

Phụ lục 3A2

MÁY THU TỐI ƯU ĐỐI VỚI TÍN HIỆU NHỊ PHÂN TRONG MÔI TRƯỜNG KÊNH AWGN

1. MÁY THU TỐI ƯU

Trong khoảng thời gian bit $[(k-1)T_b; kT_b]$ nào đó, tạp âm đều ảnh hưởng đến tín hiệu thu. Nếu xét tín hiệu trên khoảng thời gian bit đầu tiên, tín hiệu thu là

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$= \begin{cases} s_1(t) + n(t), & \text{nếu bit "0" được phát} \\ s_2(t) + n(t), & \text{nếu bit "1" được phát} \end{cases} \quad (3A.1)$$

Trong đó: coi đồng bộ thời gian giữa phát/thu (biết chính xác thời điểm bắt đầu của bit); máy thu phải biết chính xác hai tín hiệu $s_1(t)$ và $s_2(t)$; biết trước các xác suất tiên nghiệm (xác suất phát bit “0” và “1”).

Để có được máy thu tối ưu, trước hết, ta khai triển $r(t)$ thành dạng chuỗi sử dụng các hàm trực giao $\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \dots$. Như đã được đề cập, hai hàm trực chuẩn $\phi_1(t)$ & $\phi_2(t)$ đầu tiên được chọn để biểu diễn chính xác tín hiệu $s_1(t)$ và $s_2(t)$. Lưu ý rằng, $s_1(t)$ và $s_2(t)$ xác định $\phi_1(t)$ & $\phi_2(t)$ theo thủ tục Gram-Schmidt. Phần còn lại được chọn để hoàn thành tập trực giao. Tín hiệu $r(t)$ trong khoảng thời gian $[0; T_b]$ được biểu diễn như sau:

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$= \underbrace{[s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t)]}_{s_i(t)} + \underbrace{[n_1\phi_1(t) + n_2\phi_2(t) + n_3\phi_3(t) + n_4\phi_4(t) + \dots]}_{n(t)} \quad (3A.2)$$

$$= (s_{i1} + n_1)\phi_1(t) + (s_{i2} + n_2)\phi_2(t) + n_3\phi_3(t) + n_4\phi_4(t) + \dots$$

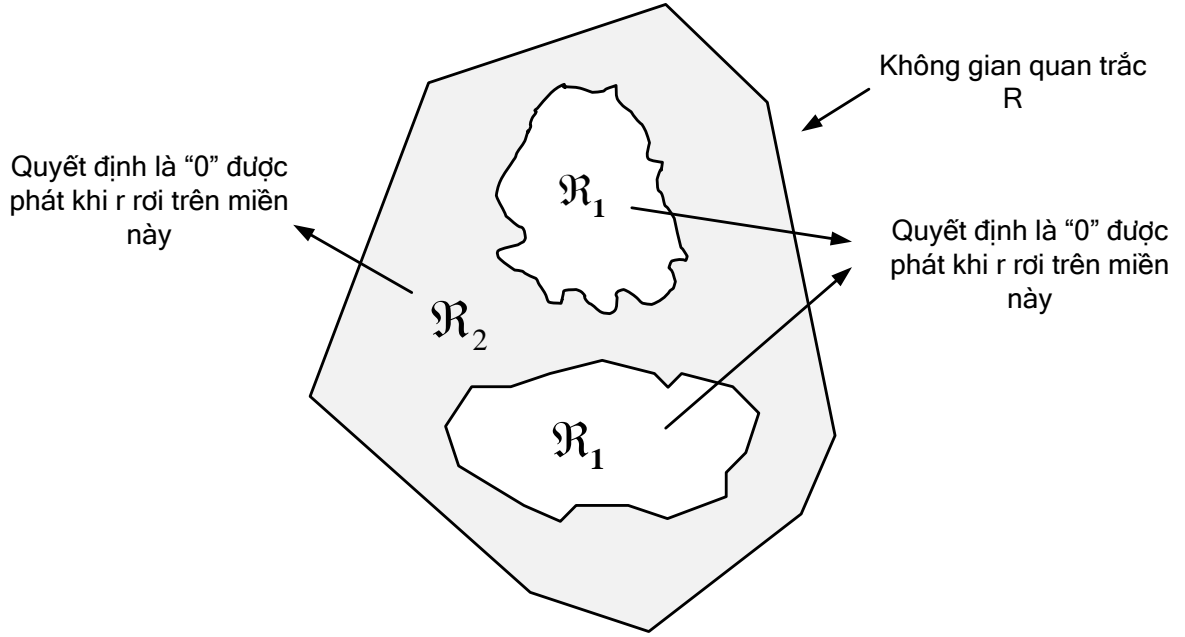
$$= r_1\phi_1(t) + r_2\phi_2(t) + r_3\phi_3(t) + r_4\phi_4(t) + \dots$$

trong đó $r_j = \int_0^{T_b} r(t)\phi_j(t)dt$ và

$$\begin{aligned} r_1 &= s_{i1} + n_1 \\ r_2 &= s_{i2} + n_2 \\ r_3 &= n_3 \\ r_4 &= n_4 \\ &\dots \end{aligned} \quad (3A.3)$$

Đặc biệt chú ý rằng r_j , $j=3,4,\dots$ không phụ thuộc vào việc tín hiệu $s_1(t)$ hay $s_2(t)$ được phát, $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ đều là các biến ngẫu nhiên Gauss có cùng phương sai $\frac{N_0}{2}$ (phương sai của tạp âm). Giá trị trung bình của r_1, r_2 tương ứng là s_{i1} và s_{i2} . Với $r_j, j>3$ có trung bình không (trung bình của tạp âm).

Tại đây, dựa vào việc quan trắc các biến ngẫu nhiên $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ để quyết định tín hiệu nào được phát. Trước hết ta phải có tiêu chuẩn quyết định tối ưu, tiêu chuẩn được chọn sao cho giảm thiểu xác suất lỗi quyết định.



Hình 3A.1. Không gian quan trắc và vùng quyết định

Để rút ra máy thu mà giảm thiểu xác suất lỗi, ta xét quan trắc $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$. Nếu ta chỉ xét n thành phần đầu tiên thì chúng tạo nên không gian quan trắc n chiều mà ta phải phân nhỏ thành các vùng quyết định để giảm thiểu xác suất lỗi. Điều này được minh họa trên hình 3A.1. Xác suất lỗi được biểu diễn như sau:

$$\Pr[\text{lỗi}] = \Pr[(\text{quyết định "0" \& phát "1"} \text{ hoặc } (\text{quyết định "1" \& phát "0"}))] \quad (3A.4)$$

Vì hai sự kiện trên là loại trừ tương hỗ nhau, nên:

$$\begin{aligned} \Pr[\text{lỗi}] &= \Pr[0_D, 1_T] + \Pr[1_D, 0_T] \\ &= \Pr[0_D | 1_T] \Pr[1_T] + \Pr[1_D | 0_T] \Pr[0_T] \end{aligned} \quad (3A.5)$$

Tại đây ta xét đại lượng $\Pr[0_D | 1_T]$. Quyết định là bit 0 dựa vào quan trắc \mathbf{r} có rơi vào miền \mathcal{R}_1 không. Do đó, xác suất bit "0" được quyết định khi đã phát bit "1" bằng với xác suất \mathbf{r} rơi vào miền \mathcal{R}_1 khi đã phát bit "1". Xác suất này được cho bởi độ lớn dưới hàm mật độ xác suất có điều kiện trong miền \mathcal{R}_1 , nghĩa là:

$$\Pr[0_D | 1_T] = \int_{\mathcal{R}_1} f(\mathbf{r} | 1_T) d\mathbf{r} \quad (3A.6)$$

Do đó

$$\begin{aligned} \Pr[\text{lỗi}] &= P_2 \int_{\mathcal{R}_1} f(\mathbf{r} | 1_T) d\mathbf{r} + P_1 \int_{\mathcal{R}_2} f(\mathbf{r} | 0_T) d\mathbf{r} \\ &= P_2 \int_{\mathcal{R}_1} f(\mathbf{r} | 1_T) d\mathbf{r} + P_1 \int_{\mathcal{R}_2} f(\mathbf{r} | 0_T) d\mathbf{r} \\ &= P_2 \int_{\mathcal{R}_1} f(\mathbf{r} | 1_T) d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{R}_2} [P_1 f(\mathbf{r} | 0_T) - P_2 f(\mathbf{r} | 1_T)] d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (3A.7)$$

Lỗi phụ thuộc vào cách phân chia miền quan trắc. Từ biểu thức xác suất lỗi, ta thấy nếu \mathbf{r} làm cho tích phân của $P_1 f(\mathbf{r}|0_T) - P_2 f(\mathbf{r}|1_T)$ có giá trị âm trên \mathcal{R}_2 thì xác suất lỗi được giảm thiểu. Vì vậy, quy tắc quyết định xác suất lỗi nhỏ nhất được biểu diễn là:

$$\begin{cases} P_1 f(\mathbf{r}|0_T) - P_2 f(\mathbf{r}|1_T) \geq 0 & \Rightarrow \text{quyết định } 0_T \\ P_1 f(\mathbf{r}|0_T) - P_2 f(\mathbf{r}|1_T) < 0 & \Rightarrow \text{quyết định } 1_T \end{cases} \quad (3A.8)$$

Hay

$$\frac{f(\mathbf{r}|1_T)}{f(\mathbf{r}|0_T)} \underset{0_T}{\overset{1_T}{>}} \frac{P_1}{P_2} \quad (3A.9)$$

Biểu thức $\frac{f(\mathbf{r}|1_T)}{f(\mathbf{r}|0_T)}$ thường được gọi là **tỷ lệ khả năng giống**. Máy thu sẽ thực hiện tính toán tỷ số này và so sánh kết quả với một ngưỡng tiên định (ngưỡng được xác định bởi các xác suất tiên nghiệm). Ta xét hàm mật độ xác suất có điều kiện $f(\mathbf{r}|1_T)$ và $f(\mathbf{r}|0_T)$. Do các thành phần r_1, r_2, r_3, \dots là các biến ngẫu nhiên Gauss độc lập thống kê, nên chúng được viết dưới dạng tích của nhiều hàm mật độ xác suất riêng biệt như sau:

$$f(\mathbf{r}|1_T) = f(r_1|1_T)f(r_2|1_T)f(r_3|1_T)f(r_4|1_T)\dots f(r_j|1_T)\dots \quad (3A.10)$$

$$f(\mathbf{r}|0_T) = f(r_1|0_T)f(r_2|0_T)f(r_3|0_T)f(r_4|0_T)\dots f(r_j|0_T)\dots \quad (3A.11)$$

hay

$$f(\mathbf{r}|1_T) = (\pi N_0)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(r-s_{21})^2}{N_0}\right] (\pi N_0)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(r_2-s_{22})^2}{N_0}\right] f(r_3|1_T)f(r_4|1_T)\dots$$

$$f(\mathbf{r}|0_T) = (\pi N_0)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(r-s_{11})^2}{N_0}\right] (\pi N_0)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(r_2-s_{12})^2}{N_0}\right] f(r_3|1_T)f(r_4|1_T)\dots$$

Chú ý rằng $f(r_j|1_T) = f(r_j|0_T) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{r_j^2}{N_0}}$ với $j > 2$. Do đó, chúng được loại bỏ trong công thức tỷ số khả năng giống (3A.9). Vì vậy, quy tắc quyết định trở thành:

$$\frac{\exp\left[-(r_1-s_{21})^2/N_0\right] \exp\left[-(r_2-s_{22})^2/N_0\right]}{\exp\left[-(r_1-s_{11})^2/N_0\right] \exp\left[-(r_2-s_{12})^2/N_0\right]} \underset{0_T}{\overset{1_T}{>}} \frac{P_1}{P_2} \quad (3A.12)$$

Để đơn giản biểu thức, lấy loga tự nhiên hai vế của (3A.12). Kết quả là, quy tắc quyết định:

$$\left(r_1-s_{11}\right)^2 + \left(r_2-s_{21}\right)^2 \underset{0_T}{\overset{1_T}{>}} \left(r_1-s_{21}\right)^2 + \left(r_2-s_{22}\right)^2 + N_0 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad (3A.13)$$

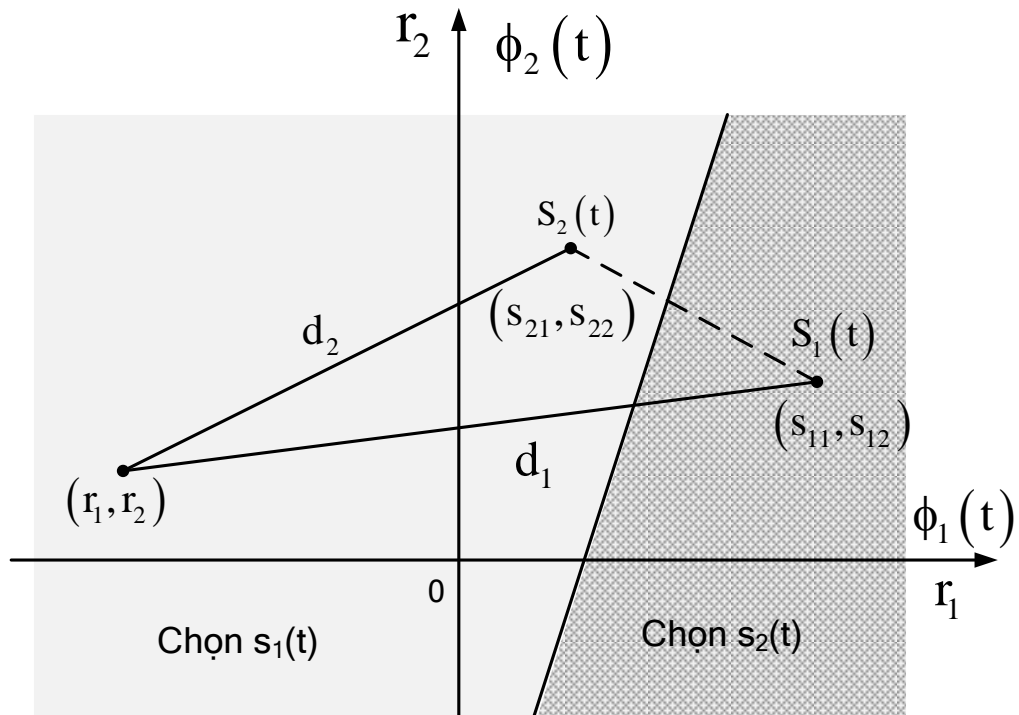
Quy tắc trên có sự biểu diễn hình học rất thú vị. Đại lượng $(r_1-s_{11})^2 + (r_2-s_{12})^2$ là bình phương khoảng cách từ hình chiếu (r_1, r_2) của tín hiệu thu $r(t)$ lên tín hiệu phát $s_1(t)$.

Tương tự $(r_1 - s_{21})^2 + (r_2 - s_{22})^2$ là bình phương khoảng cách từ (r_1, r_2) lên $s_2(t)$. Trường hợp đặc biệt $P_1 = P_2$, thì quy tắc quyết định là:

$$(r_1 - s_{11})^2 + (r_2 - s_{21})^2 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \begin{matrix} I_r \\ 0_r \end{matrix} (r_1 - s_{21})^2 + (r_2 - s_{22})^2 \quad (3A.14)$$

Thực chất, biểu thức trên hàm ý rằng, máy thu tối ưu cần phải xác định khoảng cách từ $r(t)$ đến cả $s_1(t)$ và $s_2(t)$, sau đó chọn $s_i(t)$ mà $r(t)$ gần nhất.

Trường hợp tổng quát hơn $P_1 \neq P_2$ thì các miền quyết định được xác định bởi một đường thẳng *vuông góc* với đường thẳng nối giữa $s_1(t)$ và $s_2(t)$. Nó sẽ dịch về phía $s_2(t)$ nếu $P_1 > P_2$ và sẽ dịch về phía $s_1(t)$ nếu $P_1 < P_2$, được minh họa trên hình 3A.2.



Hình 3A.2: Các miền quyết định được xác định bởi một đường thẳng vuông góc với đường thẳng nối giữa $s_1(t)$ và $s_2(t)$.

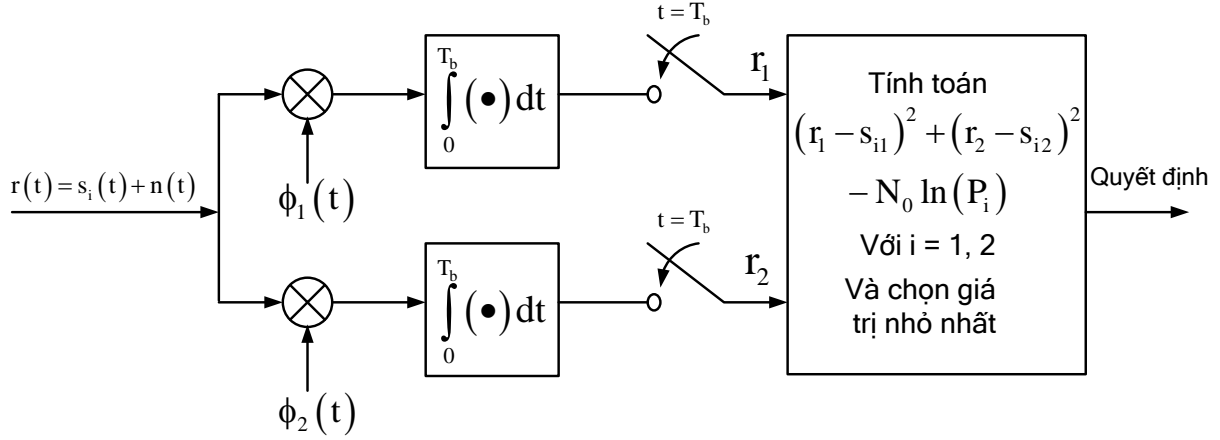
2. CẤU TRÚC MÁY THU TỐI ƯU

Để xác định xác suất lỗi nhỏ nhất trong trường hợp bit “0” hoặc bit “1” được phát, ta cần xác định r_1, r_2 sau đó dùng (3A.13) để đưa ra quyết định. Vì vậy, cấu trúc máy thu được cho ở hình 3A.3.

Quá trình nhân $r(t)$ với $\phi_i(t)$ và lấy tích phân trong khoảng thời gian bit là phép toán tương quan và do đó, cấu hình máy thu được gọi là cấu hình máy thu tương quan. Do tại thời điểm cuối cùng của một bit, tích phân sẽ trở về giá trị 0 ban đầu, nên máy thu thông thường được gọi là máy thu tích hợp và phân tách. Quy tắc quyết định có thể được viết lại như sau:

$$(r_1 - s_{11})^2 + (r_2 - s_{21})^2 + N_0 \ln P_1 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \begin{matrix} I_r \\ 0_r \end{matrix} (r_1 - s_{21})^2 + (r_2 - s_{22})^2 + N_0 \ln P_2 \quad (3A.15)$$

$$\begin{pmatrix} r_1^2 - 2r_1s_{11} + s_{11}^2 \\ + r_2^2 - 2r_2s_{12} + s_{12}^2 - N_0 \ln P_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{!}_T \\ > \\ < \\ \text{0}_T \end{matrix} \begin{pmatrix} r_1^2 - 2r_1s_{21} + s_{21}^2 \\ + r_2^2 - 2r_2s_{22} + s_{22}^2 - N_0 \ln P_2 \end{pmatrix} \quad (3A.16)$$



Hình 3A.3: Cấu trúc máy thu tương quan

Loại bỏ các phần chung và để ý rằng $E_1 = s_{11}^2 + s_{12}^2$, $E_2 = s_{21}^2 + s_{22}^2$, ta có

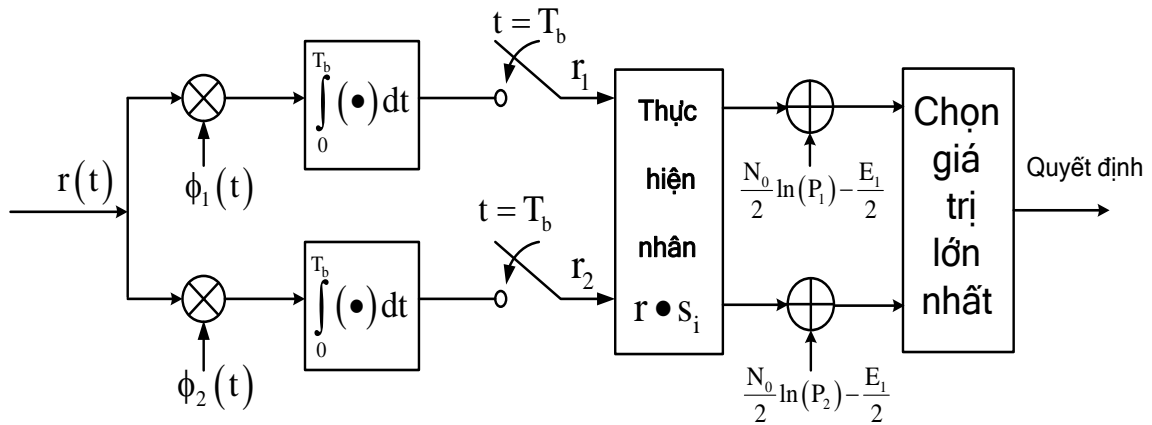
$$r_1s_{21} + r_2s_{22} - \frac{E_2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_2 \begin{matrix} \text{!}_T \\ > \\ < \\ \text{0}_T \end{matrix} r_1s_{11} + r_2s_{12} - \frac{E_1}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_1 \quad (3A.17)$$

Số hạng $r_1s_{11} + r_2s_{12} = (r_1, r_2) \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{pmatrix}$ có thể được biểu diễn như một điểm được tạo ra bởi vector $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ thể hiện tín hiệu thu $\mathbf{r}(t)$ và vector $\mathbf{s}_i = (s_{i1}, s_{i2})$ thể hiện tín hiệu $s_i(t)$. Do đó, cấu trúc máy thu có thể được vẽ lại như hình 3A.4.

Phần tương quan của máy thu tối ưu bao gồm cả bộ nhân và bộ tích phân. Bộ nhân là khó thực hiện được về mặt vật lý. Trong đó, bộ tương quan có thể được thực hiện bằng một bộ lọc đáp ứng xung kim rất hẹp như trên hình (3A.5), trong đó

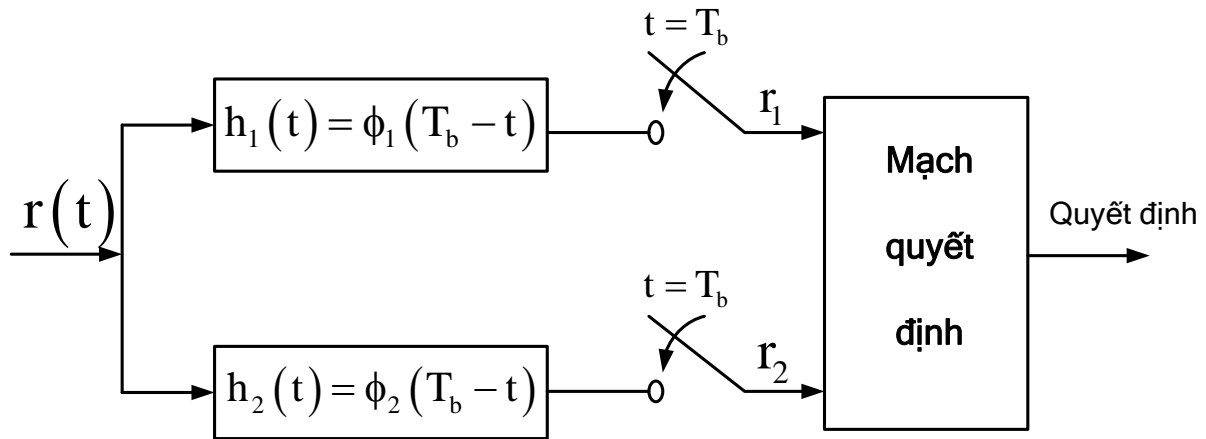
$$h_1(t) = \phi_1(T_b - t) \quad (3A.18)$$

$$h_2(t) = \phi_2(T_b - t) \quad (3A.19)$$



Hình 3A.4: Một cấu trúc khác của máy thu tương quan

Các bộ lọc có đáp ứng xung kim như trên thông thường được gọi là các bộ lọc thích hợp.



Hình 3A.5: Cấu trúc máy thu sử dụng các bộ lọc thích hợp

Ví dụ 3A.1: Xét một tập trực giao $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ trên hình 3A.6a. Tạo thành tập tín hiệu sau:

$$s_1(t) = \phi_1(t) + \frac{1}{2}\phi_2(t)$$

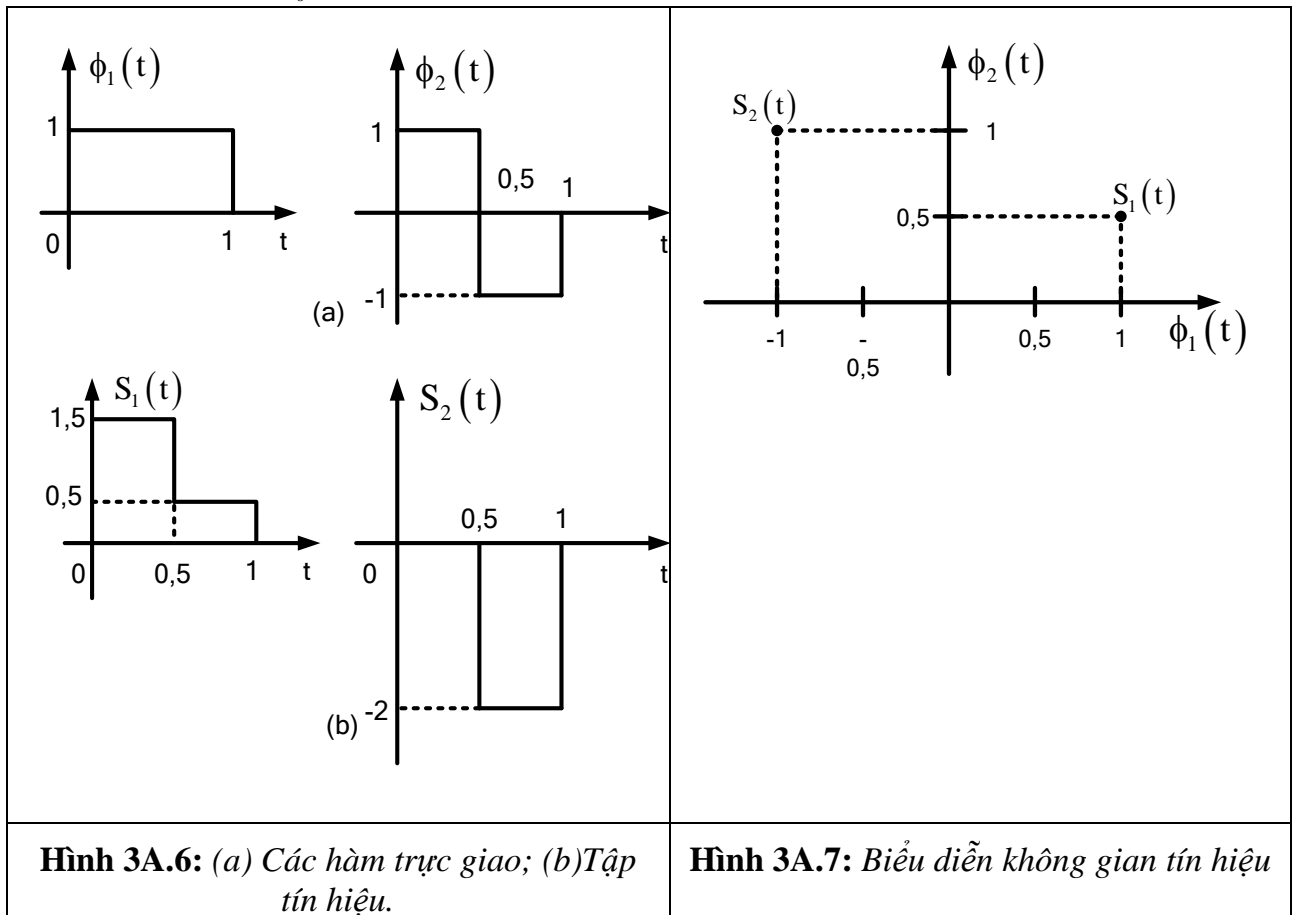
$$s_2(t) = -\phi_1(t) + \phi_2(t)$$

Dạng sóng $s_1(t)$ và $s_2(t)$ tương ứng trên hình 3A.6b. Năng lượng của mỗi tín hiệu được cho bởi:

$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t) dt = 1,25 \quad (\text{J})$$

$$E_2 = \int_0^{T_b} s_2^2(t) dt = 2 \quad (\text{J})$$

(3A.20)



Khác với các ví dụ đã được xét, đây là hai tín hiệu có năng lượng *không* bằng nhau. Khi này, không gian tín hiệu được cho ở hình 3A.7. Ta sẽ xét việc phát hiện tín hiệu đã phát trong khoảng thời gian bit mà tạp âm Gauss trắng có độ lớn là $\frac{N_0}{2} = 0,5 \text{ (W/Hz)}$. Máy thu tối ưu thực hiện chiếu tín hiệu thu $r(t) = s_i(t) + n(t)$ lên $\phi_1(t), \phi_2(t)$, và sau đó áp dụng quy tắc quyết định (3A.13)

$$(r_1 - 1)^2 + \left(r_2 - \frac{1}{2}\right)^2 \underset{0_T}{\overset{1_T}{>}} (r_1 + 1)^2 + (r_2 - 1)^2 + \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad (3A.21)$$

Quy tắc quyết định ở biểu thức (3A.17) được viết lại như sau:

$$-4r_1 + r_2 - \left(\frac{3}{4} + \ln \frac{P_1}{P_2}\right) \underset{0_T}{\overset{1_T}{>}} 0 \quad (3A.22)$$

Biên giới giữa hai miền quyết định được cho bởi:

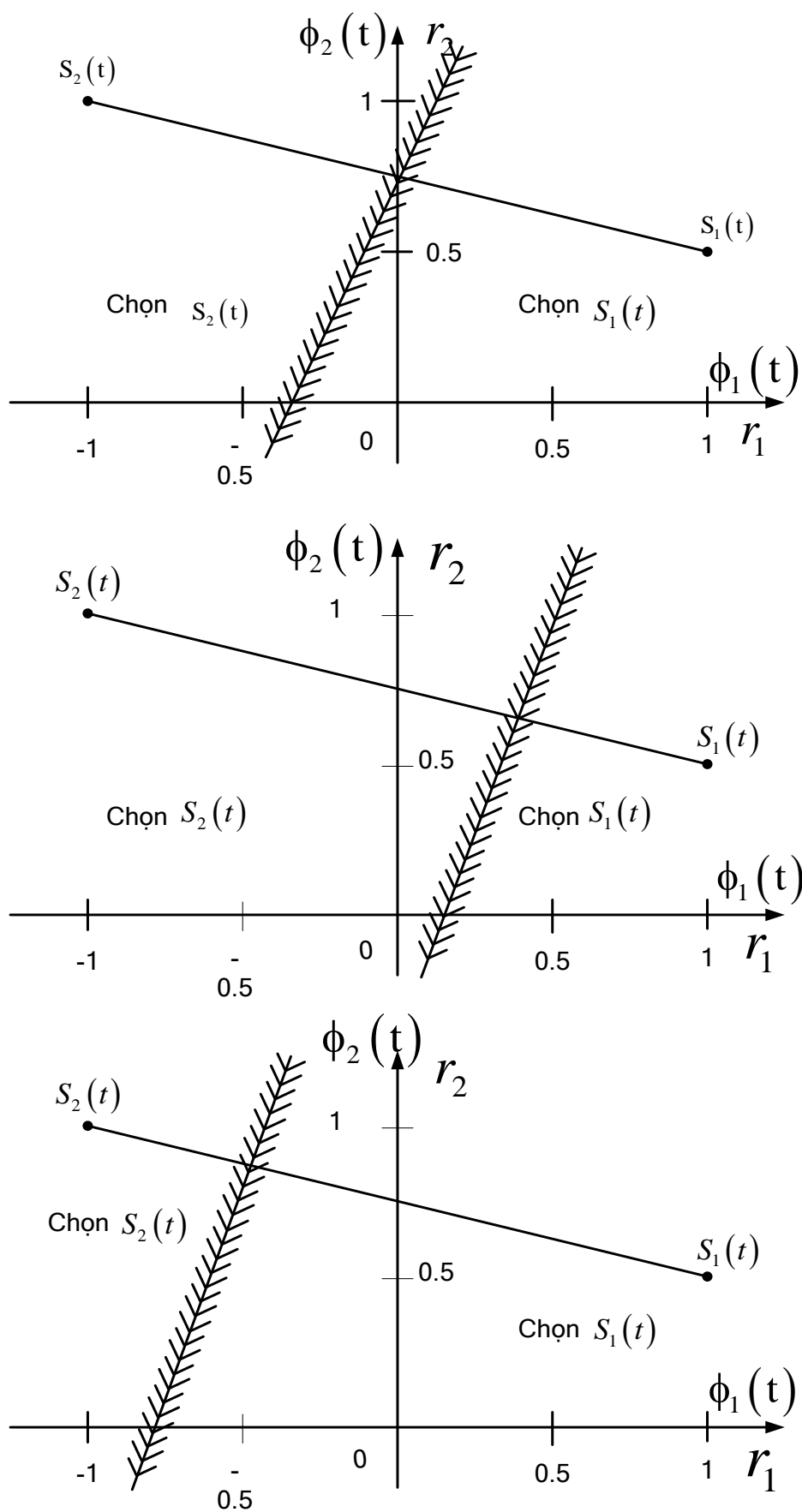
$$4r_1 - r_2 + \left(\frac{3}{4} + \ln \frac{P_1}{P_2}\right) = 0 \quad (3A.23)$$

là biểu thức của một đường thẳng có hệ số dốc bằng 4 và giao với trục tung r_2 tại điểm có tung độ $\left(\frac{3}{4} + \ln \frac{P_1}{P_2}\right)$. Trong hệ tọa độ (r_1, r_2) , biểu thức của đường thẳng nối giữa $s_1(t)$ và $s_2(t)$ được cho bởi:

$$\frac{r_2 - s_{12}}{s_{22} - s_{12}} = \frac{r_1 - s_{11}}{s_{21} - s_{11}}, \quad (3A.24)$$

$$\text{hay } r_2 = -\frac{1}{4}r_1 + \frac{3}{4}$$

Nó cho thấy rằng, hai đường thẳng có biểu thức (3A.23) và (3A.24) vuông góc (trực giao) với nhau. Do đó, các miền quyết định được cho ở hình 3A.8 cho 3 tập xác suất tiên nghiệm khác nhau.



Hình 3A.8. Các miền quyết định: (a) $P_1 = P_2 = 0,5$. (b) $P_1 = 0,25$; $P_2 = 0,75$
 . (c) $P_1 = 0,75$; $P_2 = 0,25$

Ví dụ 3A.2: Với ví dụ thứ hai, xét hai hàm trực giao được cho trên hình 3A.9. Tập các tín hiệu được cho như sau:

$$s_2(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t) \quad (3A.25)$$

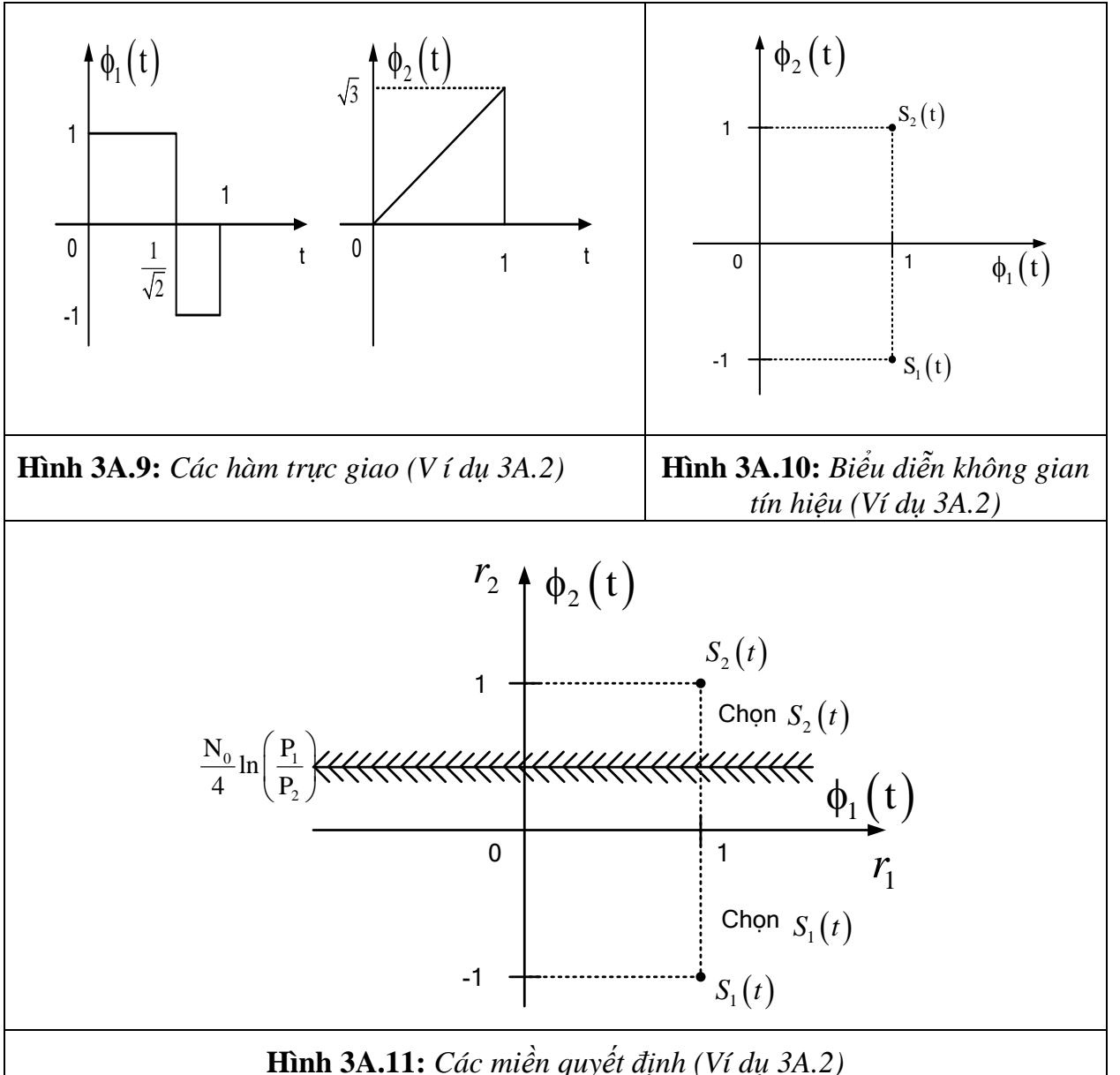
$$s_1(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) \quad (3A.26)$$

Hai tín hiệu có cùng năng lượng $E_1 = E_2 = 2$ (joules). Chú ý rằng $s_1(t)$ và $s_2(t)$ có một thành phần chung $\phi_1(t)$. Do đó, ta mong muốn chỉ cần thành phần $\phi_2(t)$ giúp ta phân biệt giữa hai tín hiệu phát trong môi trường kênh AWGN. Áp dụng (3A.13) ta có:

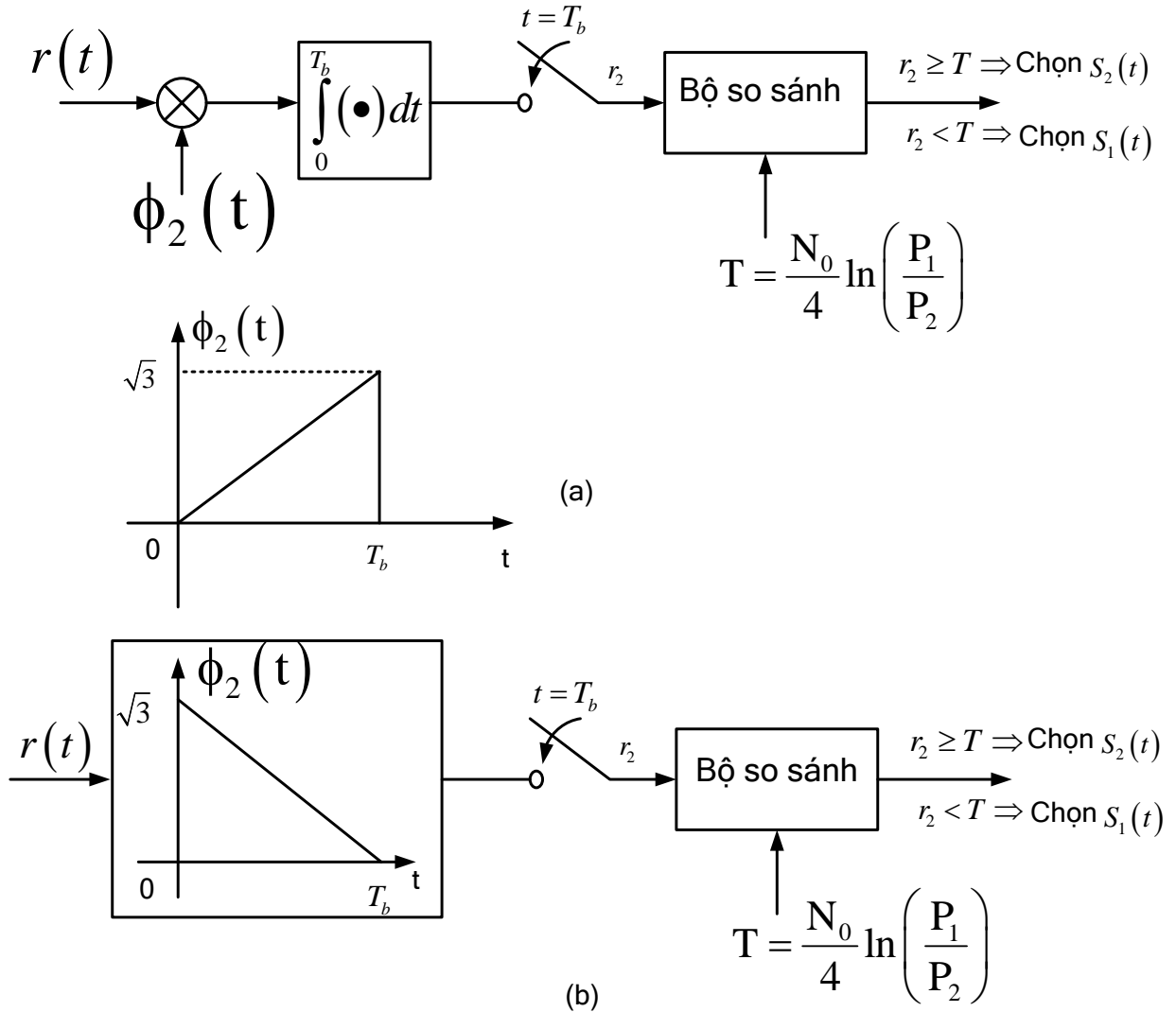
$$(r_1 - 1)^2 + (r_2 + 1)^2 - N_0 \ln P_1 \underset{0_T}{\overset{1_T}{>}} (r_1 - 1)^2 + (r_2 - 1)^2 + N_0 \ln P_2 \quad (3A.27)$$

Rút gọn ta có:

$$r_2 \underset{0_T}{\overset{1_T}{>}} \frac{N_0}{4} \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \quad (3A.28)$$



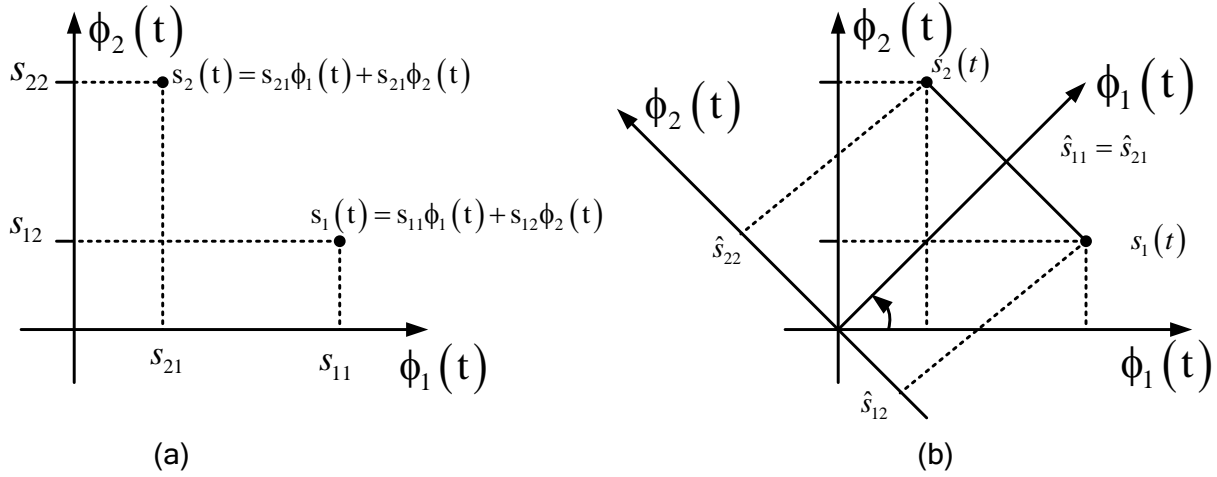
Tập tín hiệu và miền quyết định được cho ở hình 3A.10 và 3A.11. Cấu trúc máy thu dùng bộ tương quan hoặc bộ lọc thích hợp trên hình 3A.12a và 3A.12b.



Hình 3A.12: Cấu trúc máy thu: (a) Máy thu sử dụng bộ tương quan. (b) Máy thu sử dụng bộ lọc thích hợp (Ví dụ 3A.2)

3. CẤU TRÚC MÁY THU SỬ DỤNG MỘT BỘ TƯƠNG QUAN HOẶC MỘT BỘ LỌC THÍCH HỢP

Thông thường, với hai tín hiệu $s_1(t)$ và $s_2(t)$ bất kỳ, ta cần hai hàm trực chuẩn để biểu diễn chúng một cách chính xác, máy thu tối ưu cần phải chiếu $r(t)$ lên hai hàm trực chuẩn này. Điều này cũng đồng nghĩa với cấu trúc máy thu cần phải có hai bộ tương quan hoặc hai bộ lọc thích hợp. Tuy nhiên, trong ví dụ 3A.2, chỉ cần một bộ tương quan hay một bộ lọc thích hợp. Với trường hợp truyền dữ liệu nhị phân, trong đó các ký hiệu phát được biểu diễn bằng một trong hai tín hiệu.



Hình 3A.13. Biểu diễn không gian tín hiệu: (a) bởi $\phi_1(t)$ và $\phi_2(t)$; (b) bởi $\hat{\phi}_1(t)$ và $\hat{\phi}_2(t)$

Xét hai tín hiệu $s_1(t)$ và $s_2(t)$ được biểu diễn bởi các hàm trực giao cơ sở $\phi_1(t)$ và $\phi_2(t)$ như trên hình 3A.13a. Để đơn giản cấu trúc máy thu (chỉ dùng một bộ tương quan hoặc một bộ lọc thích hợp) thì ta phải tìm trong hai hàm trực chuẩn $\hat{\phi}_1(t)$ và $\hat{\phi}_2(t)$ sao cho theo một trục gọi là $\hat{\phi}_1(t)$ mà $s_1(t)$ và $s_2(t)$ có chung một thành phần. Để xác định hàm cơ sở này, ta quay $\phi_1(t)$ và $\phi_2(t)$ một góc θ cho đến khi một trong hai trục vuông góc với đường thẳng nối $s_1(t)$ và $s_2(t)$. Phép quay này được biểu diễn như sau:

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(t) \\ \hat{\phi}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} \quad (3A.29)$$

Tại đây, ta chiếu tín hiệu thu $r(t) = s_i(t) + n(t)$ lên các hàm trực chuẩn $\hat{\phi}_1(t)$ và $\hat{\phi}_2(t)$. Các thành phần của $s_1(t)$ và $s_2(t)$ lên $\hat{\phi}_1(t)$ gọi là \hat{s}_{11} và \hat{s}_{21} . Các hình chiếu của tạp âm \hat{n}_{11} và \hat{n}_{21} là các biến nhiễu Gauss độc lập thống kê, trung bình không và phương sai $\frac{N_0}{2}$ (W).

Tỷ số khả năng giống khi chiếu $r(t)$ lên các trục $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3, \dots$ là:

$$\frac{f(\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3, \dots | 1_T)}{f(\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3, \dots | 0_T)} = \frac{f(\hat{s}_{12} + \hat{n}_1)f(\hat{s}_{22} + \hat{n}_2)f(\hat{n}_3) \dots}{f(\hat{s}_{11} + \hat{n}_1)f(\hat{s}_{12} + \hat{n}_2)f(\hat{n}_3) \dots} \begin{matrix} I_T \\ > \\ 0_T \end{matrix} \frac{P_1}{P_2} \quad (3A.30)$$

Loại bỏ các thành phần chung ta được:

$$\frac{f(\hat{r}_2 | 1_T)}{f(\hat{r}_2 | 0_T)} = \frac{f(\hat{s}_{22} + \hat{n}_2)}{f(\hat{s}_{12} + \hat{n}_2)} \begin{matrix} I_T \\ > \\ 0_T \end{matrix} \frac{P_1}{P_2} \quad (3A.31)$$

Thay thế bằng các hàm mật độ, quy tắc quyết định trở thành

$$\frac{(\pi N_0)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-(\hat{r}_2 - \hat{s}_{22})^2 / N_0\right]}{(\pi N_0)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-(\hat{r}_2 - \hat{s}_{12})^2 / N_0\right]} \begin{matrix} I_T \\ > \\ 0_T \end{matrix} \frac{P_1}{P_2} \quad (3A.32)$$

Lấy loga cơ sở tự nhiên ta có:

$$\hat{r}_2 \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \frac{\hat{s}_{22} + \hat{s}_{12}}{2} + \left(\frac{N_0/2}{\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12}} \right) \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \quad (3A.33)$$

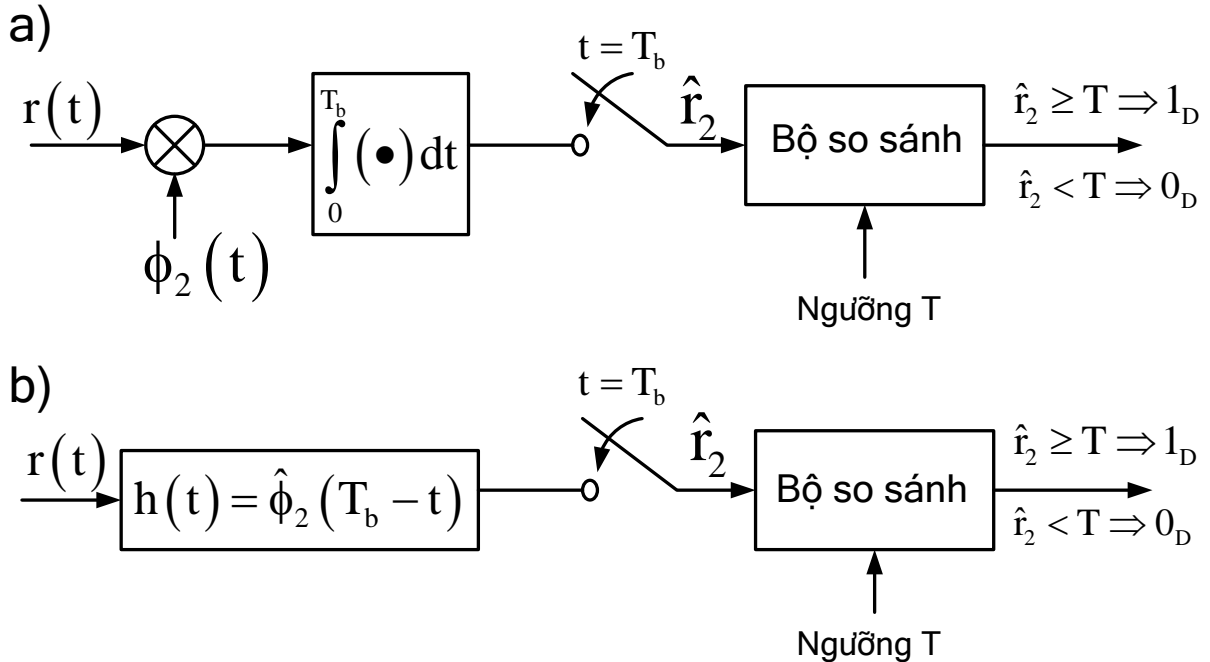
Chú ý rằng, để có được quy tắc quyết định trên, ta phải giả sử rằng $\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12} > 0$ bởi lẽ $(\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12})$ đo khoảng cách giữa hai tín hiệu.

Vì vậy, máy thu tối ưu tìm \hat{r}_2 bằng cách chiếu $r(t)$ lên $\hat{\phi}_2$, nghĩa là $\hat{r}_2 = \int_0^{T_b} r(t)\hat{\phi}_2(t)dt$ và so sánh \hat{r}_2 với ngưỡng:

$$T \equiv \frac{\hat{s}_{22} + \hat{s}_{12}}{2} + \left(\frac{N_0/2}{\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12}} \right) \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \quad (3A.34)$$

Cấu trúc máy thu được cho ở hình 3A.14a và 3A.14b, ứng với máy thu một bộ tương quan và máy thu một bộ lọc thích hợp. Hàm cơ sở $\hat{\phi}_2$ được xác định như sau: Nối hai điểm $s_1(t)$ và $s_2(t)$ là vector $s_2(t) - s_1(t)$. Sau đó chuẩn hóa năng lượng đơn vị vector này ta được hàm cơ sở $\hat{\phi}_2$

$$\hat{\phi}_2(t) = \frac{s_2(t) - s_1(t)}{\left\{ \int_0^{T_b} [s_2(t) - s_1(t)]^2 dt \right\}^{1/2}} = \frac{s_2(t) - s_1(t)}{(E_2 - 2\rho\sqrt{E_1E_2} + E_1)^{1/2}} \quad (3A.35)$$



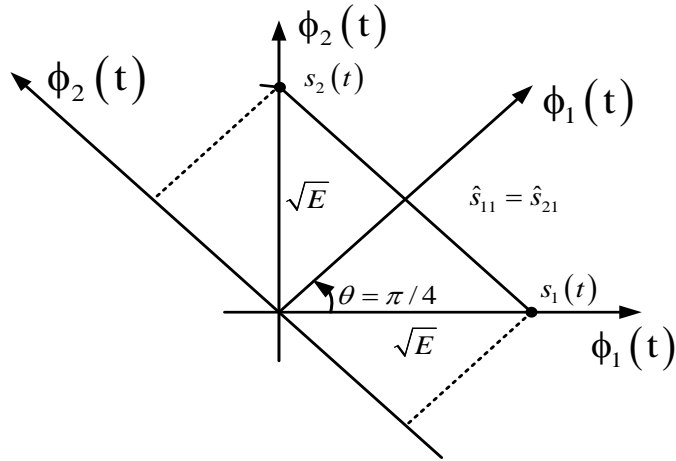
Hình 3A.14: Máy thu tối ưu đơn giản: (a) Sử dụng một bộ tương quan. (b) Sử dụng một bộ lọc thích ứng

Ví dụ 3A.3: Xét tập tín hiệu được cho ở hình 3A.15. Quay một góc 45° các hàm trục chuẩn, ta được $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$:

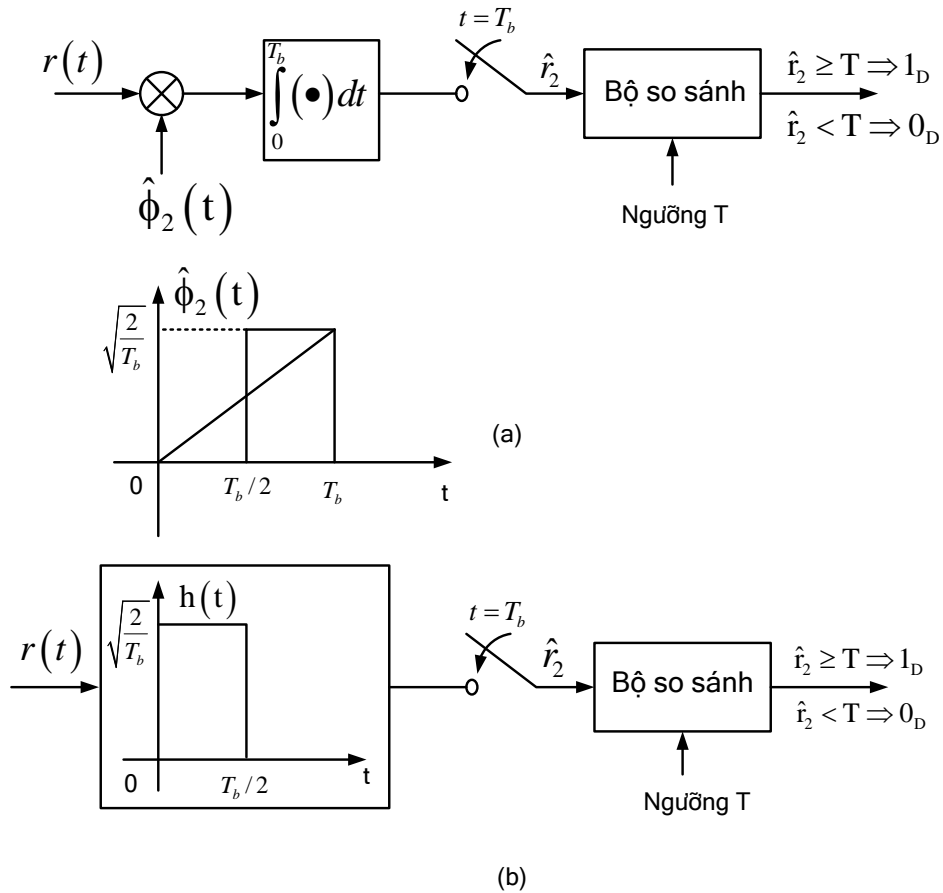
$$\hat{\phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(t) + \phi_2(t)]$$

$$\hat{\phi}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\phi_1(t) + \phi_2(t)]$$

Cấu trúc máy thu được minh họa trên hình 3A.16a and 3A.16.



Hình 3A.15: Biểu diễn không gian tín hiệu (Ví dụ 3A.3)



Hình 3A.16: Cấu trúc máy thu: (a) Máy thu dùng bộ tương quan. (b) Máy thu dùng bộ lọc thích hợp (Ví dụ 3A.3).

4. HIỆU NĂNG MÁY THU

Phần này ta xét hiệu năng của máy thu ở dạng xác suất lỗi. Ta lưu ý rằng, việc phát hiện bit thông tin b_k được phát trong khoảng thời gian thứ k là $[(k-1)T_b, kT_b]$ bao gồm việc tính toán $\hat{r}_2 = \int_{(k-1)T_b}^{kT_b} r(t)\hat{\phi}_2(t)dt$ và so sánh \hat{r}_2 với một ngưỡng T :

$$T = \frac{\hat{s}_{12} + \hat{s}_{22}}{2} + \frac{N_0}{2(\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12})} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad (3A.36)$$

Khi bit “0” được phát, \hat{r}_2 là biến ngẫu nhiên Gauss trung bình \hat{s}_{12} và phương sai $\frac{N_0}{2}$

Khi bit “1” được phát, \hat{r}_2 là biến ngẫu nhiên Gauss trung bình \hat{s}_{22} và phương sai $\frac{N_0}{2}$

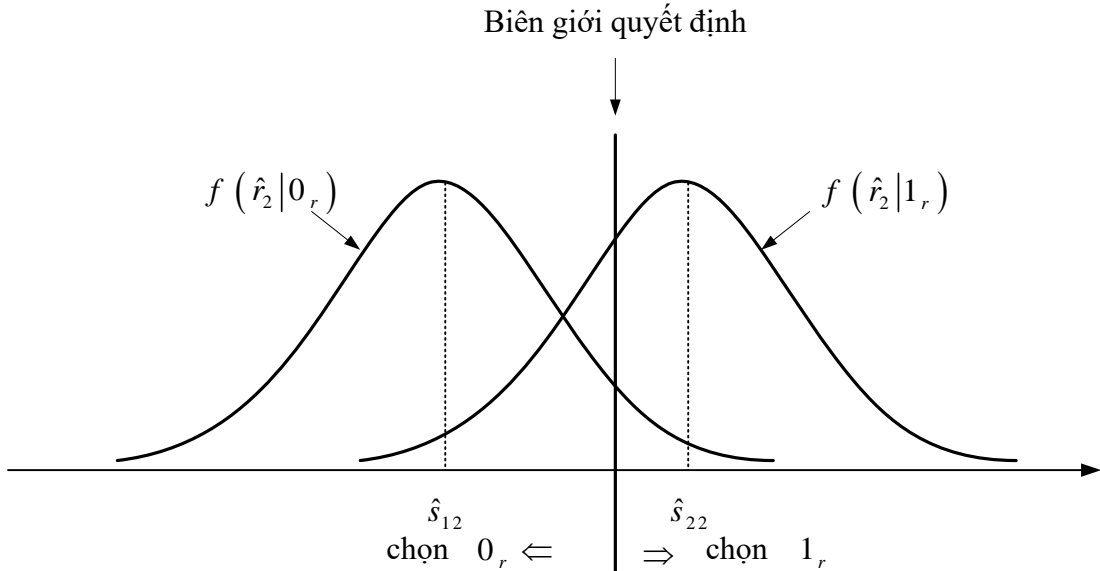
Biểu diễn hình học hai hàm mật độ xác suất có điều kiện được cho ở hình 3A.17.

Xác suất lỗi được cho bởi:

$$\Pr[\text{lỗi}] = \Pr[(\text{phát 0 và chọn 1}) \text{ hay } (\text{phát 1 và chọn 0})]$$

Do hai sự kiện là độc lập tương hỗ nhau, nên

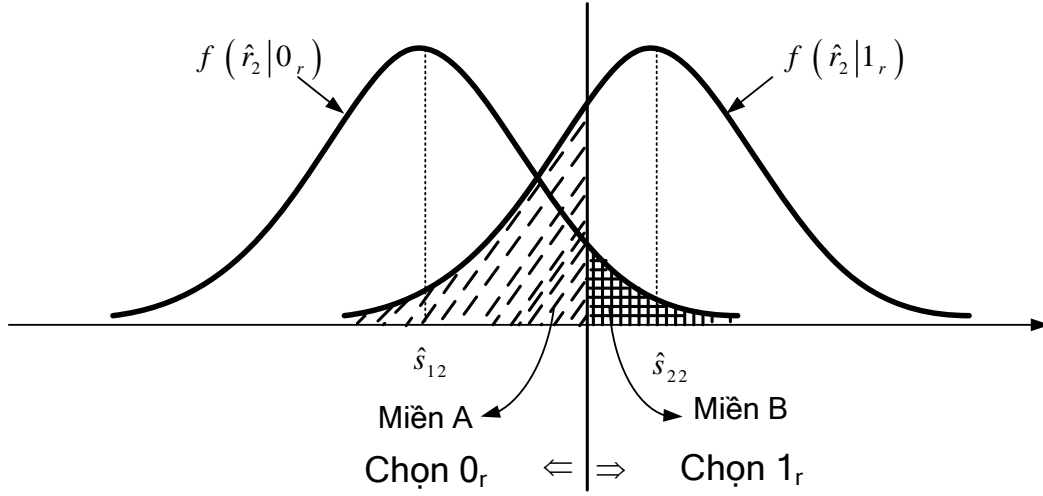
$$\begin{aligned} \Pr[\text{lỗi}] &= \Pr(\text{phát 0 và chọn 1}) + \Pr(\text{phát 1 và chọn 0}) \\ &= \Pr(\text{chọn 1} | 0_T) \cdot \Pr(0_T) + \Pr(\text{chọn 0} | 1_T) \cdot \Pr(1_T) \\ &= P_1 \underbrace{\int_{-\infty}^T f(r_2 | 0_T) dr_2}_{\text{miền B}} + P_2 \underbrace{\int_T^{\infty} f(r_2 | 1_T) dr_2}_{\text{miền A}} \end{aligned} \quad (3A.37)$$



Hình 3A.17: Hai hàm mật độ xác suất có điều kiện

Chú ý rằng, hai tích phân trong công thức (3A.37) bằng với diện tích của miền A và miền B trong hình 3A.18. Do đó, xác suất lỗi được tính toán như sau:

$$\Pr[\text{lỗi}] = P_1 \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(\hat{r}_2 - \hat{s}_{12})^2}{N_0} \right] d\hat{r}_2 + P_2 \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(\hat{r}_2 - \hat{s}_{22})^2}{N_0} \right] d\hat{r}_2 \quad (3A.38)$$



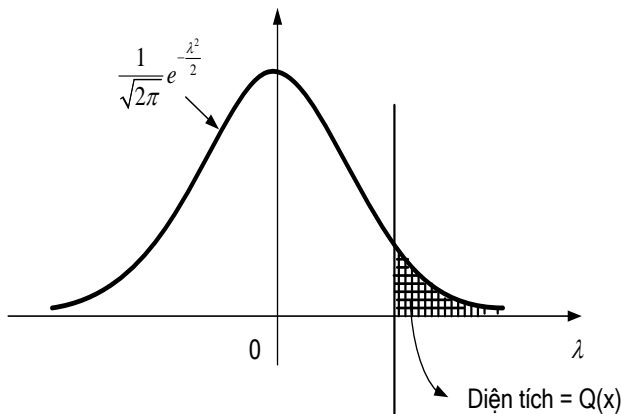
Hình 3A.18: Ước lượng các tích phân thông qua diện tích các miền A và B.

Xét tích phân thứ nhất trong công thức (3A.38). Đổi biến $\lambda = (\hat{r}_2 - \hat{s}_{12}) / \sqrt{N_0/2}$, $d\lambda = \frac{d\hat{r}_2}{\sqrt{N_0/2}}$ và giới hạn dưới trở thành $(\tau - \hat{s}_{12}) / \hat{s}_{12}$. Tích phân trở thành:

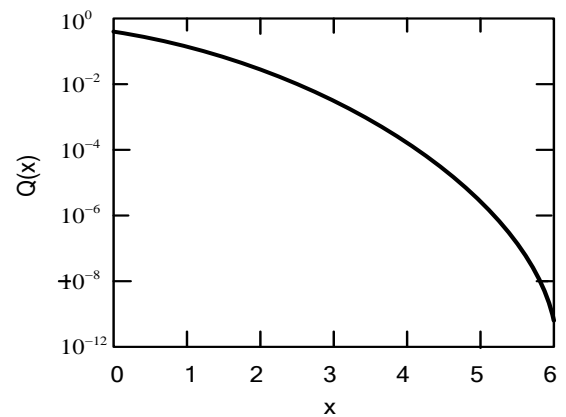
$$\int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(\hat{r}_2 - \hat{s}_{12})^2}{N_0} \right] d\hat{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\tau - \hat{s}_{12}}{\sqrt{N_0/2}}}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = Q \left(\frac{\tau - \hat{s}_{12}}{\sqrt{N_0/2}} \right) \quad (3A.39)$$

trong đó $Q(x)$ được gọi là hàm Q. Hàm này được định nghĩa là vùng diện tích của một miền nằm dưới đường cong hàm mật độ của biến ngẫu nhiên Gauss trung bình bình không, phương sai bằng 1 trong khoảng từ x đến ∞ (Minh họa ở hình 3A.19), nghĩa là

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \quad (3A.40)$$



Hình 3A.19: Minh họa hàm Q



Hình 3A.20: Vẽ hàm $Q(x)$.

Vì vậy, nếu biểu diễn xác suất lỗi theo hàm Q, ta được:

$$\Pr[\text{error}] = P_1 Q\left(\frac{T - \hat{s}_{12}}{\sqrt{N_0}/2}\right) + P_2 Q\left(\frac{T - \hat{s}_{22}}{\sqrt{N_0}/2}\right) \quad (3A.41)$$

Tại đây, ta xét trường hợp quan trọng, trường hợp hai xác suất tiên nghiệm bằng nhau, tức là $P_1 = P_2$. Khi này, ngưỡng T sẽ là $T = (\hat{s}_{12} + \hat{s}_{22})/2$. Xác suất lỗi sẽ giảm xuống còn $\Pr[\text{lỗi}] = Q\left[(\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12})/\sqrt{2N_0}\right]$. Đại lượng $(\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12})$ được viết như sau:

$$\begin{aligned} (\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12}) &= \frac{\int_0^{T_b} \{s_2(t)[s_2(t) - s_1(t)] - s_1(t)[s_2(t) - s_1(t)]\} dt}{\sqrt{(E_2 - 2\rho\sqrt{E_1 E_2} + E_1)}} \\ &= \frac{\int_0^{T_b} [s_2(t) - s_1(t)]^2 dt}{\sqrt{(E_2 - 2\rho\sqrt{E_1 E_2} + E_1)}} = \sqrt{(E_2 - 2\rho\sqrt{E_1 E_2} + E_1)} \end{aligned} \quad (3A.42)$$

So sánh biểu thức (4.96) và (4.91) ta thấy: $(\hat{s}_{22} - \hat{s}_{12})$ là khoảng cách giữa hai tín hiệu $s_1(t)$ và $s_2(t)$; $\sqrt{N_0}/2$ là giá trị rms của tạp âm, do đó ta có:

$$\Pr[\text{error}] = Q\left[\frac{\text{Khoảng cách giữa các tín hiệu}}{2 \times \text{rms tạp âm}}\right] \quad (3A.43)$$

Do $Q(\cdot)$ là một hàm đơn điệu giảm theo đối số của nó, nên xác suất lỗi sẽ giảm khi tỷ số $\frac{\text{Khoảng cách giữa các tín hiệu}}{2 \times \text{rms tạp âm}}$ tăng, nghĩa là hai tín hiệu có sự phân biệt nhiều hơn hoặc công suất tạp âm nhỏ.

Diễn hình, khi công suất tạp âm kênh là cố định, giảm lỗi bằng cách tối đa hóa khoảng cách giữa hai tín hiệu (tăng năng lượng của tín hiệu).

Tuy nhiên, máy phát bị ràng buộc về năng lượng \sqrt{E} . Do khoảng cách giữa các điểm tín hiệu đến gốc tọa độ của mặt phẳng $\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$ là \sqrt{E} , nên các điểm tín hiệu phải nằm trên đường tròn bán kính \sqrt{E} . Vì vậy, để tối đa hóa khoảng cách giữa hai tín hiệu ta chọn chúng sao cho lệch nhau 180° , tức là $s_2(t) = -s_1(t)$. Muốn vậy, tập tín hiệu thường được chọn là **tín hiệu đối cực**.

Lưu ý cuối cùng là: xác suất lỗi không phụ thuộc vào hình dạng của tín hiệu mà chỉ phụ thuộc vào khoảng cách của các tín hiệu.

Mối quan hệ giữa $Q(x)$ và hàm lỗi bù $\text{erfc}(x)$: Ta thường dùng hàm lỗi bù $\text{erfc}(\bullet)$ để tính xác suất lỗi, được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \text{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda \\ &= 1 - \text{erf}(x) \end{aligned} \quad (3A.44)$$

Bằng cách đổi biến, ta dễ dàng tìm được mối quan hệ giữa hai hàm $Q(x)$ và $\text{erfc}(x)$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (3A.45)$$

Hay ngược lại

$$\operatorname{erfc}(x) = 2Q(\sqrt{2}x) \quad (3A.46)$$

Chú ý rằng hàm $\operatorname{erfc}(x)$ có sẵn trong MATLAB.

Phụ lục 3B

MÔ PHỎNG HỆ THỐNG BPSK TRONG MÔI TRƯỜNG KÊNH AWGN

Trong hệ thống truyền tin nhị phân, dữ liệu nhị phân gồm dãy các số 0 và 1 được truyền đi bằng hai dạng sóng $s_0(t)$ và $s_1(t)$. Giả sử (1) Tốc độ dữ liệu truyền là $R = 1/T_b$ bit/s ($T_b = 1/R$ là khoảng thời gian của một bit), được sắp xếp vào **dạng sóng tín hiệu** $0 \rightarrow s_0(t)$; $1 \rightarrow s_1(t)$, $0 \leq t \leq T_b$; (2) Xác suất truyền các bit 0 và 1 là bằng nhau (nghĩa là $P(0) = P(1) = 1/2$) và độc lập thống kê tương hỗ nhau; (3) Tín hiệu $s_i(t)$ qua kênh AWGN, $n(t)$ là một hàm mẫu của quá trình ngẫu nhiên Gauss trắng có phổ công suất là $N_0/2$ W/Hz, dạng sóng tín hiệu thu là

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad i = 0, 1, \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (3B.1)$$

Nhiệm vụ của máy thu là xác định xem bit 0 hay bit 1 đã được truyền qua kênh sau khi quan trắc tín hiệu thu $r(t)$ trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq T_b$. Máy thu được thiết kế để giảm thiểu xác suất thu lỗi được gọi là máy thu tối ưu.

❖ Máy thu tối ưu đối với tín hiệu trực giao

➤ Định nghĩa:

Hai dạng sóng tín hiệu $s_i(t)$ & $s_j(t)$ được gọi là trực giao nhau nếu thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^{T_b} s_i(t)s_j(t)dt = \begin{cases} E, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3B.2)$$

trong đó E là năng lượng tín hiệu. Hình 3B.1a minh họa dạng sóng tín hiệu trực giao $s_0(t)$ và $s_1(t)$ điển hình.

➤ Thiết kế các khối chức năng

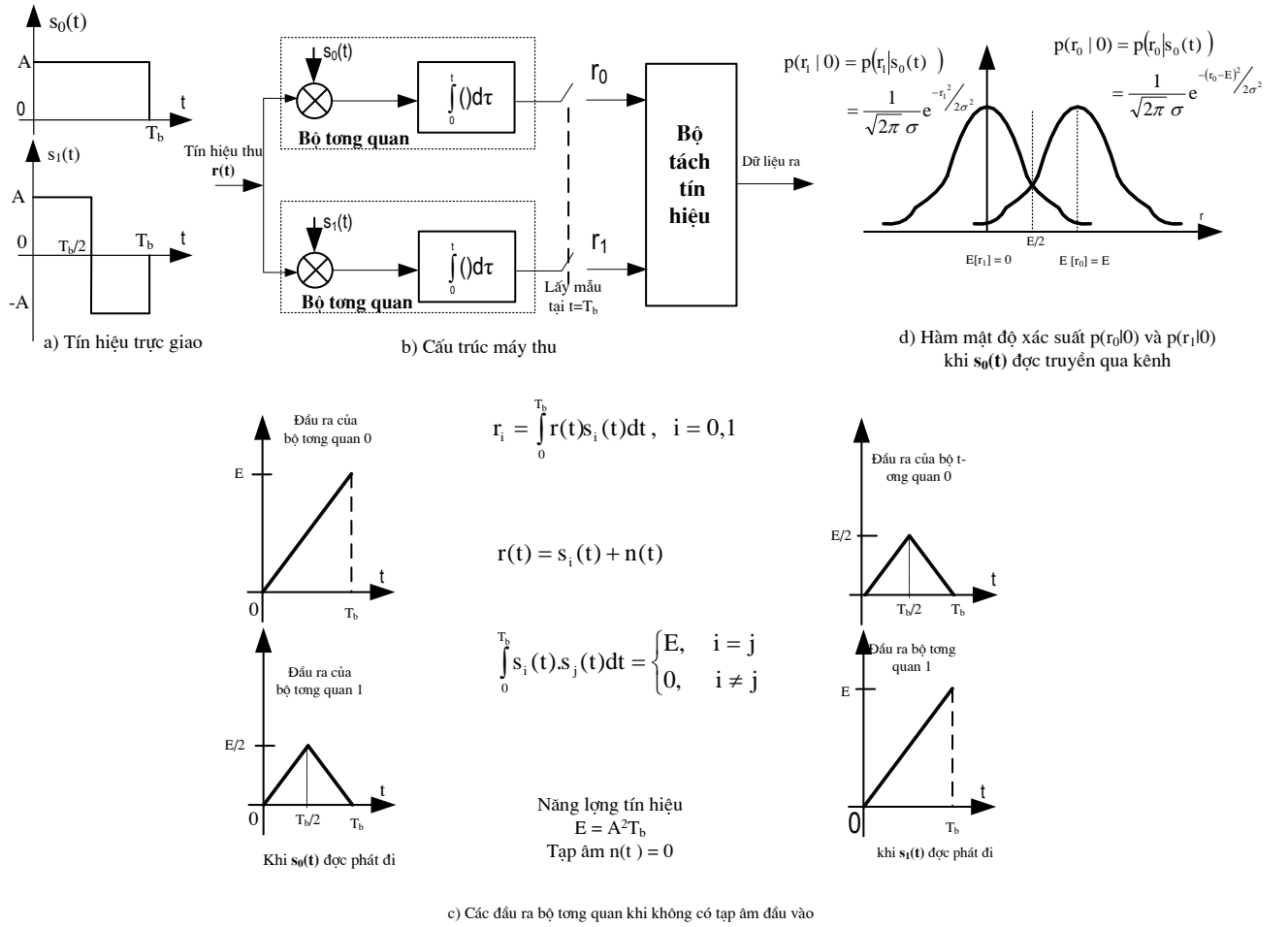
Cấu trúc máy thu tối ưu đối với kênh AWGN được cho ở hình 3B.1b gồm 2 khối cơ bản: Một bộ tương quan (hoặc một mạch lọc phối hợp cần lưu ý tại thời điểm lấy mẫu $t=T_b$, tín hiệu ra bộ lọc phối hợp bằng tín hiệu ra của bộ tương quan) và một bộ tách tín hiệu.

✓ Bộ tương quan tín hiệu

Bộ tương quan tính tương quan giữa tín hiệu thu $r(t)$ với hai tín hiệu đã được truyền $s_0(t)$ và $s_1(t)$. Theo đó, nhận được

$$\begin{aligned} r_0(t) &= \int_0^t r(\tau)s_0(\tau)d\tau \\ r_1(t) &= \int_0^t r(\tau)s_1(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3B.3)$$

trong khoảng $0 \leq t \leq T_b$, sau đó lấy mẫu tín hiệu $r_0(t)$ và $r_1(t)$ tại thời điểm $t=T_b$ rồi đưa vào bộ tách tín hiệu. Nếu tín hiệu thu $r(t)$ được xử lý bởi hai bộ tương quan tín hiệu như trên hình 3B.1b thì các tín hiệu ra r_0 và r_1 tại thời điểm lấy mẫu $t=T_b$ là



Hình 3B.1: Cấu trúc máy thu tối ưu đối với tín hiệu trực giao

✎ Nếu truyền tín hiệu $s_0(t)$ qua kênh, thì tín hiệu thu là

$$r(t) = s_0(t) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$r_0 = \int_0^{T_b} r(t)s_0(t)dt = \underbrace{\int_0^{T_b} s_0^2(t)dt}_E + \underbrace{\int_0^{T_b} n(t)s_0(t)dt}_{n_0} = E + n_0$$

$$r_1 = \int_0^{T_b} r(t)s_1(t)dt = \underbrace{\int_0^{T_b} s_0(t)s_1(t)dt}_{=0 \text{ do trực giao nhau}} + \underbrace{\int_0^{T_b} n(t)s_1(t)dt}_{n_1} = n_1$$

(3B.4)

trong đó $E = A^2 T$ là năng lượng của các tín hiệu $s_0(t)$ và $s_1(t)$; n_0 và n_1 là các thành phần tạp âm tại đầu ra của các bộ tương quan. Như vậy, khi truyền tín hiệu $s_0(t)$ qua kênh AWGN tại thời điểm lấy mẫu $t = T_b$ nhận được tín hiệu ở đầu ra hai bộ tương quan là.

$$r_0 = E + n_0$$

$$r_1 = n_1$$

(3B.5)

✎ Nếu truyền tín hiệu $s_1(t)$ qua kênh, thì tín hiệu thu là

$$r(t) = s_1(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_b$$

(3B.6)

Tương tự ở đầu ra của hai bộ tương quan tại thời điểm lấy mẫu $t = T_b$ là

$$\begin{aligned} r_0 &= n_0 \\ r_1 &= E + n_1 \end{aligned} \quad (3B.7)$$

Các tín hiệu ra bộ tương quan khi không có tạp âm trong khoảng $0 \leq t \leq T_b$ tương ứng với việc phát $s_0(t)$ và $s_1(t)$ được cho ở hình 3B.1c.

✎ Thành phần tạp âm và ảnh hưởng lên tín hiệu vào bộ tách sóng

Do $n(t)$ là một hàm mẫu của một quá trình Gauss trắng có phổ công suất bằng $N_0/2$ nên các thành phần n_0 và n_1 là các biến ngẫu nhiên phân bố Gauss có $E[n_i] = 0$ và $\text{Var}[n_i] = EN_0/2$ ($i = 0, 1$), nghĩa là

$$\begin{aligned} E[n_0] &= \int_0^{T_b} s_0(t) E[n(t)] dt = 0 \\ E[n_1] &= \int_0^{T_b} s_1(t) E[n(t)] dt = 0 \end{aligned} \quad (3B.8)$$

phương sai $\text{Var}[n_i] = \sigma_i^2$, với $i=0, 1$

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= E[n_i^2] = \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_i(t) s_i(\tau) E[n(t)n(\tau)] dt d\tau = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} s_i(t) s_i(\tau) \delta(t-\tau) dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} s_i^2(t) dt = \frac{EN_0}{2}, \quad i = 0, 1 \end{aligned} \quad (3B.9)$$

Vì vậy,

Nếu phát $s_0(t)$, thì r_0 là biến ngẫu nhiên Gauss có $E[r_0] = E$ và $\text{Var}[r_0] = \sigma^2$ còn r_1 là biến ngẫu nhiên Gauss $E[r_1] = 0$ và $\text{Var}[r_1] = \sigma^2$, hàm mật độ xác suất của r_0 và r_1 kí hiệu là $p(r_0|0)$ và $p(r_1|0)$ được cho bởi (3B.10) và được minh họa bởi hình 3B.1d tương ứng

$$\begin{aligned} p(r_0|0) &= p(r_0|s_0(t) \text{ đã được truyền đi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(r_0-E)^2}{2\sigma^2}} \\ p(r_1|0) &= p(r_1|s_0(t) \text{ đã được truyền đi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (3B.10)$$

Nếu phát $s_1(t)$, thì r_0 là biến ngẫu nhiên Gauss có $E[r_0] = 0$ và $\text{Var}[r_0] = \sigma^2$ còn r_1 là một biến ngẫu nhiên Gauss có $E[r_1] = E$ và $\text{Var}[r_1] = \sigma^2$ (Note $\text{Var}[r_0] = \text{Var}[r_1] = \sigma^2$).

√ Bộ tách sóng

Bộ tách sóng quan trắc tín hiệu r_0 và r_1 tại đầu ra bộ tương quan để quyết định tín hiệu $s_0(t)$ hay $s_1(t)$ đã truyền qua kênh (tương ứng với bit 0 hay bit 1). Xét bộ tách tín hiệu và xác định xác suất lỗi nếu cho dạng sóng tín hiệu truyền qua kênh được cho ở hình 3B.1a, chúng đồng xác suất và cùng năng lượng. Khi này, bộ tách sóng tối ưu so sánh r_0 và r_1 rồi quyết định bit 0 hay bit 1 đã được truyền qua kênh theo nguyên tắc

$$\text{đầu ra bộ tách sóng} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } r_0 > r_1 \\ 0, & \text{nếu } r_1 > r_0 \end{cases}, \text{ theo đó}$$

✎ Nếu truyền tín hiệu $s_0(t)$ qua kênh, thì xác suất lỗi sẽ là

$$\begin{aligned}
 P_e &= P(r_1 > r_0) \\
 &= P(n_1 > E + n_0) \\
 &= P(n_1 - n_0 > E)
 \end{aligned} \tag{3B.11}$$

Do n_1 và n_0 là các biến ngẫu nhiên Gauss có trung bình không, nên $x \equiv n_1 - n_0$ cũng là một biến ngẫu nhiên Gauss có $E[x] = 0$ và phương sai là

$$E[x^2] = E[(n_1 - n_0)^2] = E[n_1^2] + E[n_0^2] - 2E[n_1 n_0] \tag{3B.12}$$

do tính trực giao của dạng sóng tín hiệu $s_0(t)$ và $s_1(t)$ nên $E[n_1 n_0] = 0$ vì

$$\begin{aligned}
 E[n_1 n_0] &= E \left[\int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_0(t) s_1(\tau) n(t) n(\tau) dt d\tau \right] \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_0(t) s_1(\tau) \sigma(t - \tau) dt d\tau \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} s_0(t) s_1(t) dt = 0
 \end{aligned} \tag{3B.13}$$

Kết quả nhận được

$$\begin{aligned}
 E[x^2] &= 2 \left(\frac{EN_0}{2} \right) \\
 &= EN_0 \equiv \sigma_x^2
 \end{aligned} \tag{3B.14}$$

Do vậy, xác suất lỗi là

$$\begin{aligned}
 P_e &= P \left(\underbrace{n_1 - n_0}_x > E \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_E^{\infty} e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{E/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\
 &= Q \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right)
 \end{aligned} \tag{3B.15}$$

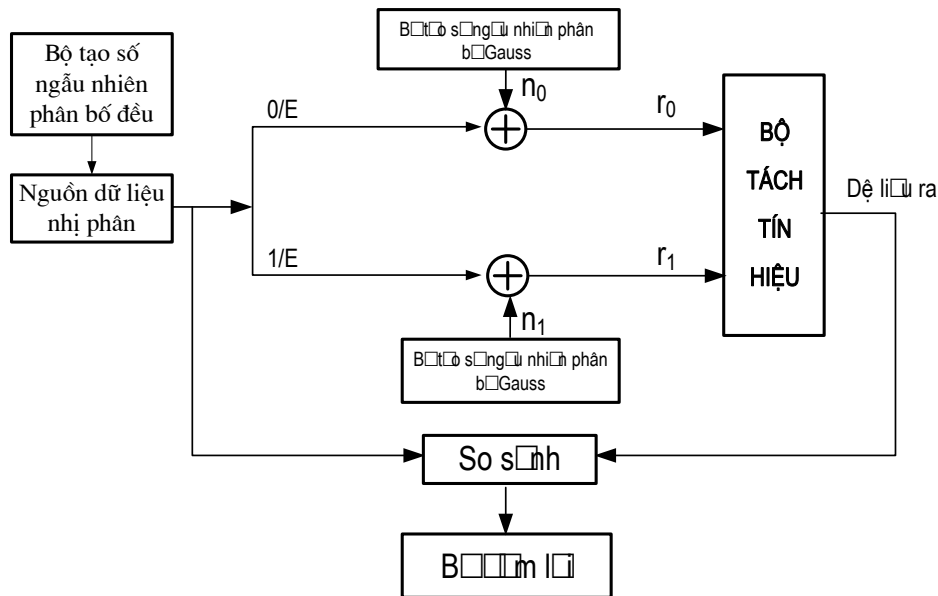
Tỉ số E/N_0 được gọi là tỉ số tín trên tạp âm SNR

➤ **Nếu truyền $s_1(t)$ qua kênh, cách tính xác suất lỗi hoàn toàn tương tự trên và nhận được cùng kết quả (3B.15).**

Mặt khác, do giả thiết xác suất xuất hiện các bit 0 và 1 trong dãy dữ liệu là bằng nhau nên xác suất lỗi trung bình đúng bằng xác suất lỗi đã được cho bởi (3B.15).

➤ **Lập mô hình mô phỏng và chương trình mô phỏng**

Dưới đây, trình bày tóm tắt quá trình mô phỏng BER cho hệ thống truyền tín hiệu trực giao. Sử dụng mô hình mô phỏng được cho trên hình 3B.2 để ước tính BER và công thức (3B.15) để vẽ đồ thị P_e theo SNR đối với hệ thống truyền tin **nhị phân** dùng các bộ tương quan tín hiệu.



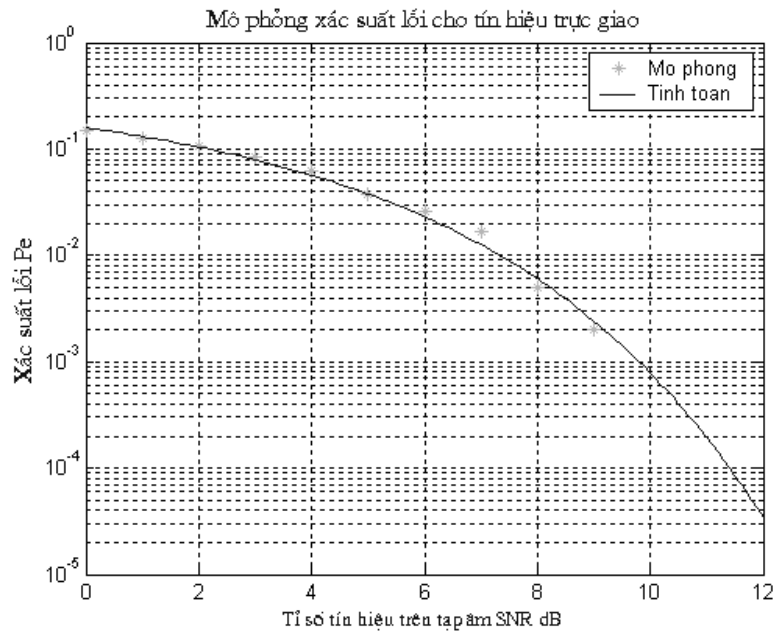
Hình 3B.2: Mô hình mô phỏng BER đối với hệ thống truyền tin nhị phân

Tóm tắt quá trình mô phỏng như sau:

- ✓ Phỏng tạo các biến ngẫu nhiên r_0 và r_1 để đưa vào bộ tách sóng tín hiệu. Theo đó, cần phải tạo một dãy bit nhị phân 0 và 1 đồng xác suất và độc lập thống kê tương hỗ nhau. Vì vậy, ta sử dụng một bộ tạo số ngẫu nhiên để tạo ra số ngẫu nhiên phân bố đều trong khoảng (0,1), dựa vào số ngẫu nhiên phân bố đều x này tạo chuỗi số cơ hai 0 và 1 theo nguyên tắc, nếu số ngẫu nhiên có giá trị trong khoảng $(0 < x < 0,5)$ thì nguồn dữ liệu cơ hai là bit "0" và ngược lại số ngẫu nhiên có giá trị trong khoảng $(0,5 < x < 1)$, thì lỗi ra của nguồn dữ liệu cơ hai là bit "1". Nếu một bit 0 được tạo ra thì $r_0 = E + n_0$ và $r_1 = n_1$. Còn nếu một bit 1 được tạo ra thì $r_0 = n_0$ và $r_1 = E + n_1$.
- ✓ Phỏng tạo kênh AWGN. Theo đó, các thành phần tạp âm cộng n_i ($i=0,1$) được tạo ra bằng hai bộ tạo tạp âm Gauss, chúng có **trung bình $E[n_i]=0$ và phương sai $Var[n_i] = \sigma^2 = EN_0/2$** . Vì xác suất lỗi được mô phỏng là hàm của tỉ số tín hiệu trên tạp âm **$SNR = E/N_0$** , nên để tiện cho việc mô phỏng đề tài chuẩn hoá năng lượng tín hiệu $E=1$ và cho σ^2 biến thiên. Theo đó SNR được tính bởi

$$\left. \begin{aligned} SNR &= \frac{E}{N_0} \\ Var[n_i] &= \sigma^2 = \frac{E \cdot N_0}{2} \Rightarrow N_0 = \frac{2\sigma^2}{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow SNR = \frac{E^2}{2\sigma^2} \Big|_{E=1} = \frac{1}{2\sigma^2} \quad (3B.16)$$

- ✓ Tín hiệu lỗi ra bộ tách tín hiệu được so sánh với chuỗi bit nhị phân đã được truyền qua kênh AWGN, dùng bộ đếm lỗi để đếm số các lỗi bit và lập tỉ số tính BER. Chẳng hạn, truyền $N=10000$ bit qua kênh AWGN tại các mức khác nhau của SNR (lưu ý ứng với mỗi giá trị của SNR là giá trị phương sai σ^2 của tạp âm n_i tác động vào bit truyền qua kênh theo nguyên tắc cộng theo đó sẽ nhận được giá trị BER tương ứng).
- ✓ Chương trình mô phỏng BER theo mô hình hình 3B.2 và tính toán lý thuyết theo (3B.16) được viết bằng Matlab, kết quả được cho ở hình 3B.3. Thấy rõ sự khớp nhau giữa các kết quả mô phỏng và giá trị tính toán lý thuyết.



Hình 3B.3: Xác suất lỗi mô phỏng và tính toán đối với hệ thống truyền tín hiệu trực giao.

❖ Máy thu tối ưu đối với tín hiệu đối cực (Antipodal Signals)

➤ Định nghĩa:

Hai dạng sóng tín hiệu được gọi là đối cực nếu dạng sóng tín hiệu này bằng âm của dạng sóng tín hiệu kia. Hình 3B.4a minh họa hai cặp tín hiệu đối cực nhau.

➤ Thiết kế các khối chức năng:

Ta dùng cấu trúc máy thu tối ưu được cho hình 3B.4b để khôi phục thông tin nhị phân từ dạng sóng tín hiệu đối cực hình 3B.4a. Nếu dùng dạng sóng tín hiệu đối cực $s_0(t) = s(t)$ và $s_1(t) = -s(t)$ để truyền tin nhị phân (trong đó $s(t)$ là một dạng sóng tùy ý có năng lượng E), thì tín hiệu thu tại đầu ra kênh AWGN là

$$r(t) = \pm s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (3B.17)$$

✓ Nếu truyền $s(t)$ qua kênh AWGN, thì tín hiệu thu là

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (3B.18)$$

Tín hiệu ra của bộ tương quan (hay bộ lọc phối hợp) tại thời điểm lấy mẫu $t = T_b$ là

$$r = E + n \quad (3B.19)$$

trong đó, năng lượng tín hiệu E và thành phần tạp âm cộng n được tính theo

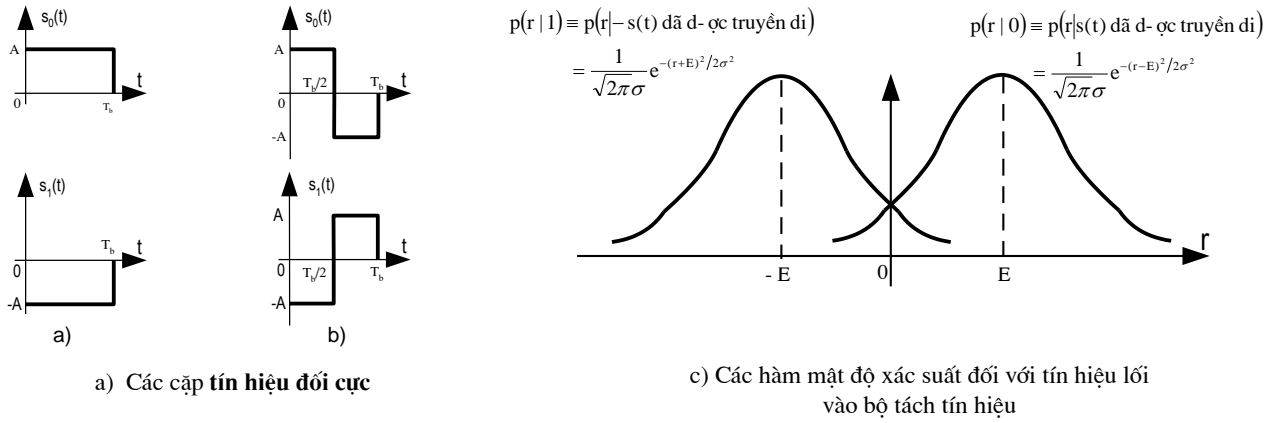
$$n = \int_0^{T_b} n(t)s(t)dt \quad (3B.20)$$

Vì quá trình tạp âm cộng có trung bình 0 nên $E[n] = 0$ và phương sai của thành phần tạp âm n là

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= E[n^2] = \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} E[n(t)n(\tau)]s(t)s(\tau)dt d\tau \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} \delta(t-\tau)s(t)s(\tau)dt d\tau \\
 &= \frac{N_0}{2} \int_0^{T_b} s^2(t)dt \\
 &= \frac{N_0 E}{2}
 \end{aligned} \tag{3B.21}$$

Theo đó, hàm mật độ xác suất của r khi truyền $s(t)$ qua kênh là

$$p(r|s(t) \text{ đã d-ọc truyền đi}) \equiv p(r|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r-E)^2/2\sigma^2} \tag{3B.22}$$



Hình 3B.4: Cấu trúc máy thu tối ưu đối với các tín hiệu đối cực

✓ Nếu truyền $-s(t)$ qua kênh AWGN, thì tín hiệu thu là $r(t) = -s(t) + n(t)$

Tương tự như trên, tín hiệu lỗi vào bộ tách tín hiệu sẽ là

$$r = -E + n \tag{3B.23}$$

và hàm mật độ xác suất của r là

$$p(r|-s(t) \text{ đã được truyền đi}) \equiv p(r|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r+E)^2/2\sigma^2} \tag{3B.24}$$

Hai hàm mật độ xác suất này được minh họa trên hình 3B.4c.

Vì các dạng sóng tín hiệu đồng xác suất, nên bộ tách tín hiệu tối ưu thực hiện so sánh tín hiệu ra bộ tương quan r với ngưỡng quyết định (trường hợp này ngưỡng quyết định bằng 0) và thực hiện quyết định tín hiệu ra theo nguyên tắc. Nếu $r > 0$, bộ tách sóng quyết định $s(t)$ đã được truyền qua kênh. Nếu $r < 0$, bộ tách tín hiệu sẽ quyết định $-s(t)$ đã được truyền qua kênh.

✓ **Xác suất lỗi tách sóng.**

Xét xác suất lỗi với điều kiện kênh AWGN, dưới tác động tạp âm làm cho việc quyết định tín hiệu ra bị lỗi được tính như sau

Nếu $s(t)$ đã được truyền qua kênh, thì xác suất lỗi bằng với xác suất để $r < 0$. Nghĩa là

$$\begin{aligned} P_e &= P(r < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^0 e^{-(r-E)^2/2\sigma^2} dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-E/\sigma} e^{-r^2/2} dr \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (3B.25)$$

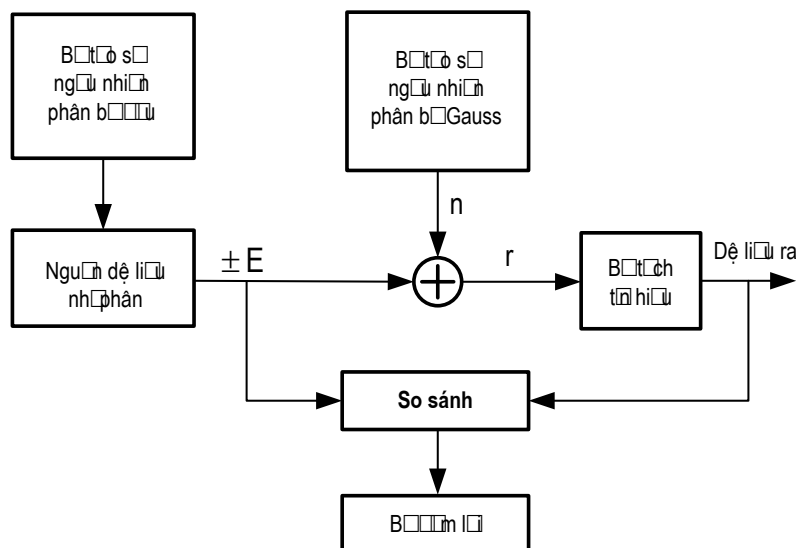
Nếu $-s(t)$ đã được truyền qua kênh, thì xác suất lỗi bằng với xác suất để $r > 0$, thực hiện tương tự như trên, nhận được cùng một kết quả theo (3B.25).

Vì hai dạng sóng tín hiệu đồng xác suất nên xác suất lỗi trung bình cũng được cho bởi (3B.25).

So sánh hai hệ thống truyền nhị phân	
Hệ thống tín hiệu trực giao	Hệ thống tín hiệu đối cực
$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$	$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$
Để có cùng hiệu năng về xác suất lỗi thì ở phương pháp tín hiệu trực giao phát năng lượng lớn gấp hai lần so với tín hiệu đối cực. Do vậy các tín hiệu đối cực hiệu quả hơn các tín hiệu trực giao 3 dB.	

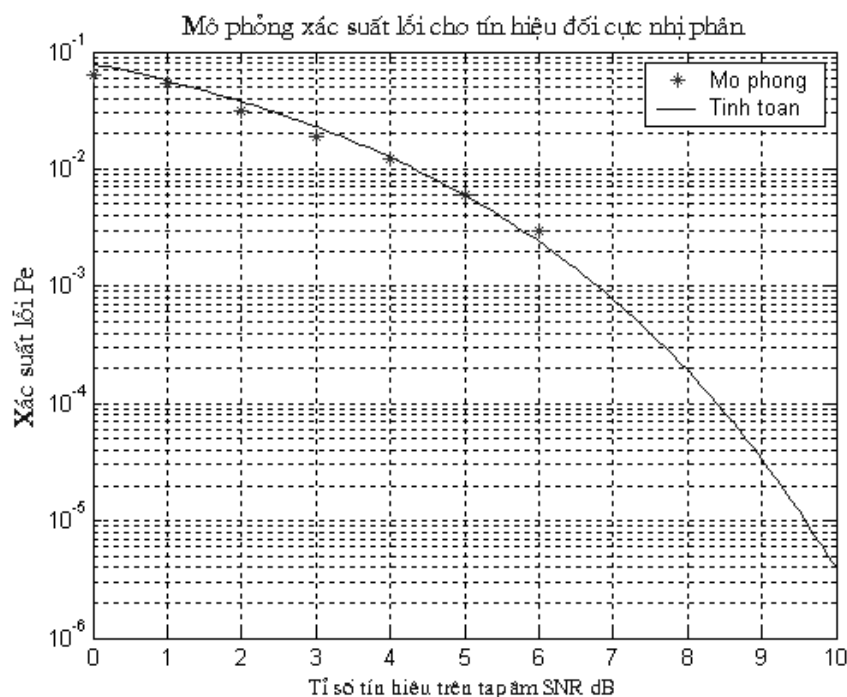
➤ **Lập mô hình mô phỏng**

Mô phỏng để ước tính và vẽ đồ thị hiệu năng xác suất lỗi cho hệ thống BPSK dùng tín hiệu đối cực được cho trên hình 3B.5.



Hình 3B.5: Mô hình mô phỏng hệ thống truyền tin BPSK dùng tín hiệu đối cực

Quá trình mô phỏng hiệu năng xác suất lỗi được tiến hành như sau: (1) Trước hết tạo biến ngẫu nhiên r đưa đến đầu vào bộ tách tín hiệu. Theo đó, dùng một bộ tạo số ngẫu nhiên phân bố đều để tạo ra chuỗi tín hiệu nhị phân ở đầu ra nguồn dữ liệu nhị phân. Chuỗi các bit 0 và 1 này được ánh xạ vào một chuỗi $\pm E$ (E là năng lượng của tín hiệu được chuẩn hoá bằng 1 khi thực hiện mô phỏng). Dùng một bộ tạo tạp âm Gauss để tạo ra các chuỗi ngẫu nhiên Gauss có trung bình không và phương sai bằng σ^2 ; (2) Dùng bộ tách tín hiệu để so sánh biến ngẫu nhiên r với ngưỡng 0 và thực hiện quyết định tín hiệu ra theo nguyên tắc. Nếu $r > 0$, quyết định bit 0 được truyền qua kênh. Nếu $r < 0$, quyết định bit 1 được phát; (3) Tín hiệu ra bộ tách tín hiệu được so sánh với chuỗi bit tin đã được truyền qua kênh AWGN và lỗi sẽ được đếm. Kết quả mô phỏng và tính toán hiệu năng của hệ thống dùng tín hiệu đối cực được cho ở hình 3B.6 khi truyền qua kênh 10 000 bit tin tương ứng với một số giá trị khác nhau của SNR.



Hình 3B.26: Kết quả mô phỏng và tính toán BER

```

function [y] = NVD_BER_Orthogonal_signal
SNRindB1 = 0:1:12; % tao Vector loi voi step=1 don vi dB
SNRindB2 = 0:0.1:12;% tao Vector loi voi step=0,1 don vi dB
N = 1000;
h = waitbar(0,'Please wait...');
for i=1:length(SNRindB1),
    % Simulated error rate
    waitbar(i/length(SNRindB1));
    smld_err_prb_fsk(i) = smldPe54(SNRindB1(i),N);
end;
for i=1:length(SNRindB2),
    SNR = exp(SNRindB2(i)*log(10)/10);
    % Theoretical error rate
    theo_err_prb(i) = Qfunct(sqrt(SNR));
end;
close(h);
semilogy(SNRindB1,smld_err_prb_fsk,'g*',SNRindB2,theo_err_prb);
xlabel('Ti số tín hiệu trên tạp âm SNR');
dB','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Xác suất lỗi Pe','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title('Mô phỏng xác suất lỗi cho tín hiệu trực
giao','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
legend('Mô phỏng','Tinh toan');
grid on;
% axis([0 30 10^(-5) 1]);

function [p] = smldPe54(snr_in_dB,N)
% [P]==smldPe54(snr_in_dB)
% SMLDPE54 find the probobility of error for the given
% snr_in_dB, signal to noise ratio in dB

E = 1;
SNR = exp(snr_in_dB*log(10)/10); % signal to noise ratio. Moi quan he
ln(x)=log(10);
sgma = E/sqrt(2*SNR); % sigam, standard deviation of noise

% Generation of the binary data source
for i=1:N,
    temp=rand; % Uniform radom variable over (0,1)
    if (temp<0.5),
        dsource(i)=0; % data source: With probability 1/2 source output is 0
    else
        dsource(i)=1; % With probability 1/2 source output is 1
    end
end;

% Detection, and probability of error caculation
numoferr = 0;
for i=1:N,
    % matched filter outputs.
    if (dsource(i)==0),
        r0 = E+gngauss(sgma);
        r1 = gngauss(sgma); % if the source output is '0'
    else
        r0 = gngauss(sgma);
        r1 = E+gngauss(sgma); % if the source output is '1'
    end;

    r = [r0 r1];

    % detector follows
    if (r0>r1),
        decis=0; % Decission is '0'
    else

```

```

        decis=1;                % Decission is '1'
    end;

    if (decis~=dsource(i)), % if it is an error, increase the error counter
        numoferr = numoferr + 1;
    end;
end;
p = numoferr/N;                % Probability of error estimate

function y = NVD_BER_Antipodal_signal

SNRindB1 = 0:1:10;
SNRindB2 = 0:0.1:10;
N = 10000;
h = waitbar(0,'Please wait...');

for i=1:length(SNRindB1),
    % Simulated error rate
    waitbar(i/length(SNRindB1));
    smld_err_prb(i) = smldPe55(SNRindB1(i),N);
end;

for i=1:length(SNRindB2),
    SNR = exp(SNRindB2(i)*log(10)/10);
    % Theoretical error rate
    theo_err_prb(i)=Qfunct(sqrt(2*SNR));
end;

close(h);
% Plotting command flollow
semilogy(SNRindB1,smld_err_prb,'r*','...
    SNRindB2,theo_err_prb);
%semilogy(SNRindB2,theo_err_prb);
xlabel('Ti số tín hiệu trên tạp âm SNR
dB','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',10);
ylabel('Xác suất lỗi Pe','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
title('Mô phỏng xác suất lỗi cho tín hiệu đổi cực nhị
phân','FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
legend('Mô phỏng','Tinh toan');
grid on

function [p]=smldPe55(snr_in_dB,N)
% [P]==smldPe55(snr_in_dB)
%
% SMLDPE54 mô phỏng xác suất lỗi thực tế
%
% giá trị của snr_in_dB, signal to noise ratio in dB
E = 1;
SNR = exp(snr_in_dB*log(10)/10); % signal to noise ratio
sigma = E/sqrt(2*SNR); % sigam, standard deviation of noise
% Generation of the binary data source follow.
for i=1:N,
    temp=rand; % Uniform radom variable over (0,1)
    if (temp<0.5),
        dsource(i)=0; % With probability 1/2 source output is 0
    else
        dsource(i)=1; % With probability 1/2 source output is 1
    end
end;
% Detection, and probability of error caculation
numoferr = 0;
for i=1:N,
    % matched filter outputs.
    if (dsource(i)==0),

```

```

        r = -E + gngauss(sgma);           % if the source output is '0'
    else
        r = E + gngauss(sgma);           % if the source output is '1'
    end;
    % detector follows
    if (r<0),
        decis=0;                         % Decission is '0'
    else
        decis=1;                         % Decission is '1'
    end;
    if (decis~=dsource(i)), % if it is an error, increase the error counter
        numoferr = numoferr+1;
    end;
end;
p = numoferr/N;                        % Probability of error estimate

function [gsrv1,gsrv2] = gngauss(m,sgma)
% Generation Gauss function
% [gsrv1,gsrv1]=gngauss(m,sgma)
% [gsrv1,gsrv1]=gngauss(m,sgma)
% [gsrv1,gsrv1]=gngauss
% GNGASS generates tow independent random variables with mean m
% and standard deviation sgma. If one of the input arguments is missing,
% it takes the mean as '0'
% If Neither the mean Nor the variance is given, it generates tow standard
% Gaussian random variables.
%
if nargin==0,
    m=0;
    sgma=1;
elseif nargin==1,
    sgma=m;
    m=0;
end;
u=rand;                                % a uniform random variable in (0,1)
z=sgma*(sqrt(2*log(1/(1-u)))));        % Rayleigh distributed random variable.
u=rand;                                % Another uniform random variable in (0,1)
gsrv1=m+z*cos(2*pi*u);
gsrv2=m+z*cos(2*pi*u);

function Q = Qfunct(x)
Q = 0.5 *erfc(x/sqrt(2));

```