

Chương 4

MÔ HÌNH MÔ PHỎNG THÔNG THẤP CHO TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG THÔNG DẢI

4.1. Mở đầu

Thấy rõ từ các chương trước, cần rất nhiều mẫu để tạo ra một tín hiệu RF thông dải, do đó tín hiệu thông dải RF thường không được sử dụng trong mô phỏng ở mức dạng sóng. Tín hiệu RF là tín hiệu thông dải trong đó tần số sóng mang f_c thường lớn hơn rất nhiều độ rộng băng tần B của nó. Biểu diễn thông thấp cho tín hiệu thông dải sẽ nhận được mô phỏng nhanh hơn nhiều, giảm đáng kể việc lưu trữ số liệu cũng như các yêu cầu xử lý số liệu. Việc sử dụng mô hình thông thấp cho tín hiệu và hệ thống trong mô phỏng là trọng tâm của chương này.

Ngoài ra, nếu ta chưa quen với Matlab và muốn tìm hiểu phổ và công cụ phân tích phổ cũng như khảo sát các tín hiệu và hệ thống tuyến tính bất biến, thì thông qua các bài tập ở dạng chương trình mô phỏng trên Matlab ở mức cơ bản để hiểu hơn được cho ở Phụ lục 4A, các chương trình Matlab này được thiết kế rất đơn giản cho các bài tập đơn giản.

Muốn vậy, chương này sẽ nghiên cứu lý thuyết tín hiệu và hệ thống trên cơ sở đường bao phức thông thấp của các tín hiệu và hệ thống thông dải. Động cơ của việc sử dụng đường bao phức đối với các tín hiệu và hệ thống thông dải trong mô phỏng là hiệu quả tính toán. Thông qua việc dùng đường bao phức sẽ giảm đáng kể số lượng mẫu để biểu diễn tín hiệu thông dải. Sử dụng các kỹ thuật này sẽ trực tiếp giảm đáng kể thời gian mô phỏng. Vì vậy, quá trình nghiên cứu sau này ta cố gắng mô hình hoá cho tất cả các tín hiệu và hệ thống thông dải bằng các mô hình đường bao thông thấp. Hai vấn đề cơ bản trong chương cần được lưu ý:

Vấn đề thứ nhất, triển khai các mô hình cho các tín hiệu và hệ thống trên cơ sở biểu diễn đường bao phức thông thấp của các tín hiệu thông dải và đáp ứng xung kim tương đương thông thấp của các hệ thống thông dải.

Vấn đề thứ hai, triển khai các kỹ thuật để tính toán đường bao phức thông thấp đối với đầu ra hệ thống khi biết đường bao phức thông thấp của đầu vào hệ thống và mô hình thông thấp cho hệ thống đó.

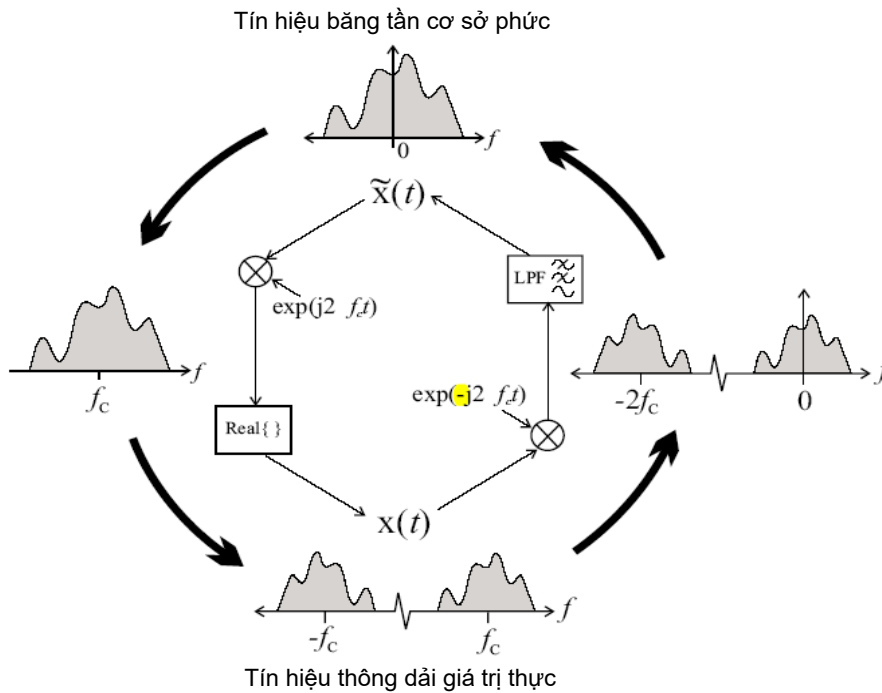
Sẽ được sáng tỏ là, mô hình đường bao phức thông thấp cho các tín hiệu thông dải được xác định theo $x_d(t)$ và $x_q(t)$ là các phần thực và phần ảo của đường bao phức thông thấp $\tilde{x}(t)$. Việc xử lý đường bao phức đầu vào hệ thống thông qua mô hình hệ thống được xác định bởi $h_d(t)$ và $h_q(t)$ thường bao gồm bốn phép tích chập thực. Có thể giảm được 2 lần số lượng tính toán cho vấn đề này nếu hàm truyền đạt của hệ thống thông dải có tính đối xứng liên hợp phức qua tần số tham chuẩn f_0 . Việc giảm tải tính toán do $h_q(t) = 0$ đối với trường hợp đối

xúng liên hợp phức. Trong nhiều trường hợp thực tế, $h_q(t) \neq 0$ nhưng ta vẫn có thể bỏ qua được khi so sánh với $h_d(t)$ (nghĩa là $h_q(t) \ll h_d(t)$). Chẳng hạn, khi một bộ lọc có băng thông nhỏ hơn rất nhiều so với tần số trung tâm, thì ta có thể bỏ qua thành phần $h_q(t)$.

Trong khi tập trung nghiên cứu cho hệ thống tuyến tính bất biến, thì thực tế tồn tại nhiều hệ thống chứa các phần tử phi tuyến hoặc phụ thuộc thời gian hoặc cả hai tính chất này. Các hệ thống này phức tạp hơn rất nhiều so với hệ tuyến tính bất biến. Ví dụ minh họa sẽ được đề cập, nó có thể được phát triển cho các mô hình mô phỏng dựa trên việc biểu diễn đường bao phức. Nhiều hệ thống phức tạp hơn được đề cập chi tiết ở chương 13 và chương 14.

4.2. Đường bao phức thông thấp cho tín hiệu thông dải

Ta sẽ xét chi tiết biểu diễn đường bao phức thông thấp của tín hiệu ngẫu nhiên và tất định thông dải trong miền thời gian và miền tần số. Hình 4.1a minh họa quan hệ giữa các tín hiệu này trong miền thời gian và tần số.



Hình 4.1(a): Các chuyển đổi tín hiệu băng tần cơ sở - tín hiệu thông dải trong miền thời gian (vòng trong) và miền tần số (vòng ngoài)

4.2.1. Đường bao phức - miền thời gian

Một tín hiệu thông dải nói chung chẳng hạn đầu ra của bộ điều chế được viết ở dạng:

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)] \quad (4.1)$$

trong đó $A(t)$ là biên độ (đường bao thực) của tín hiệu, $\phi(t)$ là độ lệch pha so với pha $2\pi f_0 t$. Trường hợp (4.1) biểu diễn đầu ra của một bộ điều chế, thì f_0 là tần số sóng mang và $2\pi f_0 t$ là pha tức thời của sóng mang không điều chế. Theo công thức Euler, (4.1) được viết là:

$$x(t) = Re \left\{ \underbrace{A(t)e^{j\phi(t)}}_{\tilde{x}(t)} e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (4.2)$$

$$\Leftrightarrow x(t) = Re \left\{ \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (4.3)$$

Đường bao phức $\tilde{x}(t)$ của tín hiệu thực $x(t)$ là:

$$\tilde{x}(t) = \underbrace{A(t)}_{\text{Đường bao thực}} e^{j\phi(t)} \quad (4.4)$$

Đường bao phức

Phương trình (4.4) là dạng cực hay dạng mũ của đường bao phức.

Ta cũng thường biểu diễn đường bao phức ở dạng:

$$\tilde{x}(t) = x_d(t) + jx_q(t) \quad (4.5)$$

Phần thực và phần ảo của đường bao phức được gọi là thành phần đồng pha (cùng hướng) và vuông pha của $x(t)$. Áp dụng công thức Euler cho (4.4) ta có:

$$\tilde{x}(t) = \underbrace{A(t)\cos\phi(t)}_{x_d(t)} + j \underbrace{A(t)\sin\phi(t)}_{x_q(t)} \quad (4.6)$$

Theo đó, ta có các thành phần đồng pha và vuông pha là:

$$x_d(t) = A(t)\cos\phi(t) \quad (4.7)$$

$$x_q(t) = A(t)\sin\phi(t) \quad (4.8)$$

Trong các ứng dụng thực tế $A(t)$ và $\phi(t)$ là hàm thông thấp có độ rộng băng tần nhỏ hơn nhiều so với f_0 . Vì vậy, $x_d(t)$ và $x_q(t)$ cũng là các tín hiệu thông thấp. Theo định nghĩa về số phức thì $A(t)$ và $\phi(t)$ quan hệ với $x_d(t)$ và $x_q(t)$ như sau:

$$A(t) = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{x_d^2(t) + x_q^2(t)} \quad (4.9)$$

$$\phi(t) = \arctan \frac{x_q(t)}{x_d(t)} \quad (4.10)$$

Sử dụng (4.3) và (4.5), tín hiệu $x(t)$ được viết là:

$$x(t) = Re \left\{ [x_d(t) + jx_q(t)] \times [\cos 2\pi f_0 t + j\sin 2\pi f_0 t] \right\} \quad (4.11)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_d(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_q(t)\sin(2\pi f_0 t) \quad (4.12)$$

Lưu ý rằng, (4.12) đã được viết bằng cách áp dụng đồng nhất lượng giác:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (4.13)$$

Cho (4.1) và xác định $x_d(t)$ và $x_q(t)$ dùng (4.7) và (4.8).

Mặc dù f_0 thường được chọn là tần số trung tâm của tín hiệu thông dải nhưng f_0 là bất kỳ và có thể chọn tùy ý cho thuận tiện. Tuy nhiên, sẽ được minh họa trong ví dụ 4.1, $x_d(t)$ và $x_q(t)$ phụ thuộc vào việc chọn f_0 . Ví dụ 4.2 minh họa trường hợp biểu diễn thông thấp cho tín hiệu FM tương tự. Ví dụ 4.3, 4.4 và 4.5 minh họa ứng dụng cho tín hiệu số, minh họa việc triển khai các mô hình mô phỏng cho các bộ điều chế số.

Ví dụ 4.1: Xét tín hiệu thông dải

$$x(t) = A \sin(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (4.14)$$

Trong đó f_c là tần số sóng mang và ϕ là độ lệch pha sóng mang. Giả sử $f_c \gg f_m$ và $x_d(t)$ & $x_q(t)$ như được định nghĩa bởi (4.3) và (4.5). Trước tiên là chọn tần số f_0 được xác định trong (4.3). Để không cho $f_0 = f_c$ ta đặt $f_c = f_0 + f_\Delta$ dẫn đến:

$$x(t) = A \sin(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta t + \phi) \quad (4.15)$$

$$x(t) = Re \left\{ \underbrace{A \sin(2\pi f_m t)}_{\tilde{x}(t)} \cdot e^{j2\pi f_\Delta t} \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (4.16)$$

Bằng cách kiểm tra, đường bao phức là:

$$\tilde{x}(t) = A \sin(2\pi f_m t) \cdot e^{j(2\pi f_\Delta t + \phi)} \quad (4.17)$$

Vì vậy:

$$\tilde{x}(t) = A \sin(2\pi f_m t) \cdot [\cos(2\pi f_\Delta t + \phi) + j \sin(2\pi f_\Delta t + \phi)] \quad (4.18)$$

Từ đó xác định được các phần thực và phần ảo (đồng pha và vuông pha) là:

$$x_d(t) = A \sin(2\pi f_m t) \cdot \cos(2\pi f_\Delta t + \phi) \quad (4.19)$$

$$x_q(t) = A \sin(2\pi f_m t) \cdot \sin(2\pi f_\Delta t + \phi) \quad (4.20)$$

Lưu ý là cả $x_d(t)$ và $x_q(t)$ đều phụ thuộc vào quan hệ giữa f_0 và f_c . Thể hiện rõ nhất nếu $f_0 = f_c$ ($f_\Delta = 0$), song như đã đề cập, chọn f_0 là tùy ý. Trong các bài toán mô phỏng ta chọn f_0 sao cho giảm thiểu khối lượng tính toán.

Ví dụ 4.2: Một bộ điều chế tín hiệu FM liên tục được định nghĩa bởi biểu thức:

$$x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_f \int_{t_0}^t m(\alpha) d\alpha + \phi(t_0)\right) \quad (4.21)$$

Trong đó, A_c và f_c là biên độ và tần số của sóng mang không điều chế, $m(t)$ là bản tin hay tín hiệu mang tin, k_f là chỉ số điều chế, t_0 là thời điểm tham chiếu bất kỳ, và $\phi(t_0)$ là độ lệch pha tại thời điểm t_0 . Giả sử, chọn thời điểm tham chiếu $t_0 = 0$ và $\phi(t_0) = 0$ thì $x_c(t)$ được biểu diễn:

$$x_c(t) = Re \left\{ \underbrace{A_c \cdot e^{jk_f \int_0^t m(\alpha) d\alpha}}_{\tilde{x}(t)} \cdot e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad (4.22)$$

Theo đó, đường bao phức là

$$\tilde{x}(t) = A_c \cdot e^{jk_f \int_0^t m(\alpha) d\alpha} \quad (4.23)$$

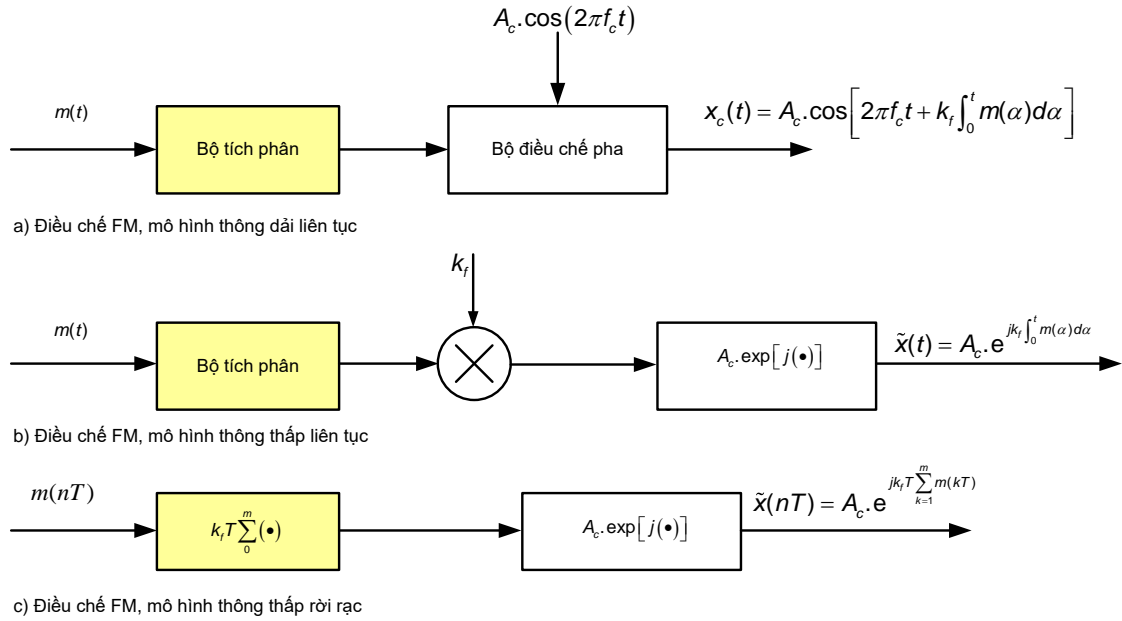
Rút ra được các thành phần đồng pha và vuông pha là

$$x_d(t) = A_c \cos \left(k_f \int_0^t m(\alpha) d\alpha \right) \quad (4.24)$$

$$x_q(t) = A_c \sin \left(k_f \int_0^t m(\alpha) d\alpha \right) \quad (4.25)$$

Vì vậy, để trình bày $x(t)$ trong mô phỏng, chỉ cần tạo 2 tín hiệu thông thấp được cho bởi (4.24) và (4.25).

Các mô hình cho bộ điều chế FM được minh hoạ trong hình 4.1(b). Hình 4.1(b)a là mô hình thông dải liên tục theo thời gian. Mô hình tín hiệu thông thấp liên tục thời gian, trong đó đầu ra là trình bày dạng đường bao thông thấp phức của $x_c(t)$ được cho ở hình 4.1(b)b. Tương đương rời rạc được minh hoạ trong hình 4.1(b)c, với chu kỳ lấy mẫu là T và n đánh chỉ số cho các mẫu. Lưu ý rằng trong mô hình thời gian rời rạc, bộ tích phân được mô hình hoá là một tích lũy (bộ lấy tổng). Điều này tương đương với tích phân chữ nhật trong đó diện tích được tích lũy trong khe thời gian thứ k là $Tm(kT)$. Các mô hình bộ tích phân khác sẽ được đề cập ở chương sau.

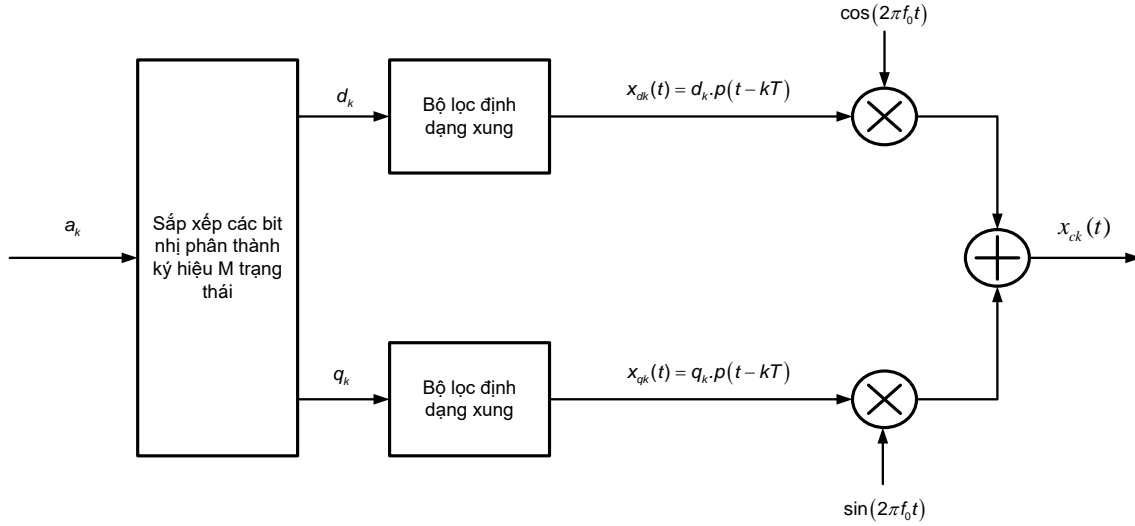


Hình 4.1(b): Các mô hình cho các quá trình điều chế FM

Xét một vài ví dụ điều chế số. Muốn vậy, cần có mô hình mô phỏng cho bộ điều chế. Mô hình cơ bản được minh họa ở hình 4.2 (Lưu ý: hình 4.2 minh họa mô hình thông dải cho đầu ra là tín hiệu thông dải $x_{ck}(x)$). Mô hình thông thấp được dùng để mô phỏng có các đầu ra $x_{dk}(t)$ và $x_{qk}(t)$ xác định đường bao phức thông thấp của $x_{ck}(t)$. Cho rằng, a_k là luồng số liệu nhị phân. Ngoài ra, tín hiệu M trạng thái, b bit mang tin được nhóm lại với nhau để tạo ra một ký hiệu số liệu do đó tín hiệu phát trong khoảng tín hiệu thứ k có thể mang nhiều hơn 1 bit thông tin. Một cách điển hình $M = 2^b$, nhưng đây không phải là giả định bắt buộc. Việc sắp xếp ký hiệu nhị phân vào M trạng thái được chỉ ra trong hình 4.2 thực hiện chức năng ghép nhóm b bit để tạo ra ký hiệu M trạng thái. Đầu ra của bộ sắp xếp là các thành phần đồng pha và vuông pha của ký hiệu thứ k. Nó được ký hiệu là d_k và q_k (ký hiệu thứ k là giá trị phức, $s_k = d_k + jq_k$).

Các ký hiệu d_k và q_k có thể được xem là hàm xung kim có các trọng số được xác định bởi sắp xếp bit vào ký hiệu. Đáp ứng xung kim của bộ lọc định dạng xung được ký hiệu là $p(t)$ do đó các tín hiệu đồng pha và vuông pha trong khoảng thời gian tín hiệu thứ k, $kT < t < (k+1)T$, là $x_{dk}(t)$ và $x_{qk}(t)$ như hình 4.2. Đầu ra của máy phát trong khoảng thời gian tín hiệu thứ k là:

$$x_{ck}(t) = x_{dk}(t)\cos 2\pi f_0 t - x_{qk}(t)\sin 2\pi f_0 t \quad (4.26)$$



Hình 4.2: Mô hình mô phỏng cho bộ điều chế số (mô hình thông dải)

Mô hình tín hiệu rời rạc thời gian tương ứng là:

$$x_{ck}(nT) = x_{dk}(nT) \cos 2\pi f_0 nT - x_{qk}(nT) \sin 2\pi f_0 nT \quad (4.27)$$

là phiên bản được mẫu của mô hình tín hiệu liên tục thời gian.

Trước khi kết thúc chủ đề này, ta xem lại một vài thuật ngữ, các *điểm tán xạ* (Scattergrams) và chỉ ra sự khác nhau giữa các điểm tán xạ khi được dùng trong tình huống mô phỏng, biểu đồ sao tín hiệu quen thuộc. Không gian tín hiệu được định nghĩa là một không gian K chiều được tạo ra bởi K hàm trực giao cơ sở $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, K$ và các tín hiệu được trình bày là các vector trong không gian này. Ví dụ: giả sử hệ thống truyền thông M trạng thái trong đó một trong số M tín hiệu được phát trong khoảng thời gian tín hiệu thứ k . Dưới dạng các hàm cơ sở trực giao, tín hiệu phát trong khoảng tín hiệu thứ k được biểu diễn:

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^K x_{im} \phi_i(t), \quad kT < t < (k+1)T, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (4.28)$$

Trong không gian tín hiệu, tín hiệu thứ m được thể hiện bởi vector:

$$\mathbf{X}_m = [x_{1m} \quad x_{2m} \quad \dots \quad x_{Km}] \quad (4.29)$$

Không gian tín hiệu được lấy tỉ lệ sao cho $|\mathbf{X}_m|^2$ biểu diễn năng lượng của tín hiệu thứ m trong tập các đầu ra máy phát có thể. Đồ thị K chiều của các điểm \mathbf{X}_m , $m = 1, 2, \dots, M$ xác định chòm sao tín hiệu.

Điểm tán xạ tương ứng với một tín hiệu là kết quả vẽ $x_q(t)$ theo $x_d(t)$ và được xác định dưới dạng đường bao phức thông thấp của một tín hiệu thông dải giá trị thực. Chiều của điểm tán xạ là một nếu $x_d(t) = 0$ hoặc $x_q(t) = 0$. Ngược lại chiều của điểm tán xạ là hai. Các ví dụ

4.3 và 4.4 minh họa điểm tán xạ và đồ thị sao tín hiệu có quan hệ chặt chẽ nhau khi $K = 2$, là trường hợp QPSK và QAM. Ta sẽ thấy trong ví dụ 4.5 quan hệ này sẽ không còn khi chiều của không gian tín hiệu vượt quá 2.

Ví dụ 4.3 (QPSK): Để tạo ra một tín hiệu QPSK, các ký hiệu số liệu a_k được tạo ra bằng cách lấy 2 ký hiệu nhị phân mỗi lần. Theo đó, mỗi ký hiệu số liệu bao gồm 1 trong các cặp nhị phân: 00, 01, 10, 11. Tín hiệu QPSK thông dải trong khoảng thời gian tín hiệu thứ k có dạng

$$x_{ck}(t) = A_c \cos(2\pi f_0 t + \phi_k), \quad kT < t < (k+1)T \quad (4.30)$$

Trong đó ϕ_k nhận một trong các giá trị $+\pi/4, -\pi/4, +3\pi/4, -3\pi/4$.

Đường bao phức tương ứng với $x_{ck}(t)$ được viết như sau:

$$\tilde{x}_{ck}(t) = Re\{A_c \cdot e^{j\phi_k}\} \quad (4.31)$$

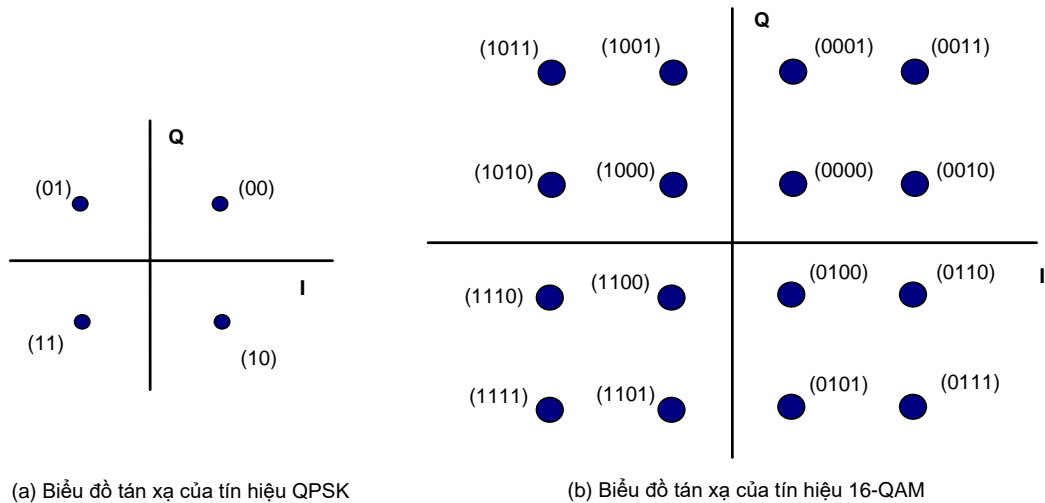
Rút ra các thành phần đồng pha và vuông pha là:

$$x_{dk}(t) = A_c \cos \phi_k \quad (4.32)$$

$$x_{qk}(t) = A_c \sin \phi_k \quad (4.33)$$

Lưu ý nếu $p(t)$ là một hằng số trong khoảng thời gian tín hiệu, thì cả $x_{dk}(t)$ và $x_{qk}(t)$ là hằng số trong khoảng thời gian của tín hiệu. Khi này $x_{dk}(t)$ và $x_{qk}(t)$ nhận 1 trong 2 giá trị. Nếu $x_{qk}(t)$ được vẽ là một hàm của $x_{dk}(t)$, thì điểm tán xạ được minh họa trong hình 4.3(a). Lưu ý là hình 4.3(a), khi này đã được lấy tỉ lệ một cách chính xác, cũng là đồ thị sao tín hiệu.

Mỗi một điểm trong đồ thị sao tín hiệu QPSK tương ứng với một cặp các ký hiệu nhị phân. Mặc dù cơ chế sắp xếp cặp bit nhị phân vào một ký hiệu QPSK là tùy ý nhưng việc sắp xếp được minh họa trong hình 4.3 thường dùng sắp xếp theo mã Gray. Trong phương pháp sắp xếp theo mã Gray, các điểm gần nhau nhất trong không gian tín hiệu chỉ khác nhau một bit nhị phân. Điều này là cần thiết, vì xác suất lỗi là hàm của khoảng cách Euclidean giữa các điểm trong không gian tín hiệu. Với cách sắp xếp trong hình 4.3, giả sử chuỗi bit là $b_1 b_2$, trong đó b_1 là bit trọng số lớn nhất và b_2 là bit trọng số nhỏ nhất. Nếu $b_2 = 0$, thì $d_k = 1$ và nếu $b_2 = 1$, thì $d_k = -1$ do vậy bit có trọng số thấp sẽ quyết định xem khi nào ký hiệu QPSK nằm bên trái hay bên phải của mặt phẳng I - Q . Theo cách tương tự, nếu $b_1 = 0$, thì $q_k = 1$ và nếu $b_1 = 1$, thì $q_k = -1$ do vậy bit có trọng số lớn sẽ quyết định xem khi nào ký hiệu QPSK là ở nửa trên hay ở nửa dưới của mặt phẳng I - Q .



Hình 4.3: (a) Biểu đồ tán xạ của các tín hiệu QPSK và (b) 16-QAM khi $p(t)$ là hằng số

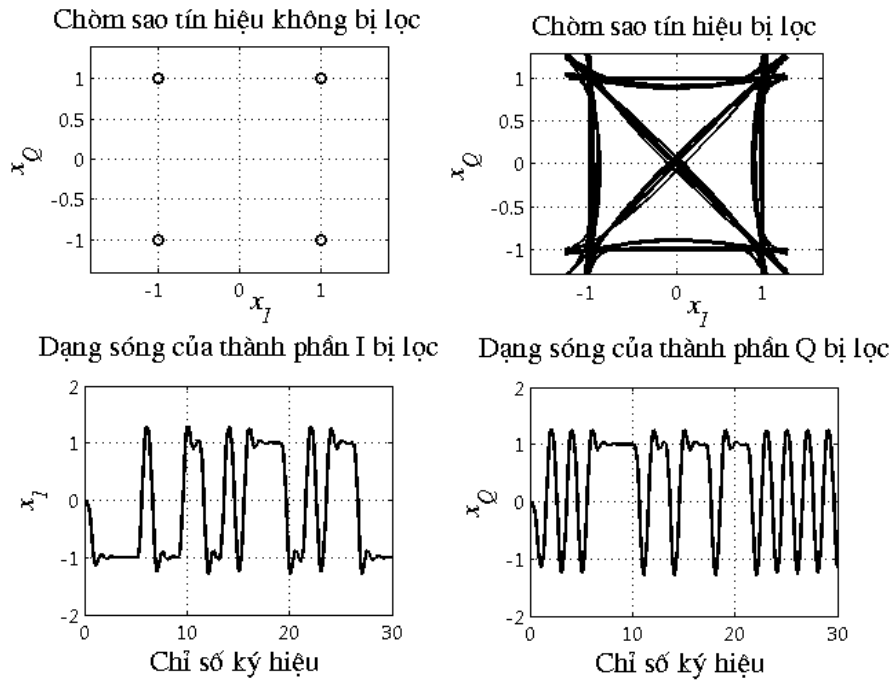
Để khảo sát điểm tán xạ QPSK khi $p(t)$ không phải hằng số và dạng sóng miền thời gian tương ứng, chương trình Matlab thực thi bài toán này được cho bởi **NVD4_qamsim.m** trong Phụ lục 4A, số mức trên trục I và trục Q được gán một cách độc lập. Với QPSK chúng đều bằng 2. Bộ lọc định dạng xung được chọn là bộ lọc Butterworth bậc sáu. Độ rộng băng của bộ lọc được dùng trong mô phỏng được ký hiệu là \mathbf{bw} , bằng tốc độ ký hiệu. Nhập các tham số tương ứng theo bảng 4.1 cho chương trình và chạy kết quả được cho ở hình 4.4.

Bảng 4.1: Các tham số đầu vào chương trình mô phỏng NVD4_qamsim.m cho QPSK

Số mức trên trục I	Số mức trên trục Q	Số ký hiệu được mô phỏng	Số mẫu trên ký hiệu	Độ rộng băng thông bộ lọc
2	2	100	20	0,1

Lưu ý: Bằng cách chọn các giá trị khác cho tập các tham số này cho phép khảo sát các ảnh hưởng của chúng lên kết quả mô phỏng. Kết quả mô phỏng cho trường hợp các giá trị này được cho ở hình 4.4

Hàng trên là đồ thị điểm tán xạ được tạo ra bằng cách vẽ $x_q(t)$ là một hàm của $x_d(t)$. Đồ thị điểm tán xạ ở góc trên bên trái có được do $p(t) = 1$, $0 \leq t < T_s$, trong đó T_s là chu kỳ ký hiệu (gấp đôi chu kỳ bit). Lưu ý mối quan hệ của đồ thị điểm tán xạ với đồ thị sao tín hiệu như trong hình 4.3. Đồ thị điểm tán xạ ở góc trên bên phải được tạo ra bằng cách cho tín hiệu này qua bộ lọc Butterworth bậc sáu. Các tín hiệu trong miền thời gian tương ứng được minh họa trong nửa dưới của hình 4.4, với $x_d(t)$ ở bên trái và $x_q(t)$ ở bên phải.



Hình 4.4: Các kết quả mô phỏng QPSK

Ví dụ 4.4: Sơ đồ khối máy phát QAM được cho ở hình 4.2. Bộ sắp xếp bit vào ký hiệu thực hiện sắp xếp nhóm 4 ký hiệu nhị phân đầu vào a_k thành một ký hiệu 16-QAM. Biểu đồ sao tín hiệu được minh họa ở hình 4.5 cùng với dãy nhị phân tương ứng cho mỗi ký hiệu 16-QAM. Cũng giống như trường hợp QPSK, việc sắp xếp các ký hiệu nhị phân thành ký hiệu 16-QAM là tùy ý nhưng việc sắp xếp này thường được xác định sao cho nhận được các kết quả mã Gray, lưu ý rằng hình 4.5 là sắp xếp mã Gray.

Trong QPSK mỗi một ký hiệu d_k và q_k nhận một trong hai giá trị là -1 hay +1. Từ hình 4.3 (b) thấy rõ cả d_k và q_k trong 16-QAM nhận một trong bốn giá trị và tồn tại trong khoảng thời gian một chu kỳ ký hiệu. Để tiện trong quá trình mô phỏng 4 giá trị được định nghĩa là: +3, +1, -1 và -3.

Chương trình mô phỏng cho ví dụ QPSK cũng được dùng cho ví dụ 16-QAM. Đối với 16-QAM, các mức trên trục I và trục Q đều là bốn mức. Bộ lọc định dạng xung là bộ lọc Butterworth bậc 6. Trong ví dụ 4.4, băng thông của bộ lọc gấp 2 lần tốc độ ký hiệu. Tham số đầu vào của chương trình Matlab cho trường hợp này theo bảng 4.2.

Bảng 4.2: Các tham số đầu vào chương trình mô phỏng NVD4_qamsim.m cho 16-QAM

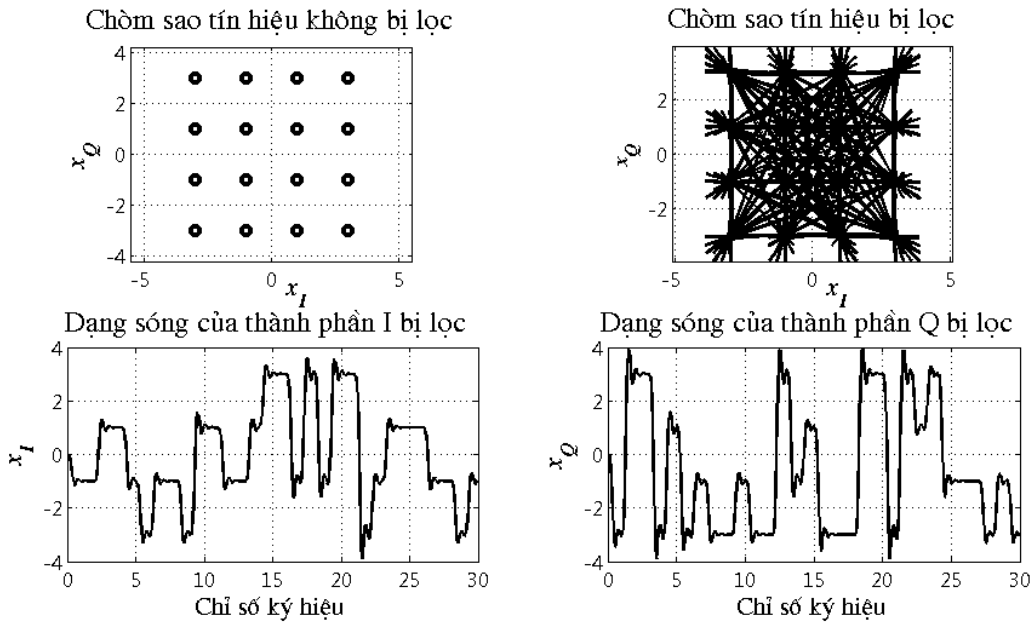
Số mức trên trục I	Số mức trên trục Q	Số ký hiệu được mô phỏng	Số mẫu trên ký hiệu	Độ rộng băng thông bộ lọc
4	4	500	20	0,2

Lưu ý: Chọn các giá trị khác cho tập các tham số này cho phép khảo sát các ảnh hưởng của chúng lên kết

quả mô phỏng. Kết quả mô phỏng trong trường hợp cụ thể này được cho ở hình 4.5

Nửa trên là đồ thị điểm tán xạ được tạo ra bằng cách vẽ đồ thị của $x_q(t)$ là hàm của $x_d(t)$. Đồ thị điểm tán xạ ở phía trên bên trái có được khi $p(t) = 1, 0 \leq t < T_s$, với T_s là chu kỳ ký hiệu (bốn lần chu kỳ bit). Lưu ý đến quan hệ giữa đồ thị điểm tán xạ và đồ thị sao trong hình 4.3 (b). Đồ thị điểm tán xạ ở phía trên bên phải được tạo ra bằng cách cho tín hiệu này qua bộ lọc Butterworth bậc 6. Tín hiệu tương ứng trong miền thời gian được minh hoạ ở hàng bên dưới của hình 4.6 với $x_d(t)$ ở góc dưới bên trái và $x_q(t)$ ở góc dưới bên phải. Có thể thấy rõ bốn giá trị (trạng thái ổn định).

Mô hình máy thu dải điều chế tín hiệu, sử dụng trong mô phỏng, tỉ số lỗi ký hiệu sẽ được ước tính. Việc ánh xạ từ tỉ số lỗi ký hiệu thành tỉ số lỗi bit có thể được thực hiện dưới dạng giải tích.



Hình 4.5: Các kết quả mô phỏng tín hiệu 16-QAM

Để tiện trình bày cho các hệ thống M-QAM, ta dùng ký hiệu A_m là các mức biên độ PAM trên các trục I và Q (hay d_k và q_k) và $b = \text{BPS}$ (Bit Per Symbol) là số bit trên một ký hiệu ứng với phương pháp điều chế cụ thể nó đánh giá hiệu quả sử dụng phổ tần của sơ đồ điều chế đó. Tạo các mức biên độ A_m cho các sơ đồ điều chế này bằng cách tạo số ngẫu nhiên phân bố đều và sắp xếp chúng thành các mức biên độ A_m trên các trục I-Q. Muốn vậy, sử dụng một bộ tạo số ngẫu nhiên để tạo ra số ngẫu nhiên phân bố đều trong khoảng (0,1), từ số ngẫu nhiên phân bố đều x này ánh xạ (sắp xếp) thành mức biên độ A_m tương ứng trên các trục I-Q (hay các mức d_k và q_k) cho các chế độ điều chế và giải điều chế BPSK; 4-QAM; 16-QAM; 64-QAM của M-QAM. Bộ sắp xếp (ánh xạ) thành mức biên độ A_m (PAM), luồng dữ liệu nhị phân trước hết được chuyển từ nối tiếp thành song song, sau đó được phân vào nhánh đồng pha (nhánh I) và

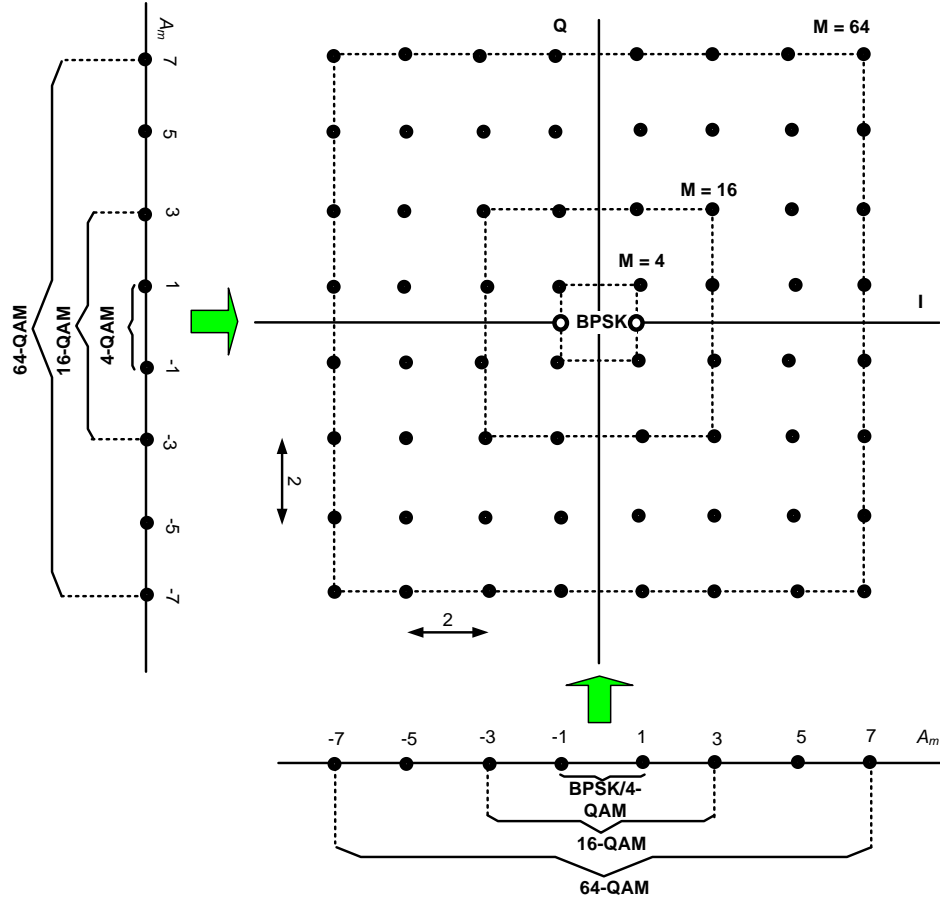
vuông pha (nhánh Q), các tổ hợp bit của các nhánh đồng pha và vuông pha này được sắp xếp thành các mức biên độ A_m tương ứng. Quá trình này được tóm tắt trong hình 4.6.

Từ số ngẫu nhiên phân bố đều x ánh xạ thành mức biên độ A_m tương ứng với chế độ điều chế của M-QAM theo nguyên tắc được cho ở bảng 4.3.

Bảng 4.3: Sắp xếp thành mức biên độ A_m

Chế độ điều chế	Quyết định mức ra theo x (đơn vị v)	Quyết định đầu ra		Ghi chú Thời gian tồn tại giá trị A_m là T_s
		Ký hiệu tin (v)	Tổ hợp bit	
BPSK	Nếu $0 < x \leq 0,5$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,5 < x$ thì quyết định đầu ra	$A_m = -1$ $A_m = +1$	0 1	$T_s = T_b$ BPS = 1
4-QAM	Nếu $0 < x \leq 0,5$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,5 < x$ thì quyết định đầu ra	$A_m = -1$ $A_m = +1$	0 1	$T_s = 2T_b$ BPS = 2 (I hoặc Q)
16-QAM	Nếu $0 < x \leq 0,25$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,25 < x \leq 0,5$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,5 < x \leq 0,75$ thì quyết định đầu ra Ngược lại thì quyết định đầu ra	$A_m = -3$ $A_m = -1$ $A_m = +1$ $A_m = +3$	00 01 10 11	$T_s = 4T_b$ BPS = 4 (I hoặc Q)
64-QAM	Nếu $0 < x \leq 0,125$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,125 < x \leq 0,25$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,25 < x \leq 0,375$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,375 < x \leq 0,5$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,5 < x \leq 0,625$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,625 < x \leq 0,75$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,75 < x \leq 0,875$ thì quyết định đầu ra Nếu $0,875 < x \leq 1$ thì quyết định đầu ra	$A_m = -7$ $A_m = -5$ $A_m = -3$ $A_m = -1$ $A_m = +1$ $A_m = +3$ $A_m = +5$ $A_m = +7$	000 001 010 011 100 101 110 111	$T_s = 6T_b$ BPS = 6 (I hoặc Q)
<p>Các mức điện áp A_m hay các tổ hợp bit trong cùng một chế độ điều chế có cùng xác suất.</p> <p>BPS là số bit trên một ký hiệu tin là tham số đánh giá hiệu năng thông lượng.</p>				

Vì thời gian tồn tại của một ký hiệu tin $T_s = \log_2(M) \times T_b = BPS \times T_b$ nên khi mô phỏng nếu lấy n mẫu/bit thì phải lấy $(n \times BPS)$ mẫu/ký hiệu.



Hình 4.6: Minh họa quá trình sắp xếp A_m

Ví dụ 4.5 (4-FSK): Trong ví dụ 4.3 và 4.4, ta sử dụng không gian tín hiệu 2 chiều do vậy việc sắp xếp từ không gian tín hiệu vào mặt phẳng I-Q là đơn giản. Tại đây ta xét một ví dụ mà các ký hiệu nhị phân được ghép nhóm với nhau thành 2 như trong QPSK, nhưng chiều của không gian tín hiệu là 4. Do vậy, không gian tín hiệu được tạo ra bằng cách dùng 4 hàm trực giao cơ sở chứ không phải là 2 hàm cơ sở như trong QPSK. Với ví dụ này, các hàm cơ sở được chọn là các sóng hình sin có tần số khác nhau (do đó gọi là 4-FSK). Đặt hàm định dạng xung $p(t)$ là hằng số A trong khoảng thời gian tín hiệu thứ k, ta có:

$$s_m(t) = A \cos(2\pi f_m t), \quad kT < t < (k+1)T, \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.34)$$

Vì vậy, trong mỗi khoảng thời gian tín hiệu, một trong bốn hình sin được phát đi. Lưu ý rằng, mỗi $s_m(t)$ phải được trải qua khoảng thời gian là một số nguyên chu kỳ sóng mang trong khoảng thời gian tín hiệu T giây để đảm bảo:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} s_i(t) \cdot s_j(t) dt = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j \quad (4.35)$$

sao cho các tín hiệu là trực giao.

Viết $s_m(t)$ ở dạng:

$$s_m(t) = A \cos[2\pi(f_m - f_0)t + 2\pi f_0 t], \quad kT < t < (k+1)T, \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.36)$$

nhận được:

$$s_m(t) = Re \left\{ \underbrace{A \cdot e^{j2\pi(f_m - f_0)t}}_{\tilde{s}_m(t)} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\}, \quad kT < t < (k+1)T, \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.37)$$

Vì vậy, đường bao phức của tín hiệu thứ m trong tập các tín hiệu phát là:

$$\tilde{s}_m(t) = A \cdot e^{j2\pi(f_m - f_0)t}, \quad kT < t < (k+1)T, \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.38)$$

Từ đó nhận được các thành phần đồng pha và vuông pha là:

$$x_{dk}(t) = A \cos[2\pi(f_m - f_0)t], \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.39)$$

$$x_{qk}(t) = A \sin[2\pi(f_m - f_0)t], \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.40)$$

Lưu ý: Mặc dù $p(t)$ là một hằng số, nhưng cả $x_q(t)$ và $x_d(t)$ đều thay đổi theo thời gian trong một khoảng thời gian tín hiệu.

4.2.2. Đường bao phức - miền tần số

Từ (4.3) ta có thể viết:

$$x(t) = \frac{1}{2} \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \tilde{x}^*(t) e^{-j2\pi f_0 t} \quad (4.41)$$

Nhân với $e^{-j2\pi f_0 t}$ ta có:

$$2x(t) e^{-j2\pi f_0 t} = \tilde{x}(t) + \tilde{x}^*(t) e^{-j4\pi f_0 t} \quad (4.42)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = 2x(t) e^{-j2\pi f_0 t} - \tilde{x}^*(t) e^{-j4\pi f_0 t} \quad (4.43)$$

Như đã thấy trong phần trước, $\tilde{x}(t)$ là một tín hiệu thông thấp (tín hiệu có phổ khác không chỉ trong vùng lân cận $f = 0$). Lấy phần thông thấp của (4.43) ta có:

$$\tilde{x}(t) = Lp \left\{ 2x(t) e^{-j2\pi f_0 t} - \tilde{x}^*(t) e^{-j4\pi f_0 t} \right\} \quad (4.44)$$

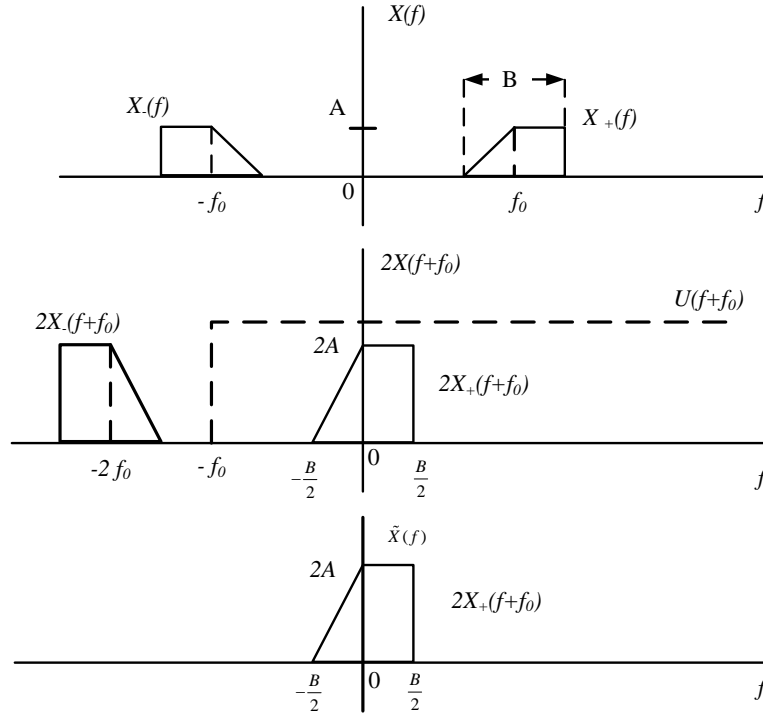
Trong đó $Lp\{\cdot\}$ ký hiệu phần thông thấp của đối số.

Biến đổi Fourier của (4.43) ta được:

$$\tilde{X}(f) = 2X(f + f_0) - \tilde{X}^*(f + 2f_0) \quad (4.45)$$

Như minh họa trong hình 4.7, $X(f)$ chỉ khác không tại các vùng tần số lân cận của $f = \pm f_0$, với $X_+(f)$ biểu diễn cho phần phổ dương của $X(f)$ và $X_-(f)$ biểu diễn cho phần

phổ âm của $X(f)$. Do vậy, $\tilde{X}^*(f+2f_0)$ khác không trong khoảng lân cận của $f = -f_0$ ($X_+(f)$ dịch trái đi một đoạn là $2f_0$) và $f = -3f_0$ ($X_-(f)$ dịch sang trái một đoạn là $2f_0$). Các thành phần này không tạo nên được $\tilde{X}(f)$, hay tương ứng là $\tilde{x}(t)$, vì $\tilde{X}(f)$ khác không chỉ trong lân cận của $f = 0$. Cách để $X(f+f_0)$ tạo nên $\tilde{x}(t)$ được minh hoạ trong hình 4.7. Lưu ý là $X(f+f_0)$ chỉ khác không tại các lân cận của $f = -2f_0$ ($X_-(f)$ dịch sang trái 1 đoạn là f_0) và $f = 0$ ($X_+(f)$ dịch trái đi một đoạn là f_0). Theo đó chỉ có $X_+(f+f_0)$ tạo nên $\tilde{x}(t)$ và:



Hình 4.7: Rút ra $\tilde{X}(f)$ từ $X(f)$

$$\tilde{X}(f) = 2X_+(f+f_0) \quad (4.46)$$

Tương đương với:

$$\tilde{x}(t) = 2Lp\{x(t)e^{-j2\pi f_0 t}\} \quad (4.47)$$

Như minh hoạ trong hình 4.7, lọc thông thấp bằng bộ lọc có hàm truyền đạt $H(f) = U(f+f_0)$. Do vậy (4.46) được biểu diễn như sau:

$$\tilde{X}(f) = 2X(f+f_0).U(f+f_0) \quad (4.48)$$

4.2.3. Rút $X_d(f)$ và $X_q(f)$ từ $\tilde{X}(f)$

Có thể dễ dàng rút ra biểu thức $X_d(f)$ và $X_q(f)$. Biến đổi Fourier của (4.5) ta được:

$$\tilde{X}(f) = X_d(f) + jX_q(f) \quad (4.49)$$

Thay f bằng $-f$ ta có:

$$\tilde{X}(-f) = X_d(-f) + jX_q(-f) \quad (4.50)$$

Vì $x_d(t)$ và $x_q(t)$ là thực, nên $X_d(-f) = X_d^*(-f)$ và $X_q(-f) = X_q^*(-f)$ vì vậy (4.50) được viết là:

$$\tilde{X}(-f) = X_d^*(f) + jX_q^*(f) \quad (4.51)$$

Lấy liên hợp phức biểu thức (4.51) ta có:

$$\tilde{X}^*(-f) = X_d(f) - jX_q(f) \quad (4.52)$$

Cộng (4.49) và (4.52) ta có:

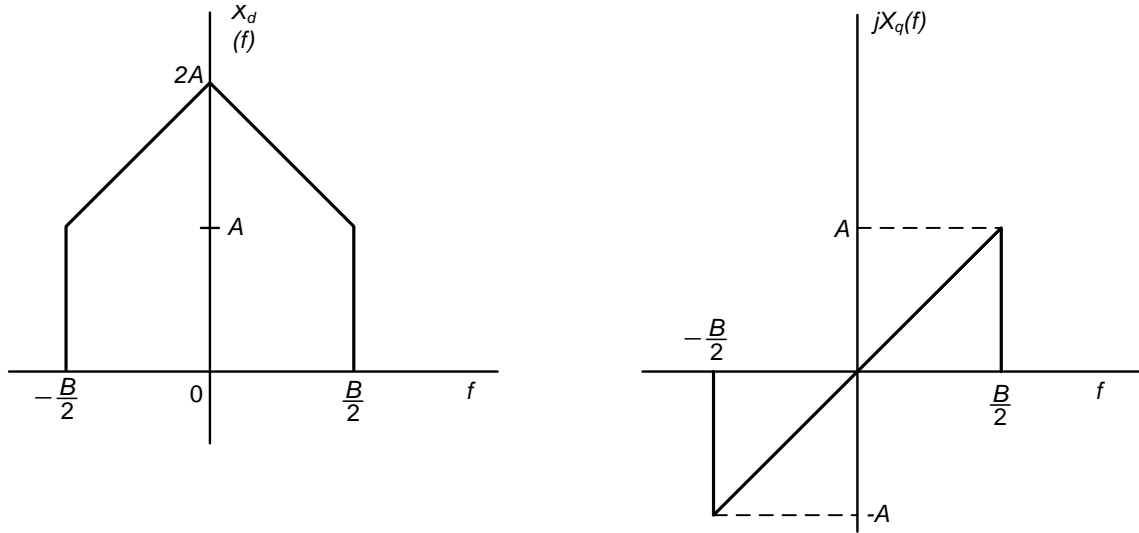
$$X_d(f) = \frac{1}{2}(\tilde{X}(f) + \tilde{X}^*(-f)) \quad (4.53)$$

Nhân (4.52) với -1 và cộng kết quả này với (4.49) thu được:

$$X_q(f) = \frac{1}{2j}(\tilde{X}(f) - \tilde{X}^*(-f)) \quad (4.54)$$

Biến đổi Fourier ngược của $X_d(f)$ và $X_q(f)$ được định nghĩa bởi (4.53) và (4.54) cho ta $x_d(t)$ và $x_q(t)$ tương ứng.

Phổ $X_d(f)$ và $X_q(f)$ tương ứng với đường bao phức thông thấp $\tilde{X}(f)$ được rút ra từ hình 4.7 được minh hoạ ở hình 4.8. Các phổ này được xác định bởi các công thức (4.53) và (4.54). Lưu ý rằng về biểu đồ thành phần vuông pha thuận hơn về $jX_q(f)$. Và lưu ý rằng, $X_d(f)$ thực và hàm chẵn, trong khi $X_q(f)$ là ảo và hàm lẻ.



Hình 4.8: Phổ của các thành phần đồng pha và vuông pha

Từ hình 4.7, cho thấy phổ $X(f)$ của tín hiệu thông dải giá trị thực $x(t)$ là không đối xứng qua f_0 . Kết quả là, các mẫu của đường bao phức thông thấp $\tilde{x}(t)$ là các giá trị phức. Cả phần thực và phần ảo của $\tilde{x}(t)$ là $x_d(t)$ và $x_q(t)$ có băng thông là $B/2$, bằng một nửa băng thông của tín hiệu thông dải thực $x(t)$. Như đã rõ ở chương trước, cả $x_d(t)$ và $x_q(t)$ phải được lấy mẫu ở tần số lớn hơn $2(B/2) = B$ mẫu/giây. Kết quả của quá trình lấy mẫu sẽ cho ta ít nhất là $2B$ mẫu trên một giây. Ngược lại, nếu $X(f)$ đối xứng liên hợp phức qua tần số f_0 , thì $\tilde{X}(f)$ đối xứng liên hợp phức qua tần số $f = 0$. Khi này, $\tilde{x}(t)$ sẽ là thực (vì $x_q(t) = 0$) và việc lấy mẫu thành phần vuông pha là không cần thiết.

4.2.4. Năng lượng và công suất

Từ lý thuyết hệ thống tuyến tính, thấy rõ định lý Parseval cho biết biến đổi Fourier bảo toàn năng lượng và công suất. Đáng tiếc là, năng lượng (hay công suất) trong đường bao phức không bằng với năng lượng (hay công suất) tương ứng với tín hiệu thông dải. Sử dụng (4.41) ta có:

$$|x(t)|^2 = \frac{I}{4} |\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t} + \tilde{x}^*(t)e^{-j2\pi f_0 t}|^2 \quad (4.55)$$

đối với công suất tức thời trong $x(t)$. Biểu thức trên cho ta:

$$|x(t)|^2 = \frac{I}{4} [\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t} + \tilde{x}^*(t)e^{-j2\pi f_0 t}] \times [\tilde{x}^*(t)e^{j2\pi f_0 t} + \tilde{x}(t)e^{-j2\pi f_0 t}] \quad (4.56)$$

Khai triển phép nhân trên:

$$|x(t)|^2 = \frac{I}{4} [\tilde{x}(t)|^2 + [\tilde{x}(t)]^2 e^{j4\pi f_0 t} + [\tilde{x}^*(t)]^2 e^{-j4\pi f_0 t} + |\tilde{x}(t)|^2] \quad (4.57)$$

Vì $[\tilde{x}(t)]^2 e^{j4\pi f_0 t}$ và $[\tilde{x}^*(t)]^2 e^{-j4\pi f_0 t}$ biểu diễn các tín hiệu thông dải, vì vậy có trung bình bằng 0, lấy trung bình ta có:

$$E\{|x(t)|^2\} = \frac{1}{2} E\{|\tilde{x}(t)|^2\} \quad (4.58)$$

Theo định nghĩa, công suất trung bình trong tín hiệu thông dải giá trị thực $x(t)$ là:

$$\varepsilon_x = E\{|x(t)|^2\} \quad (4.59)$$

Đôi khi được hiểu là công suất thực. Công suất trong đường bao phức thông thấp $\tilde{x}(t)$, mà đôi khi được hiểu là công suất phức là:

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = E\{|\tilde{x}(t)|^2\} \quad (4.60)$$

Thế (4.59) và (4.60) vào (4.58) nhận được:

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = 2\varepsilon_x \quad (4.61)$$

Vì vậy, công suất trong đường bao phức của tín hiệu lớn gấp 2 lần công suất trong tín hiệu thông dải giá trị thực mà từ đó nó được rút ra. Tuy nhiên, sẽ thấy ngay trong phần sau, nhận được kết quả tương tự đối với tín hiệu ngẫu nhiên và nhiễu. Vì vậy, một số đại lượng quan trọng, tỉ số tín hiệu trên tạp âm, được duy trì khi các tín hiệu thông dải giá trị thực được biểu diễn bởi đường bao phức thông thấp tương ứng của nó.

4.2.5. Mô hình cầu phương cho tín hiệu thông dải ngẫu nhiên

Việc biểu diễn tín hiệu trong miền tần số thông qua sử dụng biến đổi Fourier hàm ý rằng, tín hiệu này là tín hiệu năng lượng tắt định. Tín hiệu ngẫu nhiên thông dải cũng có biểu diễn thông thấp theo thành phần đồng pha và vuông pha. Toán học cơ bản để tạo mô hình tín hiệu thông thấp cho tín hiệu thông dải ngẫu nhiên hơi khác. Ta nhắc lại lý thuyết căn bản.

Ví dụ, xét quá trình ngẫu nhiên băng hẹp được định nghĩa bởi phương trình:

$$n(t) = n_d(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) - n_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta) \quad (4.62)$$

Trong đó θ là góc pha bất kỳ phân bố đều trong khoảng $[-\pi, \pi]$. Quá trình trong (4.62) được viết như sau:

$$n(t) = R(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t) + \theta] \quad (4.63)$$

$$n(t) = R e^{\left\{ \underbrace{R(t) e^{j\phi(t)}}_{\tilde{n}(t)} e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} \right\}} \quad (4.64)$$

Đường bao phức tương ứng với $n(t)$ được định nghĩa là:

$$\tilde{n}(t) = R(t) e^{j\phi(t)} \quad (4.65)$$

Trong tọa độ vuông góc:

$$\tilde{n}(t) = n_d(t) + jn_q(t) \quad (4.66)$$

Đường bao thực $R(t)$ và góc pha $\phi(t)$ là:

$$R(t) = |\tilde{n}(t)| = \sqrt{n_d^2(t) + n_q^2(t)} \quad (4.67)$$

$$\phi(t) = \arctan \frac{n_q(t)}{n_d(t)} \quad (4.68)$$

Giả sử ta biết mật độ phổ công suất (PSD) của $n(t)$. Vấn đề là xác định PSD của $n_d(t)$, $n_q(t)$ và $\tilde{n}(t)$.

Việc xác định mô hình *cầu phương* cho quá trình ngẫu nhiên thông dải thường có trong lý thuyết truyền tin cơ bản. Ở đây chỉ tóm tắt các kết quả quan trọng nhất, chúng rất hữu hiệu cho các chương sau:

• **Trung bình:** Vì $n(t)$ là một quá trình thông dải nên nó có trung bình bằng 0. Theo đó, kỳ vọng về phải của (4.62) là trung bình 0 dẫn đến $n_d(t)$, $n_q(t)$ là trung bình không. Vì vậy:

$$E\{n(t)\} = E\{n_d(t)\} = E\{n_q(t)\} = 0 \quad (4.69)$$

Trong đó $E\{\cdot\}$ là ký hiệu của phép lấy kỳ vọng.

• **Phương sai:** Cũng thấy rằng $n_d(t)$, $n_q(t)$ có cùng phương sai (hay công suất, vì quá trình này có trung bình không) và công suất này bằng tổng công suất trong quá trình thông dải. Nói cách khác:

$$E\{n^2(t)\} = E\{n_d^2(t)\} = E\{n_q^2(t)\} = N \quad (4.70)$$

Trong đó N là tổng công suất trong quá trình ngẫu nhiên thông dải cơ bản.

• **PSD của $n_d(t)$ và $n_q(t)$:** Mật độ phổ công suất PSD của $n_d(t)$ và $n_q(t)$ là bằng nhau và được xác định từ PSD của $n(t)$ được ký hiệu là $S_n(f)$, được cho bởi biểu thức:

$$S_{n_d}(f) = S_{n_q}(f) = Lp[S_n(f - f_0) + S_n(f + f_0)] \quad (4.71)$$

• **Tự tương quan của $n_d(t)$ và $n_q(t)$:** Theo định lý Wiener-Khintchine thì:

$$R_{n_d}(\tau) \leftrightarrow S_{n_d}(f) \quad (4.72)$$

$$R_{n_q}(\tau) \leftrightarrow S_{n_q}(f) \quad (4.73)$$

Trong đó $R_{n_d}(\tau)$ và $R_{n_q}(\tau)$ là hàm tự tương quan của $n_d(t)$ và $n_q(t)$, ký hiệu \leftrightarrow là cặp biến đổi Fourier.

- **PSD chéo:** Mật độ phổ công suất PSD chéo của $n_d(t)$ và $n_q(t)$ được cho bởi:

$$S_{n_d n_q}(f) = jLp[S_n(f - f_0) + S_n(f + f_0)] \quad (4.74)$$

Lưu ý PSD chéo là ảo.

- **Tương quan chéo của $n_d(t)$ và $n_q(t)$:** Ta lại dùng định lý Weiner-Khintchine để định nghĩa tương quan chéo của $n_d(t)$ và $n_q(t)$. Kết quả là:

$$R_{n_d n_q}(\tau) \leftrightarrow S_{n_d n_q}(f) \quad (4.75)$$

Trong đó $R_{n_d n_q}(\tau)$ là tương quan chéo của $n_d(t)$ và $n_q(t)$. Lưu ý rằng, vì $S_{n_d n_q}(f)$ là thuần ảo nên $R_{n_d n_q}(\tau)$ là hàm lẻ. Với các quá trình có băng tần hạn chế, thì tương quan chéo cũng như tự tương quan phải liên tục. Do vậy, với các quá trình hạn băng, thì $n_d(t)$ và $n_q(t)$ là không tương quan. Tuy nhiên, $n_d(t)$ và $n_q(t + \tau)$ có thể tương quan với nhau khi $\tau \neq 0$.

- **Trung bình của đường bao phức $\tilde{n}(t)$:** Trung bình của $\tilde{n}(t)$ là:

$$E\{\tilde{n}(t)\} = E\{n_d(t) + jn_q(t)\} \quad (4.76)$$

Vì kỳ vọng của tổng bằng tổng các kỳ vọng:

$$E\{\tilde{n}(t)\} = E\{n_d(t)\} + jE\{n_q(t)\} = 0 + j0 = 0 \quad (4.77)$$

- **Phương sai của đường bao phức $\tilde{n}(t)$:** Công suất trong $\tilde{n}(t)$ là:

$$P_{\tilde{n}} = E\{|\tilde{n}(t)|^2\} = E\{[n_d(t) + jn_q(t)] \times [n_d^*(t) - jn_q^*(t)]\} \quad (4.78)$$

Vì $\tilde{n}(t)$ có trung bình không nên $E\{|\tilde{n}(t)|^2\}$ cũng là phương sai, khai triển (4.78) ta có:

$$P_{\tilde{n}} = E\{|n_d(t)|^2\} + E\{|n_q(t)|^2\} + jE\{n_d^*(t)n_q(t)\} - jE\{n_d(t)n_q^*(t)\} \quad (4.79)$$

Vì $n_d(t)$ và $n_q(t)$ là không tương quan khi các quá trình hạn băng:

$$E\{n_d^*(t)n_q(t)\} = E\{n_d^*(t)\}E\{n_q(t)\} = 0 \quad (4.80)$$

Và tương tự như vậy:

$$E\{n_d(t)n_q^*(t)\} = E\{n_d(t)\}E\{n_q^*(t)\} = 0 \quad (4.81)$$

Vì vậy:

$$P_{\tilde{n}} = E\{|n_d(t)|^2\} + E\{|n_q(t)|^2\} = P_{n_d} + P_{n_q} \quad (4.82)$$

Trong đó P_{n_d} và P_{n_q} biểu diễn công suất trong $n_d(t)$ và $n_q(t)$. Từ công thức (4.70) ta có:

$$P_{\tilde{n}} = 2E\{n^2(t)\} = 2N \quad (4.83)$$

Nghĩa là công suất trong trình bày đường bao phức thông thấp của tín hiệu thông dải là gấp đôi công suất của tín hiệu thông dải giá trị thực mà từ tín hiệu thông dải thực này rút ra đường bao phức thông thấp.

• **PSD của đường bao phức $\tilde{n}(t)$:** Từ (4.71) cho thấy PSD của $n_d(t)$ và $n_q(t)$ là bằng nhau. Vì vậy:

$$S_{\tilde{n}}(f) = S_{n_d}(f) + S_{n_q}(f) = 2S_{n_d}(f) \quad (4.84)$$

Ta sẽ minh họa tại sao quan hệ trên lại quan trọng trong môi trường mô phỏng.

4.2.6. Tỉ số tín hiệu trên tạp âm

Thấy rõ từ lý thuyết truyền thông cơ bản, tỉ số tín hiệu trên tạp âm SNR ở đầu vào của máy thu là tham số chính để xác định hiệu năng của hệ thống. Tại đầu vào máy thu, tín hiệu và tạp âm đều là thông dải.

Giả sử tín hiệu $x(t)$ và tạp âm $n(t)$ cộng với nhau, thì tín hiệu đầu vào của máy thu là:

$$z(t) = x(t) + n(t) \quad (4.85)$$

Tỉ số tín hiệu trên tạp âm dưới dạng các tín hiệu thông dải thực được định nghĩa là:

$$(SNR)_{thông\ dải} = \frac{E\{x^2(t)\}}{E\{n^2(t)\}} \quad (4.86)$$

Theo (4.58) và (4.83) thì:

$$(SNR)_{thông\ dải} = \frac{\frac{1}{2}E\{|\tilde{x}(t)|^2\}}{\frac{1}{2}E\{|\tilde{n}(t)|^2\}} = \frac{E\{|\tilde{x}(t)|^2\}}{E\{|\tilde{n}(t)|^2\}} = (SNR)_{thông\ thấp} \quad (4.87)$$

Trong đó $(SNR)_{thông\ dải}$ và $(SNR)_{thông\ thấp}$ được hiểu là tỉ số tín hiệu trên tạp âm dựa vào các tín hiệu thông dải giá trị thực và các đường bao phức thông thấp tương ứng. Kết quả rất quan trọng này cho thấy, việc biểu diễn các hàm thông dải (cả tín hiệu và tạp âm) bởi các thành phần tương đương thông thấp tương ứng là *phương pháp luận mô phỏng tiêu chuẩn, bảo tồn các tỉ số tín hiệu trên tạp âm*. Một ví dụ đơn giản để minh họa vấn đề quan trọng này bằng cách xét các tín hiệu cơ bản trong miền tần số.

Ví dụ 4.6: (Biến đổi SNR), giả sử rằng một tín hiệu thông dải được biểu diễn bởi:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + n(t) \\ &= x(t) + n_d(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) - n_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Trong đó:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (4.89)$$

Tín hiệu thông dải có thể được biểu diễn:

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (4.90)$$

Vì vậy, PSD của $x(t)$ là:

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0) \quad (4.91)$$

Như được minh họa trong hình 4.9(a). Do vậy, toàn bộ công suất trong tín hiệu thông dải thực là:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \frac{A^2}{2} \quad (4.92)$$

Như được mong đợi từ (4.89). PSD của tạp âm giả định được minh họa trong hình 4.9(b). Vì vậy toàn bộ công suất tạp âm là:

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df = 2 \left(\frac{N_0}{2} B \right) = N_0 B \quad (4.93)$$

Từ (4.92) và (4.93) ta được tỉ số tín hiệu trên tạp âm thông dải.

$$(SNR)_{\text{thông dải}} = \frac{P_x}{P_n} = \frac{A^2}{2N_0 B} \quad (4.94)$$

Tại đây ta quan tâm các tương đương thông thấp của $x(t)$ và $n(t)$. Phương trình (4.89) có thể viết lại như sau:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (4.95)$$

Từ đó, đường bao phức là:

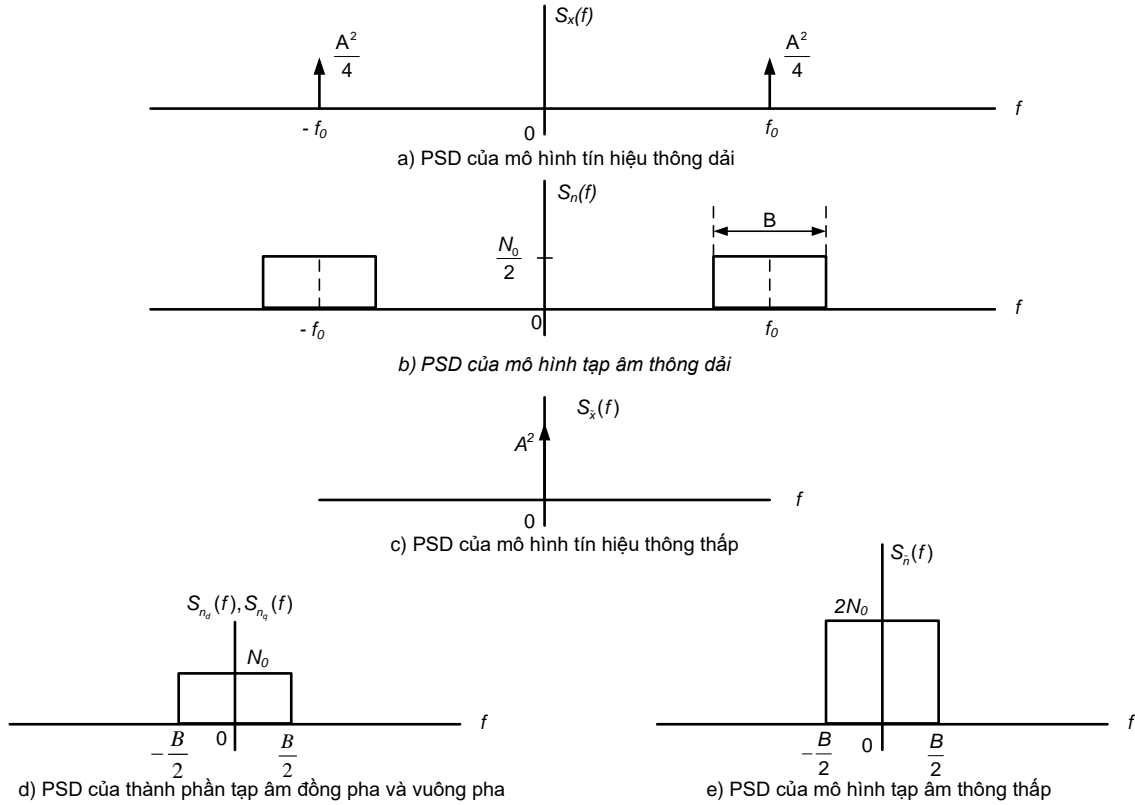
$$\tilde{x}(t) = A \quad (4.96)$$

Công suất trong đường bao phức là:

$$P_{\tilde{x}} = E \left\{ |\tilde{x}(t)|^2 \right\} = A^2 \quad (4.97)$$

Điều này cho ta PSD:

$$P_{\tilde{x}}(f) = A^2 \delta(f) \quad (4.98)$$



Hình 4.9: Tính toán tỉ số tín hiệu trên tạp âm SNR

Như được minh họa ở hình 4.9(c), PSD của $n_d(t)$ và $n_q(t)$ được cho bởi (4.71) và được minh họa trong hình 4.9(d). Từ (4.84) PSD của $\tilde{n}(t)$ tìm được bằng cách nhân PSD trong hình 4.9(d) với 2. Kết quả được minh họa trong hình 4.9(e). Từ hình 4.9(e) công suất trong biểu diễn thông thấp phức của tạp âm là:

$$P_{\tilde{n}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{n}}(f) df = 2N_0B \quad (4.99)$$

Kết hợp (4.97) và (4.99) nhận được:

$$(SNR)_{\text{thông thấp}} = \frac{P_{\tilde{x}}}{P_{\tilde{n}}} = \frac{A^2}{2N_0B} \quad (4.100)$$

So sánh (4.94) và (4.100) thấy rõ, tỉ số tín hiệu trên tạp âm được bảo tồn khi các tín hiệu thông dải giá trị thực được thay bởi các tương đương thông thấp phức của chúng.

4.3. Hệ thống thông dải tuyến tính

Ta chuyển từ quan tâm tín hiệu sang hệ thống. Bài toán cơ bản là xác định quan hệ vào/ra trong miền thời gian của hệ thống tuyến tính với giả thiết tín hiệu vào hệ thống và đáp ứng xung kim của hệ thống đều là tín hiệu thông dải được biểu diễn dưới dạng các đường bao

phức thông thấp. Kết quả này sẽ cho ta phương pháp luận để triển khai các mô phỏng cho các hệ thống tuyến tính ở mức dạng sóng dựa vào các mô hình thông thấp.

4.3.1 Hệ thống tuyến tính bất biến

Giả sử hệ thống là tuyến tính, ta sử dụng *tích chập* để xác định đầu ra $y(t)$ khi đã biết đầu vào $x(t)$. Trường hợp bất biến, tích chập có dạng đơn giản:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \triangleq x(t) \otimes h(t) \quad (4.101)$$

Trong đó $h(t)$ là *đáp ứng xung kim đơn vị* của hệ thống bất biến, và \otimes là phép tích chập. Theo định nghĩa, đường bao phức của đầu vào hệ thống tuyến tính bất biến $\tilde{x}(t)$ và đầu ra $\tilde{y}(t)$ được định nghĩa bởi:

$$x(t) = \text{Re}\left\{\tilde{x}(t).e^{j2\pi f_0 t}\right\} \quad (4.102)$$

$$y(t) = \text{Re}\left\{\tilde{y}(t).e^{j2\pi f_0 t}\right\} \quad (4.103)$$

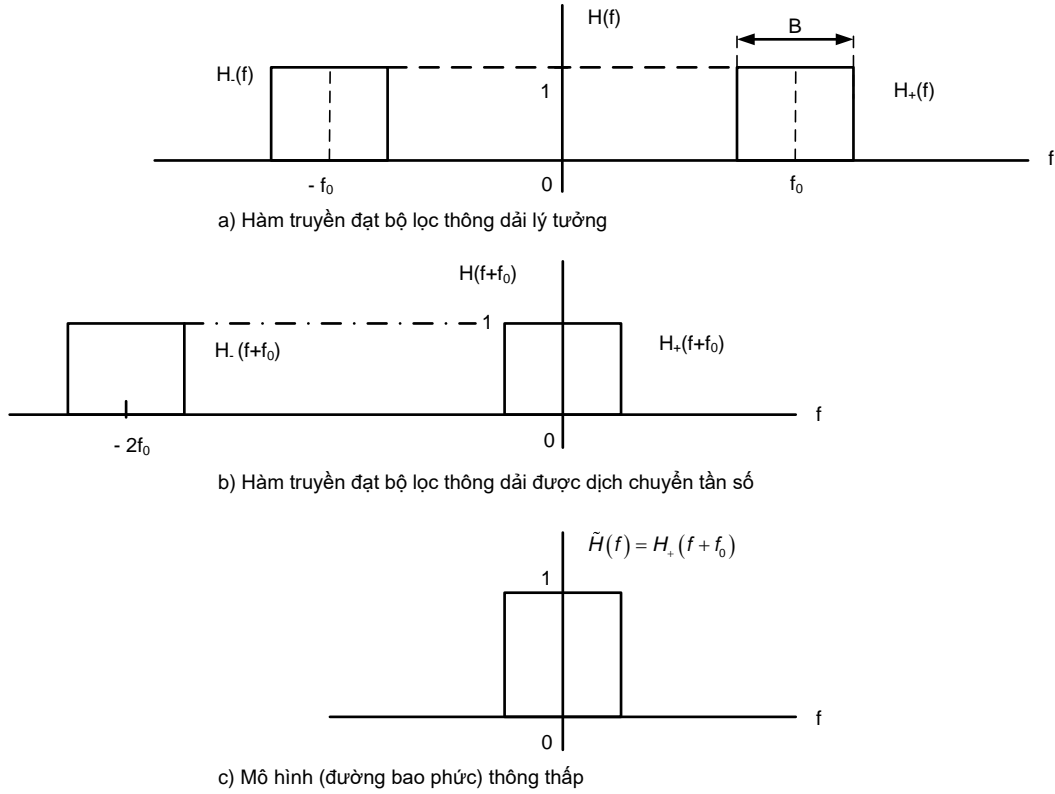
Nếu ta cần mối quan hệ giữa $\tilde{x}(t)$ và $\tilde{y}(t)$ thỏa mãn:

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\lambda)\tilde{h}(t-\lambda)d\lambda \triangleq \tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t) \quad (4.104)$$

Sao cho (4.101) và (4.104) có cùng dạng, thì đáp ứng xung kim đơn vị của hệ thống thông dải $h(t)$ và đường bao phức tương ứng $\tilde{h}(t)$ phải thỏa mãn theo quan hệ:

$$h(t) = \text{Re}\left\{2\tilde{h}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\} \quad (4.105)$$

Lý do của hệ số 2 đó là bộ lọc thông dải độ lợi đơn vị tương ứng với việc biểu diễn đường bao phức của bộ lọc thông thấp độ lợi đơn vị.



Hình 4.10: Bộ lọc thông dải lý tưởng và mô hình thông thấp

Phương trình (4.105) dễ dàng chứng minh là đúng bằng cách chỉ ra rằng hệ số 2 trong (4.105) là do chuyển bộ lọc thông dải độ lợi đơn vị thành bộ lọc thông thấp độ lợi đơn vị vì vậy hệ số 2 duy trì độ lợi thông dải bộ lọc. Xét đặc tính bộ lọc thông dải lý tưởng được cho ở hình 4.10(a). Hàm truyền đạt của một bộ lọc lý tưởng được biểu diễn bởi:

$$H(f) = H_+(f) + H_-(f) \quad (4.106)$$

Trong đó $H_+(f)$ và $H_-(f)$ là thành phần tần số dương và thành phần tần số âm của hàm truyền đạt bộ lọc thông dải. Thế f bằng $f + f_0$ ta có:

$$H(f + f_0) = H_+(f + f_0) + H_-(f + f_0) \quad (4.107)$$

Như được minh họa trong hình 4.10(b). Rõ ràng $H_+(f + f_0)$ là hàm thông thấp, do vậy được xác định là $\tilde{H}(f)$. Vì vậy:

$$\tilde{H}(f) = H_+(f + f_0) \quad (4.108)$$

Như được thấy ở hình 4.10(c). Lưu ý rằng (4.108) cũng có thể viết lại như sau:

$$\tilde{H}(f) = H(f + f_0) \cdot U(f + f_0) \quad (4.109)$$

Thấy rõ, bộ lọc *thông dải* độ lợi đơn vị sắp xếp bộ lọc *thông thấp* độ lợi đơn vị, vì $\tilde{H}(f)$ được rút ra từ thành phần tần số dương của hàm truyền đạt đối với bộ lọc thông dải bằng cách chuyển dịch tần số và không cần đến tỉ số biên độ.

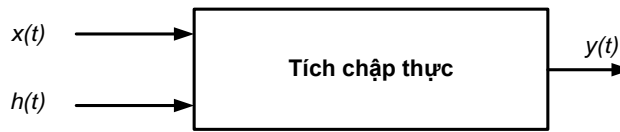
Cần phải hiểu rõ sự khác biệt giữa (4.48) và (4.109). Việc biểu diễn tín hiệu thông dải bởi đường bao phức thông thấp của nó dẫn đến:

$$\tilde{X}(f) = 2X(f + f_0).U(f + f_0) \quad (4.110)$$

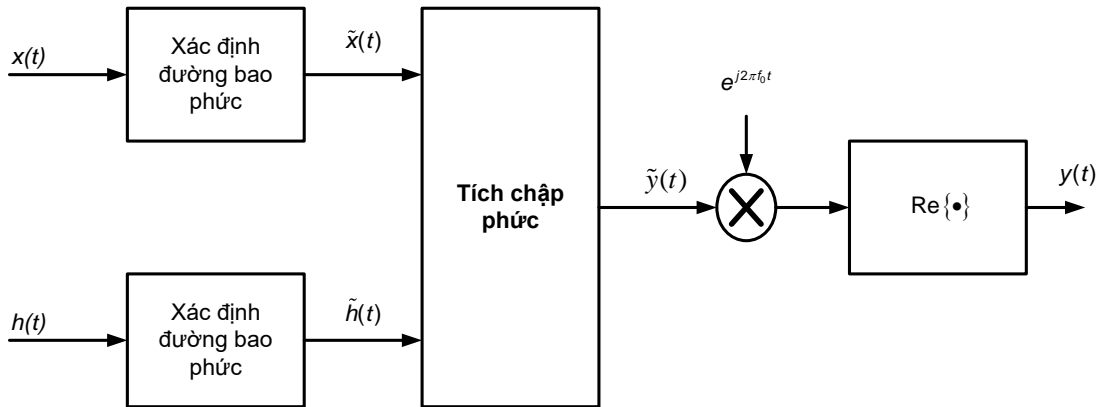
Trong khi đó biểu diễn các hệ thống thông dải tuyến tính bằng tương đương thông thấp dẫn đến:

$$\tilde{H}(f) = H(f + f_0).U(f + f_0) \quad (4.111)$$

Không tính đến hệ số 2, thì hai phương trình là hoàn toàn tương đương.



a) Phân tích hệ thống sử dụng các tín hiệu thông dải



b) Phân tích hệ thống sử dụng các tín hiệu đường bao phức

Hình 4.11: Kỹ thuật phân tích tín hiệu trong miền thời gian

Từ (4.101) và (4.104), ta thấy 2 kỹ thuật được dùng để tính tín hiệu ra của hệ thống tuyến tính bất biến LTIV khi biết tín hiệu thông dải đầu vào và đáp ứng xung kim trong miền thời gian. Hai kỹ thuật đó được minh họa trong hình 4.11. Kỹ thuật đầu tiên chỉ là tích chập $x(t)$ và $h(t)$ như được định nghĩa bởi (4.101) và được minh họa ở hình 4.11(a). Kỹ thuật thứ hai thực hiện theo hai bước: (i) xác định đường bao phức của $x(t)$ và $h(t)$, tính tích chập các đường bao phức được định nghĩa bởi (4.104); (ii) dùng (4.103) để xác định tín hiệu thông dải đầu ra $y(t)$. Kỹ thuật này được cho ở hình 4.11(b).

Sử dụng (4.104) ta có thể viết như sau:

$$\tilde{y}(t) = y_d(t) + jy_q(t) = [x_d(t) + jx_q(t)] \otimes [h_d(t) + jh_q(t)] \quad (4.112)$$

Vì tích chập của tổng là tổng các tích chập. Ta có:

$$\begin{aligned} y_d(t) + jy_q(t) = & [x_d(t) \otimes h_d(t) - x_q(t) \otimes h_q(t)] \\ & + j[x_d(t) \otimes h_q(t) + x_q(t) \otimes h_d(t)] \end{aligned} \quad (4.113)$$

Vì vậy, thành phần đồng pha và vuông pha của tín hiệu ra hệ thống tuyến tính được cho bởi:

$$y_d(t) = x_d(t) \otimes h_d(t) - x_q(t) \otimes h_q(t) \quad (4.114)$$

$$y_q(t) = x_d(t) \otimes h_q(t) + x_q(t) \otimes h_d(t) \quad (4.115)$$

Do vậy, tích chập của hai hàm phức tương đương với bốn *tích chập thực* giống như việc nhân 2 số phức tương đương với phép nhân 4 số thực. Quá trình để rút ra các đầu ra đồng pha và vuông pha của hệ thống thông dải tuyến tính được minh họa ở hình 4.12.

Ví dụ 4.7: Trong ví dụ này ta xác định giá trị của $h_d(t)$ và $h_q(t)$ cho bộ dịch pha thông dải. Giả sử tín hiệu vào/ra hệ thống (bộ dịch pha thông dải) là:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad (4.116)$$

$$y(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta + \phi) \quad (4.117)$$

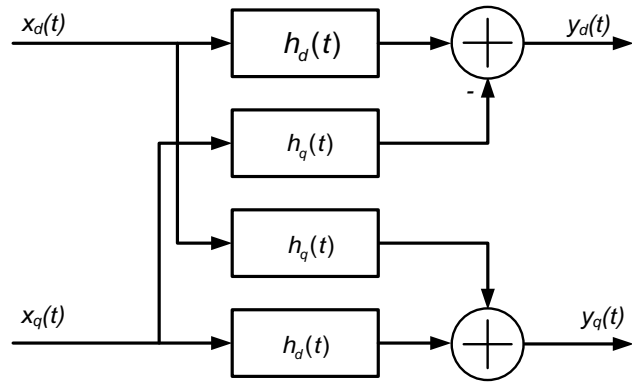
Vì vậy, hệ thống làm dịch pha tín hiệu vào một lượng ϕ .

Mô hình này có thể được dùng để trình bày lỗi đồng bộ trong bộ giải điều chế. Để mô phỏng thiết bị này sử dụng các mô hình thông thấp phức, cần phải có $h_d(t)$ và $h_q(t)$.

Đường bao phức của $x(t)$ và $y(t)$ được cho bởi:

$$\tilde{x}(t) = A e^{j\theta} \quad (4.118)$$

$$\tilde{y}(t) = A e^{j(\theta+\phi)} = A e^{j\theta} e^{j\phi} \quad (4.119)$$



Hình 4.12: Mô hình cho hệ thống thông dải tuyến tính

Theo đó:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t)e^{j\phi} \quad (4.120)$$

Viết trong hệ trục tọa độ vuông góc ta có:

$$\begin{bmatrix} y_d(t) + jy_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_d(t) + jx_q(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi + j\sin\phi \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

Lấy phần thực 2 vế phương trình ta có:

$$y_d(t) = x_d(t)\cos\phi - x_q(t)\sin\phi \quad (4.122)$$

Lấy phần ảo 2 vế phương trình ta có:

$$y_q(t) = x_d(t)\sin\phi + x_q(t)\cos\phi \quad (4.123)$$

Trong ví dụ này $x_d(t)$ và $x_q(t)$ lần lượt được nhân với $\cos\phi$ và $\sin\phi$. Vì vậy:

$$h_d(t) = (\cos\phi).\delta(t) \quad (4.124)$$

$$h_q(t) = (\sin\phi).\delta(t) \quad (4.125)$$

Lưu ý rằng, xuất hiện hàm delta là do hệ thống *không nhớ*.

Mô hình thông thấp dịch pha được minh họa ở hình 4.12 với $h_d(t)$ và $h_q(t)$ được cho bởi (4.124) và (4.125). Tất nhiên, ϕ có thể thay đổi theo thời gian.

4.3.2. Rút $h_d(t)$ và $h_q(t)$ từ $H(f)$

Để mô phỏng hệ thống sử dụng thành phần thông dải (chẳng hạn bộ lọc thông dải), ta biết hàm truyền đạt $H(f)$. Mô hình mô phỏng thông thấp cho bộ lọc được minh họa ở hình 4.12. Để triển khai mô hình mô phỏng cho bộ lọc dựa trên đường bao phức của $h(t)$, cần phải xác định $h_d(t)$ và $h_q(t)$ từ hàm truyền đạt của bộ lọc thông dải $H(f)$. Hai phương pháp cơ bản để tìm $h_d(t)$ và $h_q(t)$. *Phương pháp thứ nhất* là xác định $H_d(f)$ và $H_q(f)$ từ $H(f)$, sau đó biến đổi Fourier ngược để tìm $h_d(t)$ và $h_q(t)$. *Phương pháp thứ hai* là xác định $\tilde{H}(f)$ từ $H(f)$, biến đổi Fourier ngược của $\tilde{H}(f)$ để tìm $\tilde{h}(t)$, sau đó lấy phần thực và phần ảo của $\tilde{h}(t)$ để tìm $h_d(t)$ và $h_q(t)$.

Bước đầu tiên của 2 phương pháp là tìm $h_d(t)$ và $h_q(t)$ từ $H(f)$ để xác định $\tilde{H}(f)$. Theo định nghĩa

$$\tilde{H}(f) = H_+(f + f_0) = H_d(f) + jH_q(f) \quad (4.126)$$

Thực hiện biến đổi Fourier ngược ta được:

$$\tilde{h}(t) = h_d(t) + jh_q(t) \quad (4.127)$$

Lấy phần thực và phần ảo của $\tilde{h}(t)$ cho ta $h_d(t)$ và $h_q(t)$.

Thế f bằng $-f$ vào (4.126) ta có:

$$\tilde{H}(-f) = H_d(-f) + jH_q(-f) \quad (4.128)$$

Vì cả $h_d(t)$ và $h_q(t)$ đều là hàm thực của biến thời gian, lý thuyết biến đổi Fourier cơ bản cho ta $H_d(-f)$ là liên hợp phức của $H_d(f)$, $H_q(-f)$ là liên hợp phức của $H_q(f)$. Vì vậy, (4.128) được viết như sau:

$$\tilde{H}(-f) = H_d^*(f) + jH_q^*(f) \quad (4.129)$$

Lưu ý rằng, $\tilde{H}(f)$ và $\tilde{H}(-f)$ không phải là cặp liên hợp phức, vì tổng quát $\tilde{h}(t)$ không phải là hàm thực của biến thời gian. Lấy liên hợp phức của (4.129) ta có:

$$\tilde{H}^*(-f) = H_d(f) - jH_q(f) \quad (4.130)$$

Cộng (4.126) và (4.130) ta được:

$$H_d(f) = \frac{1}{2}(\tilde{H}(f) + \tilde{H}^*(-f)) \quad (4.131)$$

Nhân (4.130) với -1 và cộng kết quả với (4.126) ta có:

$$H_q(f) = \frac{1}{j2}(\tilde{H}(f) - \tilde{H}^*(-f)) \quad (4.132)$$

Tìm được hàm $h_d(t)$ và $h_q(t)$ bằng cách biến đổi Fourier ngược của $H_d(f)$ và $H_q(f)$. Nếu $\tilde{H}(f) = \tilde{H}^*(-f)$ sao cho $\tilde{H}_d(f)$ và $h_q(t)$ đều bằng 0, thì $\tilde{H}(f)$ được gọi là đối xứng liên hợp phức qua f_0 . Hình 4.13 minh họa $\tilde{H}(f)$, $\tilde{H}^*(-f)$, $H_d(f)$ và $H_q(f)$ cho trường hợp $H(f)$ là bộ lọc thông dải lý tưởng.

Ví dụ 4.8: Ta xét việc xác định $h_d(t)$ và $h_q(t)$ trực tiếp từ $H(f)$. Từ $H(f)$, $\tilde{H}(f)$ được viết sử dụng (4.108) như được minh họa trong hình 4.13. Biến đổi Fourier ngược của $\tilde{H}(f)$ là:

$$\tilde{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{f_l-f_0}^{f_u-f_0} e^{j2\pi ft} df \quad (4.133)$$

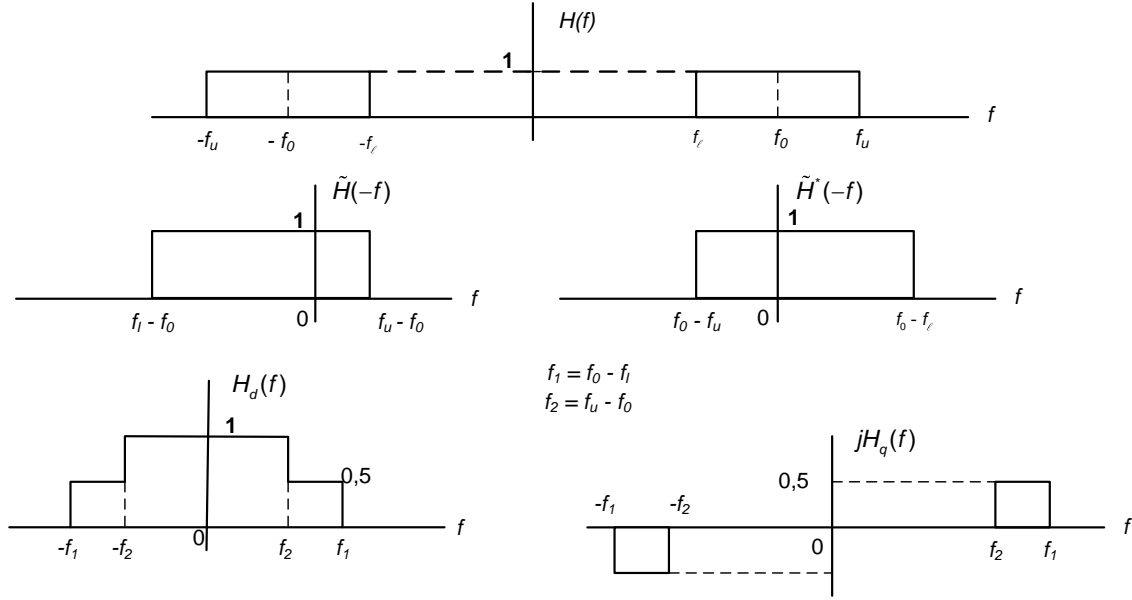
Vì $\tilde{H}(f) = 1$ trong khoảng lấy tích phân, nên ta có kết quả như sau:

$$\tilde{h}(t) = \frac{1}{j2\pi t} \left[e^{j2\pi(f_u-f_0)t} - e^{j2\pi(f_l-f_0)t} \right] \quad (4.134)$$

Phương trình trên có thể viết như sau

$$\tilde{h}(t) = \frac{1}{j2\pi t} \left[e^{j\pi(f_u - f_l)t} - e^{j\pi(f_l - f_u)t} \right] \cdot e^{-j2\pi \left(f_0 - \frac{f_u + f_l}{2} \right) t} \quad (4.135)$$

$$\tilde{h}(t) = \frac{1}{\pi t} \sin(\pi(f_u - f_l)t) \cdot e^{-j2\pi \left(f_0 - \frac{f_u + f_l}{2} \right) t} \quad (4.136)$$



Hình 4.13: $\tilde{H}(f)$, $\tilde{H}^*(-f)$, $H_d(f)$, $H_q(f)$ đối với $H(f)$ được giả định

Lấy các phần thực và phần ảo ta có:

$$h_d(t) = \frac{1}{\pi t} \sin(\pi(f_u - f_l)t) \cdot \cos\left(2\pi \left(f_0 - \frac{f_u + f_l}{2} \right) t\right) \quad (4.137)$$

$$h_q(t) = -\frac{1}{\pi t} \sin(\pi(f_u - f_l)t) \cdot \sin\left(2\pi \left(f_0 - \frac{f_u + f_l}{2} \right) t\right) \quad (4.138)$$

Lưu ý rằng, nếu f_0 được chọn sao cho là tần số trung tâm $(f_u + f_l)/2$, thì $h_q(t) = 0, \forall t$. Điều này hiển nhiên là sẽ đơn giản hóa mô hình mô phỏng thông thấp được minh họa trong hình 4.12. Kết luận quan trọng là khối lượng tính toán để tìm tín hiệu ra của hệ thống khi biết tín hiệu vào được giảm đi 2 lần.

Như đã đề cập trong ví dụ trước, trong nhiều trường hợp thực tế f_0 có thể được chọn sao cho thỏa mãn $\tilde{h}_q(t) \ll \tilde{h}_d(t)$ với mọi giá trị của t . Trong các trường hợp như vậy thì $h_q(t)$ thường được bỏ qua, vì vậy đường bao phức của đáp ứng xung kim có thể được xấp xỉ như một hàm thực mà không mất đi tính chính xác. Như đã chỉ ra trong ví dụ trước, điều quan trọng là sử dụng ưu điểm của phép xấp xỉ khi ứng dụng, vì khi ta loại được $h_q(t)$ thì cũng giảm khối

lượng tính toán của quá trình lọc 2 lần. Từ lý thuyết biến đổi Fourier cơ bản cho thấy $\tilde{h}(t)$ là thực nếu $\tilde{H}(f)$ có tính đối xứng liên hợp (phổ biên độ là hàm chẵn, phổ pha là hàm lẻ) qua $f = 0$. Đây cũng là trường hợp mà nếu hàm truyền đạt của bộ lọc thông dải $H(f)$ thể hiện tính chất đối xứng liên hợp qua $f = f_0$. Hầu hết các thiết kế bộ lọc thường *xấp xỉ tính chất* này nếu băng thông của bộ lọc nhỏ hơn so với tần số trung tâm của bộ lọc. Thành phần vuông pha có thể được xem là phép đo tính bất đối xứng liên hợp của $H(f)$ qua f_0 .

4.4. Tín hiệu đa sóng mang

Xét ghép kênh phân chia theo tần số (FDM) của M tín hiệu:

$$y(t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) \cos[2\pi f_i t + \phi_i(t)] \quad (4.139)$$

Trong đó $a_i(t)$ và $\phi_i(t)$ biểu diễn cho điều chế pha và biên độ của sóng mang thứ i , và f_i là tần số sóng mang thứ i . Vì thành phần $a_i(t)$ là thực nên ta có thể viết:

$$y(t) = Re \left\{ \sum_{i=1}^M \underbrace{a_i(t) e^{j\phi_i(t)}}_{\tilde{x}_i(t)} \cdot e^{j2\pi f_i t} \right\} \quad (4.140)$$

Định nghĩa:

$$\tilde{x}_i(t) = a_i(t) \cdot e^{j\phi_i(t)} \quad (4.141)$$

Ta có:

$$y(t) = Re \left\{ \sum_{i=1}^M \tilde{x}_i(t) e^{j2\pi f_i t} \right\} \quad (4.142)$$

Ta có thể định nghĩa đường bao phức của $y(t)$ là:

$$y(t) = \sum_{i=1}^M \tilde{y}_i(t) e^{j2\pi f_0 t} \quad (4.143)$$

Trong đó, f_0 là lựa chọn tùy ý. Với định nghĩa này thì $y(t)$ có thể được viết như sau:

$$y(t) = Re \left\{ \sum_{i=1}^M \tilde{x}_i(t) \cdot e^{j2\pi(f_i - f_0)t} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (4.144)$$

Vì vậy, đường bao phức của $y(t)$ là:

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= \sum_{i=1}^M \tilde{x}_i(t) \cdot e^{j2\pi(f_i - f_0)t} \\ &= \sum_{i=1}^M a_i(t) \cdot e^{j\phi_i(t)} \cdot e^{j2\pi(f_i - f_0)t}\end{aligned}\quad (4.145)$$

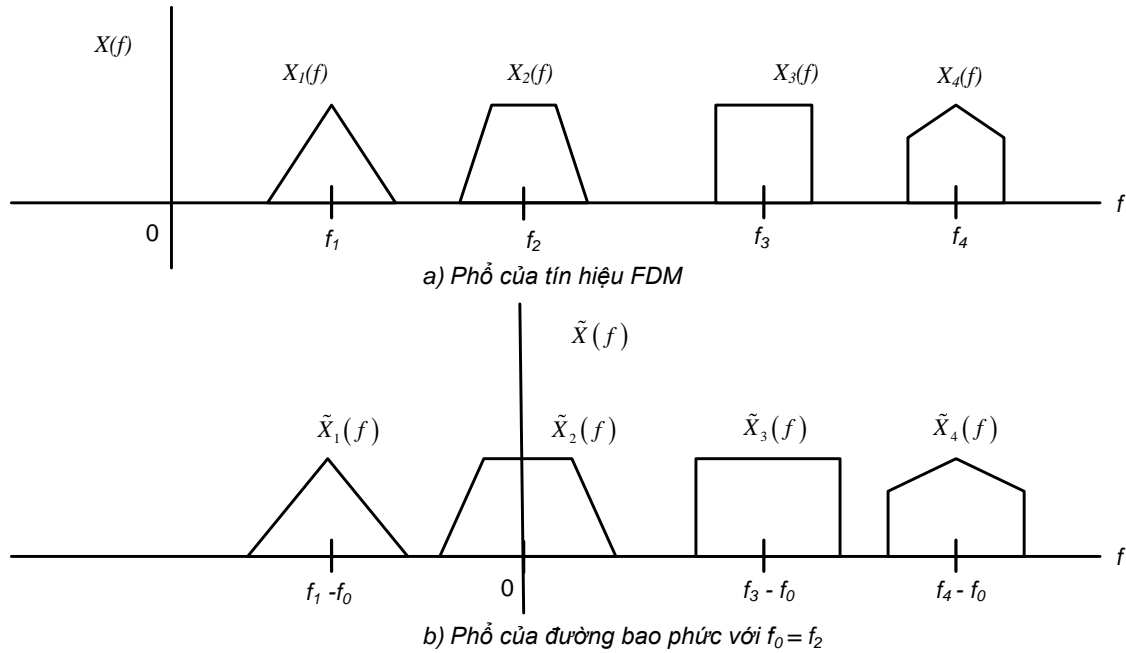
Vì vậy, các thành phần đồng pha và vuông pha của tín hiệu FDM được cho bởi:

$$y_d(t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) \cos[2\pi(f_i - f_0)t + \phi_i(t)] \quad (4.146)$$

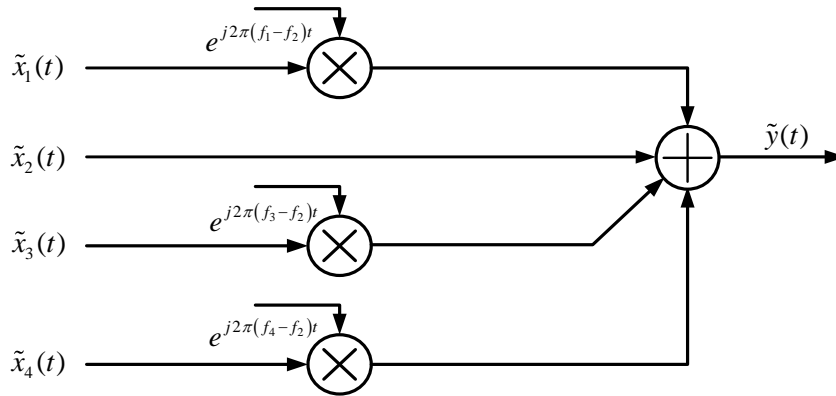
$$y_q(t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) \sin[2\pi(f_i - f_0)t + \phi_i(t)] \quad (4.147)$$

Ví dụ 4.9: Xét tín hiệu ghép phân chia theo tần số gồm 4 kênh tín hiệu được cho ở hình 4.14(a). Giả sử tín hiệu quan tâm là $x_2(t)$ và sẽ thực hiện mô phỏng để kiểm tra các ảnh hưởng của *nhiều* kênh lân cận và *méo* do điều chế ký sinh do tính phi tuyến của bộ khuếch đại gây ra. Vì quan tâm đến tín hiệu $x_2(t)$, nên phải đặt $f_0 = f_2$, sao cho $x_2(t)$ được dịch đến $f = 0$ khi đường bao phức của tín hiệu tổng hợp $y(t)$ được tạo ra. Với $f_0 = f_2$, thì đường bao phức của $y(t)$ là:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^M \tilde{x}_i(t) \cdot e^{j2\pi(f_i - f_2)t} \quad (4.148)$$



Hình 4.14: Đường bao phức của tín hiệu FDM



Hình 4.15: Xử lý tín hiệu cho đường bao phức của tín hiệu FDM

Điều này được minh họa trong hình 4.14(b) với $f_0 = f_2$. Lưu ý rằng tần số lấy mẫu nhỏ nhất đối với $\tilde{y}(t)$ phụ thuộc vào tín hiệu thông dải được dịch tới $f = 0$. Trường hợp $f_0 = f_2$, thì tần số lấy mẫu phải thỏa mãn:

$$f_s > 2 \left[(f_4 - f_2) + \frac{B}{2} \right] \quad (4.149)$$

Trong đó B là băng thông của $X_4(f)$. Quá trình tạo ra $\tilde{y}(t)$ được minh họa trong hình 4.15.

4.5. Hệ thống phi tuyến và thay đổi theo thời gian

Chương này chủ yếu tập trung vào hệ thống cố định (bất biến) và tuyến tính. Nhiều hệ thống thực tế lại chứa các thành phần thay đổi theo thời gian (như kênh vô tuyến), các phần tử phi tuyến (như bộ khuếch đại công suất lớn hoạt động ở gần điểm bão hòa). Việc thiết kế và phân tích các hệ thống chứa các phần tử phi tuyến, phần tử biến đổi theo thời gian hay cả hai bằng các công cụ toán học truyền thống là rất khó thậm chí là không thể. Do đó, mô phỏng sẽ là một công cụ thường được sử dụng để thiết kế và phân tích các hệ thống này. Chương 12 tập trung xét hệ thống phi tuyến và chương 13 dành cho hệ thống thay đổi theo thời gian. Tuy nhiên, chương này cũng đề cập một cách vắn tắt hệ thống phi tuyến và phụ thuộc thời gian.

4.5.1. Hệ thống phi tuyến

Khái niệm cơ bản về hàm truyền đạt không được định nghĩa đối với hệ thống *phi tuyến*. Ở dạng tổng quát, quan hệ vào/ra của hệ thống phi tuyến không dùng được phép tích chập dù là đáp ứng xung kim có thể dùng cho hệ thống phi tuyến. Phép tích chập quen thuộc dựa trên khái niệm xếp chồng không dùng được đối với hệ thống phi tuyến. Tất nhiên, các mô hình mô phỏng cho các hệ thống phi tuyến có thể được triển khai nhưng thường được dựa trên đo đạc từ các hệ thống vật lý. Đôi khi vẫn dùng phân tích để triển khai các mô hình mô phỏng cho các hệ thống phi tuyến nhưng các kỹ thuật này thường là đặc biệt và không thể tổng quát hoá được. Một số mô hình mô phỏng quan trọng cho các hệ thống phi tuyến được triển khai ở chương 12.

Ta nghiên cứu mô hình mô phỏng cho một hệ thống phi tuyến đơn giản. Mô hình được triển khai trong ví dụ 4.10 là rất hữu hiệu cho việc nghiên cứu tiếp theo.

Ví dụ 4.10: Giả sử tín hiệu vào hệ thống có dạng:

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \theta(t)] \quad (4.150)$$

Các phép đo được thực hiện ở đầu ra của hệ thống với nhiều giá trị của $A(t)$ và $\phi(t)$ cho thấy rằng đường bao tín hiệu ra của hệ là không đổi và độc lập với $A(t)$ nhưng các điểm chéo không của tín hiệu vào được duy trì và phù hợp với điểm chéo không đầu ra hệ thống. Vì vậy, các phép đo cho thấy hệ thống có thể được mô hình hoá một cách chính xác bởi một bộ giới hạn cứng thông dải. Nhiệm vụ của ta là triển khai mô hình mô phỏng cho thiết bị đó.

Đường bao phức của tín hiệu vào hệ thống là:

$$\tilde{x}(t) = A(t) e^{j\theta(t)} = x_d(t) + jx_q(t) \quad (4.151)$$

Đầu ra của bộ giới hạn cứng thông dải được định nghĩa là tín hiệu hình sin có biên độ không đổi và độ lệch pha bằng độ lệch pha tín hiệu đầu vào. Vì vậy:

$$y(t) = B \cos[2\pi f_0 t + \theta(t)] \quad (4.152)$$

Đường bao phức tương ứng là:

$$\tilde{y}(t) = B e^{j\theta(t)} \quad (4.153)$$

Trong đó B là hằng số dương giả định. Ta thấy rằng, đối với bộ giới hạn cứng thông dải, nó là đường bao của tín hiệu bị giới hạn cứng chứ không phải là chính tín hiệu đó.

Lưu ý rằng theo định nghĩa về độ lớn:

$$\sqrt{x_d^2(t) + x_q^2(t)} = |A(t)| \quad (4.154)$$

Đường bao phức của tín hiệu ra được viết:

$$\tilde{y}(t) = \frac{B}{|A(t)|} \tilde{x}(t) \quad (4.155)$$

Vì vậy:

$$\tilde{y}(t) = \frac{B [x_d(t) + jx_q(t)]}{\sqrt{x_d^2(t) + x_q^2(t)}} \quad (4.156)$$

từ đó, ta có thành phần đồng pha và vuông pha là:

$$y_d(t) = \frac{B x_d(t)}{\sqrt{x_d^2(t) + x_q^2(t)}} \quad (4.157)$$

$$y_q(t) = \frac{Bx_q(t)}{\sqrt{x_d^2(t) + x_q^2(t)}} \quad (4.158)$$

Thiết bị được định nghĩa bởi (4.157) và (4.158) được xem là bộ giới hạn cứng thông dải. Nó loại bỏ tất cả các thay đổi trên đường bao trong khi đó vẫn duy trì các vị trí chéo không.

Nhiều bộ giải điều chế làm việc dựa vào tính phi tuyến. Ví dụ, giả sử tín hiệu thu $r(t)$ ở đầu vào bộ giải điều chế được xác định bởi:

$$r(t) = A(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (4.159)$$

Cũng giả thiết rằng, nhiệm vụ của bộ giải điều chế là khử phân dương của đường bao như trường hợp AM. Thường dùng bộ tách sóng đường bao để khôi phục đường bao (giải điều chế AM) có đầu ra $z(t)$ được xác định bởi:

$$z(t) = |\tilde{r}(t)| = |A(t)e^{j\phi(t)}| \quad (4.160)$$

Nó là:

$$z(t) = |A(t)| \quad (4.161)$$

Cũng hữu hiệu để khôi phục sóng mang là bộ giải điều chế luật bình phương được định nghĩa bởi:

$$z(t) = |\tilde{r}(t)|^2 = |A(t)|^2 \quad (4.162)$$

Đường bao và các bộ giải điều chế luật bình phương là các ví dụ cho các bộ giải điều chế phi tuyến không nhất quán và được dùng khi không yêu cầu phải khôi phục độ lệch pha sóng mang $\phi(t)$.

Tồn tại nhiều tình huống phải khôi phục độ lệch pha sóng mang chẳng hạn các bộ giải điều chế tín hiệu PM và FM tương tự và các bộ giải điều chế tín hiệu số PSK và QPSK. Khối chức năng cơ bản phải có để khôi phục pha là vòng khoá pha PLL. Vòng khoá pha PLL là một hệ thống phi tuyến và được xét chi tiết ở chương 6.

4.5.2. Hệ thống thay đổi theo thời gian

Đối nghịch với trường hợp phi tuyến, nếu hệ thống là tuyến tính phụ thuộc thời gian, thì có nhiều công cụ trong chương này để phân tích và mô hình hoá hệ thống. Điều này là đúng vì chỉ cần hệ thống là tuyến tính, thì vẫn dùng được tích chập để xây dựng quan hệ vào/ra cho hệ thống trong miền thời gian và quan hệ vào ra của hệ thống trong miền tần số sử dụng hàm truyền đạt. Đáp ứng xung kim hệ thống và hàm truyền đạt hệ thống được định nghĩa cho các hệ thống tuyến tính phụ thuộc thời gian. Tuy nhiên, để tính đến bản chất thay đổi theo thời gian của hệ thống, cả đáp ứng xung kim hệ thống và hàm truyền đạt hệ thống phải được biến đổi so với các định nghĩa bất biến của nó.

Ví dụ: Nếu hệ thống tuyến tính thay đổi theo thời gian, thì quan hệ tín hiệu vào $x(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$ được xác định bởi tích chập các đường bao phức, nghĩa là

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau, t) \cdot \tilde{x}(t - \tau) d\tau \quad (4.163)$$

Trong đó $\tilde{h}(\tau, t)$ là đáp ứng xung kim phụ thuộc thời gian của hệ thống. Đáp ứng xung kim $\tilde{h}(\tau, t)$ được định nghĩa là đáp ứng của hệ thống được đo ở thời điểm t đối với một xung kim được đặt vào ở thời điểm sớm hơn τ giây. Nói cách khác, một xung kim được đặt vào hệ thống ở thời điểm $t - \tau$ và đáp ứng đó đo được ở thời điểm t , sau một khoảng "thời gian trôi" là τ . Đối với hệ thống bất biến, thì đáp ứng xung kim chỉ là một hàm của hiệu số thời gian $t - \tau$. Xung kim đó được coi là được đặt ở thời điểm $t - \tau = 0$ và đáp ứng xung kim là $h(\tau)$ quen thuộc.

Vì đáp ứng xung kim của hệ thống phụ thuộc thời gian là một hàm của hai biến miền thời gian t và τ , nên hàm truyền đạt của hệ thống phụ thuộc thời gian cũng là một hàm của hai biến miền tần số. Nó được định nghĩa là:

$$\tilde{H}(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau, t) \cdot e^{-j2\pi(f_1\tau + f_2t)} d\tau dt \quad (4.164)$$

Theo đó $\tilde{h}(\tau, t)$ & $\tilde{H}(f_1, f_2)$ là cặp chuyển đổi Fourier

Các khái niệm này sẽ được triển khai ở chương 13, các kết quả sẽ là nền tảng lý thuyết để thiết kế, phân tích và mô phỏng các hệ thống tuyến tính phụ thuộc thời gian. Vì vậy, mặc dù chương này chủ yếu tập trung vào hệ thống tuyến tính bất biến nhưng nhiều khái niệm được đề cập sẽ là cơ sở để phát triển phương pháp luận cho việc mô phỏng các hệ thống thay đổi theo thời gian.

Ví dụ 4.11: Xét tình huống được minh họa ở hình 4.16. Một máy thu trong trạng thái chuyển động thu một tín hiệu từ một máy phát được truyền lan theo hai đường truyền. Một đường truyền lan trực tiếp từ máy phát đến máy thu di động. Đường thứ hai phản xạ từ toà nhà. Mô hình truyền lan này được gọi là mô hình truyền lan hai tia. Máy thu di động đang di chuyển. Hậu quả của việc di chuyển là gây ra độ dài truyền dẫn của cả hai đường truyền thay đổi theo thời gian. Hiển nhiên, cả suy hao tín hiệu lẫn trễ truyền lan đối với mỗi đường truyền đều thay đổi theo thời gian. Giả sử, trễ truyền sóng và suy hao đối với đường dẫn thứ n được ký hiệu là $a_n(t)$ và $\tau_n(t)$, thì thí hiệu thu được xác định bởi mô hình kênh là:

$$y(t) = a_1(t) \cdot x(t - \tau_1(t)) + a_2(t) \cdot x(t - \tau_2(t)) = \sum_{n=1}^2 a_n(t) \cdot x(t - \tau_n(t)) \quad (4.165)$$

Ta giả thiết rằng, đưa vào kênh là tín hiệu điều chế tổng quát:

$$x(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \quad (4.166)$$

Thế (4.166) vào (4.165) nhận được:

$$y(t) = \sum_{n=1}^2 a_n(t) \cdot A(t - \tau_n(t)) \cdot \cos[2\pi f_c (t - \tau_n(t)) + \phi(t - \tau_n(t))] \quad (4.167)$$

Vì mô phỏng mức dạng sóng thường được thực hiện bằng cách dùng các tín hiệu đường bao phức, nên ta phải xác định đường bao phức cho cả tín hiệu $x(t)$ và $y(t)$.

Đường bao phức của tín hiệu phát là:

$$\tilde{x}(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (4.168)$$

Ta xác định đường bao phức của tín hiệu thu được định nghĩa bởi (4.167). Vì $a_n(t)$ và $A(t)$ đều là giá trị thực nên (4.167) được viết lại là:

$$y(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^2 a_n(t) \cdot A(t - \tau_n(t)) \cdot e^{j\phi(t - \tau_n(t))} \cdot e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \cdot e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad (4.169)$$

Từ (4.168):

$$\tilde{x}(t - \tau_n(t)) = A(t - \tau_n(t)) \cdot e^{j\phi(t - \tau_n(t))} \quad (4.170)$$

Vì vậy:

$$y(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^2 a_n(t) \tilde{x}(t - \tau_n(t)) \cdot e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \cdot e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad (4.171)$$

Suy hao đường dẫn phức được định nghĩa là:

$$\tilde{a}_n(t) = a_n(t) \cdot e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \quad (4.172)$$

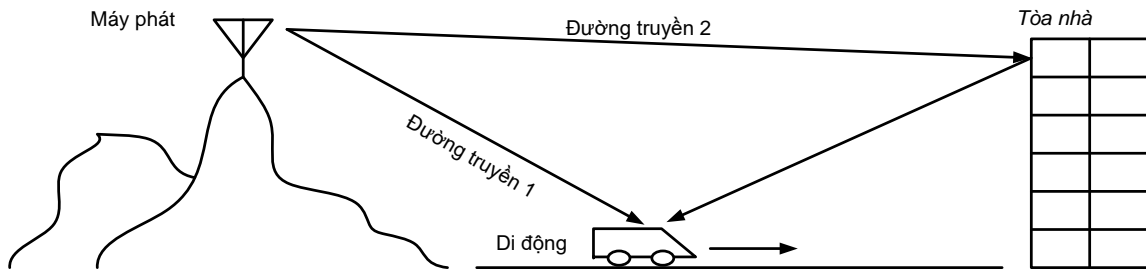
Dẫn đến:

$$y(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^2 \tilde{a}_n(t) \cdot \tilde{x}(t - \tau_n(t)) \cdot e^{-j2\pi f_c t} \right\} \quad (4.173)$$

Vì vậy, đường bao phức tín hiệu vào máy thu là:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n=1}^2 \tilde{a}_n(t) \cdot \tilde{x}(t - \tau_n(t)) \quad (4.174)$$

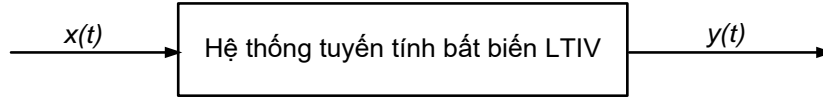
Điều này xác định mô hình kênh thông thấp phức. Mô hình này sẽ lại được xét đến ở chương 14 ở đó xét các mô hình kênh dạng sóng chi tiết hơn.



Hình 4.16: Minh họa kịch bản truyền thông di động hai tia

4.6. Minh họa tín hiệu và hệ thống tuyến tính bất biến

Nếu cho tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ qua hệ LTIV như hình 4.17, thì tín hiệu ra $y(t)$ cũng là tín hiệu chu kỳ, có cùng tần số với tín hiệu vào, vì vậy có khai triển chuỗi Fourier.



Hình 4.17: Tín hiệu chu kỳ cho qua hệ thống tuyến tính bất biến LTIV

Nếu $x(t)$ và $y(t)$ được khai triển là:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \quad (4.175)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \cdot e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \quad (4.176)$$

Thì có thể tìm được quan hệ giữa các hệ số chuỗi Fourier của $x(t)$ và $y(t)$ bằng cách dùng tích chập.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot e^{j2\pi \frac{n}{T_0}(t-\tau)} h(\tau)d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} \tau} d\tau \right) e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} \end{aligned} \quad (4.178)$$

Từ mối quan hệ trước ta có (xem Phụ lục 4B) có trên đĩa CD.

$$y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) \quad (4.179)$$

Trong đó $H(f)$ là hàm truyền đạt của hệ LTIV được cho bởi biến đổi Fourier của đáp ứng xung của nó $h(t)$:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.180)$$

Ví dụ 4.12: Lọc các tín hiệu chu kỳ

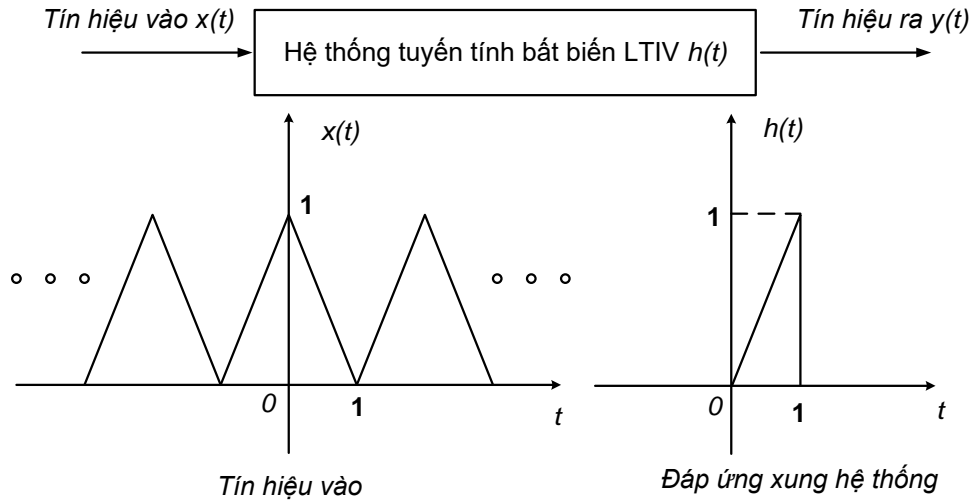
Cho chuỗi xung tam giác $x(t)$ có chu kỳ $T_0 = 2$ được xác định trong một chu kỳ như

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Hãy, (1) xác định hệ số Fourier của $x(t)$; (2) vẽ phổ rời rạc của $x(t)$; (3) giả sử cho tín hiệu này qua hệ thống LTIV có đáp ứng xung được cho bởi:

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Vẽ phổ rời rạc và tín hiệu đầu ra $y(t)$. Biết rằng, dạng sóng của $x(t)$ và $h(t)$ được cho bởi hình 4.18.



Hình 4.18: Tín hiệu vào $x(t)$ và đáp ứng xung của hệ thống $h(t)$

Hệ số của $x(t)$ được xác định bởi:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Lambda(t) e^{-j\pi nt} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t) e^{-j\pi nt} dt \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{T}[\Lambda(t)]_{f=n/2} = \frac{1}{2} \text{SinC}^2\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

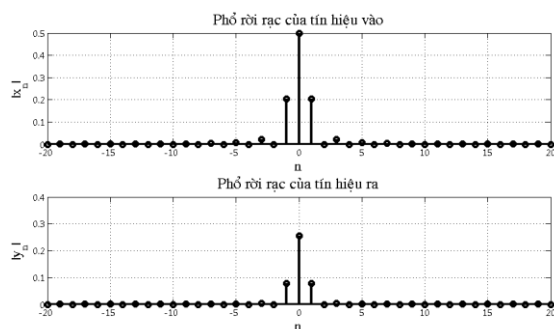
Trong đó ta đã khử khoảng bên ngoài $[-1,1]$, biến đổi Fourier của $\Lambda(t)$ là $\text{SinC}^2(f)$. Kết quả này cũng có thể đạt được bằng cách dùng biểu thức $\Lambda(t)$ và thực hiện lấy tích phân từng phần theo định nghĩa FT thông thường. Thấy rõ, $x_n = 0$ với \forall giá trị n chẵn trừ $n = 0$.

Phổ rời rạc của $x(t)$ và phổ rời rạc của $y(t)$ được kết quả chạy chương trình (hình 4.19).

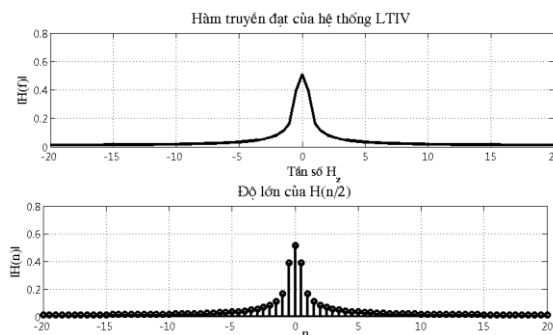
Trước hết, phải xuất phát từ hàm truyền đạt của hệ thống $H(f)$. Mặc dù có thể tìm được bằng phương pháp giải tích, nhưng sẽ làm theo phương pháp số, kết quả phổ biên độ của hàm truyền đạt là $H\left(\frac{n}{T_0}\right) = H\left(\frac{n}{2}\right)$ được cho ở hình 4.20. Sau đó, tìm phổ rời rạc đầu ra $y(t)$ bằng quan hệ :

$$y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) = \frac{1}{2} \text{SinC}^2\left(\frac{n}{2}\right) H\left(\frac{n}{2}\right)$$

Kết quả phổ rời rạc đầu ra được cho ở hình 4.19 kết quả chạy chương trình. Chương trình Matlab được cho ở file **NVD4_CS14.m**.



Hình 4.19: Phổ rời rạc của tín hiệu vào và ra



Hình 4.20: Hàm truyền đạt của hệ thống LTI \$V\$ và độ lớn của \$H(n/2)\$

Một số bài tập cơ bản về: (i) chuỗi Fourier; (ii) biến đổi Fourier; (iii) công suất và năng lượng tín hiệu; (iv) khảo sát tín hiệu và hệ thống tuyến tính bất biến được cho ở dạng ví dụ có trong Phụ lục 4B.