

Chương 12

MÔ HÌNH HÓA VÀ MÔ PHỎNG THIẾT BỊ PHI TUYẾN

12.1. Mở đầu

Dựa vào tính phụ thuộc vào thời gian và không phụ thuộc vào thời gian (bất biến), tính tuyến tính và phi tuyến, tính nhân quả và không nhân quả, và với mục đích nghiên cứu, phân loại mô hình mô phỏng khối chức năng trong hệ thống truyền thông thành 3 loại:

1. Hệ thống nhân quả tuyến tính bất biến LTIV như: bộ lọc và kênh truyền thông tĩnh
2. Hệ thống tuyến tính thay đổi theo thời gian LTV như: kênh pha đỉnh và bộ cân bằng tuyến tính
3. Hệ thống bất biến phi tuyến như: bộ khuếch đại công suất cao, bộ giới hạn và vòng khoá pha PLL.

Tuy hầu hết các khối chức năng trong hệ thống truyền thông là tuyến tính hoặc xấp xỉ tính cách tuyến tính nhưng tồn tại một số khối phi tuyến. Một số vốn đã phi tuyến và được dùng một cách chủ định để cải thiện hiệu năng hệ thống như: Bộ giới hạn là phần tử phi tuyến đặt trước máy thu để cải thiện hiệu năng khi xuất hiện tạp âm xung kim. Bộ cân bằng hồi tiếp quyết định DFE là thiết bị phi tuyến cho ta hiệu năng tốt hơn so với bộ cân bằng tuyến tính. Tuy nhiên, các khối chức năng khác như bộ khuếch đại công suất cao biểu lộ tính phi tuyến không mong muốn. Nhiều khối chức năng trong hệ thống truyền thông được thiết kế để thực hiện các chức năng tuyến tính nhưng trong quá trình hoạt động cụ thể có thể gây ra các hiệu ứng phi tuyến.

Phân tích toán học các hiệu ứng phi tuyến thường rất khó, thậm chí trong trường hợp phi tuyến không nhớ bậc ba đơn giản như:

$$y(t) = x(t) - 0,2x^3(t) \quad (12.1)$$

Ở dạng tổng quát rất khó tính toán hàm mật độ xác suất pdf và hàm tự tương quan đầu ra $y(t)$ từ hàm pdf và hàm tự tương quan đầu vào $x(t)$, nhưng mô phỏng dễ dàng tạo các giá trị mẫu đầu vào $\{x(kTs)\}$ sau đó dùng (12.1) tạo đầu ra $\{y(kTs)\}$. Từ hai chuỗi $\{x(kTs)\}$ và $\{y(kTs)\}$ có thể ước tính một số đại lượng như: hàm mật độ xác suất pdf và hàm tự tương quan của $x(t)$, $y(t)$ cũng như hàm tương quan chéo giữa $x(t)$ và $y(t)$. Thực vậy, mô phỏng là phương pháp hữu hiệu để phân tích và thiết kế các hệ thống truyền thông chứa các phần tử phi tuyến như: các bộ lọc không lý tưởng, tạp âm phân bố phi Gauss. Chương này tập trung các phương pháp lập mô hình và mô phỏng các phần tử phi tuyến trong các hệ thống truyền thông.

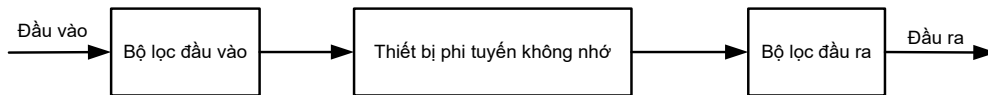
12.1.1. Các loại thiết bị phi tuyến và các mô hình

Dựa vào dải tần làm việc, ta phân loại và mô hình hóa thiết bị phi tuyến

Các thiết bị phi tuyến trong hệ thống truyền thông có thể hoặc là thiết bị băng tần cơ sở hoặc là thiết bị thông dải. Chẳng hạn: bộ giới hạn là một thiết bị phi tuyến băng tần cơ sở trong khi đó bộ khuếch đại cao tần RF là một thiết bị phi tuyến thông dải. Nếu đưa một tín hiệu vào thiết bị phi tuyến thông dải được trung tâm tại tần số f_c thì đầu ra sẽ có phổ nằm ở lân cận tần số f_c . Các thành phần hài gần tần số $2f_c, 3f_c, \dots$ hầu hết không được quan tâm vì các khối chức năng "luồng xuống" từ phần tử phi tuyến thường loại bỏ các thành phần này. Mô hình được dùng phổ biến nhất cho thiết bị phi tuyến thông dải là một thiết bị phi tuyến băng tần cơ sở theo sau là "bộ lọc vùng", bộ lọc chỉ cho qua các thành phần nằm gần hoặc cạnh dải băng tần tín hiệu đầu vào.

Dựa vào tính có nhớ và không nhớ, ta phân loại và mô hình hóa thiết bị phi tuyến

Như một cách phân loại khác cho thiết bị phi tuyến là thiết bị đó có nhớ hay không có nhớ. Đầu ra của thiết bị phi tuyến không nhớ tại thời điểm t chỉ phụ thuộc vào giá trị tức thời của đầu vào tại thời điểm t , trong khi đó thiết bị phi tuyến có nhớ sẽ tạo tín hiệu đầu ra tại thời điểm t là một hàm của đầu vào tại thời điểm hiện tại và quá khứ. Thiết bị có nhớ sẽ bộc lộ *tính cách chọn lọc tần số* và thường được mô hình hóa bằng một thiết bị phi tuyến không nhớ được "kẹp" giữa hai bộ lọc như được cho ở hình 12.1. Bộ lọc giải thích cho tính chọn lọc tần số của thiết bị phi tuyến có nhớ.



Hình 12.1: Mô hình hóa cho thiết bị phi tuyến chọn lọc tần số có nhớ

Thiết bị phi tuyến thông dải có thể được mô hình hóa và mô phỏng bằng cách sử dụng phiên bản thông dải giá trị thực của tín hiệu. Sẽ được sáng tỏ, tính cách của hầu hết các phần tử phi tuyến thông dải đều có thể được mô hình hóa và mô phỏng dưới dạng các đường đường bao phức thông thấp của các tín hiệu thông dải. Việc biểu diễn đường bao phức thông thấp dẫn đến hiệu quả tính toán, do đó được dùng nhiều hơn.

Thiết bị phi tuyến cũng có thể được mô tả bởi phương trình vi phân phi tuyến. Khi này, mô phỏng có thể được thực hiện theo nghiệm đệ quy của phương trình vi phân phi tuyến. Một cách tiếp cận tương đương là trình bày hệ thống phi tuyến ở dạng sơ đồ khối (nếu có thể được), sau đó mô phỏng mô hình sơ đồ khối đó. Giải pháp này thường được gọi là phương pháp sơ đồ khối lắp ráp.

Phương pháp sơ đồ khối lắp ráp được trình bày chi tiết trong chương 6 khi xét vòng khóa pha, một cách ngắn gọn ta có thể mô tả một phân hệ bằng phương trình vi phân:

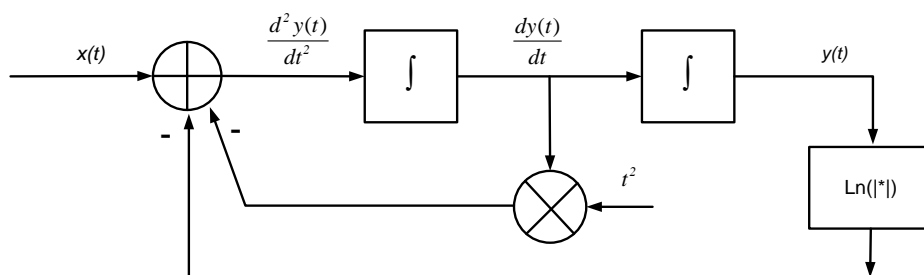
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + t^2 \frac{dy(t)}{dt} + \ln(|y(t)|) = x(t) \quad (12.2)$$

Được sắp xếp lại là:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -t^2 \frac{dy(t)}{dt} - \ln(|y(t)|) - x(t) \quad (12.3)$$

Được trình bày ở dạng sơ đồ khối như ở hình 12.2. Như đã rõ từ chương 6, mô phỏng tức thì theo cách trình bày tích phân liên tục theo thời gian được xấp xỉ bởi thuật toán tích phân rời rạc theo thời gian.

Phương trình vi phân phi tuyến (12.2) có thể được mô phỏng trực tiếp sử dụng kỹ thuật tích phân số đệ qui. Phương pháp này mang lại hiệu quả tính toán nhưng cần có một số nỗ lực về việc lập mô hình. Vì thế, nó thường được sử dụng cho các thiết bị phi tuyến rất phức tạp.



Hình 12.2: Mô hình sơ đồ khối lắp ráp cho thiết bị phi tuyến

12.1.2. Các nhân tố cần xét đến khi mô phỏng thiết bị phi tuyến

Cần phải xét một số nhân tố khi mô phỏng thiết bị phi tuyến. Mô phỏng thiết bị phi tuyến hầu hết được thực hiện trong miền thời gian ngoại trừ bộ lọc (bộ lọc được sử dụng trong mô hình để giải thích cho tính cách chọn lọc tần số). Tất nhiên, có thể mô phỏng bộ lọc trong miền thời gian và miền tần số.

Để minh họa một số nhân tố trong trình bày lập mô hình hoặc mô phỏng thiết bị phi tuyến, ta giả thiết rằng mô hình được xét là mô hình phi tuyến không nhớ có dạng được mô tả bởi (12.1) hoặc mô hình chọn lọc tần số (có nhớ) được cho ở hình 12.1.

Tốc độ lấy mẫu

Nhân tố đầu tiên cần phải xem xét là tốc độ lấy mẫu. Với hệ thống tuyến tính, ta thường thiết lập tốc độ lấy mẫu từ 8 đến 16 lần độ rộng băng tần tín hiệu vào. Trường hợp phi tuyến dạng:

$$y(t) = x(t) - 0,2x^3(t) \quad (12.4)$$

Trong đó đầu vào $x(t)$ là tín hiệu năng lượng bất định, chuyển sang miền tần số:

$$Y(f) = X(f) - 0,2X(f) \otimes X(f) \otimes X(f) \quad (12.5)$$

Trong đó, \otimes là phép tích chập. Tích chập bội ba dẫn đến độ rộng băng tần đầu ra $Y(f)$ lớn hơn độ rộng băng tần đầu vào $X(f)$. Hiệu ứng này được gọi là trải phổ do tính phi tuyến gây ra. Nếu muốn trình bày $y(t)$ một cách thích đáng mà không có lỗi chồng phổ quá mức, thì tốc độ lấy mẫu phải dựa trên độ rộng băng tần của $y(t)$ (độ rộng băng tần của $y(t)$ lớn hơn nhiều độ rộng băng tần của $x(t)$). Theo đó, khi thiết lập tốc độ lấy mẫu để mô phỏng thiết bị phi tuyến cần phải tính đến ảnh hưởng này. Tuy nhiên, tần số lấy mẫu thực tế cần thiết để mô phỏng không lớn như ví dụ này.

Nối tầng

Một nhân tố khác phải tính đến là ảnh hưởng của việc nối tầng các khối tuyến tính và phi tuyến như hình 12.1. Chẳng hạn, nếu đang dùng kỹ thuật chồng chéo (overlap) và cộng để mô phỏng bộ lọc, ta phải cẩn thận. Không thể xử lý các khối dữ liệu qua bộ lọc thứ nhất, sau đó là qua thiết bị phi tuyến và bộ lọc thứ hai và thực hiện chồng chéo và cộng tại đầu ra bộ lọc thứ hai. Làm như vậy là sai bởi lẽ nguyên lý xếp chồng không ứng dụng được cho thiết bị phi tuyến. Xử lý đúng là áp dụng phương thức chồng chéo và cộng tại đầu ra của bộ lọc thứ nhất, tính toán các mẫu trong miền thời gian tại đầu ra bộ lọc thứ nhất, xử lý mẫu này trên cơ sở từng mẫu một qua thiết bị phi tuyến không nhớ và ứng dụng kỹ thuật chồng chéo và cộng cho bộ lọc thứ hai.

Vòng hồi tiếp phi tuyến

Các vòng hồi tiếp có thể cần thêm trễ một mẫu trong vòng để tránh hiện tượng treo trong tính toán (lưu ý đường hồi tiếp trong PLL ở chương 6). Trễ nhỏ trong một vòng hồi tiếp tuyến tính có thể không ảnh hưởng đến kết quả mô phỏng nhưng trong hệ thống phi tuyến, có thể không những làm suy thoái đáng kể kết quả mô phỏng mà còn dẫn đến hoạt động bất ổn định. Để tránh các ảnh hưởng này ta phải tăng tốc độ lấy mẫu (tương đương giảm độ trễ).

Tốc độ lấy mẫu khả biến và nội suy

Nếu mô hình là một phương trình vi phân phi tuyến được giải bằng kỹ thuật tích phân số, thì rất nhiều thuật toán tích phân số trong các gói phần mềm (như Simlink) sử dụng kích cỡ bước tích phân khả biến. Kích cỡ bước được xác định tự động tại mỗi bước thực hiện tùy thuộc vào tính cách của nghiệm. Nếu nghiệm có tính cục bộ tốt, thì có thể dùng kích cỡ bước lớn. Để tránh chồng phễu trong các khối luồng xuống, cần thực hiện nội suy đầu ra và tạo các mẫu tín hiệu đầu ra cách đều.

12.2. Mô hình hóa và mô phỏng thiết bị phi tuyến không nhớ

Quan hệ vào/ra của thiết bị phi tuyến không nhớ được cho bởi:

$$y(t) = F(x(t - t_0)) \quad (12.6)$$

Trong đó, $F(.)$ là **một hàm phi tuyến** và t_0 có thể được giả thiết bằng 0. Nếu $x(t)$ là tín hiệu băng tần cơ sở, thì $y(t)$ cũng được xử lý là tín hiệu băng tần cơ sở. Mặt khác, nếu $x(t)$ là một tín hiệu thông dải, thì $y(t)$ sẽ là tín hiệu thông dải nhưng $y(t)$ cũng có thể chứa thành phần một chiều và các thành phần hài của tín hiệu đầu vào. Trong các trường hợp cụ thể, ta chỉ quan tâm những thành phần đầu ra có phổ gần các tần số đầu vào, thực hiện bằng cách đặt một bộ lọc thông dải vùng tại đầu ra thiết bị phi tuyến. Thiết bị phi tuyến tự nó được mô hình như một thiết bị hoạt động tức thời đơn giản.

Trong chương 4 ta đã biểu diễn đường bao phức thông thấp để mô hình hóa và mô phỏng tín hiệu thông dải qua hệ thống tuyến tính. Tại đây, ta cũng muốn có mô hình cho thiết bị phi tuyến thông dải ở dạng đường bao thông thấp phức của đầu vào/ra. Ta rút ra mô hình đường bao thông thấp phức cho các thiết bị phi tuyến như: bộ hạn chế, bộ khuếch đại cao tần RF băng rộng, vòng khóa pha, bộ cân bằng hồi tiếp quyết định và hệ thống khôi phục định thời.

12.2.1. Thiết bị phi tuyến băng tần cơ sở

Nếu đặt vào thiết bị phi tuyến băng tần cơ sở là tín hiệu giá trị thực $x(t)$, thì đầu ra của nó $y(t)$ cũng là tín hiệu giá trị thực. Thiết bị phi tuyến được mô hình hóa là $y(t) = F(x(t))$. Mô hình được dùng phổ biến nhất của thiết bị phi tuyến băng tần cơ sở là mô hình chuỗi mũ và mô hình bộ giới hạn.

Mô hình chuỗi mũ được định nghĩa bởi:

$$y(t) = \sum_{k=0}^N a_k x^k(t) \quad (12.7)$$

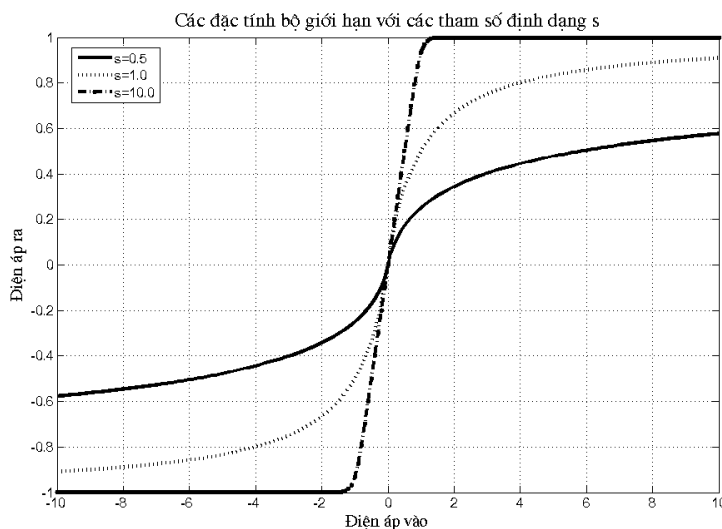
Mô hình bộ giới hạn tổng quát có dạng:

$$y(t) = \frac{M \cdot \text{sgn}(x(t))}{\left[1 + \left(\frac{m}{|x(t)|} \right)^s \right]^{1/s}} \quad (12.8)$$

Trong phương trình (12.8), M là giá trị giới hạn của đầu ra, m là giá trị giới hạn đầu vào và s là tham số "định dạng". Quan hệ vào/ra chuẩn hóa đối với bộ giới hạn được cho ở hình 12.3 ứng với các giá trị khác nhau của tham số định dạng s . Lưu ý rằng: $s = \infty$ tương ứng với bộ giới hạn "mềm", $m = 0$ tương ứng bộ giới hạn "cứng". Cũng cần lưu ý thêm, với $m = 0$, thì giá trị của s không ảnh hưởng đến đặc tính của thiết bị phi tuyến được mô tả bởi (12.8). Mã chương trình Matlab tạo ra kết quả hình 12.3 được cho ở file **NVD12_limiter.m** (có trong Phụ lục 12A).

Để được rõ hơn, bạn nên chạy chương trình Matlab với các giá trị khác nhau của s và m và so sánh nhận xét.

Mô phỏng mô hình được cho bởi (12.7) và (12.8) là khá đơn giản, và thường được thực hiện trong miền thời gian. Ta chỉ việc tạo các giá trị mẫu của $x(t)$, xử lý các mẫu này bằng (12.7) hoặc (12.8) để tạo các mẫu của $y(t)$. Sau đó, dùng các mẫu của $y(t)$ làm đầu vào cho các khối luồng xuống. Có thể ước tính các thuộc tính của $y(t)$ từ các mẫu $\{y(kT_s)\}$ khi $x(t)$ là một quá trình ngẫu nhiên. Ta cần phải đặc biệt lưu ý đến tốc độ lấy mẫu như đã đề cập.



Hình 12.3: Các đặc tính bộ giới hạn với các giá trị của tham số định dạng s

12.2.2. Thiết bị phi tuyến thông dải - Mô hình thông dải vùng

Mô hình thông dải (thông băng) không nhớ được dùng để đặc tính hóa cho một lượng lớn thiết bị thông dải phi tuyến băng hẹp trong hệ thống truyền thông. Từ *không nhớ* không những thể hiện quan hệ vào/ra tức thì mà còn thể hiện thiết bị đó không biểu lộ tính cách chọn lọc tần số trong dải tần hoạt động. Cả độ rộng băng tần của thiết bị phi tuyến và độ rộng băng tần của tín hiệu đều được coi là nhỏ hơn rất nhiều so với tần số sóng mang f_c .

Khi độ rộng băng tần trở nên rộng hơn, thì thiết bị phi tuyến biểu lộ tính cách chọn lọc tần số, và ta dùng các mô hình chọn lọc tần số. *Tính chọn lọc tần số thường đồng nghĩa với tính có nhớ*, và mô hình được dùng phổ biến nhất cho các thiết bị phi tuyến chọn lọc tần số (nghĩa là, thiết bị phi tuyến có nhớ) bao gồm thiết bị phi tuyến không nhớ kẹp giữa 2 bộ lọc như được minh họa ở hình 12.1. Ta sẽ tập trung vào thiết bị phi tuyến thông dải không nhớ và thiết bị phi tuyến thông dải có nhớ ở phần sau.

Xét một thiết bị phi tuyến không nhớ dạng:

$$y(t) = x(t) - 0,2x^3(t) \quad (12.9)$$

Giả thiết, đầu vào là một tín hiệu ngẫu nhiên thông dải dạng:

$$x(t) = A(t)\cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (12.10)$$

Trong đó biên độ $A(t)$ và độ lệch pha $\phi(t)$ đều là quá trình ngẫu nhiên thông thấp có độ rộng băng thông $B \ll f_c$ (giả định băng hẹp). Từ (12.9) và (12.10) ta được đầu ra $y(t)$ của thiết bị phi tuyến là:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= A(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] - 0,2 \{A(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]\}^3 \\
 &= A(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] - \frac{0,2}{4} A^3(t) \{ \cos[6\pi f_c t + 3\phi(t)] + 3 \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \} \quad (12.11) \\
 &= \left[A(t) - \frac{0,6}{4} A^3(t) \right] \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] - \frac{0,2}{4} A^3(t) \cos[6\pi f_c t + 3\phi(t)]
 \end{aligned}$$

Trong phương trình trên, thành phần thứ nhất nằm tại trung tâm (tần số sóng mang f_c) và thành phần cuối cùng là nằm tại thành phần hài thứ 3 của tần số sóng mang $3f_c$. Độ rộng băng thông của thành phần hài thứ ba sẽ là bội của 3B. Do giả thiết $f_c \gg B$, nên thành phần thứ hai sẽ nằm ngoài độ rộng băng tần quan tâm. Vì vậy, ta có thể lấy xấp xỉ đầu ra vùng thứ nhất của thiết bị phi tuyến là:

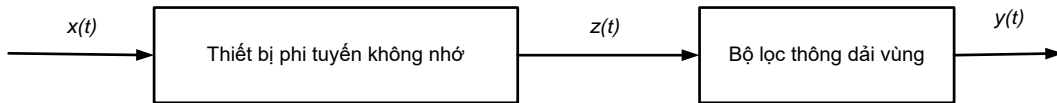
$$z(t) \approx \left[A(t) - \frac{0,6}{4} A^3(t) \right] \cdot \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (12.12)$$

$$z(t) \approx f(A(t)) \cdot \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (12.13)$$

Trong đó :

$$f(A(t)) = \left[A(t) - \frac{0,6}{4} A^3(t) \right] \quad (12.14)$$

Theo đó, mô hình cho thiết bị phi tuyến băng hẹp không nhớ là một thiết bị phi tuyến không nhớ theo sau là một bộ lọc thông dải "vùng" (bộ lọc chỉ cho qua đầu ra "vùng đầu tiên" gần f_c). Mô hình được minh họa ở hình 12.4, trong đó $x(t)$ và $y(t)$ thể hiện đầu vào/ra của mô hình và tần số trung tâm của bộ lọc thông dải vùng là f_c . Thiết bị phi tuyến không nhớ tự nó không có các đáp ứng khác nhau với tín hiệu đầu vào băng tần cơ sở hay thông dải và nó cũng không nhạy cảm với tần số sóng mang. Chính bộ lọc thông dải vùng đã chuyển mô hình băng tần cơ sở thành mô hình thông dải tại tần số f_c .



Hình 12.4: Mô hình thông dải vùng cho thiết bị phi tuyến băng hẹp không nhớ

Lưu ý rằng, với mô hình chuỗi mũ, đầu ra thông dải $y(t)$ có cùng dạng như đầu vào, quan hệ biên độ vào/ra theo hàm $f(A(t))$, pha đầu ra giống pha đầu vào. Hàm $f(A(t))$ được xem như đặc tính truyền đạt biên độ-biên độ AM-AM của thiết bị phi tuyến. Một bộ giới hạn hoặc một mô hình chuỗi mũ chỉ ảnh hưởng lên biên độ của tín hiệu vào. Mô hình không tác động vào pha.

Ở dạng đường bao phức của đầu vào $x(t)$ và đầu ra $z(t)$, thì mô hình tương đương thông thấp cho thiết bị phi tuyến chuỗi mũ là :

$$\tilde{x}(t) = A(t) \cdot e^{j\phi(t)} \quad (12.15)$$

$$\tilde{z}(t) = f[A(t)] \cdot e^{j\phi(t)} \quad (12.16)$$

Mô hình chuỗi mũ có thể được mô phỏng sử dụng mô hình thông dải vùng được cho ở (12.13) và hình 12.4 hoặc mô hình tương đương thông thấp được cho ở (12.16). Việc mô phỏng mô hình thông dải cần phải lấy mẫu tốc độ cao hơn và tính toán phức tạp hơn so với mô hình tương đương thông thấp. May thay, có thể rút ra các mô hình tương đương thông thấp cho hầu hết các thiết bị phi tuyến không nhớ để cho cả phân tích lẫn đo đạc như chỉ ra trong phần dưới.

12.2.3. Mô hình AM-AM và AM-PM đường bao phức thông thấp

Các thiết bị như bộ khuếch đại thông dải, đáp ứng tín hiệu vào thông dải (có phổ được trung tâm tại tần số sóng mang), tạo tín hiệu ra thông dải. Phổ của tín hiệu đầu ra tập trung ở tần số sóng mang, có thể có độ rộng băng lớn hơn so với độ rộng băng của tín hiệu vào. Những thiết bị này có thể được mô hình bằng cách sử dụng biểu diễn đường bao phức của tín hiệu vào/ra.

Giả sử, tín hiệu vào thiết bị phi tuyến thông dải không nhớ dạng:

$$x(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = A\cos(\alpha) \quad (12.17)$$

Trong đó :

$$\alpha = 2\pi f_c t + \phi(t) \quad (12.18)$$

Tín hiệu ra tương ứng $y(t) = F(x(t))$ được biểu diễn như sau :

$$y(t) = f(A\cos(\alpha)) \quad (12.19)$$

Do $A\cos(\alpha)$ tuần hoàn theo α , nên $y(t)$ cũng tuần hoàn theo α . Tín hiệu đầu ra $y(t)$ có thể được khai triển theo chuỗi Fourier như sau:

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\alpha) + b_k \sin(k\alpha)] \quad (12.20)$$

Trong đó các hệ số chuỗi Fourier a_k và b_k được cho bởi :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A\cos(\alpha)) \cos(k\alpha) d\alpha \quad (12.21)$$

$$b_k = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A\cos(\alpha)) \sin(k\alpha) d\alpha \quad (12.22)$$

Đầu ra vùng thứ nhất $z(t)$ lân cận f_c được cho bởi thành phần $k = 1$ trong chuỗi Fourier. Cho ta :

$$z(t) = f_1(A(t))\cos[2\pi f_c t + \phi(t)] - f_2(A(t))\sin[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (12.23)$$

Trong đó :

$$f_1(A) = a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A\cos(\alpha)) \cos(\alpha) d\alpha \quad (12.24)$$

$$f_2(A) = -b_l = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \cos(\alpha)) \sin(k\alpha) d\alpha \quad (12.25)$$

Hàm $f_1(A)$ đôi khi được gọi là chuyển đổi Chebyshev bậc 1 và hàm phức $[f_1(A) - jf_2(A)]$ được gọi là hàm mô tả của thiết bị phi tuyến.

Mô hình được cho bởi (12.23) cũng có thể được biểu diễn là:

$$z(t) = f(A(t)) \cdot \cos[2\pi f_c t + \phi(t) + g(A(t))] \quad (12.26)$$

Trong đó :

$$f(A(t)) = \sqrt{f_1^2(A) + f_2^2(A)} \quad (12.27)$$

$$g(A(t)) = \arctan \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \quad (12.28)$$

Trong hệ tọa độ cực, ta có :

$$f(A) = e^{jg(A)} = f_1(A) + jf_2(A) \quad (12.29)$$

Các hàm $f(A)$ và $g(A)$ là các đặc tính truyền đạt (AM-AM) và (AM-PM) của thiết bị phi tuyến.

Mô hình được cho ở (12.26) là sự tổng quát hóa quan hệ vào/ra được cho ở (12.12). Trong khi mô hình được cho ở (12.12) chỉ giải thích cho sự biến đổi biên độ, thì (12.26) cho thấy cả méo biên độ và méo pha do tính phi tuyến, và nó có thể được biểu diễn ở dạng tương đương thông thấp phức của đầu vào/ra như sau:

$$\tilde{x}(t) = A(t) e^{j\phi(t)} \quad (12.30)$$

$$\tilde{z} = f(A(t)) \cdot e^{jg(A)} \cdot e^{j\phi(t)} \quad (12.31)$$

Mô hình được cho trong phương trình trên ở dạng cực và có thể chuyển về dạng:

$$z(t) = s_d(t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] - s_q(t) \cdot \sin[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (12.32)$$

Trong đó, đường bao phức có thể được biểu diễn theo thành phần đồng pha $s_d(t)$ và vuông pha $s_q(t)$ như sau:

$$\tilde{z}(t) = [s_d(t) + js_q(t)] \cdot e^{j\phi(t)} \quad (12.33)$$

Trong đó các thành phần đồng pha và vuông pha là:

$$s_d(t) = f(A(t)) \cdot \cos(gA(t)) \quad (12.34)$$

$$s_q(t) = f(A(t)) \cdot \sin(gA(t)) \quad (12.35)$$

Rút ra biểu thức giải tích của đặc tính AM-AM và AM-PM

Đặc tính truyền đạt AM-AM, AM-PM có được từ thiết bị phi tuyến thông dải sử dụng (12.23). Đối với thiết bị phi tuyến dạng giới hạn cứng $[m = 0]$, ta có:

$$f(A) = \frac{4}{\pi} M \quad (12.36)$$

$$g(A) = 0 \quad (12.37)$$

Giá trị của $f(A)$ chỉ là biên độ của thành phần sin cơ bản (thành phần thứ nhất của đầu ra):

Đối với thiết bị phi tuyến kiểu bộ giới hạn mềm [xem (12.8): $s = \infty$], thì $f(A)$ và $g(A)$ được cho bởi:

$$\frac{f(A)}{A} = \begin{cases} \frac{M}{m}, & A < m \\ \frac{2}{M} \left[\arcsin\left(\frac{m}{A}\right) + \left(\frac{m}{A}\right) \left(1 - \frac{m^2}{A^2}\right)^{1/2} \right], & A \geq m \end{cases} \quad (12.38)$$

$$g(A) = 0 \quad (12.39)$$

Cho thấy bộ giới hạn không gây méo pha.

Với bất cứ thiết bị phi tuyến thông dải không nhớ nào, ta đều có thể rút ra được $f(A)$ và $g(A)$ theo phép giải tích nếu: (i) cho trước các đặc tính truyền đạt của thiết bị phi tuyến; (ii) ước lượng được các tích phân (12.21) và (12.22) ở dạng kín. Trong một số trường hợp, ta có thể trực tiếp rút ra mô hình tương đương thông thấp.

Ví dụ, xét một thiết bị phi tuyến chuỗi mũ dạng:

$$y(t) = \sum_{k=1}^N a_k x^k(t) \quad (12.40)$$

Tín hiệu thông dải đầu vào $x(t)$ được biểu diễn theo đường bao phức thông thấp của nó là:

$$x(t) = \text{Re} \left\{ \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} = \frac{1}{2} \left[\tilde{x}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \tilde{x}^*(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \right] \quad (12.41)$$

Ở dạng đường bao phức, thành phần mũ thứ n của $x(t)$ được biểu diễn là:

$$x^n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\tilde{x}(t)]^k [\tilde{x}^*(t)]^{n-k} e^{-j2\pi f_0 (2k-n)t} \quad (12.42)$$

Chỉ các thành phần với n lẻ, và $2k - n = \pm n$ trong $x^n(t)$ mới tạo ra vùng phổ thứ nhất. Do đó, đường bao phức của đầu ra vùng thứ nhất của thiết bị phi tuyến chuỗi mũ là:

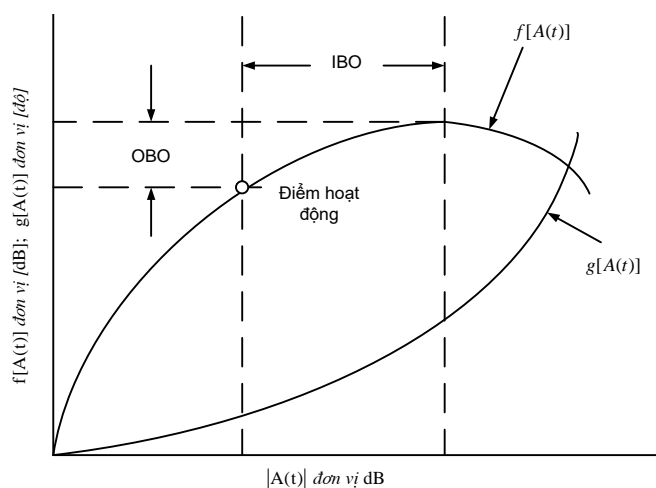
$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \sum_{m=0}^{(N-1)/2} \frac{a_{2m+1}}{2^{2m}} \binom{2m+1}{m+1} |\tilde{x}|^{2m} \quad (12.43)$$

Phương trình (12.43) mô tả mô hình tương đương thông thấp phức cho loại thiết bị phi tuyến dạng chuỗi mũ [thiết bị phi tuyến chuỗi mũ bậc ba được đề cập ở phần 12.2.3 là trường

hợp cụ thể của mô hình được cho bởi (12.43)]. Lưu ý rằng, trong mô hình này không có méo pha nghĩa là $g(A) = 0$.

Đo đặc tính AM-AM, AM-PM

Đặc tính AM-AM, AM-PM của bộ khuếch đại thông dải và nhiều thiết bị khác thường được xác định từ đo kiểm và không được rút ra theo cách giải tích. Đầu vào bộ khuếch đại là một sóng mang không điều chế biên độ, biên độ đầu ra $f(A)$ và pha đầu ra $g(A)$ được đo tại các giá trị khác nhau của A . Những phép đo như vậy được gọi là "*phép đo quét công suất*", kết quả được lưu trong bảng dữ liệu của bộ khuếch đại.



Hình 12.5: Đặc tính AM-AM và AM-PM

Đặc tính AM-AM, AM-PM được hiển thị dưới dạng công suất tương đối dB. Chuẩn hóa trục đầu ra theo công suất ra lớn nhất của thiết bị tại điểm bão hòa. Chuẩn hóa trục đầu vào theo công suất đầu vào tại đó tạo ra công suất ra lớn nhất. Những công suất chuẩn hóa này được tham chiếu đến như là độ lùi đầu ra OBO và độ lùi đầu vào IBO. Nếu công suất vào trung bình là rất nhỏ so với công suất vào yêu cầu để tạo ra công suất ra lớn nhất, thì bộ khuếch đại sẽ mang *tính tuyến tính*. Khi công suất vào tăng, thiết bị bắt đầu có tính phi tuyến.

Phép đo thường được thực hiện tại một vài mức công suất đầu vào hay tại các mức của $|A(t)|$; các đặc tính đo được cho vào bảng ứng với các mức công suất vào. Khi mô phỏng có thể cần đến để nội suy các giá trị trong bảng đó để có được mức công suất đầu vào. Cũng cần lưu ý rằng, mô hình trong (12.30) và (12.31) là cho mức điện áp (dòng điện) của $x(t)$, $A(t)$.v.v... Phép đo AM-AM thường được cho ở dạng các mức công suất. Trong những trường hợp như vậy, cần phải chuyển khuếch đại hay suy hao công suất thành khuếch đại hoặc suy hao điện áp (dòng điện). Minh họa điển hình về các đặc tính AM-AM, AM-PM của bộ khuếch đại thông dải được cho ở hình 12.5.

Dạng giải tích của đặc tính AM-AM và AM-PM

Thực tế, ta thường lấy xấp xỉ đặc tính AM-AM, AM-PM do bởi dạng giải tích và dùng dạng giải tích để xác định giá trị pha và biên độ đầu ra chứ không sử dụng nội suy. Hai dạng hàm được dùng phổ biến để mô hình hóa các đặc tính đo của bộ khuếch đại RF được cho bởi

$$S_p(A) = \frac{\alpha_p A}{1 + \beta_p A^2}; S_q(A) = \frac{\alpha_q A^3}{(1 + \beta_q A^2)^2} \quad (12.44)$$

$$f(A) = \frac{\alpha_f A}{1 + \beta_f A^2}; g(A) = \frac{\alpha_g A^2}{1 + \beta_g A^2} \quad (12.45)$$

Tìm được các hệ số của mô hình $\alpha_p, \alpha_q, \beta_p, \beta_q$ hoặc $\alpha_f, \beta_f, \alpha_g, \beta_g$ từ dữ liệu bằng cách sử dụng kỹ thuật mịn hóa đường cong theo phương pháp số.

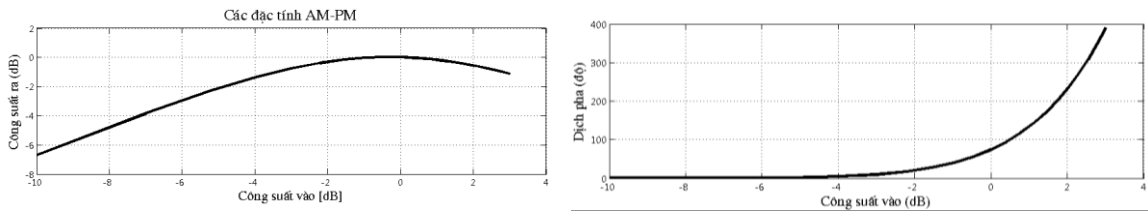
Ví dụ 12.1: Mã chương trình Matlab **NVD12_Sim1.m** (có trong Phụ lục 12A) minh họa quá trình tạo các đặc tính AM-AM và AM-PM bằng cách dùng mô hình Sale'h như được định nghĩa (12.45). Mã chương trình **NVD12_salehmodel.m** được viết cho mô hình Sale'h được cho trong phụ lục 12A trong đó các tham số của mô hình được xác định là $\alpha_f = 1,1587; \beta_f = 1,15; \alpha_g = 4,0; \beta_g = 2,1$.

Kết quả chạy chương trình Matlab **NVD12_sim1.m** được cho ở hình 12.6

12.2.4. Mô phỏng mô hình đường bao phức

Mô phỏng các mô hình đường bao phức trong miền thời gian hoặc dưới dạng cực (12.30) và (12.31) hoặc ở dạng cầu phương (12.33); (12.34); (12.35). Sơ khối tương ứng được cho ở hình 12.7. Ở dạng cực, trình tự mô phỏng gồm các bước:

1. Tạo các giá trị mẫu đường bao phức cho đầu vào $\{\tilde{x}(kT_s)\}$
2. Tính biên độ và pha đầu vào $A(kT_s) = |\tilde{x}(kT_s)|$ và $\phi(kT_s) = \arg\left(\frac{\tilde{x}(kT_s)}{|\tilde{x}(kT_s)|}\right)$.



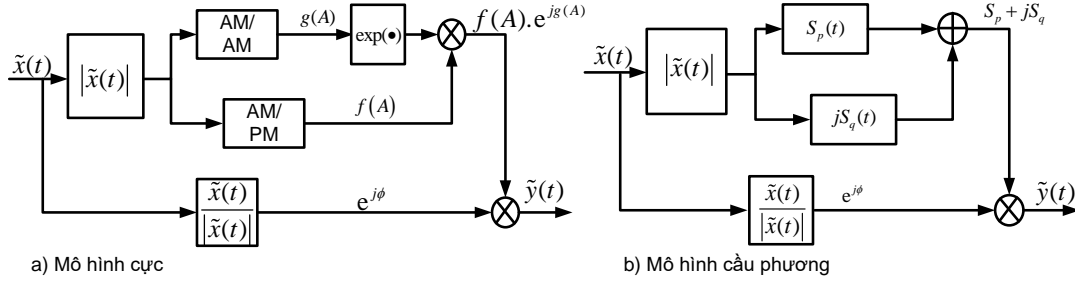
Hình 12.6: Các đặc tính AM-PM

3. Tìm biên độ đầu ra bằng cách dùng đặc tính AM-AM $f(A)$. (Lưu ý: bước này có thể cần phải nội suy các giá trị AM-AM và chuyển khuếch đại công suất thành điện áp hoặc dòng điện).

4. Tìm dịch pha đầu ra bằng cách sử dụng đặc tính AM-PM $g(A)$. (Lưu ý: bước này có thể cần phải nội suy các giá trị AM-PM).

5. Tính các giá trị mẫu của đầu ra phức $\{\tilde{z}(kT_s)\}$ theo (12.31).

Một thủ tục tương tự được dùng để thực hiện mô hình cầu phương như được cho ở hình 12.7. Về mặt tính toán thì hai quy trình là giống nhau.



Hình 12.7: Các mô hình đường bao thông thấp phức của thiết bị phi tuyến thông băng vùng

12.2.5. Trường hợp đa sóng mang

Trong quá trình triển khai mô hình AM-AM, AM-PM, ta đã giả thiết rằng đầu vào thiết bị phi tuyến chỉ có một sóng mang với điều chế biên độ $A(t)$, tần số và pha $\phi(t)$. Trong khi đây là trường hợp hệ thống TDMA đơn sóng mang băng rộng, thì trong hệ thống FDMA tín hiệu vào gồm nhiều sóng mang được điều chế riêng rẽ và tổng các sóng mang này được khuếch đại bởi một bộ khuếch đại công suất. Theo đó, cần phải mở rộng mô hình AM-AM, AM-PM cho trường hợp đa sóng mang

Mô hình đa sóng mang

Giả thiết, đặt vào thiết bị phi tuyến bao gồm tổng m sóng mang điều chế:

$$x(t) = \sum_{k=1}^m A_k(t) \cdot \cos[2\pi(f_c + f_k)t + \phi_k(t)], \quad -\frac{B}{2} \leq f_k \leq \frac{B}{2} \quad (12.46)$$

Trong đó f_k là lệch tần số của sóng mang thứ k , f_c là tần số trung tâm, $A_k(t)$ và $\phi_k(t)$ thể hiện điều chế biên độ và pha của sóng mang thứ k . Ta có thể biểu diễn tín hiệu đa sóng mang dưới dạng đường bao phức (xem phần 4.4):

$$x(t) = \text{Re}\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (12.47)$$

Trong đó đường bao phức thông thấp $\tilde{x}(t)$ được cho bởi:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^m A_k(t) e^{j2\pi f_k t + j\phi_k(t)} = A(t) e^{j\phi(t)} \quad (12.48)$$

Trong (12.48), biên độ của đường bao phức và pha tương ứng là:

$$A(t) = \sqrt{x_i^2(t) + x_q^2(t)} \quad (12.49)$$

$$\phi(t) = \arctan\left[\frac{x_q(t)}{x_i(t)}\right] \quad (12.50)$$

Trong đó, các thành phần đồng pha và vuông pha tương ứng là:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^m A_k(t) \cos[2\pi f_k t + \phi_k(t)] \quad (12.51)$$

$$x_q(t) = \sum_{k=1}^m A_k(t) \sin[2\pi f_k t + \phi_k(t)] \quad (12.52)$$

Tìm được đường bao phức thông thấp $\tilde{z}(t)$ của đầu ra và tín hiệu ra thông dải $z(t)$:

$$\tilde{z}(t) = f(A(t)) \cdot e^{jg(A(t))} \cdot e^{j\phi(t)} \quad (12.53)$$

$$z(t) = \text{Re}\{\tilde{z}(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (12.54)$$

Méo điều chế ký sinh trong hệ thống đa sóng mang

Xét một thiết bị phi tuyến dạng chuỗi mũ:

$$y(t) = x(t) - a_3 x^3(t) \quad (12.55)$$

Theo sau là bộ lọc vùng. Giả sử đầu vào thiết bị phi tuyến là tổng của hai đơn sóng mang điều chế

$$x(t) = A_1 \cos[2\pi(f_c + f_1)t] + A_2 \cos[2\pi(f_c + f_2)t] \quad (12.56)$$

Trong đó f_c là tần số sóng mang, f_1 và f_2 là tần số lệch và $f_i < B \ll f_c$, $i = 1, 2$. Có thể thấy rằng, thành phần đầu ra vùng thứ nhất (các thành phần lân cận f_c) được cho bởi:

$$\begin{aligned} z(t) = & \left\{ a_1 A_1(t) - \left[\frac{3}{4} a_3 A_1^3(t) + \frac{3}{2} a_3 A_2^2(t) A_1(t) \right] \right\} \cos[2\pi(f_c + f_1)t] \\ & + \left\{ a_1 A_2(t) - \left[\frac{3}{4} a_3 A_2^3(t) + \frac{3}{2} a_3 A_1^2(t) A_2(t) \right] \right\} \cos[2\pi(f_c + f_2)t] \\ & - \frac{3}{4} A_1^2(t) A_2(t) \cos[2\pi(f_c + 2f_1 - f_2)t] \\ & - \frac{3}{4} A_2^2(t) A_1(t) \cos[2\pi(f_c + 2f_2 - f_1)t] \end{aligned} \quad (12.57)$$

Biểu thức trên cho đầu ra bao gồm các thành phần bị méo tại tần số đầu vào và các thành phần điều chế chéo tại $f_c + 2f_1 - f_2$ & $f_c + 2f_2 - f_1$ (được gọi là các thành phần méo "điều chế ký sinh". Các thành phần méo điều chế ký sinh này làm giảm toàn bộ chất lượng tín hiệu và có thể gây ra nhiễu kênh lân cận nếu tần số của những thành phần này làm chúng ở ngoài băng tần tín hiệu xét nhưng lại ở trong băng tần được chiếm giữ bởi tín hiệu lân cận (nhận thấy rằng, thành phần bậc chẵn không tạo ra bất cứ sự méo nào trong vùng lân cận tần số đầu vào).

Cũng có thể dễ dàng thấy rằng, khi đầu vào bao gồm một số lượng lớn sóng mang hoặc khi thiết bị phi tuyến có nhiều thành phần phi tuyến bậc cao hơn, thì đầu ra sẽ chứa một lượng lớn các thành phần kết hợp tuyến tính các tần số đầu vào. Có thể triển khai một thuật toán cho các thành phần điều chế ký sinh và tần số của các thành phần này nhưng rất khó đặc tính hóa và phân tích ảnh hưởng của méo do tính phi tuyến theo phép giải tích khi đầu vào chứa nhiều sóng mang điều chế hoặc/và tính phi tuyến cao. Tài liệu truyền thông có đủ các kỹ thuật để lấy xấp xỉ ảnh hưởng của méo điều chế ký sinh. Tuy nhiên, việc đặc tính hóa chính xác điều chế

ký sinh trong hệ thống số đa sóng mang với các sơ đồ điều chế là khó khăn. Khi này, mô phỏng là rất hữu hiệu.

Ví dụ 12.2: Xét một thiết bị phi tuyến bậc 3 không nhớ dạng

$$y(t) = x(t) - 0,3x^3(t) \quad (12.58)$$

Có một đầu vào thông dải hai đơn sóng mang $x(t)$ tại các tần số 11 Hz và 14 Hz:

$$x(t) = \cos[2\pi(11)t] + 0,707\cos[2\pi(14)t] \quad (12.59)$$

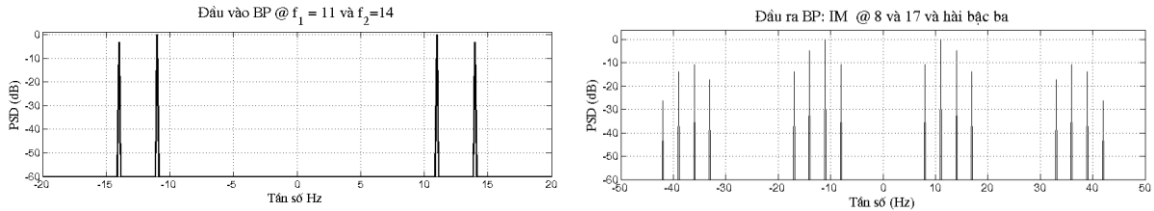
Các phiên bản thông dải của đầu vào/ra được cho ở hình 12.8. Các thành phần điều chế ký sinh được tạo ra bởi thiết bị phi tuyến nằm tại tần số 8 Hz và 17 Hz và thành phần hài bậc 3 xung quanh tần số 33 và 42 Hz.

Phiên bản tương đương thông thấp của ví dụ này, với tần số tham chiếu $f_0 = 12$ Hz có dạng:

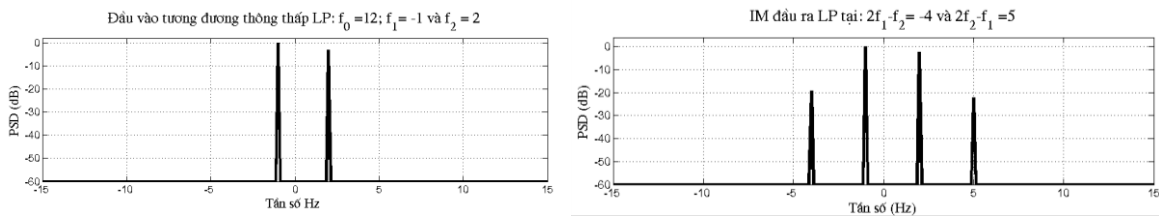
$$\tilde{x}(t) = e^{-j2\pi(1)t} + 0,707e^{j2\pi(2)t} \quad (12.60)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) - 0,75(0,3)|\tilde{x}(t)|^2 \tilde{x}(t) \quad (12.61)$$

Các thành phần điều chế ký sinh bây giờ xuất hiện ở tần số -4Hz và 5 Hz (theo tần số tham chiếu $f_0 = 12$ Hz) như được minh họa ở hình 12.9. Không có thành phần hài bậc 3 được giải thích cho mô hình tương đương thông thấp. Mã chương trình Matlab **NVD12_sim2.m** (có trong Phụ lục 12A) thực hiện bài toán này.



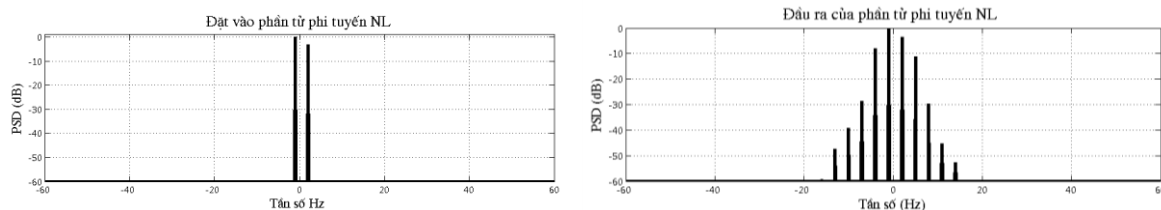
Hình 12.8: Đầu vào/ra của thiết bị phi tuyến dựa trên mô hình thông dải



Hình 12.9: Đầu vào/ra của thiết bị phi tuyến dựa trên mô hình thông thấp

Ví dụ 12.3: Xét thiết bị phi tuyến trên dựa vào đặc tính AM-AM, AM-PM chứ không phải là dựa trên mô hình chuỗi mũ như đã làm ở ví dụ trên. Mô hình AM-AM, AM-PM trong trường hợp này dựa vào mô hình Saleh được định nghĩa thông qua (12.45); Các đặc tính AM-AM, AM-PM được xác định trong ví dụ 12.1, mã chương trình Matlab mô phỏng mô hình Saleh được cho ở phụ lục 12A và chương trình **NVD12_log_psd.m** được cho trong phụ lục 7A của chương 7. Mô hình tín hiệu tương đương thông thấp là tổng của 2 đơn sóng mang phức

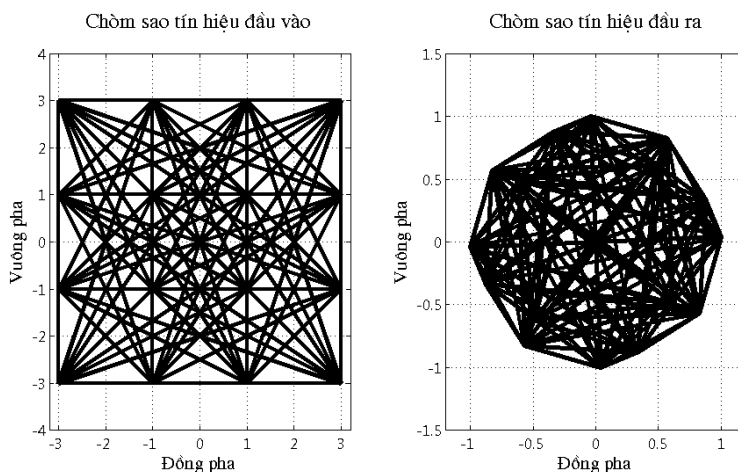
trong ví dụ trước được sử dụng để mô phỏng nhằm so sánh kết quả. Chương trình Matlab **NVD12_sim3.m** (có trong phụ lục 12A) thực hiện bài toán này.



Hình 12.10: Các kết quả mô phỏng cho độ lồi 5 dB

Kết quả chạy chương trình Matlab **NVD12_sim3.m** được minh họa ở hình 12.10 với độ lồi 5 dB. (Lưu ý: trong chương trình Matlab ta nhập tham số độ lồi là giá trị dương vì được xem là bản chất hơn nhưng cũng có thể chuyển thành giá trị âm trong quá trình gọi mô hình vì mức tín hiệu trong trường hợp này là -5dB so với giá trị định).

Ví dụ 12.4: Xét một mô hình tín hiệu thông thấp phức cho điều chế 16-QAM. Như trong ví dụ trước sử dụng mô hình Saleh để đặc tính hóa AM-AM và AM-PM. Chòm sao tín hiệu vào/ra được tính toán với độ lồi là 10 dB. Mục đích của mô phỏng là xác định các ảnh hưởng của thiết bị phi tuyến lên tín hiệu. Mã chương trình Matlab **NVD12_sim4.m** (có trong Phụ lục 12A) thực hiện mô phỏng cho bài toán này



Hình 12.11: Chòm sao tín hiệu vào/ra khi độ lồi 10 dB

Kết quả chạy chương trình Matlab **NVD12_sim4.m** được minh họa ở hình 12.11 với độ lồi 10 dB. Lưu ý rằng, ảnh hưởng của tính phi tuyến làm di chuyển nhiều điểm tín hiệu xít lại gần nhau hơn. Như ta đã lưu ý ở chương 4 là: trong môi trường kênh AWGN, thì xác suất lỗi là một hàm đơn điệu của khoảng cách Euclid giữa cặp các điểm trong không gian tín hiệu với xác suất lỗi tăng khi các điểm trong không gian tín hiệu đó gần nhau hơn, hay nói cách khác khi các điểm tín hiệu càng xít gần nhau thì xác suất lỗi càng tăng và ngược lại. Vì vậy ta kết luận rằng tính phi tuyến làm suy thoái xác suất lỗi của các hệ thống truyền thông. Tương tự với biểu đồ mắt, chòm sao tín hiệu cho ta phép đánh giá *định tính* hiệu năng hệ thống. Theo đó, ta nhìn

nhận sự thay đổi trong chòm sao tín hiệu như là các tham số bị thay đổi, cho phép ta hiểu sâu về các ảnh hưởng lên hiệu năng hệ thống, đặc biệt có ý nghĩa đối với các hệ thống phi tuyến. Bạn đọc nên thực hiện mô phỏng nhiều lần để quan trắc và so sánh các kết quả khi thay đổi độ lùi.

12.3. Mô hình hóa và mô phỏng thiết bị phi tuyến có nhớ

Nếu đầu ra của một thiết bị phi tuyến phụ thuộc vào giá trị hiện tại và giá trị quá khứ của tín hiệu vào, thì thiết bị đó thuộc loại thiết bị phi tuyến có nhớ. Tính nhớ hay phụ thuộc vào các giá trị trước đó được mô hình hóa trong hệ thống tuyến tính bởi đáp ứng xung kim và tích chập trong miền thời gian. Hệ thống tuyến tính được mô hình hóa trong miền tần số bởi hàm truyền đạt, hàm truyền đạt thể hiện cho đáp ứng của hệ thống trạng thái bền vững phụ thuộc vào tần số đầu vào. **Vì vậy, tính có nhớ và tính chọn lọc tần số là đồng nghĩa nhau.**

Nhiều thiết bị phi tuyến như các bộ khuếch đại băng rộng biểu lộ tính cách chọn lọc tần số. Tính cách này được thể hiện rõ khi đo đáp ứng của thiết bị tại các mức công suất khác nhau tại các tần số khác nhau. Nếu quan hệ vào/ra không phụ thuộc vào tần số được sử dụng trong phép đo, thì thiết bị là thiết bị không nhớ. Ngược lại, thiết bị thể hiện tính cách chọn lọc tần số và do đó có nhớ.

Giả thiết, đưa vào thiết bị AM-AM phi tuyến một đơn mang không điều chế tại một số tần số $f_c + f_i$ với f_c là tần số trung tâm của thiết bị và f_i là tần số lệch so với tần số trung tâm. Đường bao phức của tín hiệu vào là:

$$\tilde{x}(t) = A.e^{j2\pi f_i t} \quad (12.62)$$

Từ đó:

$$|\tilde{x}(t)| = A \quad (12.63)$$

Nếu thiết bị phi tuyến không nhớ (không chọn lọc tần số), thì đầu ra được cho bởi:

$$\tilde{y}(t) = f(A)e^{j2\pi f_i t} \quad (12.64)$$

Lưu ý rằng, biên độ đầu ra độc lập với tần số.

Nếu các phép đo cho thấy, thiết bị phi tuyến thuộc loại chọn lọc tần số, thì phải xét đến tính chọn lọc tần số bằng cách biến đổi hàm AM-AM để chứa tần số đầu vào và viết đáp ứng như sau:

$$\tilde{y}(t) = f(AH(f_i)).e^{j2\pi f_i t} \quad (12.65)$$

Khi ta thay đổi f_i trên độ rộng băng tần của thiết bị, thì hàm $H(f_i)$ sẽ giải thích cho tính phụ thuộc tần số của thiết bị phi tuyến. Lưu ý, $H(f_i)$ được xem là hàm truyền đạt của bộ lọc. Bộ lọc tạo ra đáp ứng $AH(f_i).e^{j2\pi f_i t}$ khi đầu vào là $\tilde{x}(t) = A.e^{j2\pi f_i t}$. Theo đó, mô hình cho phần AM-AM của thiết bị phi tuyến chọn lọc tần số bao gồm một bộ lọc $H(f_i)$ theo sau bởi một thiết bị phi tuyến không nhớ AM-AM, $f(A)$.

Giải pháp này được mở rộng để giải thích cho các đặc tính truyền đạt AM-AM chọn lọc tần số bằng cách đưa thêm bộ lọc khác vào trong mô hình. Thực vậy, mô hình được dùng phổ

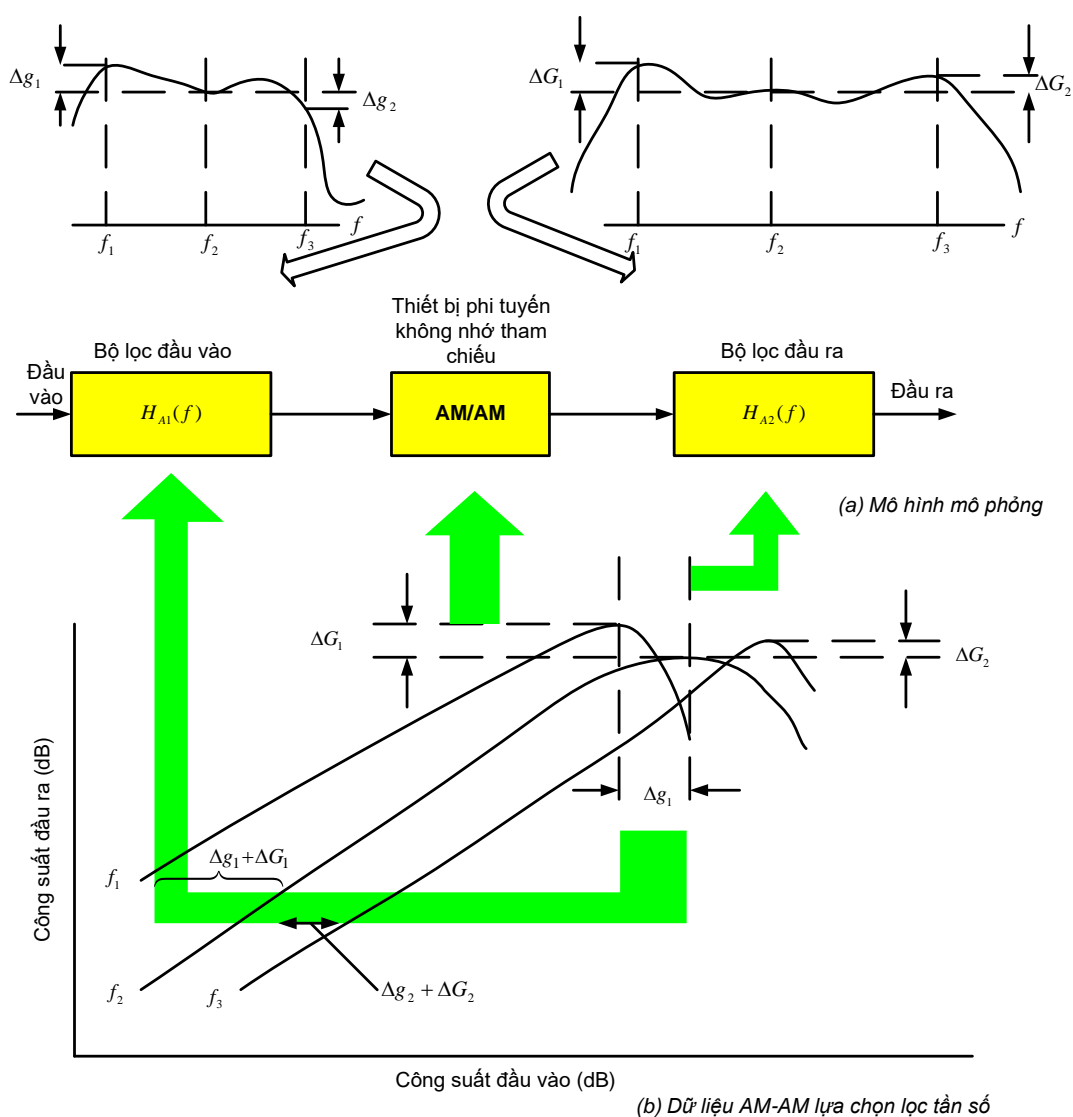
biến nhất cho các thiết bị phi tuyến chọn lọc tần số gồm một thiết bị phi tuyến không nhớ kếp giữa 2 bộ lọc. Ta xét hai mô hình này.

12.3.1. Các mô hình thực nghiệm dựa trên đo kiểm

Các mô hình này rút ra từ các phép đo "công suất bước" và "tone quét" được thực hiện với tín hiệu vào là một tone (hay đơn sóng mang) không điều chế dạng:

$$x(t) = A_i \cos[2\pi(f_i + f_c)t] \quad (12.66)$$

Đo độ lệch pha và biên độ đầu ra tại các giá trị khác nhau của tần số f_i và biên độ đầu vào A_i tạo ra một tập các đồ thị như được cho ở hình 12.12(b). Lưu ý rằng, các đồ thị này cho thấy một cách rõ ràng bản chất phụ thuộc vào tần số của đáp ứng của các thiết bị phi tuyến.



Hình 12.12: Minh họa mô hình AM-AM lựa chọn tần số

Hai mô hình được dùng để giải thích cho tính phụ thuộc tần số của thiết bị phi tuyến là mô hình của Paza và mô hình của Saleh. Cả hai mô hình này đều cố gắng tạo ra các phép đo tone quét và công suất bước chính xác nhất ở mức có thể.

Mô hình Poza

Mô hình mô phỏng đơn giản đặc tính hóa các phép đo giống như hình 12.12(b) được rút ra bởi Poza trên cơ sở các giả định sau:

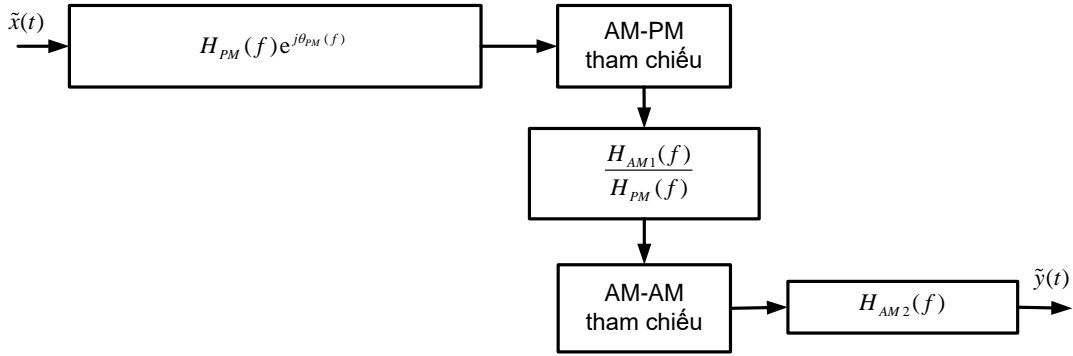
1. **AM-AM:** Các đường cong AM-AM đối với các tần số khác nhau có dạng giống nhau, mọi đường cong sẽ là sự kết hợp của các chuyển dịch theo trục đứng và trục ngang của các đường cong khác.

2. **AM-PM:** Các đường cong AM-PM này đối với các tần số khác nhau cũng có dạng giống nhau, mỗi đường cong là kết hợp của sự dịch theo trục đứng và trục ngang của các đường cong khác.

Mô hình này yêu cầu một thủ tục phù hợp hóa đường cong để làm phù hợp họ các đường cong đối với dữ liệu AM-AM, AM-PM sao cho mỗi phần tử của họ đường cong đó là một phiên bản được dịch của phần tử khác thuộc họ đường cong đó (lưu ý chuyển dịch cả trục đứng và ngang).

Trước hết, ta xét cách thực hiện mô hình mô phỏng AM-AM chọn lọc tần số. Bước đầu tiên là chọn một đường cong trong họ AM-AM làm thiết bị phi tuyến "*tham chiếu*" tại tần số tham chiếu f_c . Theo đường cong này, có thể tìm được đáp ứng AM-AM tại tần số f_l bằng cách dịch chuyển theo chiều ngang $\Delta G_1 + \Delta g_1$. Việc dịch chuyển theo chiều ngang tương ứng với việc khuếch đại (hoặc suy hao) *tín hiệu vào* của thiết bị phi tuyến chuẩn tại tần số f_l và sự dịch chuyển theo chiều dọc ΔG_1 tương ứng với khuếch đại (hoặc suy hao) *đầu ra* của thiết bị phi tuyến tiêu chuẩn tại tần số f_l . Những điều này có thể thực hiện được bởi 2 bộ lọc FIR, một ở trước và một ở sau thiết bị phi tuyến tham chiếu có các đáp ứng biên độ $H_{AM1}(f)$ và $H_{AM2}(f)$. Theo đó, mô hình AM-AM có thể thực hiện như hình 12.12.

Mô hình tương tự và việc thực thi có thể được rút ra cho đáp ứng AM-PM. Mô hình này gồm một bộ lọc đầu vào có đáp ứng biên độ $H_{PM}(f)$ ở trước thiết bị phi tuyến tham chiếu AM-PM và một đáp ứng pha $e^{j\theta_{PM}(f)}$ theo sau đầu ra. Có thể kết hợp mô hình AM-AM, AM-PM thành một mô hình như hình 12.13. Phần AM-PM ở phía trước phần AM-AM, và độ lệch (biên độ) đầu vào do mô hình AM-PM gây ra phải được "làm mất" trước mô hình AM-AM sao cho mức công suất đưa vào phần AM-AM của mô hình là giống với mức công suất ở tín hiệu đầu vào $\tilde{x}(t)$.



Hình 12.13: Mô hình AM-AM và AM-PM (được kết hợp) lựa chọn tần số

Mô hình Saleh

Một giải pháp hơi khác để mô hình hóa các thiết bị phi tuyến có nhớ được Saleh đề xuất. Mô hình này đạt được từ mô hình cầu phương không nhớ được cho trong (12.44) và (12.45) bằng cách làm cho các hệ số phụ thuộc tần số. Ta có:

$$S_d(A) = \frac{\alpha_p(f)A}{1 + \beta_p(f)A^2} \quad (12.67)$$

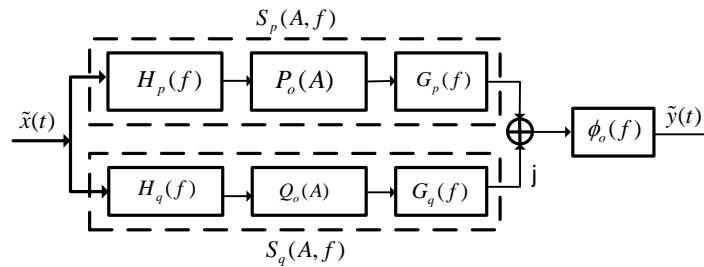
$$S_q(A) = \frac{\alpha_q(f)A^3}{[1 + \beta_q(f)A^2]^2} \quad (12.68)$$

Tìm được các hệ số từ các phép đo tại các tần số khác nhau bằng cách sử dụng phù hợp hóa bình phương nhỏ nhất. Việc thực thi thực tế mô hình được cho ở hình 12.14. Các hàm được minh họa trong hình 12.14 được định nghĩa như sau: $\phi_o(f)$ là đáp ứng pha tín hiệu nhỏ.

$$H_p(f) = \sqrt{\beta_p(f)}; \quad H_q(f) = \sqrt{\beta_q(f)}; \quad P_o = A/(1 + A^2); \quad G_p(f) = \alpha_p(f)/\sqrt{\beta_p(f)};$$

$$G_q(f) = \alpha_q(f)/\sqrt{\beta_q^{3/2}(f)}; \quad Q_o(A) = A^3/[1 + A^2]^2 T$$

Lưu ý rằng, mô hình Saleh và mô hình Poza bắt đầu với các giả định khác nhau và có cấu hình khác nhau. Chúng đều có dạng " mô hình sơ đồ khối" được thiết kế để tái tạo một tập các phép đo cụ thể. Cả hai mô hình này đều có cấu trúc phức tạp hơn các mô hình thiết bị phi tuyến không nhớ. Sự tăng tính phức tạp là do dùng các thủ tục có tính kinh nghiệm để làm phù hợp các tham số mô hình với dữ liệu đo được.



Hình 12.14: Mô hình cầu phương của Saleh cho thiết bị phi tuyến có nhớ

12.3.2. Các mô hình khác

Mặc dù phức tạp, nhưng các mô hình được mô tả trong phần trước không có khả năng bắt giữ tính cách của thiết bị phi tuyến khi đầu vào chứa tổng của nhiều sóng mang điều chế, bởi lẽ chúng được rút ra dựa trên các phép đo 1 sóng mang đường bao không đổi. Do tính chất xếp chồng không áp dụng được cho hệ thống phi tuyến, nên không thể đặc tính hóa tính cách với đầu vào nhiều sóng mang dựa trên các phép đo một tần số. Dĩ nhiên, thật khó để tạo ra các phép đo đa sóng mang cho nhiều kết hợp của các mức công suất và các tần số đầu vào. Số lượng các kết hợp này sẽ quá lớn khi số các sóng mang nhiều.

Một vài giải pháp khác, một trong số đó là xấp xỉ tính cách của thiết bị phi tuyến sử dụng một sóng mang điều chế với chuỗi giả ngẫu nhiên PN làm đầu vào. Đầu vào này xấp xỉ như một tổng của số lượng lớn các sóng mang có mật độ phổ công suất đồng đều ít hoặc đồng đều nhiều (lưu ý rằng, bằng giải pháp này, thì các thành phần phổ đầu vào được tạo ra bởi tín hiệu điều chế). Bằng cách thay đổi công suất tại đầu vào, dùng các phép đo để đặc tính hóa tính cách của thiết bị phi tuyến dưới điều kiện đầu vào (xấp xỉ như trường hợp đầu vào đa sóng mang). Mô hình kết quả có hàm truyền đạt dạng $H(f,p)$ trong đó P là mức công suất vào.

Một giải pháp thông dụng hơn đã được đề xuất để mô hình hóa và phân tích thiết bị phi tuyến có nhớ là sử dụng chuỗi Volterra. Quan hệ vào/ra trong miền thời gian được cho bởi:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \quad (12.69)$$

Trong đó:

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1, \dots, \tau_k) x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k \quad (12.70)$$

Mô hình đáp ứng trong miền thời gian được cho trong (12.70) giả thiết rằng hệ thống không có đáp ứng với thành phần một chiều hoặc không đổi trong đầu ra. Lưu ý rằng, mô hình giống với mô hình chuỗi mũ. Tuy nhiên, mỗi thành phần trong chuỗi Volterra là tích chập k lần (không phải là mũ thứ k) tín hiệu vào với đáp ứng xung $h(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ k lần. Có thể rút ra phiên bản tương đương thông thấp của mô hình nhưng rất phức tạp.

12.4. Kỹ thuật giải phương trình vi phân phi tuyến NLDE

Ta biết rằng, có thể mô hình hóa hệ thống phi tuyến có nhớ bằng phương trình vi phân phi tuyến NLDE, và có thể mô phỏng hệ thống bằng cách thực hiện tích phân rời rạc thời gian thay cho tích phân liên tục thời gian. Ta cũng biết rằng, 2 giải pháp mô phỏng hệ thống được mô tả bởi phương trình vi phân: (i) Phương pháp *sơ đồ khối*, trong đó sơ đồ khối hệ thống được xây dựng bằng các khối cơ bản gồm một vài các khối phi tuyến không nhớ đơn giản hơn, các bộ tích phân, bằng cách mô phỏng mô hình sơ đồ khối của hệ thống phi tuyến đó tìm được nghiệm; (ii) Rút ra phương trình vi phân phi tuyến kiểm soát tính cách động của PLL và giải NLDE bằng cách sử dụng các thủ tục đệ quy, phương pháp này được hiểu như phương pháp *trực tiếp*, sẽ chính xác và ổn định hơn trong thời gian một mẫu cho trước. Tuy nhiên, cần có

một số nỗ lực để triển khai mô hình và thực hiện giải pháp này, và các nỗ lực đó phải được lặp lại cho mỗi hệ thống phi tuyến mới.

Mọi giải pháp đều dẫn đến cùng kết quả khi thời gian mẫu hay thời gian bước mô phỏng là nhỏ. Tuy nhiên, nếu ta muốn bước thời gian lớn để giảm tải tính toán, thì mô hình trực tiếp sử dụng kỹ thuật nghiệm kích cỡ bước khả biến sẽ rất hiệu quả. Kích cỡ bước thường được chọn tự động bởi phương pháp nghiệm tùy vào tính cách của NLDE cơ bản. Trong các vùng nơi nghiệm thể hiện tốt, ta có thể dùng bước thời gian lớn để tiết kiệm thời gian mô phỏng. Tuy nhiên, cần một vài phép nội suy nếu các khối kế tiếp nhau yêu cầu các mẫu cách đều nhau.

Khi vòng khóa pha PLL được mô phỏng bởi chính nó, yêu cầu về bước thời gian sẽ được xác định bởi "độ rộng băng thông của vòng". Nếu PLL được mô phỏng cùng các thành phần khác của máy thu, thì tốc độ lấy mẫu cho phần còn lại của máy thu sẽ được kiểm soát bởi tốc độ dữ liệu R. Ở dạng tổng quát, R sẽ lớn hơn rất nhiều so với độ rộng băng thông của vòng và do đó bước thời gian tương xứng với tốc độ dữ liệu R sẽ nhỏ hơn rất nhiều bước thời gian để mô phỏng chính xác chính PLL đó. Khi này, ta nên sử dụng mô phỏng đa tốc độ, trong đó dùng các bước thời gian khác nhau cho các phần khác nhau của hệ thống.

Mục đích của phần này là mô phỏng hệ thống phi tuyến có nhớ sử dụng nghiệm đệ quy của NLDE cơ bản. Ta sử dụng PLL đã được đề cập ở chương 6 làm ví dụ để minh họa cho phương pháp luận.

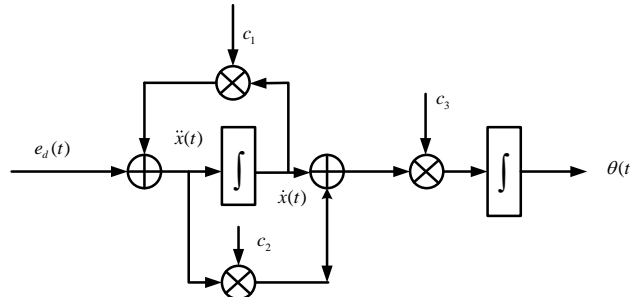
12.4.1. Dạng vector trạng thái của NLDE

Tồn tại nhiều tài liệu về phương pháp số để giải phương trình vi phân phi tuyến. Từ quan điểm mô phỏng, các kỹ thuật được thực hiện ở dạng đệ quy là hấp dẫn nhất trên cả hai phương diện cấu trúc và tính toán. Với phương trình vi phân phi tuyến bậc m , nghiệm đệ quy trong miền thời gian thường dẫn đến sử dụng phương pháp biến trạng thái trong đó các phương trình hệ thống được biểu diễn ở dạng

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) \quad (12.71)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{X}(t) \quad (12.72)$$

Trong đó \mathbf{X} là vector trạng thái kích thước $m \times 1$, \mathbf{U} & \mathbf{Y} là vector vào/ra tương ứng, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} là các ma trận hằng số định nghĩa hệ thống, và m là bậc của hệ thống.



Hình 12.15: Biểu diễn bộ lọc vòng và định nghĩa các biến trạng thái cho mô hình NLDE của PLL

Để áp dụng kỹ thuật này cho PLL, xét quan hệ giữa $e_d(t)$ và pha đầu ra $\theta(t)$ của VCO (như được cho ở hình 12.15). Đây là phân tuyến tính của hệ thống, từ hình 12.15 quan hệ giữa $e_d(t)$ và $\theta(t)$ được xác định bởi:

$$\theta(t) = \int c_3 [\dot{x}(t) + c_2 \ddot{x}(t)] dt = c_3 x(t) + c_2 c_3 \dot{x}(t) \quad (12.73)$$

$$\ddot{x}(t) = e_d(t) + c_1 \dot{x}(t) \quad (12.74)$$

Từ định nghĩa về $e_d(t)$ và (12.73):

$$e_d(t) = \sin[\phi(t) - \theta(t)] = \sin[\phi(t) - c_2 c_3 \dot{x}(t) - c_3 x(t)] \quad (12.75)$$

Thay vào (12.74) cho ta phương trình vi phân:

$$\ddot{x}(t) = \sin[\phi(t) - c_2 c_3 \dot{x}(t) - c_3 x(t)] + c_1 \dot{x}(t) \quad (12.76)$$

Từ hình 6.3 và (6.25) [xem chương 6] ta biết rằng:

$$\Theta(s) = G \frac{I}{s} \frac{s+a}{s+\lambda a} E_d(s) \quad (12.77)$$

Và từ hình 12.15 ta có:

$$\Theta(s) = \frac{c_3}{s} \frac{s c_2 + I}{s - c_1} E_d(s) = c_2 c_3 \frac{I}{s} \frac{s + \frac{c_2}{c_3}}{s - c_1} E_d(s) \quad (12.78)$$

Từ đó, nhận được:

$$c_1 = -\lambda a, \quad c_2 = \frac{I}{a}, \quad c_2 c_3 = G, \quad c_3 = aG \quad (12.79)$$

Tại đây, nếu ta định nghĩa các biến trạng thái là:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) \end{aligned} \quad (12.80)$$

Từ (12.76), ta có thể viết phương trình vi phân phi tuyến NLDE ở dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin[\phi(t) - c_2 c_3 x_2(t) - c_3 x_1(t)] + c_1 x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \phi) \\ f_2(x_1, x_2, \phi) \end{bmatrix} \quad (12.81)$$

Lưu ý rằng, NDLE cũng có thể được biểu diễn là:

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}, t, \mathbf{U}) \quad (12.82)$$

Trong đó \mathbf{X} là vectơ kích cỡ m , và F là một hàm vectơ phi tuyến với m thành phần và \mathbf{U} là vectơ đầu vào mà trong ví dụ này là vô hướng $\phi(t)$.

Tổng quát, ta có thể chuyển NLDE bậc m thành một tập m phương trình vi phân phi tuyến NLDE bậc 1 đồng thời, nó có dạng giống với dạng biến trạng thái của các phương trình

vi phân tuyến tính bậc m. Đến đây, ta xét các phương pháp giải các phương trình vi phân bậc một đồng thời (nghĩa là vector), bắt đầu bằng phương trình vi phân bậc một vô hướng.

12.4.2. Nghiệm đệ qui của NLDE - Trường hợp vô hướng

Các kỹ thuật hiện

Xét phương trình vi phân bậc một dạng:

$$\dot{x}(t) = f(x, t, u) \quad (12.83)$$

Với điều kiện đầu $x(t_0)$, x_n là nghiệm đạt được bằng tích phân số tại bước thời gian t_n (ta sẽ dùng ký hiệu $x(t_n)$ là nghiệm chính xác là ẩn số chưa biết, và dùng ký hiệu x_n là nghiệm xấp xỉ đạt được bằng cách tích phân số).

Hầu hết các phương pháp tích phân số để giải các phương trình vi phân phi tuyến (hoặc tuyến tính) đều dựa trên khai triển chuỗi Taylor. Ví dụ, xét khai triển chuỗi Taylor (hoặc một số các chuỗi khác) dạng:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n + h_n) = x(t_n) + h_n \dot{x}(t_n) + T(h_n) \quad (12.84)$$

Tong đó h_n là bước thời gian $t_{n+1} - t_n$, và T là lỗi nội bộ hay phần dư được cho bởi:

$$T(t_n) = h_n^2 \ddot{x}(\xi)/2, \quad t_n \leq \xi \leq t_{n+1} \quad (12.85)$$

Nếu h_n đủ nhỏ, thì ta có thể đạt được một nghiệm đệ qui cho phương trình vi sai bậc 1:

$$x_{n+1} = x_n + h_n \dot{x}_n = x_n + h_n f_n \quad (12.86)$$

$$f_n = f(x_n, t_n, u(t_n)) \quad (12.87)$$

Đệ qui có thể được bắt đầu với điều kiện đầu $x(t_0) = x_0$. Có thể rút ra một phiên bản đơn giản hơn của nghiệm hồi qui với kích thước bước thời gian cố định h là:

$$x_{n+1} = x_n + h \dot{x}_n = x_n + h f(x_n, t_n, u(t_n)) \quad (12.88)$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (12.89)$$

Các phương trình (12.88) và (12.89) định nghĩa phương pháp tích phân Euler.

Bằng cách tính đến các đạo hàm bậc cao hơn trong chuỗi Taylor, ta có thể rút ra được các công thức tính tích phân chính xác hơn. Ví dụ, tích phân "bậc 2" có thể được rút ra bằng cách bắt đầu từ:

$$x_{n+1} = x_n + h \dot{x}_n + \frac{1}{2} h^2 \ddot{x}_n \quad (12.90)$$

Sử dụng phép xấp xỉ cho đạo hàm bậc 2:

$$\ddot{x}_n \approx \frac{\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}}{h} = \frac{f(x_n, t_n, u(t_n)) - f(x_{n-1}, t_{n-1}, u(t_{n-1}))}{h} = \frac{f_n - f_{n-1}}{h} \quad (12.91)$$

Ta được tích phân Adam–Bashforth bậc 2:

$$x_{n+1} = x_n + hf_n + h^2 \frac{f_n - f_{n-1}}{2h} = x_n + \frac{h(3f_n - f_{n-1})}{2} \quad (12.92)$$

Một lớp các phép tích phân tương tự là các phương pháp Runge-Kutta. Một trong những công thức được sử dụng rộng rãi nhất của R-K là công thức bốn tầng kinh điển:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)}{6} \quad (12.93)$$

Trong đó:

$$k_1 = f(x_n, t_n, u(t_n)) \quad (12.94)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{hk_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}, u\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) \quad (12.95)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{hk_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}, u\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) \quad (12.96)$$

$$k_4 = f\left(x_n + hk_3, t_n + h, u\left(t_n + h\right)\right) \quad (12.97)$$

Cả ba phương pháp mô tả trên đều được gọi là các phương pháp hiện, vì để qui được thực hiện một cách hiện, sử dụng các giá trị nghiệm và giá trị đạo hàm đạt được tại các bước thời gian trước.

Các kỹ thuật ẩn

Một lớp các kỹ thuật nghiệm khác được gọi là các kỹ thuật ẩn cho ta các nghiệm chính xác và ổn định hơn nhưng lại tăng khối lượng tính toán. Trong các kỹ thuật ẩn, nghiệm tại bước thời gian t_{n+1} không chỉ bao gồm các đại lượng được tính toán ở bước thời gian trước t_n mà còn bao gồm các đại lượng được tính toán tại bước thời gian hiện hành t_{n+1} . Điều này cần có nghiệm của một phương trình đại số phi tuyến tại mỗi bước thời gian.

Một kỹ thuật ẩn rất phổ biến và rất đơn giản là phép tích phân hình thang được cho bởi:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[\dot{x}_n + \dot{x}_{n+1}] = x_n + \frac{h}{2}[f(x_n, t_n, u(t_n)) + f(x_{n+1}, t_{n+1}, u(t_{n+1}))] \quad (12.98)$$

Đây chỉ là một sự xấp xỉ các diện tích hình thang trong tổng Reiman của tích phân (ta đã đề cập tích phân này ở chương 5). Thấy rõ từ phương trình trên, x_{n+1} đều xuất hiện ở cả 2 vế của phương trình thể hiện tính ẩn và ta phải giải phương trình phi tuyến (12.98) để tìm x_{n+1} , trong khi đó với phương pháp hiện x_{n+1} không xuất hiện trong hàm phi tuyến $f(\cdot)$ ở vế phải, và vì vậy ta có thể thấy nghiệm.

Tồn tại nhiều phương pháp ẩn khác ngoài phương pháp hình thang. Ví dụ về kỹ thuật ẩn, ta xét phương pháp Adam-Moulton bậc 3 trên cơ sở khai triển chuỗi Taylor:

$$x(t_{n+1}) \approx x_n + h\dot{x}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{x}_n + \frac{h^3}{6}\dddot{x}_n \quad (12.99)$$

Với phép xấp xỉ đối xứng cho các đạo hàm:

$$\dot{x}_n = f(x_n, t_n, u(t_n)) = f_n \quad (12.100)$$

$$\ddot{x}_n = \frac{\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_{n-1}}{2h} \quad (12.101)$$

$$x_n = \frac{\dot{x}_{n+1} - 2\dot{x}_n + x_{n-1}}{h^2} \quad (12.102)$$

Thế các phương trình này vào (12.99), ta được công thức tích phân Adam-Moulton "hai bước":

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})}{12} \quad (12.103)$$

Công thức tích phân A-M trên cho thấy hai vấn đề chính với các kỹ thuật ẩn bậc cao hơn là: điều kiện đầu, và giải phương trình phi tuyến tại mỗi bước thời gian Theo đó: (i) Khi áp dụng đệ quy được cho bởi (12.103) để tìm x_1 ta cần có x_0 và \dot{x}_0 . Trong khi điều kiện đầu x_0 đã được cho, thì \dot{x}_0 thường không có sẵn. Để tránh vấn đề này, ta bắt đầu lặp tại $n+1 = 2$, bằng cách dùng giá trị của x_1 , nó có thể được tính toán dùng phương pháp hiện như phương pháp R-K; (ii) Xuất hiện khó khăn thứ 2 vì x_{n+1} xuất hiện ở vế phải bên trong hàm (phi tuyến) f , vì vậy nghiệm x_{n+1} sẽ yêu cầu nghiệm số của phương trình ẩn (12.103). Ta trình bày hai phương pháp lặp để giải quyết vấn đề này.

Nghiem ẩn sử dụng phương pháp dự đoán-hiệu chỉnh

Ý tưởng của phương pháp dự đoán-hiệu chỉnh (P-C) là: (i) Trước tiên tìm một giá trị dự đoán cho x_{n+1} bằng kỹ hiện như phương pháp R-K hay phương pháp A-B (cùng bậc như phương pháp A-M) và sử dụng kết quả dự đoán (ước tính) của x_{n+1} này vào vế phải phương trình (12.103) tìm giá trị hiệu chỉnh (được cải thiện) của x_{n+1} ; (ii) Sau đó ta lại tiến hành với $n + 2$. Để cải thiện độ chính xác của nghiệm, ta có thể sử dụng kỹ thuật lặp tại mỗi bước thời gian và lặp lại phương pháp dự đoán-hiệu chỉnh nhiều lần. Tại đây, (12.103) được biến đổi thành:

$$x_{n+1}^{r+1} = x_n + \frac{h(5f_{n+1}^r + 8f_n - f_{n-1})}{12}, r = 1, 2, 3, \dots \quad (12.104)$$

Trong đó, r là chỉ số lặp. Lặp được bắt đầu bằng việc sử dụng giá trị dự đoán x_{n+1}^1 của x_{n+1} (được thông qua phương pháp hiện) trong vế phải của (12.104) để tạo giá trị tiếp theo trong bước lặp x_{n+1}^2 , sau đó giá trị này lại được sử dụng cho vế phải của (12.104) để đạt được giá trị được cải thiện tiếp theo và cứ như vậy cho đến khi lặp hội tụ. [Lưu ý rằng, x_{n+1}^{r+1} là giá trị của x_{n+1} được lặp lần thứ $(r+1)$ chứ không phải là số mũ $(r+1)$ của x_{n+1}]

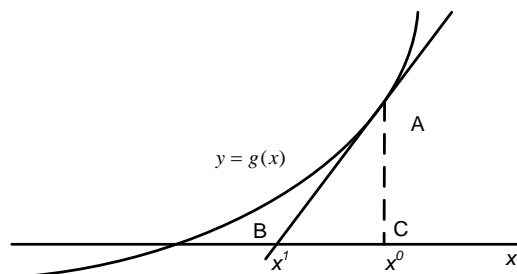
Nghiem ẩn sử dụng phương pháp Newton-Raphson

Nhiều kỹ thuật khác như Newton-Raphson (N-R) để giải phương trình (12.103). Phương pháp N-R dựa vào kỹ thuật lặp để tìm nghiệm $y = g(x) = 0$, nghĩa là tìm giá trị của x sao cho $g(x) = 0$

Giải pháp lặp cho bài toán "tìm nghiệm" như sau

Tham chiếu đến hình 12.16, cắt đường cong $y = g(x)$ tại x^0 được cho bởi:

$$\dot{g}(x^0) = \frac{AC}{BC} = \frac{g(x^0)}{x^0 - x^1} \quad (12.105)$$



Hình 12.16: Kỹ thuật lặp để giải $g(x) = 0$

Sắp xếp lại phương trình trên thành:

$$x^1 = x^0 - \frac{g(x^0)}{\dot{g}(x^0)} \quad (12.106)$$

Nếu quá trình này được lặp để tạo ra chuỗi các giá trị $x^1, x^2, x^3 \dots$, bằng quan hệ truy toán:

$$x^{r+1} = x^r - \frac{g(x^r)}{\dot{g}(x^r)} \quad (12.107)$$

Thì x^r sẽ hội tụ đến giá trị 0 của hàm $g(x)$ trong các điều kiện khá đơn giản.

Kỹ thuật này có thể được áp dụng để giải (12.103) bằng cách trước hết viết nó như sau:

$$g(x_{n+1}) = x_{n+1} - x_n - \frac{h(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})}{12} = 0 \quad (12.108)$$

Và ứng dụng đệ quy được cho trong (12.107):

$$x_{n+1}^{r+1} = x_{n+1}^r - \frac{g(x_{n+1}^r)}{\dot{g}(x_{n+1}^r)} \quad (12.109)$$

Quá trình lặp cho đến khi sự khác nhau giữa các giá trị liên tiếp là nhỏ. Tìm giá trị bắt đầu x_{n+1}^1 của x_{n+1} bằng phương pháp hiện.

12.4.3. Dạng tổng quát của phương pháp đa bước

Dạng nghiệm đệ quy tổng quát của phương trình vi phân phi tuyến NLDE được biểu diễn là:

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^p a_i x_{n-i} + h \sum_{j=-1}^p b_j f_{n-j} \quad (12.110)$$

được xem là tích phân p bước và nó có thể thuộc loại hiện hoặc ẩn tùy thuộc vào $b_{-1} = 0$ (hiện) hay $b_{-1} \neq 0$ (ẩn). Bảng 12.1 tóm tắt các công thức tích phân khác nhau thường được dùng trong mô phỏng. Tìm được lỗi cắt được cho trong bảng từ lỗi cắt liên quan đến việc kết thúc khai triển chuỗi Taylor.

Bảng 12.1: Các hàm tích phân thường được dùng trong mô phỏng

Phương pháp	Các hệ số	Lỗi cắt xén
Euler tiến	$p = 0; a_0 = 1; b_{-1} = 0; b_0 = 1$ $x_{n+1} = x_n + hf_n$	$\frac{1}{2}h^2 \ddot{x}(\xi), \quad t_n \leq \xi \leq t_n + h$
Euler lùi	$p = 0; a_0 = 1; b_{-1} = 0; b_0 = 1$ $x_{n+1} = x_n + hf_{n+1}$	$\frac{1}{2}h^2 \ddot{x}(\xi), \quad t_n \leq \xi \leq t_n + h$
Hình thang	$p = 0; a_0 = 1; b_{-1} = \frac{1}{2}; b_0 = \frac{1}{2}$ $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[f_n + f_{n+1}]$	$\frac{1}{12}h^3 \dddot{x}(\xi)$
Adam-Bash-2	$p = 0; a_0 = 1; b_{-1} = 0; b_0 = \frac{3}{2}; b_1 = -\frac{1}{2}$ $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[3f_n - f_{n+1}]$	$\frac{5}{12}h^3 \dddot{x}(\xi)$
Adam-Moulton-2	$p = 1; a_0 = 1; b_{-1} = \frac{5}{12}; b_0 = \frac{8}{12}; b_1 = -\frac{1}{12}$ $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}[5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}]$	$\frac{1}{24}h^4 x^{(4)}(\xi)$

12.4.4. Tính chính xác và tính ổn định của phương pháp tích phân số

Tính chính xác

Lỗi cắt tại bước thời gian tỉ lệ nghịch với đạo hàm bậc cao hơn và kích thước bước h . Nếu có thể ước tính lỗi cắt cục bộ tại mỗi bước, thì có thể điều chỉnh tăng hoặc giảm kích thước bước h . Tổng quát, các phương pháp ẩn bậc cao hơn là tốt hơn vì chúng tạo ra lỗi nhỏ hơn, tuy nhiên phải giải phương trình phi tuyến tại mỗi bước. Giảm kích thước bước sẽ làm giảm lỗi cắt cục bộ đồng thời cũng tăng tốc độ hội tụ của nghiệm lặp tại mỗi bước. Giảm bước thời gian, sẽ tăng khối lượng tính toán.

Lỗi cục bộ tích lũy thành lỗi tổng. Trong khi có thể ước tính được lỗi cắt cục bộ, nhưng đáng tiếc, không có sẵn các thủ tục chung để khống chế sự tăng lỗi tổng. Vì vậy, hầu hết các phương pháp dựa vào ước tính lỗi cắt cục bộ và giảm kích cỡ bước khi cần thiết.

Tính ổn định

Tính ổn định đánh giá mức độ nghiệm đệ qui hội tụ đến nghiệm đúng. Tính ổn định phụ thuộc vào bài toán cụ thể và phương pháp tích phân, thực tế thường nghiên cứu tính ổn định của các phương pháp tích phân bằng cách dùng một bài toán kiểm tra đơn giản như:

$$\dot{x} = \lambda x$$

Trong đó nghiệm được biết là:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Nếu $\text{Re}(\lambda) < 0$, thì nghiệm giá trị thực xu hướng tiến đến 0 khi $t \rightarrow \infty$. Với trường hợp kiểm tra này, tích phân được nói là ổn định nếu nghiệm đệ quy hội tụ tới 0 khi $n \rightarrow \infty$.

Trong khi dễ dàng nghiên cứu tính ổn định của các phương pháp tích phân đối với trường hợp kiểm tra đơn giản, thì khó mà đưa ra các kết luận chung về tính ổn định của một phương pháp khi ứng dụng vào một phương trình vi phân phi tuyến tùy ý. Thông thường phương pháp ẩn có thuộc tính ổn định tốt hơn phương pháp hiện.

Thật khó để bám lỗi cắt và tính ổn định của nghiệm NLDE, vì việc bám lỗi cắt đòi hỏi phải biết các đạo hàm bậc cao hơn, và việc phân tích tính ổn định cần phải biết nghiệm phương trình đặc trưng của phiên bản NLDE đã được tuyến tính hóa tại lân cận t_n . Trong quá trình mô phỏng, một phương pháp khám phá được dùng gồm việc so sánh các nghiệm để có được các bước thời gian h và $h/2$. Nếu lỗi ước tính liên quan với cả hai bước thời gian này nằm trong các giới hạn cụ thể, thì nghiệm được chấp nhận. Nếu không, phải xác định lại bước thời gian và quá trình mô phỏng được lặp lại. Phương pháp này kiểm soát được lỗi cắt và tính ổn định.

Giữa các kỹ thuật tích phân sẵn có, không thể nói cái nào là "tốt nhất" vì lời giải phụ thuộc vào bài toán được xét, tính chính xác, kiểu đầu ra, và khối lượng tính toán. Luật hình thang, phương pháp R-K bậc 4, phương pháp Adam-Moulton (với dự đoán-hiệu chỉnh) là những phương pháp được sử dụng phổ biến nhất tạo ra sự dung hòa giữa độ phức tạp tính toán, tính chính xác và tính ổn định (phương pháp hình thang ít phức tạp nhất). Vì các phần tử phi tuyến biểu lộ giống như PLL, nên một trong các phương pháp này có kích thước bước nhỏ (bội số 8 mẫu/1 Hz của độ rộng băng tần) cho ta nghiệm khá chính xác và ổn định.

12.4.5. Nghiệm của NLDE bậc cao hơn - Trường hợp Vector

Nếu mô hình phương trình vi phân phi tuyến NLDE bậc m , thì có thể chuyển nó thành m phương trình vi phân bậc một đồng thời (như được mô tả phần 12.4.1), ở dạng vecto là:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{U})$$

Trong đó, \mathbf{X} , \mathbf{U} là các vecto kích cỡ $m \times 1$. Nghiệm lặp đa bước của NLDE vecto có cùng dạng như trường hợp vô hướng và được cho bởi:

$$X_{n+1} = \sum_{i=0}^p a_i X_{n-i} + \sum_{j=-1}^p b_j \dot{X}_{n-j} = \sum_{i=0}^p a_i X_{n-i} + \sum_{j=-1}^p b_j F_{n-j}$$

Trong đó a_i , b_j là các hằng số vô hướng được cho trong bảng 12.1.

Với phương pháp ẩn, tại mỗi bước phải giải một tập các phương trình phi tuyến đồng thời. Khi này, có thể dùng phương pháp dự đoán-hiệu chỉnh hoặc phương pháp N-R. Dạng vecto của phương pháp N-R được cho bởi:

$$G(X_{n+1}) = X_{n+1} - \sum_{i=0}^p a_i X_{n-i} + \sum_{j=-l}^p b_j F_{n-j} \quad (12.111)$$

$$X_{n+1}^{r+1} = X_{n+1}^r - J^{-l}(X_{n+1}^r).G(X_{n+1}^r), \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (12.112)$$

Trong đó, thực thể thứ (i, j) trong ma trận Jacobian $m \times m$, $J(.)$ được định nghĩa là:

$$[J(X_{n+1}^r)]_{i,j} = \frac{\partial g_i(X_{n+1}^r)}{\partial x_j} \quad (12.113)$$

Tìm giá trị bắt đầu X_{n+1}^l của X_{n+1} bằng phương pháp hiện. Tại mỗi bước thời gian t_{n+1} , thực hiện lặp (chỉ số lặp r) cho đến khi sự khác nhau các nghiệm lặp là nhỏ. Sau đó, tăng chỉ số thời gian lên t_{n+2} , tìm giá trị khởi đầu X_{n+2}^l của X_{n+2} bằng phương pháp hiện, sau đó tìm nghiệm lặp cho X_{n+2} . Quá trình lặp lại cho đến khi chỉ số thời gian tiến đến thời điểm dừng mô phỏng.

12.5. Mô phỏng PLL minh họa thiết bị phi tuyến

Tại đây, ta trở lại bài toán PLL trong chương 6 và minh họa việc mô phỏng PLL sử dụng một vài kỹ thuật tích phân đã được trình bày ở trên. Dùng các kỹ thuật được định xác định ở dạng bài toán PLL trong các phần dưới đây.

Phương pháp Euler tiến (phương pháp hiện)

Xác định các phương trình như sau:

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (12.114)$$

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + hx_{2,n} \quad (12.115)$$

$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + h \left[\sin(\phi_n - c_1 x_{2,n} - c_2 x_{1,n}) + c_3 x_{2,n} \right] \quad (12.116)$$

Phương pháp Euler lùi (phương pháp ẩn với dự đoán-hiệu chỉnh)

Bộ dự đoán được định nghĩa bởi:

$$x_{1,n+1}^l = x_{1,n} + hx_{2,n} \quad (12.117)$$

$$x_{2,n+1}^l = x_{2,n} + h [\sin(\phi_n - c_1 x_{2,n} - c_2 x_{1,n}) + c_3 x_{2,n}] \quad (12.118)$$

Bộ hiệu chỉnh được định nghĩa bởi:

$$x_{1,n+1}^{r+1} = x_{1,n}^r + hx_{2,n}^r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (12.119)$$

$$x_{2,n+1}^{r+1} = x_{2,n} + h \left[\sin(\phi_{n+1} - c_1 x_{2,n+1}^r - c_2 x_{1,n+1}^r) + c_3 x_{2,n+1}^r \right], \quad r = 1, 2, \dots \quad (12.120)$$

Phương pháp Euler lùi (phương pháp ẩn với các phép lặp N-R)

Bộ dự đoán giống với phương pháp Euler lùi [xem (12.117) và (12.118)]. Các phép lặp N-R cho X_{n+1} được xác định bởi:

$$X_{n+1}^{r+1} = X_{n+1}^r - J^{-l}(X_{n+1}^r).G(X_{n+1}^r) \quad (12.121)$$

Trong đó :

$$\begin{aligned} G(X_{n+1}^r) &= \begin{bmatrix} g_1(X_{n+1}^r) \\ g_2(X_{n+1}^r) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{1,n+1}^r - x_{1,n}^r - hx_{2,n+1}^r \\ x_{2,n+1}^r - x_{2,n}^r + h[\sin(\phi_n - c_1 x_{2,n}^r - c_2 x_{1,n}^r) + c_3 x_{2,n}^r] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.122)$$

Và $J^{-1}(X_{n+1}^r)$ là ma trận 2x2 :

$$J^{-1}(X_{n+1}^r) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \quad (12.123)$$

Với các phần tử :

$$e_{11} = 1 \quad (12.124)$$

$$e_{12} = -h \quad (12.125)$$

$$e_{21} = -c_2 h [\cos(\phi_{n+1} - c_1 x_{2,n+1}^r - c_2 x_{1,n+1}^r) + c_3 x_{2,n+1}^r] \quad (12.126)$$

$$e_{22} = 1 - h [c_1 \cos(\phi_{n+1} - c_1 x_{2,n+1}^r - c_2 x_{1,n+1}^r) + c_3] \quad (12.127)$$