

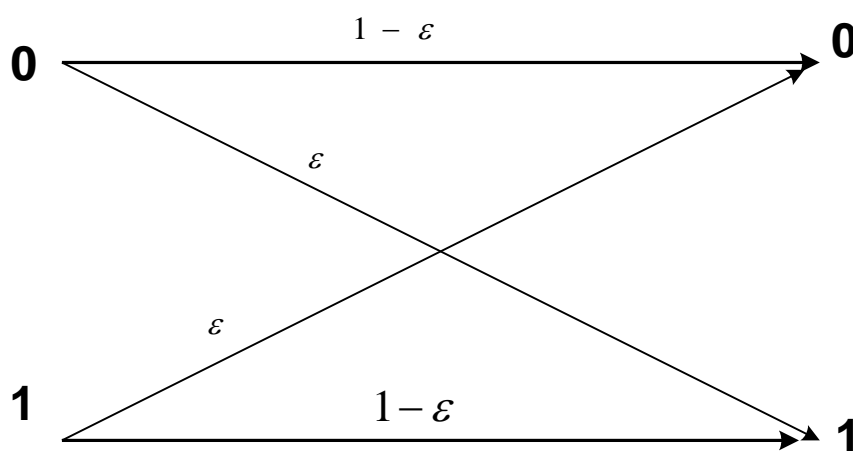
## DUNG LƯỢNG KÊNH TRUYỀN DẪN

### Mô hình kênh và dung lượng kênh.

Kênh truyền thông thực hiện truyền tín hiệu mang thông tin đến đích. Trong truyền dẫn, tín hiệu mang tin phải chịu ảnh hưởng lớn của môi trường. Một trong các ảnh hưởng này có tính **tất định** chẳng hạn suy hao, méo tuyến tính và không tuyến tính; một số có tính **xác suất** (ngẫu nhiên) chẳng hạn tác động của tạp âm, fading nhiều tia Multipath Fading.v.v.. **Vì ảnh hưởng có tính tất định được xem là trường hợp đặc biệt của thay đổi ngẫu nhiên**, nên một cách tổng quát xem một hình toán học cho kênh truyền thông là sự phụ thuộc **ngẫu nhiên** giữa các tín hiệu vào và ra.

#### ➤ Mô hình kênh

Trường hợp đơn giản nhất, kênh được mô hình hoá nh- là xác suất có điều kiện liên hệ giữa mỗi đầu ra với đầu vào tương ứng của kênh. Kênh nh- vậy được gọi là kênh không nhớ rời rạc (DMC- Discrete-Memoryless-Channel) và hoàn toàn được biểu diễn bởi các ký hiệu vào  $X$  và ký hiệu đầu ra  $Y$  của kênh và ma trận xác suất truyền của kênh  $P(y|x)$  đối với mọi  $x \in X$  và  $y \in Y$ . Một trường hợp cụ thể của **DMC** là **BSC**-Binary Symmetric-Channel mà được coi là mô hình toán học cho việc truyền dẫn cơ hai trên kênh Gaussian với **quyết định cứng** ở đầu ra. Kênh đối xứng cơ hai BSC tương ứng với trường hợp  $X=Y=\{0,1\}$  và  $P(y=0|x=1) = P(y=1|x=0) = \varepsilon$  được cho ở hình 2.1. Thông số  $\varepsilon$  được gọi là xác suất giao nhau CrossOver của kênh.



Hình 2.1: Kênh đối xứng cơ hai BSC

#### ➤ Dung lượng kênh hay khả năng thông qua của kênh.

Theo định nghĩa, khả năng thông qua của kênh là tốc độ cực đại mà tại tốc độ này truyền thông tin trên kênh đó đảm bảo được độ tin cậy.

Khả năng thông qua của kênh được ký hiệu  $C$ ; theo định nghĩa này thì tại các tốc độ  $R < C$ , cho phép truyền dẫn khả tin trên kênh đó, tại tốc độ  $R > C$  thì việc truyền tin trên kênh là không thể đảm bảo tin cậy được.

Kết quả cơ bản lý thuyết thông tin của Shanno phát biểu rằng đối các kênh rời rạc không nhớ thì khả năng thông qua đ-ợc cho bởi biểu thức sau.

$$C = \underset{p(x)}{Max} I[X;Y] \quad (2.1)$$

Trong đó  $I[X;Y]$  là l-ợng thông tin chéo trung bình giữa  $X$  (đầu vào kênh) và  $Y$  (đầu ra của kênh) việc cực đại hoá đ-ợc thực hiện trên toàn bộ **phân phối xác suất đầu vào của kênh**.

Thông tin chéo trung bình giữa hai biến ngẫu nhiên  $X$  và  $Y$  đ-ợc định nghĩa là.

$$I(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x)p(y|x) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \quad (2.2)$$

Trong đó:

L-ợng thông tin chéo lấy theo log cơ số 2 thì đ-ợc đơn vị bit .

➤ **Mô hình kênh BSC:**

Khả năng thông qua kênh đ-ợc cho bởi mối quan hệ đơn giản hơn.

$$C = 1 - H_b(\varepsilon) \quad (2.3)$$

Trong đó  $\varepsilon$  là xác suất chéo của kênh và  $H_b(\cdot)$  thể hiện cho hàm Entropy cơ hai.

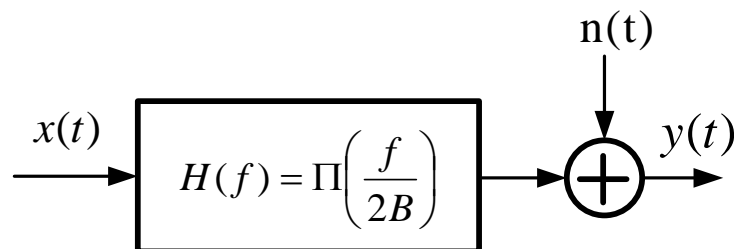
$$H_b(x) = -x \log(x) - (1-x) \log(1-x) \quad (2.4)$$

➤ **Mô hình kênh AWGN:**

Kênh tạp âm Gaussian trắng cộng AWGN bị hạn chế băng và có công suất vào hạn chế. Kênh này đ-ợc mô hình hoá nh- hình 2.2.

Kênh bị hạn chế băng trong khoảng  $[-B, B]$ , tạp âm là Gaussian và trắng có mật độ phổ công suất (hai biên)  $N_0/2$ , và đầu vào kênh là quá trình mà thỏa mãn công suất vào hạn chế là  $P$ . Theo Shammon dung l-ợng của kênh này đơn vị bit/s là.

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0 B} \right) \quad \text{bit/s} \quad (2.5)$$



**Hình 2.2: Kênh tạp âm Gaussian trắng cộng AWGN bị hạn chế băng**

Đối với kênh AWGN rời rạc theo thời gian có công suất vào hạn chế  $P$  và phương sai tạp âm  $\sigma^2$ , thì khả năng thông qua kênh đơn vị bit/truyền dẫn được cho bởi.

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad \text{bits/kênh} \quad (2.6)$$

## 2.2. Bài tập và chương trình:

Dựa vào quan hệ hàm biến thông qua các ví dụ trong các tài liệu, khảo sát giải giá trị của biến số tìm được giải giá trị của hàm  $\Rightarrow$  thiết kế chương trình, thực hiện chương trình trên Matlab.

Mỗi bài tập thể hiện mối quan hệ hàm và biến được viết thành các hàm Matlab kết quả khảo sát quan hệ hàm biến được thể hiện trực quan bằng đồ thị tương ứng.

### Bài tập 1:

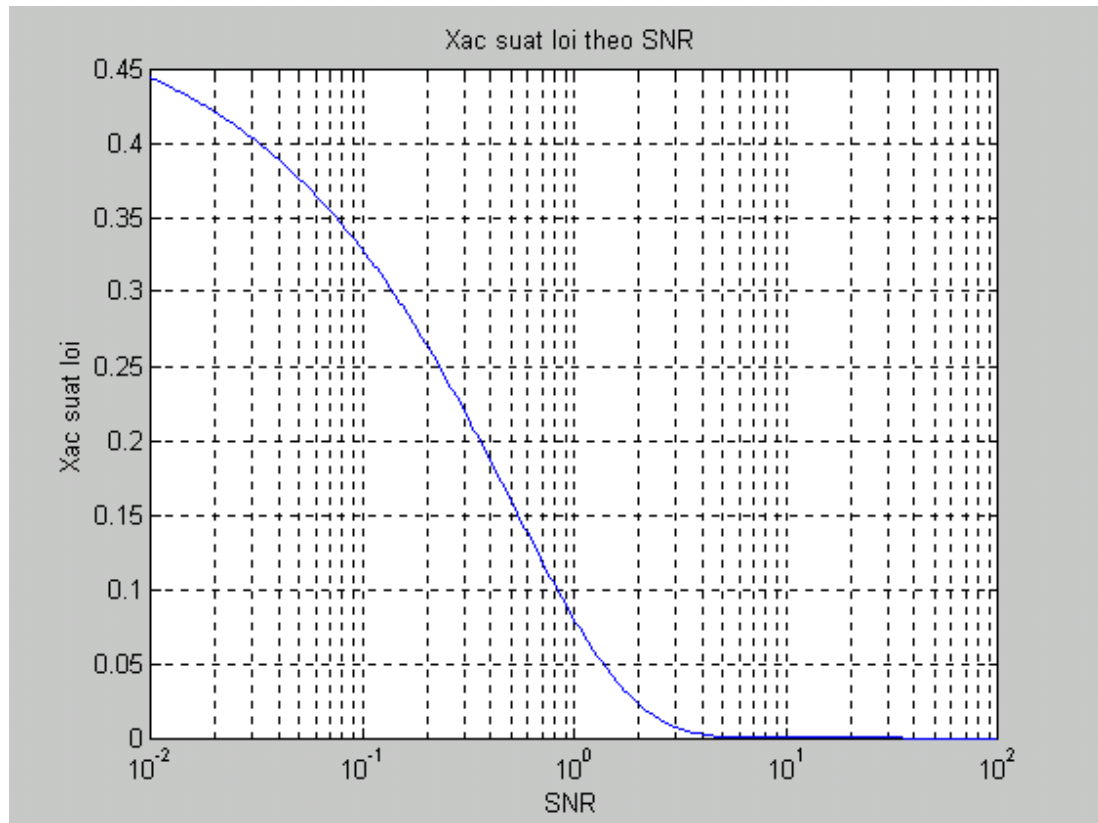
#### Dung lượng kênh BSC

Dữ liệu cơ hai được truyền trên kênh AWGN dùng BPSK và giải mã quyết định cứng ở đầu ra dùng tách sóng lọc thích hợp tối ưu.

1. Vẽ xác suất lỗi của kênh theo  $E_b/N_0$ . Trong đó  $E_b$  năng lượng của bit trong tín hiệu BPSK và  $N_0/2$  là mật độ phổ công suất tạp âm với giả thiết  $E_b/N_0$  thay đổi trong phạm vi  $-20\text{dB}$  đến  $20\text{dB}$ .
2. Vẽ dung lượng của kênh như là hàm của  $E_b/N_0$ .

### Giải:

1. Xác suất lỗi của BPSK với tách sóng tối ưu (biên giới quyết định tối ưu) được cho bởi  $p_e = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$  vẽ tương ứng được cho ở hình 2.3 (xem tài liệu Cơ sở kỹ thuật truyền dẫn vi ba số).



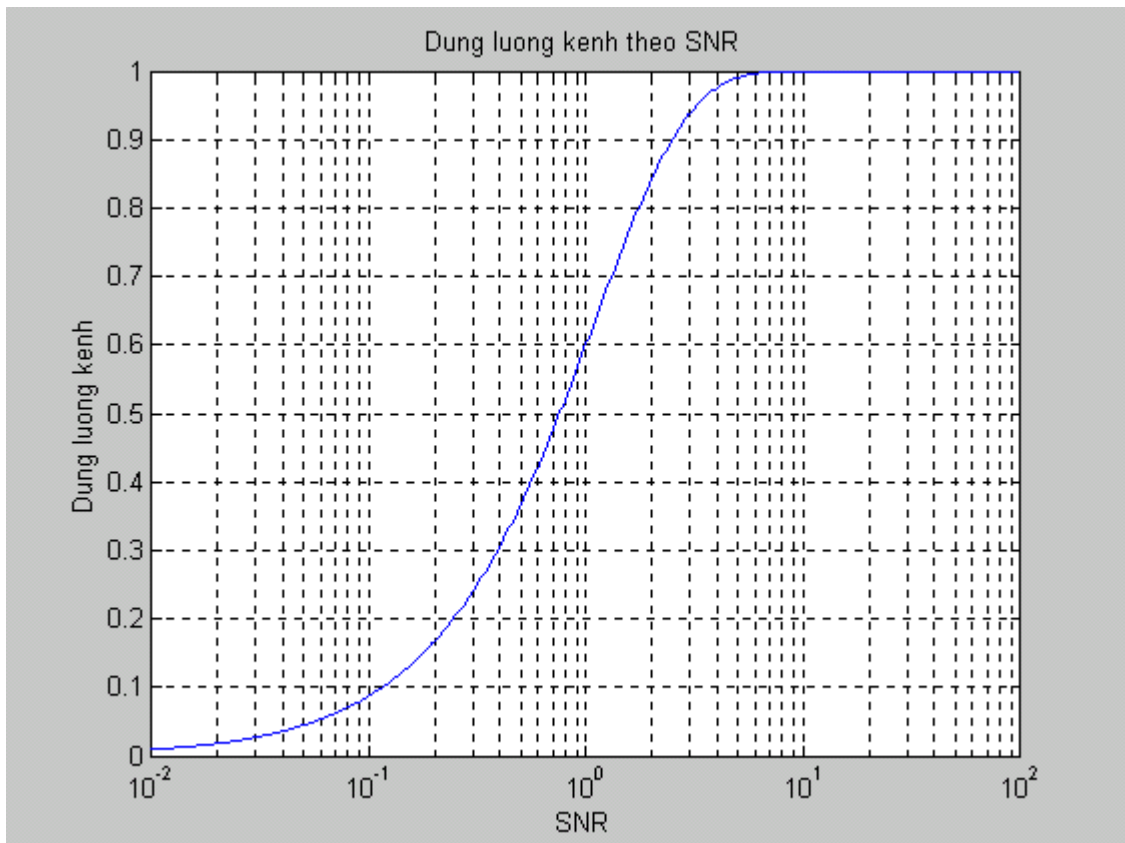
**Hình 2.3: Xác suất lỗi của BPSK**

2. Ta dùng mối quan hệ.

$$\begin{aligned}
 C &= 1 - H_b(p) \\
 &= 1 - H_b\left(Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$H_b(\cdot)$  thể hiện cho hàm Entropy cơ hai (xem phụ lục 1). Đối số của hàm lúc này là  $Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right) \Rightarrow$  biến số  $E_b/N_0$ .

Để vẽ dung lượng kênh  $C$  theo  $E_b/N_0$ . Kết quả được cho ở hình 2.4.



**Hình 2.4: Dung lượng kênh theo  $E_b/N_0$**

Từ hai hình vẽ hãy nhận xét các quan hệ hàm biến.

**Chương trình Matlab để thực hiện bài tập này được cho ở file: CS81**

```
function y=CS81()

gamma_dB = [-20:0.1:20];
gamma = 10.^(gamma_dB/10);
P = Q(sqrt(2.*gamma));
if length(find(P<0))~=0
    error('không phải là vecor xác suất, thành phần âm');
end
k=length(P);
for i=1:k
    h = -P.*log2(P)-(1-P).*log2(1-P);
end
Capacity = 1.- h;
figure(1);
semilogx(gamma,P);
xlabel('SNR');
title('Xác suất lỗi theo SNR');
ylabel('Xác suất lỗi');
grid on;
```

```

figure(2);
semilogx(gamma,Capacity);
xlabel('SNR');
title('Dung lượng kênh theo SNR');
ylabel('Dung lượng kênh');
grid on;
function h = entropy(p)
% H = ENTROPY(P) cho kết quả tính entropy của vector xác suất P.
if length(find(p<0))~=0
    error('không phải là vecor xác suất, thành phần âm');
end
if abs(sum(p)-1)>10e-10
    error('không phải là vecor xác suất, tổng các phần tử lớn hơn 1');
end
h=sum(-p.*log2(p));

```

### **Bài tập 2:**

#### **Dung lượng kênh Gaussian**

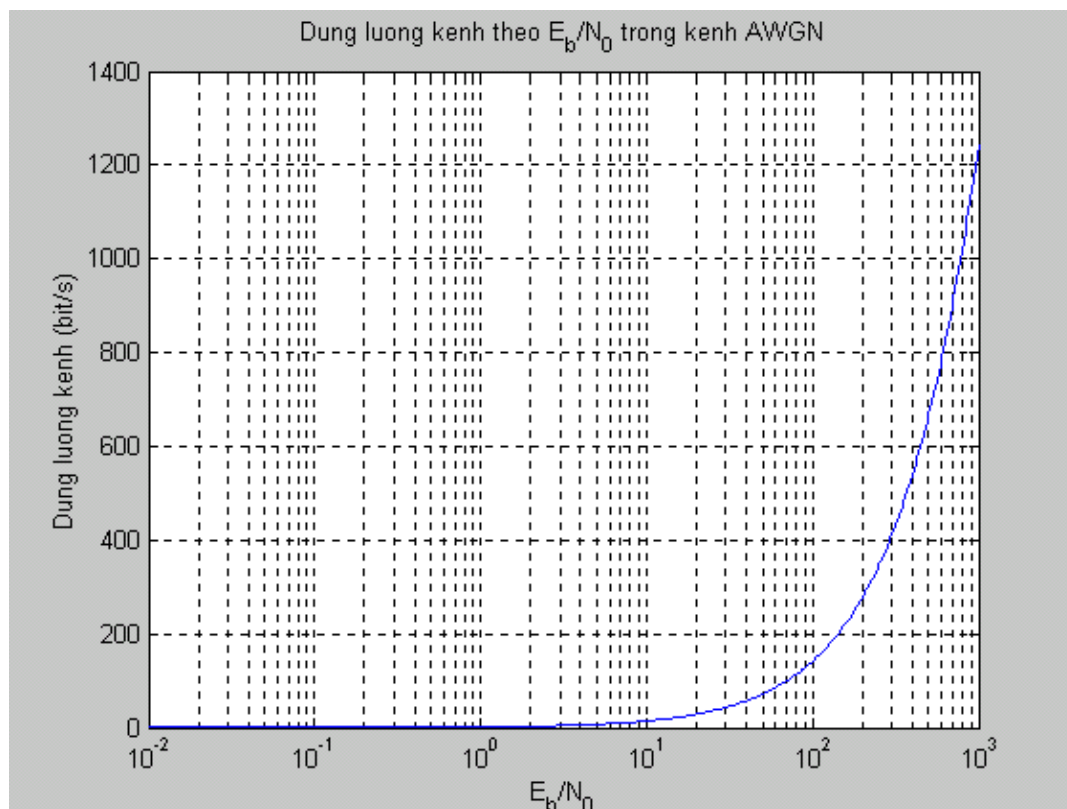
1. Vẽ dung lượng kênh AWGN có độ rộng băng  $B=3000\text{Hz}$  nh- là hàm của  $P/N_0$  ( $E_b/N_0$ ) khi giá trị của  $P/N_0$  nằm trong khoảng  $[-20\text{ dB đến }30\text{dB}]$ .
2. Vẽ dung lượng kênh AWGN có  $P/N_0$  ( $E_b/N_0$ ) = 25dB nh- là hàm của  $B$ . Đặc biệt xét xem xuất hiện điều gì ? khi  $B$  tăng đến vô hạn.

#### **Giải:**

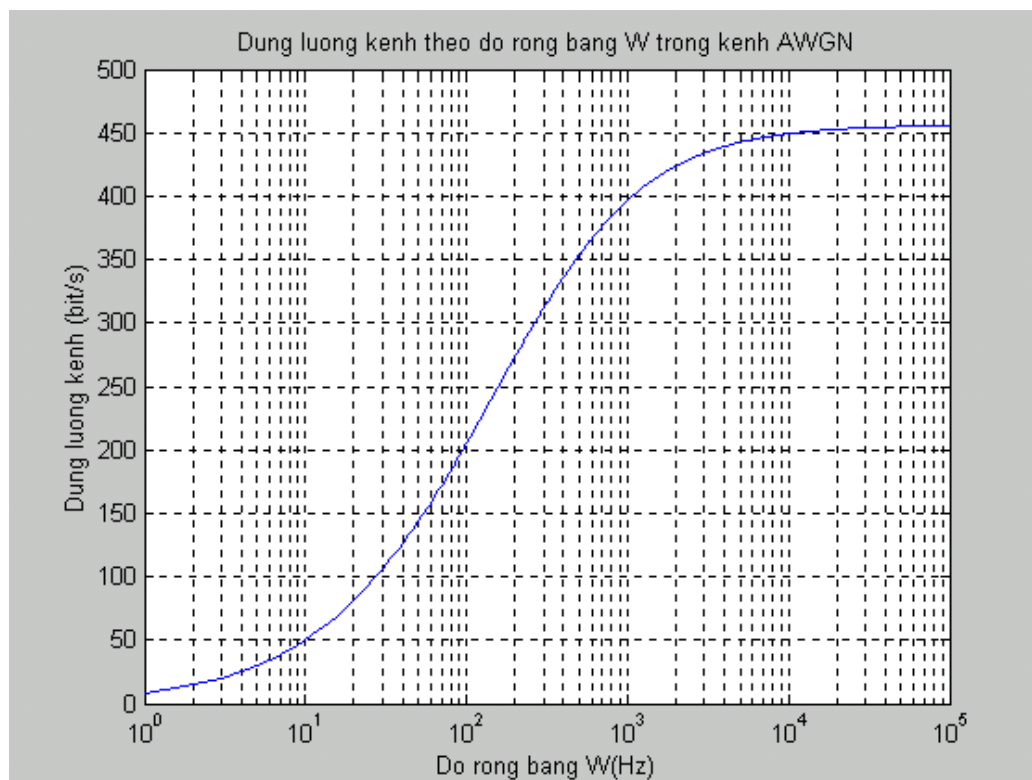
1. Từ công thức.

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0 B} \right)$$

Để khảo sát  $C = f\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$  cố định độ rộng băng thông  $B$  của kênh. Kết quả chạy chương trình được cho hình 2.5.



Hình 2.5: Dung lượng kênh AWGN có  $W=3000\text{Hz}$  nhàm của  $E_b/N_0$



Hình 2.6: Dung lượng kênh AWGN có  $E_b/N_0=25\text{ dB}$  theo (hàm của)  $B$

2. Kết quả xét dung lượng kênh nh- hàm của độ rộng băng đ- ọc cho ở hình 2.6. Để khảo sát  $C = f(B)$  thì cố định giá trị  $E_b/N_0$

Nhận xét:

Ta thấy, d- ồng nh- khi tỉ số tín hiệu trên tạp âm  $P/N_0$  (SNR,  $E_b/N_0$ ) hoặc độ rộng băng của kênh  $B$  tiến đến không, thì dung lượng của kênh cũng tiến đến không.

Tuy nhiên, khi  $P/N_0$  hoặc  $B$  tiến đến vô hạn, thì dung lượng kênh xem xét lại khác.

$\Rightarrow$  Khi  $P/N_0$  tiến đến vô hạn thì dung lượng kênh cũng tiến đến vô hạn nh- đ- ọc thấy ở hình 2.5.

$\Rightarrow$  Khi  $B$  tiến đến vô hạn thì dung lượng kênh tiến đến giới hạn nào đó, nó đ- ọc xác định bởi  $P/N_0$ . Để xác định giá trị giới hạn này, ta có.

$$\lim_{W \rightarrow \infty} W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0 W} \right) = \frac{P}{N_0 \ln 2}$$

$$= 1,4427 \frac{P}{N_0}$$

**Chương trình Matlab thực hiện bài tập này đ- ọc cho ở File: CS82**

```
function y=CS82()

disp('Nen nhap E_b/N_0 = [-20:0.1:30], va BW = 3000Hz');

SNR_dB=input('Ban hay nhap vector E_b/N_0 = ');

SNR = 10.^(SNR_dB/10);

BW = input('Ban hay nhap Bandwidth = ');

Capacity = BW.*log2(1 + SNR/BW);

figure(1);
semilogx(SNR,Capacity);
title('Dung luong kenh theo E_b/N_0 trong kenh AWGN');
xlabel('E_b/N_0');
ylabel('Dung luong kenh (bit/s)');
grid on;

W=[1:10, 12:2:100, 105:5:500, 510:10:5000, 5025:25:20000, 20050:50:100000];
SNR_dB = 25;
SNR=10.^(SNR_dB/10);

Capacity = W.*log2(1 + SNR./W);

figure(2);
semilogx(W,Capacity);
title('Dung luong kenh theo do rong bang W trong kenh AWGN');
xlabel('Do rong bang W(Hz)');
```



```
ylabel('Dung luong kênh (bit/s)');
grid on;
```

**Bài tập 3:****Dung lượng của kênh AWGN đầu vào cơ hai**

Kênh AWGN đầu vào cơ hai được mô hình hoá bởi hai mức tín hiệu vào cơ hai  $\pm A$  và tạp âm Gaussian trung bình không có phương sai  $\sigma^2$ . Trong trường hợp này,  $X = \{-A, A\}$ ,  $Y = \mathcal{R}$ ,  $p(y|X=A) \sim N(A, \sigma^2)$  và  $p(y|X=-A) \sim N(-A, \sigma^2)$ .

Vẽ dung lượng của kênh này theo (hàm của)  $A/\sigma$ .

**Giải:**

Do đối xứng nên dung lượng kênh đạt được từ phân phối đầu vào đồng đều - nghĩa là, có  $p(X=A) = p(X=-A) = 1/2$ . Vì phân phối đầu vào như vậy, nên phân phối đầu ra được cho bởi.

$$p(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+A)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}}$$

và thông tin chéo giữa các đầu vào ra được cho bởi.

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(y|X=A) \log_2 \frac{p(y|X=A)}{p(y)} dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(y|X=-A) \log_2 \frac{p(y|X=-A)}{p(y)} dy \end{aligned}$$

Thực hiện lấy tích phân và chuyển biến cho kết quả.

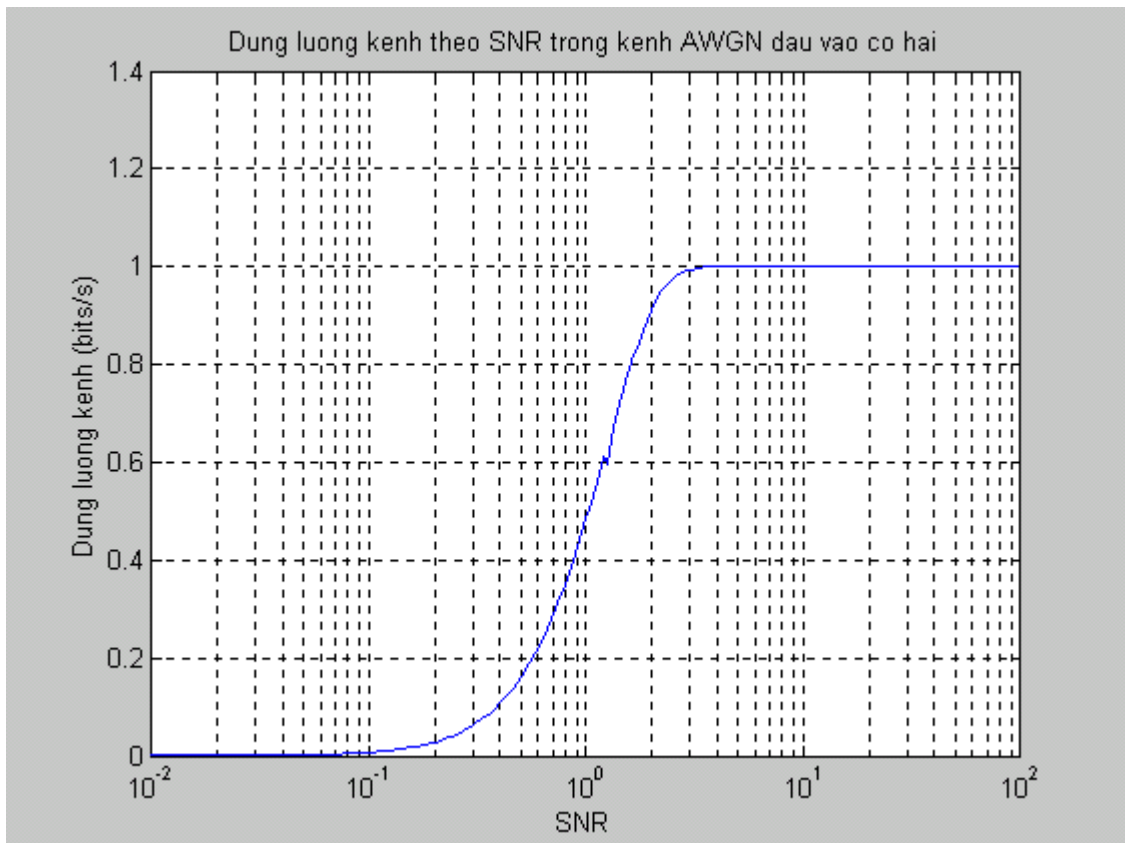
$$I(X;Y) = \frac{1}{2} f\left(\frac{A}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} f\left(-\frac{A}{\sigma}\right)$$

Trong đó

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-a)^2}{2}} \log_2 \frac{2}{1 + e^{-2au}} du$$

Dùng quan hệ này để tính  $I(X;Y)$  cho các giá trị  $A/\sigma$  khác nhau và vẽ đồ thị quan hệ giữa chúng. Kết quả vẽ được cho ở hình 2.7.

**Chương trình Matlab thực hiện bài tập này được cho ở File: CS83.**



Hình 2.7: Dung lượng kênh AWGN đầu vào cơ hai nhƣ hàm của  $SNR = A/\sigma$ .

**Chương trình Matlab thực hiện bài tập này đƣợc cho ở File: CS83**

```
function y=CS83()

a_dB=[-20:0.2:20];
a=10.^(a_dB/10);

for i=1:length(a)
    f(i)=quad(@Quocanh , a(i)-5 , a(i)+5 , 1e-3 , [] , a(i) );
    g(i)=quad(@Quocanh , -a(i)-5 , -a(i)+5 , 1e-3 , [] , -a(i) );
    c(i)=0.5*f(i)+0.5*g(i);
end

semilogx(a,c);
title('Dung lượng kênh theo SNR trong kênh AWGN dau vào cơ hai');
xlabel('SNR');
ylabel('Dung lượng kênh (bits/s)');
grid on;

function y = Quocanh(u,a)
A = 1./sqrt(2*pi).*exp((-u-a).^2/2);
B = log2(2./(1 + exp(-2*a*u)));
y = A.*B;
```

**Bài tập 4:****[So sánh phương pháp quyết định cứng và quyết định mềm]**

Kênh đầu vào có hai mức  $\pm A$ . Đầu ra của kênh là tổng của tín hiệu vào và tạp âm AWGN có trung bình không và phương sai  $\sigma^2$ . Kênh này được dùng trong hai trường hợp.

Trường hợp 1: Dùng đầu ra trực tiếp mà không thực hiện lượng tử hoá (quyết định cứng).

Trường hợp 2: Quyết định tối ưu được thực hiện trên mỗi mức đầu vào (quyết định mềm).

Vẽ dung lượng kênh theo (hàm của)  $A/\sigma$  trong mỗi trường hợp.

**Giải:**

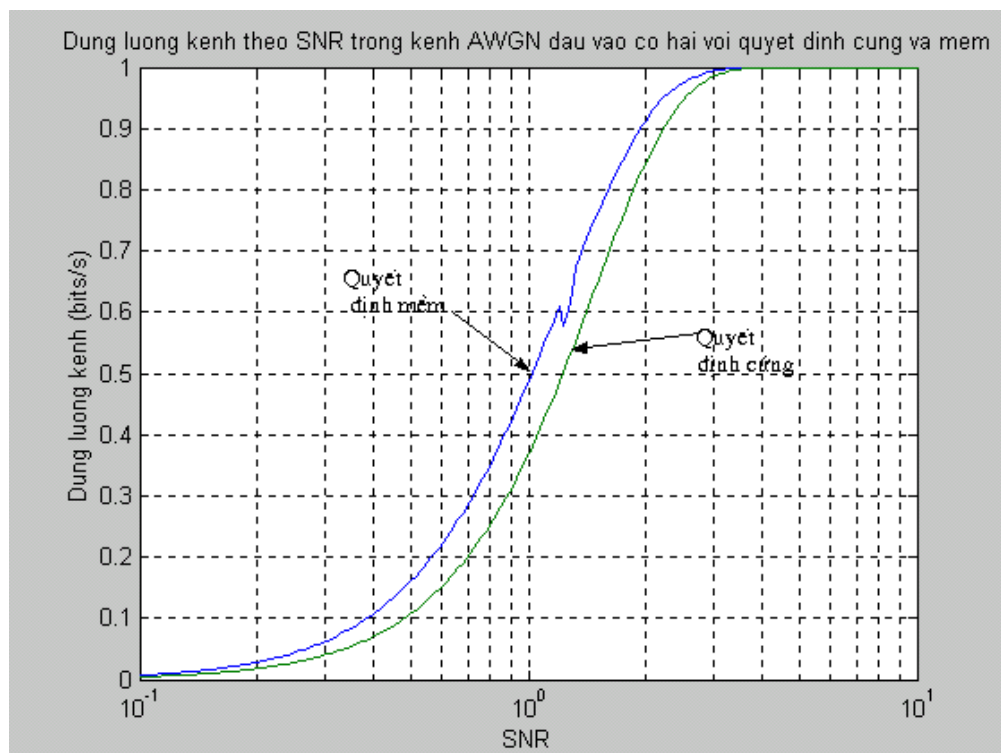
Trường hợp quyết định mềm tương tự như bài tập 3.

Trường hợp quyết định cứng, xác suất chéo của kênh BSC là  $Q(A/\sigma)$ . Vì vậy, dung lượng kênh được cho bởi.

$$C_H = 1 - H_b\left(Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)$$

Cả  $C_H$  và  $C_S$  đều được cho ở hình 2.8. Đầu ra giải mã quyết định mềm thực hiện tốt hơn giải mã quyết định cứng tại tất cả các giá trị  $A/\sigma$ , như được thấy.

**Chương trình Matlab thực hiện bài tập này được cho ở File: CS84.**



**Hình 2.8: Dung lượng kênh quyết định cứng  $C_H$  và quyết định mềm  $C_S$  theo SNR  $=A/\sigma$**

| Chương trình Matlab thực hiện bài tập này được cho ở File: CS84   |
|---|
| <pre> function y=CS84()  a_dB=[-13:0.1:13]; a=10.^(a_dB/10);  p = Q(a);  k=length(p); for i=1:k     h = -p.*log2(p)-(1-p).*log2(1-p); end  c_hard = 1.- h;  for i=1:length(a)      f(i) = quad(@Quocanh , a(i)-5 , a(i)+5 , 1e-3 , [] , a(i) );      g(i) = quad(@Quocanh , -a(i)-5 , -a(i)+5 , 1e-3 , [] , -a(i) );      c_soft(i) = 0.5*f(i) + 0.5*g(i);  end  semilogx(a,c_soft,a,c_hard);  title('Dung luong kênh theo SNR trong kênh AWGN dau vao co hai voi quyet dinh cung va mem'); xlabel('SNR'); ylabel('Dung luong kênh (bits/s)'); axis([0.1 10 0 1]); grid on;  function y = Quocanh(u,a) A = 1./sqrt(2*pi).*exp(-(u-a).^2)/2); B = log2(2./(1 + exp(-2*a*u))); y = A.*B; </pre> |

### **Bài tập 5:**

**[Dung lượng kênh theo độ rộng băng và SNR]**

Dung lượng của kênh AWGN hạn chế băng có công suất không đổi  $P$  và độ rộng băng  $B$  được cho bởi.

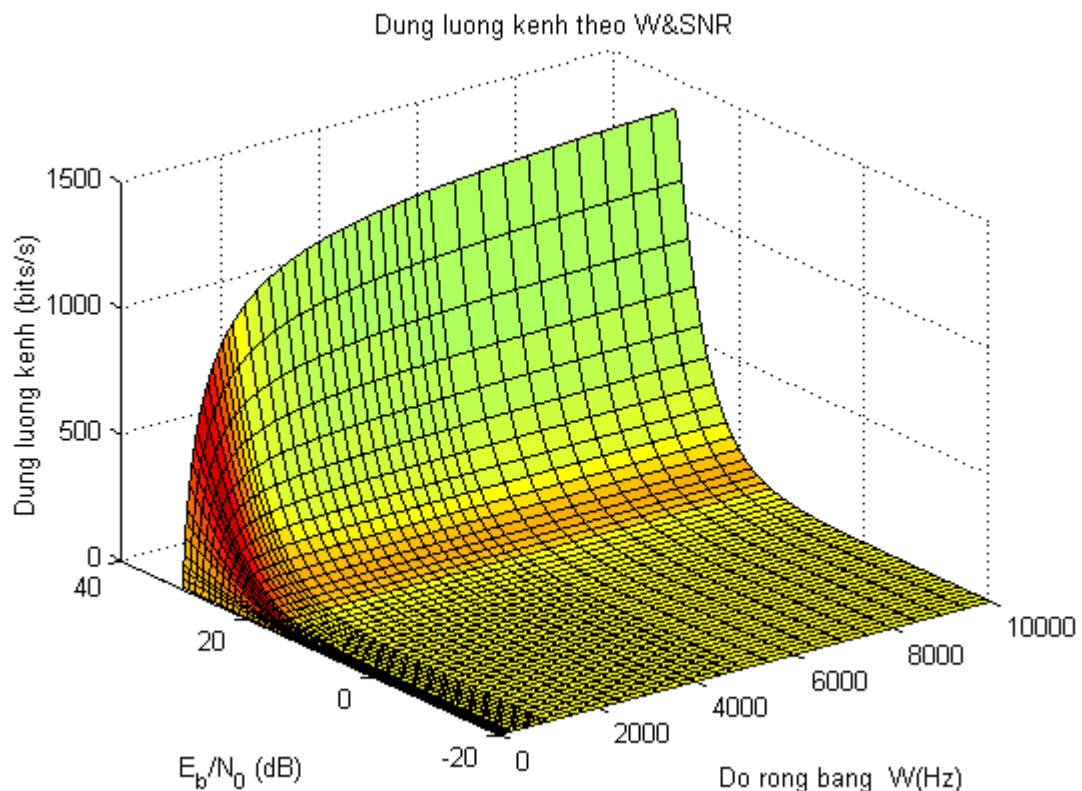
$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0 B} \right)$$

Vẽ dung lượng kênh như hàm của cả hai thông số  $B$  và SNR (hay  $P/N_0$ ).

**Giải:**

Kết quả vẽ được cho ở hình 2.9. Lưu ý rằng, khi SNR không đổi thì việc vẽ chuyển thành hình 2.6. Khi  $B$  không đổi thì việc vẽ chuyển thành hình 2.5.

**Chương trình Matlab thực hiện bài tập này được cho ở File: CS85.**



**Hình 2.9: Dung lượng kênh như hàm của hai thông số độ rộng băng  $B$  và tỉ số tín hiệu trên tạp âm SNR trong kênh AWGN**

**Chương trình Matlab thực hiện bài tập này được cho ở File: CS85**

```
function y = CS85
```

```
w=[1:5:20, 25:20:100, 130:50:300, 400:100:1000, 1250:250:5000, 5500:500:10000];
```

```
SNR_dB = [-20:1:30];
```

```
SNR = 10.^(SNR_dB/10);
```

```

for i=1:45
    for j=1:51,
        c(i,j) = w(i) * log2(1 + SNR(j) / w(i) );
    end
end

k=[0.9, 0.8, 0.5, 0.6];
s=[-70, 35];
surfl(w,SNR_dB,c',s,k);
ylabel('E_b/N_0 (dB)');
xlabel('Do rong bang W(Hz)')
zlabel('Dung luong kênh (bits/s)')
title('Dung luong kênh theo W&SNR');

```

**Bài tập 6:****Dung lượng kênh AWGN rời rạc**

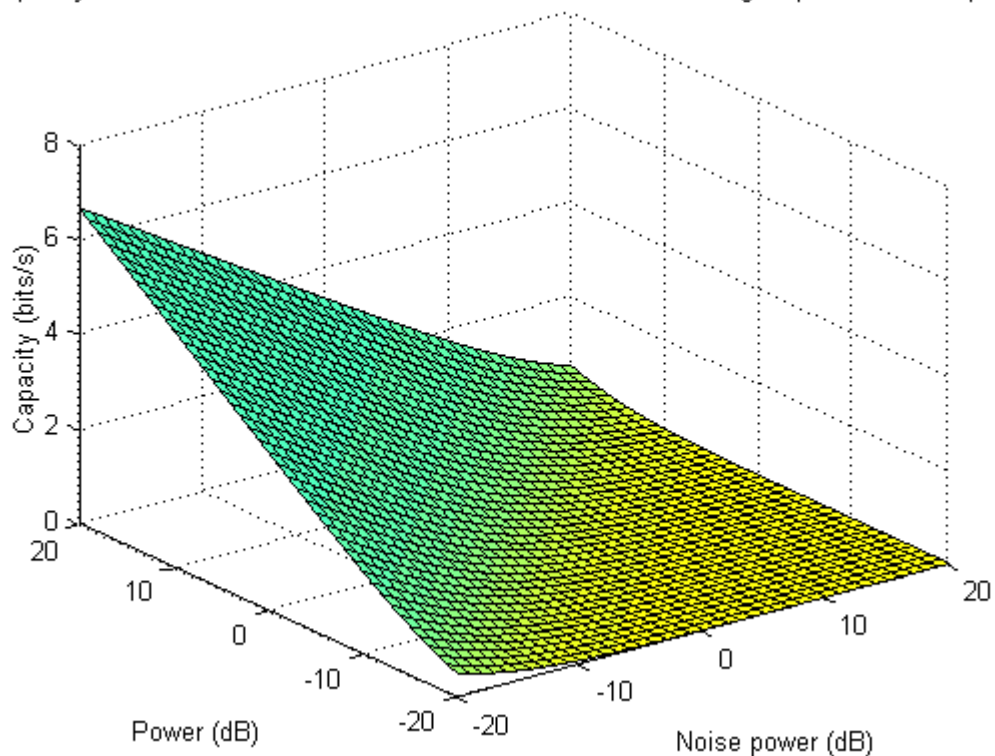
Hãy vẽ dung lượng kênh AWGN rời rạc nh- là hàm của công suất đầu vào và ph-ong sai tạp âm.

**Giải:**

Kết quả vẽ đ-ọc cho ở hình 2.10.

**Chương trình Matlab thực hiện bài tập này đ-ọc cho ở File: CS86.**

Capacity of the discrete-time AWGN channel as function of the signal power & noise power



**Hình 2.10: Dung lượng kênh AWGN rời rạc nh hàm của công suất tín hiệu (P) và công suất tạp âm ( $\sigma^2$ )**

**Chương trình Matlab thực hiện bài tập này được cho ở File: CS86**

```
function y = CS86

p_dB=-20:1:20;
np_dB=p_dB;
p=10.^(p_dB/10);
np=p;

for i=1:41,
    for j=1:41,
        c(i,j)=0.5*log2(1+p(j)/np(i));
        echo off;
    end
end
echo on;

k=[0.9, 0.8, 0.5, 0.6];
s=[-70, 35];

surfl(np_dB,p_dB,c',s,k);

ylabel('Power (dB)');
xlabel('Noise power (dB)')
zlabel('Capacity (bits/s)')
title('Capacity of the discrete-time AWGN channel as function of the signal power & noise power');
```