinísticas \mathcal{L}_2^n , ao passo que os coeficientes de Fourier são variáveis aleatórias dependentes do tempo.

Uma vez que os espaços \mathcal{H}_v e $\mathcal{L}_2^n(\mathcal{D})$ são isomórficos, não importa qual abordagem é seguida. Ambas resultarão na expansão da dinâmica em um somatório de produtos de funções puramente espacial e puramente temporal, sendo as primeiras funções \mathcal{L}_2^n completamente determinísticas e as outras variáveis aleatórias parametrizadas pelo tempo. Todavia, a próxima seção mostrará qual das duas abordagens é efetivamente realizável.

Estruturas coerentes

O objetivo principal desta metodologia é encontrar uma representação do campo vetorial que possa servir para reduzir a dimensão ou complexidade deste, ao mesmo tempo revelando sua estrutura dinâmica e mantendo uma boa capacidade de predição se comparada com o modelo inicial ou com o experimento que deu origem aos dados. Para isso, supõe-se, inicialmente, a existência da expansão

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_k a_k(t) \psi_k(\mathbf{x}) \quad (51)$$

com

$$\langle \psi_k(\mathbf{x}), \psi_l(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathcal{D}} \sum_j \psi_{k_j}(\mathbf{x}) \bar{\psi}_{l_j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{kl} \quad (52)$$

e

$$E[a_p(t) \bar{a}_q(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a_p(t) \bar{a}_q(t) dt = \lambda_p \delta_{pq}, \quad (53)$$

sendo que, nesta última equação, faz-se uso da hipótese de ergodicidade e $a_k \in \mathcal{L}^2(0, T)$. Esta expressão indica que os modos são ortogonais, isto é, a correlação temporal entre eles é nula. Note que se poderia ter suposto o conjunto $\{a_p\}$ ortonormal como em [20], em vez de ortogonal como foi feito. Ambas as abordagens são equivalentes, como ficará claro mais à frente.

É importante notar que a expressão (51) é exatamente a mesma usada em métodos de aproximação tais como Rayleigh-Ritz, Galerkin e modos supostos. A diferença está, obviamente, na escolha das funções espaciais $\{\psi_k(\mathbf{x})\}$. Como será demonstrado nesta e na próxima seção, esta escolha é feita de forma a minimizar o número de funções necessárias para uma boa representação da dinâmica. No caso estrutural, as funções $\{\psi_k(\mathbf{x})\}$ serão, normalmente, deslocamentos medidos ou calculados em diversos pontos do domínio espacial.

Introduzindo a Eq. (51) na equação que define a correlação espacial (17), obtém-se

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = E \left[\sum_k a_k(t) \psi_k(\mathbf{x}) \otimes \sum_l \bar{a}_l(t) \bar{\psi}_l(\mathbf{x}') \right]. \quad (54)$$

Utilizando-se da condição de ortogonalidade (53), a expressão acima reduz-se a

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_k \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}) \otimes \bar{\psi}_k(\mathbf{x}'). \quad (55)$$

Além disso, fazendo-se uso da notação

$$(\mathbf{R}\mathbf{g})_i = \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') g_j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (56)$$

sendo \mathbf{g} alguma função teste e $n = \dim \mathcal{L}_2^n(\mathcal{D})$, pode-se mostrar, para quaisquer duas funções teste \mathbf{f} e \mathbf{g} , que

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{f}, \mathbf{R}\mathbf{g} \rangle &= \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n \overline{R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') g_j(\mathbf{x}')} d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n \overline{E[v_i(\mathbf{x}) \bar{v}_j(\mathbf{x}')] \bar{g}_j(\mathbf{x}')} d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\
&= E \left[\int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n \bar{v}_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}') \bar{g}_j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \right] \\
&= E \left[\int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \bar{v}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n v_j(\mathbf{x}') \bar{g}_j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] = E[\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{g} \rangle] \quad (57)
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{R}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle &= \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f_j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \bar{g}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n E[v_i(\mathbf{x}) \bar{v}_j(\mathbf{x}')] f_j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \bar{g}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= E \left[\int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}') \bar{v}_j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^n v_i(\mathbf{x}) \bar{g}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = E[\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{g} \rangle] \quad (58)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{R}\mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{R}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle. \quad (59)$$

Como, para um operador linear limitado $\mathbf{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, existe um único [12] operador $\mathbf{T}^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$, tal que

$$\langle \mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{T}^*\mathbf{y} \rangle \quad (60)$$

chamado de operador adjunto de \mathbf{T} e porque a hipótese da continuidade de \mathbf{R} implica no fato deste ser um operador limitado, conclui-se das Eqs. (59) e (60) que

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^*. \quad (61)$$

Entretanto, esta é a definição de um operador auto-adjunto ou Hermitiano, o que finaliza a prova das relações (14) e (15).

Ainda, um operador linear Hermitiano $\mathbf{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dito positivo ($\mathbf{T} \geq 0$) se e somente se

$$\langle \mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}. \quad (62)$$

Observando a Eq. (58), pode-se concluir que \mathbf{R} é um operador positivo, já que

$$\langle \mathbf{R}\mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = E[\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle] = E[\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \overline{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle}] = E[|\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle|^2] \geq 0. \quad (63)$$

Finalmente, o Teorema de Mercer [24] garante, para um operador contínuo, Hermitiano e positivo definido, a existência e unicidade da representação espectral dada pela Eq. (55), sendo $\{\psi_k\}$ e $\{\lambda_k\}$ autofunções e autovalores do operador, isto é, satisfazem à equação

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}). \quad (64)$$

No caso de se usarem coeficientes temporais ortonormais, ou seja $E[a_k(t) a_l(t)] = \delta_{kl}$ como em [20], a decomposição do tensor autocorrelação tomara a forma

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_k \psi_k(\mathbf{x}) \otimes \overline{\psi_k}(\mathbf{x}'). \quad (65)$$

A única diferença seria, portanto, a eventual incorporação dos escalares $\{\lambda_k\}$ às funções $\{\psi_k(\mathbf{x})\}$.

O Teorema de Karhunen-Loève é o resultado mais importante deste capítulo. Na sua forma usual [20, 22], ele é colocado na seguinte forma: seja $\{X(t)\}$, $t \in [0, T]$, um processo estocástico real de segunda ordem, com média nula, contínuo na média quadrática e com função autocorrelação (ou autocovariância) $R(t, s)$. Se $\{\psi_k\}$ são autofunções ortonormais do operador integral com núcleo $R(\cdot, \cdot)$ e $\{\lambda_k\}$ os autovalores correspondentes, ou seja,

$$\int_0^T R(t, s) \psi_k(s) ds = \lambda_k \phi_k(t), \quad (66)$$

então, o processo estocástico possui a expansão

$$X(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K a_k \psi_k(t), \quad (67)$$

sendo que o limite é tomado no sentido da média quadrática e os coeficientes $\{a_k\}$ são variáveis aleatórias satisfazendo

$$a_k = \int_0^T X(t) \phi_k(t) dt \quad (68)$$

e

$$E[a_k \bar{a}_l] = \lambda_k \delta_{kl}. \quad (69)$$

Da mesma forma, se o processo estocástico possui a expansão (67), com

$$\int_0^T \phi_k(t) \phi_l(t) dt = \delta_{kl} \quad (70)$$

e coeficientes satisfazendo (68), então $\{\psi_k\}$ e $\{\lambda_k\}$ satisfazem a Eq. (66).

No caso mais geral desenvolvido até aqui, mostrar-se-á, usando a propriedade de estacionariedade temporal, que o processo estocástico $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\}$, com tensor autocorrelação espacial $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ tal que a Eq. (64) é válida, pode ser expandido como

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K a_k(t) \psi_k(\mathbf{x}) \quad (71)$$

sendo

$$a_k(t) = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \psi_k(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^N v_j(\mathbf{x}, t) \bar{\psi}_{jk}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (72)$$

e, além disso, satisfazendo (53).

Para isso, considere o somatório parcial dado por

$$\mathbf{S}_K(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^K a_k(t) \psi_k(\mathbf{x}). \quad (73)$$

Deve-se, então, demonstrar que

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} E[(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{S}_K(\mathbf{x}, t)) \otimes (\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{S}}_K(\mathbf{x}, t))] \\ = \lim_{K \rightarrow \infty} \{E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)] - E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{S}}_K(\mathbf{x}, t)] \\ - E[\mathbf{S}_K(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)] + E[\mathbf{S}_K(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{S}}_K(\mathbf{x}, t)]\} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (74)$$

A primeira parcela vale, obviamente,

$$E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)] = \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}). \quad (75)$$

Expandindo-se a última, obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{S}_K(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{S}}_K(\mathbf{x}, t)] &= E\left[\sum_{k=1}^K a_k(t) \psi_k(\mathbf{x}) \otimes \sum_{l=1}^K \bar{a}_l(t) \bar{\psi}_l(\mathbf{x})\right] \\ &= E\left[\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K a_k(t) \bar{a}_l(t) \psi_k(\mathbf{x}) \otimes \bar{\psi}_l(\mathbf{x})\right] = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K E[a_k(t) \bar{a}_l(t)] \psi_k(\mathbf{x}) \otimes \bar{\psi}_l(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \lambda_k \delta_{kl} \psi_k(\mathbf{x}) \otimes \bar{\psi}_l(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}) \otimes \bar{\psi}_k(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (76)$$

onde usou-se a ortogonalidade dos modos (53). Já a segunda parcela da soma pode, a partir da Eq. (72) e da definição do tensor autocorrelação (17), ser escrita como

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{S}}_K(\mathbf{x}, t)] &= E\left[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \sum_{k=1}^K \bar{a}_k(t) \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}, t)\right] \\
&= \sum_{k=1}^K E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \bar{a}_k(t)] \otimes \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K E\left[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \int_{\mathcal{D}} \sum_j \bar{v}_j(\mathbf{x}', t) \psi_{kj}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'\right] \otimes \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{k=1}^K \int_{\mathcal{D}} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \otimes \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}) \otimes \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}) \quad (77)
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{S}_K(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)] &= E\left[\sum_{k=1}^K a_k(t) \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)\right] \\
&= \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \otimes E[a_k(t) \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)] = \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \otimes E\left[\int_{\mathcal{D}} \sum_j v_j(\mathbf{x}', t) \bar{\psi}_{kj}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)\right] \\
&= \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \otimes \int_{\mathcal{D}} \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}') \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \sum_{k=1}^K \lambda_k \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \otimes \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}), \quad (78)
\end{aligned}$$

o que já poderia ter sido automaticamente inferido do fato da autocorrelação ser Hermitiana. Assim, temos que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left\{ \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \sum_{k=1}^K \lambda_k \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \otimes \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}) \right\} = \mathbf{0}, \quad (79)$$

pelo Teorema de Mercer.

Inversamente, supondo que $\{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\}$ possui a expansão (71), o tensor autocorrelação espacial pode ser calculado como

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= E[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}', t)] \\
&= E\left[\left(\sum_k a_k(t) \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x})\right) \otimes \left(\sum_l \bar{a}_l(t) \bar{\boldsymbol{\psi}}_l(\mathbf{x}')\right)\right] = \sum_k \lambda_k \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \otimes \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}'). \quad (80)
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \int_{\mathcal{D}} \sum_k \lambda_k \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \otimes \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}') \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
&= \sum_k \lambda_k \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \otimes \int_{\mathcal{D}} \bar{\boldsymbol{\psi}}_k(\mathbf{x}') \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \sum_k \lambda_k \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) \delta_{km} = \lambda_m \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{x}), \quad (81)
\end{aligned}$$

onde foi usada a ortonormalidade dos modos próprios (52) e mostrando que $\{\boldsymbol{\psi}_k\}$ e $\{\lambda_k\}$ são autofunções e autovalores, respectivamente, do operador integral com núcleo $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, concluindo a demonstração do Teorema de Karhunen-Loève.

Resumindo, a existência da expansão do campo (51) pode ser garantida, dentro de certas condições, pelo Teorema de Karhunen-Loève, o qual provê um método atrativo para o cálculo de uma base ortonormal $\{\boldsymbol{\psi}_k\} \in \mathcal{L}_2^n$. A prova deste teorema depende da existência da decomposição espectral do tensor de correlação espacial, que é, por sua vez, garantida pelo Teorema de Mercer, para as hipóteses anteriormente feitas.

As funções $\{\boldsymbol{\psi}_k\}$ representam as estruturas coerentes da dinâmica, ou seja, as escalas desta que contêm a maior parte da energia [8, 26]. Na prática, estas estruturas são chamadas de modos ortogonais próprios (POMs) ou modos empíricos e os autovalores associados de valores ortogonais próprios (POVs) ou autovalores empíricos.

Uma vez estabelecida a expansão da variação do campo em relação à média (51), a dinâmica original pode ser facilmente reconstruída com a adição do campo médio:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=1}^K a_k(t) \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) + E[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]. \quad (82)$$

Razão da expansão ser ótima

Mostrar-se-á, agora, que a expansão de Karhunen-Loève é, em algum sentido, ótima no que diz respeito à reconstrução do campo original (82).

A partir da Eq. (64) e observando-se a ortonormalidade das autofunções, temos que os autovalores do tensor autocorrelação são dados por

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \langle \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{R} \boldsymbol{\psi}_k \rangle = E [\langle \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}_k \rangle] = E [\langle \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{v} \rangle \overline{\langle \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{v} \rangle}] \\ &= E [|\langle \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{v} \rangle|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\langle \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{v} \rangle|^2 dt, \quad (83)\end{aligned}$$

sendo que a última passagem deriva da hipótese de ergodicidade.

Assim, pode-se interpretar o autovalor λ_k como a medida da *energia* média do sistema projetado no eixo $\boldsymbol{\psi}_k$ do espaço funcional. O conceito de energia vem do fato de nas primeiras aplicações em turbulência, o campo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ representar a velocidade de escoamento do fluido e portanto, neste caso, cada autovalor representa o dobro da energia cinética média contida no respectivo modo.

Logicamente, a *energia* média do campo tem que ser igual à soma de todos os autovalores. Para demonstrar isso, considere a *energia* média do sistema:

$$L = \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n E [v_j(\mathbf{x}) \bar{v}_j(\mathbf{x})] d\mathbf{x}. \quad (84)$$

Da definição do tensor autocorrelação espacial (13) e da decomposição espectral do mesmo (55), chega-se a

$$\begin{aligned}L &= \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n R_{jj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n \sum_k \lambda_k \psi_{kj}(\mathbf{x}) \bar{\psi}_{kj}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_k \lambda_k \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^n \psi_{kj}(\mathbf{x}) \bar{\psi}_{kj}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_k \lambda_k \langle \boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_k \rangle = \sum_k \lambda_k. \quad (85)\end{aligned}$$

Uma outra abordagem possível para o problema da determinação das autofunções é o da maximização da projeção de \mathbf{v} em $\boldsymbol{\psi}$ [8, 23, 26]

$$\lambda_k = \max \langle \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_k \rangle = \max E [|\langle \boldsymbol{\psi}_k, \mathbf{v} \rangle|^2], \quad (86)$$

sujeita às restrições

$$\langle \boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_k \rangle = \|\boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x})\|^2 = 1 \quad \text{e} \quad \langle \boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_j \rangle = 0, \quad k \neq j. \quad (87)$$

Logo, o problema variacional associado pode ser escrito, usando-se multiplicadores de Lagrange como

$$J(\boldsymbol{\psi}) = E [|\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi} \rangle|^2] - \lambda (\|\boldsymbol{\psi}\|^2 - 1). \quad (88)$$

A condição de máximo implica na derivada funcional ser nula para todas as variações $\boldsymbol{\psi} + \delta\boldsymbol{\phi}$, onde $\delta \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\frac{d}{d\delta} J(\boldsymbol{\psi} + \delta\boldsymbol{\phi})|_{\delta=0} = 0. \quad (89)$$

Assim, a partir da Eq. (88), esta condição resulta em

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\delta} J(\boldsymbol{\psi} + \delta\boldsymbol{\phi})|_{\delta=0} &= \frac{d}{d\delta} \{E [\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi} + \delta\boldsymbol{\phi} \rangle \langle \boldsymbol{\psi} + \delta\boldsymbol{\phi}, \mathbf{v} \rangle] - \lambda \langle \boldsymbol{\psi} + \delta\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} + \delta\boldsymbol{\phi} \rangle\}|_{\delta=0} \\ &= \frac{d}{d\delta} \{E [(\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \delta \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi} \rangle) (\langle \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v} \rangle + \delta \langle \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v} \rangle)] \\ &\quad - \lambda (\langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \delta \langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi} \rangle + \delta \langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \rangle + \delta^2 \langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi} \rangle)]\}|_{\delta=0} \\ &= 2 \operatorname{Re} \{E [\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\phi} \rangle \langle \boldsymbol{\psi}, \mathbf{v} \rangle] - \lambda \langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi} \rangle\} = 0. \quad (90)\end{aligned}$$

Rearrmando os termos entre chaves, chega-se, finalmente, a

$$\langle \mathbf{R} \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi} \rangle - \lambda \langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi} \rangle = 0. \quad (91)$$

Com isso, o problema de maximização reduz-se ao problema de autovalor $\mathbf{R}\psi = \lambda\psi$, apenas outra notação para a Eq. (64). É importante notar que esta formulação variacional é mais fraca do que a abordagem anteriormente apresentada, pois só garante a existência de um ponto crítico e não necessariamente de um máximo [8].

Ela também pode ser expressa, equivalentemente, como a minimização de [26]:

$$\min \left\| \mathbf{R} - \sum_k \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}) \otimes \psi_k(\mathbf{x}') \right\|^2. \quad (92)$$

Desta forma, pode-se concluir que qualquer representação de \mathbf{R} por um somatório finito será ótima no sentido de mínimos quadrados se as funções forem as autofunções dadas pela Eq. (64). E nenhuma outra decomposição linear do campo vetorial será mais eficiente que a expansão de Karhunen-Loève, significando que, dado um mesmo número de modos K , a projeção da dinâmica no subespaço gerado pelos modos de qualquer decomposição linear não poderá conter uma maior quantidade de energia do que a projeção no subespaço gerado pelos POMs.

Construção prática da expansão

Há duas maneiras práticas de se calcular as autofunções e autovalores do tensor autocorrelação. A primeira é chamada de método direto e a segunda de método dos retratos, inicialmente apresentado por Sirovich em [26]. Apesar do método direto ser de mais fácil implementação, a verdade é que ambos possuem um domínio específico de aplicação. A escolha entre um ou outro é função do esforço computacional necessário para a realização do cálculo, como ficará claro a seguir. Ao final desta seção, será apresentada uma aplicação simples da metodologia a um problema de difusão de calor, servindo para exemplificar todo o desenvolvimento teórico feito até aqui. Esta aplicação também será usada para se investigar os métodos práticos de obtenção da expansão.

Método direto

Será considerado, para ambos os métodos e sem perda de generalidade, um campo vetorial real tridimensional, isto é, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ definido em um domínio espacial também tridimensional, ou seja, $\mathbf{x} = (x, y, z)$. O campo é decomposto em duas partes: uma média que é invariante no tempo $E[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - E[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]$ que é a variação temporal com relação à média.

Para a implementação deste método, é necessária a introdução de uma malha espacial, onde o campo será representado. No caso numérico, esta malha representará os pontos de amostragem, enquanto que em aplicações experimentais, ela representará os pontos de medição. Assim, o campo pode ser escrito na seguinte forma, nos pontos discretos:

$$\mathbf{u}(x_i, y_j, z_k, t), \quad i = 1, \dots, N_x; \quad j = 1, \dots, N_y; \quad k = 1, \dots, N_z. \quad (93)$$

Como o campo é tridimensional, isto é, $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$, temos, em cada instante de tempo, $3 \times N_x \times N_y \times N_z = N$ valores amostrados. Podemos, então, ordenar estes valores na forma $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$, a qual inclui as três componentes do campo. Fazendo uma amostragem temporal em M instantes t_1, t_2, \dots, t_M , é possível construir a seguinte matriz de amostragem de dimensão $M \times N$:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_N] = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & \dots & u_N(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) & \dots & u_N(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t_M) & u_2(t_M) & \dots & u_N(t_M) \end{bmatrix}, \quad (94)$$

sendo que cada coluna representa o comportamento temporal de uma componente do campo em um determinado ponto do espaço e, alternativamente, cada linha representa o comportamento espacial do campo como um todo, em um determinado instante de tempo, ou seja, cada linha corresponde a um ponto em um espaço de fase N -dimensional.

Utilizando-se a hipótese de ergodicidade, é possível se calcular o valor médio do campo somando-se todas as linhas de \mathbf{U} e dividindo o resultado pelo número de linhas M . E a variação em relação ao campo médio é obtida pela subtração deste valor médio de todas as linhas de \mathbf{U} . Desta forma, temos que

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} - \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M u_1(t_i) & \sum_{i=1}^M u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M u_N(t_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^M u_1(t_i) & \sum_{i=1}^M u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M u_N(t_i) \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Finalmente, fazendo-se uso, novamente, da ergodicidade do processo, podemos construir a matriz de correlação espacial como

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \mathbf{V}^T \mathbf{V}. \quad (96)$$

Obviamente, \mathbf{R} é, por construção, simétrica e positiva definida, de maneira que seus autovetores formam uma base ortogonal e seu espectro não possui valores negativos. Neste caso, os autovetores são as estruturas coerentes ou POMs e os autovalores associados ou POVs fornecem a medida da energia média contida em cada modo. A Fig. 1 mostra um esquema do algoritmo de implementação deste método.

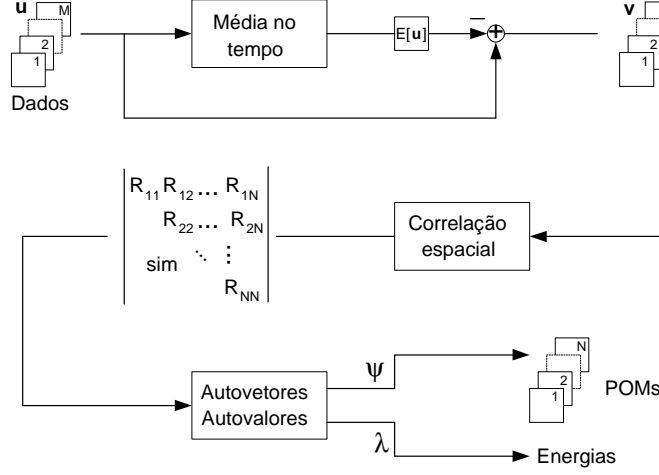


Figura 1. Algoritmo de implementação do método direto.

Nota-se que a matriz \mathbf{R} possui dimensão $N \times N$, isto é, sua dimensão não depende do número de instantes de tempo em que o campo foi amostrado, mas depende unicamente do tamanho da malha espacial. Conseqüentemente, supondo uma malha com discretização semelhante nas três direções $\mathcal{O}(N_x) = \mathcal{O}(N_y) = \mathcal{O}(N_z)$, o problema de determinação das autofunções do tensor autocorrelação é equivalente ao problema de diagonalização de uma matriz com dimensão $\mathcal{O}(N_x^3)$. De maneira mais genérica, a matriz terá dimensão $\mathcal{O}(N_x^d)$, sendo d a dimensão do domínio espacial do problema. Isto significa que o número de operações necessárias para o cálculo de \mathbf{R} é $\mathcal{O}(MN_x^{2d})$ e, para a diagonalização propriamente dita, este número é $\mathcal{O}(N_x^{3d})$. Ainda, o requerimento para armazenamento de dados em ambas as fases do processo é $\mathcal{O}(N_x^{2d})$ [3].

Pode-se concluir, então, que a utilidade do método direto está intimamente relacionada à magnitude do valor N_x^d . Quando a malha espacial é relativamente simples, contendo poucos pontos de amostragem ou medição, como é comum em aplicações experimentais, o método pode ser facilmente implementado. Já no caso de termos uma malha extremamente refinada, como no caso de complexas simulações numéricas de campos multidimensionais usando-se programas de elementos finitos, por exemplo, tanto o esforço computacional, quanto o espaço necessário para armazenamento de dados crescem de maneira inaceitável, tornando impraticável o uso desta abordagem. Para estes casos, tornou-se necessário o desenvolvimento de uma solução alternativa.

Método dos retratos

Seja $\mathbf{v}^{(m)} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, m\tau)$ representações instantâneas do campo e que serão denominadas de retratos, sendo τ o período de amostragem que deve ser da mesma ordem ou maior que o tempo de correlação [26]. Isto significa que os retratos deverão ser ortogonais para valores diferentes de m a fim de garantir a hipótese de ergodicidade [22]. Usando esta hipótese, podemos, inicialmente, representar o tensor autocorrelação como

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}', t) dt. \quad (97)$$

Todavia, utilizando a definição dos retratos, a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}'). \quad (98)$$

Naturalmente, em todas as aplicações práticas, o conjunto de dados disponível será limitado, de maneira que uma aproximação razoável para o tensor autocorrelação será dada por

$$\mathbf{R}_M(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}'), \quad (99)$$

onde o número M de retratos usados deverá ser suficientemente grande. O que exatamente esta afirmativa significa será discutido mais à frente.

Uma vez que o núcleo representado por \mathbf{R}_M do operador integral é degenerado e, neste caso, de dimensão finita [7, 24], sabe-se que as autofunções de \mathbf{R}_M são da forma

$$\psi_k(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M A_{km} \mathbf{v}^{(m)}, \quad (100)$$

isto é, temos o importante resultado que os POMs são combinações lineares dos retratos, sendo que os coeficientes A_{km} ainda precisam ser determinados. É simples ver que a equação acima é válida. Para isso, basta inserir a aproximação (99) na Eq. (64) que define as autofunções e autovalores, de maneira a se obter

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{R}_M(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) \otimes \int_{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}'), \psi_k(\mathbf{x}') \rangle &= \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow \sum_{m=1}^M a_{km} \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) &= \lambda_k \psi_k(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (101)$$

Da última linha da equação acima, chega-se, facilmente, na Eq. (100) fazendo-se $A_{km} = a_{km}/\lambda_k$.

Finalmente, a fim de se determinar os coeficientes A_{km} , introduzem-se ambas as Eqs. (99) e (100) na integral (64), o que nos leva a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}') \sum_{n=1}^M A_{kn} \mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \lambda_k \sum_{m=1}^M A_{km} \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) \otimes \sum_{n=1}^M A_{kn} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}') \mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \lambda_k \sum_{m=1}^M A_{km} \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}) \sum_{n=1}^M A_{kn} \langle \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}') \mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x}') \rangle &= \lambda_k \sum_{m=1}^M A_{km} \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (102)$$

Supondo a independência linear do conjunto de retratos, temos que a solução da equação acima é análoga à solução do problema de autovalor dado por

$$\mathbf{CA} = \lambda \mathbf{A}, \quad (103)$$

sendo

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kM} \end{bmatrix} \quad (104)$$

o k -ésimo autovetor e

$$C_{mn} = \frac{1}{M} \langle \mathbf{v}^{(m)}, \mathbf{v}^{(n)} \rangle. \quad (105)$$

Portanto, temos o importante resultado que a determinação dos modos empíricos resulta na solução de um problema de autovalor cuja dimensão não depende da resolução da malha espacial (N_x), mas sim do número (M) de retratos usados na aproximação do tensor autocorrelação. Isto significa que simulações numéricas com malhas extremamente refinadas não apresentam a dificuldade encontrada no método direto, uma vez que o número de pontos onde o campo é calculado não entra explicitamente no cálculo dos modos empíricos, mas sim de maneira implícita, através das somas e multiplicações necessárias à determinação produtos internos (105), o que, obviamente, também acarreta um certo aumento no tempo computacional da operação como um todo. O algoritmo de implementação deste método está representado na Fig. 2.

A utilização desta abordagem necessita de $\mathcal{O}(N_x^d M^2)$ operações para obtenção de \mathbf{C} , $\mathcal{O}(M^3)$ operações para a diagonalização da mesma e $\mathcal{O}(N_x^d M^2)$ para cálculo dos modos empíricos através da Eq. (100). Já o requerimento para armazenamento é $\mathcal{O}(M^2)$ [3].

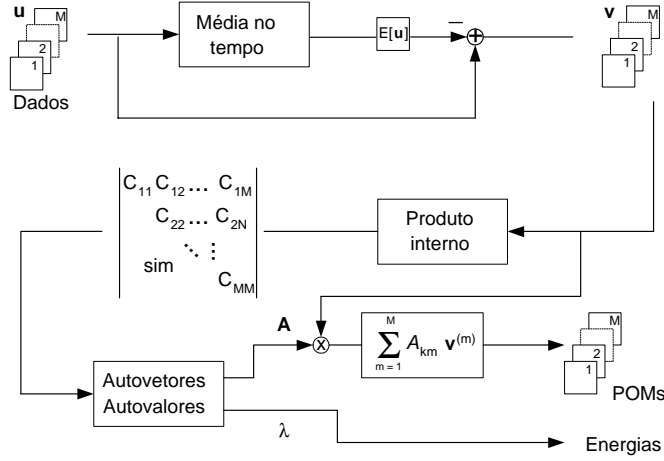


Figura 2. Algoritmo de implementação do método dos retratos.

Apesar de Sirovich [26] afirmar que este método se aplica igualmente bem a dados experimentais, vemos claramente que este não é seu domínio preferencial, pois dificilmente haverá um número de sensores suficientemente grande que justifique seu uso em detrimento do método direto.

Finalmente, deve-se discutir o problema de uma simulação com um número muito grande de retratos, pois, neste caso, a decomposição espectral da matriz C pode se tornar computacionalmente inviável. Entretanto, como bem observado em [26], o tamanho M do conjunto de retratos não é importante, mas sim a dimensão do atrator que queremos encapsular. Isto significa que as estruturas coerentes selecionadas para redução do modelo devem conter o máximo de energia. A idéia é que se o atrator é de dimensão finita, então deve ser possível extrair um modelo também finito na forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias através da projeção de Galerkin. Uma maneira de se definir esta dimensão, seria pelo número de POVs diferentes de zero extraídos da dinâmica. Todavia, este número é, na realidade um limite superior para a dimensão do atrator [8]. outro critério nominal sugerido em [26] e utilizado por um grande número de autores é que o número mínimo m de modos empíricos a serem usados deve ser tal que a soma dos autovalores correspondentes exceda 99% da energia do sistema, ou seja,

$$\frac{\sum_{n=1}^m \lambda_n}{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n} > 0,99. \quad (106)$$

Desta forma, deve ser possível reduzir o número de retratos considerados quando $M \gg m$. Para isso, sugere-se particionar o conjunto de M retratos em subconjuntos de ordem m , calcular os modos para cada partição e, ao final, fazer a média entre as partições de cada modo [26]. O grande problema é que o número m necessário para se atingir mais de 99% da energia não é conhecido a priori, donde conclui-se que algum tipo de teste deverá ser realizado na prática.

Exemplo

A expansão de Karhunen-Loève será, agora, aplicada a um problema bastante simples de difusão de calor em um domínio bidimensional, mas que servirá para ilustrar suas principais características, assim como os métodos de implementação prática descritos acima. Este problema foi apresentado em [20]. Entretanto, aqui ele será resolvido de maneira um pouco mais precisa e novos aspectos serão discutidos.

Considere o problema de difusão de calor em uma placa plana modelado pela seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u, \quad (107)$$

sendo que $u(\mathbf{x}, t)$ representa o campo de temperatura na placa e é definido no domínio $\mathbf{x} = (x, y)$, com $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$. As condições de contorno para o problema são $u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0$ e $u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0$ e a condição inicial é $u(x, y, 0) = 1$.

A simplicidade deste problema está no fato de sua solução analítica ser conhecida, facilitando enormemente a simulação para geração de dados. A solução é dada pela seguinte série infinita:

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_i \sum_j \frac{4}{ij\pi^2} (1 - \cos(i\pi)) (1 - \cos(j\pi)) e^{-(i^2+j^2)\pi^2 t} \text{sen}(i\pi x) \text{sen}(j\pi y), \quad (108)$$

a qual pode ser simulada com a precisão desejada usando-se um número adequado de termos. Discretizando-se o domínio espacial através de uma malha 21×21 , a solução acima foi calculada para os pontos da malha nos seguintes instantes de tempo: $t = \{0s; 0,025s; 0,050s; \dots; 0,5s\}$ e usando-se 200 termos no somatório (108). A Fig. 3 mostra o resultado para alguns destes instantes.

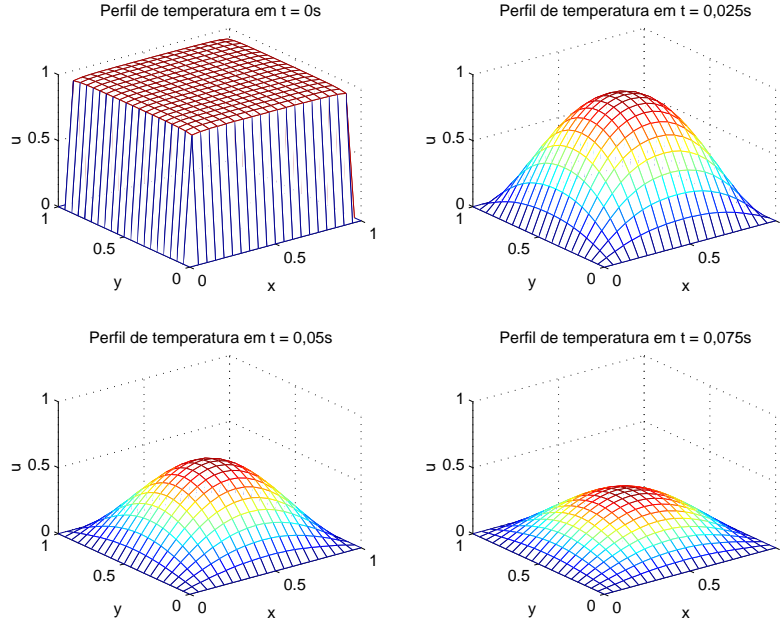


Figura 3. Dinâmica da difusão de calor em um domínio bidimensional.

Antes de se efetuar a decomposição do campo, é interessante notar-se que, no caso deste problema, o campo é um escalar real, isto é, $u(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$, definido em $\mathbf{x} \in [0, 1]^2$. Inicialmente, aplicou-se o método direto aos dados fornecidos pela simulação. Os pontos de amostragem são os 441 definidos pela malha e todos os instantes de tempo foram utilizados. Assim, primeiro foi construída a matriz de amostragem \mathbf{U} definida na Eq. (94) de dimensão 21×441 e, após cálculo e subtração do campo médio, montou-se a matriz de correlação espacial \mathbf{R} dada pela Eq. (96) de dimensão 441×441 . Seus autovetores e autovalores foram obtidos através da decomposição valor singular, devido à robustez que esta técnica proporciona [33]. Os autovetores, após rearrumados na forma inversa à construção de \mathbf{U} fornecem os modos empíricos desta dinâmica. Os quatro primeiros POMs são mostrados na Fig. 4 com os respectivos POVs normalizados, isto é, divididos pela soma de todos eles. Nota-se, claramente, que a energia está praticamente toda concentrada nos dois primeiros modos, sendo que o primeiro contém 93,9% dela. Isto já era de se esperar, uma vez que se trata de uma dinâmica extremamente simples.

A KLE foi, então, implementada através do método dos retratos, usando-se o mesmo conjunto de dados simulados. Os quatro primeiros POMs e POVs resultantes são mostrados na Fig. 5. Observa-se uma boa concordância com os modos empíricos calculados através do método direto. A integração no domínio bidimensional necessária ao cálculo da matriz \mathbf{C} definida na Eq. (105) foi implementada através da função `dblquad` do MATLAB[®] usando-se o algoritmo da quadratura de Simpson adaptativa `quad`. Este algoritmo não permite a entrada dos pontos onde a integral será calculada, o que é feito, internamente, pelo programa. Desta forma, a fim de se usar os pontos da malha obtidos na simulação, implementou-se um esquema de interpolação numérica. Também houve necessidade de se usar uma tolerância bem pequena a fim de se chegar ao resultado da Fig. 5. Estes dois fatos tornaram o processo de integração numérica extremamente lento, donde pode-se concluir que o algoritmo de integração a ser usado para implementação do método dos retratos deve ser extremamente eficiente, especialmente no caso de domínios bi e tridimensionais, a fim de que este método seja realizável. De outra forma, o tempo economizado na solução do problema de autovalor (a matriz \mathbf{C} é de dimensão 21×21 em comparação com 441×441 de \mathbf{R} obtida com o método direto) poderá não compensar.

Também foi notado que o método dos retratos não foi capaz de capturar os modos subseqüentes. Enquanto o método direto fornece apenas mais um modo de interesse além dos mostrados (o quinto POM), sendo os seguintes apenas ruído, os POMs de números 5 a 8 calculados pelo método dos retratos possuíam a mesma forma qualitativa do quarto. Isto fica claro quando se comparam os oito primeiros POVs obtidos através de ambos os métodos e mostrados na tabela 1. Há perfeita concordância entre os três primeiros POVs e uma pequena diferença no quarto. A partir do quinto, as diferenças são acentuadas. No caso do método direto, apenas o quinto POM possui significado físico, uma vez que os POVs restantes são menores que a precisão

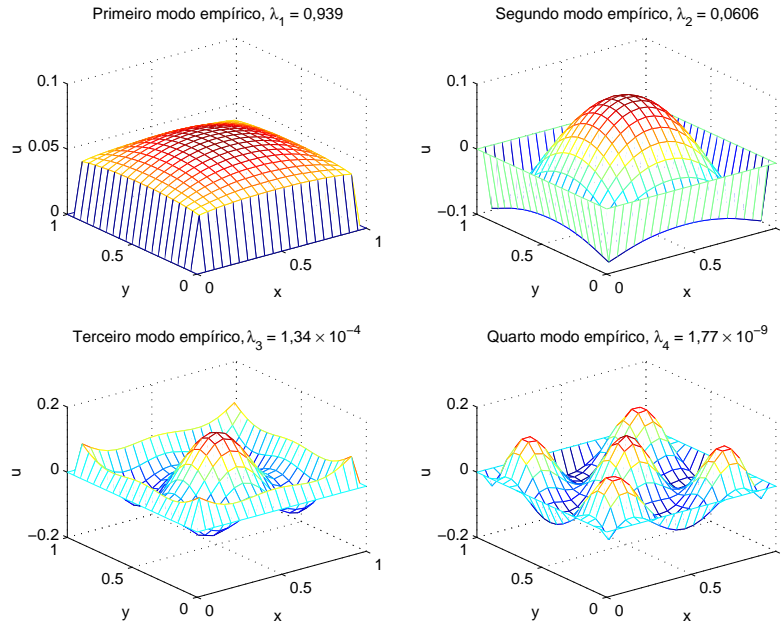


Figura 4. Quatro primeiros modos empíricos para a difusão de calor calculados pelo método direto. Os POVs estão normalizados.

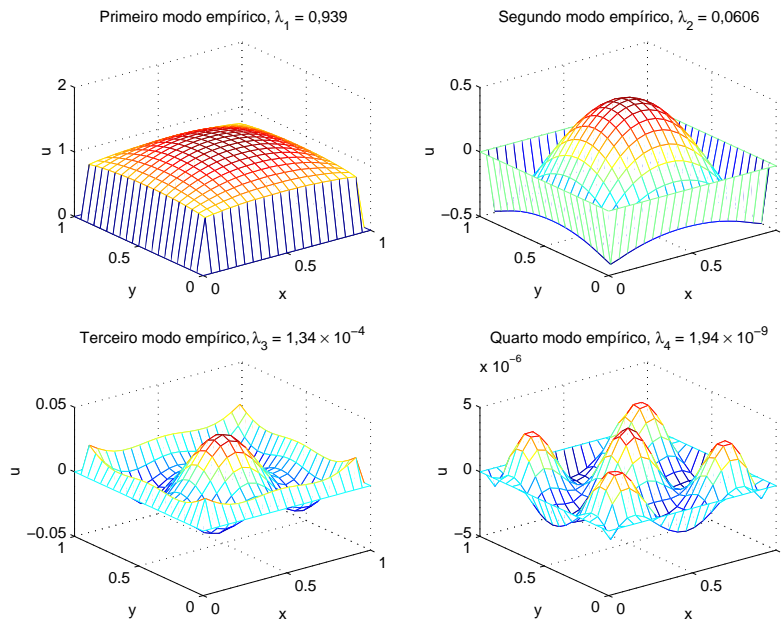


Figura 5. Quatro primeiros modos empíricos para a difusão de calor calculados pelo método dos retratos. Os POVs estão normalizados.

numérica do MATLAB® e representam, portanto, apenas ruído, como pode ser visto na Fig. 7. O mesmo não acontece no caso dos POVs de número 5 a 8 calculados pelo método dos retratos, os quais possuem ordem de grandeza semelhante à do quarto, como mostra a Fig. 6. Este resultado é consequência direta da imprecisão existente na integração numérica e seria melhorado com uma diminuição na tolerância do algoritmo o que, por sua vez, acarretaria um aumento substancial no tempo da operação.

Esta mesma imprecisão manifestou-se no cálculo dos coeficientes temporais da expansão obtidos através da projeção da dinâmica nos POMs. As Figs. 8 e 9 comparam os quatro primeiros coeficientes, obtidos por cada método. Nota-se uma boa concordância qualitativa apenas entre os três primeiros, ao passo que o quarto já mostra profunda discrepância. Obviamente, a ordem de grandeza dos coeficientes calculados por cada método é bem diferente, refletindo a escala dos respectivos POMs.

Uma vez calculados todos os termos da expansão de Karhunen-Loève, o fato desta ser ótima fica bastante claro ao se efetuar a reconstrução da dinâmica original a partir dos POMs e dos coeficientes temporais segundo a Eq. (82). Utilizando-se os dois primeiros modos empíricos, o que corresponde a 99,96% da energia, esta

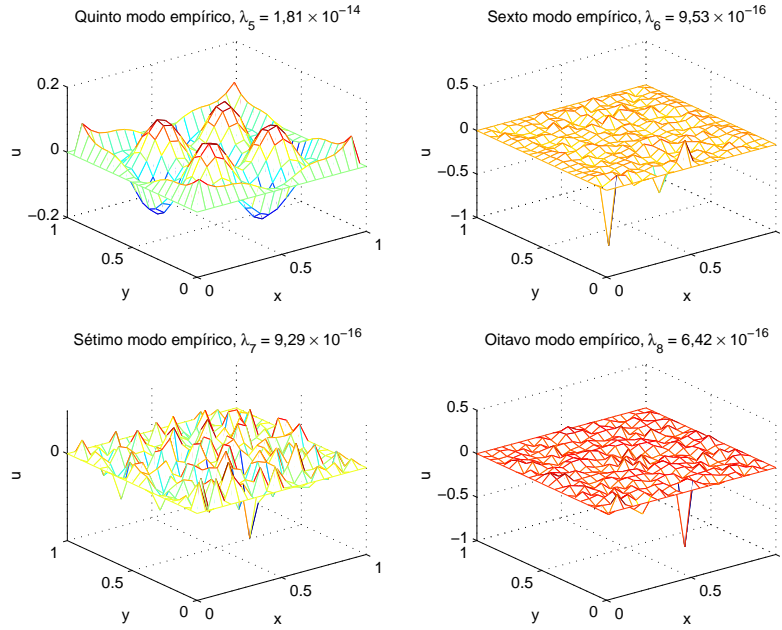


Figura 6. Modos empíricos de números 5 a 8 para a difusão de calor calculados pelo método direto. Os POVs estão normalizados.

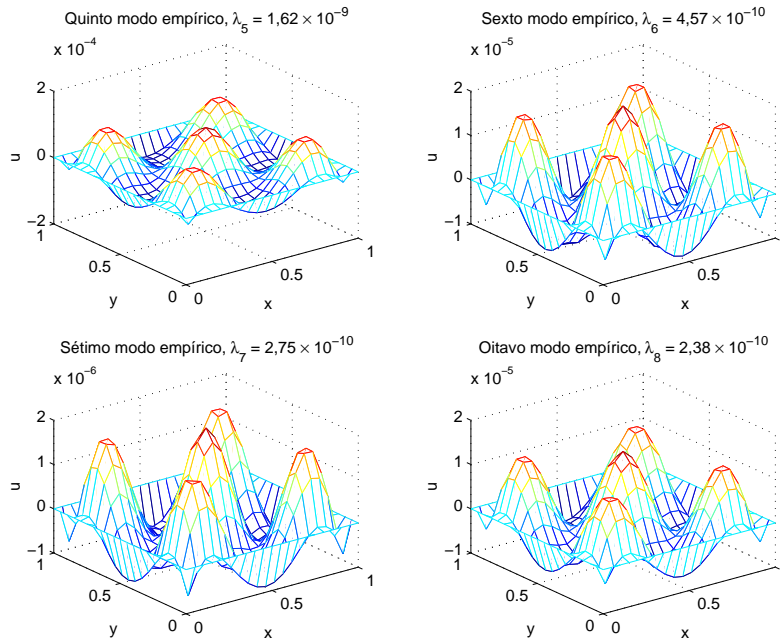


Figura 7. Modos empíricos de números 5 a 8 para a difusão de calor calculados pelo método dos retratos. Os POVs estão normalizados.

reconstrução já é indistinguível da dinâmica original como mostra a Fig. 10. Entretanto, o uso somente do primeiro modo empírico, mesmo com 93,9% da energia, não é suficiente para reproduzir bem a dinâmica, como pode ser visto na Fig. 11. Isto vem a corroborar o critério original apresentado por Sirovich em [26] e segundo o qual o número de modos usados em um modelo reduzido deve conter pelo menos 99% da energia total.

Na realidade, onde a KLE se mostra extremamente vantajosa é na reconstrução da condição inicial, o que pode ser feito com apenas dois modos empíricos como mostrado na Fig. 10. Já a Fig. 12 mostra a reconstrução desta mesma condição inicial usando-se as autofunções do operador Laplaciano, isto é, as funções $f(x, y) = \sin(i\pi x) \sin(j\pi y)$, $i, j = 1, 2, \dots$. Observa-se que nem o uso de 9 autofunções, com $i, j = 1, 2, 3$, consegue reproduzir bem a condição inicial, devido ao fenômeno de Gibbs.

	Método direto	Método dos retratos
λ_1	0,939	0,939
λ_2	0,0606	0,0606
λ_3	$1,34 \times 10^{-4}$	$1,34 \times 10^{-4}$
λ_4	$1,77 \times 10^{-9}$	$1,94 \times 10^{-9}$
λ_5	$1,81 \times 10^{-14}$	$1,62 \times 10^{-9}$
λ_6	$9,52 \times 10^{-16}$	$4,57 \times 10^{-10}$
λ_7	$9,29 \times 10^{-16}$	$2,75 \times 10^{-10}$
λ_8	$6,42 \times 10^{-16}$	$2,38 \times 10^{-10}$

Tabela 1. Comparação entre os POVs obtidos por ambos os métodos de construção prática da expansão.

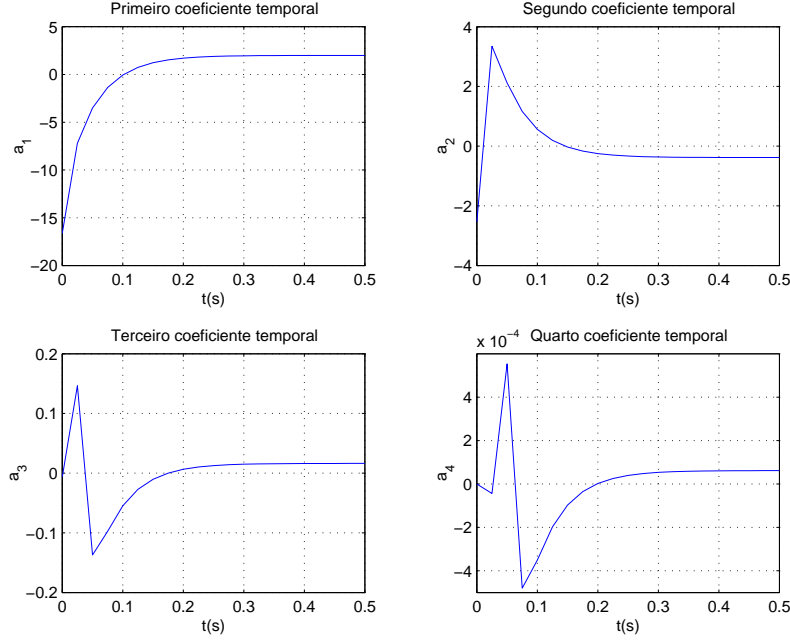


Figura 8. Quatro primeiros coeficientes temporais obtidos pelo método direto.

Interpretação geométrica da expansão

Usando-se o método direto, observa-se que a Eq. (96) pode ser reescrita como $M\mathbf{R} = \mathbf{V}^T\mathbf{V}$, de forma que os autovetores ortonormais ψ de \mathbf{R} satisfazem

$$\mathbf{V}^T\mathbf{V}\psi = M\mathbf{R}\psi = M\lambda\psi. \quad (109)$$

Pré-multiplicando a expressão acima por ψ^T e utilizando-se da ortonormalidade dos autovetores, temos que

$$\psi^T\mathbf{V}^T\mathbf{V}\psi = M\lambda\psi^T\psi = M\lambda \quad (110)$$

ou

$$\frac{1}{M}(\mathbf{V}\psi)^T(\mathbf{V}\psi) = \lambda. \quad (111)$$

Assim, como cada componente do vetor $\mathbf{V}\psi$ consiste na projeção de um ponto do espaço N-dimensional, onde \mathbf{V} está representado, no vetor unitário ψ , fornecendo sua distância à origem ao longo da direção de ψ , o autovalor λ na Eq. (111) representa a média do quadrado das distâncias dos pontos deste espaço projetadas ao longo do eixo ψ . Isto significa que estes autovetores ou modos empíricos otimizam as distâncias quadráticas médias dos dados, em uma base ortonormal.

Ainda, escrevendo a matriz definida na Eq. (95) como $\mathbf{V} = [v_{ij}]$, sendo que o índice $i = 1, \dots, N$ representa os pontos de amostragem e $j = 1, \dots, M$ é o índice temporal, pode-se colocar a matriz de correlação espacial na forma

$$R_{ik} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M v_{ij}v_{kj}. \quad (112)$$

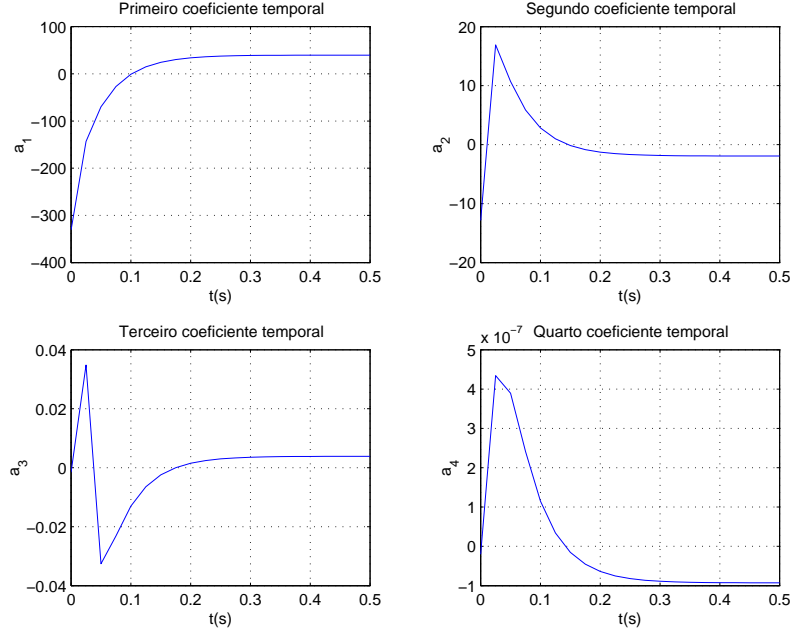


Figura 9. Quatro primeiros coeficientes temporais obtidos pelo método dos retratos.

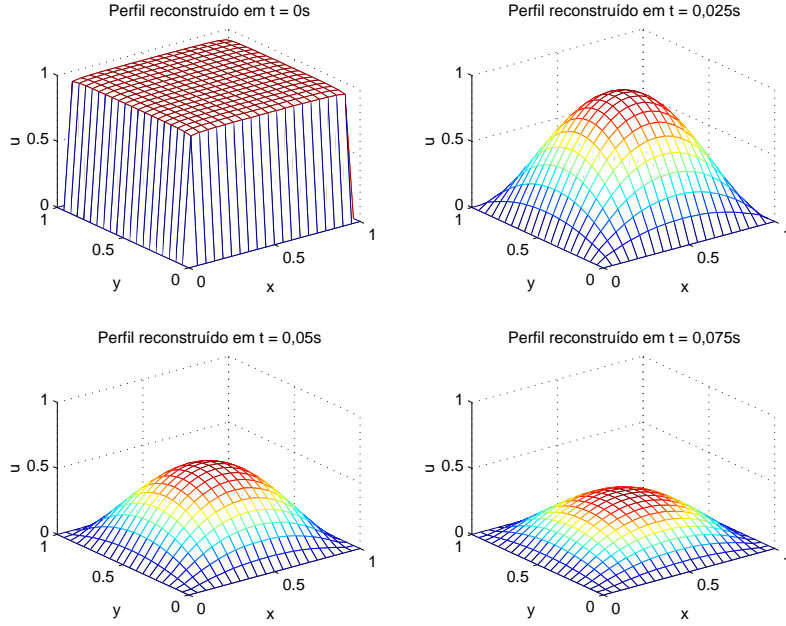


Figura 10. Reconstrução da dinâmica usando-se os dois primeiros modos empíricos.

Supondo que cada dado v_{ij} tem *massa* unitária, define-se o tensor de inércia \mathbf{J} de ordem N destes dados como

$$J_{II} = \sum_{i=1, i \neq I}^N \sum_{j=1}^M v_{ij}^2, \quad (113a)$$

$$J_{IJ} = - \sum_{j=1}^M v_{Ij} v_{Jj}, \quad (113b)$$

com $I, J = 1, \dots, N$. Desta forma, pode-se estabelecer a seguinte relação entre a matriz de correlação espacial e o tensor de inércia:

$$M\mathbf{R} = \rho\mathbf{I} - \mathbf{J}, \quad (114)$$

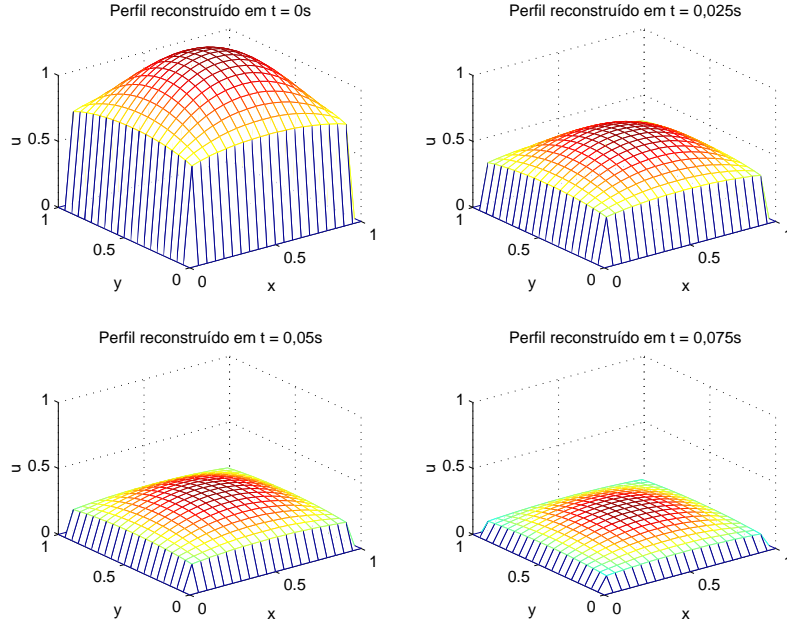


Figura 11. Reconstrução da dinâmica usando-se os apenas o primeiro modo empírico.

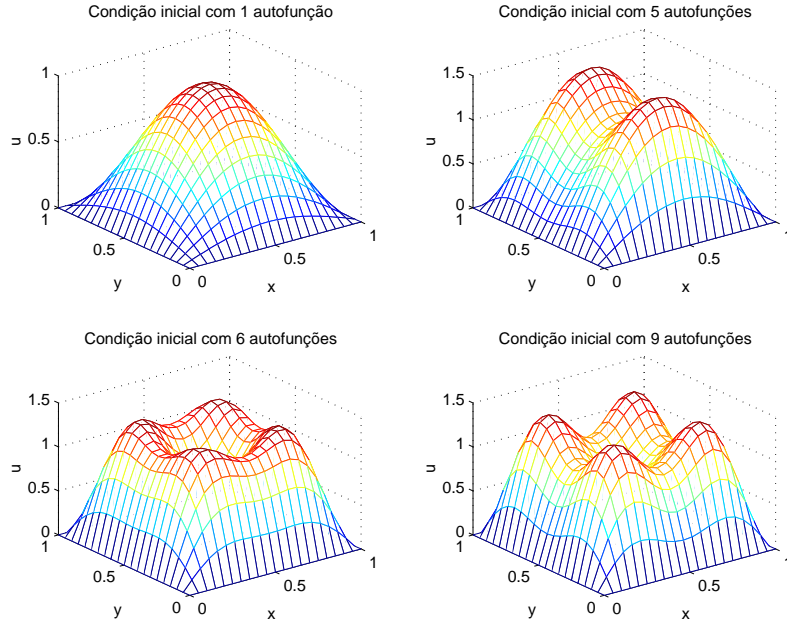


Figura 12. Reconstrução da condição inicial usando-se as autofunções do Laplaciano.

sendo \mathbf{I} a matriz identidade de dimensão $N \times N$ e

$$\rho = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij}^2 \quad (115)$$

a soma do quadrado das distâncias dos dados à origem.

Como se sabe, os autovetores e autovalores de \mathbf{J} satisfazendo $\mathbf{J}\phi = \alpha\phi$ são, respectivamente, os eixos e momentos principais de inércia. Pós-multiplicando a Eq. (114) por ϕ , obtemos

$$M\mathbf{R}\phi = \rho\mathbf{I}\phi - \mathbf{J}\phi = \rho\phi - \alpha\phi = (\rho - \alpha)\phi. \quad (116)$$

Portanto, ϕ é um autovetor de \mathbf{R} , donde conclui-se que os POMs coincidem com os eixos principais de inércia da distribuição de dados. Além disso, os POVs relacionam-se com os momentos principais de inércia segundo

$$M\lambda_i = \rho - \alpha_i, \quad (117)$$

significando que o eixo associado ao maior POV, equivalente à maior distância quadrática média projetada dos dados, corresponde ao eixo em torno do qual o momento de inércia é mínimo.

A fim de se ilustrar estas interpretações, considere sem perda de generalidade, um campo escalar $u(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ cujo comportamento temporal é definido em três pontos espaciais. Qualitativamente, este comportamento seria dado, para cada um dos pontos pelos gráficos mostrados na Fig. 13.

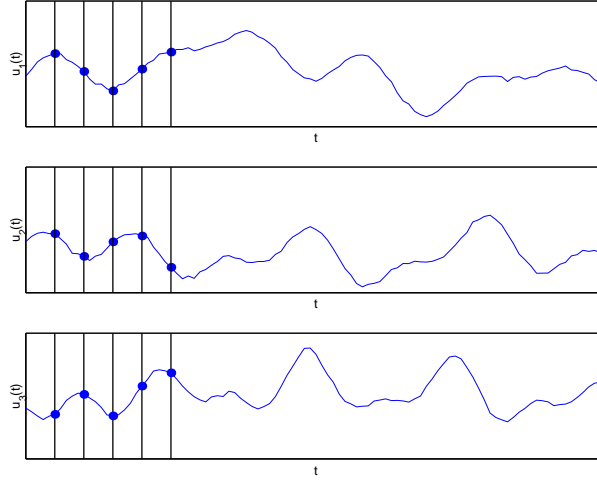


Figura 13. Campo escalar amostrado em três pontos.

Este mesmo campo pode ser expresso por um ponto em um espaço tridimensional formado por eixos ortogonais $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$, como mostrado na Fig. 14. A curva percorrida por este ponto é denominada de lugar dos estados (*state locus*) [34], sendo que os círculos azuis representam cinco instantes de amostragem. Obviamente, no caso da existência de mais de três pontos de medição, esta representação gráfica torna-se impossível, porém a análise a ser feita aqui ainda será válida para este espaço N-dimensional.

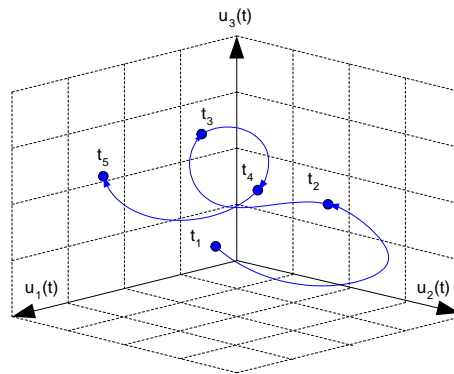


Figura 14. Lugar dos estados.

Na maioria das vezes, as coordenadas físicas não são ótimas para se representar o campo e o objetivo da expansão de Karhunen-Loève é buscar um novo sistema de coordenadas ortogonais que seja mais eficiente na captura do lugar dos estados. Suponha, por exemplo, que o lugar dos estados mostrado na Fig. 14 estivesse contido em um plano. Então, não há necessidade de se usar as três coordenadas físicas na descrição desta dinâmica, já que podemos fazê-lo com um novo par de eixos ortogonais, com se vê na Fig. 15, reduzindo, assim, a complexidade do problema.

Naturalmente, há neste plano uma infinidade de pares de eixos ortogonais nos quais a dinâmica pode ser representada. Todavia, observando-se que o lugar dos estados tende a aumentar com o tempo para a direita, tomando-se um eixo coordenado $a_1(t)$ nesta direção aproximada, como mostra a Fig. 15, temos que, no caso do lugar dos estados ser projetado neste eixo, ele conterá a maior parte da informação sobre a dinâmica. Pode-se, ainda, pensar em um caso extremo em que o lugar dos estados é uma reta, de maneira que o eixo $a_1(t)$ represente completamente o campo original (Fig. 16).

Graficamente, a expansão de Karhunen-Loève pode ser descrita da seguinte forma: dado um conjunto de pontos no lugar dos estados, como por exemplo os pontos contidos num mesmo plano mostrados na Fig. 17,

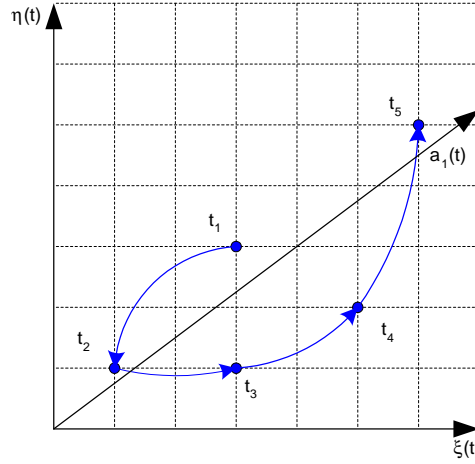


Figura 15. Plano contendo o lugar dos estados.

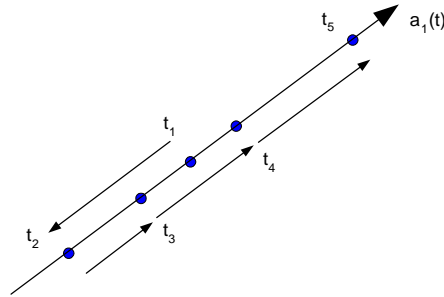


Figura 16. Lugar dos estados unidimensional.

a origem do eixo $a_1(t)$ é tomada na posição correspondente à média dos pontos e sua direção é escolhida de forma a maximizar a média do quadrado da projeção dos pontos sobre este eixo, como dado pela Eq. (111), o que significa maximizar a variância

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M a_{1j}^2, \quad (118)$$

que vem a ser igual ao primeiro POV. A direção do eixo $a_1(t)$ é dada pelo primeiro POM. Em seguida, o eixo $a_2(t)$ é escolhido no espaço perpendicular a $a_1(t)$ a fim de também maximizar σ_2^2 e assim sucessivamente. É óbvio que no caso plano mostrado na Fig. 17, a direção de $a_2(t)$ é automaticamente determinada pela direção de $a_1(t)$. Também fica claro, na Fig. 17, a propriedade descrita pela Eq. (117) e que implica no fato de o eixo correspondente ao primeiro POV ser aquele em relação ao qual o momento de inércia é mínimo. Por razões óbvias, os eixos $a_i(t)$ são, algumas vezes, chamados de coordenadas principais [34].

Aplicação da KLE a sistemas lineares

Determinação das autofunções de operadores lineares

A determinação dos autovalores e autofunções de um operador linear é fundamental nas ciências físicas e matemáticas. No caso da dinâmica estrutural, os modos de vibração nada mais são do que autofunções de um operador diferencial homogêneo chamado de operador rigidez [19]. Infelizmente, a existência de soluções analíticas para este problema está restrita a geometrias extremamente simples e, ainda assim, a apenas um número pequeno de operadores elementares. Nos outros casos, faz-se necessário o emprego de aproximações numéricas, as quais, em geometrias complexas, requerem alta resolução e, conseqüentemente, demandam grande capacidade computacional. Breuer e Sirovich [3] propuseram, então, um método de determinação das autofunções baseado na decomposição de Karhunen-Loève. Matematicamente, o problema consiste na obtenção dos pares (ψ, μ) satisfazendo a

$$\mathbf{T}[\psi] = \mu\psi, \quad (119)$$

sendo que \mathbf{T} é o operador linear o qual será suposto como tendo um espectro real, embora não sendo, necessariamente, Hermitiano.

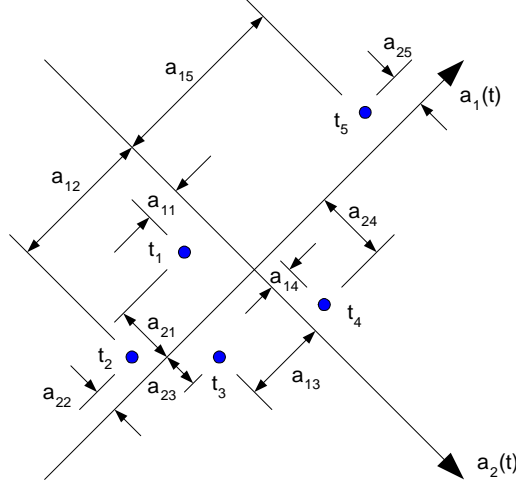


Figura 17. Determinação das coordenadas principais.

Assim, considere as seguintes equações gerais de evolução no tempo

$$i \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{T} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]; \quad (120a)$$

$$-i \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{T}^* [\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)], \quad (120b)$$

sendo que a segunda equação é a adjunta da primeira e, portanto, \mathbf{T}^* refere-se ao operador adjunto. Ambas são resolvidas com condições iniciais suficientemente gerais para excitar todos os modos dos respectivos operadores e, então, usando-se a hipótese de ergodicidade, obtém-se a correlação espacial cruzada segundo

$$\mathbf{R}_{\mathbf{uw}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = E [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}')] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}', t) dt. \quad (121)$$

Esta é, naturalmente, uma extensão da formulação apresentada anteriormente. Supondo que o operador integral de núcleo $\mathbf{R}_{\mathbf{uw}}$ possui autofunções e autovalores satisfazendo a relação

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{R}_{\mathbf{uw}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \psi(\mathbf{x}), \quad (122)$$

a aplicação do operador \mathbf{T} à equação acima, juntamente com o uso das Eqs. (120a) e (121), fornece

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{T} [\mathbf{R}_{\mathbf{uw}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} \mathbf{T} [E [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}')]] \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} E [\mathbf{T} [\mathbf{u}(\mathbf{x})] \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}')] \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} E \left[i \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial t} \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}') \right] \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T i \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial t} \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}') dt \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &= \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})]. \quad (123) \end{aligned}$$

Efetuada-se uma integração por partes e usando-se a Eq. (120b), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{D}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [i\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}')_0^T \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\
& \quad - \int_{\mathcal{D}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T i\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x}')}{\partial t} dt \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\
& \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \left(-i \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x}')}{\partial t} \right) dt \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\
& \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} E [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{T}^* [\mathbf{w}(\mathbf{x}')]] \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\
& \Rightarrow E \left[\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \int_{\mathcal{D}} \mathbf{T}^* [\mathbf{w}(\mathbf{x}')] \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] = \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\
& \Rightarrow E [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{T}^* [\mathbf{w}(\mathbf{x}')] , \psi(\mathbf{x}') \rangle] = \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})]. \quad (124)
\end{aligned}$$

Finalmente, usando-se a definição de operador adjunto (60), chega-se a

$$\begin{aligned}
& E [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{w}(\mathbf{x}'), \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x}')] \rangle] = \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\
& \Rightarrow E \left[\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}(\mathbf{x}') \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x}')] d\mathbf{x}' \right] = \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\
& \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} E [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}')] \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x}')] d\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})] \\
& \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} \mathbf{R}_{\mathbf{uw}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x}')] d\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{T} [\psi(\mathbf{x})], \quad (125)
\end{aligned}$$

donde conclui-se que \mathbf{R} e \mathbf{T} comutam e, portanto, possuem as mesmas autofunções [3]. Todavia, os autovalores $\{\mu_k\}$ associados ao operador \mathbf{T} não serão, em geral, iguais aos POVs $\{\lambda_k\}$ associados à KLE. Estes, como já foi visto, representam a média quadrática da amplitude das respectivas autofunções e, para o caso de um sistema linear, onde estas evoluem independentemente, são unicamente determinados a partir das condições iniciais. Em contraste, os autovalores $\{\mu_k\}$ do operador \mathbf{T} são intrínsecos às equações, não dependendo, pois, das condições iniciais.

O resultado acima é, particularmente, útil no caso da vibração de sistemas contínuos. Genericamente, a equação de movimento destes sistemas pode ser escrita na forma

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{T} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)], \quad (126)$$

sendo ρ a massa específica e \mathbf{T} um operador diferencial homogêneo associado à variável espacial \mathbf{x} chamado de operador rigidez e, mais importante ainda, Hermitiano [19], cujas autofunções constituem os modos de vibração da estrutura. Isto significa que, sendo o operador auto-adjunto, só há necessidade de se resolver uma equação de movimento a fim de se gerar dados para cálculo da correlação espacial, a qual reduz-se à autocorrelação anteriormente discutida. Desta forma, pode-se concluir que há a possibilidade de se usar a KLE como ferramenta alternativa de análise modal.

Na maioria das vezes, sistemas contínuos são discretizados através de algum método aproximativo, como por exemplo o método de elementos finitos, passando a ser descritos por sistemas de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. A relação entre os modos de vibração e os POMs, nestes casos, será explorada na próxima seção.

Relação entre os modos empíricos e os modos de vibração

Considere uma estrutura modelada como um sistema discreto com N graus de liberdade, de forma que sua dinâmica livre é descrita pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (127)$$

sendo \mathbf{M} e \mathbf{K} , obviamente, as matrizes de massa e rigidez e, por hora, desprezando-se o amortecimento do sistema. Como se sabe, a solução deste problema pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(t) &= b_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \mathbf{w}_1 + b_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \mathbf{w}_2 + \dots + b_N \sin(\omega_N t + \phi_N) \mathbf{w}_N \\
&= c_1(t) \mathbf{w}_1 + c_2(t) \mathbf{w}_2 + \dots + c_N(t) \mathbf{w}_N, \quad (128)
\end{aligned}$$

sendo b_i e ϕ_i constantes a serem determinadas das condições iniciais e ω_i e \mathbf{w}_i , respectivamente, as frequências naturais e modos de vibração da estrutura que nada mais são do que as soluções não triviais da equação vetorial

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (129)$$

Deve-se, ainda, destacar que estes modos de vibração são normalizados em relação à matriz de massa [9], isto é,

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{M} \mathbf{w}_j = \delta_{ij}. \quad (130)$$

A vibração livre deste sistema consiste em um campo vetorial com média nula e, portanto, é possível, através da aplicação do método direto aos graus de liberdade do sistema, obter-se, prontamente, a seguinte matriz de amostragem definida na Eq. (95)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(t_m) \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \mathbf{w}_1^T + \dots + \mathbf{c}_N \mathbf{w}_N^T], \quad (131)$$

sendo \mathbf{c}_i vetores de dimensão $M \times 1$ resultantes da amostragem em M instantes de tempo dos coeficientes $c_i(t)$ definidos em (128). Consequentemente, o cálculo da matriz de correlação espacial segundo a Eq. (96) resulta em

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \frac{1}{M} [\mathbf{c}_1 \mathbf{w}_1^T + \dots + \mathbf{c}_N \mathbf{w}_N^T]^T [\mathbf{c}_1 \mathbf{w}_1^T + \dots + \mathbf{c}_N \mathbf{w}_N^T]. \quad (132)$$

Supondo, em um primeiro caso, que a matriz de massa seja igual ou proporcional à matriz identidade, de maneira que os modos de vibração sejam ou possam ser feitos ortonormais, isto é, $\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_j = \delta_{ij}$, a pós-multiplicação da equação acima por um dos modos de vibração fornece

$$\mathbf{R} \mathbf{w}_i = \frac{1}{M} [\mathbf{c}_1 \mathbf{w}_1^T + \dots + \mathbf{c}_N \mathbf{w}_N^T]^T [\mathbf{c}_1 \mathbf{w}_1^T + \dots + \mathbf{c}_N \mathbf{w}_N^T] \mathbf{w}_i \quad (133)$$

a qual, após aplicação da ortonormalidade dos modos, reduz-se a

$$\mathbf{R} \mathbf{w}_i = \frac{1}{M} (\mathbf{w}_1 \mathbf{c}_1^T \mathbf{c}_i + \dots + \mathbf{w}_N \mathbf{c}_N^T \mathbf{c}_i). \quad (134)$$

Ora, caso as frequências naturais dos modos de vibração sejam distintas, cada termo $(\mathbf{w}_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j)/M$ na expressão acima tenderá a zero, quando $M \rightarrow \infty$, à exceção do termo $(\mathbf{w}_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i)/M$, o qual será proporcional a \mathbf{w}_i . Isto significa que o modo de vibração \mathbf{w}_i torna-se um autovetor de \mathbf{R} e, portanto, um POM. Ou, alternativamente, pode-se dizer que, nestas condições, os POMs convergem aos modos de vibração do sistema discreto. Além disso, os autovalores de \mathbf{R} ou POVs convergem para os valores médios quadráticos das respectivas amplitudes modais.

Infelizmente, o uso de métodos aproximativos como elementos ou diferenças finitas gera matrizes globais de massa que não são proporcionais à identidade, mas, geralmente, matrizes diagonais por blocos, levando a modos de vibração ortonormais em relação à matriz de massa (130). A fim de contornar esta situação, Feeny e Kappagantu [4] sugeriram a criação de uma matriz de correlação ajustada definida como

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \mathbf{M}. \quad (135)$$

Com isso, temos que, no limite quando $M \rightarrow \infty$, a pós-multiplicação de $\hat{\mathbf{R}}$ por um dos modos de vibração do sistema fornece

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{w}_i &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} [\mathbf{c}_1 \mathbf{w}_1^T + \dots + \mathbf{c}_N \mathbf{w}_N^T]^T [\mathbf{c}_1 \mathbf{w}_1^T + \dots + \mathbf{c}_N \mathbf{w}_N^T] \mathbf{M} \mathbf{w}_i \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} (\mathbf{w}_1 \mathbf{c}_1^T \mathbf{c}_i + \dots + \mathbf{w}_N \mathbf{c}_N^T \mathbf{c}_i) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i}{M}, \end{aligned} \quad (136)$$

que vem a ser, novamente, proporcional a \mathbf{w}_i e tendo sido usada a Eq. (130). Logo, podemos concluir que os POMs referentes à matriz de correlação ajustada convergem para os modos de vibração do sistema discreto. Como notado por Feeny e Kappagantu em [4], $\hat{\mathbf{R}}$ não é, necessariamente, uma matriz simétrica e, consequentemente, seus autovetores não são ortogonais, de forma que o uso do termo POM, neste caso, pode não ser a melhor escolha.

No caso de sistemas com amortecimento viscoso, a Eq. (136) deixa de ter validade, uma vez que todos termos $(\mathbf{w}_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j)/M$ tenderão a zero, quando $t \rightarrow \infty$, devido à modulação de amplitude causada pela exponencial introduzida em cada coeficiente $c_i(t)$ da Eq. (128), os quais assumem a forma

$$c_i(t) = b_i e^{-\zeta \omega_i t} \sin(\omega_{di} t + \phi_i),$$

sendo ω_{di} as frequências naturais amortecidas [9].

Entretanto, na prática, M será finito. Portanto, espera-se que, se o amortecimento modal for relativamente baixo, permitindo a observação e amostragem de dados em vários períodos de oscilação, seja possível obter uma boa convergência dos POMs para os modos de vibração do sistema. Na realidade, quanto menores forem os fatores de amortecimento, melhores serão os resultados obtidos.

Outro possível caso de interesse é aquele em que a estrutura está submetida a um forçamento harmônico. Também aqui, a Eq. (136) não será válida já que os coeficientes $c_i(t)$ terão a mesma frequência e, conseqüentemente, nenhum termo terá zero como limite. Logo, não será mais possível dizer que os POMs convergem para os modos de vibração. Todavia, se a estrutura estiver em ressonância, isto é, com um modo vibrando com amplitude muito maior que os demais, então o POM associado ao maior POV tenderá a aproximar este modo ressonante. Obviamente, a qualidade desta aproximação dependerá da razões entre a amplitude do modo em ressonância e as demais amplitudes.

A fim de se estudar estas questões com um pouco mais de profundidade do que é possível com um sistema massa-mola com três graus de liberdade utilizado em [4], optou-se por aplicar a KLE à vibração de uma treliça bidimensional com dezesseis graus de liberdade, como será apresentado a seguir.

A KLE aplicada à vibração de uma treliça bidimensional

Considere a treliça mostrada na Fig. 18 com dimensões $l_1 = 15$ cm, $l_2 = 20$ cm e composta por barras de aço (módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, massa específica $\rho = 7860$ kg/m³) com 1 cm² de área de seção reta.

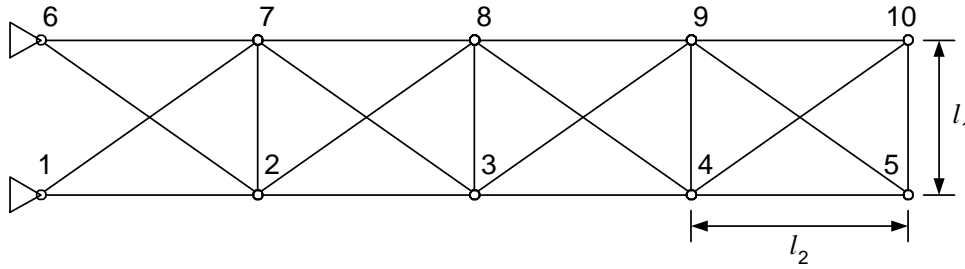


Figura 18. Treliça bidimensional.

Esta estrutura foi modelada através do método de elementos finitos, utilizando-se 17 elementos de barra com dois graus de liberdade em cada extremidade (deslocamento horizontal e vertical) e conectados nos 10 nós mostrados na Fig. 18. Após eliminação dos graus de liberdade correspondentes aos apoios localizados nos nós de número 1 e 6, obtemos um modelo representado pela seguintes matrizes de massa e rigidez:

$$\mathbf{M} = \text{diag} \begin{pmatrix} 0,41277 & 0,41277 & 0,41277 & 0,41277 & 0,41277 \\ 0,41277 & 0,23587 & 0,23587 & 0,41277 & 0,41277 \\ 0,41277 & 0,41277 & 0,41277 & 0,41277 & 0,23587 \\ 0,23587 & & & & \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2],$$

sendo

$$\mathbf{K}_1 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 3,024 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,909 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3,024 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,909 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3,024 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,909 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1,512 & -0,384 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,384 & 1,621 \\ 0 & 0 & -0,512 & 0,384 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,333 & 0,384 & -0,288 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,512 & -0,384 & 0 & 0 & -0,512 & 0,384 & 0 & 0 \\ -0,384 & -0,288 & 0 & -1,333 & 0,384 & -0,288 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,512 & -0,384 & 0 & 0 & -0,512 & 0,384 \\ 0 & 0 & -0,384 & -0,288 & 0 & -1,333 & 0,384 & -0,288 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,512 & -0,384 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,384 & -0,288 & 0 & -1,333 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{K}_2 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,512 & -0,384 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,333 & -0,384 & -0,288 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,512 & 0,384 & 0 & 0 & -0,512 & -0,384 & 0 & 0 \\ 0,384 & -0,288 & 0 & -1,333 & -0,384 & -0,288 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,512 & 0,384 & 0 & 0 & -0,512 & -0,384 \\ 0 & 0 & 0,384 & -0,288 & 0 & -1,333 & -0,384 & -0,288 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,512 & 0,384 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,384 & -0,288 & 0 & -1,333 \\ 3,024 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,909 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3,024 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,909 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3,024 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,909 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1,512 & 0,384 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,384 & 1,621 \end{bmatrix}$$

Logo, a solução do problema de autovalor associado à Eq. 129 provê os modos de vibração da treliça, mostrados em vermelho na Fig. 19 com as respectivas freqüências naturais.

A estrutura foi, então, excitada por meio de dois impulsos unitários aplicados, simultaneamente, nas direções horizontal e vertical, no nó de número 10. Sua resposta dinâmica foi amostrada em todos os 16 nós do modelo e em ambas as direções. Foi utilizado um tempo de amostragem de 0,1 s, ligeiramente maior que o período do primeiro modo de vibração, por razões que serão discutidas um pouco mais à frente e o intervalo total foi de 0 a 100 s. Com isso, havia 1000 amostras. Em virtude de ser este um sistema discreto com um número pequeno de graus de liberdade, ele é ideal para a aplicação do método direto o qual foi, efetivamente, utilizado.

A Fig. 20 mostra os POMs, juntamente com os respectivos autovalores expressos percentualmente, obtidos a partir da matriz de correlação \mathbf{R} segundo a Eq. (132). Naturalmente, a matriz global de massa do modelo não é proporcional à matriz identidade e, portanto, não se pode dizer que estes POMs estão convergindo para os modos de vibração da treliça. Entretanto, qualitativamente, pode-se dizer que os POMs representam muito bem os dezesseis modos de vibração. Obviamente, poderíamos ter multiplicado \mathbf{R} pela matriz global de massa e, então, calcular os autovetores de $\hat{\mathbf{R}}$, a fim de garantir a convergência para os modos. Há algumas razões pelas quais isso não será feito aqui. A primeira é que, em um caso experimental, a matriz global de massa não será conhecida e, portanto, é interessante saber se os POMs obtidos desta forma podem ser tomados como aproximação para os modos de um modelo discreto. Além disso, como foi dito antes, qualquer discretização é um processo aproximativo e, na realidade, as estruturas são sistemas contínuos cujos modos são autofunções de um operador Hermitiano (o operador rigidez) e, portanto, mutuamente ortogonais, de forma que os POMs talvez constituam-se numa melhor representação dos modos reais do que os modos de vibração do modelo discreto. Abrindo-se uma exceção, calculou-se a norma da diferença entre os dois primeiros modos de vibração e os POMs correspondentes (primeiro e terceiro), obtidos a partir de \mathbf{R} e da matriz de correlação ajustada $\hat{\mathbf{R}}$. Os resultados

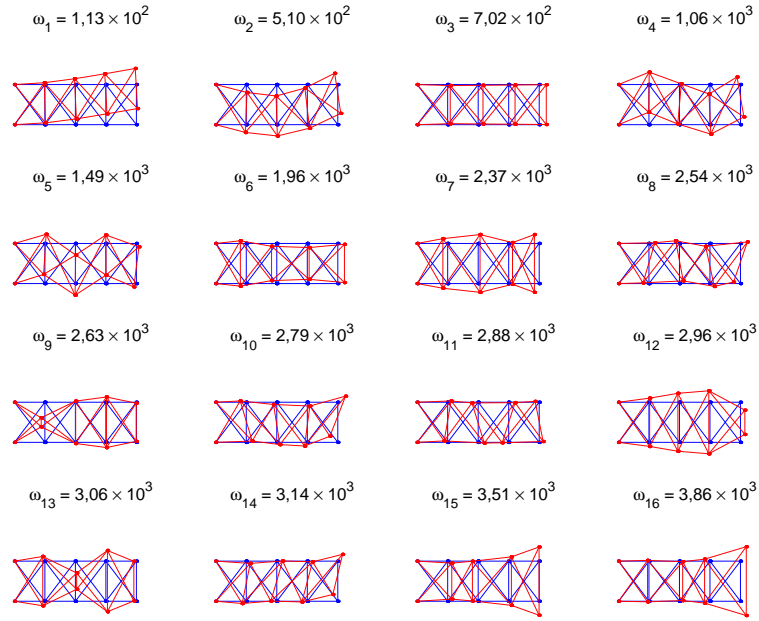


Figura 19. Modos de vibração da treliça bidimensional.

mostrados na tabela 2 indicam que praticamente não há diferença entre os POMs, para o caso da matriz global de massa diagonal usada aqui.

	POMs sobre \mathbf{R}	POMs sobre $\hat{\mathbf{R}}$
Primeiro modo de vibração	13,33	13,37
Segundo modo de vibração	34,10	34,03

Tabela 2. Comparação entre os POMs correspondentes aos dois primeiros modos de vibração e obtidos a partir de \mathbf{R} e $\hat{\mathbf{R}}$.

A Fig. 21 mostra a mesma análise feita para o caso em que apenas um impulso vertical foi aplicado ao nó 10. Neste caso, observou-se um pequeno aumento da energia contida no primeiro POM, o que era de se esperar e uma dificuldade em representar alguns dos modos. Também notou-se que a redução progressiva do intervalo de

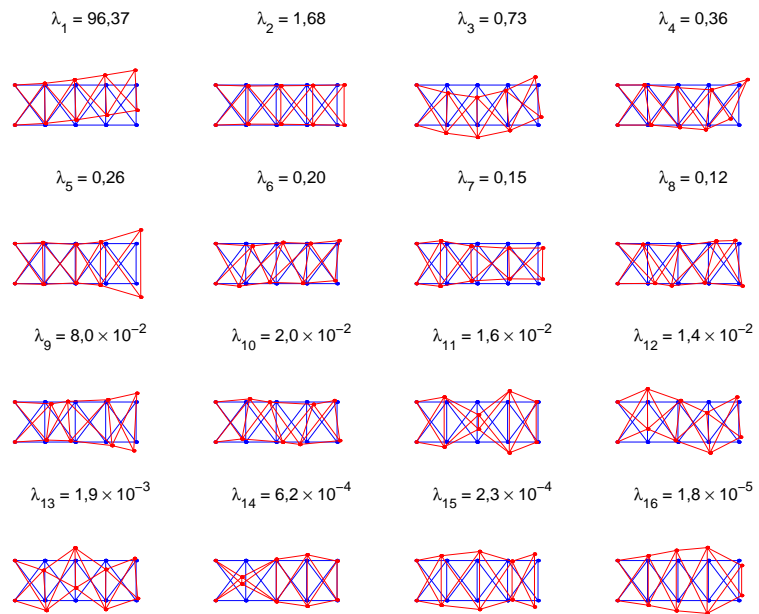


Figura 20. POMs e respectivas percentagens de energias para impulsos unitários aplicados ao nó 10, em ambas as direções.

amostragem a valores abaixo do primeiro período de oscilação, mantendo-se o número de amostras constantes, piorava sensivelmente a forma dos POMs. Já um aumento deste tempo não produzia efeito algum. Isto decorre do fato de a hipótese de ergodicidade implicar na necessidade do uso de amostras estatisticamente ortogonais (correlação nula). Infelizmente, estamos lidando com um sistema determinístico, de maneira que o tempo de correlação jamais será finito. E, como os resultados mostraram, a escolha de um intervalo de amostragem maior que o primeiro período natural apresenta-se como uma estratégia efetiva para minimizar este problema [37].

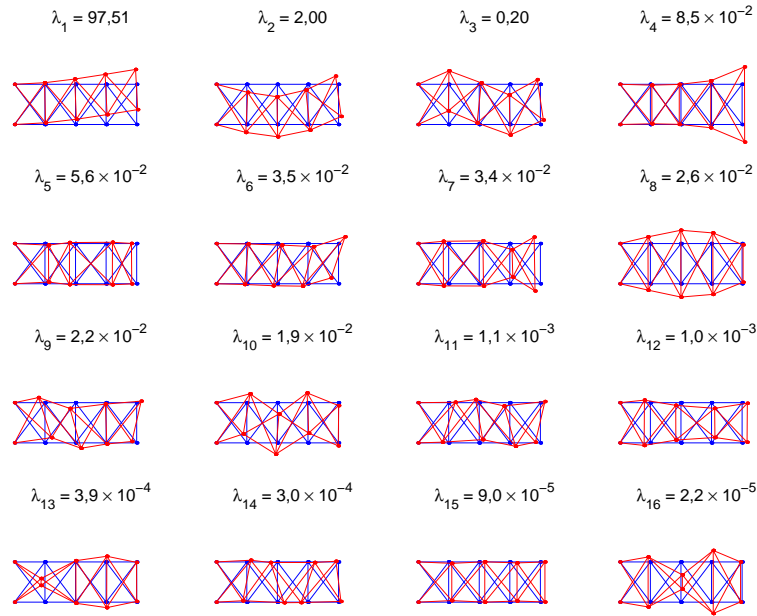


Figura 21. POMs e respectivas percentagens de energias para impulso unitário vertical aplicado ao nó 10.

O fato da KLE ser ótima mostra-se claramente na Fig. 21, onde os dois primeiros POMs respondem por mais de 99,5 % da energia do sistema. Reconstruindo o deslocamento horizontal do mesmo nó 10, observa-se, na Fig. 22, que estes dois POMs são suficientes para uma boa representação desta dinâmica.

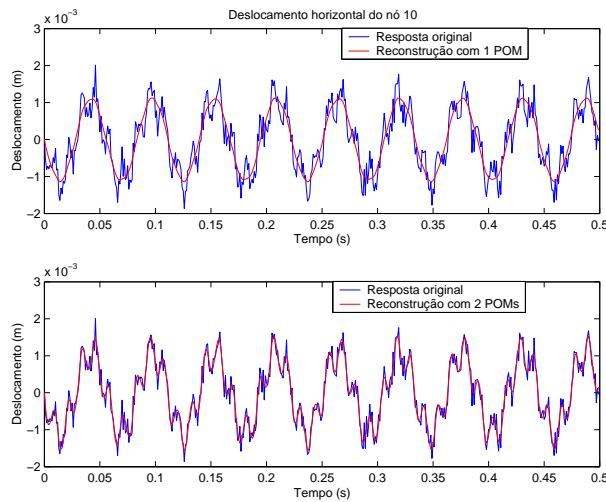


Figura 22. Reconstrução da dinâmica devida ao impulso vertical aplicado ao nó 10, usando-se um e dois POMs.

Contudo, ao se otimizar uma base para uma dinâmica particular, muitas vezes a expansão perde a robustez necessária para se gerar um modelo reduzido que atenda outras situações. A Fig. 23 mostra os POMs obtidos da mesma maneira, porém no caso de um impulso horizontal aplicado ao nó 10. Neste caso, a energia está muito mais distribuída pelos POMs, sendo que o primeiro deles responde por somente 37,80 % dela. O primeiro gráfico da Fig. 24 mostra a reconstrução do deslocamento horizontal do nó 10, utilizando-se os quatro primeiros POMs mostrados na Fig. 23. Obviamente, o resultado não é muito bom, visto que estes modos empíricos contêm,

aproximadamente, somente 87 % da energia, longe, portanto, dos 99 % usualmente necessários. Entretanto, o resultado torna-se realmente ruim quando se tenta reconstruir esta dinâmica usando-se os quatro primeiros POMs obtidos da dinâmica resultante da aplicação do impulso vertical (Fig. 21), caso em que respondiam por mais de 99 % da energia. Todavia, comparando-os com os quatro primeiros POMs da Fig. 23, nota-se que, para a dinâmica resultante do impulso horizontal, eles não chegam a atingir 50 % da energia.

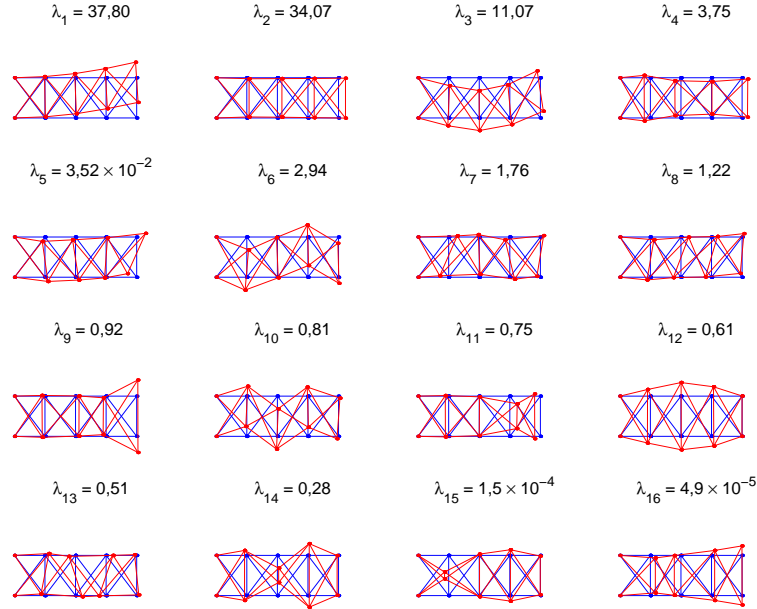


Figura 23. POMs e respectivas percentagens de energias para impulso unitário horizontal aplicado ao nó 10.

Por último, o terceiro gráfico mostra, em vermelho, a reconstrução da dinâmica a partir dos quatro primeiros modos de vibração da treliça. O resultado é razoável, uma vez que os três primeiros POMs obtidos do impulso horizontal correspondem, qualitativamente, aos três primeiros modos de vibração (a ordem do segundo e terceiro estão trocadas). Fez-se, então, uma nova reconstrução com os três primeiros POMs mostrados na Fig. 23 acrescidos do sexto POM, de forma a corresponderem aos quatro primeiros modos de vibração. Esta reconstrução foi plotada em verde. Observa-se que ela é, praticamente, indistinguível da reconstrução modal (em vermelho). No entanto, calculando a norma da diferença entre ambas as reconstruções e a resposta original, obtemos

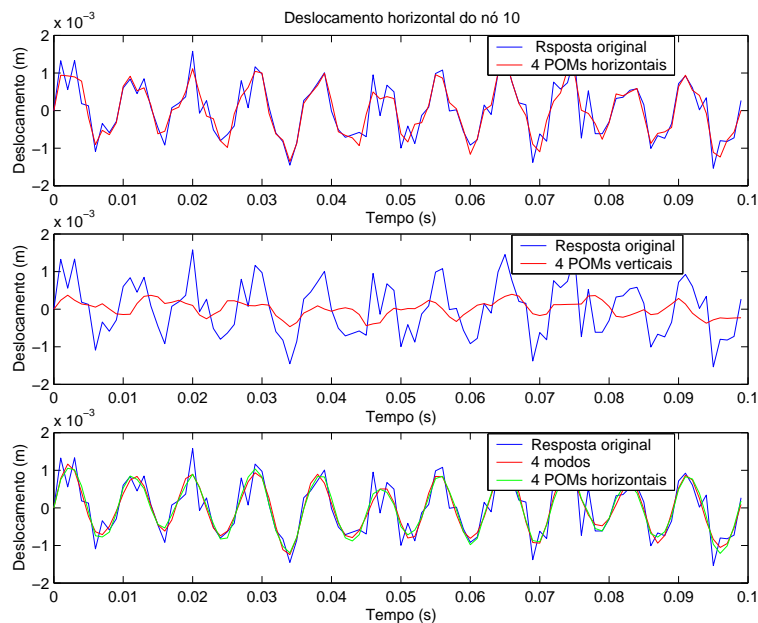


Figura 24. Reconstrução da dinâmica devida ao impulso horizontal aplicado ao nó 10.

$4,90 \times 10^{-3}$ para o caso modal e $4,61 \times 10^{-3}$ para os POMs, demonstrando, mais uma vez, a otimização característica da metodologia.

Finalmente, foi estudado uma treliça amortecida com dinâmica definida pelo sistema de equações,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (137)$$

sendo que a matriz de amortecimento \mathbf{C} foi suposta como sendo proporcional à matriz de rigidez, isto é, $\mathbf{C} = \beta\mathbf{K}$, com $\beta = 1 \times 10^{-4}$. Isto corresponde a fatores de amortecimento modais variando de $\zeta_1 = 0,0057$ a $\zeta_{16} = 0,1930$ segundo a relação

$$\zeta_i = \frac{\beta\omega_i}{2}. \quad (138)$$

Aplicando-se, novamente, impulsos unitários em ambas as direções do nó 10 e usando-se o método direto nas mesmas condições anteriores, ou seja, de 0 a 100 s amostrados a cada intervalo de 0,1 s, chega-se nos POMs mostrados na Fig. 25. Logo, conclui-se que a presença do amortecimento proporcional acabou por concentrar quase toda a energia no primeiro POM, tendo este fato um efeito detrimental na forma de alguns POMs.

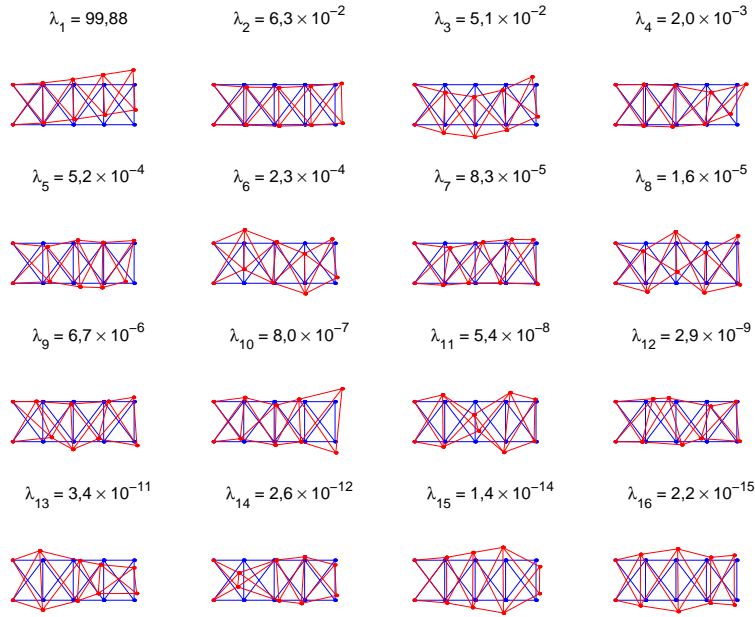


Figura 25. Efeito do amortecimento na obtenção dos POMs.

Aplicação da KLE à vibração de uma placa

A equação de vibração livre de uma placa retangular de dimensões $a \times b$ é [19]

$$D_E \nabla^4 w(\mathbf{x}, t) + \rho \frac{\partial^2 w(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0; \quad D_E = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (139)$$

sendo $\mathbf{x} = (x, y)$, E o módulo de elasticidade, ρ a massa específica, ν o coeficiente de Poisson e h a espessura da placa. Os modos de vibração (autofunções do operador biarmônico) e as frequências naturais para uma condição de contorno simplesmente apoiada valem

$$w_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\rho ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad \omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D_E}{\rho}} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right], \quad (140)$$

satisfazendo a condição de ortogonalidade

$$\int_0^a \int_0^b \rho w_{mn}(x, y) w_{kl}(x, y) dx dy = \rho \int_0^a \int_0^b w_{mn}(x, y) w_{kl}(x, y) dx dy = \delta_{mn,kl}. \quad (141)$$

Logo, a dinâmica da placa sujeita a condições iniciais nulas e submetida a um impulso unitário aplicado na posição $x = f_1 \times a$ e $y = f_2 \times b$, sendo $f_1 \in [0, 1]$, $f_2 \in [0, 1]$, é dada por

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\rho ab} \frac{\sin(f_1 m \pi) \sin(f_2 n \pi)}{\omega_{mn}} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \sin \omega_{mn} t. \quad (142)$$

Obviamente, a condição de ortogonalidade expressa pela Eq. (141) seria equivalente, em um sistema discreto, a uma matriz de massa proporcional à identidade. Logo, é de se esperar a convergência dos autovetores da matriz correlação espacial obtida através do método direto para os modos de vibração do sistema.

Como exemplo, foi aplicado um impulso unitário no meio ($f_1 = f_2 = 1/2$) de uma placa retangular ($a = 1,9$ m, $b = 1$ m) feita de aço e com 5 mm de espessura. A fim de se calcular a resposta analítica, foram empregados 256 modos de vibração. Estas dimensões em particular garantem a ausência de frequências naturais repetidas. O domínio espacial foi discretizado em uma malha com pontos espaçados de 0,05 m. A resposta foi amostrada em intervalos de 1 s, tempo este ligeiramente maior que o primeiro período natural. Os POMs foram, então, calculados e são mostrados juntamente com os respectivos POVs normalizados na Fig. 26. Deve-se destacar que necessitou-se de 1000 amostras para se alcançar este resultado.

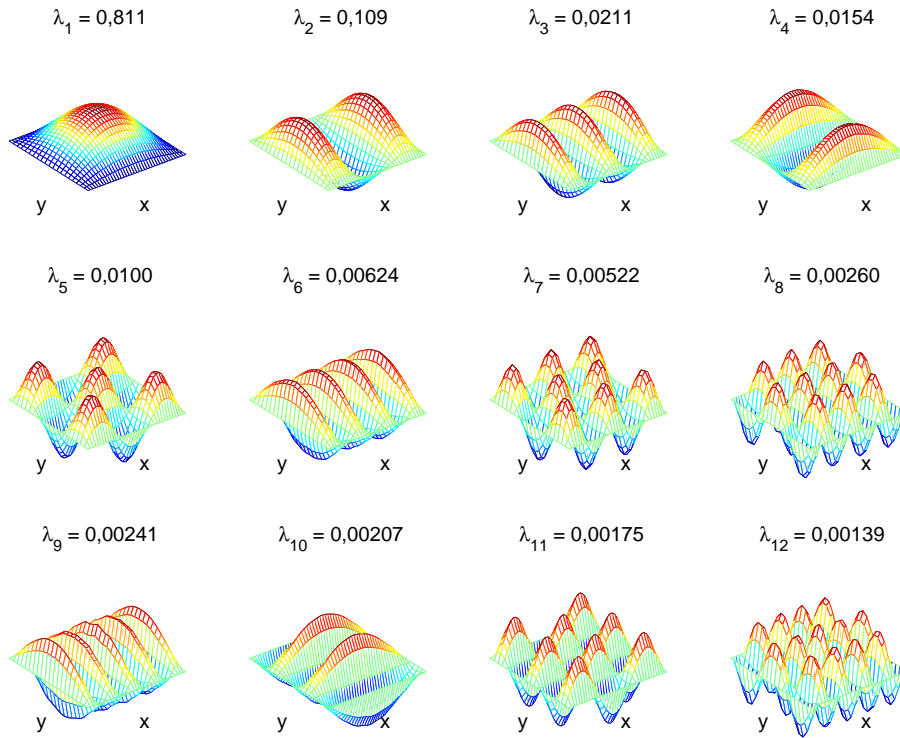


Figura 26. Doze primeiros POMs para impulso aplicado no meio da placa.

Embora este seja um bom resultado, é visível que nenhum modo de vibração com m ou n par foi capturado. Isto é, naturalmente, devido à posição da força impulsiva. Modos de vibração com um nó no meio da placa não são excitados e, portanto, não aparecem entre os POMs resultantes. Deslocando-se o ponto de aplicação da força para $f_1 = f_2 = 1/4$, obtém-se os novos POMs mostrados na Fig. 27. Já é possível se encontrar alguns dos modos pares entre os doze primeiros POMs. Além disso, também diminuiu-se a concentração de energia no primeiro POM.

Um novo deslocamento do ponto de aplicação da força para bem longe do centro afeta negativamente o resultado porque os modos de vibração mais excitados passam a ser os de mais alta frequência e que raramente são de interesse. Ainda, o número de amostras necessárias para se conseguir uma boa convergência, neste caso, aumenta significativamente. Felizmente, em um experimento físico, a singularidade presente na aplicação de um impulso numérico é evitada, de forma que não deve haver dificuldades na obtenção de modos de vibração de baixa frequência, através do uso de um martelo de impacto, em uma posição próxima do centro da placa.

O tempo final de 1000 s usado nos exemplos anteriores não é muito realístico, uma vez que sempre haverá amortecimento estrutural e, por causa disso, as vibrações livres da placa não poderão durar por muito tempo. Como já foi mencionado, se a estrutura tiver pequeno amortecimento, deve ser possível se encontrar os modos

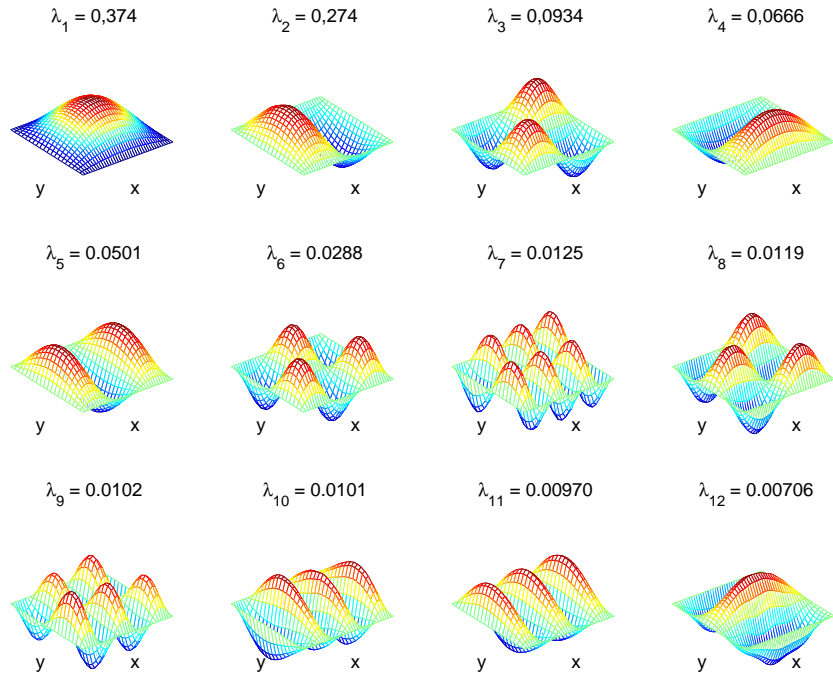


Figura 27. Doze primeiros POMs para impulso aplicado em $f_1 = f_2 = 1/4$.

de vibração através da KLE. A presença do amortecimento com conseqüente redução no tempo disponível para obtenção dos dados amostrados e a necessidade de um grande número destes para se conseguir a convergência aos modos, implica, necessariamente na redução do intervalo de amostragem. Por outro lado, a hipótese de ergodicidade, como já foi dito, requer o uso de dados estatisticamente ortogonais, o que é cada vez mais prejudicado com a redução do intervalo de amostragem. Considere, por exemplo, o mesmo caso do exemplo anterior, porém com uma placa tendo fatores de amortecimento modais iguais a $\zeta_{mn} = 0,01$. Em virtude deste amortecimento, a resposta da placa ao impulso foi amostrada em intervalos de 0,001 s até 1 s, fornecendo, então, as mesmas 1000 amostras. Os POMs resultantes desta análise são mostrados na Fig. 28.

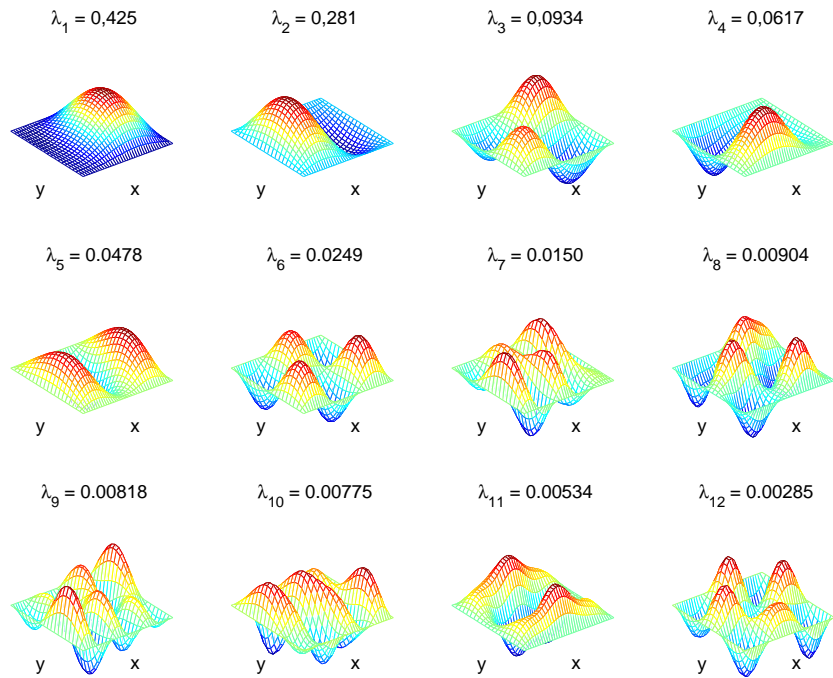


Figura 28. Doze primeiros POMs para placa amortecida.

Pode-se ver que houve sensível piora neste resultado. Portanto, é lógico se concluir que a diminuição do intervalo de amostragem para se lidar com amortecimento não é uma boa estratégia. Uma opção melhor seria a aplicação de um novo impulso, após algum tempo, de forma a se aumentar o tempo total disponível para amostragem dos dados.

Finalmente, o comportamento de uma placa quadrada com 1 m de lado foi investigado. Este sistema possui infinitos pares de frequências naturais iguais. Aplicou-se um impulso unitário em seu centro e amostrou-se a resposta em 1000 intervalos de 1 s. Os quatro primeiros POMs resultantes são apresentados na Fig. 29.

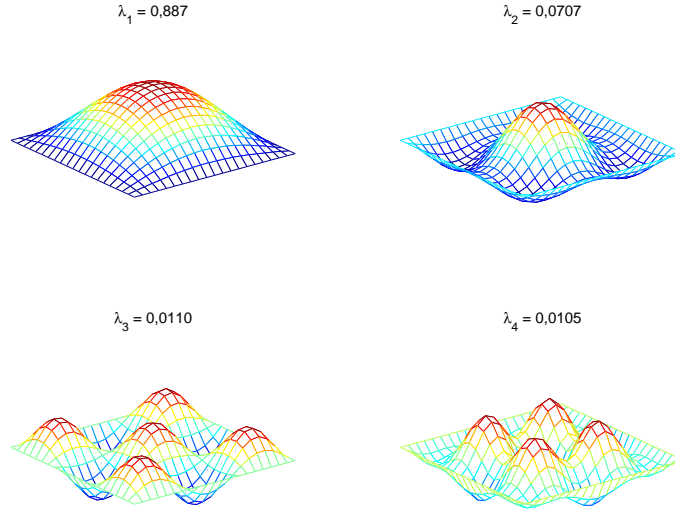


Figura 29. Quatro primeiros POMs para placa quadrada submetida a impulso central.

É interessante notar que a KLE não é capaz de diferenciar modos de vibração que possuem a mesma frequência. Como eles estão vibrando em fase, estatisticamente não é possível distingui-los e eles terminam somados pelo procedimento. Assim, o segundo POM acima é, na verdade, a soma dos modos $w_{13}(x, y) + w_{31}(x, y)$. E o quarto POM é o resultado de $w_{15}(x, y) + w_{51}(x, y)$ (note também que os modos pares não aparecem devido à posição de aplicação do impulso, como anteriormente discutido.) Esta pode ser uma grande desvantagem da realização de análise modal via KLE. Entretanto, se o objetivo for o de construir um modelo de ordem reduzida, a metodologia continua a demonstrar sua grande capacidade de comprimir informações [38].

Aplicação da KLE a um sistema de vibroimpacto

Considere uma viga de aço em balanço de comprimento $L = 500$ mm, largura $b = 24,85$ mm e espessura $h = 5,25$ mm, como mostrado na Fig. 30. Seu deslocamento transversal está limitado a partir de sua extremidade por dois batentes com 50 mm de comprimento situados a uma distância $\varepsilon = 5$ mm das superfícies superior e inferior da viga.

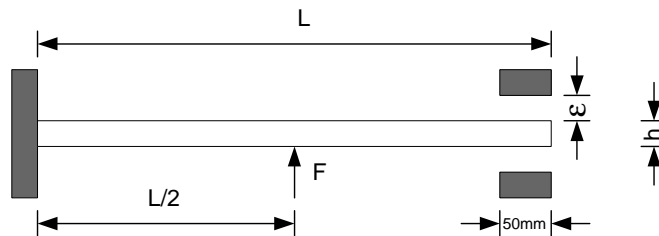


Figura 30. Sistema de vibroimpacto.

A modelagem dos batentes foi feita através de uma discretização que considera a existência de uma mola linear a cada espaço de 1 mm, de forma que a equação de movimento forçado do sistema, desconsiderando-se, inicialmente, o amortecimento estrutural, é dada por

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = F_f \sin(\omega_f t) \delta(x - x_f) + \sum_{i=1}^N F_{ci}(t) \delta(x - x_{ci}), \quad (143)$$

sendo F_f a amplitude do forçamento senoidal aplicado, ω_f sua frequência, x_f sua posição, x_{ci} as posições onde os batentes foram discretizados e, portanto, onde considera-se a existência das molas (neste caso $x_{ci} = \{450; 451; \dots 500\}$ mm), e F_{ci} as respectivas forças produzidas pelas molas em razão do choque da viga que assumem os valores

$$F_{ci}(t) = \begin{cases} 0, & |u(x_{ci}, t)| \leq \varepsilon, \\ -k(|u(x_{ci}, t)| - \varepsilon) \frac{u(x_{ci}, t)}{|u(x_{ci}, t)|}, & |u(x_{ci}, t)| > \varepsilon, \end{cases} \quad (144)$$

com k representando a constante elástica da mola.

No caso aqui apresentado, a força harmônica foi aplicada ao ponto médio da viga com amplitude de 50 N e frequência de 100 rad/s. As constantes das molas foram tomadas como $k = 1 \times 10^9$. A Eq. (143) foi, então, discretizada através do método de modos supostos [25], que nada mais é do que o método de Galerkin, tendo sido usados como funções testes os doze primeiros modos de vibração da viga em balanço e que valem

$$\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - \frac{\sinh \beta_n L - \sin \beta_n L}{\cosh \beta_n L + \cos \beta_n L} (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x), \quad (145)$$

sendo β_n uma solução apropriada da equação

$$\cos \beta L \cosh \beta L = 1. \quad (146)$$

Fatores de amortecimento modais foram, então, introduzidos na equação discretizada. Os seis primeiros foram calculados a partir da resposta em frequência medida experimentalmente em uma viga idêntica à descrita acima. Foi utilizado um martelo de impacto aplicado no centro da viga e sua resposta medida com um acelerômetro na extremidade livre. A resposta em frequência é mostrada na Fig. 147. O cálculo foi baseado na fórmula [9]:

$$\zeta_i = \frac{\omega_{bi} - \omega_{ai}}{2\omega_{di}}, \quad (147)$$

sendo ω_{di} a frequência correspondente a cada pico ressonante e ω_{ai} e ω_{bi} as frequências imediatamente anterior e posterior, respectivamente, correspondentes a uma amplitude da resposta em frequência igual à do pico menos 3 dB. Os seis fatores de amortecimento assim calculados são mostrados na tabela 3. Os seis fatores seguintes foram supostos iguais a 0,003.

$\zeta_1 = 0,0461$	$\zeta_2 = 0,0084$	$\zeta_3 = 0,0039$	$\zeta_4 = 0,0028$	$\zeta_5 = 0,0023$	$\zeta_6 = 0,0063$
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

Tabela 3. Fatores de amortecimento modais para a viga em balanço.

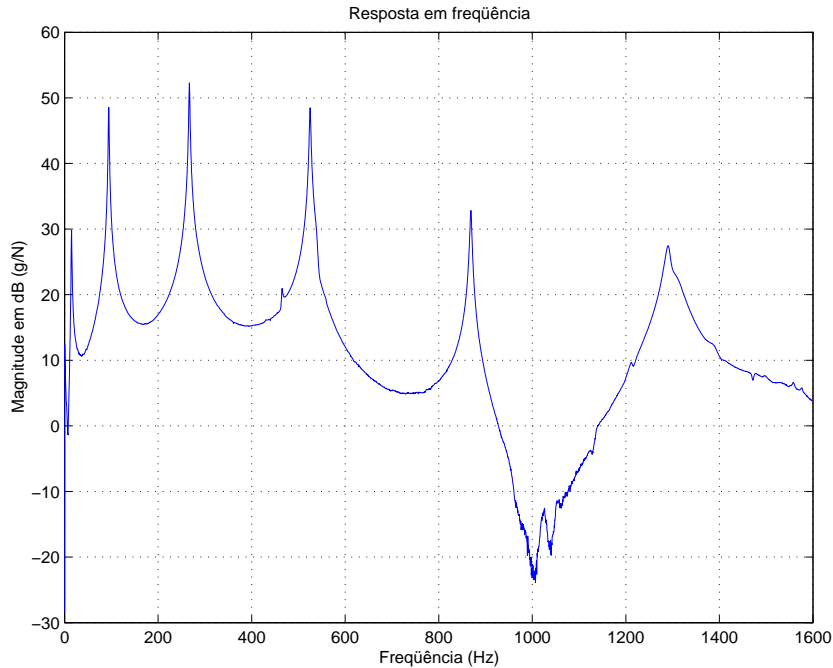


Figura 31. Resposta em frequência para a viga da Fig. 30.

É interessante notar que este sistema de vibroimpacto é um sistema linear por partes, de maneira que os POMs obtidos poderão ser facilmente comparados com os modos de vibração do sistema linear associado, facilitando a interpretação dos resultados. A resposta da viga foi amostrada em 501 pontos ao longo da dimensão longitudinal e em intervalos de 0,1 s (o primeiro período é de 0,056 s) até o tempo final de 10 s. Os oito primeiros modos empíricos obtidos são plotados juntamente com os oito primeiros modos de vibração na Fig. 32. As respectivas energias associadas a estes modos encontram-se na tabela 4.

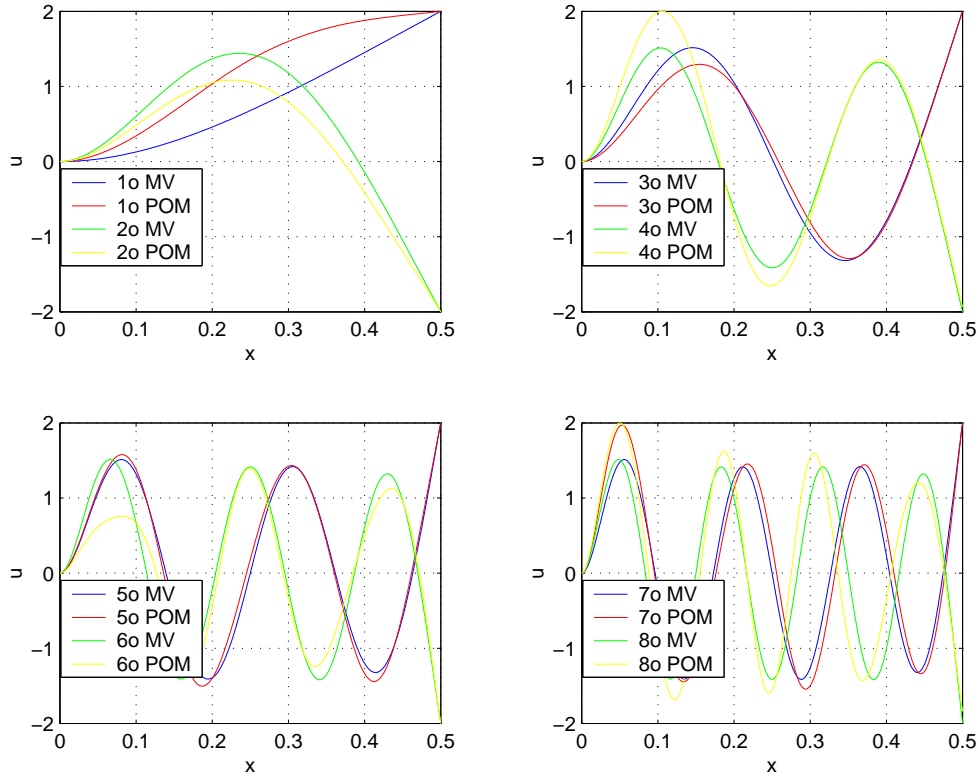


Figura 32. Comparação entre os modos empíricos e os modos de vibração do sistema de vibroimpacto.

$\lambda_1 = 0,959$
$\lambda_1 = 0,040$
$\lambda_1 = 0,001$
$\lambda_1 = 1,51 \times 10^{-4}$
$\lambda_1 = 2,35 \times 10^{-5}$
$\lambda_1 = 5,66 \times 10^{-6}$
$\lambda_1 = 2,93 \times 10^{-6}$
$\lambda_1 = 1,52 \times 10^{-6}$

Tabela 4. Energias normalizadas associadas aos oito primeiros modos empíricos.

Os resultados mostram uma diferença significativa entre os modos empíricos e os modos do sistema linear, especialmente no caso dos quatro primeiros. O primeiro POM é bem distinto do primeiro modo de vibração e contém quase 96 % da energia. Esta concentração de energia é devido ao fato de a frequência de excitação utilizada ser ligeiramente inferior à primeira frequência natural da viga.

Este resultado sugere que deve ser possível reproduzir-se a dinâmica da viga usando-se apenas os dois primeiros POMs, os quais agregam mais de 99 % da energia. De fato, como observado na Fig. 33, excelente precisão é alcançada com apenas dois modos empíricos.

A continuação do presente trabalho tem por objetivo avaliar a robustez de uma projeção via Galerkin, tendo como funções teste os modos empíricos obtidos em um determinado caso, com relação à variação de certos parâmetros como, por exemplo, rigidez, tamanho e posição dos batentes e frequência da força de excitação. Também está sendo estudado um método de identificação experimental da rigidez dos batentes baseado na expansão de Karhunen-Loève, aproveitando-se da boa insensibilidade da decomposição ao ruído.

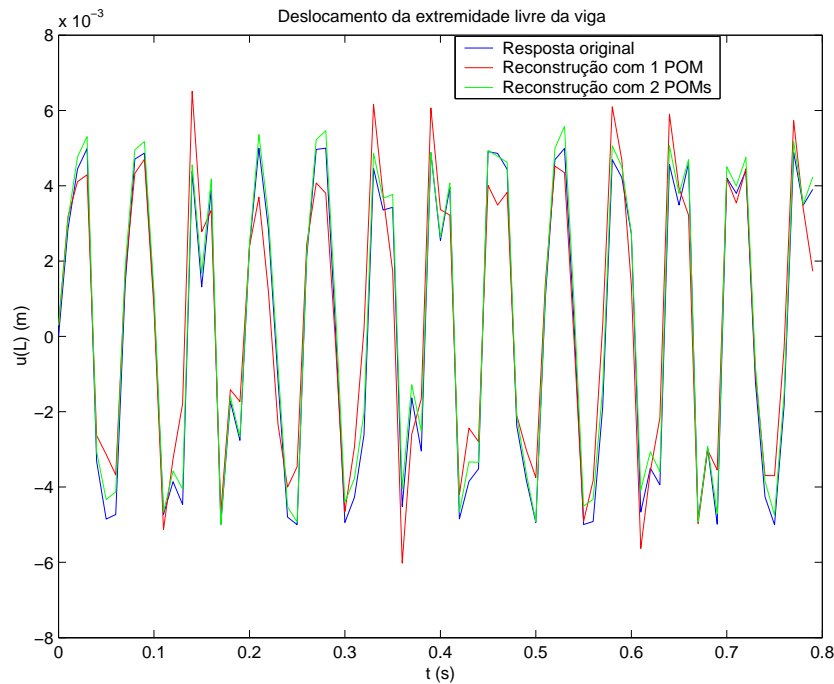


Figura 33. Reconstrução do deslocamento transversal da extremidade livre da viga.

Conclusões

Este trabalho teve como objetivo apresentar a expansão de Karhunen-Loève, discutir suas principais propriedades e mostrar como os modos empíricos obtidos com a expansão podem gerar uma representação dinâmica de dimensão bem menor se comparada com o sistema original.

Foi dada especial atenção à relação entre estes modos empíricos e os modos de vibração de estruturas lineares e discutidas alguns aspectos relativos à análise modal feita através da KLE. Observou-se que uma questão importante é o tempo de amostragem a ser usado o que pode causar problemas em um caso experimental, visto que o primeiro período de vibração da estrutura não será conhecido *a priori*. Além disso, ela não é capaz de diferenciar modos de mesma frequência. Entretanto, uma importante vantagem da KLE é o fato de fornecer explicitamente a contribuição energética de cada modo, o que pode se tornar uma importante informação na escolha das bases a serem usadas numa redução modal para, por exemplo, o projeto de um controlador para determinada estrutura.

Finalmente foi apresentada uma aplicação a um sistema não-linear de vibroimpacto e descritos os trabalhos em andamento baseados neste exemplo.

Referências

- [1] Albuquerque, J.P.A., Fortes, J.M.P., and Finamore, W.A. *Modelos probabilísticos em engenharia elétrica*. Centro de Estudos em Telecomunicações da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1985.
- [2] Azeez, M.F.A. and Vakakis, A.F. *Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillations*. Journal of Sound and Vibration, **240**(5):859–889, 2001.
- [3] Breuer, K.S. and Sirovich, L. *The use of the Karhunen-Loève procedure for the calculation of linear eigenfunctions*. Journal of Computational Physics, **96**:277–296, 1991.
- [4] Feeny, L. and Kappagantu, R. *On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations*. Journal of Sound and Vibration, **211**(4):607–616, 1998.
- [5] Feldmann, U., Kreuzer, E., and Pinto, F. *Dynamic diagnosis of railway tracks by means of the Karhunen-Loève transformation*. Nonlinear dynamics, **22**:193–203, 2000.
- [6] Graham, M.L. and Kevrekidis, I.G. *Alternative approaches to the Karhunen-Loève decomposition for model reduction and data analysis*. Computers and Chemical Engineering, **20**(5):495–506, 1996.
- [7] Hochstadt, H. *Integral equations*. John Wiley & Sons, 1989.

- [8] Holmes, P., Lumley, J.L., and Berkooz, G. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge University Press, 1996.
- [9] Inman, D.J. *Engineering vibration*. Prentice-Hall, 1996.
- [10] Kim, T. *Frequency-domain Karhunen-Loeve method and its application to linear dynamic systems*. AIAA Journal, **36**(11):2117–2123, 1998.
- [11] Kreuzer, E. and Kust, O. *Analysis of long torsional strings by proper orthogonal decomposition*. Archive of Applied Mechanics, **67**:68–80, 1996.
- [12] Kreysig, E. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1978.
- [13] Lall, S., Marsden, J.E., and Glaväski, S. *Empirical model reduction of controlled nonlinear systems*. Technical report CIT-CDS-98-008, Control and Dynamical Systems, California Institute of Technology, 1998.
- [14] Lenaerts, V., Kerschen, G., and Golinval, G.C. *Proper orthogonal decomposition for model updating of non-linear mechanical systems*. Mechanical Systems and Signal Processing, **15**(1):31–43, 2001.
- [15] Lin, Y.K. *Probabilistic theory of structural mechanics*. Robert E. Krieger Publishing Company, 1976.
- [16] Lumley, J.L. *Stochastic tools in turbulence*. Academic Press, 1971.
- [17] Ma, X., Azeez, M.F.A., and Vakakis, A.F. *Non-linear normal modes and non-parametric system identification of non-linear oscillators*. Mechanical Systems and Signal Processing, **14**(1):37–48, 2000.
- [18] Ma, X. and Vakakis, A.F. *Karhunen-Loève decomposition of the transient dynamics of a multibay truss*. AIAA Journal, **37**(8):939–946, 1999.
- [19] Meirovitch, L. *Principles and techniques of vibrations*. Prentice-Hall, 1997.
- [20] Newman, A.J. *Model reduction via the Karhunen-Loeve expansion part I: an exposition*. Technical report 96-32, Institute for Systems Research, 1996.
- [21] Newman, A.J. *Model reduction via the Karhunen-Loeve expansion part II: some elementary examples*. Technical report 96-33, Institute for Systems Research, 1996.
- [22] Papoulis, A. *Probability, random variables, and stochastic processes*. McGraw-Hill, 1991.
- [23] Park, H.M. and Cho, D.H. *The use of the Karhunen-Loève decomposition for the modeling of distributed parameter systems*. Chemical Engineering Science, **51**(1):81–98, 1996.
- [24] Riesz, F. and Sz.-Nagy, B. *Functional analysis*. Frederick Ungar, 1955.
- [25] Shabana, A.A. *Theory of vibration volume II: discrete and continuous systems*. Springer-Verlag, 1991.
- [26] Sirovich, L. *Turbulence and the dynamics of coherent structures part I: coherent structures*. Quarterly of Applied Mathematics, **45**(3):561–571, 1987.
- [27] Sirovich, L. *Turbulence and the dynamics of coherent structures part II: symmetries and transformations*. Quarterly of Applied Mathematics, **45**(3):573–582, 1987.
- [28] Sirovich, L. *Turbulence and the dynamics of coherent structures part III: dynamics and scaling*. Quarterly of Applied Mathematics, **45**(3):583–590, 1987.
- [29] Sirovich, L., Knight, B.W., and Rodriguez, J.D. *Optimal low-dimensional dynamical approximations*. Quarterly of Applied Mathematics, **48**(3):535–548, 1990.
- [30] Smaoui, N. and Gharbi, R.B. *Using Karhunen-Loève decomposition and artificial neural network to model miscible fluid displacement in porous media*. Applied Mathematical Modelling, **24**:657–675, 2000.
- [31] Steindl, A. and Troger, H. *Methods for dimension reduction and their application in nonlinear dynamics*. International Journal of Solids and Structures, **38**:2131–2147, 2001.
- [32] Steindl, A., Troger, H., and Zemmann, J.V. *Nonlinear galerkin methods applied in the dimension reduction of vibrating fluid conveying tubes*. In Paidoussis, M.P., Bajaj, A.K., Corke, T.C., Farabee, T.M., and Williams, F. Hara D.R., eds., ASME Symposium on Fluid-Structure Interaction, Aeroelasticity, Flow-Induced Vibration and Noise, ASME, Dallas, EUA, vol. **AD53-1**, pp. 273–280, 1997.
- [33] Strang, G. *Linear algebra and its applications*. Harcourt Brace Jovanovich, 1988.
- [34] Tamura, Y., Suganuma, S., Kikuchi, H., and Hibi, K. *Proper orthogonal decomposition of random wind pressure field*. Journal of Fluids and Structures, **13**:1069–1095, 1999.
- [35] Tumer, I.Y., Wood, K.L., and Busch-Vishniac, I.J. *Extraction of fault patterns on SLS part surfaces using the Karhunen-Loève transform*. In Proceedings of the 1996 Solid Freeform Fabrication Symposium, Austin, EUA, pp. 575–585, 1996.

- [36] Tumer, I.Y., Wood, K.L., and Busch-Vishniac, I.J. *Monitoring of signals from manufacturing processes using the Karhunen-Loève transform*. Mechanical Systems and Signal Processing, **14**(6):1011–1026, 2000.
- [37] Wolter, C. and Sampaio, R. *A comparison between the use of the Karhunen-Loève expansion and mode shapes in the model reduction of linear systems*. In Espíndola, J.J., Lopes, E.M.O., and Bázan, F.S.V., eds., Proceedings of the IX Diname, Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, Florianópolis, Brasil, pp. 453–458, 2001.
- [38] Wolter, C., Trindade, M.A., and Sampaio, R. *Obtaining mode shapes through the Karhunen-Loève expansion for distributed-parameter linear systems*. In Proceedings of COBEM 2001 (aceito para publicação), Uberlândia, Brasil, 2001.