PHỤ LỤC 4B

Phổ và công cụ phân tích phổ - Hệ thống tuyến tính bất biến

Giới thiệu

Đề cập các công cụ và kỹ thuật cơ bản để phân tích tín hiệu & hệ thống viễn thông thông qua việc phân tích hệ thống tuyến tính. Để nghiên cứu khảo sát tín hiệu & hệ thống viễn thông, cần phải hiểu rõ các hệ thống tuyến tính và các đặc tính của nó trong miền tần số và miền thời gian, cùng với xác suất và phân tích tín hiệu ngẫu nhiên. Hầu hết các khối chức năng trong hệ thống truyền thông (kênh thông tin, các khối con của máy phát và máy thu) đều có thể được mô hình hoá một cách tường minh dưới dạng hệ thống tuyến tính bất biến LTIV. Vì thế các kỹ thuật và công cụ được dùng vào việc phân tích hệ thống tuyến tính đều có thể được dùng trong quá trình phân tích chúng. Phần này, tập chung nhấn mạnh công cụ phân tích tín hiệu và hệ thống trong miền tần số. Bắt đầu từ chuỗi Fourier và biến đổi Fourier FT, sau đó đề cập các khái niệm năng lượng và công suất, lấy mẫu, và sự thể hiện thông thấp của tín hiệu thông dải.

2.1 Chuỗi Fourier

Quan hệ tín hiệu vào/ra của hệ tuyến tính bất biến LTIV được xác định bởi tích chập (1.2.1)

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).x(t-\tau)d\tau \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

trong đó: *h(t), x(t), y(t)* là đáp ứng xung, tín hiệu vào (kích thích), tín hiệu ra (đáp ứng ra) của hệ thống.

Nếu *x(t)* là một hàm mũ phức được cho bởi

$$x(t) = A.e^{j2\pi f_0 t} \tag{1.2.2}$$

thì tín hiệu ra được xác định bởi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A.e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} h(\tau)d\tau = \underbrace{A.e^{j2\pi f_0 t}}_{x(t)} . \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau \right] \tag{1.2.3}$$

Nói cách khác, đầu ra là hàm mũ phức có cùng tần số đầu vào, nhưng biên độ (phức) tín hiệu ra là biên độ (phức) của tín hiệu vào được khuyếch đại bởi hệ số khuyếch đại

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau).e^{-j2\pi f_0\tau} d\tau\right]$$

Thấy rõ, đáp ứng ra *y(t)* là một hàm của đáp ứng xung của hệ LTIV *h(t)* và tần số của tín hiệu vào $f_0 \Leftrightarrow y(t) = K.x(t)$ với $K = f\left(h(t), f_0\right) \Rightarrow$ dễ dàng tìm tín hiệu đầu ra *y(t)* của hệ LTIV đối với tín hiệu vào mũ. Vì vậy, nó là bản chất trong quá trình phân tích hệ LTIV, để tìm các phương pháp khai triển các tín hiệu dưới dạng tổng các mũ phức. Chuỗi Fourier và biến đổi Fourier (FT) là các kỹ thuật để khai triển các tín hiệu dưới dạng mũ phức.

- **Dạng 1- chuỗi Fourier dạng mũ:** Áp dụng cho cả tín hệu tuần hoàn giá trị thực và giá trị phức. Chuỗi Fourier mũ là sự khai triển ***trực giao*** của các tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ T_0 khi tập tín hiệu $\left\{e^{j2\pi nf_0t}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ được dùng làm cơ sở khai triển, và được áp dụng cho tín hiệu tuần hoàn giá trị thực và phức. Theo đó, bất kỳ một tín hiệu tuần hoàn *x(t)* có chu kỳ T_0 thoả mãn điều kiện Dirilet đều có thể được biểu diễn là

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.e^{j2\pi nf_0t} \tag{1.2.4}$$

Trong đó, x_n được gọi là hệ số chuỗi Fourier của *x(t),* và được cho bởi

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t} dt \tag{1.2.5}$$

Ở đây α là một hằng số tuỳ ý được chọn sao cho khi tính tích phân được đơn giản. Tần số $f_0=1/T_0$ được gọi là tần số cơ bản của tín hiệu tuần hoàn, tần số $f_n= n\times f_0$ được gọi là hai bậc thứ *n*. Đa số chọn $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = -T_0/2$.

Loại chuỗi Fourier này được xem là ***chuỗi Fourier mũ*** và đều có thể được áp dụng cho cả tín hiệu *x(t)* ***giá trị thực*** và ***phức*** miễn sao chúng là các tín hiệu tuần hoàn. Ở dạng tổng quát, các hệ số chuỗi Fourier $\{x_n\}$ là các số phức cả khi *x(t)* là tín hiệu giá trị thực.

- ***Nếu x(t) là tín hiệu giá trị thực, thì***

$$\left.\begin{aligned} x_{-n} &= \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t.}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\underbrace{\left[\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t.}dt\right]^*}_{x_{\text{Im}}(t)\ =0,\ \text{hàm cos là hàm chẵn}} \\ &= x^*_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{-n} = x^*_n \qquad (1.2.6)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\begin{cases} |x_n| & = |x_{-n}| \\ \angle - x_n & = -\angle x_{-n} \end{cases}}_{\text{Ở dạng tổng quát, hệ số chuỗi là số phức}} \qquad (1.2.7)$$

⇒ Vì vậy, các hệ số chuỗi Fourier của một tín hiệu giá trị thực có tính chất *đối xứng Hermirian*-nghĩa là phần thực của nó là hàm chẵn và phần ảo là hàm lẻ (***biên độ của chúng là hàm chẵn và pha của chúng là hàm lẻ***).

❖ **Dạng 2-Chuỗi Fourier dạng lượng giác**: Chỉ áp dụng cho các tín hiệu tuần hoàn giá trị thực, bằng cách định nghĩa

$$x_n = \frac{a_n + jb_n}{2} \qquad (2.1.8)$$

$$x_{-n} = \frac{a_n - jb_n}{2} \qquad (2.1.9)$$

theo quan hệ Euler

$$e^{-j2\pi nt/T_0} = \cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) - j\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) \qquad (1.2.10)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right).dt \\ b_n &= \frac{2}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right).dt \end{aligned} \qquad (1.2.11)$$

vì vậy,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) + b_n\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right) \qquad \underline{\mathbf{(1.2.12)}}$$

Lưu ý rằng với $n = 0$, ta luôn có $b_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 2x_0$.

❖ **Dạng 3-chuỗi Fourier lượng giác**: Cũng chỉ áp dụng đối với các tín hiệu tuần hoàn giá trị thực. Bằng cách định nghĩa

$$\begin{cases} c_n = \sqrt{a_n^{\;2} + b_n^{\;2}} \\ \theta_n = -\arctan \dfrac{b_n}{a_n} \end{cases} \tag{2.1.13}$$

từ quan hệ

$$a.cos\phi + b.sin\phi = \sqrt{a^2 + b^2}.cos\underbrace{\left(\phi - \arctan\frac{b}{a}\right)}_{\text{để ý}} \tag{2.1.14}$$

⇒ viết phương trình (1.2.12) ở dạng

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T_0} t + \theta_n\right) \tag{2.1.15}$$

Ở dạng tổng quát, các hệ số Fourier $\{x_n\}$ của các tín hiệu tuần hoàn giá trị thực được liên hệ với a_n, b_n, c_n và θ_n thông qua

$$\begin{cases} a_n = 2\,\mathrm{Re}\left[x_n\right] \\ b_n = -2\,\mathrm{Im}\left[x_n\right] \\ c_n = \left|x_n\right| \\ \theta_n = \angle x_n \end{cases} \tag{2.1.16}$$

Khảo sát $|x_n|$ và $\angle x_n$ theo *n* (hoặc nf_0) được gọi là phổ rời rạc của *x(t)*. Khảo sát $|x_n|$ được gọi là phổ biên độ, và khảo sát $\angle x_n$ được coi là phổ pha.

➢ ***Nếu x(t) là tín hiệu thực chẵn*** **-** nghĩa là, nếu *x(-t) = x(t)* và lấy $\alpha = -T_0/2$, ta có

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{x(t).\sin\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)}_{\text{là hàm lẻ của t}} dt \;\; = 0 \tag{1.2.17}$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{a_n}{2}$$

⇔ ***Nếu*** tín hiệu *x(t)* là *thực chẵn*, ***thì*** tất cả các hệ số x_n của *x(t)* đều là thực. Khi này, chuỗi Fourier lượng giác gồm tất cả các hàm **cosine**

➢ ***Nếu x(t) là tín hiệu thực lẻ*** **-** nghĩa là nếu *x(- t) = -x(t)* thì

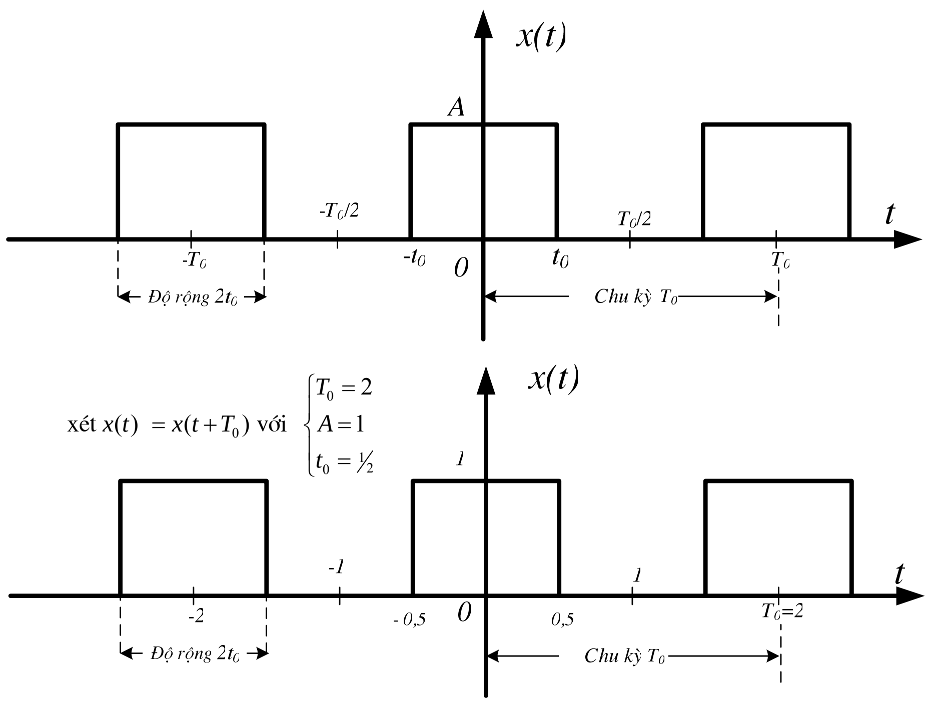
$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{x(t).\cos\left(2\pi\frac{n}{T_0}t\right)}_{\text{là hàm lẻ của t}} dt \; = 0 \tag{1.2.18}$$

$$\Rightarrow x_n = j\frac{b_n}{2}$$

⇔ ***Nếu*** tín hiệu *x(t) thực lẻ*, ***thì*** tất cả các hệ số x_n của *x(t)* đều là ảo. Khi này, chuỗi Fourier lượng giác gồm tất cả các hàm **sine**.

Bài tập NVD4B_sim1:

CHUỖI FOURIER CỦA DÃY TÍN HIỆU CHỮNHẬT



Hình 1.1 Tín hiệu *x(t)*

Cho tín hiệu tuần hoàn *x(t)* có chu kỳ T_0 được định nghĩa bởi

$$x(t) = A\prod\left(\frac{t}{2t_0}\right) = \begin{cases} A, & |t| < t_0 \\ \dfrac{A}{2}, & t = \pm t_0 \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases} \tag{1.2.19}$$

Với $|t| \leq T_0/2$, trong đó $t_0 < T_0/2$. Tín hiệu xung chữ nhật $\prod(t)$ thường được định nghĩa bởi

$$\prod(t)=\begin{cases}1, & |t|<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & t=\pm\frac{1}{2}\\ 0, & \text{nếu khác}\end{cases} \tag{1.2.20}$$

Vẽ *x(t)* được cho ở hình 1.1. *Nếu A=1,*T_0*=4 và* t_0*=1*

1. Xác định các hệ số chuỗi Fourier ở dạng lượng giác và mũ.
2. Vẽ phổ rời rạc của *x(t)*.

Lời giải:

1. Xác định các hệ số chuỗi Fourier ở dạng lượng giác và mũ

Từ việc khai triển các hệ số chuỗi Fourier của *(t)*, ta có

$$x_n=\frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t).e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t}dt$$

thành phần một chiều DC: $x_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t).dt=\frac{1}{2}\int_{-0,5}^{0,5}(1).dt=\frac{1}{2}$

$$x_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t).e^{-j2\pi nt/T_0}dt \quad =\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t).e^{-j2n\pi t/2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5}e^{-jn\pi t}dt \quad =-\frac{1}{j2n\pi}e^{-jn\pi t}\Big|_{t=-0.5}^{t=0.5}$$

$$=-\frac{1}{j2n\pi}\left(-j\sin\frac{n\pi}{2}-j\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)}{\left(\pi\frac{n}{2}\right)}$$

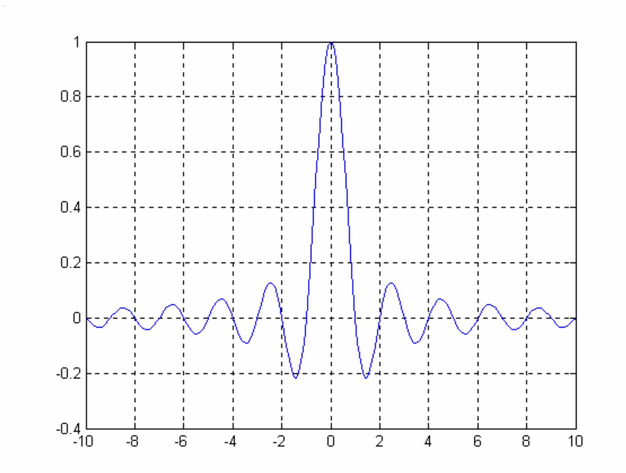
$$=\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right),$$

$$=\begin{cases}0, & n=\pm2,\pm4,\ldots\\ \frac{1}{n\pi}(-1)^{\left|(k-1)/2\right|}, & n=\pm1,\pm3,\ldots\end{cases} \tag{1.2.21 \& 1.2.22}$$

Hàm *sinc(x)* được định nghĩa như sau

$$sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{1.2.23}$$

Hàm *sinc(x)* được cho ở hình 1.2.



Hình 1.2 Tín hiệu *sinc(x)*

Thấy rõ, tất cả các hệ số của x_n là **thực** *(vì x(t) là thực chẵn)*, vì vậy

$$\begin{cases} a_n = \sin c\left(\frac{n}{2}\right) \\ b_n = 0 \\ c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad = \left|\sin c\left(\frac{n}{2}\right)\right| \\ \theta_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \qquad = 0.\ \pi \end{cases} \tag{1.2.24}$$

Lưu ý rằng, khi n chẵn, thì $x_n = 0$ (trừ n=0 khi đó $a_0 = c_0 = 1$ và x_0 =1/2). Thay các hệ số này vào (1.2.4), ta có

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right)}_{x_n=0,\ \text{khi } n \text{ chẵn}}.e^{j2\pi\frac{n}{2}t} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right).cos(n\pi t)}_{\text{do } b_n=0,\ \text{và } x_n=0 \text{ khi } n \text{ chẵn} \neq 0} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ lẻ}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\cos\left(n\pi t + \left[(-1)^{(n-1)/2} - 1\right]\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.2.25}$$

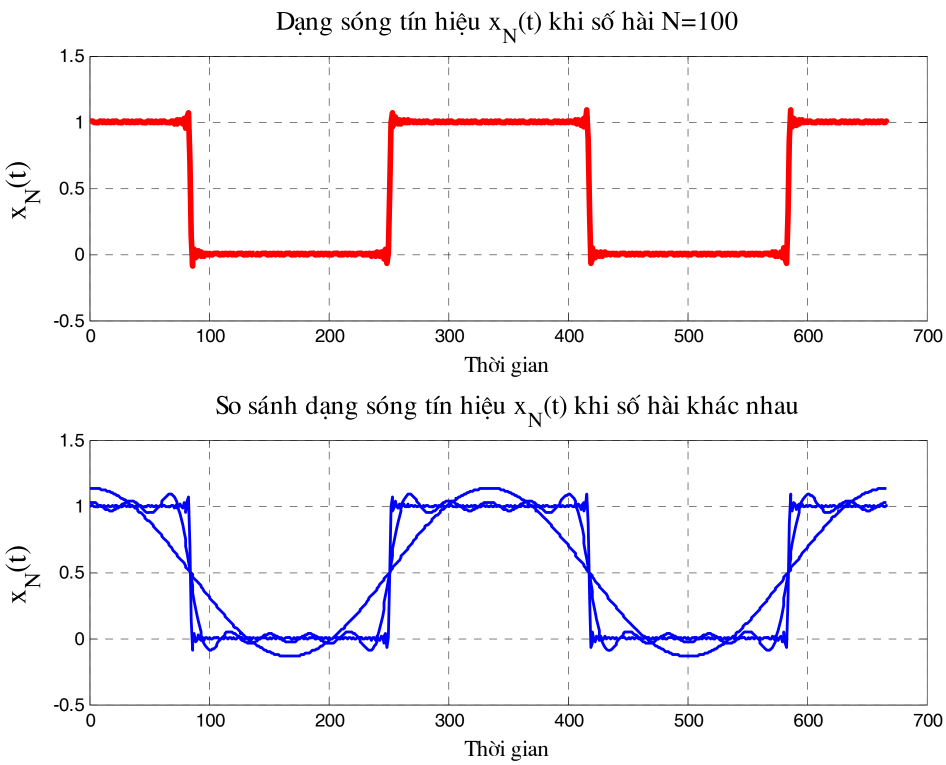
❑ **Nhận xét**: Từ kết quả cho thấy chuỗi xung chữ nhật tuần hoàn có chu kỳ T_0 chứa *tổng vô hạn* các hàm điều hoà (là bội số của tần số cơ bản $f_0=1/T_0$). Cần phải nêu bật quan hệ giữa chuỗi xung chữ nhật tuần hoàn và các hàm điều hoà được phân tích từ nó, và ứng dụng trong thực tế. Ta lưu ý rằng, do các phần tử và hệ thống viễn thông điều có độ băng tần hữu hạn, nên khi cho xung vuông qua chúng, xung này sẽ bị loại bỏ một số thành phần tần số (hệ thống làm mất một số thành phần tần số chứa trong xung này). Vì thế cần phải xét $x(t)$ theo số hàm điều hoà N.

Nếu ký hiệu N là số các hàm điều hoà chứa trong chuỗi xung chữ nhật $x_N(t)$, thì x(t) được xác định bởi

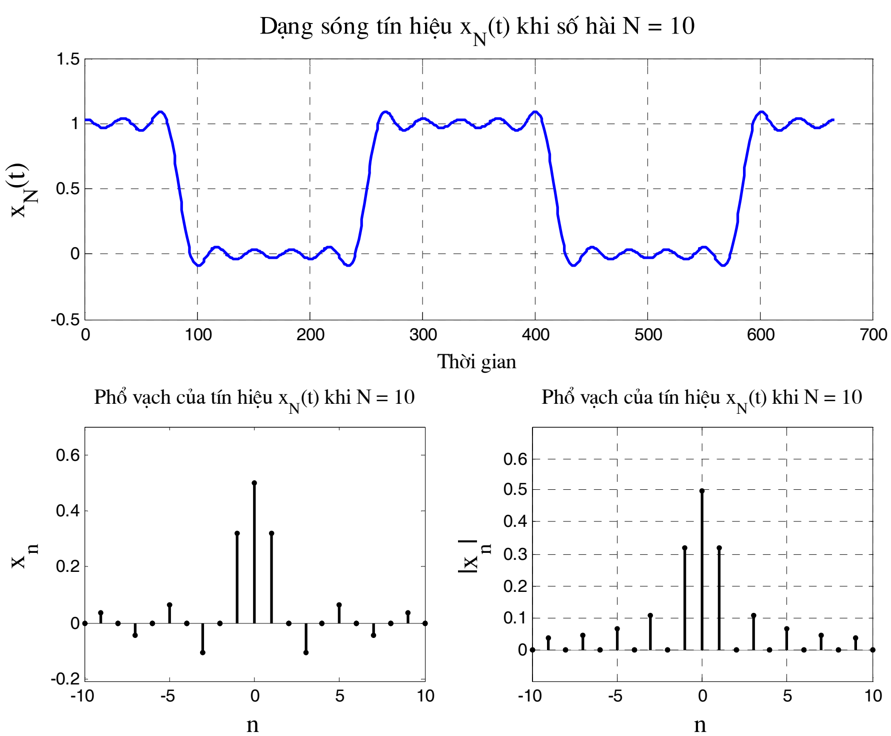
$$x_N(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{lẻ}}}^{N}\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\pi t+\left[(-1)^{(n-1)/2}-1\right]\frac{\pi}{2}\right),\qquad -\infty<t<\infty \tag{1.2.26}$$

Theo định lý của Fourier, thì $x_N(t)$ hội tụ về $x(t)$ khi $N\Rightarrow\infty$. Nói cách khác, $|x_N(t)-x(t)|$ về không với $\forall$t khi N tăng $\Leftrightarrow$ khi N có giá trị càng lớn thì phép lấy xấp xỉ càng chính xác. Vẽ xấp xỉ chuỗi Fourier cho tín hiệu này trên một chu kỳ tín hiệu với n = 1,9,100 được cho ở hình 1.3. Chương trình Matlab được cho ở file **NVD4B_sim1.m** trong phụ lục 4A

<table>
<tr><th colspan="2">Tổng kết các công thức mô phỏng</th></tr>
<tr><td>Chuỗi xung chữ nhật chứa tổng vô hạn các hàm điều hoà</td><td>Chuỗi xung chữ nhật chứa tổng hữu hạn các hàm điều hoà</td></tr>
<tr><td>$$\begin{aligned}x(t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right)}_{x_n=0,\ \text{khi } n \text{ chẵn}}.e^{j2\pi\frac{n}{2}t}\\&=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right).cos(n\pi t)}_{\text{do } b_n=0,\text{ và } x_n=0 \text{ khi } n \text{ chẵn}\neq 0}\\&=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{lẻ}}}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\pi t+\left[(-1)^{(n-1)/2}-1\right]\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$</td><td>$$x_N(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{lẻ}}}^{N}\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\pi t+\left[(-1)^{(n-1)/2}-1\right]\frac{\pi}{2}\right),$$ $$-\infty<t<\infty$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$x_n=\frac{1}{n\pi}\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\pi\frac{n}{2}\right)}{\left(\pi\frac{n}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n}{2}\right)=\begin{cases}0, & n=\pm2,\pm4,\dots\\ \frac{1}{n\pi}(-1)^{\left|(k-1)/2\right|}, & n=\pm1,\pm3,\dots\end{cases}$$ $$sinc(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$</td></tr>
</table>



Hình 1.3 Khảo sát xung chữ nhật theo số lượng sóng hài



Hình 1.4 Dạng sóng và phổ rời rạc của tín hiệu $x_N(t)$

2. Vẽ phổ rời rạc của x(t)

Lưu ý x_n ***luôn là thực***. Vì vậy, tùy vào dấu của nó, mà pha bằng 0 hay π. Độ lớn $x_n = \frac{1}{2}\left|\sin c\left(\frac{n}{2}\right)\right|$. Phổ rời rạc của *x(t)* được cho ở hình 1.4.

```
function y = NVD4B_sim1
% file NVD4B_sim1.m
clc;
clear all;
t   =   -2:6/1000:2;
N   =   input('Nhap so hai =    ');
c0  =   0.5;
w0  =   pi;
xN  =   c0*ones(1,length(t));  % DC Compoment
for k=1:2:N                     % Odd function
    theta = ((-1)^((k-1)/2)-1)*pi/2;
    xN = xN + 2/k/pi*cos(k*w0*t + theta);
end
%===========================================
h1 = figure(1)
set(h1,'color','c','Name','H4B.1.3: NVD');

subplot(2,2,1:2);
plot(1:length(xN),xN,'LineWidth',2);
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','FontSize',12);
ylabel('x_N(t)','FontName','.VnTime','FontSize',16);
title([ 'Dạng sóng tín hiệu x_N(t) khi số hài N = ',...
    num2str(N)],'FontName','.VnTime','FontSize',14);
grid on;
n       =   [-N:1:N];
x_n1    =   0.5*sinc(n/2);
x_n2    =   0.5*abs(sinc(n/2));

subplot(2,2,3);
stem(n,x_n1,'.k','LineWidth',2);
xlabel('n','FontName','.VnTime','FontSize',14);
ylabel('x_n','FontName','.VnTime','FontSize',16);
axis([min(n) max(n) min(x_n1)-0.1 max(x_n1)+0.2])
title([ 'Phổ vạch của tín hiệu x_N(t) khi N = ',...
    num2str(N)],'FontName','.VnTime','FontSize',12);

subplot(2,2,4)
stem(n,x_n2,'.k','LineWidth',2);
xlabel('n','FontName','.VnTime','FontSize',14);
ylabel('|x_n|','FontName','.VnTime','FontSize',16);
title([ 'Phổ vạch của tín hiệu x_N(t) khi N = ',...
    num2str(N)],'FontName','.VnTime','FontSize',12);
axis([min(n) max(n) min(x_n2)-0.1 max(x_n2)+0.2])
grid on;
%================================================
h2 = figure(2);     % Compared figure
set(h2,'color','g','Name','H4B.1.3: NVD');
subplot(211)
plot(1:length(xN),xN,'r','LineWidth',3);
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','FontSize',12);
ylabel('x_N(t)','FontName','.VnTime','FontSize',16);
title([ 'Dạng sóng tín hiệu x_N(t) khi số hài
N=',num2str(N)],'FontName','.VnTime','FontSize',14);
```

```
grid on;

subplot(212)
plot(1:length(xN),xN,'LineWidth',1.5);
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','FontSize',12);
ylabel('x_N(t)','FontName','.VnTime','FontSize',16);
title('So sánh dạng sóng tín hiệu x_N(t) khi số hài khác
nhau','FontName','.VnTime','FontSize',14);
grid on;
hold on;
```

1.2.1. Tín hiệu tuần hoàn & hệ thống tuyến tính bất biến LTIV

Nếu cho tín hiệu tuần hoàn *x(t)* qua hệ LTIV như hình 1.5, thì tín hiệu ra *y(t)* cũng là tín hiệu tuần hoàn, có cùng tần số với tín hiệu vào $\Rightarrow$ vì vậy có khai triển chuỗi Fourier.

Hình 1.5. Cho tín hiệu tuần hoàn qua hệ thống tuyến tính bất biến LTIV

Nếu *x(t)* và *y(t)* được khai triển là

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \tag{1.2.26}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n . e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \tag{1.2.27}$$

thì ta có thể tìm được quan hệ giữa các hệ số chuỗi Fourier của *x(t)* và *y(t)* bằng cách dùng tích phân chập

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.e^{j2\pi \frac{n}{T_0}(t-\tau)} h(\tau)d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi \frac{n}{T_0}\tau} d\tau \right) e^{j2\pi \frac{n}{T_0}t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0}t}
\end{aligned}
\tag{1.2.28}
$$

Từ mối quan hệ trước ta có

$$y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) \tag{1.2.29}$$

trong đó *H(f)* là hàm truyền đạt (đáp ứng tần số) của hệ LTIV, là biến đổi Fourier của đáp ứng xung *h(t)*; nghĩa là

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t).e^{-j2\pi ft} dt \tag{1.2.30}$$

Bài tập NVD4B_sim2:

LỌC CÁC TÍN HIỆU TUẦN HOÀN

Cho chuỗi xung tam giác *x(t)* có chu kỳ T_0=2 được xác định trong một chu kỳ như

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \le t \le 0 \\ -t+1, & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \tag{1.2.31}$$

Hãy

1. Xác định hệ số Fourier của x(t).

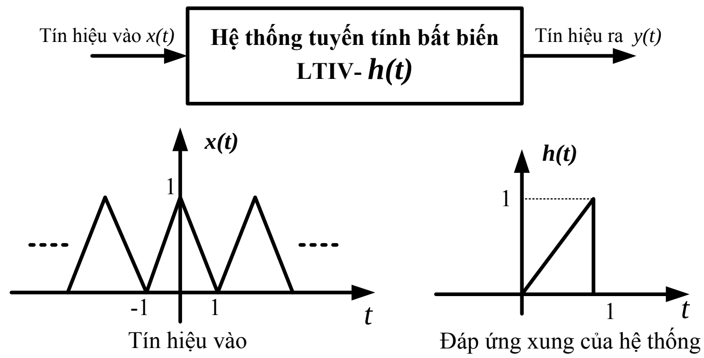
2. Vẽ phổ rời rạc của x(t).

3. Giả sử cho tín hiệu này qua hệ thống LTIV có đáp ứng xung được cho bởi

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases} \tag{1.2.32}$$

Vẽ phổ rời rạc và tín hiệu đầu ra *y(t)*.

Biết rằng, dạng sóng của *x(t)* và *h(t)* được cho bởi hình 1.6



Hình 1.6. Tín hiệu vào *x(t)* và đáp ứng xung của hệ thống *h(t)*

Lời giải:

❖ ***Hệ số chuỗi Fourier của x(t) được xác định bởi***

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi nt/T_0}dt \qquad (1.2.33)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Lambda(t)e^{-j\pi nt}dt \qquad (1.2.34)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(t)e^{-j\pi nt}dt \qquad (1.2.35)$$

$$= \frac{1}{2}\Im\left[\Lambda(t)\right]_{f=n/2} \qquad (1.2.36)$$

$$= \frac{1}{2}\sin c^2\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (1.2.37)$$

cần lưu ý rằng, khoảng bên ngoài [-1,1] được loại bỏ, và biến đổi Fourier của *Λ(t)* là *sinc²(f)*. Kết quả này cũng có thể đạt được bằng cách dùng biểu thức *Λ(t)* và thực hiện lấy tích phân từng phần theo định nghĩa FT thông thường. Thấy rõ, $x_n = 0$ với $\forall$ giá trị của *n chẵn* trừ *n* = 0.

❖ ***Phổ rời rạc của x(t) và y(t) được cho ở hình 1.8, kết quả chạy chương trình***

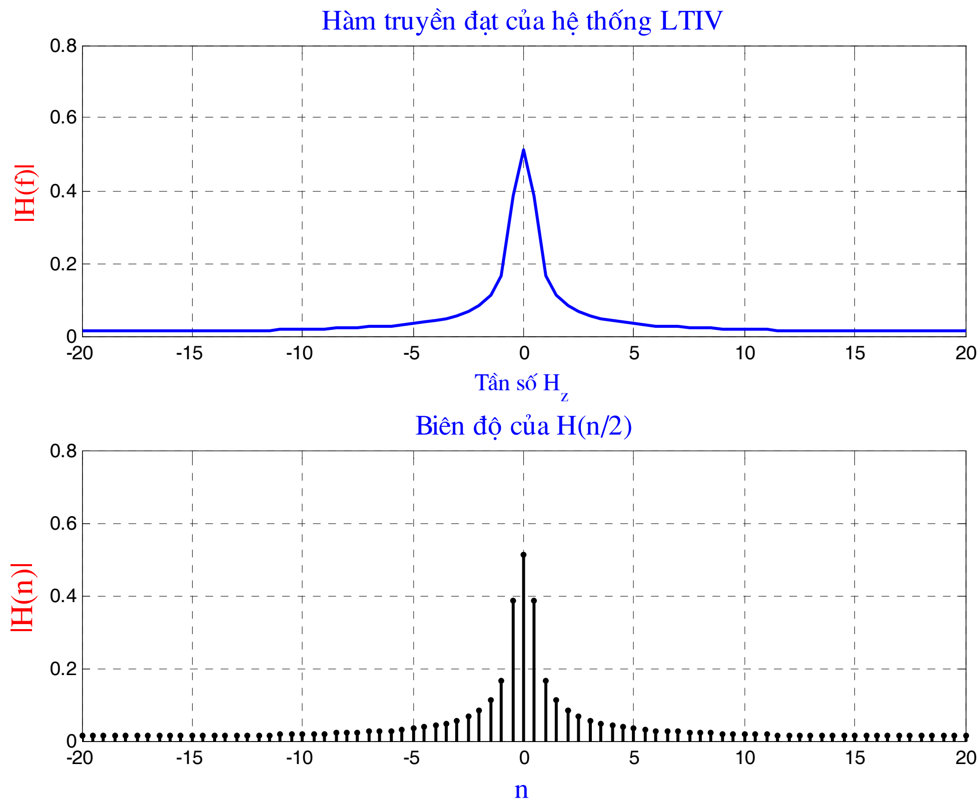
Trước hết, phải xuất phát từ hàm truyền đạt của hệ thống *H(f)*. Mặc dù có thể tìm được bằng phương pháp giải tích, nhưng ta sẽ làm theo phương pháp số ⇒ kết quả biên độ của hàm truyền đạt là $H\left(n/T_0\right) = H\left(n/2\right)$ được cho ở hình 1.7.

Sau đó, tìm phổ rời rạc đầu ra *y(t)* bằng quan hệ

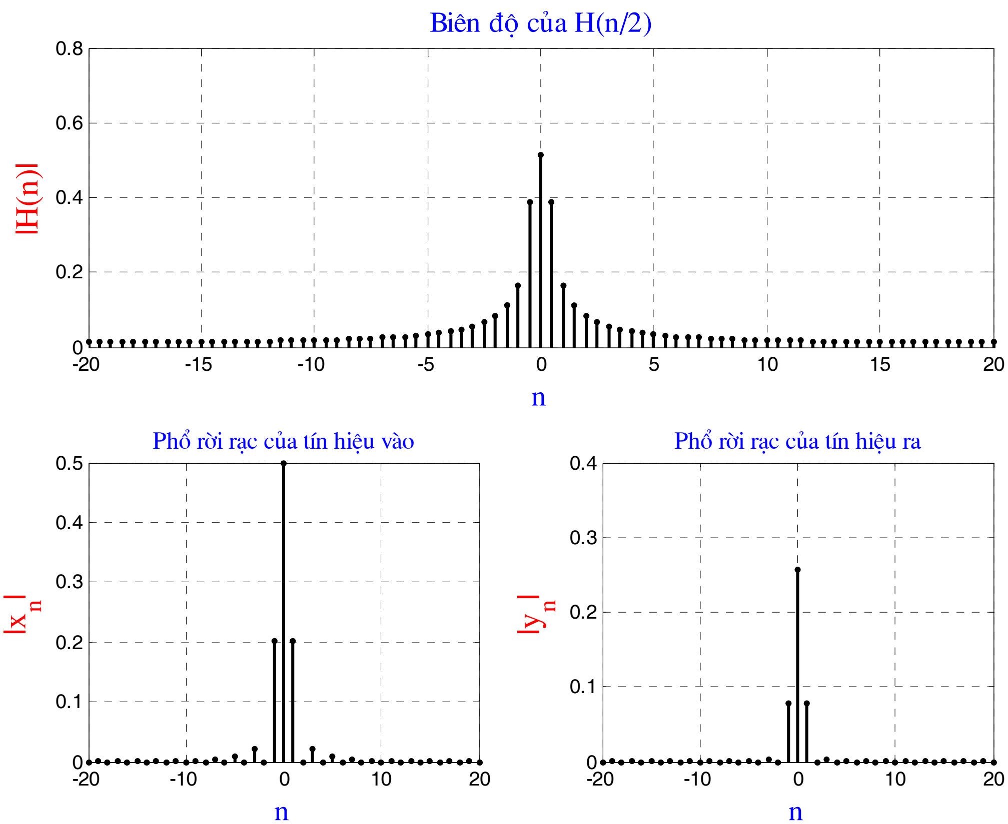
$$y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) \qquad (1.2.38)$$

$$= \frac{1}{2}\sin c^2\left(\frac{n}{2}\right)H\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (1.2.39)$$

Kết quả phổ rời rạc đầu ra được cho ở hình 1.8 là kết quả chạy chương trình. Chương trình Matlab được cho ở File **NVD4B_sim2.m.**



Hình 1.7. Hàm truyền đạt của hệ thống LTIV và độ lớn của *H(n/2)*



Hình 1.8. Phổ rời rạc của tín hiệu vào và ra

```
function k = NVD4B_sim2
% File NVD4B_sim2.m = CS14qa.m

clc;
close all;
clear all;
n        =   [-20:1:20];
x        =   0.5*(sinc(n/2)).^2; % fourier series coefficients of x(t) vector.
ts       =   1/40;               % Sampling interval
t        =   [-0.5:ts:1.5];      % Time vector
% Impluse response
fs       =   1/ts;
h        =   [zeros(1,20),t(21:61),zeros(1,20)];
% Transfer function
H        =   fft(h)/fs;
df       =   fs/80;              % frequency resolution
f        =   [0:df:fs]-fs/2;
% Rearrange H
H1       =   fftshift(H);
y        =   x.*H1(21:61);

%============================================================
h1_11 = figure(1)
set(h1_11,'color','c','Name','H1.11. Simulation Results of NVD4B_sim2 Program:
NVD');
subplot(2,1,1);
```

```
    plot(f,abs(H1),'LineWidth',2);
    xlabel('Tần số H_z','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
    ylabel('|H(f)|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',14);
    title('Hàm truyền đạt của hệ thống LTIV',...
        'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14);
    grid on
subplot(2,1,2);
    stem(f,abs(H1),'.k','LineWidth',2);
    xlabel('n','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14)
    ylabel('|H(n)|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',16)
    title('Biên độ của H(n/2)',...
        'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14);
    grid on
%============================================================
h1_12 = figure(2)
set(h1_12,'color','c','Name','H1.12. Simulation Results of NVD4B_sim2 Program:
NVD');
subplot(2,2,1:2);
    stem(f,abs(H1),'.k','LineWidth',2);
    xlabel('n','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14)
    ylabel('|H(n)|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',16);
    title('Biên độ của H(n/2)',...
        'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14);
    grid on

subplot(2,2,3);
    stem(n,abs(x),'.k','LineWidth',2);
    xlabel('n','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14)
    ylabel('|x_n|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',16)
    title('Phổ rời rạc của tín hiệu vào',...
        'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
    grid on

subplot(2,2,4);
    stem(n,abs(y),'.k','LineWidth',2);
    xlabel('n','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14)
    ylabel('|y_n|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',16)
    title('Phổ rời rạc của tín hiệu ra',...
        'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);

    grid on
```

1.3 Biến đổi Fourier

❖ Quan hệ giữa tín hiệu tuần hoàn và tín hiệu phi tuần hoàn

Nếu ký hiệu $x_T(t)$ là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ T được định nghĩa bởi

$$x(t+T) = x(t), \qquad \text{với } \forall t, \qquad -\infty < t < \infty \tag{1.3.1}$$

thì tín hiệu phi tuần hoàn $x(t)$ có quan hệ với $x_T(t)$ bởi

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x_T(t) \tag{1.3.2}$$

❖ Định nghĩa biến đổi Fourier FT

Nếu tín hiệu *x(t)* thoả mã các điều kiện Dirichlet, thì cặp biến đổi Fourier được định nghĩa bởi

$$\begin{cases} X(f) = FT\left[x(t)\right] = \Im\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ x(t) = IFT\left[X(t)\right] = \Im^{-1}\left[X(f)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Nếu x(t) là tín hiệu thực, thì *X(f)* thoả mãn đối xứng ***Hermitran***; nghĩa là

$$X(-f) = X^*(f)$$

❖ Các tính chất của FT

1. Tuyến tính

FT của kết hợp tuyến tính hai hay nhiều tín hiệu là sự kết hợp tuyến tính của các FT thành phần của từng tín hiệu riêng tương ứng; nghĩa là

Nếu $\begin{cases} X_1(f) = \Im\left[x_1(t)\right] \\ X_2(f) = \Im\left[x_2(t)\right] \end{cases}$

thì
$$\begin{aligned} \Im\left[a.x_1(t) + bx_2(t)\right] &= a\Im\left[x_1(t)\right] + b\Im\left[x_2(t)\right] \\ &= a.X_1(f) + b.X_2(f) \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

2. Đối ngẫu

Nếu $X(f) = \Im\left[x(t)\right]$

thì $\Im\left[X(t)\right] = x(-f)$ (1.3.5)

3. Tính dịch thời gian

Dịch thời trong miền thời gian dẫn đến dịch pha trong miền tần số; nghĩa là

Nếu $X(f) = \Im\left[x(t)\right]$

thì $\Im\left[x(t - t_0)\right] = e^{-j2\pi ft_0}.X(f)$ (1.3.6)

4. Tỉ lệ

Dãn trong miền thời gian dẫn đến co trong miền tần số và ngược lại; nghĩa là

Nếu $X(f) = \Im\left[x(t)\right]$

thì $\Im\left[x(at)\right] = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right), \quad a \neq 0$ (1.3.7)

5. Điều chế

Nhân tín hiệu với hàm mũ trong miền thời gian dẫn đến dịch tần của tín hiệu đó trong miền tần số, tức là

Nếu $X(f) = \Im[x(t)]$

thì $$\begin{cases} \Im\left[e^{j2\pi f_0 t}.x(t)\right] & = X\left(f - f_0\right) \\ \Im\left[x(t).cos\left(2\pi f_0 t\right)\right] & = \frac{1}{2}\left[X\left(f + f_0\right) + X\left(f - f_0\right)\right] \end{cases} \qquad (1.3.8)$$

6. Vi phân

Lấy vi phân tín hiệu trong miền thời gian dẫn đến nhân $j2\pi f$ với phổ tần của tín hiệu đó trong miền tần số.

Nếu $X(f) = \Im[x(t)]$

thì $$\begin{aligned} \Im\left[x'(t)\right] &= \left(j2\pi f\right).X(f) \\ \Im\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] &= \left(j2\pi f\right)^n.X(f) \end{aligned} \qquad (1.3.9)$$

7. Tính tích chập

Lấy tích chập của hai tín hiệu trong miền thời gian dẫn đến phép nhân phổ tần của hai tín hiệu đó trong miền tần số và ngược lại.

Nếu $$\begin{aligned} X(f) &= \Im[x(t)] \\ Y(f) &= \Im[y(t)] \end{aligned} \qquad (1.3.11)$$

thì $$\begin{aligned} \Im\left[x(t) * y(t)\right] &= X(f).Y(f) \\ \Im\left[x(t).y(t)\right] &= X(f) * Y(f) \end{aligned} \qquad (1.3.12)$$

8. Quan hệ Parserval

Nếu $$\begin{aligned} X(f) &= \Im[x(t)] \\ Y(f) &= \Im[y(t)] \end{aligned} \qquad (1.3.13)$$

thì $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t).y^*(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f).Y^*(f)df \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(f)\right|^2 df}_{\text{quan hệ Rayleigh}} \end{aligned} \qquad (1.3.14)$$

Bảng 1.1. Các cặp FT hữu hiệu đáng nhớ			
Stt	**Miền thời gian**	**Miền tần số**	**Lưu ý**
1	$x(t)$	$X(f)$	$x(t) \Leftrightarrow X(f)$
2	$\delta(t)$	1	$\delta(t) \Leftrightarrow 1$
3	1	$\delta(f)$	$1 \Leftrightarrow \delta(f)$
4	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$	$\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$
5	$e^{j2\pi f t_0}$	$\delta(f-f_0)$	$e^{j2\pi f t_0} \Leftrightarrow \delta(f-f_0)$
6	$cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$	$cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$
7	$sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$	$sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$
8	$\Pi(t)$	$\Pi(t) \Leftrightarrow sinc(f)$	$\Pi(t) \Leftrightarrow \sin c(f)$
9	$\sin c(t)$	$\Pi(f)$	$\sin c(t) \Leftrightarrow \Pi(f)$
10	$\Lambda(t)$	$\sin c^2(f)$	$\Lambda(t) \Leftrightarrow \sin c^2(f)$
11	$\sin c^2(t)$	$\Lambda(f)$	$\sin c^2(t) \Leftrightarrow \Lambda(f)$
12	$e^{-at}u_{-1}(t),\ \ a>0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$	$e^{-at}u_{-1}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a+j2\pi f},\ \ a>0$
13	$t.e^{-at}u_{-1}(t),\ \ a>0$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$	$t.e^{-at}u_{-1}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(a+j2\pi f)^2},\ \ a>0$
14	$e^{-a\|t\|},\ \ a>0$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$	$e^{-a\|t\|} \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2},\ \ a>0$
15	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$	$e^{-\pi t^2} \Leftrightarrow e^{-\pi f^2}$
16	$sign(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$	$sign(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$
17	$u_{-1}(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$	$u_{-1}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
18	$\delta'(t)$	$j2\pi f$	$\delta'(t) \Leftrightarrow j2\pi f$

19	$\delta^n(t)$	$(j2\pi f)^n$	$\delta^n(t) \Leftrightarrow (j2\pi f)^n$
20	$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)}_{\text{lấy mẫu}}$	$\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)}_{\text{lấy mẫu}}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\delta(t-nT_0)}_{\text{lấy mẫu}} \Leftrightarrow \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)}_{\text{lấy mẫu}}$

Trong đó

Hàm bước nhảy đơn vị được định nghĩa

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$\delta(t)$ được định nghĩa là $\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \ne 0 \\ \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(\lambda).d\lambda = 1, & \text{với số thực } \varepsilon > 0 \text{ nhỏ tùy ý} \end{cases}$

$$sign(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

❖ **Biểu diễn FT của tín hiệu tuần hoàn**

Đối với tín hiệu *x(t)* tuần hoàn có chu kỳ T_0, thì các ***hệ số chuỗi Fourier*** của nó được cho bởi x_n; nghĩa là

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \tag{1.3.15}$$

➢ ***Cách 1***: Biểu diễn FT của tín hiệu tuần hoàn bằng cách lấy mẫu phổ tần tín hiệu gốc tại các tần số bội số của tần số cơ bản $f_0 = 1/T_0 \Rightarrow$ vẫn đảm bảo tính chất *phổ vạch* của tín hiệu tuần hoàn.

Biến đổi Fourier của tín hiệu tuần hoàn đạt được bằng cách

$$\begin{aligned} X(f) &= \Im\left[x(t)\right] \\ &= \Im\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.\Im\left[e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.\underbrace{\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)}_{\text{lấy mẫu}} \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Nói cách khác, biến đổi Fourier của tín hiệu ***tuần hoàn*** chứa ***các xung kim*** tại bội số của tần số cơ bản (các hài) của **tín hiệu gốc**.

- ***Cách 2***: Biểu diễn biến đổi Fourier của tín hiệu ***tuần hoàn*** bằng cách biểu diễn các ***hệ số chuỗi Fourier*** ở dạng biến đổi Fourier của ***tín hiệu bị cắt*** bởi

$$x_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right) \qquad (1.3.17)$$

trong đó ta định nghĩa $X_{T_0}(f)$ là biến đổi Fourier của tín hiệu bị cắt $x_{T_0}(t)$ được định nghĩa là

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t), & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases} \qquad (1.3.18)$$

Ở dạng tổng quát, phổ của tín hiệu *X(f)* là hàm phức; nghĩa là

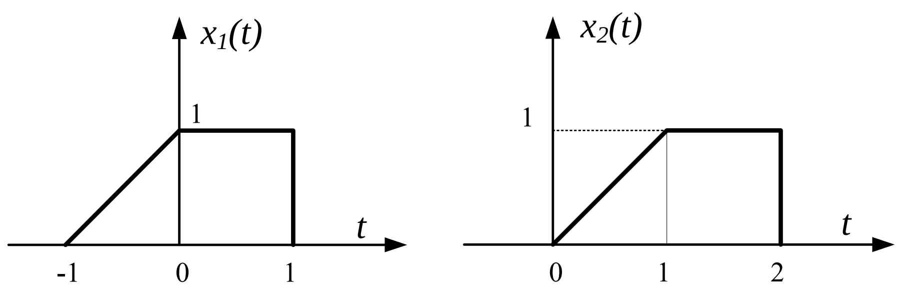
$$X(f) = X_{\mathrm{Re}}(f) + j.X_{\mathrm{Im}}(f) = \underbrace{|X(f)|}_{\text{Phổ biên độ } \sqrt{X_{\mathrm{Re}}^2(f)+X_{\mathrm{Im}}^2(f)}} . \underbrace{e^{j\arctan\frac{X_{\mathrm{Im}}(f)}{X_{\mathrm{Re}}(f)}}}_{\text{phổ pha}}$$

⇒ khi vẽ phổ tín hiệu thường phải vẽ phổ biên độ và phổ pha

Bài tập NVD4B_sim3:

TÌM PHỔ CỦA TÍN HIỆU

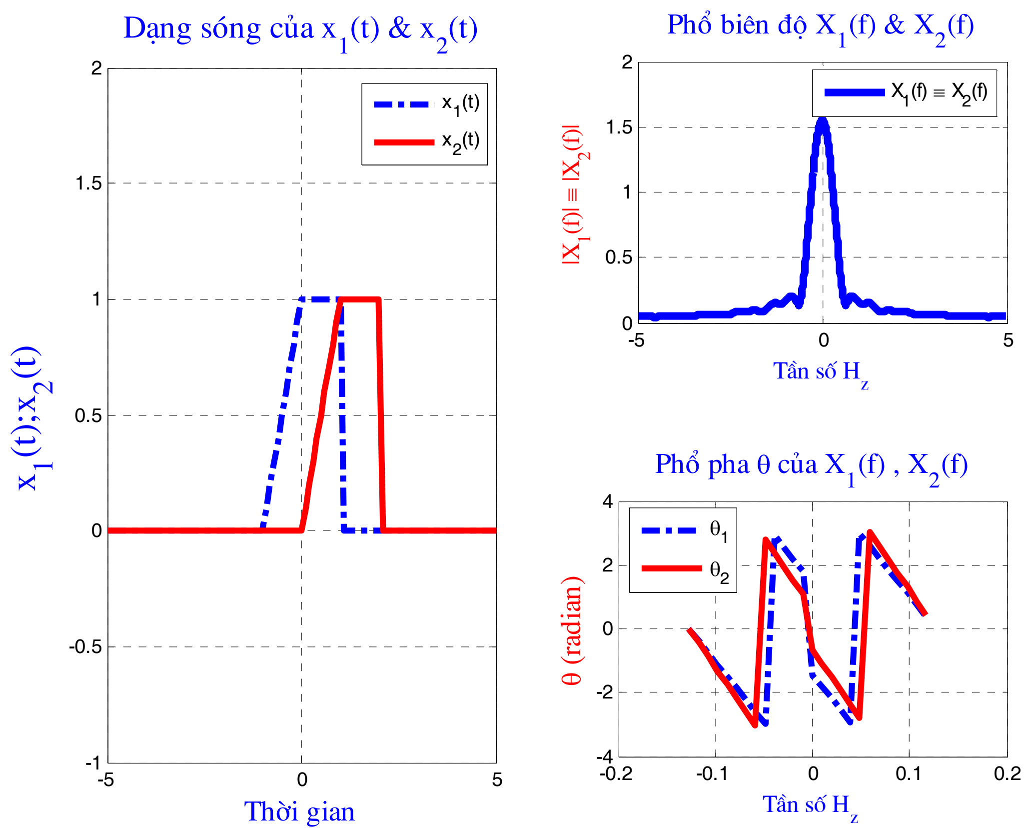
Hai tín hiệu $x_1(t)$ và $x_2(t)$ được cho ở hình 1.9 dưới đây. Hãy vẽ phổ của chúng



Hình 1.9. Các tín hiệu $x_1(t)$ & $x_2(t)$

Lời giải:

Ta nhận thấy rằng, dạng của hai tín hiệu này là giống nhau chỉ khác là dịch thời gian. Theo tính chất dịch thời của FT, thì phổ biên độ của chúng là như nhau mà phổ pha của chúng là khác nhau (dịch pha nhau). Các kết quả chạy chương trình Matlab được cho ở hình 1.10. Chương trình Matlab thực thi bài tập này được cho ở file **NVD4B_sim3.m** trong phụ lục 4A



Hình 1.10. Dạng sóng tín hiệu $x_1(t)$ và $x_2(t)$ - phổ biên độ và phổ pha của chúng

```
function y = NVD4B_sim3
% File NVD4B_sim3.m = CS15qa.m
clc;
clear all;
close all;
%======================================
df  =   0.01;
fs  =   10;
ts  =   1/fs;
t   =  [-5:ts:5];
%========================================
x1  =   zeros(size(t));
x1(41:51)   =   t(41:51)+1;
x1(52:61)   =   ones(size(x1(52:61)));

x2          =   zeros(size(t));
x2(51:71)   =   x1(41:61);

[X1,x11,df1]     =   fftseq(x1,ts,df);
[X2,x21,df2]     =   fftseq(x2,ts,df);

X11 =   X1/fs;
X21 =   X2/fs;

f   =  [0:df1:df1*(length(x11)-1)]-fs/2;
%========================================
```

```
h1_15 = figure
set(h1_15,'color','c','Name','H1.17. Simulation Results of NVD4B_sim3 Program:
NVD');
%=================
subplot(2,2,2);
plot(f,fftshift(abs(X21)),'b','LineWidth',4);
xlabel('Tần số H_z','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12)
ylabel('|X_1(f)| \equiv |X_2(f)|','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',12)
title('Phổ biên độ X_1(f) & X_2(f)',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14);
grid on
legend('X_1(f) \equiv X_2(f)');
%=================
subplot(2,2,[ 1,3] );
plot(t,x1,'-.b',t,x2,'r','LineWidth',3);
axis([ -5 5 -1 2] );
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14)
ylabel('x_1(t);x_2(t)','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',18)
title('Dạng sóng của x_1(t) & x_2(t)',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',16);
grid on
legend('x_1(t)','x_2(t)');
%=================
subplot(2,2,4);
plot (f(500:525),fftshift(angle(X11(500:525))),'-
.b',f(500:525),fftshift(angle(X21(500:525))),'r',...
    'LineWidth',3);
xlabel('Tần số H_z','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
ylabel('\theta (radian)','FontName','.VnTime','color','r','FontSize',14);
title('Phổ pha \theta của X_1(f) , X_2(f)',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',14);
grid on
legend('\theta_1','\theta_2',2);
```

1.3.1. Định lý lấy mẫu

Định lý lấy mẫu là một trong các định lý quan trọng nhất để phân tích các tín hiệu và hệ thống, từ đó nhận được quan hệ cơ bản giữa các tín hiệu ***liên tục*** và tín hiệu ***rời rạc***. Định lý phát biểu rằng, tín hiệu có băng tần hạn chế trong khoảng *2W* (nghĩa là, FT của nó bằng không khi $|f| > W$) hoàn toàn thể được mô tả được ở dạng các giá trị mẫu của nó tại các khoảng T_s miễn sao $T_s \le 1/2W$. Nếu lấy mẫu được thực hiện tại tốc độ lấy mẫu Nyquist ($T_s = 1/2W \Leftrightarrow f_s = 2W$), thì ta có thể khôi phục lại được tín hiệu $x(t)$ ban đầu từ các giá trị mẫu $\left\{x[n] = x(nT_s)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ như sau

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\sin c\left[2W(t - nT_s)\right] \quad (1.3.19)$$

Kết quả này dựa trên dạng sóng mẫu $x_\delta(t)$ được định nghĩa là

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\delta(t - nT_s) \quad (1.3.20)$$

có FT được cho bởi

$$\begin{aligned} X_\delta(f) &= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f-\frac{n}{T_s}\right), && \text{với} \quad \forall f \\ &= \frac{1}{T_s} X(f), && \text{với} \quad |f|<W \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

cho $X_\delta(f)$ qua bộ lọc thông thấp có độ rộng băng W và có hệ số khuyếch đại T_s trong băng thông đó sẽ khôi phục được tín hiệu ban đầu.

Biến đổi Fourier rời rạc DFT (*Discrete Fourier Transform*) của chuỗi *x[n]* được biểu diễn là

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-j2\pi fnT_s} \tag{1.3.22}$$

so sánh phương trình (1.3.22) và (1.3.21) ta kết luận

$$\underbrace{\underbrace{X(f)}_{\text{FT của } x(t)} = T_s.\underbrace{X_d(f)}_{\text{DFT của } x[n]}}_{\text{Quan hệ giữa FT của } x(t) \text{ với DFT của } x[n]} \qquad \text{với} \quad |f|<W \tag{1.3.23}$$

thể hiện quan hệ giữa FT của tín hiệu tương tự với DFT của tín hiệu được lấy mẫu của nó tương ứng.

Việc tính toán biến đổi Fourier rời rạc DFT theo phương pháp số được thực hiện hiệu quả bằng thuật toán biến đổi Fourier nhanh FFT. Trong thuật toán FFT, chuỗi tín hiệu *x(t)* có độ dài N mẫu nhận giá trị tại các khoảng thời gian T_s được dùng để thể hiện tín hiệu đó. Kết quả ta nhận được chuỗi độ dài N mẫu của $X_d(f)$ trong khoảng tần số $[0,f_s]$, trong đó $f_s = 1/T_s = 2W$ (tần số Nyquist). Khi các mẫu là các phần $\Delta f = f_s/N$, thì giá trị của Δf cho biết độ phân giải tần số của biến đổi Fourier kết quả.

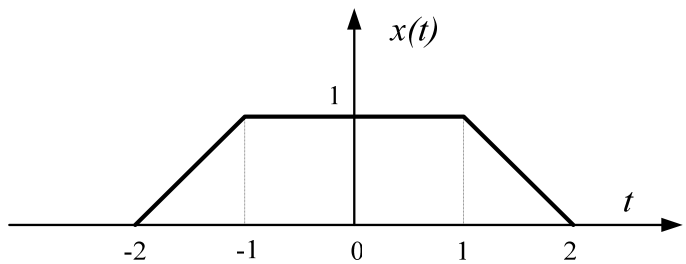
Thuật toán FFT tính toán có hiệu quả khi độ dài chuỗi vào N là luỹ thừa của 2. *Nếu độ dài chuỗi vào này không phải là luỹ thừa của 2 thì thực hiện độn các số 0 để có độ dài là luỹ thừa của 2*. Lưu ý rằng, do thuật toán FFT thực hiện DFT cho tín hiệu được lấy mẫu, nên để có được FT của tín hiệu tương tự cần phải dùng phương trình **(1.3.23)-**nghĩa là sau khi tính FFT, phải nhân với T_s (hay chia f_s) để nhận được FT của tín hiệu tương tự ban đầu. Vấn đề này được thực hiện bởi hàm **fftseq.m**. Hàm **fftseq.m** nhận chuỗi vào ***m***, khoảng thời gian lấy mẫu t_s, độ phân giải tần số *df* và trả lại kết quả chuỗi ***m*** có độ dài là luỹ thùa của 2, ***M*** là kết quả tính FFT của chuỗi ***m*** này, và độ phân giải tần số *df*.

Bài tập NVD4B_sim4:

TÍNH TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỐ VÀ GIẢI TÍCH CỦA FT

Tín hiệu *x(t)* được mô tả bởi phương trình (1.3.24) và hình 1.11 dưới đây.

$$x(t) = \begin{cases} t+2, & -2 \le t \le -1 \\ 1, & -1 < t \le 1 \\ -t+2, & 1 < t \le 2 \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases} \qquad (1.3.24)$$



Hình 1.11 Tín hiệu *x(t)*

- ***Tìm FT của x(t) bằng phương pháp giải tích và vẽ phổ của x(t)***
- ***Viết chương trình Matlab để tìm FT bằng phương pháp số và vẽ kết quả***

Lời giải:

- ***Tín hiệu x(t) được viết như sau***

$$x(t) = 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) - \Lambda(t) \qquad (1.3.25)$$

Dùng tính chất tuyến tính và tỷ lệ của FT và tra bảng ta được

$$X(f) = 4\sin c^2(2f) - \sin c^2(f) \qquad (1.3.26)$$

$\Rightarrow$ thấy rõ biến đổi Fourier của *x(t) = X(f)* là tín hiệu thực (*x(t) là tín hiệu thực chẵn*). Phổ biên của nó độ được cho ở hình 1.12.

- ***Tìm FT bằng Matlab***

<u>Bước1</u>: Sơ bộ ước tính độ rộng băng tín hiệu *x(t)*. Do tín hiệu tương đối ***bằng phẳng***, nên độ rộng băng của nó tỷ lệ nghịch với khoảng thời gian tín hiệu đó. Khoảng thời gian của tín hiệu là 4 (xem hình 1.18). Để được an toàn ta lấy độ rộng băng lớn gấp 10 lần (độ rộng băng lớn gấp 10 lần).

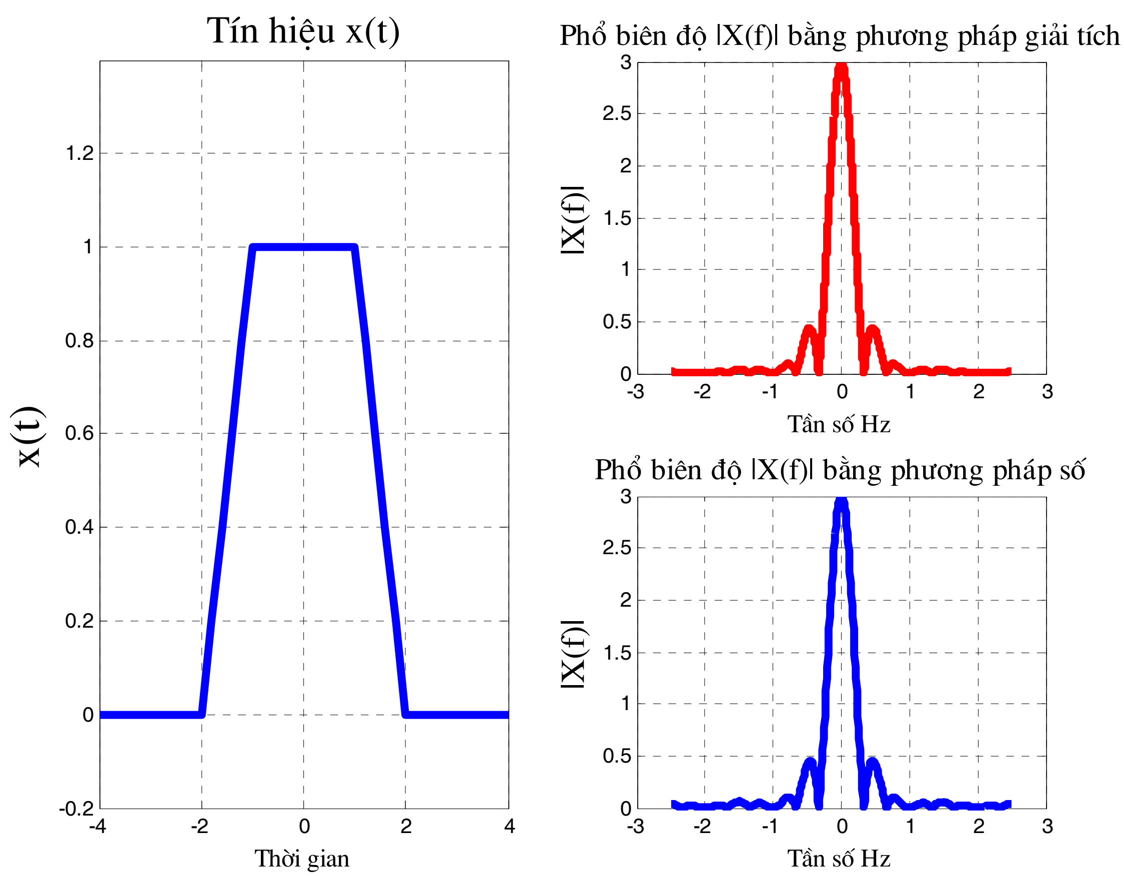
$$BW = 10 \times \frac{1}{4} = 2,5 \qquad (1.3.27)$$

<u>Bước2</u>: Xác định tần số lấy mẫu, theo đó tần số Nyquist là gấp 2 lần độ rộng băng, f_s = 2×2,5 = 5 $\Rightarrow$ khoảng cách giữa các mẫu là T_s = *1/*f_s *= 1/5 = 0,2*.

Bước3: Xét tín hiệu trên khoảng [-4 , 4] và lấy mẫu nó tại các khoảng T_s. Bằng cách chọn này và dùng hàm Matlab ***fftseq.m***, ta tìm được FFT bằng phương pháp số. Chọn độ phân giải tần số phù hợp là 0,01 Hz (hoặc nhỏ hơn, càng nhỏ thì thời gian chạy chương trình càng lâu). Độ phân giải tần số kết quả được cho bởi hàm ***fftseq.m*** là 0,0098 Hz. Nó đáp ứng được các yêu cầu cần thiết cho bài toán này. Vector tín hiệu x có độ dài là 41, được độn thêm các số không để có độ dài là $2^8 = 256$, nó đáp ứng được yêu cầu độ phân giải tần số.

Bước 4: Kết quả phổ biên độ của *x(t)* theo phương pháp số được cho ở hình 1.12.

Chương trình Matlab thực hiện bài toán được cho ở file **NVD4B_sim4.m.**



Hình 1.12 Phổ biên độ của *x(t)* bằng phương pháp số và giải tích

```
% function [ K]  = NVD4B_sim4
% File: NVD4B_sim4.m = CS16.m

clc;
clear all;
close all;
%==========================================
ts       =   0.2;
```

```
fs      =   1/ts;
df      =   0.01;
x       =   [zeros(1,10),(0:0.2:1),ones(1,9),(1:-0.2:0),zeros(1,10)];
xt      =   x;
[X,x,df1] = fftseq(x,ts,df);                    % derive the FFT
X1      =   X/fs;                                % Scaling
f       =   [0:df1:df1*(length(x)-1)] - fs/2;    % Frequency vector for FFT
f1      =   [-2.5:0.001:2.5];                    % Frequency vector for analytic
approach
y       =   4*(sinc(2*f1).^2)-(sinc(f1)).^2;     % Exact Fourier Transform

%===========================================
h1_19 = figure(1)
set(h1_19,'color','c','Name','H1.19 & H1.20. Simulation Results of NVD4B_sim4
Program: NVD');
%=========================
% plot of FT derived analytically is used by analytically
subplot(2,2,2);
plot(f1,abs(y),'r','LineWidth',4);
xlabel('Tần số Hz','fontname','.vntime','Fontsize',12);
ylabel('|X(f)|','fontname','.vntime','Fontsize',16);
title('Phổ biên độ |X(f)| bằng phương pháp giải
tích','fontname','.vntime','Fontsize',14);
grid on;
%=========================
subplot(2,2,[1,3]);
tt      =   2*(-2:0.1:2);
plot(tt,xt,'b','LineWidth',4);
xlabel('Thời gian','fontname','.vntime','Fontsize',12);
ylabel('x(t)','fontname','.vntime','Fontsize',20);
title('Tín hiệu x(t)','fontname','.vntime','Fontsize',18);
axis([min(tt) max(tt) min(xt)-0.2 max(xt)+0.4]);
grid on;
%=========================
% plot of FT derived numerically used by FFT
subplot(2,2,4);
plot(f,fftshift(abs(X1)),'b','LineWidth',4);
xlabel('Tần số Hz','fontname','.vntime','Fontsize',12);
ylabel('|X(f)|','fontname','.vntime','Fontsize',16);
title('Phổ biên độ |X(f)| bằng phương pháp
số','fontname','.vntime','Fontsize',14);

grid on
```

1.3.2. Phân tích hệ thống LTIV trong miền tần số

Khi cho tín hiệu *x(t) qua* hệ thống tuyến tính bất biến LTIV có đáp ứng xung *h(t)*, thì đáp ứng ra *y(t)* được xác định bởi tích chập sau

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)*h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned} \qquad (1.3.28)$$

Áp dụng tính chất tích chập của biến đổi Fourier, ta được tín hiệu ra trong miền tần số là

$$Y(f) = X(f)H(f) \tag{1.3.29}$$

trong đó

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{1.3.30a}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{1.3.30b}$$

H(f) là hàm truyền đạt của hệ thống LTIV. Phương trình (1.3.29) được viết ở dạng

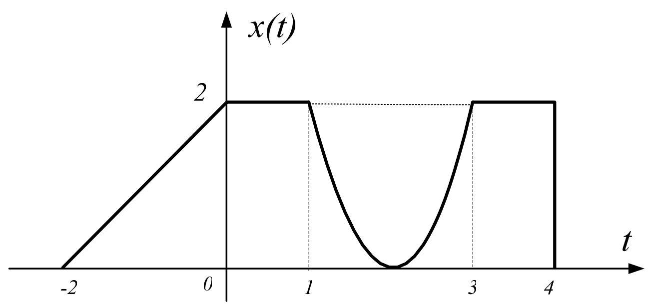
$$\begin{cases} |Y(f)| = |X(f)||H(f)| \\ \angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f) \end{cases} \qquad \mathbf{(1.3.31)}$$

Cho ta quan hệ phổ biên độ và phổ pha của các vào/ra của hệ LTIV.

Bài tập NVD4B_sim5:

PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTIV TRONG MIỀN TẦN SỐ

Tín hiệu *x(t)* được cho ở hình 1.13.



Hình 1.13. Tín hiệu *x(t)*

1. Xác định FFT của tín hiệu này và vẽ nó.
2. Nếu tín hiệu này được cho qua bộ lọc thông thấp lý tưởng có độ rộng băng là 1,5 Hz, tìm tín hiệu ra của bộ lọc và vẽ kết quả (*trường hợp 1*).
3. Nếu cho tín hiệu này qua bộ lọc có đáp ứng xung được cho bởi

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 2 \\ 0, & \text{khác} \end{cases} \tag{1.3.32}$$

Vẽ tín hiệu ra của bộ lọc (*trường hợp 2*).

Lời giải:

❖ **Xác định biểu thức tín hiệu**

Trước hết, tìm cách biểu diễn phần hình sin của tín hiệu. Phần tín hiệu hình sin này có nửa hình sin là 2 nên chu kỳ = 4 ⇒ tần số là f_0 = 1/4 = 0,25 Hz. Có biên độ như được thể hiện trên hình vẽ là 2. Vì vậy ta có thể biểu diễn nó bằng công thức sau

$$2cos\left(2\pi\times\underbrace{0,25}_{f_0}t+\theta\right)+2=2cos\left(0,5\pi t+\theta\right)+2$$

Pha θ nhận được bằng cách dùng điều kiện giới hạn

$$2+2\cos\left(0,5\pi t+\theta\right)\Big|_{t=2}=0\Rightarrow\theta=0 \qquad (1.3.33)$$

Sau đó, từ hình vẽ biểu diễn các đoạn thẳng. Kết quả, tín hiệu *x(t)* được viết như sau

$$x(t)=\begin{cases}t+2, & -2\le t\le 0\\ 1, & 0<t\le 1\\ 2+2\cos(0,5\pi t), & 1<t\le 3\\ 1, & 3<t\le 4\\ 0, & \text{nếu khác}\end{cases} \qquad (1.3.34)$$

❖ ***Xác định các tham số và khảo sát***

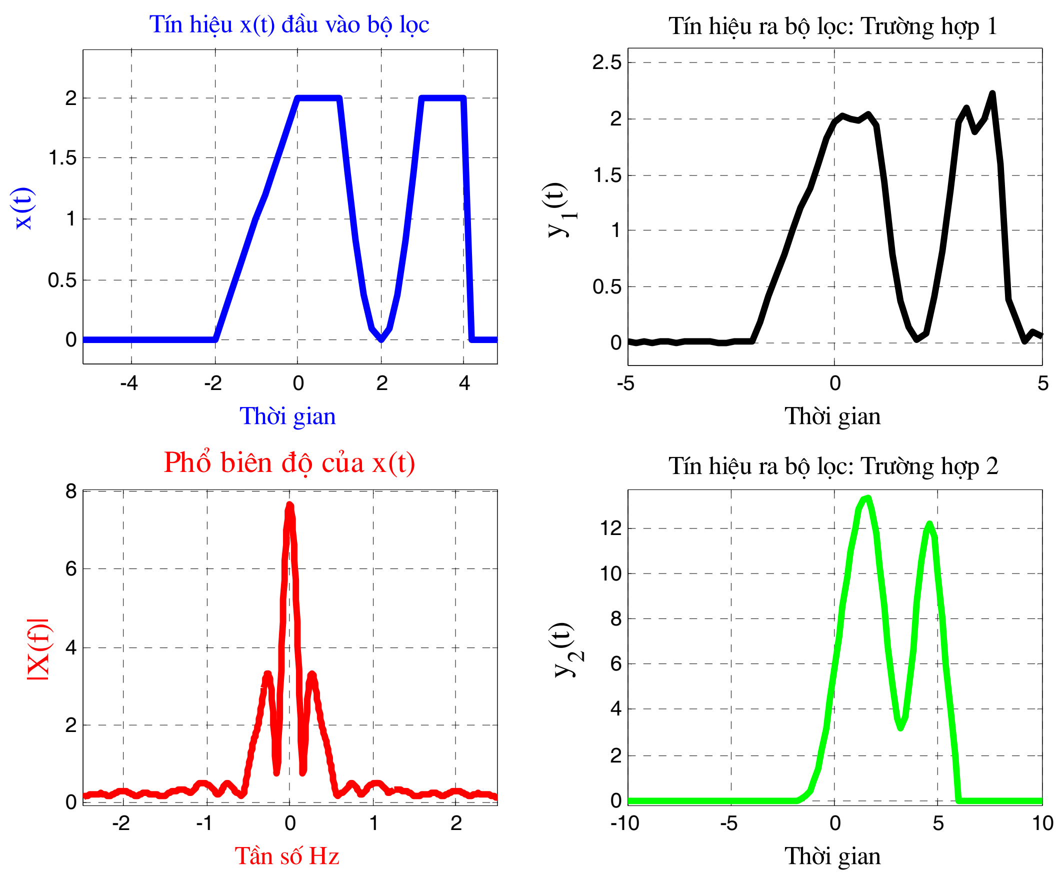
- Độ rộng băng của tín hiệu được chọn là 5Hz. Phân giải tần số là 0,01 Hz. Phổ biên độ của tín hiệu *x(t)* được cho ở hình 1.14 (kết quả chạy chương trình Matlab).
- Độ rộng băng tín hiệu f_s = 5Hz. Vì độ rộng băng của bộ lọc thông thấp là 1,5Hz, nên hàm truyền đạt của bộ lọc là

$$H(f)=\begin{cases}1, & 0\le f\le 1,5\\ 0, & 1,5<f\le 3,5\\ 1, & 3,5<f\le 5\end{cases} \qquad (1.3.35)$$

nhân hàm truyền đạt *H(f)* với phổ tín hiệu vào *X(f)* được phổ tín hiệu ra *Y(f)*. Phổ tín hiệu ra của bộ lọc thông thấp được cho ở hình 1.14 (kết quả chạy chương trình Matlab).

- Tìm tín hiệu ra *y(t)* trực tiếp bằng công thức tích chập trong miền thời gian. Kết quả chạy chương trình Matlab được cho hình 1.14.

Chương trình Matlab cho bài tập này được cho ở file **NVD4B_sim5.m** trong phụ lục 4A



Hình 1.14. Phổ biên độ tín hiệu vào-Tín hiệu ra trong các trường hợp 1 và 2

```
% function y = NVD4B_sim5
% File NVD4B_sim5.m = CS17.m
clc;
clear all;
close all;
%======================
fs      = 5;                     % Frequency resolution
ts      = 1/fs;                  % sampling frequency
df      = 0.01;                  % Sampling interval
t       = [ -5:ts:5] ;           % Time vector
x       = zeros(1,length(t));    % Input signal initiation
%=======================
x(16:26)    = t(16:26)+2;
x(27:31)    = 2*ones(1,5);
x(32:41)    = 2 + 2*cos(0.5*pi*t(32:41));
x(42:46)    = 2*ones(1,5);
xx          = []
xx_tt=[ zeros(1,16),...
    t(16:26)+2,...
    2*ones(1,5),...
    2+2*cos(0.5*pi*t(32:41)),...
    2*ones(1,5),...
    zeros(1,4)] ;
%=======================
```

```
% part 1
[ X,x1,df1]  = fftseq(x,ts,df);                  % Spectrum of the input
f            = [ 0:df1:df1*(length(x1)-1)] - fs/2;    % Frequency vector
X1           = X/fs;                             % Scaling
%======================
% part 2: Filter transfer function
H        = [ ones(1,ceil(1.5/df1)),...
    zeros(1,length(X) - 2*ceil(1.5/df1)),...
    ones(1,ceil(1.5/df1))];
Y        = X.*H;              % Output spectrum
y1       = ifft(Y);           % Output of Filter
%======================
% part 3: LTI system impluse response
h        = [ zeros(1,ceil(5/ts)),...
    t(ceil(5/ts)+1:ceil(6/ts)),...
    ones(1,ceil(7/ts)-ceil(6/ts)),...
    zeros(1,51-ceil(7/ts))]
y2       = conv(h,x);
%======================
h1_21 = figure(1)
set(h1_21,'color','c','Name','H1.21-H1.24. Simulation Results of NVD4B_sim5
Program: NVD');
%===================
subplot(221);
tt       = t-0.2;
plot(tt,xx_tt,'b','LineWidth',3);
xlabel('Thời gian','fontname','.vntime','color','b','Fontsize',12);
ylabel('x(t)','fontname','.vntime','color','b','Fontsize',14);
axis([ min(tt) max(tt) min(xx_tt)-0.2 max(xx_tt)+0.4]);
title('Tín hiệu x(t) đầu vào bộ
lọc','fontname','.vntime','color','b','Fontsize',12);
grid on;
%=====================
subplot(223);
plot(f,fftshift(abs(X1)),'r','LineWidth',3);
xlabel('Tần số Hz','fontname','.vntime','color','r','Fontsize',12);
ylabel('|X(f)|','fontname','.vntime','color','r','Fontsize',14);
axis([ min(f) max(f) min(fftshift(abs(X1)))-0.2 max(fftshift(abs(X1)))+0.4]);
title('Phổ biên độ của x(t)','fontname','.vntime','color','r','Fontsize',14);
grid on;
%======================
subplot(222);
y1p =abs(y1(1:length(t)));
plot(t,abs(y1(1:length(t))),'k','LineWidth',3);
title('Tín hiệu ra bộ lọc: Trường hợp
1','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',12);
xlabel('Thời gian','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',12);
ylabel('y_1(t)','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',14);
axis([ min(t) max(t) min(y1p)-0.2 max(y1p)+0.4]);
grid on;
%======================
subplot(224);
t2  =[ -10:ts:10];
plot([ -10:ts:10],y2,'g','LineWidth',3);
title('Tín hiệu ra bộ lọc: Trường hợp
2','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',12);
xlabel('Thời gian','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',12);
ylabel('y_2(t)','fontname','.vntime','color','k','Fontsize',14);
axis([ min(t2) max(t2) min(y2)-0.2 max(y2)+0.4]);

grid on;
```

1.4. Công suất và năng lượng

❖ Định nghĩa

Nếu ký hiệu E_x là năng lượng và P_x là công suất của tín hiệu ***thực*** *x(t)*, được định nghĩa là

$$\begin{cases} E_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t).dt \\ P_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t).dt \end{cases} \qquad (1.4.1)$$

- *Tín hiệu có năng lượng hữu hạn được gọi là tín hiệu kiển năng lượng.*
- *Tín hiệu có công suất dương hữu hạn được gọi là tín hiệu kiển công suất.*

Tồn tại các tín hiệu không phải là năng lượng và cũng không phải là tín hiệu công suất chẳng hạn $x(t) = e^t.u_{-1}(t)$. Ví dụ: $x(t) = \prod(t)$ là tín hiệu kiểu năng lượng trong khí đó tín hiệu *x(t)=cos(t)* là tín hiệu kiểu công suất. ***Tất cả các tín hiệu tuần hoàn điều là tín hiệu kiểu công suất.***

❖ Đối với các tín hiệu kiểu năng lượng

➢ *Mật độ phổ năng lượng ESD*

Mật độ phổ năng lượng ESD của tín hiệu kiểu năng lượng cho biết sự phân bố năng lượng tại các tần số khác nhau của tín hiệu đó và được cho bởi

$$ESD = \wp_X(f) = \left|X(f)\right|^2 \qquad (4.1.2)$$

➢ *Năng lượng của tín hiệu*

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \wp_X(f).df \qquad (4.1.3)$$

➢ *Quan hệ giữa ESD và hàm tự tương quan $R_X(\tau)$*

Dùng định lý tích chập, nhận được

$$\wp_X(f) = \Im\left[R_X(\tau)\right] \qquad (4.1.4)$$

trong đó, $R_X(\tau)$ là hàm tự tương quan của *x(t)* và được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t).x(t+\tau)dt \\ &= x(\tau) * x(-\tau) \end{aligned} \qquad (1.4.5)$$

đối với các tín hiệu *x(t)* giá trị thực.

❖ Đối với các tín hiệu kiểu công suất

➢ ***Hàm tự tương quan trung bình theo thời gian được $R_X(\tau)$ định nghĩa là***

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t).x(t+\tau)dt \qquad (1.4.6)$$

➢ ***Mật độ phổ công suất PSD ở dạng tổng quát được cho bởi***

$$PSD = S_X(f) = \Im\left[R_X(\tau)\right] \qquad (1.4.7)$$

➢ ***Công suất tổng là tích phân của mật độ phổ công suất được cho bởi***

$$P_X = \int_{-\aleph}^{\aleph} S_X(f).df \qquad (4.1.8)$$

⇒ *Đối với tín hiệu tuần hoàn x(t) có chu kỳ T_0 và hệ số chuỗi Fourier là x_n, thì mật độ phổ công suất PSD được cho bởi*

$$S_X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \qquad (4.1.9)$$

nghĩa là toàn bộ công suất được tập trung tại các hài của tần số cơ bản và công suất công suất tại hài bậc thứ n $\left(\frac{n}{T_0} = nf_0\right)$ là $|x_n|^2$*; nghĩa là bình phương độ lớn của hệ số chuỗi Fourier tương ứng.*

❖ Quan hệ tín hiệu vào/ra của qua bộ lọc

Khi cho tín hiệu *x(t)* qua bộ lọc có hàm truyền đạt *H(f)*, thì mật độ phổ năng lượng *ESD* đầu ra hoặc mật độ công suất *PSD* đầu ra được xác định theo

$$\begin{cases} ESD = \wp_Y(f) = |H(f)|^2 e_X(f) \\ PSD = S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) \end{cases} \qquad (4.1.10)$$

➢ ***Nếu dùng tín hiệu rời rạc (được lấy mẫu), thì công suất và năng lượng tương ứng với phương trình (1.4.1) ở dạng tín hiệu rời rạc trở thành***

$$\begin{cases} E_X = T_s \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x^2 |n| \\ P_X = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{N} x^2 |n| \end{cases} \qquad (1.4.11)$$

➢ ***Nếu dùng FFT-nghĩa là, nếu độ dài của chuỗi là hữu hạn và chuỗi được lặp lại, thì***

$$\begin{cases} E_X = T_s \sum_{n=0}^{N-1} x^2 \left|n\right| \\ P_X = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} x^2 \left|n\right| \end{cases} \tag{1.4.12}$$

Hàm **power.m** trong phụ lục 4A cho thấy nội dung công suất của vector tín hiệu.

- ***Nếu $X_d(f)$ là DFT của chuỗi x[n], thì tìm được mật độ phổ năng lượng ESD của x(t), tín hiệu analog tương đương, bằng cách dùng phương trình (1.3.23) và được cho bởi***

$$ESD = \wp_X(f) = T_S^2 \left|X_d(f)\right|^2 \tag{1.4.13}$$

trong đó, T_s là khoảng thời gian lấy mẫu. Mật độ phổ công suất của chuỗi *x[n]* được rút ra một cách đơn giản bằng cách dùng hàm Matlab ***spectrum.m*** trong phụ lục 4A.

Bài tập NVD4B_sim6

CÔNG SUẤT VÀ PHỔ CÔNG SUẤT

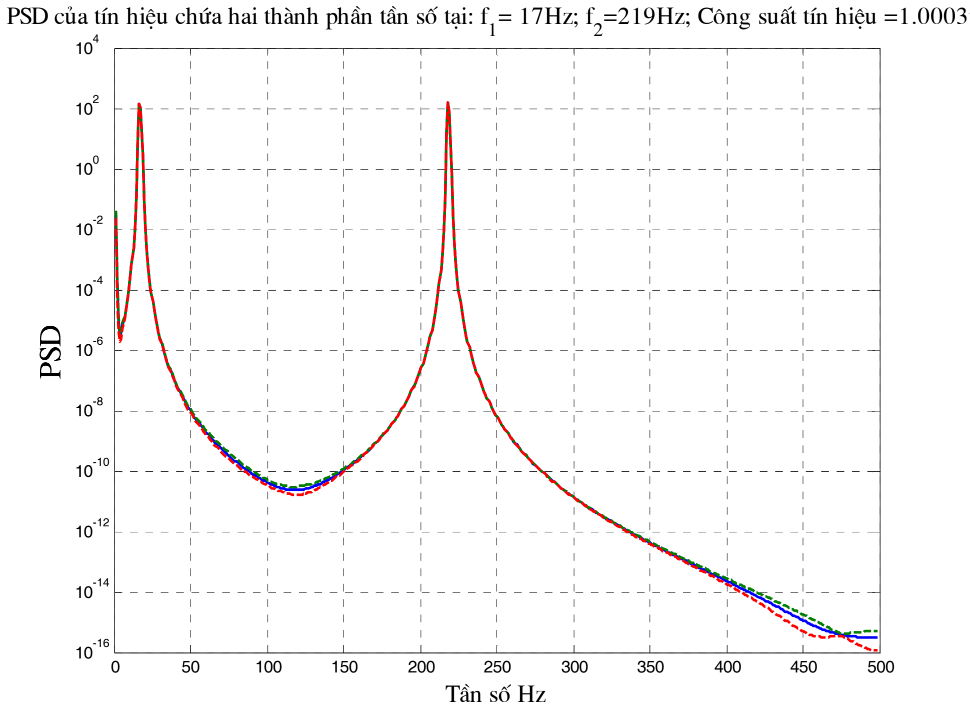
Tín hiệu *x(t)* có khoảng thời gian tồn tại là 10 và là tổng của hai tín hiệu sin biên độ 1 & tần số là 17Hz và 219Hz tương ứng như sau

$$x(t) = \begin{cases} \cos\left(2\pi \times 17t\right) + \cos\left(2\pi \times 219t\right), & 0 \le t \le 10 \\ 0, & \text{khác} \end{cases}$$

Tín hiệu này được lấy mẫu tại tốc độ 1000 mẫu/giây. Viết chương trình Mtlab để tìm công suất P_X và mật độ phổ công suất *PSD* $S_X(f)$ của tín hiệu này.

Lời giải:

Chương trình Matlab được được cho ở hàm ***spower.m*** để tính công suất của tín hiệu, kết quả là 1,0003*W*. Dùng các hàm Matlab ***spectrum.m*** và ***specplot.m*** để vẽ *PSD* của tín hiệu được cho ở hình 1.15. Hai đỉnh có trong phổ tín hiệu tương ứng với hai tần số thể hiện trong tín hiệu *x(t)*. Chương trình Matlab chính được cho ở file **NVD4B_sim6.m** cùng với các hàm Matlab trên trong phụ lục 4A thực hiện bài toán này.



Hình 1.15 Mật độ phổ công suất của tín hiệu gồm hai tín hiệu Sin tại các tần số f_1 = 17 Hz và f_2 = 219Hz

```
% function y = NVD4B_sim6
%File NVD4B_sim6.m = CS18.m
clc;
clear all;
close all;
%========================
ts       = 0.001;
fs       = 1/ts;
t        = [ 0:ts:10] ;
f1       = input('Nhap tan so f1 =    ');
f2       = input('Nhap tan so f2 =    ');
x        = cos(2*pi*f1*t) + cos(2*pi*f2*t);
p        = spower(x);
psd      = spectrum(x,1024);
%========================
h1_25 = figure
set(h1_25,'color','c','Name','H1.27. Simulation Results of NVD4B_sim6 Program:
NVD');
specplot(psd,fs);
xlabel('Tần số Hz','fontname','.vntime','Fontsize',14);
ylabel('PSD','fontname','.vntime','Fontsize',18);
title([ 'PSD của tín hiệu chứa hai thành phần tần số tại: f_1= ',...
    num2str(f1),'Hz; f_2=',num2str(f2),'Hz; Công suất tín hiệu
=',num2str(p),'w'],...
     'fontname','.vntime','Fontsize',14);
grid on;
```

1.5. Tương đương thông thấp của các tín hiệu thông dải

Lowpass Equivalent of Bandpass Signals

❖ Khái niệm tín hiệu thông dải *x(t)* và tương đương thông thấp $x_\ell(t)$

➢ ***Tín hiệu thông dải:*** là tín hiệu mà toàn bộ các thành phần tần số của nó được định vị tại ***tần số trung tâm f_0*** và lân cận tần số f_0. Nói cách khác

$$X(f)=\begin{cases} A, & |f\pm f_0|\le W \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases}, \qquad \text{trong đó } f_0 >> W$$

➢ ***Tín hiệu thông thấp:*** là tín hiệu mà các thành phần tần số của nó được định vị tại tần số 0 và xung quanh ***tần số 0***; nghĩa là

$$X(f)=\begin{cases} A, & |f|\le W \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases}$$

❖ Tín hiệu giải tích *z(t)* và tín hiệu thông dải *x(t)*

Tương ứng với tín hiệu thông dải *x(t)*, ta định nghĩa ***tín hiệu giải tích*** *z(t)* mà biểu diễn chúng trong miền tần số và miền thời gian được xác định như sau:

➢ ***Trong miền tần số được cho bởi***

$$Z(f)=2u_{-1}(f)X(f) \tag{1.5.1}$$

trong đó $u_{-1}(f)$ là hàm bước nhảy đơn vị.

➢ ***Trong miền thời gian được cho bởi***

$$z(t)=x(t)+j\hat{x}(t) \tag{1.5.2}$$

trong đó, $\hat{x}(t)$ là biến đổi ***Hilbert*** của *x(t)* được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned}\hat{x}(t)&=x(t)*\frac{1}{\pi t}\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau\end{aligned} \tag{1.5.3a}$$

⇒ trong miền tần số được cho bởi

$$\hat{X}(f)=-j.sign(f).X(f) \tag{1.5.3b}$$

Hàm biến đổi *Hilbert* trong Matlab được ký hiệu là ***hilbert.m***, hàm thực hiện tạo chuỗi z(t) phức. Phần thực của *z(t)* là chuỗi bản tin, phần ảo của nó là biến đổi *Hilbert* của chuỗi bản tin.

❖ Tín hiệu thông thấp tương đương $x_\ell(t)$

Tương đương thông thấp của tín hiệu thông dải *x(t)* được ký hiệu bởi $x_\ell(t)$, tồn tại các cách định nghĩa và biểu diễn như sau:

➢ ***Cách 1:*** Biểu diễn $x_\ell(t)$ theo *z(t)*

$$\begin{cases} x_\ell(t) = z(t)e^{-j2\pi f_0 t} \\ z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \end{cases} \tag{1.5.4}$$

⇒ Từ quan hệ này, ta có

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{Re}\left[x_\ell(t)e^{j2\pi f_0 t} \right] \\ \hat{x}(t) = \mathrm{Im}\left[x_\ell(t)e^{j2\pi f_0 t} \right] \end{cases} \tag{1.5.5}$$

⇔ Trong miền tần số, ta có

$$\begin{aligned} X_\ell(f) &= Z\left(f + f_0\right) \\ &= 2u_{-1}\left(f + f_0\right) \times X\left(f + f_0\right) \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

$$X_\ell(f) = X\left(f - f_0\right) + X^*\left(-f - f_0\right) \tag{1.5.7}$$

➢ ***Cách 2*****:** Biểu diễn $x_\ell(t)$ theo các thành phần đồng pha & vuông pha như sau

Ở dạng tổng quát, tương đương thông thấp của tín hiệu thông dải giá trị thực *x(t)* là tín hiệu phức. Ký hiệu phần thực của nó là $x_c(t)$ được gọi là thành phần đồng pha của tín hiệu thông dải *x(t)*, ký hiệu phần ảo của nó là $x_s(t)$ được gọi là thành phần vuông pha của tín hiệu thông dải *x(t)*; nghĩa là

$$x_\ell(t) = x_c(t) + jx_s(t) \tag{1.5.8}$$

Dưới dạng các thành phần đồng pha & vuông pha, ta có

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{Re}\left[x_\ell(t)e^{j2\pi f_0 t} \right] = \underbrace{x_c(t).cos\left(2\pi f_0 t\right) - x_s(t).sin\left(2\pi f_0 t\right)}_{\text{để ý}} \\ \hat{x}(t) = \mathrm{Im}\left[x_\ell(t)e^{j2\pi f_0 t} \right] = x_s(t).cos\left(2\pi f_0 t\right) + x_c(t).sin\left(2\pi f_0 t\right) \end{cases} \tag{1.5.9}$$

➢ **Cách 3:** Biểu diễn $x_\ell(t)$ trong hệ tọa độ cực (*in polar coordinate*), ta có

$$x_\ell(t) = V(t).e^{j\Theta(t)} \tag{1.5.10}$$

trong đó, *V(t)* & *Θ(t)* được gọi là đường bao và pha của tín hiệu thông dải *x(t)*. Biểu diễn theo hai thành phần này như sau

$$x(t) = V(t).\cos\left(2\pi f_0 t + \Theta(t)\right) \tag{1.5.11}$$

Đường bao và pha có thể được biểu diễn như sau

$$\begin{cases} V(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \Theta(t) = \arctan \dfrac{x_s(t)}{x_c(t)} \end{cases} \tag{1.5.12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}(t)} \\ \Theta(t) = \arctan \dfrac{\hat{x}(t)}{x(t)} - 2\pi f_0 t \end{cases} \tag{1.5.13}$$

Từ các quan hệ phần trước thấy rõ, *đường bao* của tín hiệu ***độc lập với*** việc chọn tần số trung tâm f_0 (thường là tần số sóng mang), trong khi đó *pha* của tín hiệu lại *phụ thuộc* vào việc chọn tần số f_0 này.

Chương trình Mtalab tạo tín hiệu giải tích này để biểu diễn thông thấp của tín hiệu, các thành phần vuông pha, đồng pha, đường bao và pha của tín hiệu, chúng được cho bởi các file ***analytic.m; lowep.m; quadcomp.m; env_phas.m*** trong phụ lục 4A

```
function z=analytic(x)
%       z=analytic(x)
%ANALYTIC   returns the analytic signal corresponding to signal x%

z=hilbert(x);
```

```
function [ v,phi] =env_phas(x,ts,f0)
%       [ v,phi] =env_phas(x,ts,f0)
%              v=env_phas(x,ts,f0)
%ENV_PHAS       Returns the envelope and the phase of the bandpass signal x.
%       f0 is the center frequency.
%       ts is the sampling interval.
if nargout == 2
  z=loweq(x,ts,f0);
  phi=angle(z);
end
v=abs(hilbert(x));
```

```
function xl=loweq(x,ts,f0)
%       xl=loweq(x,ts,f0)
%LOWEQ      returns the lowpass equivalent of the signal x
%       f0 is the center frequency.
%       ts is the sampling interval.
%
t=[ 0:ts:ts*(length(x)-1)] ;
z=hilbert(x);
xl=z.*exp(-j*2*pi*f0*t);
```

```
function [ xc,xs] =quadcomp(x,ts,f0)
%       [ xc,xs] =quadcomp(x,ts,f0)
%QUADCOMP   Returns the in-phase and quadrature components of
%       the signal x. f0 is the center frequency. ts is the
%       sampling interval.
%
z=loweq(x,ts,f0);
xc=real(z);
xs=imag(z);
```

```
function p=spower(x)
%       p=spower(x)
%SPOWER     returns the power in signal x
```

```
p=(norm(x)^2)/length(x);
```

```
function y=rect(x)
% y=rect(x), determines the rectangular function
y=((x>-0.5) & (x<0.5))+0.5*(x==-0.5)+0.5*(x==0.5);
```

```
function y=signum(x)
%SIGNUM finds the signum of a vector.
%   Y=SIGNUM(X)
%   X=input vector
y=x;
y(find(x>0))=ones(size(find(x>0)));
y(find(x<0))=-ones(size(find(x<0)));
y(find(x==0))=zeros(size(find(x==0)));
```

```
function y=sinc(x)
% Y=SINC(X), determines the sinc function
y=(sin(pi*x)+(x==0))./(pi*x+(x==0));
```

```
function [ M,m,df] =fftseq(m,ts,df)
%       [ M,m,df] =fftseq(m,ts,df)
%       [ M,m,df] =fftseq(m,ts)
%FFTSEQ     generates M, the FFT of the sequence m.
%       The sequence is zero padded to meet the required frequency resolution df.
%       ts is the sampling interval. The output df is the final frequency
resolution.
%       Output m is the zero padded version of input m. M is the FFT.
fs=1/ts;
if nargin == 2
  n1=0;
else
  n1=fs/df;
end
n2=length(m);
n=2^(max(nextpow2(n1),nextpow2(n2)));
M=fft(m,n);
m=[ m,zeros(1,n-n2)] ;
df=fs/n;
```

1.6. Điều chế DSB-AM tương tự

Phần này ta chỉ xét phương pháp điều chế DSB-AM đơn giản trong kênh ***tạp âm cộng***. DSB-AM, được xét với:

- ✓ *Biểu diễn tín hiệu điều chế trong miền thời gian.*
- ✓ *Biểu diễn tín hiệu điều chế trong miền tần số.*
- ✓ *Độ rộng băng thông (Bandwidth) của tín hiệu điều chế.*
- ✓ *Công suất của tín hiệu điều chế.*
- ✓ *Ảnh hưởng tạp âm kênh lên tín hiệu thu.*

Chúng không độc lập nhau mà phụ thuộc lẫn nhau. Tồn tại các quan hệ mật thiết lẫn nhau khi biểu diễn chúng trong miền tần số và miền thời gian thông qua phép biến đổi Fourier FT. Vì vậy, độ rộng băng tần của tín hiệu được xác định theo dạng các đặc tính tần số của nó.

Điều chế biên độ là phương pháp điều chế mà làm thay đổi biên độ của sóng mang theo quy luật của tín hiêu tin tức, nó thuộc laọi điều chế tuyến tính. Sự phụ thuộc giữa tín hiệu điều chế và sóng mang khi này là rất đơn giản chẳng hạn. Các hệ thống điều chế AM thường được đặc trưng bởi yêu cầu về độ rộn băng tương đối thấp và không hiệu quả về công suất so với các phương pháp điều chế góc. Yêu cầu về độ rộng băng đối với các hệ thống điều chế AM thay đổi trong khoảng *W* và *2W* trong đó *W* là độ rộng băng của tín hiệu bản tin.

Trong phương pháp DSB-AM, biên độ của tín hiệu điều chế tỉ lệ với tín hiệu bản tin; nghĩa là, biểu diễn tín hiệu điều chế trong miền thời gian được cho bởi

$$u(t) = m(t)\underbrace{A_c cos\left(2\pi f_c t\right)}_{c(t)} \tag{1.6.1}$$

$$U(f) = \frac{A_c}{2}\left[M\left(f - f_c\right) + M\left(f + f_c\right)\right] \tag{1.6.2}$$

trong đó *M(f)* là biến đổi Fourier của *m(t)*. Thấy rõ, loại điều chế này đã dịch phổ tín hiệu bản tin lên vùng tần số mới được trung tâm tại $\pm f_c$ và nhân với hệ số $A_c/2$. Ký hiệu B_T là độ rộng băng thông truyền dẫn và bằng 2 lần độ rộng băng thông của tín hiệu bản tin W, nghĩa là

$$B_T = 2W \tag{1.6.3}$$

Công suất tín hiệu điều chế được cho bởi

$$\begin{aligned}
p_u &= \lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)dt \\
&= \lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A_c^2 m^2(t) cos^2\left(2\pi f_c t\right)dt \\
&= \lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A_c^2 m^2(t)\frac{1+cos\left(4\pi f_c t\right)}{2}dt \\
&= A_c^2\left\{\lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{m^2(t)}{2}dt + \lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)\frac{cos\left(4\pi f_c t\right)}{2}dt\right\} \\
&= A_c^2\lim_{T\leftarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{m^2(t)}{2}dt \\
&= \frac{A_c^2}{2}p_m
\end{aligned} \tag{1.6.4 \& 1.6.5}$$

trong đó P_m là công suất tín hiệu bản tin. Trong phương trình (1.6.4), *m(t)* là tín hiệu thông thấp có tần số nhỏ hơn rất nhiều $2f_c$, tần số $cos(4\pi f_c t)$. Vì vậy, tích phân

$$\int_{-T/2}^{T/2} m^2(t)\frac{cos\left(4\pi f_c t\right)}{2}dt \tag{1.6.7}$$

chuyển về không khi $T \Rightarrow \infty$.

Cuối cùng, SNR cho hệ thống DSB-AM bằng với SNR băng tần cơ sở; nghĩa là

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{P_R}{N_0 W} \tag{1.6.8}$$

trong đó P_R công suất thu (công suất trong tín hiệu điều chế ở máy thu), $N_0/2$ là mật độ phổ tạp âm (giả thiết tạp âm trắng) và W là độ rộng băng tần bản tin.

Bài tập NVD4B_sim7:

ĐIỀU CHẾ DSB-AM

Tín hiệu bản tin được định nghĩa là

$$m(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \dfrac{t_0}{3} \\ -2, & \dfrac{t_0}{3} < t \le \dfrac{2t_0}{2} \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Bản tin này điều chế sóng mang $c(t) = cos(2\pi f_c t)$ theo phương pháp DSB-AM, và ký hiệu $u(t)$ là tín hiệu sóng mang được điều chế. Giả thiết t_0 = 0,15 và f_c = 250Hz. Hãy

1. *Biểu diễn tín hiệu điều chế u(t).*
2. *Tìm phổ của m(t) và u(t).*
3. *Giả sử tín hiệu bản tin là tín hiệu tuần hoàn có $T_0 = t_0$. Tìm công suất trong tín hiệu điều chế.*
4. *Nếu cộng tạp âm vào tín hiệu điều chế sao cho SNR=10 dB, tìm công suất tạp âm.*

Lời giải:

❖ Tín hiệu bản tin được viết như sau

$$m(t) = \prod\left(\frac{t - {t_0}/{6}}{{t_0}/{3}}\right) - 2\prod\left(\frac{t - {t_0}/{6}}{{t_0}/{3}}\right)$$

Vì vậy thay t_0 = 0,15 và f_c = 250Hz vào ta có tín hiệu điều chế

$$u(t) = \left[\prod\left(\frac{t - 0,025}{0,05}\right) - 2\prod\left(\frac{t - 0,075}{0,05}\right)\right]\cos(500\pi t) \tag{1.6.9}$$

❖ **Dùng quan hệ FT chuẩn (tra bảng) $\Im\left[\prod(t)=\sin c(t)\right]$ cùng với các tính chất dịch và tỉ lệ của biến đổi Fourier, ta có**

$$\begin{aligned}\Im\left[m(t)\right] &= \frac{t_0}{3}e^{-j\pi f t_0/3}\sin c\left(\frac{t_0 f}{3}\right)-2\frac{t_0}{3}e^{-j\pi f t_0}\sin c\left(\frac{t_0 f}{3}\right)\\ &= \frac{t_0}{3}e^{-j\pi f t_0/3} sinc\left(\frac{t_0 f}{3}\right)\left(1-e^{-j2\pi f t_0/3}\right)\end{aligned} \quad (1.6.10)$$

thay $t_0 = 0{,}15$ vào ta được

$$\Im\left[m(t)\right]=0{,}05e^{-0{,}05 j\pi f}\sin c\left(0{,}05 f\right).\left(1-e^{-0{,}1 j\pi f}\right) \quad (1.6.11)$$

Với tín hiệu điều chế *u(t)*, ta có

$$\begin{aligned}U(f) &= 0{,}025e^{-j\pi(f-f_c)}\sin c\left[0{,}05(f-f_c)\right].\left(1-2e^{-0{,}1 j\pi(f-f_c)}\right)\\ &\quad +0{,}025e^{-0{,}05 j\pi(f+f_c)}\sin c\left[0{,}05(f+f_c)\right].\left(1-2e^{-0{,}1 j\pi(f+f_c)}\right)\end{aligned} \quad (1.6.12)$$

Vẽ phổ biên độ của tín hiệu bản tin và phổ của tín hiệu điều chế được cho ở hình 1.16, là kết quả chạy chương trình Matlab. Lưu ý rằng, thay đổi các tham số của chương trình để khảo sát:

❖ **Công suất trong tín hiệu điều chế được cho bởi**

$$P_U=\frac{A_c^2}{2}P_m=\frac{1}{2}P_m$$

trong đó P_m là công suất trong tín hiệu bản tin

$$\begin{aligned}P_m &= \frac{1}{t_0}\int_0^{2t_0/3} m^2(t)dt\\ &= \frac{1}{t_0}\left(\frac{t_0}{3}+\frac{4t_0}{3}\right)=\frac{5}{3}=1{,}666\end{aligned}$$

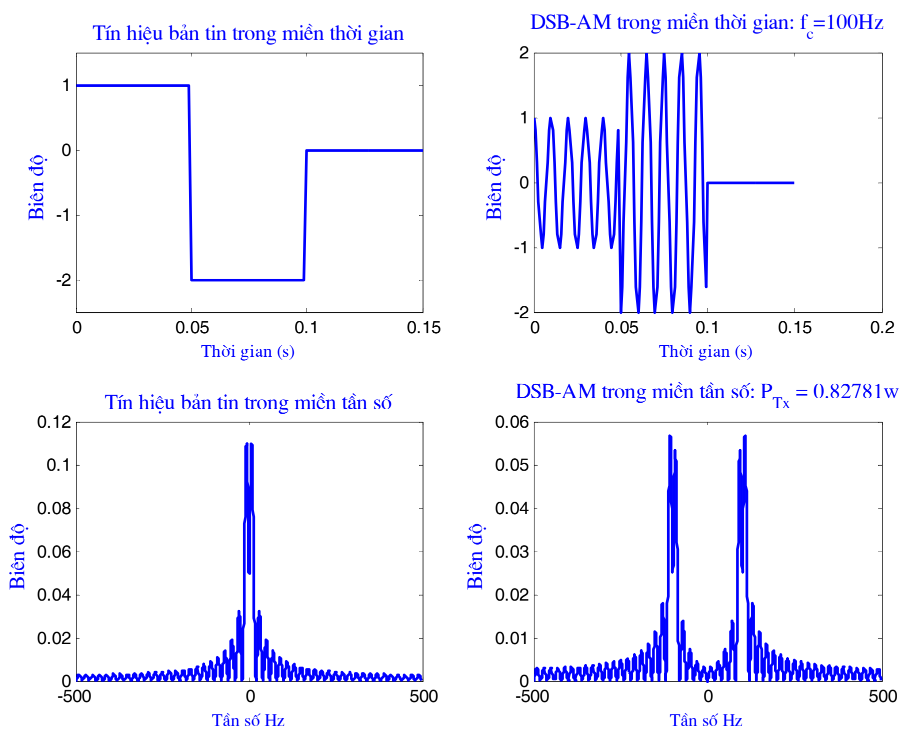
và $$P_U=\frac{P_m}{2}=0{,}833$$

❖ **Công suất tạp âm**

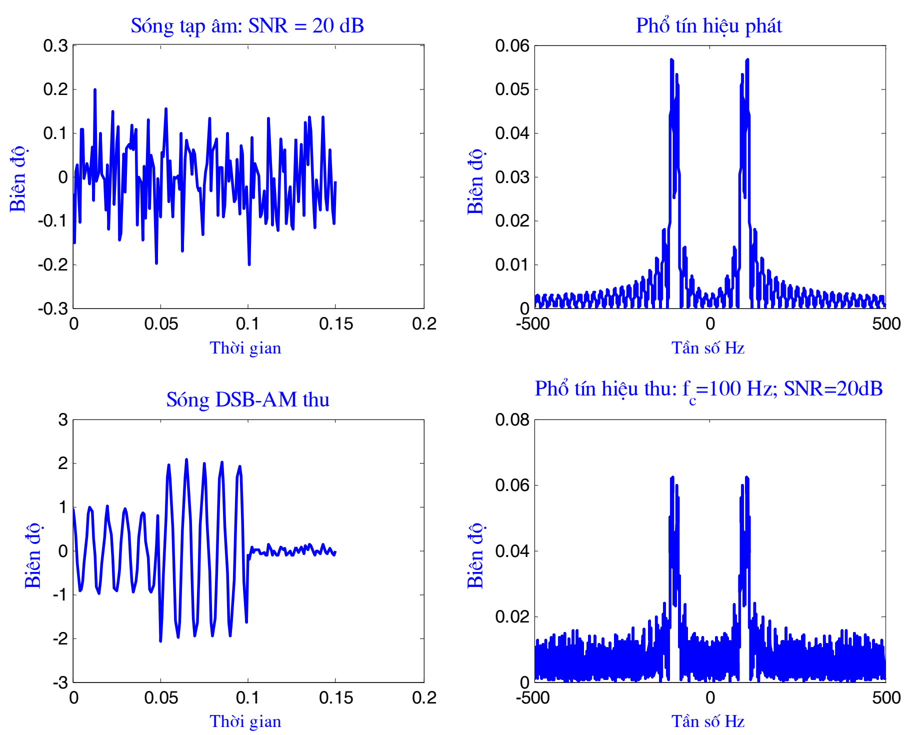
$$10\log_{10}\left(\frac{P_R}{P_n}\right)=10$$

hoặc $P_R = P_U = 10P_n, \Rightarrow P_n = P_U/10 = 0{,}0833$

Chương trình Matlab mô phỏng điều chế DSB-AM được cho bởi **NVD4B_sim7.m** trong phụ lục 4A. Các kết quả mô phỏng được cho ở các hình 1.16 và hình 1.17. Để được tường mình, ta thay đổi các giá trị của các tham số khi chạy chương trình như: tần số sóng mang, SNR,...



Hình 1.16 Tín hiệu bản tin và tín hiệu đầu ra bộ điều chế trong các miền thời gian và tần số



Hình 1.17. Mô phỏng tạp âm, tín hiệu thu trong các miền thời gian và tần số

```
function NVD4B_sim7
%File NVD4B_sim7.m = CS31.m
% demonstration for DSB-AM modulation.
%========================
clc;
clear all;
close all;
%========================
t0      = .15;              % signal duration
ts      = 0.001;            % sampling interval
fc      = input('   Nhap tan so song mang =    ');  % Carrier frequency
snr     = input('   Nhap SNR = ');
fs      = 1/ts;             % Sampling frequency
df      = 0.3;              % desired frequency resolution
t       = [0:ts:t0];        % time vector
snr_lin = 10^(snr/10);      % Linear SNR
%========================
% message signal
m   = [ones(1,t0/(3*ts)),-2*ones(1,t0/(3*ts)),zeros(1,t0/(3*ts)+1)];
c   = cos(2*fc*pi.*t);          % Carrier signal
u   = m.*c;                     % modulation signal
[M,m,df1]    = fftseq(m,ts,df);  % Fourier Transform
M            = M/fs;             % scaling
[U,u,df1]    = fftseq(u,ts,df);  % Fourier Transform
U            = U/fs;             % scaling
[C,c,df1]    = fftseq(c,ts,df);  % Fourier Transform
C            = C/fs;             % scaling
f            = [0:df1:df1*(length(m)-1)]-fs/2;   % frequency vector
signal_power    = spower(u(1:length(t)));       % power in modulated signal
noise_power     = signal_power/snr_lin;         % compute noise power
noise_std       = sqrt(noise_power);            % Compute noise standard
deviation
noise           = noise_std*randn(1,length(u)); % Generate noise
r               = u + noise;                    % add noise to the modulated
signal
[R,r,df1]       = fftseq(r,ts,df);              % spectrum of the signal + noise
R               = R/fs;                         % scaling
%========================
h1_27 = figure(1)
set(h1_27,'name','H1.27: NVD')
%==========
% the message signal in time domain
subplot(221);
plot(t,m(1:length(t)),'LineWidth',2);
xlabel('Thời gian (s)','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title('Tín hiệu bản tin trong miền thời gian',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
axis([min(t) max(t) min(m)-0.5 max(m)+0.5])
%==========
% the message signal in frequency domain
subplot(223);
plot(f,abs(fftshift(M)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Tần số Hz','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title('Tín hiệu bản tin trong miền tần
số','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);

%==========
```

```
% the modulated signal in time domain
subplot(222);
plot(t,u(1:length(t)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Thời gian (s)','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title([ 'DSB-AM trong miền thời gian: f_c=',num2str(fc),'Hz'],...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
%===========
% the modulated signal in the frequency domain
subplot(224);
plot(f,abs(fftshift(U)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Tần số Hz','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title([ 'DSB-AM trong miền tần số: P_T_x = ',num2str(signal_power),'w'],...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
%=====================================================
h1_28 = figure(2)
set(h1_28,'name','H1.28: NVD')

subplot(221);
plot(t,noise(1:length(t)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title([ 'Sóng tạp âm: SNR = ',num2str(snr),' dB'],...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);

subplot(222);
plot(f,abs(fftshift(U)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Tần số Hz','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title('Phổ tín hiệu phát',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);

subplot(223);
plot(t,r(1:length(t)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Thời gian','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title('Sóng DSB-AM thu',...
    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);

subplot(224);
plot(f,abs(fftshift(R)),'LineWidth',1.5);
xlabel('Tần số Hz','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Biên độ ','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title([ 'Phổ tín hiệu thu: f_c=',num2str(fc),' Hz; SNR=',num2str(snr),'dB'],...

    'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
```