PHỤ LỤC 4B

Phổ và công cụ phân tích phổ - Hệ thống tuyến tính bất biến

Giới thiệu

Đề cập các công cụ và kỹ thuật cơ bản để phân tích tín hiệu & hệ thống viễn thông thông qua việc phân tích hệ thống tuyến tính. Để nghiên cứu khảo sát tín hiệu & hệ thống viễn thông, cần phải hiểu rõ các hệ thống tuyến tính và các đặc tính của nó trong miền tần số và miền thời gian, cùng với xác suất và phân tích tín hiệu ngẫu nhiên. Hầu hết các khối chức năng trong hệ thống truyền thông (kênh thông tin, các khối con của máy phát và máy thu) đều có thể đ- ợc mô hình hoá một cách t- ờng minh d- ới dạng hệ thống tuyến tính bất biến LTIV. Vì thế các kỹ thuật và công cụ đ- ợc dùng vào việc phân tích hệ thống tuyến tính đều có thể đ- ợc dùng trong quá trình phân tích chúng. Phần này, tập chung nhấn mạnh công cụ phân tích tín hiệu và hệ thống trong miền tần số. Bắt đầu từ chuỗi Fourier và biến đổi Fourier FT, sau đó đề cập các khái niệm năng l- ợng và công suất, lấy mẫu, và sự thể hiện thông thấp của tín hiệu thông dải.

2.1 Chuỗi Fourier

Quan hệ tín hiệu vào/ra của hệ tuyến tính bất biến LTIV đ- ợc xác định bởi tích chập (1.2.1)

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).x(t-\tau)d\tau \end{aligned} \qquad (1.2.1)$$

trong đó: *h(t), x(t), y(t)* là đáp ứng xung, tín hiệu vào (kích thích), tín hiệu ra (đáp ứng ra) của hệ thống.

Nếu *x(t)* là một hàm mũ phức đ- ợc cho bởi

$$x(t) = A.e^{j2\pi f_0 t} \qquad (1.2.2)$$

thì tín hiệu ra đ- ợc xác định bởi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A.e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} h(\tau)d\tau = \underbrace{A.e^{j2\pi f_0 t}}_{x(t)} . \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \right] \qquad (1.2.3)$$

Nói cách khác, đầu ra là hàm mũ phức có cùng tần số đầu vào, nh- ng biên độ (phức) tín hiệu ra là biên độ (phức) của tín hiệu vào đ- ợc khuyếch đại bởi hệ số khuyếch đại

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{-j2\pi f_0\tau} d\tau\right]$$

Thấy rõ, đáp ứng ra *y(t)* là một hàm của đáp ứng xung của hệ LTIV *h(t)* và tần số của tín hiệu vào $f_0 \Leftrightarrow y(t) = K.x(t)$ với $K = f\left(h(t), f_0\right) \Rightarrow$ dễ dàng tìm tín hiệu đầu ra *y(t)* của hệ LTIV đối với tín hiệu vào mũ. Vì vậy, nó là bản chất trong quá trình phân tích hệ LTIV, để tìm các ph- ơng pháp khai triển các tín hiệu d- ới dạng tổng các mũ phức. Chuỗi Fourier và biến đổi Fourier (FT) là các kỹ thuật để khai triển các tín hiệu d- ới dạng mũ phức.

- **Dạng 1- chuỗi Fourier dạng mũ:** □p dụng cho cả tín hệu tuần hoàn giá trị thực và giá trị phức. Chuỗi Fourier mũ là sự khai triển ***trực giao*** của các tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ T_0 khi tập tín hiệu $\left\{e^{j2\pi n f_0 t}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ đ- ợc dùng làm cơ sở khai triển, và đ- ợc áp dụng cho tín hiệu tuần hoàn giá trị thực và phức. Theo đó, bất kỳ một tín hiệu tuần hoàn *x(t)* có chu kỳ T_0 thoả mãn điều kiện Dirilet đều có thể đ- ợc biểu diễn là

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.e^{j2\pi n f_0 t} \qquad \text{(1.2.4)}$$

Trong đó, x_n đ- ợc gọi là hệ số chuỗi Fourier của *x(t)*, và đ- ợc cho bởi

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t} dt \qquad (1.2.5)$$

□ đây α là một hằng số tuỳ ý đ- ợc chọn sao cho khi tính tích phân đ- ợc đơn giản. Tần số $f_0=1/T_0$ đ- ợc gọi là tần số cơ bản của tín hiệu tuần hoàn, tần số $f_n= n\times f_0$ đ- ợc gọi là hai bậc thứ *n*. Đa số chọn $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = -T_0/2$.

Loại chuỗi Fourier này đ- ợc xem là ***chuỗi Fourier mũ*** và đều có thể đ- ợc áp dụng cho cả tín hiệu *x(t)* ***giá trị thực*** và ***phức*** miễn sao chúng là các tín hiệu tuần hoàn. □ dạng tổng quát, các hệ số chuỗi Fourier $\{x_n\}$ là các số phức cả khi *x(t)* là tín hiệu giá trị thực.

- ***Nếu x(t) là tín hiệu giá trị thực, thì***

$$\left.\begin{aligned} x_{-n} &= \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t.}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\underbrace{\left[\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t.}dt\right]^*}_{x_{\mathrm{Im}}(t)\,=0,\ \text{hàm cos là hàm chẵn}} \\ &= x^*_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{-n} = x^*_n \tag{1.2.6}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{cases} |x_n| = |x_{-n}| \\ \angle - x_n = -\angle x_{-n} \end{cases}}_{\text{Ở dạng tổng quát, hệ số chuỗi là số phức}} \tag{1.2.7}$$

⇒ Vì vậy, các hệ số chuỗi Fourier của một tín hiệu giá trị thực có tính chất *đối xứng Hermirian*-nghĩa là phần thực của nó là hàm chẵn và phần ảo là hàm lẻ (***biên độ của chúng là hàm chẵn và pha của chúng là hàm lẻ***).

❖ **Dạng 2-Chuỗi Fourier dạng l- ợng giác**: Chỉ áp dụng cho các tín hiệu tuần hoàn giá trị thực, bằng cách định nghĩa

$$x_n = \frac{a_n + jb_n}{2} \tag{2.1.8}$$

$$x_{-n} = \frac{a_n - jb_n}{2} \tag{2.1.9}$$

theo quan hệ Euler

$$e^{-j2\pi nt/T_0} = \cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) - j\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) \tag{1.2.10}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right).dt \\ b_n &= \frac{2}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right).dt \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

vì vậy,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) + b_n\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) \tag{1.2.12}$$

L- u ý rằng với $n = 0$, ta luôn có $b_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 2x_0$.

❖ **Dạng 3-chuỗi Fourier l- ợng giác**: Cũng chỉ áp dụng đối với các tín hiệu tuần hoàn giá trị thực. Bằng cách định nghĩa

$$\begin{cases} c_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}} \\ \theta_n = -\arctan \dfrac{b_n}{a_n} \end{cases} \tag{2.1.13}$$

từ quan hệ

$$a.cos\phi + b.sin\phi = \sqrt{a^2 + b^2}.cos\underbrace{\left(\phi - \arctan\frac{b}{a}\right)}_{\text{để ý}} \tag{2.1.14}$$

$\Rightarrow$ viết ph- ơng trình (1.2.12) ở dạng

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t + \theta_n\right) \tag{2.1.15}$$

☐ dạng tổng quát, các hệ số Fourier $\{x_n\}$ của các tín hiệu tuần hoàn giá trị thực đ- ợc liên hệ với a_n, b_n, c_n và θ_n thông qua

$$\begin{cases} a_n = 2\,\mathrm{Re}[x_n] \\ b_n = -2\,\mathrm{Im}[x_n] \\ c_n = |x_n| \\ \theta_n = \angle x_n \end{cases} \tag{2.1.16}$$

Khảo sát $|x_n|$ và $\angle x_n$ theo n (hoặc nf_0) đ- ợc gọi là phổ rời rạc của *x(t)*. Khảo sát $|x_n|$ đ- ợc gọi là phổ biên độ, và khảo sát $\angle x_n$ đ- ợc coi là phổ pha.

➢ ***Nếu x(t) là tín hiệu <u>thực chẵn</u>*** **-** nghĩa là, nếu $x(-t) = x(t)$ và lấy $\alpha = -T_0/2$, ta có

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{x(t).\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)}_{\text{là hàm lẻ của t}} dt \ = 0 \tag{1.2.17}$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{a_n}{2}$$

⇔ ***Nếu*** tín hiệu *x(t)* là *thực chẵn*, ***thì*** tất cả các hệ số x_n của *x(t)* đều là thực. Khi này, chuỗi Fourier l- ợng giác gồm tất cả các hàm **cosine**

➢ ***Nếu x(t) là tín hiệu <u>thực lẻ</u> -*** nghĩa là nếu $x(-t) = -x(t)$ thì

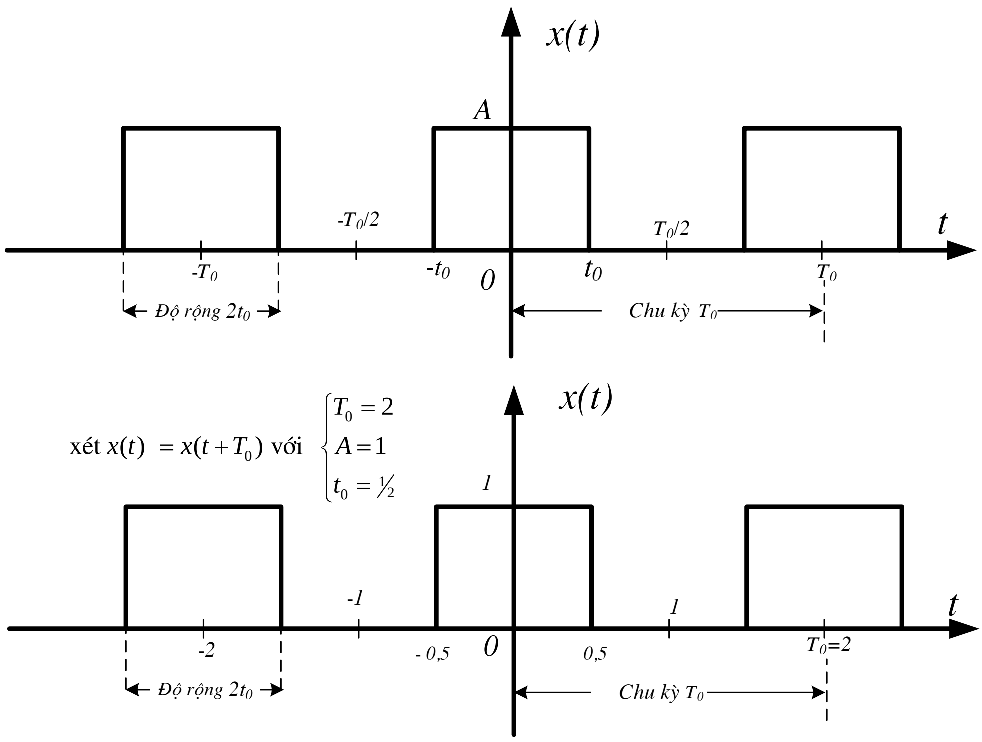
$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{x(t).\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)}_{\text{là hàm lẻ của t}} dt \;=0 \qquad (1.2.18)$$

$$\Rightarrow x_n = j\frac{b_n}{2}$$

⇔*Nếu* tín hiệu *x(t) thực lẻ*, ***thì*** tất cả các hệ số x_n của *x(t)* đều là ảo. Khi này, chuỗi Fourier l- ợng giác gồm tất cả các hàm **sine**.

Bài tập NVD4B_sim1:

CHU□I FOURIER C□A D□Y T□N HI□U CHỆ NHỐT



Hình 1.1 Tín hiệu *x(t)*

Cho tín hiệu tuần hoàn *x(t)* có chu kỳ T_0 đ- ợc định nghĩa bởi

$$x(t) = A\prod\left(\frac{t}{2t_0}\right) = \begin{cases} A, & |t| < t_0 \\ \dfrac{A}{2}, & t = \pm t_0 \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases} \qquad (1.2.19)$$

Với $|t| \le T_0/2$, trong đó $t_0 < T_0/2$. Tín hiệu xung chữ nhật $\prod(t)$ th- ờng đ- ợc định nghĩa bởi

$$\prod(t)=\begin{cases}1, & |t|<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & t=\pm\frac{1}{2}\\ 0, & \text{nếu khác}\end{cases} \tag{1.2.20}$$

Vẽ *x(t)* đ- ợc cho ở hình 1.1. *Nếu A=1,T_0=4 và t_0=1*

1. Xác định các hệ số chuỗi Fourier ở dạng l- ợng giác và mũ.

2. Vẽ phổ rời rạc của *x(t)*.

Lời giải:

1. Xác định các hệ số chuỗi Fourier ở dạng l- ợng giác và mũ

Từ việc khai triển các hệ số chuỗi Fourier của *(t)*, ta có

$$x_n=\frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0}x(t).e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t}dt$$

thành phần một chiều DC: $x_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t).dt=\frac{1}{2}\int_{-0,5}^{0,5}(1).dt=\frac{1}{2}$

$$x_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t).e^{-j2\pi nt/T_0}dt \quad =\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t).e^{-j2n\pi t/2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5}e^{-jn\pi t}dt \qquad =-\frac{1}{j2n\pi}e^{-jn\pi t}\Big|_{t=-0.5}^{t=0.5}$$

$$=-\frac{1}{j2n\pi}\left(-j\sin\frac{n\pi}{2}-j\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)}{\left(\pi\frac{n}{2}\right)}$$

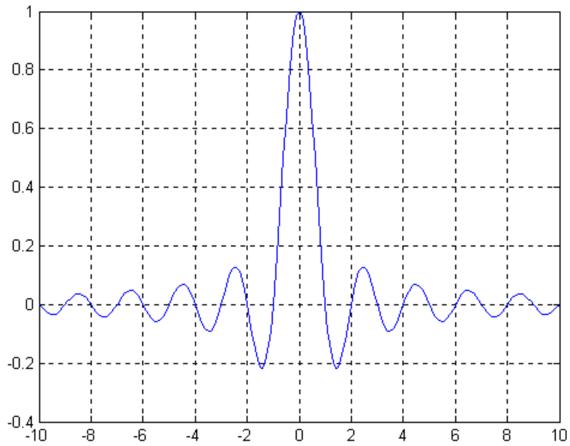
$$=\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right),$$

$$=\begin{cases}0, & n=\pm2,\pm4,\ldots\\ \frac{1}{n\pi}(-1)^{\left|(k-1)/2\right|}, & n=\pm1,\pm3,\ldots\end{cases} \tag{1.2.21 \& 1.2.22}$$

Hàm *sinc(x)* đ- ợc định nghĩa nh- sau

$$sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{1.2.23}$$

Hàm *sinc(x)* đ- ợc cho ở hình 1.2.



Hình 1.2 Tín hiệu *sinc(x)*

Thấy rõ, tất cả các hệ số của x_n là **thực** *(vì x(t) là thực chẵn)*, vì vậy

$$\begin{cases} a_n = \sin c\left(\dfrac{n}{2}\right) \\ b_n = 0 \\ c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad = \left|\sin c\left(\dfrac{n}{2}\right)\right| \\ \theta_n = -\arctan\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right) \quad = 0.\ \pi \end{cases} \tag{1.2.24}$$

L- u ý rằng, khi *n* chẵn, thì $x_n = 0$ (trừ *n*=0 khi đó $a_0 = c_0 = 1$ và $x_0 = 1/2$). Thay các hệ số này vào (1.2.4), ta có

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right)}_{x_n=0,\ \text{khi } n \text{ chẵn}} .e^{j2\pi \frac{n}{2}t}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right).cos(n\pi t)}_{\text{do } b_n=0,\ \text{và } x_n=0 \text{ khi } n \text{ chẵn} \neq 0} \tag{1.2.25}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ lẻ}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos\left(n\pi t + \left[(-1)^{(n-1)/2} - 1\right]\frac{\pi}{2}\right)$$

❑ **Nhận xét**: Từ kết quả cho thấy chuỗi xung chữ nhật tuần hoàn có chu kỳ T_0 chứa *tổng vô hạn* các hàm điều hoà (là bội số của tần số cơ bản $f_0=1/T_0$). Cần phải nêu bật quan hệ giữa chuỗi xung chữ nhật tuần hoàn và các hàm điều hoà đ- ợc phân tích từ nó, và ứng dụng trong thực tế. Ta l- u ý rằng, do các phần tử và hệ thống viễn thông điều có độ băng tần hữu hạn, nên khi cho xung vuông qua chúng, xung này sẽ bị loại bỏ một số thành phần tần số (hệ thống làm mất một số thành phần tần số chứa trong xung này). Vì thế cần phải xét *x(t)* theo số hàm điều hoà *N*.

Nếu ký hiệu *N* là số các hàm điều hoà chứa trong chuỗi xung chữ nhật $x_N(t)$, thì x*(t)* đ- ợc xác định bởi

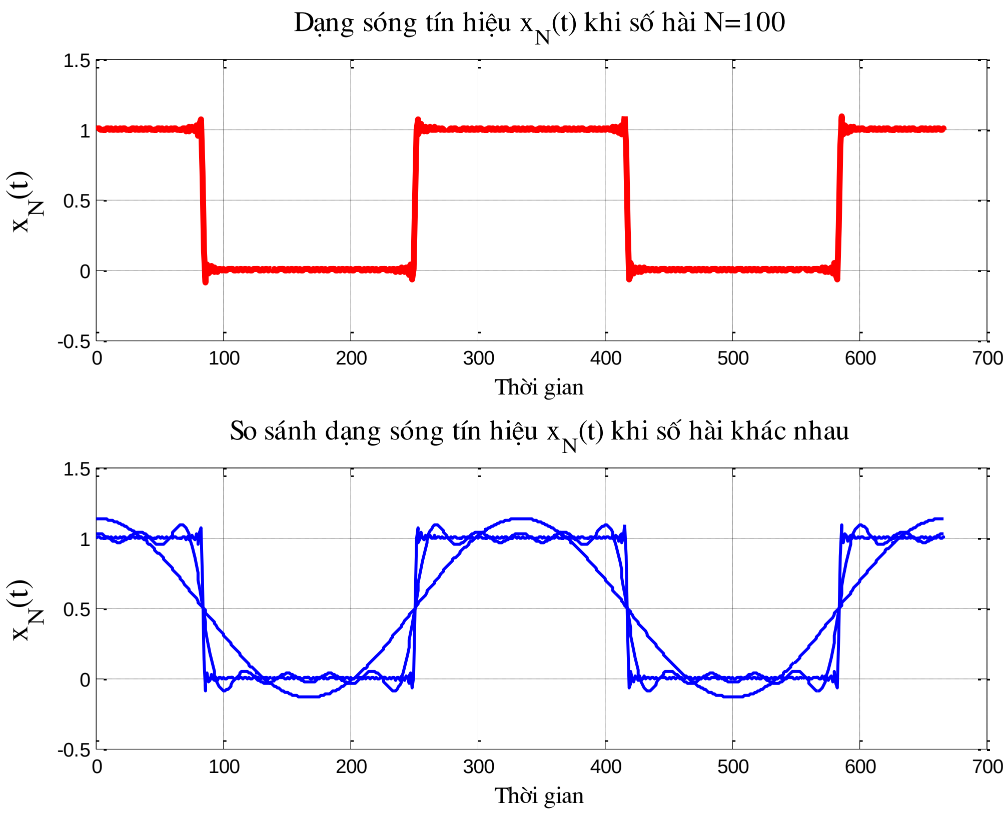
$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{n lẻ}}}^{N} \frac{2}{n\pi} \cos\left(n\pi t + \left[(-1)^{(n-1)/2} - 1\right]\frac{\pi}{2}\right), \qquad -\infty < t < \infty \qquad \textbf{(1.2.26)}$$

Theo định lý của Fourier, thì $x_N(t)$ hội tụ về $x(t)$ khi $N \Rightarrow \infty$. Nói cách khác, $|x_N(t)-x(t)|$ về không với $\forall$t khi *N* tăng $\Leftrightarrow$ khi *N* có giá trị càng lớn thì phép lấy xấp xỉ càng chính xác. Vẽ xấp xỉ chuỗi Fourier cho tín hiệu này trên một chu kỳ tín hiệu với *n* = 1,9,100 đ- ợc cho ở hình 1.3. Ch- ơng trình Matlab đ- ợc cho ở file **NVD4B_sim1.m** trong phụ lục 4A

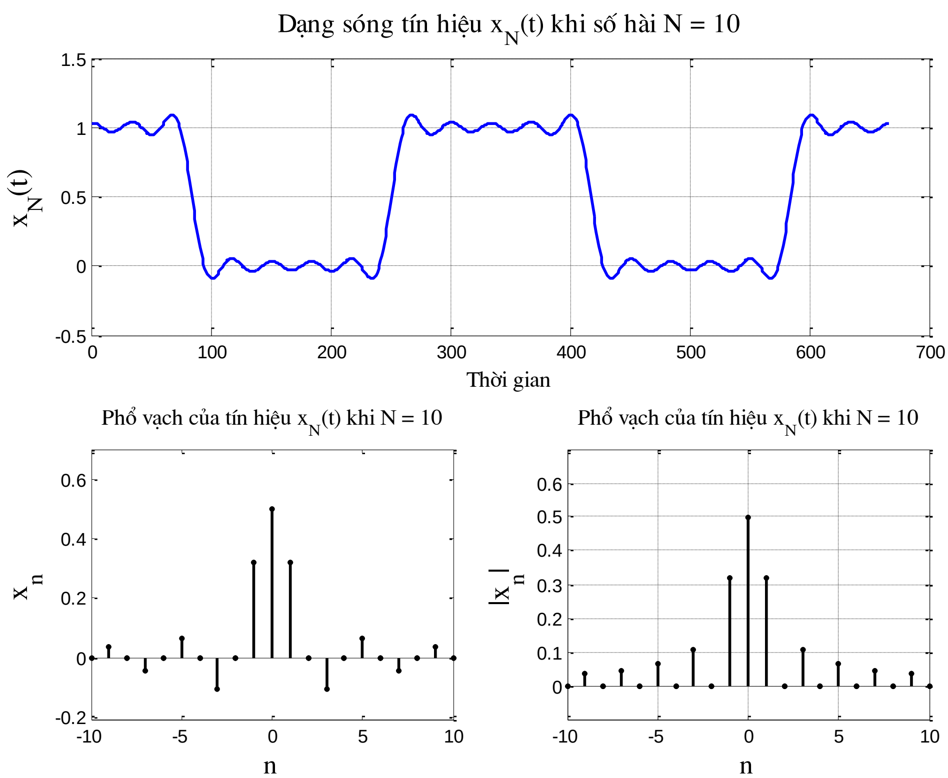
Tổng kết các công thức mô phỏng	
Chuỗi xung chữ nhật chứa tổng **vô hạn** các hàm điều hoà	Chuỗi xung chữ nhật chứa tổng **hữu hạn** các hàm điều hoà
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right)}_{x_n=0,\ \text{khi } n \text{ chẵn}} .e^{j2\pi\frac{n}{2}t}$ $= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right).cos(n\pi t)}_{\text{do } b_n=0, \text{ và } x_n=0 \text{ khi } n \text{ chẵn} \neq 0}$ $= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ lẻ}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\cos\left(n\pi t + \left[(-1)^{(n-1)/2} - 1\right]\frac{\pi}{2}\right)$	$x_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ lẻ}}}^{N} \frac{2}{n\pi}\cos\left(n\pi t + \left[(-1)^{(n-1)/2} - 1\right]\frac{\pi}{2}\right),$ $-\infty < t < \infty$

$$x_n = \frac{1}{n\pi}\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)}{\left(\pi\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = \pm 2, \pm 4, \ldots \\ \frac{1}{n\pi}(-1)^{\left|(k-1)/2\right|}, & n = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

$$sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



Hình 1.3 Khảo sát xung chữ nhật theo số l- ợng sóng hài



Hình 1.4 Dạng sóng và phổ rời rạc của tín hiệu $x_N(t)$

2. Vẽ phổ rời rạc của x(t)

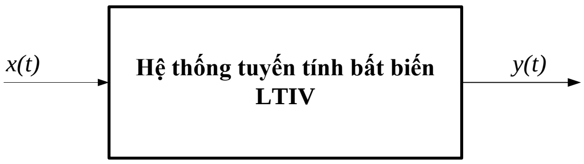
L-u ý ***x_n luôn là thực***. Vì vậy, tùy vào dấu của nó, mà pha bằng 0 hay π. Độ lớn $x_n = \frac{1}{2}\left|\sin c\left(\frac{n}{2}\right)\right|$. Phổ rời rạc của *x(t)* đ- ợc cho ở hình 1.4.

```
function y = NVD4B_sim1
% file NVD4B_sim1.m
clc;
clear all;
t   =   -2:6/1000:2;
N   =   input('Nhap so hai =    ');
c0  =   0.5;
w0  =   pi;
xN  =   c0*ones(1,length(t));  % DC Compoment
for k=1:2:N                      % Odd function
    theta = ((-1)^((k-1)/2)-1)*pi/2;
    xN = xN + 2/k/pi*cos(k*w0*t + theta);
end
%==========================================
h1 = figure(1)
set(h1,'color','c','Name','H4B.1.3: NVD');

subplot(2,2,1:2);
plot(1:length(xN),xN,'LineWidth',2);
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','FontSize',12);
ylabel('x_N(t)','FontName','.VnTime','FontSize',16);
title(['Dạng sóng tín hiệu x_N(t) khi số hài N = ',...
    num2str(N)],'FontName','.VnTime','FontSize',14);
grid on;
n       =   [-N:1:N];
x_n1    =   0.5*sinc(n/2);
x_n2    =   0.5*abs(sinc(n/2));

subplot(2,2,3);
stem(n,x_n1,'.k','LineWidth',2);
xlabel('n','FontName','.VnTime','FontSize',14);
ylabel('x_n','FontName','.VnTime','FontSize',16);
axis([min(n) max(n) min(x_n1)-0.1 max(x_n1)+0.2])
title(['Phổ vạch của tín hiệu x_N(t) khi N = ',...
    num2str(N)],'FontName','.VnTime','FontSize',12);

subplot(2,2,4)
stem(n,x_n2,'.k','LineWidth',2);
xlabel('n','FontName','.VnTime','FontSize',14);
ylabel('|x_n|','FontName','.VnTime','FontSize',16);
title(['Phổ vạch của tín hiệu x_N(t) khi N = ',...
    num2str(N)],'FontName','.VnTime','FontSize',12);
axis([min(n) max(n) min(x_n2)-0.1 max(x_n2)+0.2])
grid on;
%================================================
h2 = figure(2);     % Compared figure
set(h2,'color','g','Name','H4B.1.3: NVD');
subplot(211)
plot(1:length(xN),xN,'r','LineWidth',3);
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','FontSize',12);
ylabel('x_N(t)','FontName','.VnTime','FontSize',16);
title(['Dạng sóng tín hiệu x_N(t) khi số hài
N=',num2str(N)],'FontName','.VnTime','FontSize',14);
```

```
grid on;

subplot(212)
plot(1:length(xN),xN,'LineWidth',1.5);
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','FontSize',12);
ylabel('x_N(t)','FontName','.VnTime','FontSize',16);
title('So sánh dạng sóng tín hiệu x_N(t) khi số hài khác
nhau','FontName','.VnTime','FontSize',14);
grid on;
hold on;
```

1.2.1. Tín hiệu tuần hoàn & hệ thống tuyến tính bất biến LTIV

Nếu cho tín hiệu tuần hoàn *x(t)* qua hệ LTIV nh- hình 1.5, thì tín hiệu ra *y(t)* cũng là tín hiệu tuần hoàn, có cùng tần số với tín hiệu vào $\Rightarrow$ vì vậy có khai triển chuỗi Fourier.



Hình 1.5. Cho tín hiệu tuần hoàn qua hệ thống tuyến tính bất biến LTIV

Nếu *x(t)* và *y(t)* đ- ợc khai triển là

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \tag{1.2.26}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n . e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \tag{1.2.27}$$

thì ta có thể tìm đ- ợc quan hệ giữa các hệ số chuỗi Fourier của *x(t)* và *y(t)* bằng cách dùng tích phân chập

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.e^{j2\pi\frac{n}{T_0}(t-\tau)} h(\tau)d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}\tau} d\tau \right) e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \qquad (1.2.28)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

Từ mối quan hệ tr- ớc ta có

$$y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) \qquad (1.2.29)$$

trong đó *H(f)* là hàm truyền đạt (đáp ứng tần số) của hệ LTIV, là biến đổi Fourier của đáp ứng xung *h(t)*; nghĩa là

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t).e^{-j2\pi ft}dt \qquad (1.2.30)$$

Bài tập NVD4B_sim2:

L□C C□C T□N HI□U TU□N HOÀN

Cho chuỗi xung tam giác *x(t)* có chu kỳ T_0=2 đ- ợc xác định trong một chu kỳ nh-

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \le t \le 0 \\ -t+1, & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \qquad (1.2.31)$$

Hãy

1. Xác định hệ số Fourier của x(t).

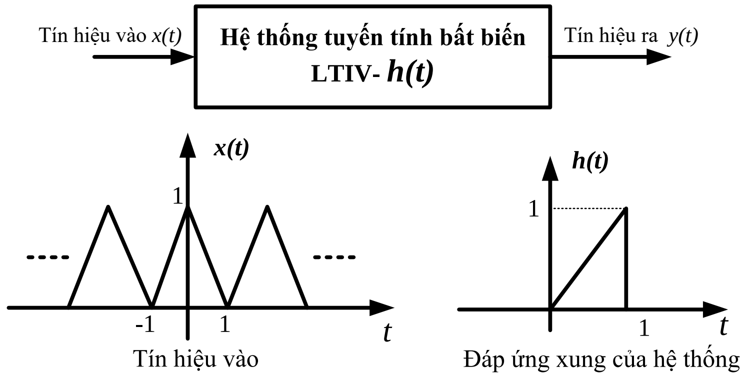
2. Vẽ phổ rời rạc của x(t).

3. Giả sử cho tín hiệu này qua hệ thống LTIV có đáp ứng xung đ- ợc cho bởi

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases} \qquad (1.2.32)$$

Vẽ phổ rời rạc và tín hiệu đầu ra *y(t)*.

Biết rằng, dạng sóng của *x(t)* và *h(t)* đ- ợc cho bởi hình 1.6



Hình 1.6. Tín hiệu vào *x(t)* và đáp ứng xung của hệ thống *h(t)*

Lời giải:

❖ ***Hệ số chuỗi Fourier của x(t) đ- ợc xác định bởi***

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi nt/T_0}dt \qquad (1.2.33)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Lambda(t)e^{-j\pi nt}dt \qquad (1.2.34)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t)e^{-j\pi nt}dt \qquad (1.2.35)$$

$$= \frac{1}{2}\Im\left[\Lambda(t)\right]_{f=n/2} \qquad (1.2.36)$$

$$= \frac{1}{2}\sin c^2\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (1.2.37)$$

cần l- u ý rằng, khoảng bên ngoài [-1,1] đ- ợc loại bỏ, và biến đổi Fourier của *Λ(t)* là *sinc*^{2}*(f)*. Kết quả này cũng có thể đạt đ- ợc bằng cách dùng biểu thức *Λ(t)* và thực hiện lấy tích phân từng phần theo định nghĩa FT thông th- ờng. Thấy rõ, $x_n = 0$ với ∀ giá trị của *n chẵn* trừ $n = 0$.

❖ ***Phổ rời rạc của x(t) và y(t) đ- ợc cho ở hình 1.8, kết quả chạy ch- ơng trình***

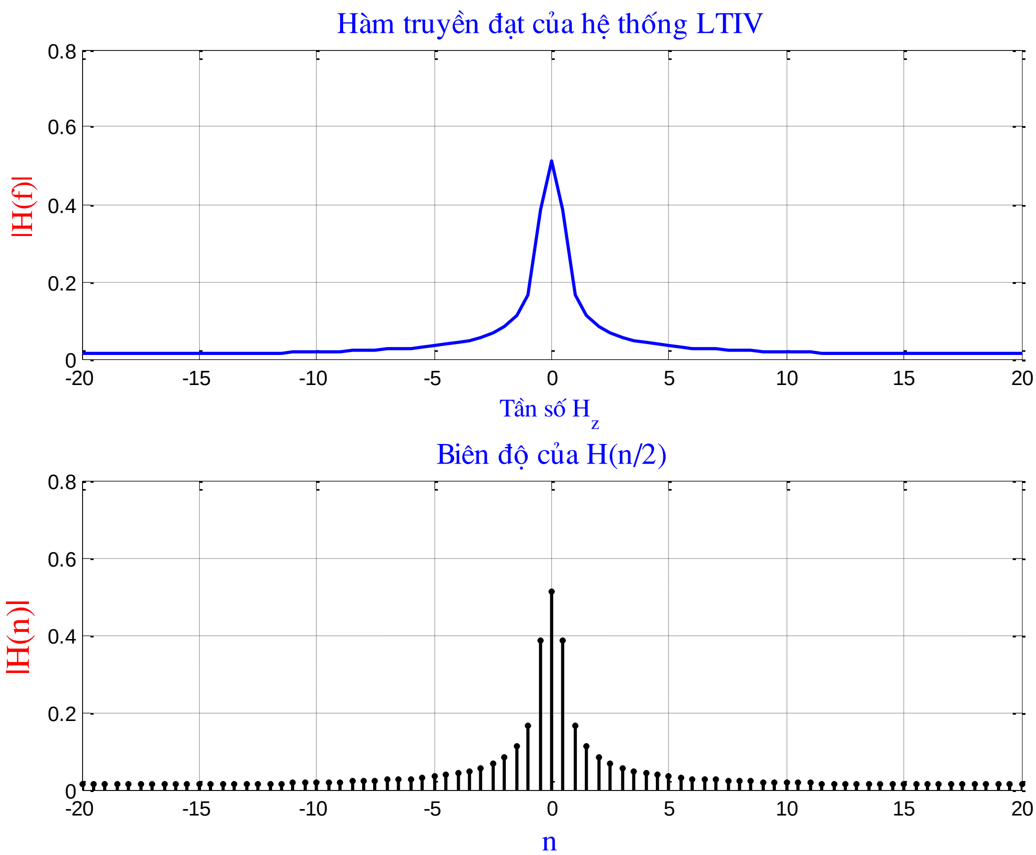
Tr- ớc hết, phải xuất phát từ hàm truyền đạt của hệ thống *H(f)*. Mặc dù có thể tìm đ- ợc bằng ph- ơng pháp giải tích, nh- ng ta sẽ làm theo ph- ơng pháp số ⇒ kết quả biên độ của hàm truyền đạt là $H\left(\frac{n}{T_0}\right) = H\left(\frac{n}{2}\right)$ đ- ợc cho ở hình 1.7.

Sau đó, tìm phổ rời rạc đầu ra *y(t)* bằng quan hệ

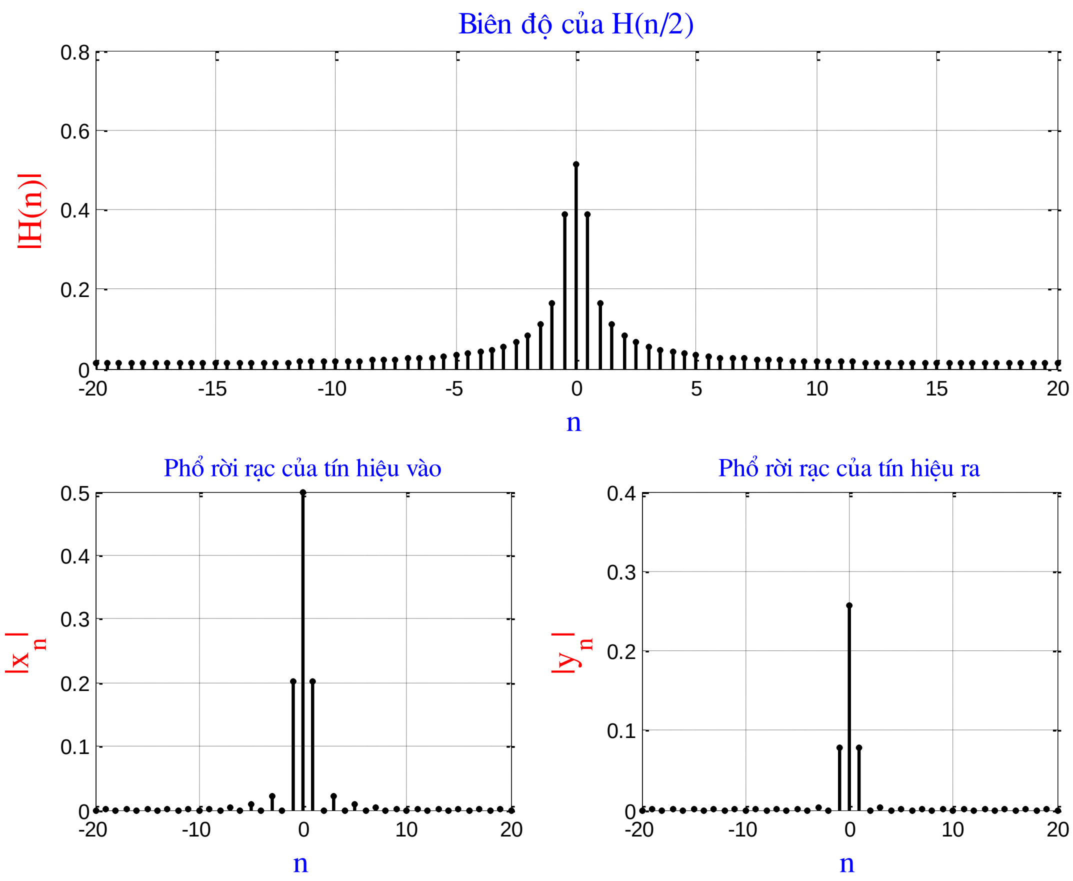
$$y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) \quad (1.2.38)$$

$$= \frac{1}{2}\sin c^2\left(\frac{n}{2}\right) H\left(\frac{n}{2}\right) \quad (1.2.39)$$

Kết quả phổ rời rạc đầu ra đ- ợc cho ở hình 1.8 là kết quả chạy ch- ơng trình. Ch- ơng trình Matlab đ- ợc cho ở File **NVD4B_sim2.m.**



Hình 1.7. Hàm truyền đạt của hệ thống LTIV và độ lớn của *H(n/2)*



Hình 1.8. Phổ rời rạc của tín hiệu vào và ra

```
function k = NVD4B_sim2
% File NVD4B_sim2.m = CS14qa.m

clc;
close all;
clear all;
n       =   [-20:1:20];
x       =   0.5*(sinc(n/2)).^2; % fourier series coefficients of x(t) vector.
ts      =   1/40;               % Sampling interval
t       =   [-0.5:ts:1.5];      % Time vector
% Impluse response
fs      =   1/ts;
h       =   [zeros(1,20),t(21:61),zeros(1,20)];
% Transfer function
H       =   fft(h)/fs;
df      =   fs/80;              % frequency resolution
f       =   [0:df:fs]-fs/2;
% Rearrange H
H1      =   fftshift(H);
y       =   x.*H1(21:61);

%============================================================
h1_11 = figure(1)
set(h1_11,'color','c','Name','H1.11. Simulation Results of NVD4B_sim2 Program:
NVD');
subplot(2,1,1);
```

```
    plot(f,abs(H1),'LineWidth',2);
    xlabel('Tần số H_z','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
    ylabel('|H(f)|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',14);
    title('Hàm truyền đạt của hệ thống LTIV',...
        'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14);
    grid on
subplot(2,1,2);
    stem(f,abs(H1),'.k','LineWidth',2);
    xlabel('n','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14)
    ylabel('|H(n)|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',16)
    title('Biên độ của H(n/2)',...
        'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14);
    grid on
%============================================================
h1_12 = figure(2)
set(h1_12,'color','c','Name','H1.12. Simulation Results of NVD4B_sim2 Program:
NVD');
subplot(2,2,1:2);
    stem(f,abs(H1),'.k','LineWidth',2);
    xlabel('n','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14)
    ylabel('|H(n)|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',16);
    title('Biên độ của H(n/2)',...
        'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14);
    grid on

subplot(2,2,3);
    stem(n,abs(x),'.k','LineWidth',2);
    xlabel('n','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14)
    ylabel('|x_n|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',16)
    title('Phổ rời rạc của tín hiệu vào',...
        'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
    grid on

subplot(2,2,4);
    stem(n,abs(y),'.k','LineWidth',2);
    xlabel('n','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14)
    ylabel('|y_n|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',16)
    title('Phổ rời rạc của tín hiệu ra',...
        'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);

    grid on
```

1.3 Biến đổi Fourier

❖ Quan hệ giữa tín hiệu tuần hoàn và tín hiệu phi tuần hoàn

Nếu ký hiệu $x_T(t)$ là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ T đ- ợc định nghĩa bởi

$$x(t+T)=x(t), \qquad \text{với } \forall t, \qquad -\infty<t<\infty \tag{1.3.1}$$

thì tín hiệu phi tuần hoàn $x(t)$ có quan hệ với $x_T(t)$ bởi

$$x(t)=\lim_{T\to\infty} x_T(t) \tag{1.3.2}$$

❖ Định nghĩa biến đổi Fourier FT

Nếu tín hiệu *x(t)* thoả mã các điều kiện Dirichlet, thì cặp biến đổi Fourier đ- ợc định nghĩa bởi

$$\begin{cases} X(f) = FT\left[x(t)\right] = \Im\left[x(t)\right] & = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ x(t) = IFT\left[X(t)\right] = \Im^{-1}\left[X(f)\right] & = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \end{cases} \qquad (1.3.3)$$

Nếu x(t) là tín hiệu thực, thì *X(f)* thoả mãn đối xứng ***Hermitran***; nghĩa là

$$X(-f) = X^*(f)$$

❖ Các tính chất của FT

1. Tuyến tính

FT của kết hợp tuyến tính hai hay nhiều tín hiệu là sự kết hợp tuyến tính của các FT thành phần của từng tín hiệu riêng t- ơng ứng; nghĩa là

Nếu
$$\begin{cases} X_1(f) = \Im\left[x_1(t)\right] \\ X_2(f) = \Im\left[x_2(t)\right] \end{cases}$$

thì
$$\begin{aligned}\Im\left[a.x_1(t) + bx_2(t)\right] &= a\Im\left[x_1(t)\right] + b\Im\left[x_2(t)\right] \\ &= a.X_1(f) + b.X_2(f)\end{aligned} \qquad (1.3.4)$$

2. Đối ngẫu

Nếu $X(f) = \Im\left[x(t)\right]$

thì $\Im\left[X(t)\right] = x(-f)$ (1.3.5)

3. Tính dịch thời gian

Dịch thời trong miền thời gian dẫn đến dịch pha trong miền tần số; nghĩa là

Nếu $X(f) = \Im\left[x(t)\right]$

thì $\Im\left[x(t - t_0)\right] = e^{-j2\pi ft_0}.X(f)$ (1.3.6)

4. Tỉ lệ

Dãn trong miền thời gian dẫn đến co trong miền tần số và ng- ợc lại; nghĩa là

Nếu $X(f) = \Im\left[x(t)\right]$

thì $\Im\left[x(at)\right] = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right), \quad a \neq 0$ (1.3.7)

5. Điều chế

Nhân tín hiệu với hàm mũ trong miền thời gian dẫn đến dịch tần của tín hiệu đó trong miền tần số, tức là

Nếu $X(f) = \Im[x(t)]$

thì $$\begin{cases} \Im\left[e^{j2\pi f_0 t}.x(t)\right] = X(f - f_0) \\ \Im\left[x(t).cos(2\pi f_0 t)\right] = \frac{1}{2}\left[X(f + f_0) + X(f - f_0)\right] \end{cases} \quad (1.3.8)$$

6. Vi phân

Lấy vi phân tín hiệu trong miền thời gian dẫn đến nhân $j2\pi f$ với phổ tần của tín hiệu đó trong miền tần số.

Nếu $X(f) = \Im[x(t)]$

thì $$\Im[x'(t)] = (j2\pi f).X(f)$$ $$\Im\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = (j2\pi f)^n.X(f) \quad (1.3.9)$$

7. Tính tích chập

Lấy tích chập của hai tín hiệu trong miền thời gian dẫn đến phép nhân phổ tần của hai tín hiệu đó trong miền tần số và ng- ợc lại.

Nếu $$X(f) = \Im[x(t)]$$ $$Y(f) = \Im[y(t)] \quad (1.3.11)$$

thì $$\Im[x(t) * y(t)] = X(f).Y(f)$$ $$\Im[x(t).y(t)] = X(f) * Y(f) \quad (1.3.12)$$

8. Quan hệ Parserval

Nếu $$X(f) = \Im[x(t)]$$ $$Y(f) = \Im[y(t)] \quad (1.3.13)$$

thì $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f).Y^*(f)df$$ $$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^{2.} df}_{\text{quan hệ Rayleigh}} \quad (1.3.14)$$

Bảng 1.1. Các cặp FT hữu hiệu đáng nhớ

Stt	Miền thời gian	Miền tần số
1	$x(t)$	$X(f)$
2	$\delta(t)$	1
3	1	$\delta(f)$
4	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
5	$e^{j2\pi f t_0}$	$\delta(f-f_0)$
6	$cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$
7	$sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$
8	$\Pi(t)$	$\Pi(t) \Leftrightarrow sinc(f)$
9	$\sin c(t)$	$\Pi(f)$
10	$\Lambda(t)$	$\sin c^2(f)$
11	$\sin c^2(t)$	$\Lambda(f)$
12	$e^{-at}u_{-1}(t), \;\; a>0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
13	$t.e^{-at}u_{-1}(t), \;\; a>0$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
14	$e^{-a\|t\|}, \;\; a>0$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
15	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
16	$sign(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
17	$u_{-1}(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
18	$\delta'(t)$	$j2\pi f$

19	$\delta^n(t)$	$(j2\pi f)^n$
20	$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)}_{\text{lấy mẫu}}$	$\frac{1}{T_0}\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)}_{\text{lấy mẫu}}$

Trong đó

Hàm b- ớc nhảy đơn vị đ- ợc định nghĩa

$$u_{-1}(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$\delta(t)$ được định nghĩa là $\begin{cases}\delta(t)=0, & t\neq 0\\ \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(\lambda).d\lambda=1, & \text{với số thực } \varepsilon>0 \text{ nhỏ tùy ý}\end{cases}$

$$sign(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

❖ Biểu diễn FT của tín hiệu tuần hoàn

Đối với tín hiệu *x(t)* tuần hoàn có chu kỳ T_0, thì các ***hệ số chuỗi Fourier*** của nó đ- ợc cho bởi x_n; nghĩa là

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n.e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \tag{1.3.15}$$

➢ ***Cách 1***: Biểu diễn FT của tín hiệu tuần hoàn bằng cách lấy mẫu phổ tần tín hiệu gốc tại các tần số bội số của tần số cơ bản $f_0 = 1/T_0$ ⇒ vẫn đảm bảo tính chất *phổ vạch* của tín hiệu tuần hoàn.

Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn đạt đ- ợc bằng cách

$$\begin{aligned}X(f)&=\Im\left[x(t)\right]\\ &=\Im\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n.e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\right]\\ &=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n.\Im\left[e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\right]\\ &=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n.\underbrace{\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)}_{\text{lấy mẫu}}\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Nói cách khác, biến đổi Fourier của tín hiệu ***tuần hoàn*** chứa ***các xung kim*** tại bội số của tần số cơ bản (các hài) của **tín hiệu gốc**.

- ***Cách 2***: Biểu diễn biến đổi Fourier của tín hiệu ***tuần hoàn*** bằng cách biểu diễn các ***hệ số chuỗi Fourier*** ở dạng biến đổi Fourier của ***tín hiệu bị cắt*** bởi

$$x_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right) \tag{1.3.17}$$

trong đó ta định nghĩa $X_{T_0}(f)$ là biến đổi Fourier của tín hiệu bị cắt $x_{T_0}(t)$ đ-ợc định nghĩa là

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t), & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases} \tag{1.3.18}$$

□ dạng tổng quát, phổ của tín hiệu *X(f)* là hàm phức; nghĩa là

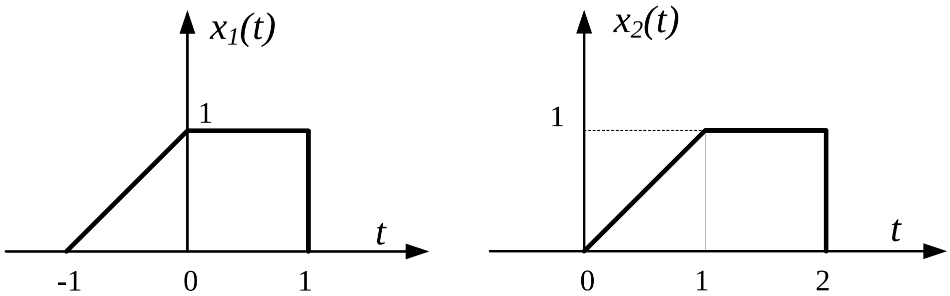
$$X(f) = X_{\text{Re}}(f) + j.X_{\text{Im}}(f) = \underbrace{|X(f)|}_{\text{Phổ biên độ } \sqrt{X_{\text{Re}}^2(f)+X_{\text{Im}}^2(f)}} . \underbrace{e^{j\arctan\frac{X_{\text{Im}}(f)}{X_{\text{Re}}(f)}}}_{\text{phổ pha}}$$

⇒ khi vẽ phổ tín hiệu th-ờng phải vẽ phổ biên độ và phổ pha

Bài tập NVD4B_sim3:

T□M PH□ C□A T□N HI□U

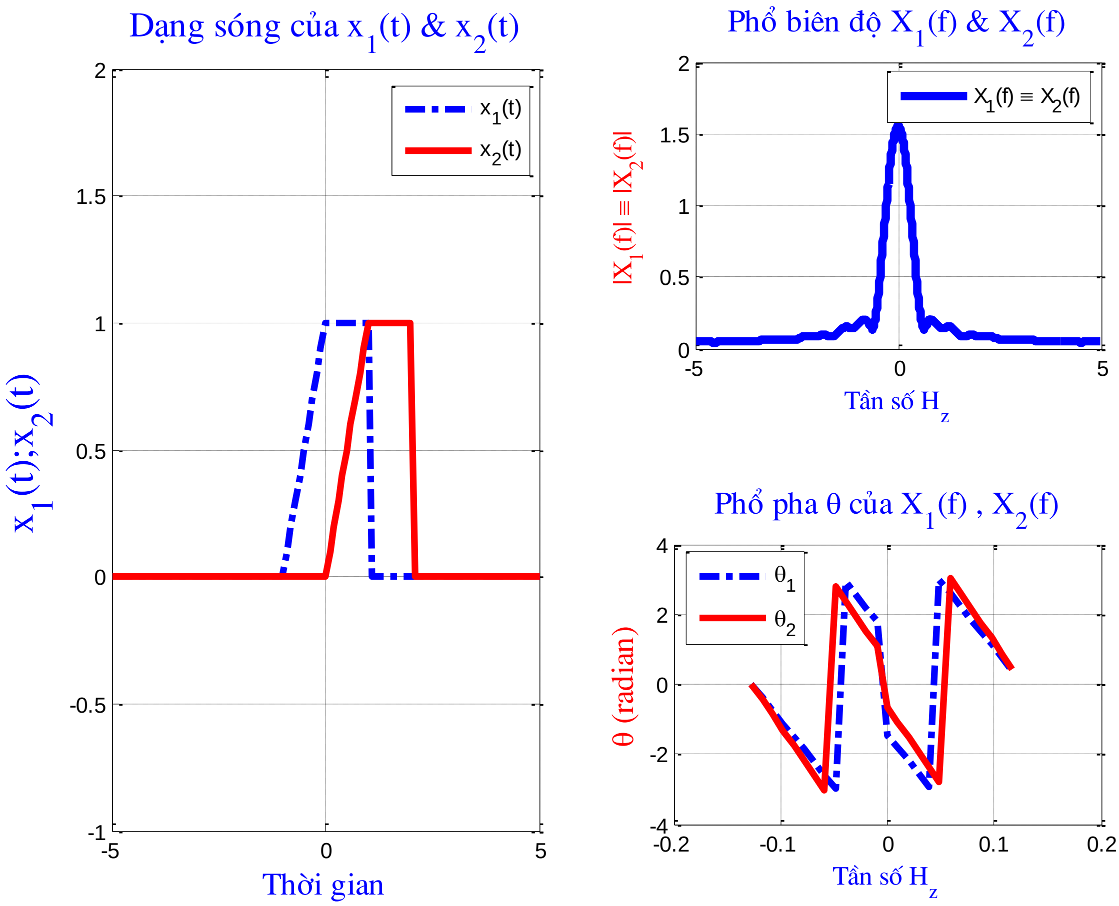
Hai tín hiệu $x_1(t)$ và $x_2(t)$ đ-ợc cho ở hình 1.9 d-ới đây. Hãy vẽ phổ của chúng



Hình 1.9. Các tín hiệu $x_1(t)$ & $x_2(t)$

Lời giải:

Ta nhận thấy rằng, dạng của hai tín hiệu này là giống nhau chỉ khác là dịch thời gian. Theo tính chất dịch thời của FT, thì phổ biên độ của chúng là nh- nhau mà phổ pha của chúng là khác nhau (dịch pha nhau). Các kết quả chạy ch-ơng trình Matlab đ-ợc cho ở hình 1.10. Ch-ơng trình Matlab thực thi bài tập này đ-ợc cho ở file **NVD4B_sim3.m** trong phụ lục 4A



Hình 1.10. Dạng sóng tín hiệu $x_1(t)$ và $x_2(t)$ - phổ biên độ và phổ pha của chúng

```
function y = NVD4B_sim3
% File NVD4B_sim3.m = CS15qa.m
clc;
clear all;
close all;
%=====================================
df  =   0.01;
fs  =   10;
ts  =   1/fs;
t   =  [-5:ts:5];
%=======================================
x1  =   zeros(size(t));
x1(41:51)   =   t(41:51)+1;
x1(52:61)   =   ones(size(x1(52:61)));

x2          =   zeros(size(t));
x2(51:71)   =   x1(41:61);

[X1,x11,df1]    =   fftseq(x1,ts,df);
[X2,x21,df2]    =   fftseq(x2,ts,df);

X11 =   X1/fs;
X21 =   X2/fs;

f   =  [0:df1:df1*(length(x11)-1)]-fs/2;
```

```
%========================================
h1_15 = figure
set(h1_15,'color','c','Name','H1.17. Simulation Results of NVD4B_sim3 Program:
NVD');
%==================
subplot(2,2,2);
plot(f,fftshift(abs(X21)),'b','LineWidth',4);
xlabel('Tần số H_z','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12)
ylabel('|X_1(f)| \equiv |X_2(f)|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',12)
title('Phổ biên độ X_1(f) & X_2(f)',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14);
grid on
legend('X_1(f) \equiv X_2(f)');
%==================
subplot(2,2,[ 1,3] );
plot(t,x1,'-.b',t,x2,'r','LineWidth',3);
axis([ -5 5 -1 2] );
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14)
ylabel('x_1(t);x_2(t)','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',18)
title('Dạng sóng của x_1(t) & x_2(t)',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',16);
grid on
legend('x_1(t)','x_2(t)');
%==================
subplot(2,2,4);
plot (f(500:525),fftshift(angle(X11(500:525))),'-
.b',f(500:525),fftshift(angle(X21(500:525))),'r',...
    'LineWidth',3);
xlabel('Tần số H_z','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
ylabel('\theta (radian)','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',14);
title('Phổ pha \theta của X_1(f) , X_2(f)',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14);
grid on
legend('\theta_1','\theta_2',2);
```

1.3.1. Định lý lấy mẫu

Định lý lấy mẫu là một trong các định lý quan trọng nhất để phân tích các tín hiệu và hệ thống, từ đó nhận đ- ợc quan hệ cơ bản giữa các tín hiệu ***liên tục*** và tín hiệu ***rời rạc***. Định lý phát biểu rằng, tín hiệu có băng tần hạn chế trong khoảng *2W* (nghĩa là, FT của nó bằng không khi $|f| > W$) hoàn toàn thể đ- ợc mô tả đ- ợc ở dạng các giá trị mẫu của nó tại các khoảng T_s miễn sao $T_s \le 1/2W$. Nếu lấy mẫu đ- ợc thực hiện tại tốc độ lấy mẫu Nyquist ($T_s = 1/2W \Leftrightarrow f_s = 2W$), thì ta có thể khôi phục lại đ- ợc tín hiệu $x(t)$ ban đầu từ các giá trị mẫu $\{x[n] = x(nT_s)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ nh- sau

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\operatorname{sin}c\left[2W(t - nT_s)\right] \qquad (1.3.19)$$

Kết quả này dựa trên dạng sóng mẫu $x_\delta(t)$ đ- ợc định nghĩa là

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \qquad (1.3.20)$$

có FT đ- ợc cho bởi

$$\begin{aligned} X_\delta(f) &= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f-\frac{n}{T_s}\right), && \text{với} \quad \forall f \\ &= \frac{1}{T_s}X(f), && \text{với} \quad |f|<W \end{aligned} \qquad (1.3.21)$$

cho $X_\delta(f)$ qua bộ lọc thông thấp có độ rộng băng W và có hệ số khuyếch đại T_s trong băng thông đó sẽ khôi phục đ- ợc tín hiệu ban đầu.

Biến đổi Fourier rời rạc DFT (*Discrete Fourier Transform*) của chuỗi *x[n]* đ- ợc biểu diễn là

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-j2\pi fnT_s} \qquad (1.3.22)$$

so sánh ph- ơng trình (1.3.22) và (1.3.21) ta kết luận

$$\underbrace{\underbrace{X(f)}_{\text{FT của } x(t)} = T_s.\underbrace{X_d(f)}_{\text{DFT của } x[n]}}_{\text{Quan hệ giữa FT của } x(t) \text{ với DFT của } x[n]} \qquad \text{với} \quad |f|<W \qquad \mathbf{(1.3.23)}$$

thể hiện quan hệ giữa FT của tín hiệu t- ơng tự với DFT của tín hiệu đ- ợc lấy mẫu của nó t- ơng ứng.

Việc tính toán biến đổi Fourier rời rạc DFT theo ph- ơng pháp số đ- ợc thực hiện hiệu quả bằng thuật toán biến đổi Fourier nhanh FFT. Trong thuật toán FFT, chuỗi tín hiệu *x(t)* có độ dài N mẫu nhận giá trị tại các khoảng thời gian T_s đ- ợc dùng để thể hiện tín hiệu đó. Kết quả ta nhận đ- ợc chuỗi độ dài N mẫu của $X_d(f)$ trong khoảng tần số $[0,f_s]$, trong đó $f_s = 1/T_s = 2W$ (tần số Nyquist). Khi các mẫu là các phần $\Delta f = f_s/N$, thì giá trị của Δf cho biết độ phân giải tần số của biến đổi Fourier kết quả.

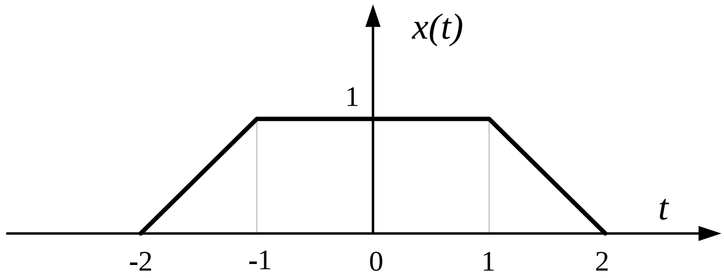
Thuật toán FFT tính toán có hiệu quả khi độ dài chuỗi vào N là luỹ thừa của 2. *Nếu độ dài chuỗi vào này không phải là luỹ thừa của 2 thì thực hiện độn các số 0 để có độ dài là luỹ thừa của 2*. L- u ý rằng, do thuật toán FFT thực hiện DFT cho tín hiệu đ- ợc lấy mẫu, nên để có đ- ợc FT của tín hiệu t- ơng tự cần phải dùng ph- ơng trình **(1.3.23)**-nghĩa là sau khi tính FFT, phải nhân với T_s (hay chia f_s) để nhận đ- ợc FT của tín hiệu t- ơng tự ban đầu. Vấn đề này đ- ợc thực hiện bởi hàm **fftseq.m**. Hàm **fftseq.m** nhận chuỗi vào ***m***, khoảng thời gian lấy mẫu t_s, độ phân giải tần số *df* và trả lại kết quả chuỗi ***m*** có độ dài là luỹ thùa của 2, ***M*** là kết quả tính FFT của chuỗi ***m*** này, và độ phân giải tần số *df*.

Bài tập NVD4B_sim4:

T□NH TO□N B□NG PH- □NG PH□P S□ VÀ GI□I T□CH C□A FT

Tín hiệu *x(t)* đ- ợc mô tả bởi ph- ơng trình (1.3.24) và hình 1.11 d- ới đây.

$$x(t)=\begin{cases} t+2, & -2\le t\le -1 \\ 1, & -1<t\le 1 \\ -t+2, & 1<t\le 2 \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases} \tag{1.3.24}$$



Hình 1.11 Tín hiệu *x(t)*

- ***Tìm FT của x(t) bằng ph- ơng pháp giải tích và vẽ phổ của x(t)***
- ***Viết ch- ơng trình Matlab để tìm FT bằng ph- ơng pháp số và vẽ kết quả***

Lời giải:

- ***Tín hiệu x(t) đ- ợc viết nh- sau***

$$x(t)=2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)-\Lambda\left(t\right) \tag{1.3.25}$$

Dùng tính chất tuyến tính và tỷ lệ của FT và tra bảng ta đ- ợc

$$X(f)=4\sin c^2(2f)-\sin c^2(f) \tag{1.3.26}$$

$\Rightarrow$ thấy rõ biến đổi Fourier của *x(t)* = *X(f)* là tín hiệu thực (*x(t) là tín hiệu thực chẵn*). Phổ biên của nó độ đ- ợc cho ở hình 1.12.

- ***Tìm FT bằng Matlab***

B- ớc1: Sơ bộ - ớc tính độ rộng băng tín hiệu *x(t)*. Do tín hiệu t- ơng đối ***bằng phẳng***, nên độ rộng băng của nó tỷ lệ nghịch với khoảng thời gian tín hiệu đó. Khoảng thời gian của tín hiệu là 4 (xem hình 1.18). Để đ- ợc an toàn ta lấy độ rộng băng lớn gấp 10 lần (độ rộng băng lớn gấp 10 lần).

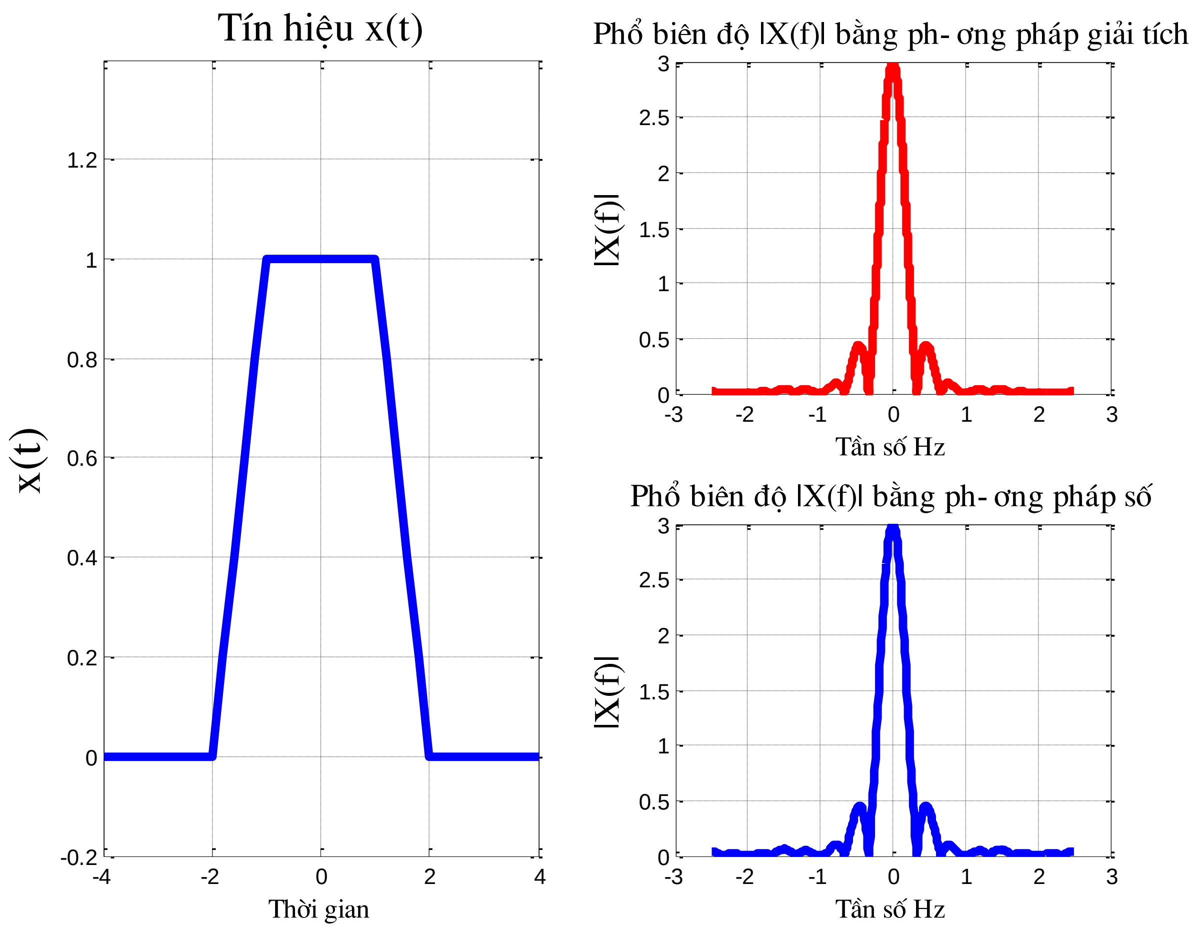
$$BW=10\times\frac{1}{4}=2,5 \tag{1.3.27}$$

B- ớc2: Xác định tần số lấy mẫu, theo đó tần số Nyquist là gấp 2 lần độ rộng băng, f_s = 2×2,5 = 5 $\Rightarrow$ khoảng cách giữa các mẫu là $T_s = 1/f_s = 1/5 = 0,2$.

B- ớc3: Xét tín hiệu trên khoảng [-4 , 4] và lấy mẫu nó tại các khoảng T_s. Bằng cách chọn này và dùng hàm Matlab ***fftseq.m***, ta tìm đ- ợc FFT bằng ph- ơng pháp số. Chọn độ phân giải tần số phù hợp là 0,01 Hz (hoặc nhỏ hơn, càng nhỏ thì thời gian chạy ch- ơng trình càng lâu). Độ phân giải tần số kết quả đ- ợc cho bởi hàm ***fftseq.m*** là 0,0098 Hz. Nó đáp ứng đ- ợc các yêu cầu cần thiết cho bài toán này. Vector tín hiệu *x* có độ dài là 41, đ- ợc độn thêm các số không để có độ dài là 2^8 = 256, nó đáp ứng đ- ợc yêu cầu độ phân giải tần số.

B- ớc 4: Kết quả phổ biên độ của *x(t)* theo ph- ơng pháp số đ- ợc cho ở hình 1.12.

Ch- ơng trình Matlab thực hiện bài toán đ- ợc cho ở file **NVD4B_sim4.m.**



Hình 1.12 Phổ biên độ của *x(t)* bằng ph- ơng pháp số và giải tích

```
% function [ K]  = NVD4B_sim4
% File: NVD4B_sim4.m = CS16.m

clc;
clear all;
close all;
%========================================
ts      =   0.2;
```

```
fs       =   1/ts;
df       =   0.01;
x        =   [ zeros(1,10),(0:0.2:1),ones(1,9),(1:-0.2:0),zeros(1,10)];
xt       =   x;
[ X,x,df1] = fftseq(x,ts,df);                    % derive the FFT
X1       =   X/fs;                                % Scaling
f        =   [ 0:df1:df1*(length(x)-1)] - fs/2;   % Frequency vector for FFT
f1       =   [ -2.5:0.001:2.5];                   % Frequency vector for analytic
approach
y        =   4*(sinc(2*f1).^2)-(sinc(f1)).^2;     % Exact Fourier Transform

%============================================
h1_19 = figure(1)
set(h1_19,'color','c','Name','H1.19 & H1.20. Simulation Results of NVD4B_sim4
Program: NVD');
%=========================
% plot of FT derived analytically is used by analytically
subplot(2,2,2);
plot(f1,abs(y),'r','LineWidth',4);
xlabel('Tần số Hz','fontname','.vntime','Fontsize',12);
ylabel('|X(f)|','fontname','.vntime','Fontsize',16);
title('Phổ biên độ |X(f)| bằng ph-ơng pháp giải
tích','fontname','.vntime','Fontsize',14);
grid on;
%=========================
subplot(2,2,[ 1,3]);
tt       =   2*(-2:0.1:2);
plot(tt,xt,'b','LineWidth',4);
xlabel('Thời gian','fontname','.vntime','Fontsize',12);
ylabel('x(t)','fontname','.vntime','Fontsize',20);
title('Tín hiệu x(t)','fontname','.vntime','Fontsize',18);
axis([ min(tt) max(tt) min(xt)-0.2 max(xt)+0.4]);
grid on;
%=========================
% plot of FT derived numerically used by FFT
subplot(2,2,4);
plot(f,fftshift(abs(X1)),'b','LineWidth',4);
xlabel('Tần số Hz','fontname','.vntime','Fontsize',12);
ylabel('|X(f)|','fontname','.vntime','Fontsize',16);
title('Phổ biên độ |X(f)| bằng ph-ơng pháp
số','fontname','.vntime','Fontsize',14);

grid on
```

1.3.2. Phân tích hệ thống LTIV trong miền tần số

Khi cho tín hiệu *x(t) qua* hệ thống tuyến tính bất biến LTIV có đáp ứng xung *h(t)*, thì đáp ứng ra *y(t)* đ- ợc xác định bởi tích chập sau

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (1.3.28) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

□p dụng tính chất tích chập của biến đổi Fourier, ta đ- ợc tín hiệu ra trong miền tần số là

$$Y(f) = X(f)H(f) \tag{1.3.29}$$

trong đó

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{1.3.30a}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{1.3.30b}$$

H(f) là hàm truyền đạt của hệ thống LTIV. Ph- ơng trình (1.3.29) đ- ợc viết ở dạng

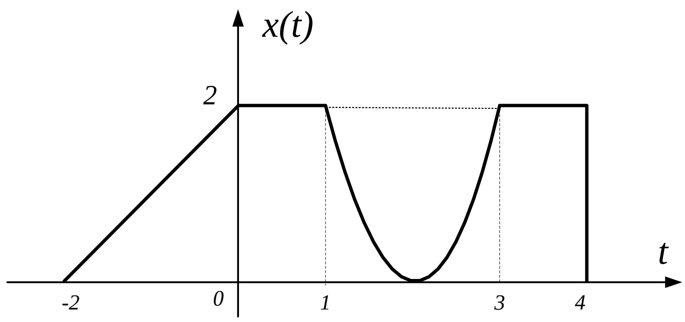
$$\begin{cases} |Y(f)| = |X(f)||H(f)| \\ \angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f) \end{cases} \tag{1.3.31}$$

Cho ta quan hệ phổ biên độ và phổ pha của các vào/ra của hệ LTIV.

Bài tập NVD4B_sim5:

PHÂN T□CH H□ TH□NG LTIV TRONG MIỦN T□N S□

Tín hiệu *x(t)* đ- ợc cho ở hình 1.13.



Hình 1.13. Tín hiệu *x(t)*

1. Xác định FFT của tín hiệu này và vẽ nó.
2. Nếu tín hiệu này đ- ợc cho qua bộ lọc thông thấp lý t- ởng có độ rộng băng là 1,5 Hz, tìm tín hiệu ra của bộ lọc và vẽ kết quả (*tr- ờng hợp 1*).
3. Nếu cho tín hiệu này qua bộ lọc có đáp ứng xung đ- ợc cho bởi

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 2 \\ 0, & \text{khác} \end{cases} \tag{1.3.32}$$

Vẽ tín hiệu ra của bộ lọc (*tr- ờng hợp 2*).

Lời giải:

❖ Xác định biểu thức tín hiệu

Tr- ớc hết, tìm cách biểu diễn phần hình sin của tín hiệu. Phần tín hiệu hình sin này có nửa hình sin là 2 nên chu kỳ = 4 ⇒ tần số là f_0 = 1/4 = 0,25 Hz. Có biên độ nh- đ- ợc thể hiện trên hình vẽ là 2. Vì vậy ta có thể biểu diễn nó bằng công thức sau

$$2cos\left(2\pi\times\underbrace{0,25}_{f_0}t+\theta\right)+2=2cos\left(0,5\pi t+\theta\right)+2$$

Pha θ nhận đ- ợc bằng cách dùng điều kiện giới hạn

$$2+2\cos\left(0,5\pi t+\theta\right)\Big|_{t=2}=0\Rightarrow\theta=0 \qquad (1.3.33)$$

Sau đó, từ hình vẽ biểu diễn các đoạn thẳng. Kết quả, tín hiệu *x(t)* đ- ợc viết nh- sau

$$x(t)=\begin{cases}t+2, & -2\le t\le 0\\ 1, & 0<t\le 1\\ 2+2\cos(0,5\pi t), & 1<t\le 3\\ 1, & 3<t\le 4\\ 0, & \text{nếu khác}\end{cases} \qquad (1.3.34)$$

❖ *Xác định các tham số và khảo sát*

- Độ rộng băng của tín hiệu đ- ợc chọn là 5Hz. Phân giải tần số là 0,01 Hz. Phổ biên độ của tín hiệu *x(t)* đ- ợc cho ở hình 1.14 (kết quả chạy ch- ơng trình Matlab).

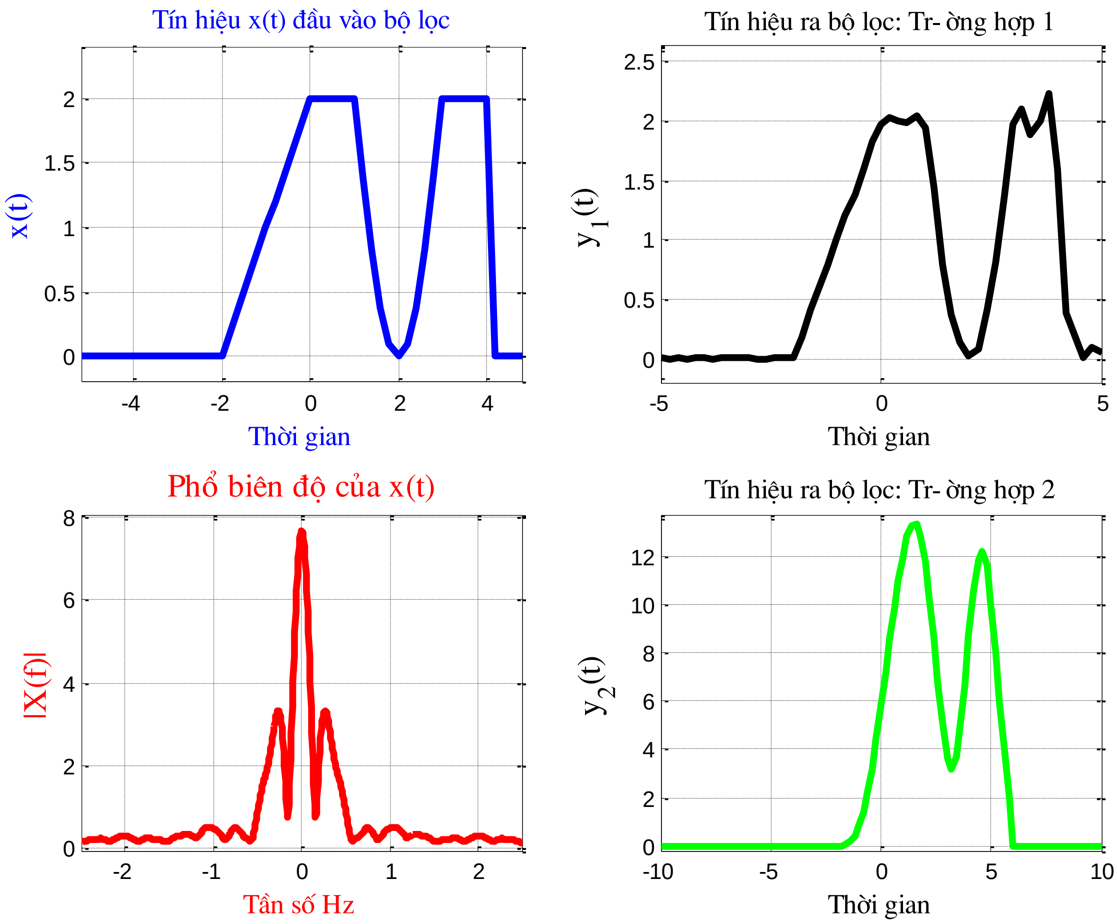
- Độ rộng băng tín hiệu f_s = 5Hz. Vì độ rộng băng của bộ lọc thông thấp là 1,5Hz, nên hàm truyền đạt của bộ lọc là

$$H(f)=\begin{cases}1, & 0\le f\le 1,5\\ 0, & 1,5<f\le 3,5\\ 1, & 3,5<f\le 5\end{cases} \qquad (1.3.35)$$

nhân hàm truyền đạt *H(f)* với phổ tín hiệu vào *X(f)* đ- ợc phổ tín hiệu ra *Y(f)*. Phổ tín hiệu ra của bộ lọc thông thấp đ- ợc cho ở hình 1.14 (kết quả chạy ch- ơng trình Matlab).

- Tìm tín hiệu ra *y(t)* trực tiếp bằng công thức tích chập trong miền thời gian. Kết quả chạy ch- ơng trình Matlab đ- ợc cho hình 1.14.

Ch- ơng trình Matlab cho bài tập này đ- ợc cho ở file **NVD4B_sim5.m** trong phụ lục 4A



Hình 1.14. Phổ biên độ tín hiệu vào-Tín hiệu ra trong các tr- ờng hợp 1 và 2

```
% function y = NVD4B_sim5
% File NVD4B_sim5.m = CS17.m
clc;
clear all;
close all;
%======================
fs       = 5;                     % Frequency resolution
ts       = 1/fs;                  % sampling frequency
df       = 0.01;                  % Sampling interval
t        = [-5:ts:5];             % Time vector
x        = zeros(1,length(t));    % Input signal initiation
%=======================
x(16:26)     = t(16:26)+2;
x(27:31)     = 2*ones(1,5);
x(32:41)     = 2 + 2*cos(0.5*pi*t(32:41));
x(42:46)     = 2*ones(1,5);
xx           = []
xx_tt=[ zeros(1,16),...
    t(16:26)+2,...
    2*ones(1,5),...
    2+2*cos(0.5*pi*t(32:41)),...
    2*ones(1,5),...
    zeros(1,4)];
%=======================
```

```
% part 1
[X,x1,df1]   = fftseq(x,ts,df);                      % Spectrum of the input
f            = [0:df1:df1*(length(x1)-1)] - fs/2;    % Frequency vector
X1           = X/fs;                                 % Scaling
%======================
% part 2: Filter transfer function
H        = [ones(1,ceil(1.5/df1)),...
    zeros(1,length(X) - 2*ceil(1.5/df1)),...
    ones(1,ceil(1.5/df1))];
Y        = X.*H;              % Output spectrum
y1       = ifft(Y);           % Output of Filter
%======================
% part 3: LTI system impluse response
h        = [zeros(1,ceil(5/ts)),...
    t(ceil(5/ts)+1:ceil(6/ts)),...
    ones(1,ceil(7/ts)-ceil(6/ts)),...
    zeros(1,51-ceil(7/ts))]
y2       = conv(h,x);
%======================
h1_21 = figure(1)
set(h1_21,'color','c','Name','H1.21-H1.24. Simulation Results of NVD4B_sim5
Program: NVD');
%===================
subplot(221);
tt       = t-0.2;
plot(tt,xx_tt,'b','LineWidth',3);
xlabel('Thời gian','fontname','.vntime','color','b','Fontsize',12);
ylabel('x(t)','fontname','.vntime','color','b','Fontsize',14);
axis([min(tt) max(tt) min(xx_tt)-0.2 max(xx_tt)+0.4]);
title('Tín hiệu x(t) đầu vào bộ
lọc','fontname','.vntime','color','b','Fontsize',12);
grid on;
%=====================
subplot(223);
plot(f,fftshift(abs(X1)),'r','LineWidth',3);
xlabel('Tần số Hz','fontname','.vntime','color','r','Fontsize',12);
ylabel('|X(f)|','fontname','.vntime','color','r','Fontsize',14);
axis([min(f) max(f) min(fftshift(abs(X1)))-0.2 max(fftshift(abs(X1)))+0.4]);
title('Phổ biên độ của x(t)','fontname','.vntime','color','r','Fontsize',14);
grid on;
%======================
subplot(222);
y1p =abs(y1(1:length(t)));
plot(t,abs(y1(1:length(t))),'k','LineWidth',3);
title('Tín hiệu ra bộ lọc: Tr-ờng hợp
1','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',12);
xlabel('Thời gian','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',12);
ylabel('y_1(t)','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',14);
axis([min(t) max(t) min(y1p)-0.2 max(y1p)+0.4]);
grid on;
%======================
subplot(224);
t2   =[-10:ts:10];
plot([-10:ts:10],y2,'g','LineWidth',3);
title('Tín hiệu ra bộ lọc: Tr-ờng hợp
2','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',12);
xlabel('Thời gian','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',12);
ylabel('y_2(t)','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',14);
axis([min(t2) max(t2) min(y2)-0.2 max(y2)+0.4]);

grid on;
```

1.4. Công suất và năng l- ợng

❖ Định nghĩa

Nếu ký hiệu E_x là năng l- ợng và P_x là công suất của tín hiệu ***thưc*** *x(t),* đ- ợc định nghĩa là

$$\begin{cases} E_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t).dt \\ P_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t).dt \end{cases} \qquad (1.4.1)$$

- *Tín hiệu có năng l- ợng hữu hạn đ- ợc gọi là tín hiệu kiển năng l- ợng.*
- *Tín hiệu có công suất d- ơng hữu hạn đ- ợc gọi là tín hiệu kiển công suất.*

Tồn tại các tín hiệu không phải là năng l- ợng và cũng không phải là tín hiệu công suất chẳng hạn $x(t) = e^t.u_{-1}(t)$. Ví dụ: $x(t) = \prod(t)$ là tín hiệu kiểu năng l- ợng trong khí đó tín hiệu *x(t)=cos(t)* là tín hiệu kiểu công suất. ***Tất cả các tín hiệu tuần hoàn điều là tín hiệu kiểu công suất.***

❖ Đối với các tín hiệu kiểu năng l- ợng

➢ ***Mật độ phổ năng l- ợng ESD***

Mật độ phổ năng l- ợng ESD của tín hiệu kiểu năng l- ợng cho biết sự phân bố năng l- ợng tại các tần số khác nhau của tín hiệu đó và đ- ợc cho bởi

$$ESD = \wp_X(f) = |X(f)|^2 \qquad (4.1.2)$$

➢ ***Năng l- ợng của tín hiệu***

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \wp_X(f).df \qquad (4.1.3)$$

➢ ***Quan hệ giữa ESD và hàm tự t- ơng quan $R_X(\tau)$***

Dùng định lý tích chập, nhận đ- ợc

$$\wp_X(f) = \Im[R_X(\tau)] \qquad (4.1.4)$$

trong đó, $R_X(\tau)$ là hàm tự t- ơng quan của *x(t)* và đ- ợc định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t).x(t+\tau)dt \\ &= x(\tau) * x(-\tau) \end{aligned} \qquad (1.4.5)$$

đối với các tín hiệu *x(t)* giá trị thực.

❖ Đối với các tín hiệu kiểu công suất

➢ ***Hàm tự t- ơng quan trung bình theo thời gian đ- ợc $R_X(\tau)$ định nghĩa là***

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t).x(t+\tau)dt \qquad (1.4.6)$$

➢ ***Mật độ phổ công suất PSD ở dạng tổng quát đ- ợc cho bởi***

$$PSD = S_X(f) = \Im\left[R_X(\tau)\right] \qquad (1.4.7)$$

➢ ***Công suất tổng là tích phân của mật độ phổ công suất đ- ợc cho bởi***

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f).df \qquad (4.1.8)$$

⇒ *Đối với tín hiệu tuần hoàn x(t) có chu kỳ T_0 và hệ số chuỗi Fourier là x_n, thì mật độ phổ công suất PSD đ- ợc cho bởi*

$$S_X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \qquad (4.1.9)$$

nghĩa là toàn bộ công suất đ- ợc tập trung tại các hài của tần số cơ bản và công suất công suất tại hài bậc thứ n $\left(\frac{n}{T_0} = nf_0\right)$ là $|x_n|^2$*; nghĩa là bình ph- ơng độ lớn của hệ số chuỗi Fourier t- ơng ứng.*

❖ Quan hệ tín hiệu vào/ra của qua bộ lọc

Khi cho tín hiệu *x(t)* qua bộ lọc có hàm truyền đạt *H(f)*, thì mật độ phổ năng l- ợng *ESD* đầu ra hoặc mật độ công suất *PSD* đầu ra đ- ợc xác định theo

$$\begin{cases} ESD = \wp_Y(f) = |H(f)|^2 e_X(f) \\ PSD = S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) \end{cases} \qquad (4.1.10)$$

➢ ***Nếu dùng tín hiệu rời rạc (đ- ợc lấy mẫu), thì công suất và năng l- ợng t- ơng ứng với ph- ơng trình (1.4.1) ở dạng tín hiệu rời rạc trở thành***

$$\begin{cases} E_X = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2|n| \\ P_X = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x^2|n| \end{cases} \qquad (1.4.11)$$

➢ ***Nếu dùng FFT-nghĩa là, nếu độ dài của chuỗi là hữu hạn và chuỗi đ- ợc lặp lại, thì***

$$\begin{cases} E_X = T_s \sum_{n=0}^{N-1} x^2 \left|n\right| \\ P_X = \dfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} x^2 \left|n\right| \end{cases} \tag{1.4.12}$$

Hàm **power.m** trong phụ lục 4A cho thấy nội dung công suất của vector tín hiệu.

- ***Nếu $X_d(f)$ là DFT của chuỗi x[n], thì tìm đ- ợc mật độ phổ năng l- ợng ESD của x(t), tín hiệu analog t- ơng đ- ơng, bằng cách dùng ph- ơng trình (1.3.23) và đ- ợc cho bởi***

$$ESD = \wp_X(f) = T_S^2 \left|X_d(f)\right|^2 \tag{1.4.13}$$

trong đó, T_s là khoảng thời gian lấy mẫu. Mật độ phổ công suất của chuỗi *x[n]* đ- ợc rút ra một cách đơn giản bằng cách dùng hàm Matlab ***spectrum.m*** trong phụ lục 4A.

Bài tập NVD4B_sim6

CẦNG SUỔT VÀ PH□ CẦNG SUỔT

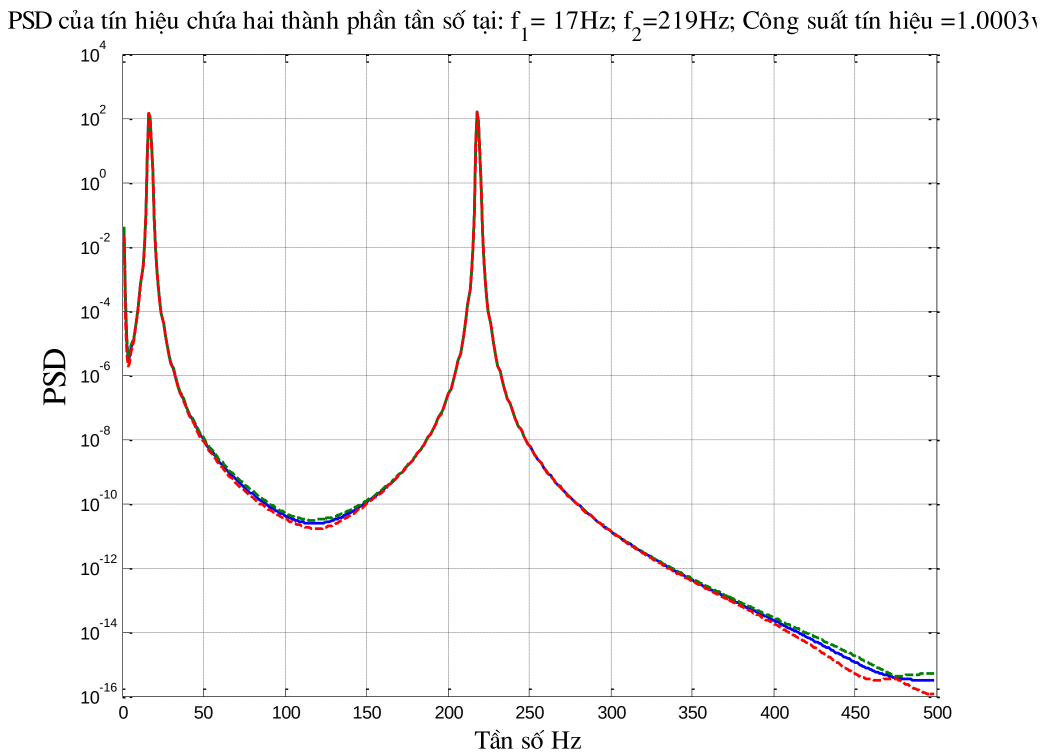
Tín hiệu *x(t)* có khoảng thời gian tồn tại là 10 và là tổng của hai tín hiệu sin biên độ 1 & tần số là 17Hz và 219Hz t- ơng ứng nh- sau

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi \times 17t) + \cos(2\pi \times 219t), & 0 \le t \le 10 \\ 0, & \text{khác} \end{cases}$$

Tín hiệu này đ- ợc lấy mẫu tại tốc độ 1000 mẫu/giây. Viết ch- ơng trình Mtlab để tìm công suất P_X và mật độ phổ công suất *PSD* $S_X(f)$ của tín hiệu này.

Lời giải:

Ch- ơng trình Matlab đ- ợc đ- ợc cho ở hàm ***spower.m*** để tính công suất của tín hiệu, kết quả là 1,0003*W*. Dùng các hàm Matlab ***spectrum.m*** và ***specplot.m*** để vẽ *PSD* của tín hiệu đ- ợc cho ở hình 1.15. Hai đỉnh có trong phổ tín hiệu t- ơng ứng với hai tần số thể hiện trong tín hiệu *x(t)*. Ch- ơng trình Matlab chính đ- ợc cho ở file **NVD4B_sim6.m** cùng với các hàm Matlab trên trong phụ lục 4A thực hiện bài toán này.



Hình 1.15 Mật độ phổ công suất của tín hiệu gồm hai tín hiệu Sin tại các tần số f_1 = 17 Hz và f_2 = 219Hz

```
% function y = NVD4B_sim6
%File NVD4B_sim6.m = CS18.m
clc;
clear all;
close all;
%========================
ts       = 0.001;
fs       = 1/ts;
t        = [ 0:ts:10] ;
f1       = input('Nhap tan so f1 =    ');
f2       = input('Nhap tan so f2 =    ');
x        = cos(2*pi* f1* t) + cos(2*pi* f2* t);
p        = spower(x);
psd      = spectrum(x,1024);
%========================
h1_25 = figure
set(h1_25,'color','c','Name','H1.27. Simulation Results of NVD4B_sim6 Program:
NVD');
specplot(psd,fs);
xlabel('Tần số Hz','fontname','.vntime','Fontsize',14);
ylabel('PSD','fontname','.vntime','Fontsize',18);
title([ 'PSD của tín hiệu chứa hai thành phần tần số tại: f_1= ',...
    num2str(f1),'Hz; f_2=',num2str(f2),'Hz; Công suất tín hiệu
=',num2str(p),'w'],...
    'fontname','.vntime','Fontsize',14);
grid on;
```

1.5. T- ơng đ- ơng thông thấp của các tín hiệu thông dải

Lowpass Equivalent of Bandpass Signals

❖ Khái niệm tín hiệu thông dải *x(t)* và t- ơng đ- ơng thông thấp $x_\ell(t)$

➢ ***Tín hiệu thông dải:*** là tín hiệu mà toàn bộ các thành phần tần số của nó đ- ợc định vị tại ***tần số trung tâm f_0*** và lân cận tần số f_0. Nói cách khác

$$X(f)=\begin{cases}A, & |f\pm f_0|\le W\\ 0, & \text{nếu khác}\end{cases}, \qquad \text{trong đó } f_0>>W$$

➢ ***Tín hiệu thông thấp:*** là tín hiệu mà các thành phần tần số của nó đ- ợc định vị tại tần số 0 và xung quanh ***tần số 0***; nghĩa là

$$X(f)=\begin{cases}A, & |f|\le W\\ 0, & \text{nếu khác}\end{cases}$$

❖ Tín hiệu giải tích *z(t)* và tín hiệu thông dải *x(t)*

T- ơng ứng với tín hiệu thông dải *x(t)*, ta định nghĩa ***tín hiệu giải tích*** *z(t)* mà biểu diễn chúng trong miền tần số và miền thời gian đ- ợc xác định nh- sau:

➢ ***Trong miền tần số đ- ợc cho bởi***

$$Z(f)=2u_{-1}(f)X(f) \tag{1.5.1}$$

trong đó $u_{-1}(f)$ là hàm b- ớc nhảy đơn vị.

➢ ***Trong miền thời gian đ- ợc cho bởi***

$$z(t)=x(t)+j\hat{x}(t) \tag{1.5.2}$$

trong đó, $\hat{x}(t)$ là biến đổi ***Hilbert*** của *x(t)* đ- ợc định nghĩa bởi

$$\begin{aligned}\hat{x}(t)&=x(t)*\frac{1}{\pi t}\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau\end{aligned} \tag{1.5.3a}$$

⇒ trong miền tần số đ- ợc cho bởi

$$\hat{X}(f)=-j.sign(f).X(f) \tag{1.5.3b}$$

Hàm biến đổi *Hilbert* trong Matlab đ- ợc ký hiệu là ***hilbert.m***, hàm thực hiện tạo chuỗi z(t) phức. Phần thực của *z(t)* là chuỗi bản tin, phần ảo của nó là biến đổi *Hilbert* của chuỗi bản tin.

❖ Tín hiệu thông thấp t- ơng đ- ơng $x_\ell(t)$

T- ơng đ- ơng thông thấp của tín hiệu thông dải *x(t)* đ- ợc ký hiệu bởi $x_\ell(t)$, tồn tại các cách định nghĩa và biểu diễn nh- sau:

➢ ***Cách 1:*** Biểu diễn $x_\ell(t)$ theo *z(t)*

$$\begin{cases} x_\ell(t) = z(t)e^{-j2\pi f_0 t} \\ z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.5.4)$$

⇒ Từ quan hệ này, ta có

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{Re}\left[x_\ell(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] \\ \hat{x}(t) = \mathrm{Im}\left[x_\ell(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] \end{cases} \quad (1.5.5)$$

⇔ Trong miền tần số, ta có

$$\begin{aligned} X_\ell(f) &= Z\left(f + f_0\right) \\ &= 2u_{-1}\left(f + f_0\right) \times X\left(f + f_0\right) \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

$$X_\ell(f) = X\left(f - f_0\right) + X^*\left(-f - f_0\right) \quad (1.5.7)$$

➢ ***Cách 2*:** Biểu diễn $x_\ell(t)$ theo các thành phần đồng pha & vuông pha nh- sau

□ dạng tổng quát, t- ơng đ- ơng thông thấp của tín hiệu thông dải giá trị thực *x(t)* là tín hiệu phức. Ký hiệu phần thực của nó là $x_c(t)$ đ- ợc gọi là thành phần đồng pha của tín hiệu thông dải *x(t)*, ký hiệu phần ảo của nó là $x_s(t)$ đ- ợc gọi là thành phần vuông pha của tín hiệu thông dải *x(t)*; nghĩa là

$$x_\ell(t) = x_c(t) + jx_s(t) \quad (1.5.8)$$

D- ới dạng các thành phần đồng pha & vuông pha, ta có

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{Re}\left[x_\ell(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = \underbrace{x_c(t).cos\left(2\pi f_0 t\right) - x_s(t).sin\left(2\pi f_0 t\right)}_{\text{để ý}} \\ \hat{x}(t) = \mathrm{Im}\left[x_\ell(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = x_s(t).cos\left(2\pi f_0 t\right) + x_c(t).sin\left(2\pi f_0 t\right) \end{cases} \quad \mathbf{(1.5.9)}$$

➢ **Cách 3:** Biểu diễn $x_\ell(t)$ trong hệ tọa độ cực (*in polar coordinate*), ta có

$$x_\ell(t) = V(t).e^{j\Theta(t)} \quad (1.5.10)$$

trong đó, *V(t)* & *Θ(t)* đ- ợc gọi là đ- ờng bao và pha của tín hiệu thông dải *x(t)*. Biểu diễn theo hai thành phần này nh- sau

$$x(t) = V(t).\cos\left(2\pi f_0 t + \Theta(t)\right) \quad (1.5.11)$$

Đ- ờng bao và pha có thể đ- ợc biểu diễn nh- sau

$$\begin{cases} V(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \Theta(t) = \arctan\dfrac{x_s(t)}{x_c(t)} \end{cases} \quad (1.5.12)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}(t)} \\ \Theta(t) = \arctan\dfrac{\hat{x}(t)}{x(t)} - 2\pi f_0 t \end{cases} \quad (1.5.13)$$

Từ các quan hệ phần tr- ớc thấy rõ, *đ- ờng bao* của tín hiệu ***độc lập với*** việc chọn tần số trung tâm f_0 (th- ờng là tần số sóng mang), trong khi đó *pha* của tín hiệu lại *phụ thuộc* vào việc chọn tần số f_0 này.

Ch- ơng trình Mtalab tạo tín hiệu giải tích này để biểu diễn thông thấp của tín hiệu, các thành phần vuông pha, đồng pha, đ- ờng bao và pha của tín hiệu, chúng đ- ợc cho bởi các file ***analytic.m; lowep.m; quadcomp.m; env_phas.m*** trong phụ lục 4A

```
function z=analytic(x)
%        z=analytic(x)
%ANALYTIC   returns the analytic signal corresponding to signal x%

z=hilbert(x);
```

```
function [v,phi]=env_phas(x,ts,f0)
%       [v,phi]=env_phas(x,ts,f0)
%              v=env_phas(x,ts,f0)
%ENV_PHAS       Returns the envelope and the phase of the bandpass signal x.
%        f0 is the center frequency.
%        ts is the sampling interval.
if nargout == 2
  z=loweq(x,ts,f0);
  phi=angle(z);
end
v=abs(hilbert(x));
```

```
function xl=loweq(x,ts,f0)
%        xl=loweq(x,ts,f0)
%LOWEQ      returns the lowpass equivalent of the signal x
%        f0 is the center frequency.
%        ts is the sampling interval.
%
t=[0:ts:ts*(length(x)-1)];
z=hilbert(x);
xl=z.*exp(-j*2*pi*f0*t);
```

```
function [xc,xs]=quadcomp(x,ts,f0)
%       [xc,xs]=quadcomp(x,ts,f0)
%QUADCOMP   Returns the in-phase and quadrature components of
%        the signal x. f0 is the center frequency. ts is the
%        sampling interval.
%
z=loweq(x,ts,f0);
xc=real(z);
xs=imag(z);
```

```
function p=spower(x)
%        p=spower(x)
%SPOWER     returns the power in signal x
```

```
p=(norm(x)^2)/length(x);
```

```
function y=rect(x)
% y=rect(x), determines the rectangular function
y=((x>-0.5) & (x<0.5))+0.5*(x==-0.5)+0.5*(x==0.5);
```

```
function y=signum(x)
%SIGNUM finds the signum of a vector.
%   Y=SIGNUM(X)
%   X=input vector
y=x;
y(find(x>0))=ones(size(find(x>0)));
y(find(x<0))=-ones(size(find(x<0)));
y(find(x==0))=zeros(size(find(x==0)));
```

```
function y=sinc(x)
% Y=SINC(X), determines the sinc function
y=(sin(pi*x)+(x==0))./(pi*x+(x==0));
```

```
function [M,m,df]=fftseq(m,ts,df)
%       [M,m,df]=fftseq(m,ts,df)
%       [M,m,df]=fftseq(m,ts)
%FFTSEQ     generates M, the FFT of the sequence m.
%       The sequence is zero padded to meet the required frequency resolution df.
%       ts is the sampling interval. The output df is the final frequency
resolution.
%       Output m is the zero padded version of input m. M is the FFT.
fs=1/ts;
if nargin == 2
  n1=0;
else
  n1=fs/df;
end
n2=length(m);
n=2^(max(nextpow2(n1),nextpow2(n2)));
M=fft(m,n);
m=[m,zeros(1,n-n2)];
df=fs/n;
```

1.6. Điều chế DSB-AM t- ơng tự

Phần này ta chỉ xét ph- ơng pháp điều chế DSB-AM đơn giản trong kênh ***tạp âm cộng***. DSB-AM, đ- ợc xét với:

- ✓ *Biểu diễn tín hiệu điều chế trong miền thời gian.*
- ✓ *Biểu diễn tín hiệu điều chế trong miền tần số.*
- ✓ *Độ rộng băng thông (Bandwidth) của tín hiệu điều chế.*
- ✓ *Công suất của tín hiệu điều chế.*
- ✓ *Ảnh h- ởng tạp âm kênh lên tín hiệu thu.*

Chúng không độc lập nhau mà phụ thuộc lẫn nhau. Tồn tại các quan hệ mật thiết lẫn nhau khi biểu diễn chúng trong miền tần số và miền thời gian thông qua phép biến đổi Fourier FT. Vì vậy, độ rộng băng tần của tín hiệu đ- ợc xác định theo dạng các đặc tính tần số của nó.

Điều chế biên độ là ph- ơng pháp điều chế mà làm thay đổi biên độ của sóng mang theo quy luật của tín hiệu tin tức, nó thuộc laọi điều chế tuyến tính. Sự phụ thuộc giữa tín hiệu điều chế và sóng mang khi này là rất đơn giản chẳng hạn. Các hệ thống điều chế AM th- ờng đ- ợc đặc tr- ng bởi yêu cầu về độ rộn băng t- ơng đối thấp và không hiệu quả về công suất so với các ph- ơng pháp điều chế góc. Yêu cầu về độ rộng băng đối với các hệ thống điều chế AM thay đổi trong khoảng *W* và *2W* trong đó *W* là độ rộng băng của tín hiệu bản tin.

Trong ph- ơng pháp DSB-AM, biên độ của tín hiệu điều chế tỉ lệ với tín hiệu bản tin; nghĩa là, biểu diễn tín hiệu điều chế trong miền thời gian đ- ợc cho bởi

$$u(t) = m(t)\underbrace{A_c cos\left(2\pi f_c t\right)}_{c(t)} \qquad (1.6.1)$$

$$U(f) = \frac{A_c}{2}\left[M\left(f - f_c\right) + M\left(f + f_c\right)\right] \qquad (1.6.2)$$

trong đó *M(f)* là biến đổi Fourier của *m(t)*. Thấy rõ, loại điều chế này đã dịch phổ tín hiệu bản tin lên vùng tần số mới đ- ợc trung tâm tại $\pm f_c$ và nhân với hệ số $A_c/2$. Ký hiệu B_T là độ rộng băng thông truyền dẫn và bằng 2 lần độ rộng băng thông của tín hiệu bản tin W, nghĩa là

$$B_T = 2W \qquad (1.6.3)$$

Công suất tín hiệu điều chế đ- ợc cho bởi

$$\begin{aligned}
p_u &= \lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)dt \\
&= \lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A_c^2 m^2(t) cos^2\left(2\pi f_c t\right)dt \\
&= \lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A_c^2 m^2(t)\frac{1+cos\left(4\pi f_c t\right)}{2}dt \\
&= A_c^2\left\{\lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{m^2(t)}{2}dt + \lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)\frac{cos\left(4\pi f_c t\right)}{2}dt\right\} \\
&= A_c^2\lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{m^2(t)}{2}dt \\
&= \frac{A_c^2}{2}p_m
\end{aligned} \qquad (1.6.4\ \&\ 1.6.5)$$

trong đó P_m là công suất tín hiệu bản tin. Trong ph- ơng trình (1.6.4), *m(t)* là tín hiệu thông thấp có tần số nhỏ hơn rất nhiều $2f_c$, tần số $cos(4\pi f_c t)$. Vì vậy, tích phân

$$\int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)\frac{cos\left(4\pi f_c t\right)}{2}dt \qquad (1.6.7)$$

chuyển về không khi $T \Rightarrow \infty$.

Cuối cùng, SNR cho hệ thống DSB-AM bằng với SNR băng tần cơ sở; nghĩa là

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{P_R}{N_0 W} \tag{1.6.8}$$

trong đó P_R công suất thu (công suất trong tín hiệu điều chế ở máy thu), $N_0/2$ là mật độ phổ tạp âm (giả thiết tạp âm trắng) và W là độ rộng băng tần bản tin.

Bài tập NVD4B_sim7:

□IỦU CH□ DSB-AM

Tín hiệu bản tin đ- ợc định nghĩa là

$$m(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \dfrac{t_0}{3} \\ -2, & \dfrac{t_0}{3} < t \le \dfrac{2t_0}{2} \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Bản tin này điều chế sóng mang $c(t) = cos(2\pi f_c t)$ theo ph- ơng pháp DSB-AM, và ký hiệu $u(t)$ là tín hiệu sóng mang đ- ợc điều chế. Giả thiết t_0 = 0,15 và f_c = 250Hz. Hãy

1. *Biểu diễn tín hiệu điều chế u(t).*
2. *Tìm phổ của m(t) và u(t).*
3. *Giả sử tín hiệu bản tin là tín hiệu tuần hoàn có $T_0 = t_0$. Tìm công suất trong tín hiệu điều chế.*
4. *Nếu cộng tạp âm vào tín hiệu điều chế sao cho SNR=10 dB, tìm công suất tạp âm.*

Lời giải:

❖ Tín hiệu bản tin đ- ợc viết nh- sau

$$m(t) = \prod\left(\frac{t - {}^{t_0}\!/_6}{{}^{t_0}\!/_3}\right) - 2\prod\left(\frac{t - {}^{t_0}\!/_6}{{}^{t_0}\!/_3}\right)$$

Vì vậy thay t_0 = 0,15 và f_c = 250Hz vào ta có tín hiệu điều chế

$$u(t) = \left[\prod\left(\frac{t-0,025}{0,05}\right) - 2\prod\left(\frac{t-0,075}{0,05}\right)\right]\cos(500\pi t) \tag{1.6.9}$$

❖ **Dùng quan hệ FT chuẩn (tra bảng) $\Im\left[\prod(t)=\sin c(t)\right]$ cùng với các tính chất dịch và tỉ lệ của biến đổi Fourier, ta có**

$$\begin{aligned}\Im[m(t)] &= \frac{t_0}{3}e^{-j\pi f t_0/3}\sin c\left(\frac{t_0 f}{3}\right)-2\frac{t_0}{3}e^{-j\pi f t_0}\sin c\left(\frac{t_0 f}{3}\right)\\ &= \frac{t_0}{3}e^{-j\pi f t_0/3} sinc\left(\frac{t_0 f}{3}\right)\left(1-e^{-j2\pi f t_0/3}\right)\end{aligned} \quad (1.6.10)$$

thay $t_0 = 0{,}15$ vào ta đ- ợc

$$\Im[m(t)] = 0,05e^{-0,05j\pi f}\sin c(0,05f).\left(1-e^{-0,1j\pi f}\right) \quad (1.6.11)$$

Với tín hiệu điều chế *u(t)*, ta có

$$\begin{aligned}U(f) &= 0,025e^{-j\pi(f-f_c)}\sin c[0,05(f-f_c)].\left(1-2e^{-0,1j\pi(f-f_c)}\right)\\ &\quad +0,025e^{-0,05j\pi(f+f_c)}\sin c[0,05(f+f_c)].\left(1-2e^{-0,1j\pi(f+f_c)}\right)\end{aligned} \quad (1.6.12)$$

Vẽ phổ biên độ của tín hiệu bản tin và phổ của tín hiệu điều chế đ- ợc cho ở hình 1.16, là kết quả chạy ch- ơng trình Matlab. L- u ý rằng, thay đổi các tham số của ch- ơng trình để khảo sát:

❖ **Công suất trong tín hiệu điều chế đ- ợc cho bởi**

$$P_U = \frac{A_c^2}{2}P_m = \frac{1}{2}P_m$$

trong đó P_m là công suất trong tín hiệu bản tin

$$\begin{aligned}P_m &= \frac{1}{t_0}\int_0^{2t_0/3} m^2(t)dt\\ &= \frac{1}{t_0}\left(\frac{t_0}{3}+\frac{4t_0}{3}\right)=\frac{5}{3}=1,666\end{aligned}$$

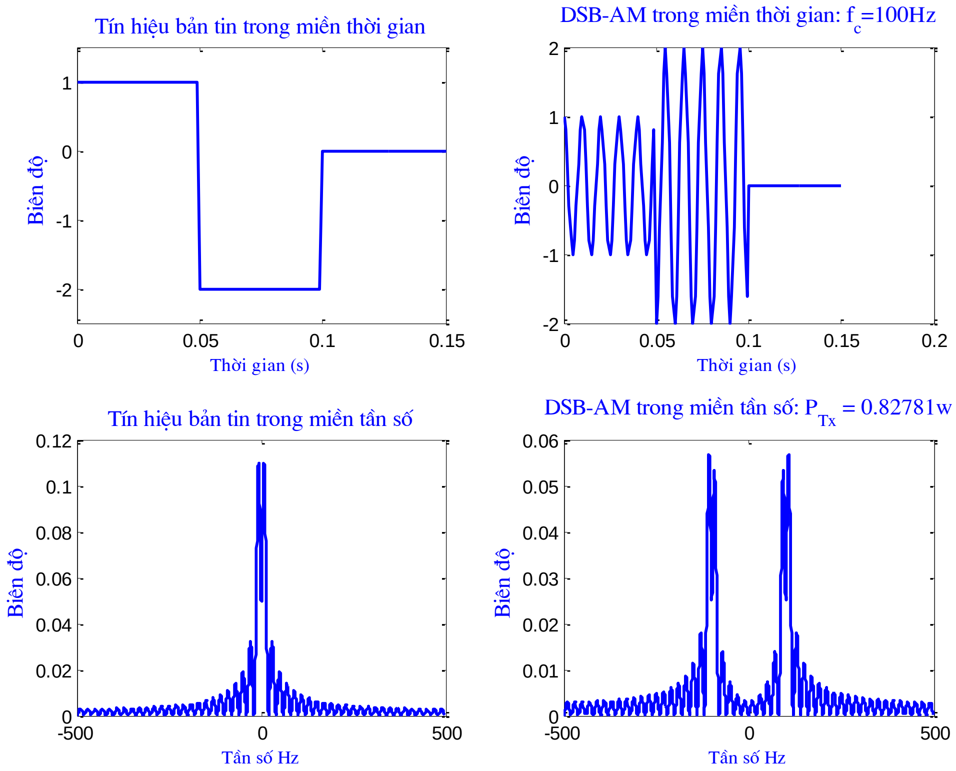
và $$P_U = \frac{P_m}{2} = 0,833$$

❖ **Công suất tạp âm**

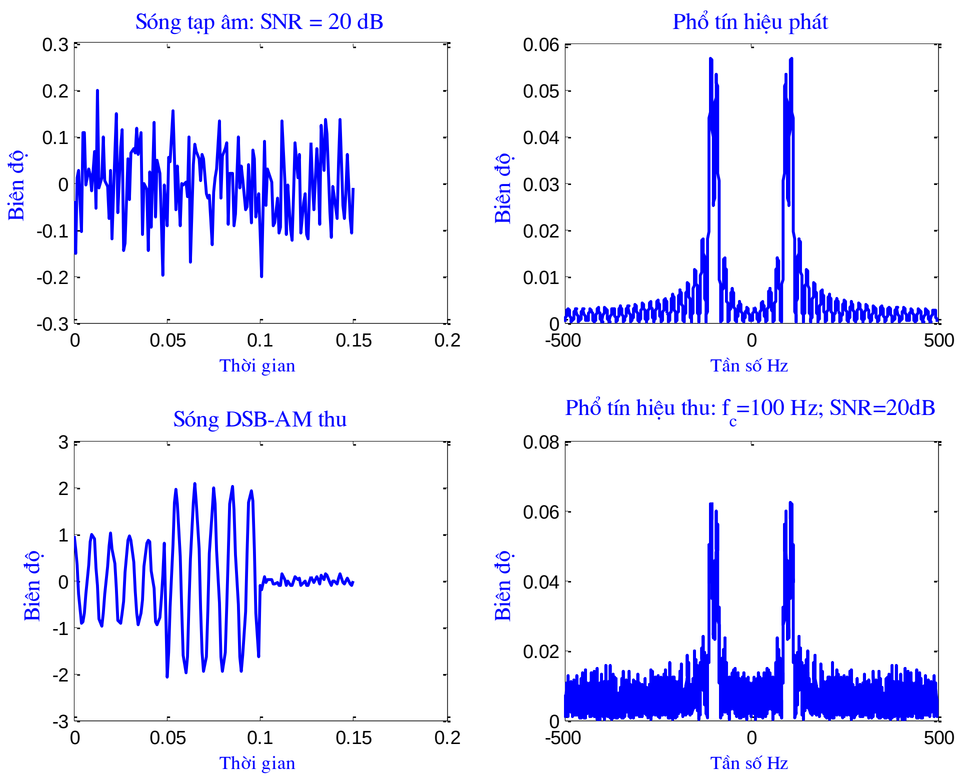
$$10\log_{10}\left(\frac{P_R}{P_n}\right)=10$$

hoặc $P_R = P_U = 10P_n, \Rightarrow P_n = P_U/10 = 0{,}0833$

Ch- ơng trình Matlab mô phỏng điều chế DSB-AM đ- ợc cho bởi **NVD4B_sim7.m** trong phụ lục 4A. Các kết quả mô phỏng đ- ợc cho ở các hình 1.16 và hình 1.17. Để đ- ợc t- ờng mình, ta thay đổi các giá trị của các tham số khi chạy ch- ơng trình nh- : tần số sóng mang, SNR,...



Hình 1.16 Tín hiệu bản tin và tín hiệu đầu ra bộ điều chế trong các miền thời gian và tần số



Hình 1.17. Mô phỏng tạp âm, tín hiệu thu trong các miền thời gian và tần số

```
function NVD4B_sim7
%File NVD4B_sim7.m = CS31.m
% demonstration for DSB-AM modulation.
%=========================
clc;
clear all;
close all;
%=========================
t0      = .15;              % signal duration
ts      = 0.001;            % sampling interval
fc      = input('   Nhap tan so song mang =    ');  % Carrier frequency
snr     = input('   Nhap SNR = ');
fs      = 1/ts;             % Sampling frequency
df      = 0.3;              % desired frequency resolution
t       = [ 0:ts:t0];       % time vector
snr_lin = 10^(snr/10);      % Linear SNR
%=========================
% message signal
m   = [ones(1,t0/(3*ts)),-2*ones(1,t0/(3*ts)),zeros(1,t0/(3*ts)+1)];
c   = cos(2*fc*pi.*t);          % Carrier signal
u   = m.*c;                     % modulation signal
[M,m,df1]    = fftseq(m,ts,df); % Fourier Transform
M            = M/fs;            % scaling
[U,u,df1]    = fftseq(u,ts,df); % Fourier Transform
U            = U/fs;            % scaling
[C,c,df1]    = fftseq(c,ts,df); % Fourier Transform
C            = C/fs;            % scaling
f            = [0:df1:df1*(length(m)-1)]-fs/2;   % frequency vector
signal_power    = spower(u(1:length(t)));        % power in modulated signal
noise_power     = signal_power/snr_lin;          % compute noise power
noise_std       = sqrt(noise_power);             % Compute noise standard
deviation
noise           = noise_std*randn(1,length(u)); % Generate noise
r               = u + noise;                     % add noise to the modulated
signal
[R,r,df1]       = fftseq(r,ts,df);               % spectrum of the signal + noise
R               = R/fs;                          % scaling
%=========================
h1_27 = figure(1)
set(h1_27,'name','H1.27: NVD')
%==========
% the message signal in time domain
subplot(221);
plot(t,m(1:length(t)),'LineWidth',2);
xlabel('Thời gian (s)','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title('Tín hiệu bản tin trong miền thời gian',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
axis([min(t) max(t) min(m)-0.5 max(m)+0.5])
%==========
% the message signal in frequency domain
subplot(223);
plot(f,abs(fftshift(M)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Tần số Hz','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title('Tín hiệu bản tin trong miền tần
số','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);

%==========
```

```
% the modulated signal in time domain
subplot(222);
plot(t,u(1:length(t)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Thời gian (s)','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title([ 'DSB-AM trong miền thời gian: f_c=',num2str(fc),'Hz'],...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
%===========
% the modulated signal in the frequency domain
subplot(224);
plot(f,abs(fftshift(U)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Tần số Hz','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title([ 'DSB-AM trong miền tần số: P_T_x = ',num2str(signal_power),'w'],...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
%=======================================================
h1_28 = figure(2)
set(h1_28,'name','H1.28: NVD')

subplot(221);
plot(t,noise(1:length(t)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title([ 'Sóng tạp âm: SNR = ',num2str(snr),' dB'],...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);

subplot(222);
plot(f,abs(fftshift(U)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Tần số Hz','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title('Phổ tín hiệu phát',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);

subplot(223);
plot(t,r(1:length(t)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title('Sóng DSB-AM thu',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);

subplot(224);
plot(f,abs(fftshift(R)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Tần số Hz','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title([ 'Phổ tín hiệu thu: f_c=',num2str(fc),' Hz; SNR=',num2str(snr),'dB'],...

    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
```