PHỤ LỤC 7B1

Biến ngẫu nhiên, quá trình ngẫu nhiên và tín hiệu tất định

Nội dung **Trang**

Một số điểm lưu ý về ký hiệu toán trong biểu diễn

Quá trình ngẫu nhiên: Trong phạm vi xét của ta, một quá trình ngẫu nhiên là hàm của hai biến (biến sự kiện và biến thời gian) nghĩa là quá trình ngẫu nhiên được biểu diễn tường minh bởi $\mu(s,t)$, nhưng để tiện và cũng được dùng trong nhiều tài liệu ta cũng ký hiệu là $\mu(t)$.

Đường bao phức tín hiệu và tín hiệu tất định: Trong tài liệu ta dùng dấu ngã phía trên để ký hiệu để biểu diễn đường bao phức của tín hiệu thông dải. Còn ở đây xét tín hiệu ngẫu nhiên và tất định, để phân biệt ta dùng dấu ngã cho tín hiệu tất định. Chẳng hạn, ký hiệu $\tilde{\mu}(t)$ là tín hiệu tất định trong khi đó $\mu(t)$ ký hiệu cho tín hiệu ngẫu nhiên.

Ta nên liên hệ phần này với phụ lục 7B2: Phần này đây chỉ trình bầy các vấn đề căn bản về biến ngẫu nhiên, quá trình ngẫu nhiên, tín hiệu tất định vì vậy ta nên tham khảo phần phụ lục 7B, ở đó trình bầy rất súc tích, cô đọng nhưng rất đầy đủ về lý thuyết xác suất, phân loại quá trình ngẫu nhiên, ước tính...

2.1. BIẾN NGẪU NHIÊN

Các biến ngẫu nhiên có tầm quan trọng nhất vì: Không chỉ để lập mô hình ***thống kê*** mà cả để lập mô hình ***tất định*** cho các các kênh vô tuyến $\Rightarrow$ ta xét tổng quan một số định nghĩa và thuật ngữ cơ bản thường được sử dụng cho các biến ngẫu nhiên

❖ Thí nghiệm ngẫu nhiên

Thí nghiệm ngẫu nhiên là thí nghiệm mà các kết cục của nó không biết trước được

+ Điểm mẫu **s**: là điểm thể hiện các kết cục của một biến ngẫu nhiên
+ Sự kiện A={s}: Tập các kết cục có thể có của một thí ngiệm ngẫu nhiên, là một sự kiện (biến cố) A. Biến cố A={s} chỉ có một phần tử s là một biến cố cơ bản
+ Không gian mẫu Q: Tập tất cả các kết cục có thể có của một thí nghiệm ngẫu nhiên cho trước được gọi là không gian mẫu Q của thí nghiệm này

⇒ **Như vậy,** điểm mẫu là một phần tử của sự kiện, nghĩa là $s \in A$. Sự kiện A là một tập con của không gian mẫu, nghĩa là $A \subset Q$ ⇒ Không gian mẫu Q được gọi là sự kiện chắc chắn (*Certain event*), và tập rỗng (*Empty*) hay tập rỗng (*Null*) ký hiệu là ∅ là sự kiện không thể (Impossible Event)

➢ ***Trường -σ***

Giả sử $\mathcal{A}$ là một lớp (tập hợp) các tập con của không gian mẫu Q. Trong lý thuyết xác suất, $\mathcal{A}$ thường được gọi là **trường -σ** (hay đại số σ), khi và chỉ khi thoả mãn các điều kiện sau:

1. Tập rỗng $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. Nếu $A \in \mathcal{A}$, thì $Q\text{-}A \in \mathcal{A}$, nghĩa là nếu sự kiện A là một phần tử của lớp $\mathcal{A}$ thì cũng là bù của nó
3. Nếu $A_n \in \mathcal{A}$ (n=1,2,3....) thì $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, nghĩa là nếu tất cả các biến cố A_n đều là các phần tử của lớp $\mathcal{A}$ thì thì hợp đếm được của chúng cũng là các phần tử của $\mathcal{A}$

➢ ***Không gian khả đo (Measurable Space)***

Cặp $(Q,\mathcal{A})$ gồm không gian mẫu Q và trường σ, $\mathcal{A}$ được gọi không gian khả đo

➢ ***Ánh xạ***

Ánh xạ P: $\mathcal{A} \rightarrow IR$ được gọi là số đo xác suất *hay* đơn giản là xác suất, nếu thoả mãn các điều kiện sau:

1. Nếu $A \in \mathcal{A}$ thì $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(Q) = 1$
3. Nếu $A_n \in \mathcal{A}$ (n=1,2...) với $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ và $A_n \cap A_k \neq \varnothing$ đối với mọi $n \neq k$, thì cũng được $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

➢ ***<u>Không gian xác suất</u>***

Không gian xác suất là bộ ba $\{Q, \mathcal{A}, P\}$.

❖ **Biến ngẫu nhiên**

Biến ngẫu nhiên $\mu \in Q$ là ánh xạ mà thực hiện gán cho mỗi kết cục **s** của một thí nghiệm ngẫu nhiên một số $\mu(s)$, (lưu ý rằng, biến ngẫu nhiên là một hàm giá trị thực), nghĩa là

$$\mu : Q \rightarrow IR,\ s \mapsto \mu(s) \tag{2.1}$$

ánh xạ này có tính chất là: tập $\{s | \mu(s) \le x\}$ là sự kiện của đại số σ được xét cho tất cả $x \in IR$, nghĩa là $\{s | \mu(s) \le x\} \in \mathcal{A}$ ⇒ Vì thế biến ngẫu nhiên là một hàm của của các phần tử trong không gian mẫu Q.

Xác suất mà biến ngẫu nhiên nhỏ hơn hoặc bằng x, ta sử dụng ký hiệu đơn giản sau:

$$P(\mu \le x) = P(\{s|\mu(s) \le x\}) \tag{2.2}$$

❖ **Hàm phân bố tích luỹ**

Hàm F_μ, được định nghĩa bởi

$$F_\mu : IR \to [0,1],\ x \mapsto F_\mu(x) = P(\mu \le x) \tag{2.3}$$

được gọi là hàm phân bố tích luỹ của biến ngẫu nhiên μ. Hàm phân bố tích luỹ F_μ (x) thoả mãn các thuộc tính sau:

a) $F_\mu(-\infty) = 0$;

b) $F_\mu(\infty) = 1$

c) $F_\mu(x_1) \le F_\mu(x_2)$ nếu $x_1 \le x_2$.

❖ **Hàm mật độ xác suất**

Hàm p_μ được định nghĩa bởi

$$p_\mu: IR \to IR,\ x \mapsto p_\mu(x) = \frac{dF_\mu(x)}{dx} \tag{2.4}$$

được gọi là hàm mật độ xác suất (hay mật độ xác suất hay đơn giản là mật độ) của biến ngẫu nhiên μ, trong đó giả thiết rằng hàm phân bố tích luỹ $F_\mu(x)$ khả vi theo x. Hàm mật độ xác suất $p_\mu(x)$ có các thuộc tính sau:

a) $p_\mu(x) \ge 0$ đối với mọi x;

b) $\int_{-\infty}^{\infty} p_\mu(x)dx = 1$

c) $F_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\mu(x)dx$.

❖ **Hàm phân bố tích luỹ đồng thời (hay liên hợp)**

Hàm $F_{\mu_1\mu_2}$ được định nghĩa bởi

$$F_{\mu_1\mu_2} : IR^2 \to [0,1],\ (x_1, x_2) \mapsto F_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2) = P(\mu_1 \le x_1, \mu \le x_2) \tag{2.5}$$

được gọi là hàm phân bố tích luỹ đồng thời (hay hàm phân bố tích luỹ hai biến) của các biến ngẫu nhiên μ_1 và μ_2.

❖ **Hàm mật độ xác suất đồng thời**

Hàm $p_{\mu_1\mu_2}$ được định nghĩa bởi

$$p_{\mu_1\mu_2} : IR^2 \to IR,\ (x_1, x_2) \mapsto p_{\mu_1\mu_2}(x_1 x_2) = \frac{\partial^2 F_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{2.6}$$

được gọi là hàm mật độ xác suất đồng thời (hay hàm mật dộ xác suất hai biến hay đơn giản là mật độ hai biến) của các biến ngẫu nhiên μ_1 và μ_2 với giả thiết hàm phân bố tích luỹ đồng thời $F_{\mu1\mu2}(x_1, x_2)$ khả vi riêng (từng phần) theo x_1 và x_2.

❖ **Độc lập thống kê**

Các biến ngẫu nhiên μ_1 và μ_2 được coi là độc lập thống kê, nếu các sự kiện $\{s|\mu_1(s) \le x_1\}$ và $\{s|\mu_2(s) \le x_2\}$ độc lập với nhau với mọi x_1, $x_2 \in$ IR.

⇒ Trong trường hợp này ta có

$$F_{\mu1\mu2}(x_1, x_2) = F_{\mu1}(x_1).F_{\mu2}(x_2)$$

$$p_{\mu1\mu2}(x_1, x_2) = p_{\mu1}(x_1).p_{\mu2}(x_2).$$

❖ **Các hàm mật độ xác suất duyên biên**

Các *hàm mật độ xác suất duyên biên* (hay các *mật độ biên*) của hàm mật độ xác suất đồng thời $p_{\mu1\mu2}(x_1,x_2)$ được xác định như sau:

$$p_{\mu_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2)dx_2 \tag{2.7a}$$

$$p_{\mu_2}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2)dx_1 \tag{2.7b}$$

⇒ *cho phép khử bớt các biến từ hàm nhiều biến.*

❖ **Giá trị kỳ vọng (giá trị trung bình)**

Đại lượng

$$E\{\mu\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{\mu}(x)dx \tag{2.8}$$

được gọi là giá trị kỳ vọng (hay giá trị trung bình hay trung bình thống kê) của biến ngẫu nhiên μ, trong đó E{.} ký hiệu cho toán tử lấy giá trị kỳ vọng biến ngẫu nhiên.

Toán tử lấy giá trị kỳ vọng E{.} có tính tuyến tính, nghĩa là thoả mãn hai điều kiện sau:

$$E\{\alpha\mu\} = \alpha\times E\{\mu\} \qquad \text{trong đó } \alpha\in \text{IR}$$

$$E\{\mu_1+\mu_2\} = E\{\mu_1\} + E\{\mu_2\}$$

Nếu f(μ) là hàm của biến ngẫu nhiên μ, thì giá trị kỳ vọng của f(μ) được xác định theo quan hệ cơ bản sau:

$$E\{f(\mu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_{\mu}(x)dx) \tag{2.9}$$

⇒ Tổng quát hoá cho hai biến μ_1 và μ_2 ta được

$$E\{f(\mu_1, \mu_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)p_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2 \tag{2.10}$$

❖ **Phương sai**

Giá trị

$$\mathrm{Var}\{\mu\} = E\{(\mu - E\{\mu\})^2\}$$
$$= E\{\mu^2\} - (E\{\mu\})^2 \qquad (2.11)$$

được gọi là phương sai của μ, trong đó Var{.} ký hiệu cho *toán tử phương sai*. Phương sai của một biến ngẫu nhiên μ là số đo về sự tập trung của μ xung quanh giá trị kỳ vọng của nó (hay đánh giá mức độ phân tán so với giá trị trung bình của nó).

❖ **Đồng phương sai (hiệp biến) Covariance**

Hiệp biến của hai biến ngẫu nhiên μ_1 và μ_2 được định nghĩa bởi

$$\mathrm{Cov}\{\mu_1, \mu_2\} = E\{(\mu_1 - E\{\mu_1\})(\mu_2 - E\{\mu_2\})\} \qquad (2.12a)$$
$$= E\{\mu_1\mu_2\} - E\{\mu_1\}E\{\mu_2\} \qquad (2.12b)$$

❖ **Moment**

Môment bậc k của biến ngẫu nhiên μ được xác định như sau

$$E\{\mu^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_\mu(x)dx\,,\ k=0,1,... \qquad (2.13)$$

❖ **Hàm đặc tính (đặc trưng)**

Hàm đặc tính của biến ngẫu nhiên μ được xác định như là giá trị kỳ vọng

$$\Psi_\mu(\nu) = E\{e^{j2\pi\nu\mu}\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_\mu(x)e^{j2\pi\nu\mu}dx \qquad (2.14)$$

trong đó ν là một biến ngẫu nhiên giá trị thực. Cần lưu ý rằng $\Psi_\mu(-\nu)$ là biến đổi Fourier của hàm mật độ xác suất $p_\mu(x)$. Hàm đặc trưng cho ta xác định *hàm mật độ xác suất* của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê một cách đơn giản (ví dụ phần phụ lục).

❖ **Bất đẳng thức Chebyshev**

Nếu cho μ là một biến ngẫu nhiên bất kỳ có giá trị kỳ vọng và phương sai hữu hạn, thì bất đẳng thức Chebyshev

$$P(|\mu - E\{\mu\}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}\{\mu\}}{\varepsilon^2} \qquad (2.15)$$

đúng cho mọi ε>0. Bất đẳng thức Chebyshev thường được sử dụng để nhận các giới hạn biên của xác suất khi tìm được μ nằm ngoài đoạn $E\{\mu\} \pm \varepsilon\sqrt{\mathrm{Var}\{\mu\}}$.

❖ **Định lý giới hạn trung tâm**

Nếu μ_n (n=1,2,.... N) là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê có

$E\{\mu_n\} = m_{\mu n}$ và

$\mathrm{Var}\{\mu_n\} = \sigma_{\mu n}^2$.

Thì, biến ngẫu nhiên

$$\mu = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} (\mu_n - m_{\mu n}) \quad (2.16)$$

được phân bố tiệm cận chuẩn (Gausơ) với

+ Giá trị kỳ vọng: $E\{\mu\} = 0$ và

+ Phương sai: $\mathrm{Var}\{\mu\} = \sigma_\mu^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} (\mu_n - m_{\mu n})$

Định lý giới hạn trung tâm đóng vai trò cơ bản trong lý thuyết tiệm cận thống kê. Mật độ của tổng (2.16) với chỉ **bẩy** biến ngẫu nhiên độc lập thống kê có phương sai gần giống nhau thường cho ta phép xấp xỉ hoá thành phân bố chuẩn (Gausơ) khá chính xác.

2.1.1. Hàm mật độ xác suất quan trọng

Ta tổng kết một số hàm mật độ xác suất quan trọng thường được sử dụng để mô hình hoá kênh. Đề cập các thuộc tính thống kê như: giá trị kỳ vọng và phương sai. Tóm tắt một số quy tắc tính toán quan trọng để cộng, nhân và biến đổi các biến ngẫu nhiên. Việc dùng mô hình xác suất không những cho phép ta dự đoán được kết quả của một thí nghiệm cụ thể mà còn cho phép xác định được xác suất mà một kết cục đã cho sẽ rơi vào một khoảng các giá trị cụ thể.

- **Phân bố đều**
  - ***Lý thuyết***

    Nếu θ là một biến ngẫu nhiên giá trị thực có hàm mật độ xác suất sau

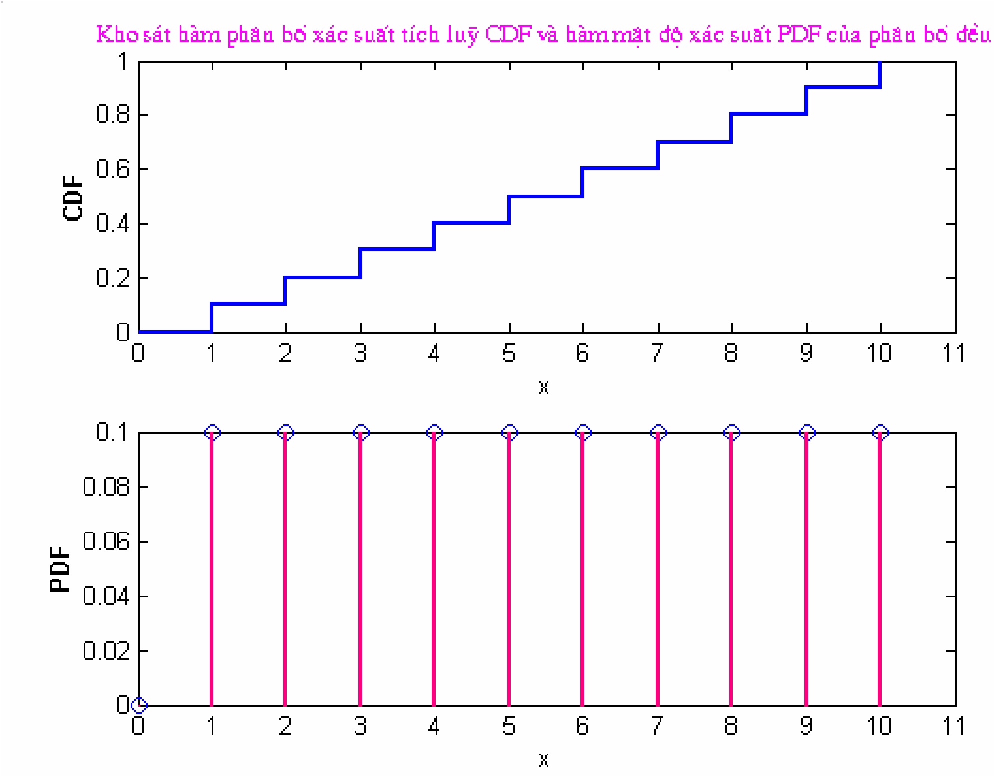
$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0\ , & \text{nếu khác} \end{cases} \quad (2.17)$$

Thì, $P_\theta(x)$ được gọi là phân bố đồng đều và θ được coi là có phân bố đồng đều trong khoảng $[-\pi,\pi)$. Các giá trị kỳ vọng và phương sai tương ứng.

Giá trị kỳ vọng: $E\{\theta\} = 0$

Phương sai: $\mathrm{Var} = \pi^2/3$.

  - ***Khảo sát:*** Chương trình Matlab được cho ở PL1



❖ **Phân bố Gausơ (hay phân bố chuẩn)**

Nếu μ là một biến ngẫu nhiên giá trị thực có hàm mật độ xác suất

$$p_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu} e^{-\frac{(x-m_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2}}, \; x \in IR \quad (2.18)$$

Thì $p_\mu(x)$ được gọi là phân bố Gauss (hay phân bố chuẩn) và μ được coi là có phân bố Gauss (hay phân bố chuẩn). Trong phương trình (2.18), đại lượng $m_\mu \in IR$ ký hiệu cho giá trị kỳ vọng và $\sigma_\mu^2 \in (0,\infty)$ là phương sai của μ, nghĩa là

$$E\{\mu\} = m_\mu \quad (2.19a)$$

$$Var\{\mu\} = E\{\mu^2\} - m_\mu^2 = \sigma_\mu^2 \quad (2.19b)$$

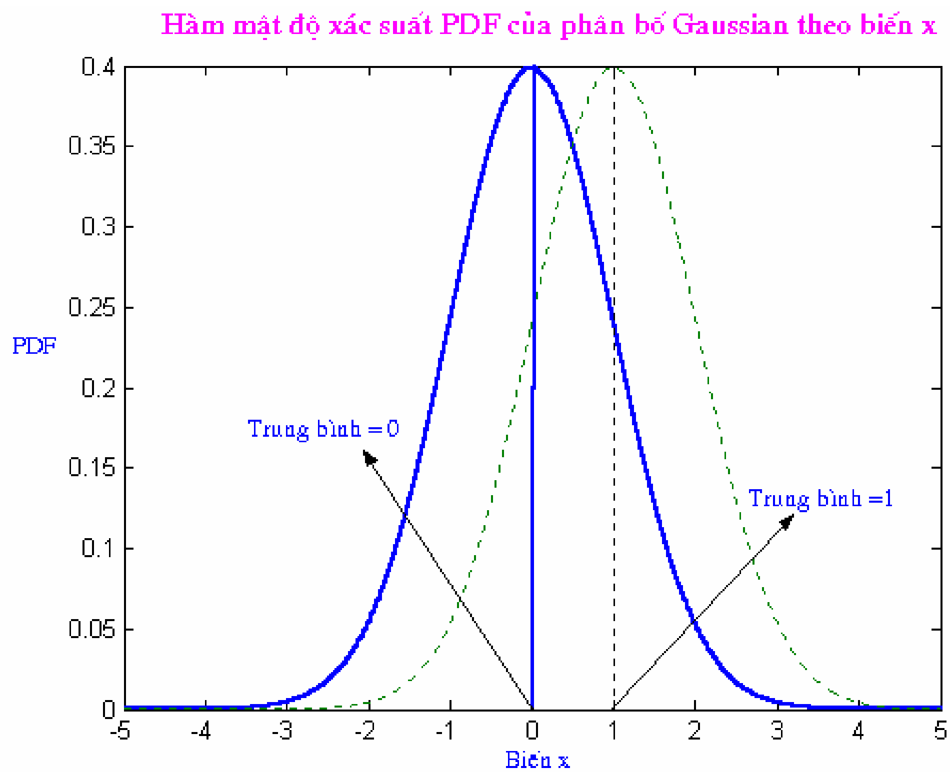
Để mô tả các thuộc tính của các biến ngẫu nhiên phân bố Gausơ μ ta thương sử dụng ký hiệu rút gọn sau: $\tilde{\mu}$: $(N(m_\mu, \sigma_\mu^2)$ thay cho biểu diễn đầy đủ (2.18). Trường hợp đặc biệt khi $m_\mu = 0$ và $\sigma_\mu^2 = 1$ thì N(0,1) được gọi là phân bố chuẩn tắc

➢ **Khảo sát**

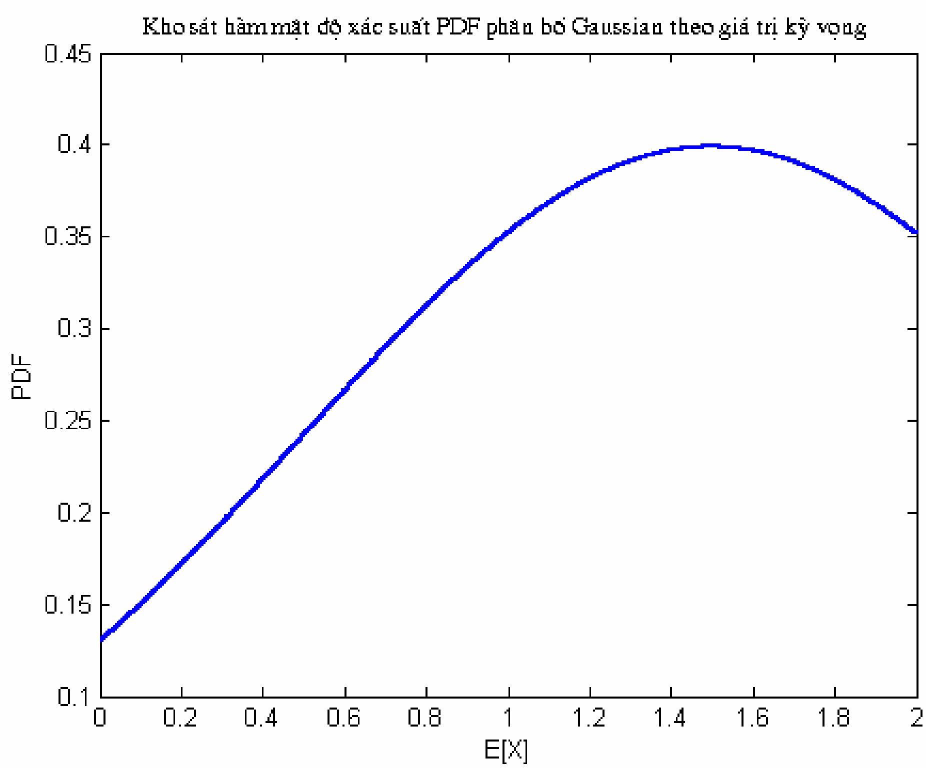
- ***Hàm mật độ xác suất pdf***

<u>Ví du minh hoa</u>: Chương trình Matlab được cho ở PL2

Khảo sát pdf theo biến x



Khảo sát pdf theo biến E[μ]



Nhận xét: Có thể khảo sát hàm mật độ pdf theo x, σ_μ, E[μ]

+ Khảo sát hàm mật độ theo x, thì cố định các giá trị σ_μ, E[μ].

+ Khảo sát hàm mật độ theo σ_μ, thì cố định các giá trị x, E[μ].

+ Khảo sát hàm mật độ theo E[μ], thì cố định các giá trị σ_μ, và x.

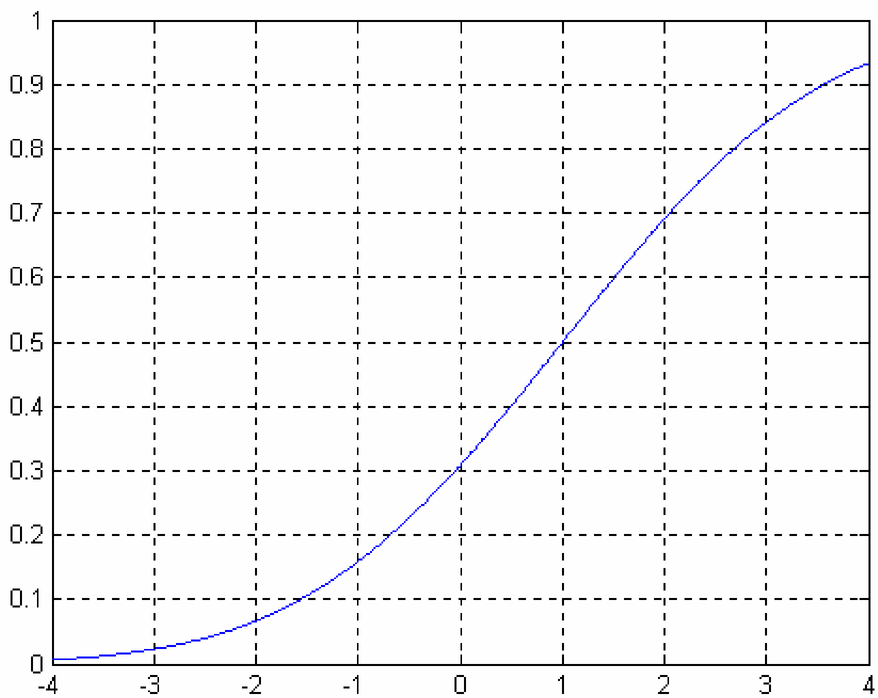
• ***Hàm phân bố tích lỹ cdf***

CDF = norm**cdf**(X,MU,SIGMA) thực hiện tính cdf tại mỗi giá trị X (có thể 1 giá trị hoặc vector) tương ứng với các thông số MU và SIGMA.

$$p = F(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

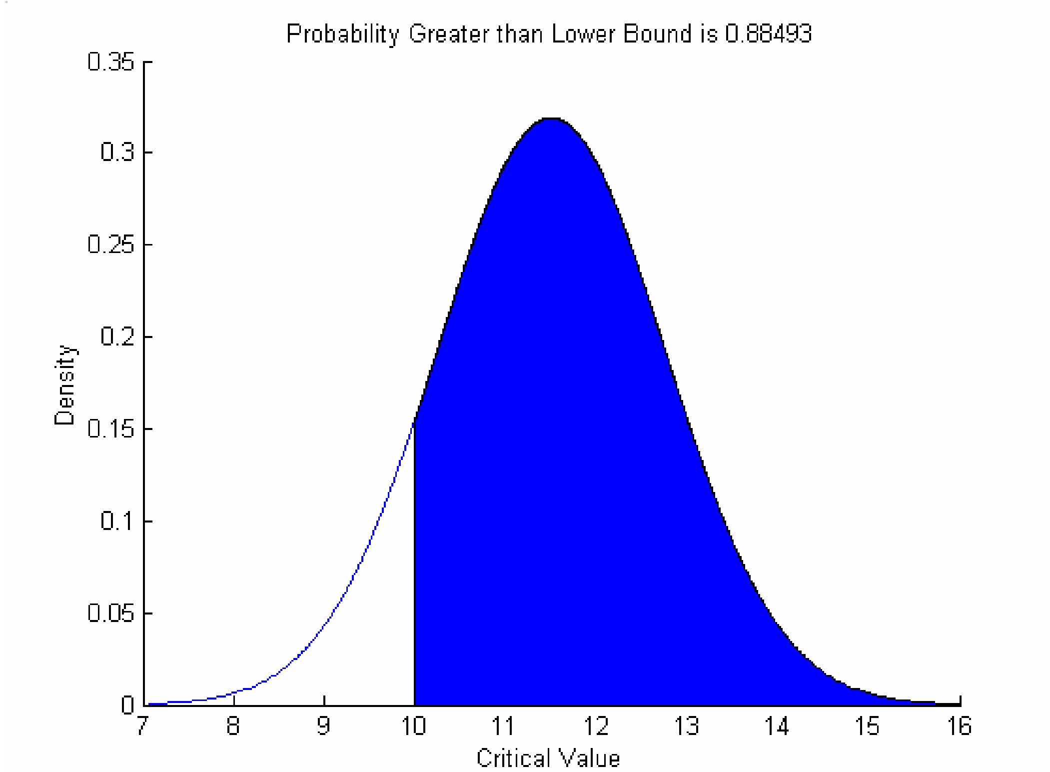
<u>**Ví du**</u> Khảo sát theo biến x

```
X = -4:0.001:4;
Mu = 1;
Sigma = 2;
Plot(x,normcdf(x,mu,sigma));
```

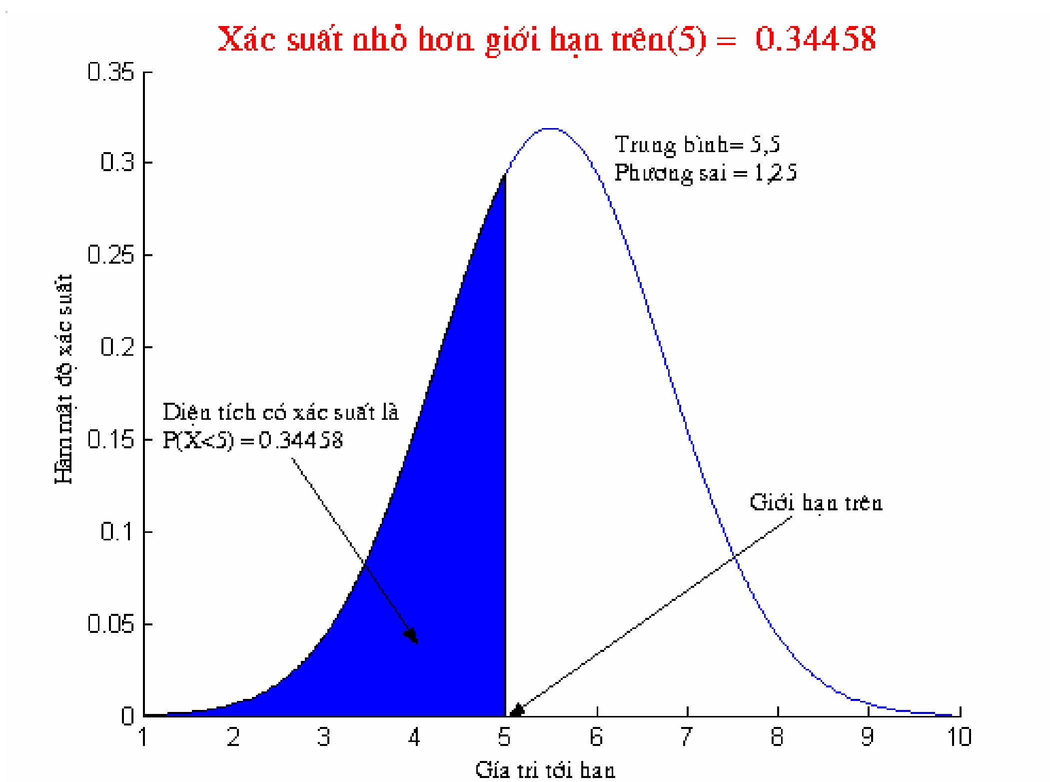


Hàm **mfcnormspec**: Vẽ hàm mật độ xác suất trong khoảng xác định (PL1).

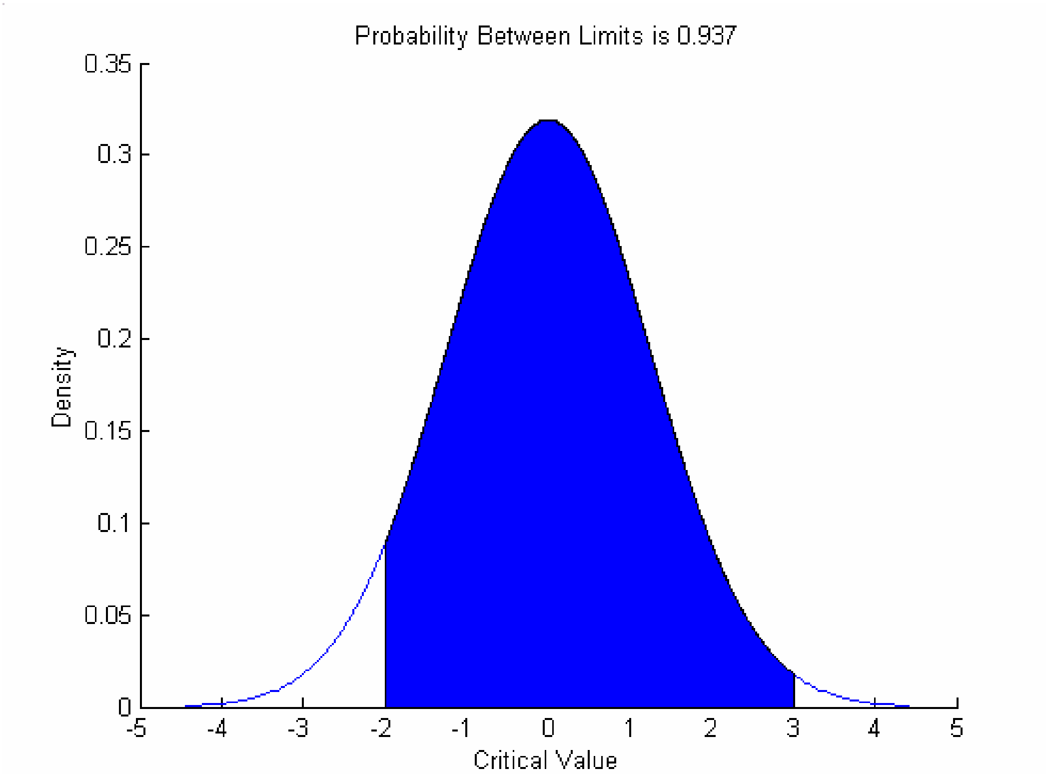
<u>Ví du</u>: mfcnormspec([10 Inf],11.5,1.25)



mfcnormspec([-Inf 5],5.5,1.25)



mfcnormspec([-2 3],0,1.25)



<u>Nhận xét:</u> Ta thấy rõ tính hữu hiệu của hàm **mfcnormspec** cho phép khảo sát tính toán các khoảng giả định thống kê theo các thông số đặc trưng của phân bố Gausơ đặc biệt ứng dụng trong các hàm lỗi **erf**

❖ **Phân bố Gausơ đa biến**

➢ ***Lý thuết***

Nếu xét **n** biến ngẫu nhiên phân bố Gausơ giá trị thực μ_1, μ_2... μ_n tương ứng có các giá trị kỳ vọng $m_{\mu i}$ (i=1,2,....,n) và phương sai $\sigma^2_{\mu i}$ (i=1, 2,....., n).

Thì, hàm Gausơ đa biến (hay phân bố chuẩn đa biến) của các biến ngẫu nhiên Gausơ μ_1, μ_2,...., μ_n được xác định bởi

$$p_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}(x_1, x_2,...., x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sqrt{\det C_\mu}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - m_\mu\right)^T \times C_\mu^{-1} \times \left(x - m_\mu\right)\right] \tag{2.20}$$

trong đó T ký hiệu cho chuyển vị của vectơ (hay ma trận).

Trong biểu thức trên x và m_μ là các vectơ cột được xác định như sau

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in IR^{n\times 1} \tag{2.21}$$

$$m_\mu = \begin{pmatrix} E\{\mu_1\} \\ E\{\mu_2\} \\ . \\ . \\ E\{\mu_n\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{\mu 1} \\ m_{\mu 2} \\ . \\ . \\ m_{\mu n} \end{pmatrix} \in IR^{n\times 1} \qquad (2.21b)$$

detC_μ ký hiệu cho định thức của ma trận đồng phương sai và $\left(C_\mu^{-1}\right)$ ký hiệu cho nghich đảo của ma trận đồng phương sai

$$C_\mu = \begin{pmatrix} C_{\mu_1\mu_1} & C_{\mu_1\mu_2} & . & . & . & C_{\mu_1\mu_n} \\ C_{\mu_2\mu_1} & C_{\mu_2\mu_2} & . & . & . & C_{\mu_2\mu_n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ C_{\mu_n\mu_1} & C_{\mu_n\mu_2} & . & . & . & C_{\mu_n\mu_n} \end{pmatrix} \in IR^{n\times n} \qquad (2.22)$$

Các phần tử của ma trận đồng phương sai (hiệp biến) được xác định như sau

$$C_{\mu_i\mu_j} = Cov(\mu_i, \mu_j) = E\{(\mu_i - m_{\mu i})(\mu_j - m_{\mu j})\} \qquad (2.23)$$

$\Rightarrow$ Rõ thấy, $C_{\mu_i\mu_i} = \sigma_{\mu i}{}^2$ (i=1,2,..,n)

Nếu **n** biến ngẫu nhiên μ_i có phân bố chuẩn và không tương quan từng đôi một $\Rightarrow$ thì ma trận đồng phương sai C_μ sẽ là ma trận đường chéo với các phần tử đường chéo $\sigma^2_{\mu i}$. Trong trường hợp này hàm mật độ xác suất đồng thời (2.20) biến đổi thành tích cả **n** phân bố Gauss của các biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn μ_i ~N($m_{\mu i}, \sigma^2_{\mu i}$). Điều này có nghĩa là các biến ngẫu nhiên μ_i là các biến độc lập thống kê đối với mọi i=1,2,....,n.

- ***Khảo sát***

Khảo sát cho trường hợp hai biến hay pdf phân phối Gausơ 2 chiều. Trung bình m_μ và ma trận hiệp biến C_μ cho trường hợp này là

$$m_\mu = \begin{bmatrix} m_{\mu_1} \\ m_{\mu_2} \end{bmatrix}, \qquad C_\mu = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\mu 1} & C_{\mu_1\mu_2} \\ C_{\mu_1\mu_2} & \sigma^2_{\mu 2} \end{bmatrix} \qquad (PL2.22)$$

trong đó Monent trung tâm hợp $C_{\mu 1\mu 2}$ được định nghĩa là

$$C_{\mu_1\mu_2} = Cov\{\mu_{1i}, \mu_{2j}\} = E\{(\mu_1 - m_{\mu_1})(\mu_2 - m_{\mu_2})\} \qquad (PL2.23)$$

Để thuận tiện ta định nghĩa hiệp biến danh định.

$$\rho_{\mu i\mu j} = \frac{C_{\mu_i\mu_j}}{\sigma_{\mu i}.\sigma_{\mu j}}, \qquad i \neq j \qquad (PL224)$$

trong đó $0 \le |\rho_{\mu i\mu j}| \le 1$. Khi liên hệ với trường hợp hai chiều, thường bỏ qua chỉ số bên dưới đối với $C_{\mu 1\mu 2}$ và $\rho_{\mu_1\mu_2}$. Vì vậy ma trận hiệp biến được biểu diễn là

$$C_\mu = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho.\sigma_1.\sigma_2 \\ \rho.\sigma_1.\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(PL2.225)}$$

Nghịch đảo của ma trận hiệp biến này là

$$C_\mu^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2.\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho.\sigma_1.\sigma_2 \\ -\rho.\sigma_1.\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(PL2.226)}$$

Và định thức của ma trận hiệp biến là

$$\det C_\mu = \sigma_1{}^2.\sigma_2{}^2\left(1-\rho^2\right). \qquad \text{(PL2.227)}$$

Thế nghịch đảo của ma trận đồng phương sai C_μ^{-1} vào phương trình (2.20) được pdf hai biến dưới dạng sau

$$p_{\mu1\mu2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{\sigma_2{}^2(x_1-m_1)^2 - 2\rho.\sigma_1\sigma_2(x_1-m_1)(x_2-m_2) + \sigma_1{}^2(x_2-m_2)^2}{2\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2\left(1-\rho^2\right)}\right]$$

(PL2.228)

Ta lưu ý rằng khi hệ số hiệp biến $\rho = 0$ thì hàm pdf hợp $p_{\mu1\mu2}(x_1,x_2)$ phương trình (PL2.228) chuyển thành tích của hai hàm mật độ xác xuất riêng $p_{\mu1}(x_1)\times p_{\mu2}(x_2)$, trong đó $p_{\mu i}(x_i)$ i =1,2 là các hàm pdf duyên biên (marginal).

$$\begin{aligned} p_{\mu1\mu2}(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1.\sigma_2}\exp\left[-\frac{\sigma_2{}^2(x_1-m_1)^2 + \sigma_1{}^2(x_2-m_2)^2}{2.\sigma_2{}^2.\sigma_1{}^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{\sigma_2{}^2(x_1-m_1)^2}{2.\sigma_2{}^2.\sigma_1{}^2}\right]\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{\sigma_1{}^2(x_2-m_2)^2}{2.\sigma_2{}^2.\sigma_1{}^2}\right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x_1-m_1)^2}{2.\sigma_1{}^2}\right]}_{p_{\mu1}(x_1)}\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{(x_2-m_2)^2}{2.\sigma_2{}^2}\right]}_{p_{\mu2}(x_2)} \\ &= p_{\mu1}(x_1)\times p_{\mu2}(x_2) \end{aligned} \qquad \text{(PL2.229)}$$

Vì ρ đánh giá sự tương quan giữa μ_1 & μ_2, nên ta thấy rằng khi các biến ngẫu nhiên μ_1 & μ_2, ***không tương quan*** nhau, thì chúng cũng ***độc lập*** thống kê nhau (***đây là thuộc tính quan trọng của biến ngẫu nhiên Gausơ mà nói chung các biến ngẫu nhiên phân phối khác không có được, nghĩa là độc lập thì không tương quan nhưng không tương quan chưa chắc đã độc lập thống kê***).

⇒ Mở rộng cho các biến ngẫu nhiên phân phối Gausơ **n** chiều. Nghĩa là, nếu $\rho_{ij} = 0$ với $i \neq j$, thì các biến ngẫu nhiên μ_i (i=1,2,...,n) không tương quan nhau và vì thế chúng độc lập thống kê nhau.

- Xét biến đổi tuyến tính **n** biến ngẫu nhiên Gausơ μ_i (i=1,2,..,n) có trung bình m_μ và ma trận hiệp biến C_μ.

  Đặt $\qquad Y = A\mu \qquad$ (PL2.2210)

  Trong đó A là ma trận không đơn trị (nonsingular matrix). Biết rằng Jacobian của chuyển đổi này là J =1/detA. Vì $\mu = A^{-1}.Y$, nên ta có thể thế μ vào phương trình 2.20 và vì vậy ta được pdf hợp của Y là.

$$p_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det C_\mu}\,\det A}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(A^{-1}y - m_\mu\right)^T \times C_\mu^{-1} \times \left(A^{-1}y - m_\mu\right)\right]$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det Q}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(y - m_Y\right)^T \times Q^{-1} \times \left(y - m_Y\right)\right] \quad \text{(PL2.2211)}$$

Trong đó vector m_Y và ma trận Q được định nghĩa

$$m_Y = Am_\mu \quad \text{(PL2.2212)}$$

$$Q = AC_\mu A^T \quad \text{(PL2.2213)}$$

Vì vậy ta đã chỉ ra rằng chuyển đổi tuyến tính tập các biến ngẫu nhiên phân phối Gausơ hợp cho ta tập các biến ngẫu nhiên phân phối Gausơ hợp khác.

⇒ Giả sử ta muốn chuyển tuyến tính tập các biến Gausơ hợp để có được n biến ngẫu nhiên phân phối Gausơ độc lập thống kê khác. Ma trận A nên được chọn ra sao? Từ phần đã đề cập trên, ta biết rằng các biến ngẫu nhiên phân phối Gausơ là độc lập thống kê nếu chúng không tương quan nhau theo từng cặp (pairwise) nghĩa là nếu ma trận hiệp biến Q là ma trận đường chéo.⇒Vì vậy, ta phải có.

$$AC_\mu A^T = D \quad \text{(PL2.2214)}$$

Trong đó D là ma trận đường chéo. Ma trận C_μ là ma trận hiệp biến; vì vậy nó là số dương xác định.

Một giải pháp để lựa chọn A là ma trận trực giao ($A^T = A^{-1}$) chứa các cột mà là các vector riêng (Eigenvector) của ma trận hiệp biến C_μ. Vì vậy, D là ma trận đường chéo có các phần tử đường chéo bằng với giá trị riêng (Eigenvalue) của C_μ.

Ví du: Xét pdf phân phối Gausơ hai biến có ma trận hiệp biến là

$$C_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Hãy xác định chuyển đổi A sao cho có được các biến ngẫu nhiên không tương quan.

- *Trước hết,*

Giải phương trình để tìm các giá trị riêng của C_μ.

Phương trình đặc trưng là.

$$\det\left(C_\mu - \lambda I\right) = 0$$
$$(1-\lambda)^2 = 0$$
$$\lambda = 3/2,\ 1/2$$

- *Tiếp theo,*

Xác định hai vector riêng. Nếu a ký hiệu vector riêng, thì ta có

$$(M-\lambda I)a = 0$$

với $\lambda_1 = 3/2$ và $\lambda_2 = 1/2$, thì ta có được các vector riêng là

$$a_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \end{bmatrix}$$

Vì vậy

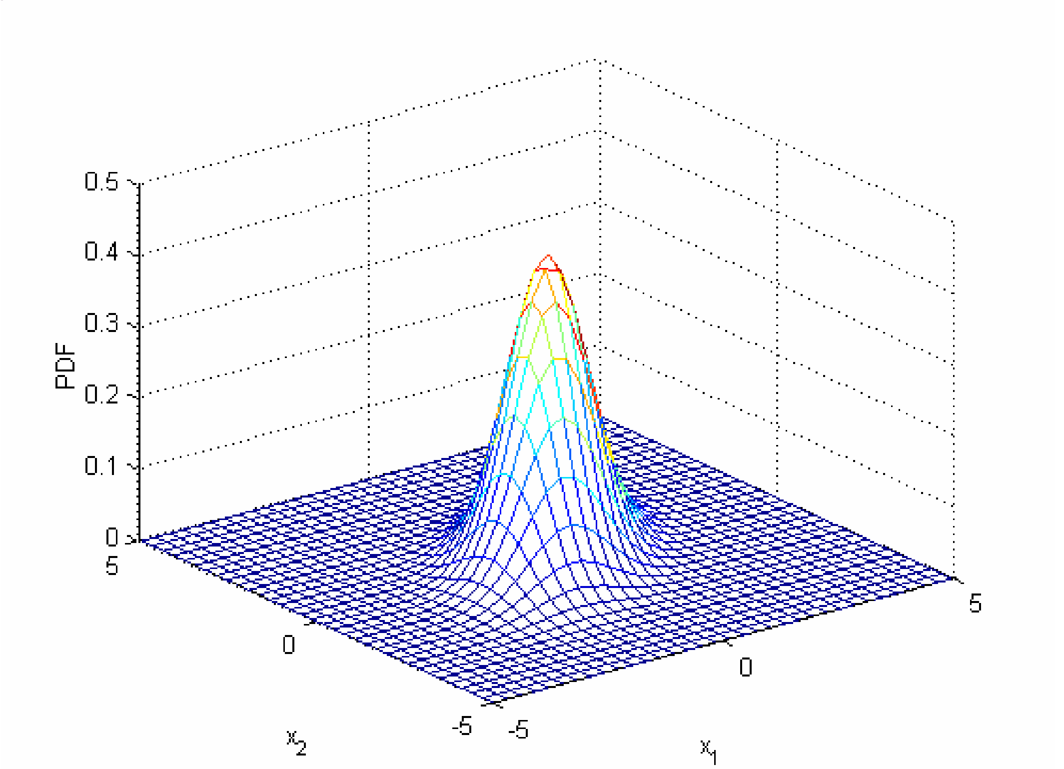
$$A = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dễ dàng kiểm tra thấy $A^{-1} = A^T$ và

$$AC_\mu A^T = D$$

Trong đó các phần tử đường chéo của D là 3/2 và 1/2

Chương trình Matlab thực hiện cho hai biến (Xem PL2)



Thay đổi các giá trị m_μ và C_μ để khảo sát.

- **Phân bố Rayleigh**
  - ***Lý thuyết***

Ta xét hai biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn độc lập thống kê trung bình không μ_1 và μ_2, mỗi biến có phương sai σ_0^2, nghĩa là $\mu_1,\mu_2 \sim N(0,\sigma_0^2)$. Ngoài ra từ hai biến μ_1 và μ_2 ta rút ra một biến mới $\zeta = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$. Khi này ζ sẽ là một biến phân bố Rayleigh. Hàm mật độ xác suất $p_\zeta(x)$ của các biến ζ phân bố Rayleigh được xác dịnh như sau

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma_0^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Các biến ngẫu nhiên phân bố Rayleigh ζ có

Giá trị kỳ vọng

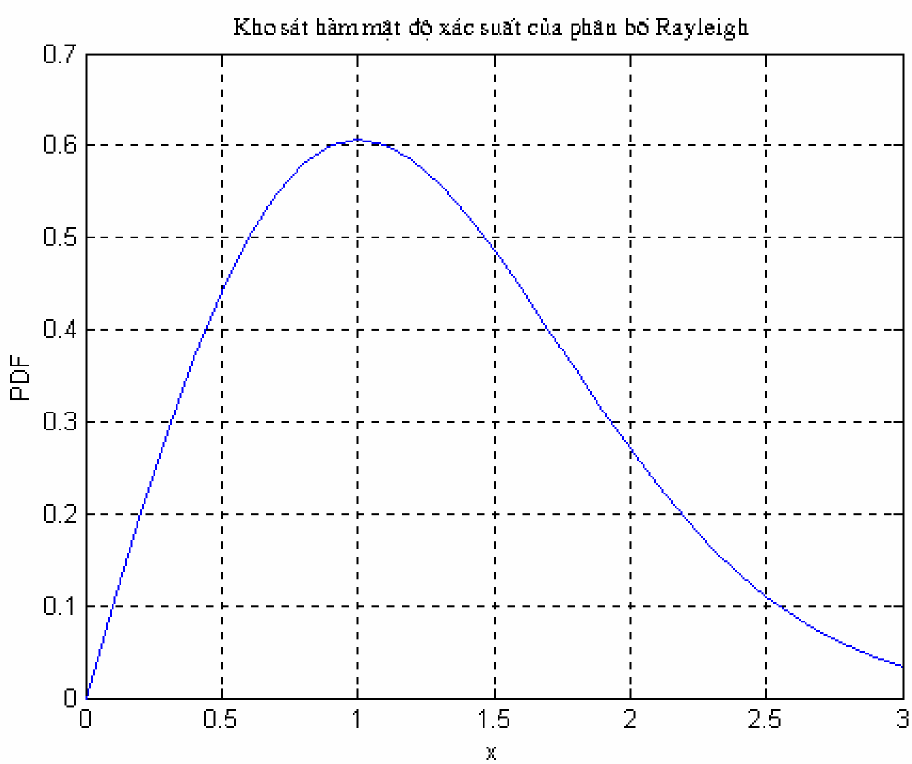
$$E\{\zeta\} = \int_0^\infty x p_\zeta(x) dx = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (2.25a)$$

Phương sai

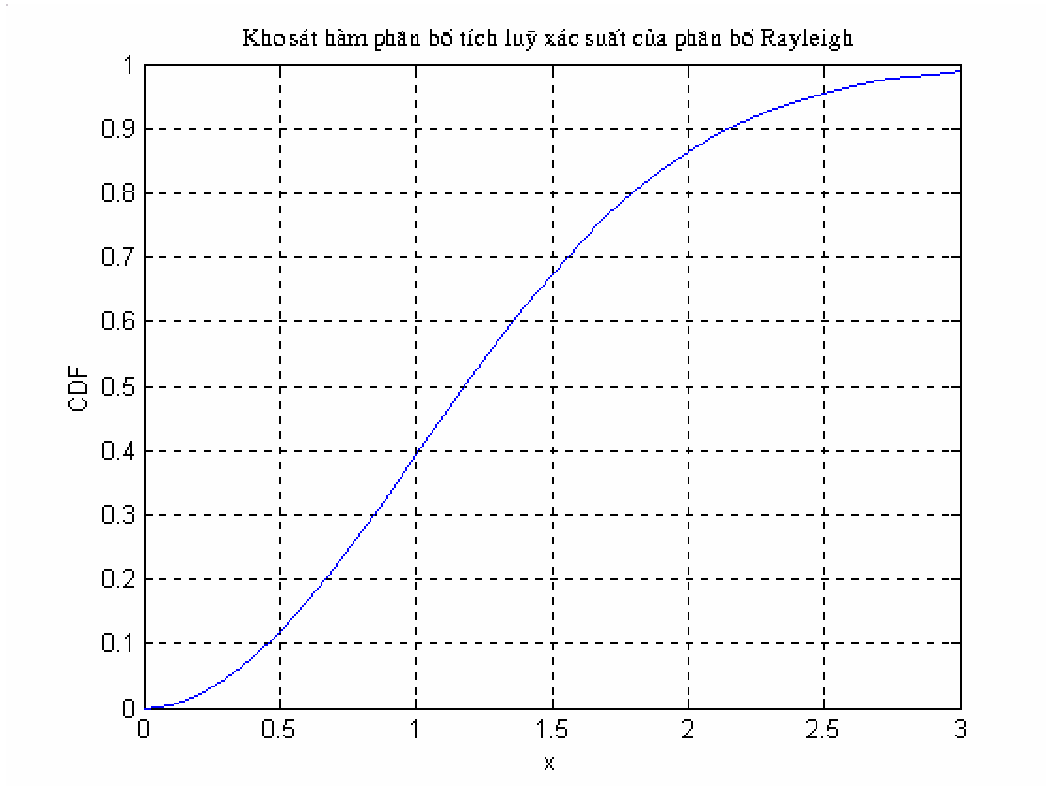
$$\begin{aligned} Var\{\zeta\} &= E[x^2] - E^2[r] \\ &= \int_0^\infty x^2 p_\zeta(x) dx - \frac{\sigma_0^2 \pi}{2} \quad (2.25b) \\ &= \sigma_0^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

- ***Khảo sát***

- Hàm mật độ xác suất pdf phân bố Rayleigh. Chương trình Matlab được cho ở PL3



- Hàm phân bố tích luỹ xác suất CDF phân bố Rayleigh Chương trình Matlab được cho ở PL4



Thay đổi các thông số để khảo sát

❖ **Phân bố Rice**

Nếu μ_1, μ_2~$N(0,\sigma_0^2)$ và $\rho \in IR$.

Thì biến ngẫu nhiên $\xi = \sqrt{(\mu_1 + \rho)^2 + \mu_2^2}$ được gọi là biến ngẫu nhiên có phân bố Rice. Hàm mật độ xác suất $p_\xi(x)$ của các biến ngẫu nhiên ξ phân bố Rice là

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma_0^2} e^{-\frac{x^2+\rho^2}{2\sigma_0^2}} I_0\left(\dfrac{x\rho}{\sigma_0^2}\right), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

trong đó $I_0(.)$ ký hiệu cho hàm Bessel biến đổi bậc 0.

⇒ Khi $\rho = 0$, phân bố Rice $p_\xi(x)$ trở thành phân bố Rayleigh. Mômen bậc một và hai của các biến phân bố Rice ξ như sau

➢ ***Moment bậc một (kỳ vọng)***

$$E\{\xi\} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\sigma_0^2}} \left\{ \left(1 + \frac{\rho^2}{2\sigma_0^2}\right) I_0\left(\frac{\rho^2}{4\sigma_0^2}\right) + \frac{\rho^2}{2\sigma_0^2} I_1\left(\frac{\rho^2}{4\sigma_0^2}\right) \right\} \tag{2.27a}$$

➢ ***Mômen bậc hai (phương sai)***

$$E\{\xi^2\} = 2\sigma_0^2 + \rho^2 \tag{2.27b}$$

trong đó $I_n(.)$ ký hiệu cho hàm Bessel cải tiến (biến đổi) bậc n. Từ (2.27a), (2.27b) và sử dụng (2.11), ta có thể dễ ràng tính toán phương sai của các biến ngẫu nhiên ξ phân bố Rice.

❖ **Phân bố log**

<u>Nếu</u> μ là một biến ngẫu nhiên phân bố Gauss có giá trị kỳ vọng m_μ và phương sai σ_μ^2, nghĩa là $\mu \sim N(m_\mu, \sigma_\mu^2)$,

<u>Thì</u> biến ngẫu nhiên $\lambda = e^\mu$ được gọi là có phân bố chuẩn log.

Hàm mật độ xác suất $p_\lambda(x)$ của biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn log λ được xác định như sau

$$p_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu x} e^{-\frac{(\ln x - m_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

➢ ***Giá trị kỳ vọng của λ***

$$E\{\lambda\} = e^{m_\mu + \frac{\sigma_\mu^2}{2}} \tag{2.29}$$

➢ ***Phương sai của λ***

$$\mathrm{Var}\{\lambda\} = e^{2m_\mu + \sigma_\mu^2}\left(e^{\sigma_\mu^2} - 1\right) \tag{2.30}$$

❖ **Phân bố Suziki**

Ta xét một biến ngẫu nhiên phân bố Rayleigh ζ có hàm mật độ xác suất $p_\zeta(x)$ xác định theo (2.24) **và** một biến ngẫu nhiên λ phân bố log có hàm mật độ xác suất $p_\lambda(x)$ xác định theo (2.28). Ta coi rằng ς và λ là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê. Ngoài ra cho η là một biến ngẫu nhiên được xác định bằng tích η = ς.λ. Thì hàm mật độ xác suất $p_\eta(z)$ của biến ngẫu nhiên η là

$$p_\eta(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\sqrt{2\pi}\sigma_0^2\sigma_\mu} \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{y^2}.e^{-\frac{(\ln y - m_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2}}, & z \ge 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

được gọi là phân bố Suzuki và biến ngẫu nhiên η có

➢ ***Giá trị kỳ vọng***

$$E\{\eta\} = \sigma_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{m_\mu + \frac{\sigma_\mu^2}{2}} \tag{2.31}$$

➢ ***Phương sai***

$$\mathrm{Var}\{\eta\} = \sigma_0^2.e^{2m_\mu + \sigma_\mu^2}.\left(2e^{\sigma_\mu^2} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.32}$$

❖ **Phân bố Nakagami**

Ta xét một biến ngẫu nhiên ω được phân bố theo hàm mật độ xác suất sau

$$p_{\varpi}x) = \begin{cases} \dfrac{2m^m x^{2m-1} e^{-(m/\Omega)x^2}}{\Gamma(m)\Omega^m}, & m \geq 1/2, \quad x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

Thì ω ký hiệu cho một biến ngẫu nhiên có phân bố Nakagami và tương ứng với hàm mật độ xác suất $p_\omega(x)$ được gọi là phân bố Nakagami hay phân bố **m**. Trong (2.33) ký hiệu $\Gamma(.)$ là hàm Gamma nhận giá trị đặc biệt sau: $\Gamma(1) = 1$ và $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, moment bậc hai của biến ngẫu nhiên ω được đưa vào bởi $\Omega = E\{\omega^2\}$ và thông số **m** ký hiệu cho giá trị ngịch đảo của phương sai được chuẩn hoá theo Ω^2, nghĩa là $m = \Omega^2 \Big/ E\left\{\left(\omega^2 - \Omega\right)^2\right\}$.

⇒ Từ phân bố Nakagami, ta nhận được phân bố Gauss một phía ($x \geq 0$) và phân bố Rayleigh như là các trường hợp đặc biệt khi m =1/2 và m = 1. Trong các giới hạn nhất dịnh, phân bố Nakagami xấp xỉ hoá cả hai phân bố Rice và phân bố chuẩn log.

2.1.2. Hàm của các biến ngẫu nhiên

Trong một số phần của cuốn sách này ta sẽ xét các hàm hai hay nhiều biến ngẫu nhiên. Chẳng hạn ta sẽ thường xuyên sử dụng các quy tắc cơ bản về cộng, nhân và chuyển đổi các biến ngẫu nhiên. Vì thế ta sẽ xét tổng quan các nguyên tắc tóan học cần thiết.

❖ **Cộng hai biến ngẫu nhiên**

Nếu μ_1 và μ_2 là hai biến ngẫu nhiên được đặc trưng thống kê bởi hàm mật độ xác suất đồng thời $p_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2)$.

Thì ta được hàm mật độ xác suất của tổng của hai biến ngẫu nhiên $\mu = \mu_1 + \mu_2$ như sau

$$\begin{aligned} p_\mu(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1\mu_2}(x_1, y - x_1)dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1\mu_2}(y - x_2, x_2)dx_2 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Nếu hai biến ngẫu nhiên μ_1, μ_2 độc lập thống kê

Thì hàm mật độ xác suất của μ được xác định bởi tích chập của các mật độ xác suất $\mu_1$và μ_2. Vậy

$$\begin{aligned} p_\mu(y) &= p_{\mu_1}(y) * p_{\mu_2}(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1}(x_1)p_{\mu_2}(y - x_1)dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1}(y - x_2)p_{\mu_2}(x_2)dx_2 \end{aligned} \tag{2.35}$$

trong đó ký hiệu * cho toán tử tích chập.

❖ **Nhân hai biến ngẫu nhiên**

Nếu ς và λ là hai biến ngẫu nhiên được thể hiện thống kê bởi hàm mật độ xác suất đồng thời $p_{\varsigma.\lambda}(x,y)$.

Thì hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $\eta = \varsigma.\lambda$ bằng

$$p_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} p_{\varsigma\lambda}\left(\frac{z}{y}, y\right) dy \tag{2.36}$$

Từ quan hệ này ta nhận được biểu thức sau

$$p_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} p_\varsigma\left(\frac{z}{y}\right) . \times p_\lambda(y) dy \tag{2.37}$$

đối với các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê $\varsigma.\lambda$.

❖ **Các hàm của các biến ngẫu nhiên**

Giả sử μ_1, μ_2...., μ_n là các biến ngẫu nhiên được thể hiện thống kê bởi hàm mật độ xác suất đồng thời $p_{\mu 1\ \mu 2....,\mu n}(x_1, x_2,....,x_n)$. Ngoài ra giả thiết rằng các hàm $f_1, f_2,..., f_n$ được cho. Nếu hệ phương trình $f_i(x_1, x_2,....,x_n) = y_i$ với (i=1,2,...,n) có các nghiệm thực $x_{1\nu}, x_{2\nu},..., x_{n\nu}$ với (ν =1,2,...,m), thì hàm mật độ xác suất của các biến ngẫu nhiên $\xi_1=f_1(\mu_1, \mu_2,...., \mu_n)$, $\xi_2 =f_2(\mu_1, \mu_2,...., \mu_n)$,...., $\xi_n=f_n(\mu_1, \mu_2,...., \mu_n)$ có thể được biểu diễn như sau

$$p_{\xi 1\xi 2.....\xi n}(y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{p_{\mu_1\mu_2....\mu_n}(x_{1\nu}, x_{2\nu}, ..., x_{n\nu})}{\left|J(x_{1\nu}, x_{2\nu}, ..., x_{n\nu})\right|} \tag{2.38}$$

trong đó

$$J(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{dx_1} & \frac{\partial f_1}{dx_2} & ... & \frac{\partial f_1}{dx_n} \\ \frac{\partial f_2}{dx_1} & \frac{\partial f_2}{dx_2} & ... & \frac{\partial f_2}{dx_n} \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ \frac{\partial f_n}{dx_1} & \frac{\partial f_n}{dx_2} & ... & \frac{\partial f_n}{dx_n} \end{vmatrix} \tag{2.39}$$

ký hiệu cho định thức Jacobi

Ngoài ra ta có thể tính hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên $\xi_1, \xi_2,..., \xi_n$ đối với k < n bằng cách sử dụng (2.38) như sau

$$p_{\zeta_1,\zeta_2,....\zeta_k}(y_1, y_2, ..., y_k) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} .... \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-k} p_{\zeta_1,\zeta_2,....\zeta_n}(y_1, y_2, ..., y_n) \underbrace{dy_{k+1} dy_{k+2} ... dy_n}_{n-k} \tag{2.40}$$

$\Rightarrow$ Cho phép loại bỏ bớt biến ra khỏi hàm nhiều biến.

2.2. QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

Nếu cho (Q,A,P) là không gian xác suất. Nếu ta gán cho mỗi kết cục $s = s_i \in Q$ của một thí nghiệm ngẫu nhiên, một hàm thời gian cụ thể $\mu(t,s_i)$ theo một quy tắc. Thì đối với từng $s_i \in Q$, hàm $\mu(t,s_i)$ ký hiệu cho ánh xạ từ IR đến IR (hay C) theo

$$\mu(.,s_i): IR \to IR(\text{hay} C), \quad t \mapsto \mu(t,s_i) \tag{2.41}$$

Các hàm riêng $\mu(t,s_i)$ phụ thuộc vào thời gian được gọi là các thực hiện hay các hàm mẫu. Một quá trình ngẫu nhiên $\mu(t,s)$ là một họ (hay một tập hợp, toàn bộ **Ensemble**) các hàm mẫu $\mu(t,s_i)$, nghĩa là

$$\mu(t,s) = \{\mu(t,s_i) | s_i \in Q\} = \{\mu(t,s_1), \mu(t,s_2), ...\}$$

Mặt khác, tại một thời điểm cụ thể $t = t_0 \in IR$, thì quá trình ngẫu nhiên $\mu(t_0,s)$ chỉ phụ thuộc vào kết cục s, và bằng một biến ngẫu nhiên. Vì thế đối với $t_0 \in IR$, $\mu(t_0,s)$ ký hiệu cho ánh xạ từ Q vào IR (hay C) theo quy tắc

$$\mu(t_0,.): Q \to IR \text{ (hay C)}, \quad s \mapsto \mu(t_0,s) \tag{2.42}$$

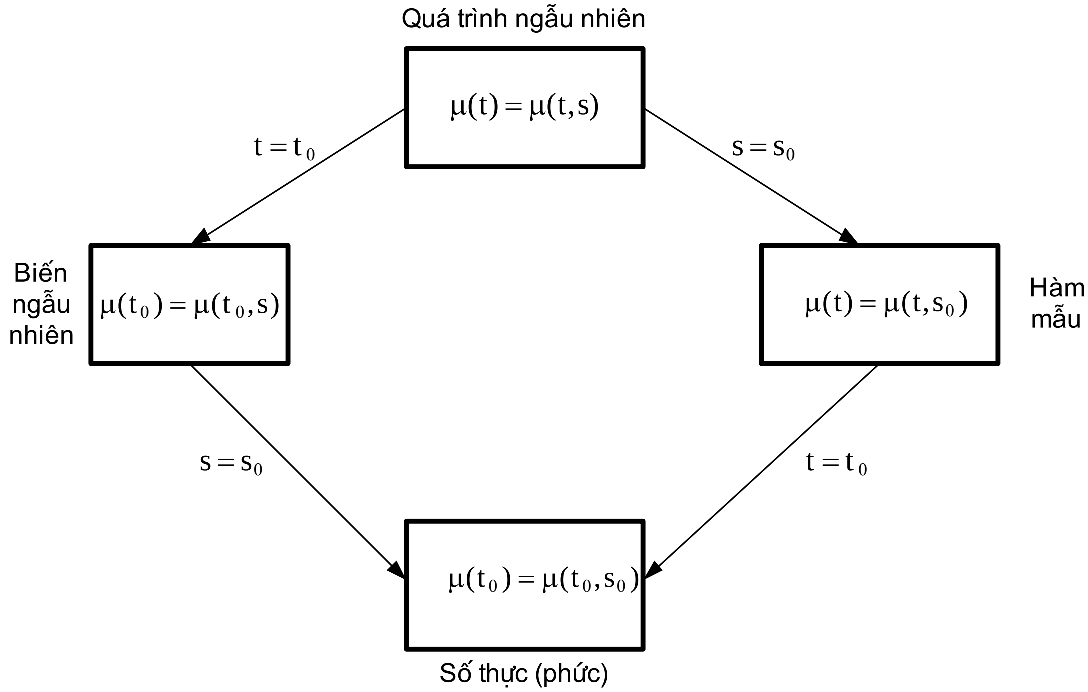
Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $\mu(t_0,s)$ được xác định bởi sự xuất hiện của các kết cục.

⇒ Vì vậy quá trình ngẫu nhiên là một hàm hai biến: $t \in IR$ và $s \in Q$, nên ký hiệu chính xác là **μ(t,s)**. Tuy nhiên ta sẽ bỏ qua đối số thứ hai và chỉ viết đơn giản là $\mu(t)$ như thường thấy trong thực tế.

Từ các phát biểu trên, ta có thể kết luận rằng một quá trình ngẫu nhiên $\mu(t)$ được hiểu như sau

1. *Nếu* **t** *là một biến và* **s** *là một biến ngẫu nhiên, thì μ(t) thể hiện một họ hay một tập hợp các hàm mẫu* **μ(t,s)**
2. *Nếu* **t** *là một biến và* **s = s₀** → $\mathbf{s = s_0}$ *là hằng số, thì* $\mathbf{\mu(t)=\mu(t,s_0)}$ *là một thực hiện hay một hàm mẫu của quá trình ngẫu nhiên*
3. *Nếu* $\mathbf{t=t_0}$ *là một hằng số và* **s** *là một biến ngẫu nhiên thì* $\mathbf{\mu(t_0)}$ *cũng là một biến ngẫu nhiên*
4. *Nếu cả* $\mathbf{t=t_0}$ **và** $\mathbf{s=s_0}$ *đều hằng số, thì* $\mathbf{\mu(t_0)}$ *là một số thực (hoặc phức)*

Các quan hệ theo các phát biểu (1)-(4) nói trên được minh hoạ trên hình 2.1.



Hình 2.1. Quan hệ giữa các quá trình ngẫu nhiên, các biến ngẫu nhiên, các hàm mẫu và các số thực (phức)

❖ **Các quá trình ngẫu nhiên phức**

Nếu $\mu'(t)$ và $\mu''(t)$ là hai quá trình ngẫu nhiên giá trị thực.

Thì một quá trình ngẫu nhiên phức được định nghĩa bởi $\mu(t)=\mu'(t)+ j\mu''(t)$.

$\Rightarrow$ Thấy rằng một ***quá trình*** ngẫu nhiên $\mu(t)$ được hiểu như là một ***biến ngẫu nhiên*** đối với các giá trị cố định của $t\in IR$. Biến ngẫu nhiên này lại có thể được mô tả bằng một hàm phân bố $F_\mu(x;t) = P(\mu(t) \le x)$ **hay** một hàm mật độ xác suất $p_\mu(x;t) = dF_\mu(x;t)/dx$. Việc mở rộng khái niệm giá trị kỳ vọng mà được dùng đối với các biến ngẫu nhiên **cho** các quá trình ngẫu nhiên dẫn đến khái niệm **hàm** giá trị kỳ vọng.

➢ ***Hàm giá trị kỳ vọng***

$$m_\mu(t) = E\{\mu(t)\} \tag{2.43}$$

➢ ***Hàm tự tương quan***

Nếu ta xét các biến ngẫu nhiên $\mu(t_1)$ và $\mu(t_2)$ mà được gán cho quá trình ngẫu nhiên $\mu(t)$ tại các thời điểm t_1 và t_2. ***Thì***

$$r_{\mu\mu}(t_1,t_2) = E\{\mu^*(t_1)\times\mu(t_2)\} \tag{2.44}$$

được gọi là hàm tự tương quan của $\mu(t)$ trong đó dấu * ký hiệu cho đồng thời phức. Lưu ý rằng đồng thời phức liên kết với biến độc lập thứ nhất trong $r_{\mu\mu}(t_1,t_2)$ (cũng cần lưu ý rằng trong các tài liệu phức đồng thời cũng thường đi với biến ngẫu nhiên độc lập thứ hai của hàm tương quan $r_{\mu1\mu2}(t_1,t_2)$, nghĩa là $r_{\mu1\mu2} = E\{\mu(t_1)\times\mu^*(t_2)\}$).

➢ ***Hàm phương sai***

Hàm được gọi là phương sai của quá trình ngẫu nhiên phức $\mu(t)$ được xác định như sau

$$\begin{aligned}\sigma_\mu^2 &= \mathrm{Var}\{\mu(t)\} \\ &= E\left\{|\mu(t) - E\{\mu(t)\}|^2\right\} \\ &= E\{\mu^*(t)\mu(t)\} - E\{\mu^*(t)\}E\{\mu(t)\} \\ &= r_{\mu\mu}(t,t) - |m_\mu(t)|^2 \end{aligned} \qquad (2.45)$$

trong đó $r_{\mu\mu}(t,t)$ ký hiệu cho hàm tự tương quan (2.44) tại thời điểm $t_1=t_2=t$ và $m_\mu(t)$ biểu hiện hàm gía trị kỳ vọng theo (2.43).

- ***Hàm tương quan chéo***

$$r_{\mu1\mu2}(t_1,t_2) = E\{\mu_1^*(t_1)\mu_2(t_2)\} \qquad (2.46)$$

thể hiện hàm tương quan chéo của quá trình ngẫu nhiên $\mu_1(t)$ và $\mu_2(t)$ tại các thời điểm t_1 và t_2.

2.2.1. Các quá trình dừng

Các quá trình dừng có tầm quan trọng đặc biệt để lập mô hình kênh vô tuyến di động và vì thế ta ở đây sẽ khảo sát ngắn gọn. Ta thường ***phân biệt*** giữa các quá trình dừng nghĩa **chặt** chẽ và các quá trình dừng nghĩa **rộng**.

- **Quá trình dừng chặt SSS**

Một quá trình ngẫu nhiên $\mu(t)$ dược gọi là quá trình ngẫu nhiên dừng chặt chẽ nếu các thuộc tính thông kê **không** phụ thuộc vào sự dịch của gốc toạ độ, nghĩa là $\mu(t_1)$ và $\mu(t_1+t_2)$ có cùng đăc tính thông kê cho mọi $t_1,t_2 \in IR$. Điều này dẫn đến các kết luận sau: ⇔ thoả mã các điều kiện (2.47a); (2.47b);(2.47c).

$$p_\mu(x;t) = p_\mu(x) \qquad \textbf{(2.47a)}$$

$$E\{\mu(t)\} = m_\mu = \text{Hằng số} \qquad \textbf{(2.47b)}$$

$$r_{\mu\mu}(t_1,t_2) = r_{\mu\mu}(|t_1 - t_2|) \qquad \textbf{(2.47c)}$$

Qúa trình dừng theo nghĩa rộng WSS (2.47b), (2.47c)

Qúa trình dừng theo nghĩa chặt SSS (2.47a), (2.47b), (2.47c)

- **Quá trình dừng rộng WSS**

Quá trình ngẫu nhiên $\mu(t)$ được gọi là quá trình ngẫu nhiên dừng nghĩa rộng nếu thoả mãn các điều kiện (2.47b) và (2.47c) ⇔ Trong trường hợp này

- ***Hàm giá trị kỳ vọng***: $E\{\mu(t)\}$ không phụ thuộc vào thời gian và đơn giản chỉ là giá trị kỳ vọng m_μ của các biến ngẫu nhiên.
- ***Hàm tương quan***
  - Hàm tự tương quan: $r_{\mu\mu}(t_1,t_2)$ chỉ phụ thuộc vào hiệu số thời gian $t_1 - t_2$. Từ (2.44) và (2.47c), với $t_1=t$ và $t_2= t+\tau$, với $\tau > 0$ ta được

$$r_{\mu\mu}(\tau) = r_{\mu\mu}(t,t+\tau) = E\{\mu^*(t)\times\mu(t+\tau)\} \quad (2.48)$$

trong đó $r_{\mu\mu}(0)$ là công suất trung bình của $\mu(t)$.

- Hàm tương quan chéo: $r_{\mu1\mu2}(t_1,t_2)$ theo (2.46) của hai quá trình dừng nghĩa rộng $\mu_1(t)$ và $\mu_2(t)$, ta được

$$r_{\mu_1\mu_2}(\tau) = E\{\mu_1^*(t)\mu_2(t+\tau)\} = r^*_{\mu_2\nu_1}(-\tau) \quad (2.49)$$

➢ ***Mật độ phổ công suất***

Nếu cho $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ và $\mu(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên dừng nghĩa rộng WSS, thì biến đổi Fourrier của hàm tự tương quan $r_{\mu\mu}(\tau)$ được xác định như sau

$$S_{\mu\mu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mu\mu}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (2.50)$$

được gọi là mật độ phổ công suất (phổ mật độ công suất). Quan hệ tổng quát giữa hàm tự tương quan và mật độ phổ công suất nói trên được gọi là tương quan Wiener-Khichine.

➢ ***Mật độ phổ công suất chéo***

Biến đổi Fourrier của hàm tương quan chéo $r_{\mu1\mu2}(\tau)$ được xác định như sau

$$S_{\mu1\mu2}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mu1\mu2}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (2.51)$$

được gọi là mật độ phổ công suất chéo (phổ mật độ công suất chéo). Nếu xét (2.49) ta nhận thấy ngay rằng $S_{\mu1\mu2}(f)=S^*_{\mu2\mu1}(f)$.

<u>Nếu</u> $\nu(t)$ là quá trình đầu vào và $\mu(t)$ là quá trình đầu ra của một hệ thống ổn định không phụ thuộc thời gian có đáp ứng xung kim h(t). Ngoài ra giả sử rằng hệ thống này là hệ thống tất định, nghĩa là nó chỉ hoạt động phụ thuộc biến t.

<u>Thì</u> quá trình ra $\mu(t)$ là tích chập của quá trình vào $\nu(t)$ với đáp ứng xung kim h(t), nghĩa là $\boldsymbol{\mu(t) = \nu(t)*h(t)}$. Ta cũng biết rằng hàm truyền đạt H(f) của hệ thống này là biến đổi Fourrier của đáp ứng xung kim $h(t) \Leftrightarrow H(f)=FT[h(t)]$. Ngoài ra tồn tại các tương quan sau

$$\mathbf{r_{\nu\mu}(\tau)=r_{\nu\nu}(\tau)*h(\tau) \quad \Leftrightarrow \quad S_{\nu\mu}(f)=S_{\nu\nu}(f).H(f)} \quad (2.52a,b)$$

$$\mathbf{r_{\mu\nu}(\tau)=r_{\nu\nu}(\tau)*h^*(-\tau) \Leftrightarrow S_{\mu\nu}(f)=S_{\nu\nu}(f).H^*(f)} \quad (2.52c,d)$$

$$\mathbf{r_{\mu\mu}(\tau)=r_{\nu\nu}(\tau)*h(\tau)h^*(-\tau) \Leftrightarrow S_{\mu\mu}(f)=S_{\nu\nu}(f).|H(f)|^2} \quad (2.52e,f)$$

trong đó $\Leftrightarrow$ ký hiệu cho biến đổi Fourrier. Tiếp theo ta sẽ coi rằng tất cả các hệ thống được xét là hệ tuyến tính, không phụ thuộc thời gian và ổn định (***hệ thống tuyến tính bất biến ổn định***).

Cần lưu ý rằng, nếu nói một cách chặt chẽ, không tồn tại bất cứ một quá trình dừng nào. Các quá trình dừng chỉ được sử dụng như là các mô hình toán học cho các quá trình, nếu nó giữ nguyên được các thuộc tính thống kê trong một khoảng thời gian tương đối dài $\Rightarrow$Từ giờ trở đi, ta sẽ coi quá trình ngẫu nhiên là quá trình dừng chặt **SSS** nếu không có giải thích khác đi.

❖ **Một hệ thống với hàm truyền đạt**

$$\breve{H}(f) = \text{-jsgn}(f) \quad (2.53)$$

được gọi là bộ biến đổi Hilbert.

⇒ Ta thấy rằng hệ thống này chỉ gây ra dịch pha $-\pi/2$ đối với $f > 0$ và dịch pha $+\pi/2$ đối với $f < 0$ mà không làm ảnh hưởng biên độ tín hiệu vào ra của hệ nghĩa là $H(f) = 1$. Biến đổi Fourrier ngược của hàm $\breve{H}(f)$ là đáp ứng xung kim sau

$$\breve{h}(t) = \frac{1}{\pi t} \tag{2.54}$$

Vì $\breve{h}(t) \neq 0$ đối với $t<0$, nên biến đổi Hilbert là hệ không nhân quả (***hệ nhân quả và hệ không nhân quả***).

⇒ Nếu quá trình $\nu(t)$ có $E\{\nu(t)\} = 0$ là quá trình đầu vào giá trị thực của bộ biến đổi Hilbert, thì quá trình ra là

$$\breve{\nu}(t) = \nu(t) * \breve{h}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu(t')}{t - t'}dt' \tag{2.55}$$

được gọi là biến đổi Hilbert của $\nu(t)$. Cũng cần lưu ý rằng tính toán tích phân (2.55) phải được thực hiện theo giá trị cơ bản Cauchy.

Với (2.52) và (2.54), ta được các quan hệ sau

$$r_{\nu\breve{\nu}}(\tau) = \breve{r}_{\nu\nu}(\tau) \Leftrightarrow S_{\nu\breve{\nu}}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f).S_{\nu\nu}(f) \tag{2.56a,b}$$

$$r_{\nu\breve{\nu}}(\tau) = -r_{\breve{\nu}\nu}(\tau) \Leftrightarrow S_{\nu\breve{\nu}}(f) = -S_{\breve{\nu}\nu}(f) \tag{2.56c,d}$$

$$r_{\breve{\nu}\breve{\nu}}(\tau) = r_{\nu\nu}(\tau) \Leftrightarrow S_{\breve{\nu}\breve{\nu}}(f) = S_{\nu\nu}(f) \tag{2.56e,f}$$

2.2.2. Quá trình Ergodic

Việc mô tả các thuộc tính của quá trình ngẫu nhiên **như**: giá trị kỳ vọng hoặc hàm tự tương quan cho tất cả các hàm mẫu có thể có của quá trình ngẫu nhiên đều dựa trên cơ sở trung bình toàn bộ (Ensemble means - Statical means). Tuy nhiên trong thực tế ta chỉ gặp hoặc ghi lại được số lượng hữu hạn các hàm mẫu (thậm chí chỉ có một hàm mẫu) ⇒ Vì thế **để** có được các công bố về các thuộc tính thống kê của quá trình ngẫu nhiên, thì người ta thường đưa ra giả định Ergodic (liên hệ với giả định Ergodic).

Giả định Ergodic trả lời câu hỏi: **hoặc** chỉ cần đánh giá một hàm mẫu của quá trình ngẫu nhiên dừng (***thay vì*** phải tính toán trung bình tất cả các hàm mẫu) tại một thời điểm **hay** nhiều thời điểm. Nhất là trả lời câu hỏi, giá trị kỳ vọng và hàm tự tương quan của một quá trình ngẫu nhiên $\mu(t)$ có bằng trung bình theo thời gian của một hàm mẫu bất kỳ $\mu(t,s_i)$ hay không.

Lưu ý rằng: Nếu là quá trình ergodic thì chỉ cần đánh giá một hàm mẫu của quá trình ở nhiều thời điểm khác nhau thay cho việc lấy trung bình toàn bộ (tất cả các hàm mẫu) của quá trình.

Theo *định lý Ergodic*, thì

Giá trị kỳ vọng $E\{\mu(t)\} = m_\mu$ bằng trung bình thời gian của $\mu(t,s_i)$, nghĩa là

$$m_\mu = \tilde{m}_\mu := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu(t,s_i)dt \tag{2.57}$$

Hàm tự tương quan $r_{\mu\mu}(\tau) = E\{\mu^*(t)\mu(t+\tau)\}$ bằng hàm tự tương quan thời gian của $\mu(t,s_i)$, nghĩa là

$$r_{\mu\mu} = \tilde{r}_{\mu\mu}(\tau) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mu^*(t,s_i)\mu(t+\tau,s_i)dt \qquad (2.58)$$

Quá trình ngẫu nhiên dừng μ(t) được gọi là ergodic **chặt** chẽ, nếu **tất cả** các giá trị kỳ vọng xét cho toàn bộ các hàm mẫu **bằng** các giá trị trung bình thời gian của **một** hàm mẫu bất kỳ.

Nếu điều kiện này chỉ thoả mãn cho giá trị kỳ vọng và hàm tự tương quan, nghĩa là chỉ thực hiên (2.57) và (2.58), thì quá trình ngẫu nhiên μ(t) được gọi là quá trình Ergodic nghĩa **rộng**.

⇒ Quá trình ergodic chặt chẽ luôn là quá trình ngẫu nhiên dừng. Phát biểu ngược lại luôn luôn không đúng, mặc dù thường được tiếp nhận.

2.2.3. Tốc độ cắt ngang mức và thời gian phađinh trung bình

⇒ Để mô tả đặc tính thống kê kênh phadinh di động sử dụng bốn đại lượng đặc trưng

- ✓ ***Hàm mật độ xác suất.***
- ✓ ***Hàm tự tương quan.***
- ✓ ***Tốc độ cắt ngang mức.***
- ✓ ***Khoảng thời gian phadinh trung bình.***

Như ta biết, tín hiệu thu trong thông tin di động thường bị thăng giáng thống kê rất nặng, có thể lên đến 30 dB và hơn nữa. Trong thông tin số, sự giảm mạnh tín hiệu thu sẽ trực tiếp dẫn đến tăng nhanh tỷ số bit lỗi.

⇒ Để tối ưu hoá các hệ thống mã hoá sửa lỗi cần phải biết,

- ✓ Tần suất tín hiệu thu cắt ngang một mức tín hiệu cho trước trong một đơn vị thời gian.
- ✓ Thời gian trung bình tín hiệu thu bị thấp hơn một mức nhất định.

⇒ Sử dụng hai đại lượng: ***Tốc độ cắt ngang mức*** và ***thời gian phađinh trung bình*** để làm các số đo cho việc đánh giá.

❖ Tốc độ cắt ngang mức

Tốc độ cắt ngang mức $N_\varsigma(r)$, mô tả tần suất quá trình ngẫu nhiên ς(t) cắt ngang qua mức cho trước **r** theo hướng trên xuống (hoặc dưới lên) trong một giây. Theo [Ric44, Ric45], tốc độ cắt ngang mức $N_\varsigma(r)$ có thể được tính bởi

$$N_\varsigma(r) = \int_0^\infty \dot{x} p_{\varsigma\dot{\varsigma}}(r,\dot{x})d\dot{x}\,,\ r\geq 0 \qquad (2.50)$$

trong đó $p_{\varsigma\dot{\varsigma}}(x,\dot{x})$ ký hiệu cho hàm mật độ xác suất **hợp** của quá trình ngẫu nhiên ς(t) và đạo hàm của nó theo thời gian $\dot{\varsigma} = d\varsigma/dt$ tại ***cùng thời điểm***.

Ta có thể dẽ dàng tìm được biểu biểu thức giải tích cho tốc độ cắt ngang mức của các quá trình Rayleigh và Rice.

➢ ***Biểu thức giải tích tốc độ cắt ngang mức cho quá trình ngẫu nhiên Rayleigh $N_\varsigma(r)$***

Nếu xét hai quá trình ngẫu nhiên Gausơ trung bình không giá trị thực không tương quan $\mu_1(t)$ và $\mu_2(t)$ có các hàm tự tương quan như nhau, nghĩa là $\mathbf{r_{\mu1\mu1}(\tau)=r_{\mu2\mu2}(\tau)}$.

Thì biểu thức tốc độ cắt ngang mức của các quá trình ngẫu nhiên Rayleigh $\varsigma(t)=\sqrt{\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)}$ như sau [Jak93]

$$N_\varsigma(r)=\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}.\frac{r}{\sigma_0^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}.p_\varsigma(r), \qquad r\geq 0 \qquad (2.60)$$

trong đó $\sigma_0^2=r_{\mu_i\mu_i}(0)$ ký hiệu cho ***công suất trung bình*** của các quá trình ngẫu nhiên Gauss được xét $\mu_i(t)$ (i=1,2). Ở đây β là ký hiệu rút gọn cho ***độ uốn âm*** của các hàm tự tương quan $r_{\mu1\mu1}(\tau)$ và $r_{\mu2\mu2}(\tau)$ tại điểm gốc $\tau = 0$, nghĩa là

$$\beta=-\frac{d^2}{d\tau^2}r_{\mu_i\mu_i}(\tau)\Big|_{\tau=0}=-\ddot{r}_{\mu_i\mu_i}(0), \qquad i=1,2 \qquad (2.61)$$

➢ ***Biểu thức giải tích tốc độ cắt ngang mức cho quá trình ngẫu nhiên Rice***

Đối với quá trình Rice $\xi(t)=\sqrt{(\mu_1(t)+\rho)^2+\mu_2^2(t)}$, ta được biểu thức sau cho tốc độ cắt ngang mức [Ric48]

$$N_\xi(r)=\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}.\frac{r}{\sigma_0^2}e^{-\frac{r^2+\rho^2}{2\sigma_0^2}}I_0\left(\frac{r\rho}{\sigma_0^2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}.p_\xi(r), \qquad r\geq 0 \qquad (2.62)$$

❖ **Thời gian phađing trung bình**

Thời gian phađinh trung bình $T_{\varsigma\_}(r)$ là giá trị kỳ vọng cho độ dài của khoảng thời gian mà ở đó quá trình ngẫu nhiên $\varsigma(t)$ thấp hơn một mức cho trước r. Thời gian phađinh trung bình $T_{\varsigma-}(r)$ có thể tính toán theo [Jak93]

$$T_{\varsigma-}(r)=\frac{F_{\varsigma-}(r)}{N_\varsigma(r)} \qquad (2.63)$$

trong đó $F_{\varsigma-}(r)$ ký hiệu hàm phân bố tích luỹ xác suất của quá trình ngẫu nhiên $\varsigma(t)$ là xác suất mà $\varsigma(t)$ nhỏ hơn hay bằng mức r, nghĩa là

$$F_{\varsigma-}(r)=P(\varsigma(t)\leq r)=\int_0^r p_\varsigma(x)dx \qquad (2.64)$$

➢ ***Đối với quá trình Rayleigh*** $\varsigma(t)$

Thời gian phađinh trung bình $T_{\varsigma-}(r)$ đối với các quá trình Rayleigh được xác định bởi

$$T_{\varsigma-}(r) = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}.\frac{\sigma_0^2}{r}\left(e^{\frac{r^2}{2\sigma_0^2}} - 1\right), r\geq 0 \tag{2.65}$$

trong đó đại lượng β cũng được xác định bởi (2.61)

- ***Đối với quá trình Rice***

Bằng cách thay thế (2.26), (2.64) và (2.62) vào (2.63) ta được

$$T_{\varsigma-}(r) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}.\frac{e^{\frac{r^2}{2\sigma_0^2}}}{r \times I_0\left(\frac{r\rho}{\sigma_0^2}\right)}\int_0^r xe^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} I_0\left(\frac{x\rho}{\sigma_0^2}\right)dx \tag{2.66}$$

tính theo phương pháp số.

- **Thời gian kết nối trung bình Tς+(r)**

Thời gian kết nối trung bình $T_{\varsigma+}(r)$ mô tả giá trị kỳ vọng cho độ dài của các khoảng thời gian mà ở đó quá trình ngẫu nhiên ς(t) lớn hơn mức cho trước r. Vậy

$$T_{\varsigma+}(r) = \frac{F_{\varsigma+}(r)}{N_\varsigma(r)} \tag{2.67}$$

trong đó $F_{\varsigma+}(r)$ được gọi là hàm phân bố tích luỹ xác suất **bù** của quá trình ς(t). Hàm này mô tả xác suất mà ς(t) lớn hơn r, nghĩa là $\mathbf{F_{\varsigma+}(r)=P(\varsigma(t)>r)}$. Hàm phân bố tích luỹ bù $F_{\varsigma+}(r)$ và hàm phân bố tích luỹ $F_{\varsigma-}(r)$ liên hệ với nhau bởi $F_{\varsigma+}(r)=1- F_{\varsigma-}(r)$.

2.3. TÍN HIỆU TẤT ĐỊNH LIÊN TỤC THỜI GIAN

Theo nguyên lý, ta phân biệt các tín hiệu liên tục thời gian và rời rạc thời gian. Đối với các tín hiệu tất định, ta sẽ sử dụng trình bầy liên tục thời gian mỗi khi có thể. Chỉ trong các phần cần mô phỏng số, ta sẽ chọn trình bầy tín hiệu rời rạc thời gian.

Tín hiệu tất định (liên tục thời gian) thường được định nghĩa trên IR. Tập giá trị thực IR được coi là ***không gian thời gian*** trong đó biến **t** nhận các giá trị của tập này, nghĩa là t∈IR. Tín hiệu tất định được mô tả bằng một hàm (ánh xạ), trong đó mỗi giá trị **t** được gán cho một giá trị thực (hoặc phức). Ngoài để phân biệt các tín hiệu tất định với các quá trình ngẫu nhiên, ta sử dụng ***dấu ngã*** bên trên các ký hiệu của tín hiệu tất định.

Vì vậy, tín hiệu tất định $\tilde{\mu}(t)$ sẽ được hiểu là ánh xạ thuộc loại sau

$$\tilde{\mu} : IR \rightarrow IR\,(\text{hay}\,C), \qquad t \mapsto \tilde{\mu}(t) \tag{2.68}$$

- **Giá trị trung bình:** *Giá trị trung bình* của một tín hiệu tất định $\tilde{\mu}(t)$ được định nghĩa bởi

$$\tilde{m}_\mu := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{\mu}(t)dt \tag{2.69}$$

- **Công suất trung:** *Công suất trung bình* của một tín hiệu tất định $\tilde{\mu}(t)$ được định nghĩa bởi

$$\tilde{\sigma}_{\mu}^{2} := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\tilde{\mu}(t)\right|^{2}dt \qquad (2.70)$$

Từ nay về sau ta sẽ coi rằng công suất của tín hiệu tất định là ***hữu hạn***.

❖ **Hàm tự tương quan**

Cho $\tilde{\mu}(t)$ là một tín hiệu tất định. Khi này hàm tự tương quan của $\tilde{\mu}(t)$ được định nghĩa bởi

$$\tilde{r}_{\mu\mu}(\tau) := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{\mu}^{*}(t)\tilde{\mu}(t+\tau)dt \qquad (2.71)$$

So sánh (2.70) và (2.71), nhận thấy giá trị $\tilde{r}_{\mu\mu}(\tau)$ tại τ=0 bằng công suất trung bình của $\tilde{\mu}(t)$, nghĩa là $\tilde{r}_{\mu\mu}(0) = \tilde{\sigma}_{\mu}^{2}$.

❖ **Hàm tương quan chéo**

Cho $\tilde{\mu}_1(t)$ và $\tilde{\mu}_2(t)$ là hai tín hiệu tất định. Khi này hàn tương quan chéo của $\tilde{\mu}_1(t)$ và $\tilde{\mu}_2(t)$ được xác định bởi

$$\tilde{r}_{\mu_1\mu_2} := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{\mu}_1^{*}(t)\tilde{\mu}_2(t+\tau)dt,\ \tau\in IR \qquad (2.72)$$

Từ đó suy ra $\tilde{r}_{\mu1\mu2}(\tau) = \tilde{r}^{*}_{\mu2\mu1}(-\tau)$.

❖ **Mật độ phổ công suất**

Cho $\tilde{\mu}(t)$ là một tín hiệu tất định. Khi này biến đổi Fourrier của hàm tự tương quan $\tilde{r}_{\mu\mu}(\tau)$

$$\tilde{S}_{\mu\mu}(f) := \int \tilde{r}_{\mu\mu}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau,\ f\in IR \qquad (2.73)$$

được gọi là mật độ phổ công suất (hay phổ mật độ công suất) của $\tilde{\mu}(t)$.

❖ **Mật độ phổ công suất chéo**

Cho $\tilde{\mu}_1(t)$ và $\tilde{\mu}_2(t)$ là hai tín hiệu tất định. Khi này, biến đổi Fourrier của hàm tương quan chéo $\tilde{r}_{\mu_1\mu_2}(\tau)$

$$\tilde{S}_{\mu1\mu2}(f) := \int \tilde{r}_{\mu1\mu2}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau,\ f\in IR \qquad (2.74)$$

được gọi là *mật độ phổ công suất chéo* (hay *phổ mật độ công suất chéo*).

Từ (2.74) và quan hệ $\tilde{r}_{\mu_1\mu_2}(\tau) = \tilde{r}^{*}_{\mu_2\mu_1}(-\tau) \Rightarrow$ ta rút ra $\tilde{S}_{\mu_1\mu_2}(\tau) = \tilde{S}^{*}_{\mu_2\mu_1}(\tau)$.

❖ **Quan hệ tín hiệu tất định vào/ra hệ LTI ổn định**

Cho $\tilde{\nu}(t)$ và $\tilde{\mu}(t)$ là các tín hiệu tất định đầu vào/ra của một hệ tuyến tính bất biến ổn định có hàm truyền đạt H(f). Khi này ta có tương quan sau

$$\tilde{S}_{\mu\mu}(f) = |H(f)|^2 \tilde{S}_{\nu\nu}(f) \qquad (2.75)$$

2.4. TÍN HIỆU TẤT ĐỊNH RỜI RẠC THỜI GIAN

❖ **Tín hiệu rời rạc thời gian $\{\tilde{\mu}(kT_s)\}$**

➢ ***Tạo tín hiệu RR thời gian***

Bằng cách lấy mẫu cách đều một tín hiệu liên tục thời gian $\tilde{\mu}(t)$ tại các thời điểm rời rạc $t=t_k=kT_s$, trong đó $k \in Z$ và T_s ký hiệu cho khoảng lấy mẫu, ta được chuỗi các số $\{\tilde{\mu}(kT_s)\} = \{..., \tilde{\mu}(-T_s), \tilde{\mu}(0), \tilde{\mu}(T_s), ...\}$.

➢ ***Phân biệt giữa tín hiệu rời rạc thời gian và phần tử của nó.***

Trong nhiều trương hợp cần phải phân biệt **rõ** giữa bản thân $\{\tilde{\mu}(kT_s)\}$ (được gọi là tín hiệu rời rạc thời gian) với phần tử thứ **k** $\tilde{\mu}(kT_s)$ của nó. Đối với mục đích khảo xát ở đây, ta không cần nhắc lại sự phân biệt này. Vì thế dưới đây, ta chỉ ***đơn giản*** viết $\tilde{\mu}(kT_s)$ cho các tín hiệu rời rạc thời gian hoặc các chuỗi, ngoài ra ta sẽ sử dụng ký hiệu $\overline{\mu}[k] := \tilde{\mu}(kT_s) = \tilde{\mu}(t)\big|_{t=kT_s}$.

Ngoài để phân biệt các tín hiệu tất định rời rạc thời gian với tín hiệu tất định liên tục và các quá trình ngẫu nhiên, ta sử dụng ***dấu ngạch ngang*** bên trên các ký hiệu của tín hiệu tất định rời rạc.

❖ **Tín hiệu tất định rời rạc thời gian**

⇒ **Rõ thấy:** bằng cách lấy mẫu tín hiệu ***tất định*** liên tục thời gian $\tilde{\mu}(t)$ ta được tín hiệu rời rạc thời gian $\overline{\mu}[k]$ cũng sẽ là một tín hiệu ***tất định***. Khi nói về một tín hiệu tất định rời rạc thời gian, ta hiểu rằng là ánh xạ thuộc loại

$$\overline{\mu} := Z \to IR \ \text{(hay C)},\ k \mapsto \overline{\mu}[k] \qquad (2.76)$$

Các thuật ngữ được sử dụng trước đây cho tín hiệu tất định ***liên tục*** thời gian như: hàm tự tương quan và mật độ phổ công suất cũng được áp dụng cho các tín hiệu tất định ***rời rạc*** thời gian. Các mối quan hệ và các định nghĩa quan trọng nhất sẽ chỉ được đưa ra ở đây, đặc biệt được dùng cho chương 8. Ta có thể tìm thấy trình bầy chi tiết các quan hệ này trong [Opp75, Kam98, Unb90].

❖ **Các thuật ngữ**

➢ ***Giá trị trung bình:*** *Giá trị trung bình* của một chuỗi tất định $\overline{\mu}[k]$ đươc định nghĩa bởi

$$\overline{m}_\mu := \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{K} \overline{\mu}[k] \qquad (2.77)$$

➢ ***Công suất trung bình:*** *Công suất trung bình* của một chuỗi tất định $\overline{\mu}[k]$ được định nghĩa bởi

$$\overline{\sigma}_\mu^2 := \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{K} |\overline{\mu}[k]|^2 \qquad (2.78)$$

- ***Chuỗi tự tương quan:*** Cho $\overline{\mu}[k]$ là một chuỗi tất định, khi này *chuỗi tự tương quan* được định nghĩa bởi

$$\overline{r}_{\mu\mu}[i] := \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{k=-K}^{K}\overline{\mu}[i]*[k]\overline{\mu}[k+i],\ i\in Z \qquad (2.79)$$

Vậy xét (7.78), ta rút ra $\overline{\sigma}_{\mu}^2 = \overline{r}_{\mu\mu}[0]$.

- ***Chuỗi tương quan chéo:*** Cho $\overline{\mu}_1[k]$ và $\overline{\mu}_2[k]$ là hai chuỗi tất định, khi này *chuỗi tương quan chéo* được xác định như sau

$$\overline{r}_{\mu_1\mu_2}[k] := \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{k=-K}^{K}\overline{\mu}_1^*[k]\overline{\mu}_2[K-k] \quad k\in\mathbf{Z} \qquad (2.80)$$

Từ đây ta rút ra quan hệ sau: $\overline{r}_{\mu_1\mu_2}[k] = \overline{r}*_{\mu_2\mu_1}[-k]$

- ***Mật độ phổ công suất:*** Cho $\overline{\mu}[k]$ là một chuỗi tất định. Khi này *biến đổi Fourrier* của chuỗi tự tương quan $\tilde{r}_{\mu\mu}[k]$

$$\overline{S}_{\mu\mu}(f) := \sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{r}_{\mu\mu}[k]e^{-j2\pi fT_s k},\ \ f\in IR \qquad (2.81)$$

được gọi là mật độ phổ công suất hay phổ mật độ công suất của $\overline{\mu}[k]$.

⇒ Giữa (2.81) và (2.73) tồn tại quan hệ giữa mật độ phổ công suất của tín hiệu tất định liên tục và tín hiệu tất định rời rạc sau

$$\overline{S}_{\mu\mu}(f) := \frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{S}_{\mu\mu}(f - mf_s) \qquad (2.82)$$

trong đó $f_s=1/T_s$ được gọi là tần số lấy mẫu hay tốc độ lấy mẫu.

⇒ Rõ ràng rằng mật độ phổ công suất tín hiệu tất định rời rạc $\overline{S}_{\mu\mu}(f)$ là một hàm tuần hoàn có chu kỳ f_s, vì tồn tại $\overline{S}_{\mu\mu}(f) = \overline{S}_{\mu\mu}(f - mf_s)$ cho mọi $m\in Z$. ***Quan hệ (2.82) phát biểu rằng mật độ phổ công suất $\overline{S}_{\mu\mu}(f)$ của $\overline{\mu}[k]$ rút ra từ mật độ phổ công suất $\tilde{S}_{\mu\mu}(f)$ của $\tilde{\mu}[t]$, nếu chia (nhân) mật độ phổ công suất của tín hiệu thứ hai cho $1/T_s$ và lặp lại định kỳ tại các thời điểm mf_s, trong đó $m\in Z$.***

Biến đổi Fourrier rời rạc ngược IDFT của mật độ phổ công suất tín hiệu tất định rời rạc $\overline{S}_{\mu\mu}(f)$ cho ta chuỗi tự tương quan $\overline{r}_{\mu\mu}[k]$ của $\overline{\mu}[k]$, nghĩa là

$$\overline{r}_{\mu\mu}[k] := \frac{1}{f_s}\int_{-f_s/2}^{f_s/2}\overline{S}_{\mu\mu}(f)e^{j2\pi fT_s k}df,\ k\in Z \qquad (2.83)$$

- ***Mật độ phổ công suất chéo:*** Cho $\overline{\mu}_1[k]$ và $\overline{\mu}_2[k]$ là hai chuỗi tất định. Khi này biến đổi Fourrier rời rạc DFT của chuỗi tương quan chéo $\overline{r}_{\mu_1\mu_2}[k]$ được định nghĩa bởi.

$$\overline{S}_{\mu_1\mu_2}(f) := \sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{r}_{\mu_1\mu_2}[k]e^{-j2\pi fT_s k}, \qquad f\in IR \qquad (2.84)$$

được gọi là *mật độ phổ công suất chéo* hay *phổ mật độ công suất chéo*. Từ phương trình trên và $\bar{r}_{\mu_1\mu_2}[k] = \bar{r}^*_{\mu_2\mu_1}[-k]$, ta rút ra $\bar{S}_{\mu_1\mu_2}(f) = \bar{S}^*_{\mu_2\mu_1}(-f)$.

- ***Định lý lấy mẫu:*** Cho $\tilde{\mu}[k]$ là một tín hiệu liên tục thời gian có phổ giới hạn với tần số cắt f_c.

Nếu lấy mẫu tín hiệu này với tần số lấy mẫu f_s lớn hơn hai lần tần số cắt f_c, nghĩa là

$$f_s > 2f_c \qquad (2.85)$$

thì $\tilde{\mu}[t]$ sẽ được hoàn toàn được xác định bởi các giá trị lấy mẫu tương ứng $\bar{\mu}[k] = \tilde{\mu}[kT_s]$.

$\Rightarrow$ Đặc biệt từ chuỗi $\bar{\mu}[k]$ ta có thể khôi phục lại tín hiệu liên tục thời gian $\tilde{\mu}[t]$ theo quan hệ sau

$$\tilde{\mu}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\mu}[k] \operatorname{sinc}\left[\pi \frac{t - kT_s}{T_s}\right] \qquad (2.86)$$

trong đó sinc(.) ký hiệu cho hàm sinc được định nghĩa như sau: sinc(x)=sin(x)/x.

Cần nói thêm rằng ta có thể thay điều kiện lấy mẫu (2.85) trên bằng điều kiện mở rộng hơn $f_s \geq 2f_c$, nếu mật độ phổ công suất $\tilde{S}_{\mu\mu}(f)$ **không** có các thành phần δ trong giới hạn $f = \pm f_c$ [Fet96]. Trong trường hợp này thậm chí cả khi đảm bảo điều kiện $f_s \geq 2f_c$, tính đúng đắn của định lý lấy mẫu hoàn toàn được đảm bảo.

<u>Phu luc 1</u>

Khảo sát hàm CDF và pdf của phân bố đều

Hàm phân bố xác suất CDF:

```
x = 0:10;
y = unidcdf(x,10);
stairs(x,y) % Stairstep plot
set(gca,'Xlim',[0 11]);
xlabel('x');
ylabel('CDF');
title('Khảo sát hàm phân bố xác suất tích luỹ CDF phân bố đều', 'FontName','.VnTime');
grid on;
```

Hàm mật độ xác suất pdf:

```
x = 0:10;
y = unidpdf(x,10);
stairs(x,y) % Stairstep plot
set(gca,'Xlim',[0 11]);
xlabel('x');
ylabel('PDF')
grid on;
```

Hàm **mfcnormspec**: Vẽ hàm mật độ xác suất trong khoảng xác định.

function [p, h] = mfcnormspec(specs,mu,sigma)

p = mfcnormspec(specs,mu,sigma) thực hiện vẽ hàm mật độ xác suất giữa các gới hạn trên và dưới được xác định bởi thông số specs (là vector hai phần tử xác định khoảng giá trị cần khảo sát), trong đó mu & sigma là các thông số của phân bố cần vẽ. Nếu dùng **[p,h] = mfcnormspec(specs,mu,sigma)**, thì hàm trả lại giá trị xác suất P của mẫu nằm trong khoảng giới hạn trên và giới hạn dưới và h để điều khiển các đối tượng đường vẽ.

```
if prod(size(specs)) ~= 2,
```

```
 error('Yêu cầu đối số thứ nhất là một vector hai phần tử');
end

lb = specs(1);
ub = specs(2);
if lb > ub
 lb = specs(2);
 ub = specs(1);
end

if lb == -Inf & ub == Inf
 error('Vector xác định giới hạn phải có ít nhất một phần tử hữu hạn');
end

if nargin < 2
 mu = 0;
 sigma = 1;
end

if max(size(mu)) > 1 | max(size(sigma)) > 1,
 error('Yêu cầu các đối số đầu vào thứ 2 & 3 vô hướng ');
end

prob = (0.0002:0.0004:0.9998)';

x = norminv(prob,mu,sigma);
y = normpdf(x,mu,sigma);
if lb == -Inf,
 p = normcdf(ub,mu,sigma);
elseif ub == Inf,
 p = 1 - normcdf(lb,mu,sigma);
else
 p = diff(normcdf([lb ub],mu,sigma));
end
nspecfig = figure;
nspecaxes = axes;
set(nspecaxes, 'Parent', nspecfig);
set(nspecaxes,'Nextplot','add');
hh = plot(x,y,'b-');
xl = get(nspecaxes,'Xlim');
lbinf = isinf(lb);
ubinf = isinf(ub);
if lbinf,
 lb = xl(1);
 yll = [0; eps];
else
 yll = normpdf(lb,mu,sigma);
 yll = [0; yll];
end
if ubinf,
 ub = xl(2);
 yul = [eps; 0];
else
 yul = normpdf(ub,mu,sigma);
 yul = [yul; 0];
end

ll = [lb; lb];
ul = [ub; ub];

if ubinf
 title(['Xác suất lớn hơn giới hạn dưới = ',num2str(p)],'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
 k = find(x > lb);
 hh1 = plot(ll,yll,'b-');
```

```
elseif lbinf
 title(['Xác suất nhỏ hơn giới hạn trên = ',num2str(p)],'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
 k = find(x < ub);
 hh1 = plot(ul,yul,'b-');
else
 title(['Xác suất nằm trong khoảng giới hạn trên & dưới =
 ',num2str(p)],'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
 k = find(x > lb & x < ub);
 hh1 = plot(ll,yll,'b-',ul,yul,'b-');

end
xfill = x(k);
xfill = [ll; xfill; ul];
yfill = [yll; y(k); yul];
fill(xfill,yfill,'b');

if nargout == 2
 h = [hh; hh1];
end

xaxis = refline(0,0);
set(xaxis,'Color','k');
ylabel('Mật độ xác suất','FontName','.VnTime');
xlabel('Giá trị tới hạn','FontName','.VnTime');
```

Phu luc 2

Hàm chính

```
function y=CS22
mx = input('Nhap vector trung binh duoi dang MT cot [0 0] = );
mx=mx';
Cx = input('Nhap ma tran hiep bien Cx [1 1/2;1/2 1] = );

x=multi_gp(mx,Cx);

% Tính pdf của (x1,x2)

delta = 0.3;
x1=-5:delta:5;
x2=-5:delta:5;
for i=1:length(x1)
 for j=1:length(x2)
f(i,j)=(1/((2*pi)*det(Cx)^1/2))*exp((-1/2)*(([x1(i) x2(j)] - mx')*inv(Cx)*([x1(i);x2(j)] -mx)));
 end
end

% Vẽ pdf
mesh(x1,x2,f);
xlabel('x_1');
ylabel('x_2');
zlabel('pdf')
```

Hàm con:

```
function [x]=multi_gp(m,C)

% MULTI_GP tạo quá trình ngẫu nhiên Gausơ nhiều biến có trung bình m (vector cột) và ma trận hiệp biến C

N=length(m);
for i=1:N
 y(i)=gngauss;
end
y=y.';
```

```
x=sqrt(C)*y + m;

%--------------------

function [gsrv1,gsrv2] = gngauss(m,sgma)

% GNGASS tạo hai biến ngẫu nhiên độc lập có trung bình m và độ lệch chuẩn sgma. Nếu một trong hai đối số
  vào không có thì gán trung bình là '0'. Nếu có trung bình hoặc phương sai thì tạo hai biến ngẫu nhiên
  Gausơ tiêu chuẩn

if nargin==0,
 m=0;
 sgma=1;
elseif nargin==1,
 sgma=m;
 m=0;
end;
u=rand;                             % Biến ngẫu nhiên phân phối đều trong khoảng (0,1)
z=sgma*(sqrt(2*log(1/(1-u)))); % Biến ngẫu nhiên phân phối Rayleigh.
u=rand;                             % Biến ngẫu nhiên phân phối đều trong khoảng (0,1) khác
gsrv1=m+z*cos(2*pi*u);
gsrv2=m+z*cos(2*pi*u);
```

Phu luc 3

Chương trình chính:

```
x = 0:0.1:3;
p = mfcraylpdf(x,1);
plot(x,p);
xlabel('x');
ylabel('pdf');
title('Khảo sát hàm mật độ xác suất của phân bố Rayleigh', 'FontName','.VnTime');
grid on;
```

Chương trình con:

Xây dựng hàm mật độ xác suất cho phân bố Rayleigh:

function Y = mfcraylpdf(x,b)

Y = mfcraylpdf(X,B) thực hiện tính PDF của phân bố Rayleigh tại mỗi giá trị trong X cùng với các thông số tương ứng trong B. Các đầu vào Vector or matrix đối với X & B phải có cùng kích thước, cũng là kích thước của Y. Một đầu vào vô hướng đối với X hoặc B được khai triển thành ma trận hằng số với các chiều giống với các đầu vào khác.

Hàm được viết gọn

$$y = f(x|b) = \frac{x}{b^2} e^{\left(\frac{-x^2}{2b^2}\right)}$$

```
if nargin < 1,
 error('Yêu cầu ít nhất có một đối số đầu vào');
end

[errorcode x b] = distchck(2,x,b);

if errorcode > 0
 error('Yêu cầu các đối số không phải là vô hướng để phù hợp về kích thước');
end

% Khởi tạo Y =0.
y=zeros(size(x));

% Trở về NaN Nếu B không phải là số dương.
k1 = find(b <= 0);
if any(k1)
```

```
 tmp = NaN;
 y(k1) = tmp(ones(size(k1)));
end

k=find(b > 0 & x >= 0);
if any(k),
 xk = x(k);
 bk = b(k);
 y(k) = (xk./ bk.^ 2).* exp(-xk.^ 2./ (2*bk.^ 2));
end
```

Phu luc 4

Chương trình chính:

```
x = 0:0.1:3;
p = mfcraylcdf(x,1);
plot(x,p);
xlabel('x');
ylabel('CDF');
title('Khảo sát hàm phân bố tích luỹ xác suất của phân bố Rayleigh', 'FontName','.VnTime');
```

Chương trình con:

Xây dựng hàm phân bố xác suất tích luỹ cho phân bố Rayleigh:

function p = mfcraylcdf(x,b)

P = mfcraylcdf(X,B) thực hiện tính CDF của phân bố Rayleigh tại mỗi giá trị trong X cùng với các thông số tương ứng trong B. Các đầu vào Vector or matrix đối với X & B phải có cùng kích thước, cũng là kích thước của P. Một A đầu vào vô hướng đối với X hoặc B được khai triển thành ma trận hằng số với các chiều giống với các đầu vào khác.

Hàm được viết gọn

$$y = F(x|b) = \int_0^x \frac{t}{b^2} e^{\left(\frac{-t^2}{2b^2}\right)} dt$$

```
if nargin < 1,
 error('Yêu cầu ít nhất có một đối số đầu vào');
end

[errorcode x b] = distchck(2,x,b);

if errorcode > 0
 error('Yêu cầu các đối số không phải là vô hướng để phù hợp về kích thước');
end

% Khởi tạo P = 0.

p=zeros(size(x));

% Trở về NaN nếu B không phải là số dương.
k1 = find(b <= 0);
if any(k1)
 tmp = NaN;
 p(k1) = tmp(ones(size(k1)));
end

k=find(b > 0 & x >= 0);
if any(k),
 xk = x(k);
 bk = b(k);
 p(k) = 1 - exp(-xk.^ 2./ (2*bk.^ 2));
end
```