**PHỤ LỤC 7B1**

# biến ngẫu nhiên, quá trình ngẫu nhiên và tín hiệu tất định

**Nội dung** **Trang**



**Một số điểm l- u ý về ký hiệu toán trong biểu diễn**

***Quá trình ngẫu nhiên*: Trong phạm vi xét của ta, một quá trình ngẫu nhiên là hàm của hai biến (biến sự kiện và biến thời gian) nghĩa là quá trình ngẫu nhiên đ- ợc biểu diễn t- ờng minh bởi $\mu(s,t)$, nh- ng để tiện và cũng đ- ợc dùng trong nhiều tài liệu ta cũng ký hiệu là $\mu(t)$.**

***Đ- ờng bao phức tín hiệu và tín hiệu tất định:* Trong tài liệu ta dùng dấu ngã phía trên để ký hiệu để biểu diễn đ- ờng bao phức của tín hiệu thông dải. Còn ở đây xét tín hiệu ngẫu nhiên và tất định, để phân biệt ta dùng dấu ngã cho tín hiệu tất định. Chẳng hạn, ký hiệu $\tilde{\mu}(t)$ là tín hiệu tất định trong khi đó $\mu(t)$ ký hiệu cho tín hiệu ngẫu nhiên.**

***Ta nên liên hệ phần này với phụ lục 7B2*: Phần này đây chỉ trình bầy các vấn đề căn bản về biến ngẫu nhiên, quá trình ngẫu nhiên, tín hiệu tất định vì vậy ta nên tham khảo phần phụ lục 7B, ở đó trình bầy rất súc tích, cô đọng nh- ng rất đầy đủ về lý thuyết xác suất, phân loại quá trình ngẫu nhiên, - ớc tính...**

## 2.1. BIẾN NGẪU NHIÊN

**Các biến ngẫu nhiên có tầm quan trọng nhất vì: Không chỉ để lập mô hình *thống kê* mà cả để lập mô hình *tất định* cho các các kênh vô tuyến ⇒ ta xét tổng quan một số định nghĩa và thuật ngữ cơ bản th- ờng đ- ợc sử dụng cho các biến ngẫu nhiên**

❖ **Thí nghiệm ngẫu nhiên**

**Thí nghiệm ngẫu nhiên là thí nghiệm mà các kết cục của nó không biết tr- ớc đ- ợc**

**+ Điểm mẫu s: là điểm thể hiện các kết cục của một biến ngẫu nhiên**

**+ Sự kiện A={s}: Tập các kết cục có thể có của một thí ngiệm ngẫu nhiên, là một sự kiện (biến cố) A. Biến cố A={s} chỉ có một phần tử s là một biến cố cơ bản**

**+ Không gian mẫu Q: Tập tất cả các kết cục có thể có của một thí nghiệm ngẫu nhiên cho tr- ớc đ- ợc gọi là không gian mẫu Q của thí nghiệm này**

**⇒ Nh- vậy, điểm mẫu là một phần tử của sự kiện, nghĩa là $s \in A$. Sự kiện A là một tập con của không gian mẫu, nghĩa là $A \subset Q$ ⇒ Không gian mẫu Q đ- ợc gọi là sự kiện chắc chắn (*Certain event*), và tập rỗng (*Empty*) hay tập rỗng (*Null*) ký hiệu là $\varnothing$ là sự kiện không thể (Impossible Event)**

➢ ***Tr- ờng -σ***

**Giả sử $\mathcal{A}$ là một lớp (tập hợp) các tập con của không gian mẫu Q. Trong lý thuyết xác suất, $\mathcal{A}$ th- ờng đ- ợc gọi là tr- ờng -σ (hay đại số σ), khi và chỉ khi thoả mãn các điều kiện sau:**

1. **Tập rỗng $\varnothing \in \mathcal{A}$**
2. **Nếu $A \in \mathcal{A}$, thì $Q-A \in \mathcal{A}$, nghĩa là nếu sự kiện A là một phần tử của lớp $\mathcal{A}$ thì cũng là bù của nó**
3. **Nếu $A_n \in \mathcal{A}$ (n=1,2,3....) thì $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, nghĩa là nếu tất cả các biến cố $A_n$ đều là các phần tử của lớp $\mathcal{A}$ thì thì hợp đếm đ- ợc của chúng cũng là các phần tử của $\mathcal{A}$**

➢ ***Không gian khả đo (Measurable Space)***

**Cặp $(Q,\mathcal{A})$ gồm không gian mẫu Q và tr- ờng σ, $\mathcal{A}$ đ- ợc gọi không gian khả đo**

➢ ***Ánh xạ***

**Ánh xạ P: $\mathcal{A} \to IR$ đ- ợc gọi là số đo xác suất *hay* đơn giản là xác suất, nếu thoả mãn các điều kiện sau:**

1. **Nếu $A \in \mathcal{A}$ thì $0 \le P(A) \le 1$**
2. **$P(Q) = 1$**
3. **Nếu $A_n \in \mathcal{A}$ (n=1,2...) với $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ và $A_n \cap A_k \neq \varnothing$ đối với mọi $n \neq k$, thì cũng đ- ợc $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$**

➢ ***<u>Không gian xác suất</u>***

**Không gian xác suất là bộ ba $\{Q, \mathcal{A}, P\}$.**

❖ **Biến ngẫu nhiên**

**Biến ngẫu nhiên $\mu \in Q$ là ánh xạ mà thực hiện gán cho mỗi kết cục s của một thí nghiệm ngẫu nhiên một số $\mu(s)$, (l- u ý rằng, biến ngẫu nhiên là một hàm giá trị thực), nghĩa là**

$$\mu : Q \to IR,\ s \mapsto \mu(s) \tag{2.1}$$

**ánh xạ này có tính chất là: tập $\{s|\mu(s) \le x\}$ là sự kiện của đại số σ đ- ợc xét cho tất cả x∈IR, nghĩa là $\{s|\mu(s) \le x\} \in \mathcal{A} \Rightarrow$ Vì thế biến ngẫu nhiên là một hàm của của các phần tử trong không gian mẫu Q.**

**Xác suất mà biến ngẫu nhiên nhỏ hơn hoặc bằng x, ta sử dụng ký hiệu đơn giản sau:**

$$P(\mu \le x) = P(\{s|\mu(s) \le x\}) \qquad \textbf{(2.2)}$$

❖ **Hàm phân bố tích luỹ**

**Hàm $F_\mu$, đ- ợc định nghĩa bởi**

$$F_\mu : IR \to [0,1],\ x \mapsto F_\mu(x) = P(\mu \le x) \qquad \textbf{(2.3)}$$

**đ- ợc gọi là hàm phân bố tích luỹ của biến ngẫu nhiên μ. Hàm phân bố tích luỹ $F_\mu$ (x) thoả mãn các thuộc tính sau:**

**a) $F_\mu(-\infty) = 0$;**

**b) $F_\mu(\infty) = 1$**

**c) $F_\mu(x_1) \le F_\mu(x_2)$ nếu $x_1 \le x_2$.**

❖ **Hàm mật độ xác suất**

**Hàm $p_\mu$ đ- ợc định nghĩa bởi**

$$p_\mu: IR \to IR,\ x \mapsto p_\mu(x) = \frac{dF_\mu(x)}{dx} \qquad \textbf{(2.4)}$$

**đ- ợc gọi là hàm mật độ xác suất (hay mật độ xác suất hay đơn giản là mật độ) của biến ngẫu nhiên μ, trong đó giả thiết rằng hàm phân bố tích luỹ $F_\mu(x)$ khả vi theo x. Hàm mật độ xác suất $p_\mu(x)$ có các thuộc tính sau:**

**a) $p_\mu(x) \ge 0$ đối với mọi x;**

**b)** $\int_{-\infty}^{\infty} p_\mu(x)dx = 1$

**c)** $F_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\mu(x)dx$.

❖ **Hàm phân bố tích luỹ đồng thời (hay liên hợp)**

**Hàm $F_{\mu_1\mu_2}$ đ- ợc định nghĩa bởi**

$$F_{\mu/\mu_2} : IR^2 \to [0,1],\ (x_1, x_2) \mapsto F_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2) = P(\mu_1 \le x_1, \mu \le x_2) \qquad \textbf{(2.5)}$$

**đ- ợc gọi là hàm phân bố tích luỹ đồng thời (hay hàm phân bố tích luỹ hai biến) của các biến ngẫu nhiên $\mu_1$ và $\mu_2$.**

❖ **Hàm mật độ xác suất đồng thời**

**Hàm $p_{\mu_1\mu_2}$ đ- ợc định nghĩa bởi**

$$p_{\mu_1\mu_2}: IR^2 \rightarrow IR, (x_1, x_2) \mapsto p_{\mu_1\mu_2}(x_1 x_2) = \frac{\partial^2 F_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad \textbf{(2.6)}$$

**đ- ợc gọi là hàm mật độ xác suất đồng thời (hay hàm mật dộ xác suất hai biến hay đơn giản là mật độ hai biến) của các biến ngẫu nhiên $\mu_1$ và $\mu_2$ với giả thiết hàm phân bố tích luỹ đồng thời $F_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2)$ khả vi riêng (từng phần) theo $x_1$ và $x_2$.**

❖ **Độc lập thống kê**

**Các biến ngẫu nhiên $\mu_1$ và $\mu_2$ đ- ợc coi là độc lập thống kê, nếu các sự kiện $\{s|\mu_1(s) \le x_1\}$ và $\{s|\mu_2(s) \le x_2\}$ độc lập với nhau với mọi $x_1, x_2 \in IR$.**

**⇒ Trong tr- ờng hợp này ta có**

$$F_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2) = F_{\mu_1}(x_1).F_{\mu_2}(x_2)$$

$$p_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2) = p_{\mu_1}(x_1).p_{\mu_2}(x_2).$$

❖ **Các hàm mật độ xác suất duyên biên**

**Các *hàm mật độ xác suất duyên biên* (hay các *mật độ biên*) của hàm mật độ xác suất đồng thời $p_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2)$ đ- ợc xác định nh- sau:**

$$p_{\mu_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2)dx_2 \qquad \textbf{(2.7a)}$$

$$p_{\mu_2}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1\mu_2}(x_1, x_2)dx_1 \qquad \textbf{(2.7b)}$$

***⇒ cho phép khử bớt các biến từ hàm nhiều biến.***

❖ **Giá trị kỳ vọng (giá trị trung bình)**

**Đại l- ợng**

$$E\{\mu\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mu}(x)dx \qquad \textbf{(2.8)}$$

**đ- ợc gọi là giá trị kỳ vọng (hay giá trị trung bình hay trung bình thống kê) của biến ngẫu nhiên $\mu$, trong đó E{.} ký hiệu cho toán tử lấy giá trị kỳ vọng biến ngẫu nhiên.**

**Toán tử lấy giá trị kỳ vọng E{.} có tính tuyến tính, nghĩa là thoả mãn hai điều kiện sau:**

$E\{\alpha\mu\} = \alpha \times E\{\mu\}$ **trong đó** $\alpha \in IR$

$E\{\mu_1+\mu_2\} = E\{\mu_1\} + E\{\mu_2\}$

**Nếu $f(\mu)$ là hàm của biến ngẫu nhiên $\mu$, thì giá trị kỳ vọng của $f(\mu)$ đ- ợc xác định theo quan hệ cơ bản sau:**

$$E\{f(\mu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_{\mu}(x)dx) \qquad \textbf{(2.9)}$$

**⇒ Tổng quát hoá cho hai biến $\mu_1$ và $\mu_2$ ta đ- ợc**

$$E\{f(\mu_1,\mu_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)p_{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 \quad \textbf{(2.10)}$$

❖ **Ph- ơng sai**

**Giá trị**

$$\mathrm{Var}\{\mu\} = E\left\{\left(\mu - E\{\mu\}\right)^2\right\}$$

$$= E\{\mu^2\} - \left(E\{\mu\}\right)^2 \quad \textbf{(2.11)}$$

**đ- ợc gọi là ph- ơng sai của μ, trong đó Var{.} ký hiệu cho *toán tử ph- ơng sai*. Ph- ơng sai của một biến ngẫu nhiên μ là số đo về sự tập trung của μ xung quanh giá trị kỳ vọng của nó (hay đánh giá mức độ phân tán so với giá trị trung bình của nó).**

❖ **Đồng ph- ơng sai (hiệp biến) Covariance**

**Hiệp biến của hai biến ngẫu nhiên $\mu_1$ và $\mu_2$ đ- ợc định nghĩa bởi**

$$\mathrm{Cov}\{\mu_1,\mu_2\} = E\{(\mu_1 - E\{\mu_1\})(\mu_2 - E\{\mu_2\})\} \quad \textbf{(2.12a)}$$

$$= E\{\mu_1\mu_2\} - E\{\mu_1\}E\{\mu_2\} \quad \textbf{(2.12b)}$$

❖ **Moment**

**Mômen bậc k của biến ngẫu nhiên μ đ- ợc xác định nh- sau**

$$E\{\mu^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_\mu(x)dx, \ \mathbf{k=0,1,...} \quad \textbf{(2.13)}$$

❖ **Hàm đặc tính (đặc tr- ng)**

**Hàm đặc tính của biến ngẫu nhiên μ đ- ợc xác định nh- là giá trị kỳ vọng**

$$\Psi_\mu(\nu) = E\{e^{j2\pi\nu\mu}\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_\mu(x)e^{j2\pi\nu\mu}dx \quad \textbf{(2.14)}$$

**trong đó ν là một biến ngẫu nhiên giá trị thực. Cần l- u ý rằng $\Psi_\mu(-\nu)$ là biến đổi Fourier của hàm mật độ xác suất $p_\mu(x)$. Hàm đặc tr- ng cho ta xác định *hàm mật độ xác suất* của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê một cách đơn giản (ví dụ phần phụ lục).**

❖ **Bất đẳng thức Chebyshev**

**Nếu cho μ là một biến ngẫu nhiên bất kỳ có giá trị kỳ vọng và ph- ơng sai hữu hạn, thì bất đằng thức Chebyshev**

$$P\left(|\mu - E\{\mu\}| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{Var}\{\mu\}}{\varepsilon^2} \quad \textbf{(2.15)}$$

**đúng cho mọi ε>0. Bất đẳng thức Chebyshev th- ờng đ- ợc sử dụng để nhận các giới hạn biên của xác suất khi tìm đ- ợc μ nằm ngoài đoạn $E\{\mu\} \pm \varepsilon\sqrt{\mathrm{Var}\{\mu\}}$.**

❖ **Định lý giới hạn trung tâm**

***Nếu*** **$\mu_n$ (n=1,2,.... N) là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê có**

**$E\{\mu_n\} = m_{\mu n}$ và**

**$Var\{\mu_n\} = \sigma^2_{\mu n}$ .**

***Thì*, biến ngẫu nhiên**

$$\mu = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} (\mu_n - m_{\mu n}) \qquad \textbf{(2.16)}$$

**đ- ợc phân bố tiệm cận chuẩn (Gausơ) với**

**+ Giá trị kỳ vọng:** **$E\{\mu\} = 0$ và**

**+ Ph- ơng sai:** **$Var\{\mu\} = \sigma^2_\mu = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} (\mu_n - m_{\mu n})$**

**Định lý giới hạn trung tâm đóng vai trò cơ bản trong lý thuyết tiệm cận thống kê. Mật độ của tổng (2.16) với chỉ bẩy biến ngẫu nhiên độc lập thống kê có ph- ơng sai gần giống nhau th- ờng cho ta phép xấp xỉ hoá thành phân bố chuẩn (Gausơ) khá chính xác.**

## 2.1.1. Hàm mật độ xác suất quan trọng

**Ta tổng kết một số hàm mật độ xác suất quan trọng th- ờng đ- ợc sử dụng để mô hình hoá kênh. Đề cập các thuộc tính thống kê nh- : giá trị kỳ vọng và ph- ơng sai. Tóm tắt một số quy tắc tính toán quan trọng để cộng, nhân và biến đổi các biến ngẫu nhiên. Việc dùng mô hình xác suất không những cho phép ta dự đoán đ- ợc kết quả của một thí nghiệm cụ thể mà còn cho phép xác định đ- ợc xác suất mà một kết cục đã cho sẽ rơi vào một khoảng các giá trị cụ thể.**

❖ **Phân bố đều**

➢ ***Lý thuyết***

**Nếu $\theta$ là một biến ngẫu nhiên giá trị thực có hàm mật độ xác suất sau**

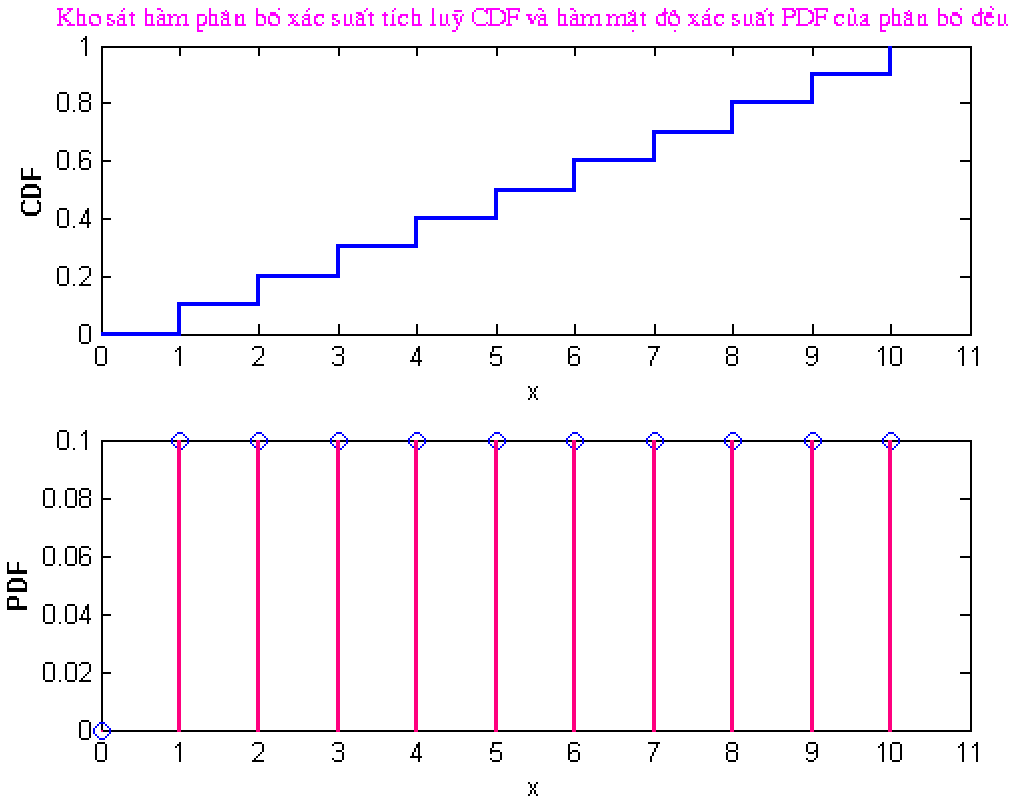
$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0\ , & \textit{nếu khác} \end{cases} \qquad \textbf{(2.17)}$$

**Thì, $P_\theta(x)$ đ- ợc gọi là phân bố đồng đều và $\theta$ đ- ợc coi là có phân bố đồng đều trong khoảng $[-\pi,\pi)$. Các giá trị kỳ vọng và ph- ơng sai t- ơng ứng.**

***Giá trị kỳ vọng*:** **$E\{\theta\} = 0$**

***Ph- ơng sai*:** **$Var = \pi^2/3$.**

➢ ***Khảo sát:*** **Ch- ơng trình Matlab đ- ợc cho ở PL1**




❖ **Phân bố Gausơ (hay phân bố chuẩn)**

**Nếu μ là một biến ngẫu nhiên giá trị thực có hàm mật độ xác suất**

$$p_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu} e^{-\frac{(x-m_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2}}, \ x \in IR \qquad (2.18)$$

**Thì $p_\mu(x)$ đ- ợc gọi là phân bố Gauss (hay phân bố chuẩn) và μ đ- ợc coi là có phân bố Gauss (hay phân bố chuẩn). Trong ph- ơng trình (2.18), đại l- ợng $m_\mu \in IR$ ký hiệu cho giá trị kỳ vọng và $\sigma_\mu^2 \in (0,\infty)$ là ph- ơng sai của μ, nghĩa là**

$$E\{\mu\} = m_\mu \qquad (2.19a)$$

$$Var\{\mu\} = E\{\mu^2\} - m_\mu^2 = \sigma_\mu^2 \qquad (2.19b)$$

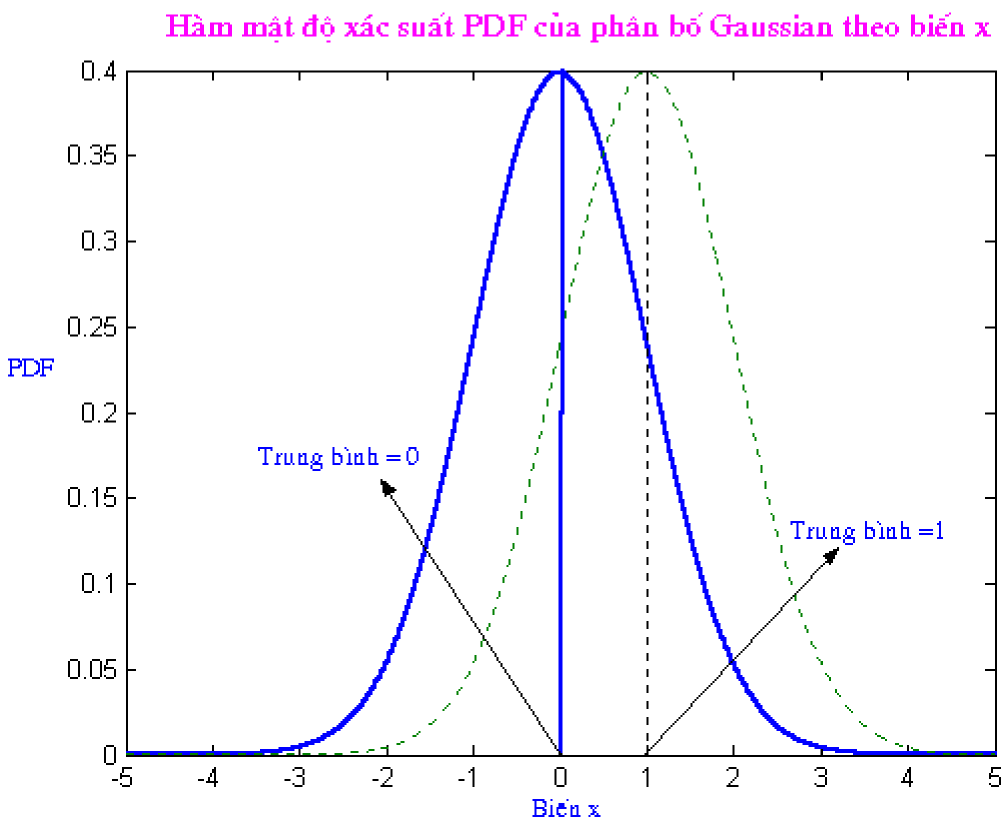
**Để mô tả các thuộc tính của các biến ngẫu nhiên phân bố Gausơ μ ta th- ờng sử dụng ký hiệu rút gọn sau: $\tilde{\mu}$: $(N(m_\mu, \sigma_\mu^2)$ thay cho biểu diễn đầy đủ (2.18). Tr- ờng hợp đặc biệt khi $m_\mu = 0$ và $\sigma_\mu^2 = 1$ thì N(0,1) đ- ợc gọi là phân bố chuẩn tắc**

➢ **Khảo sát**

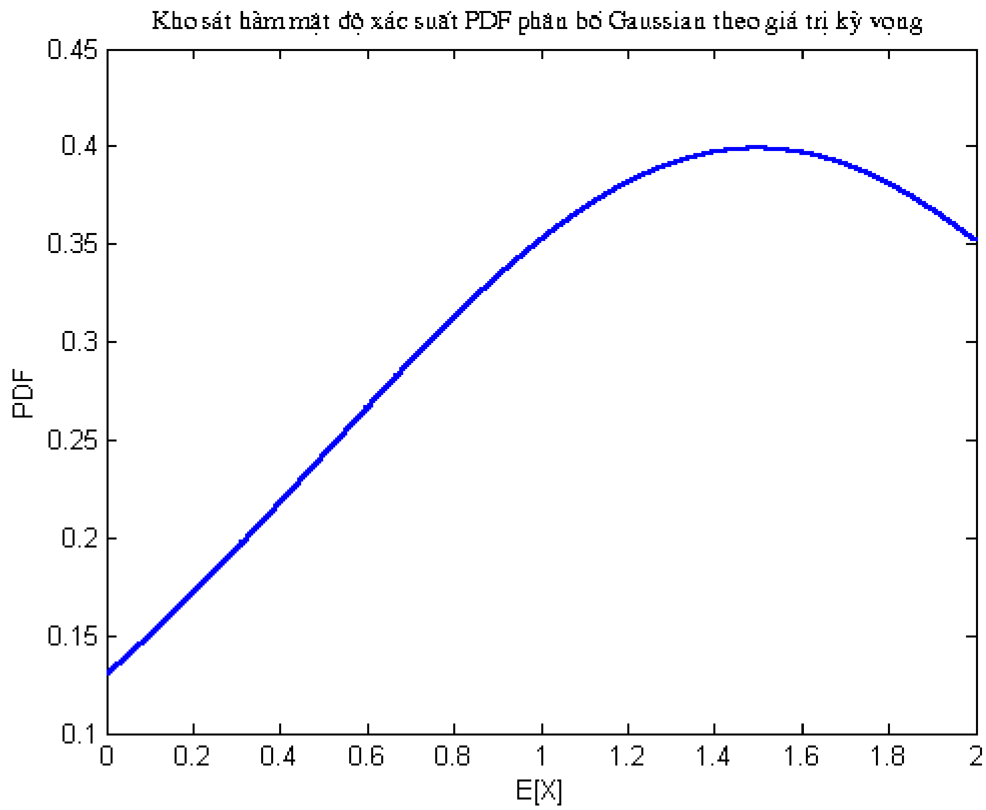
- ***Hàm mật độ xác suất pdf***

**<u>Ví du minh hoa</u>: Ch- ơng trình Matlab đ- ợc cho ở PL2**

***Khảo sát pdf theo biến x***




***Khảo sát pdf theo biến E[μ]***




**<u>Nhận xét:</u> Có thể khảo sát hàm mật độ pdf theo x, $\sigma_\mu$, E[μ]**

**+ Khảo sát hàm mật độ theo x, thì cố định các giá trị $\sigma_\mu$, E[$\mu$].**

**+ Khảo sát hàm mật độ theo $\sigma_\mu$, thì cố định các giá trị x, E[$\mu$].**

**+ Khảo sát hàm mật độ theo E[$\mu$], thì cố định các giá trị $\sigma_\mu$, và x.**

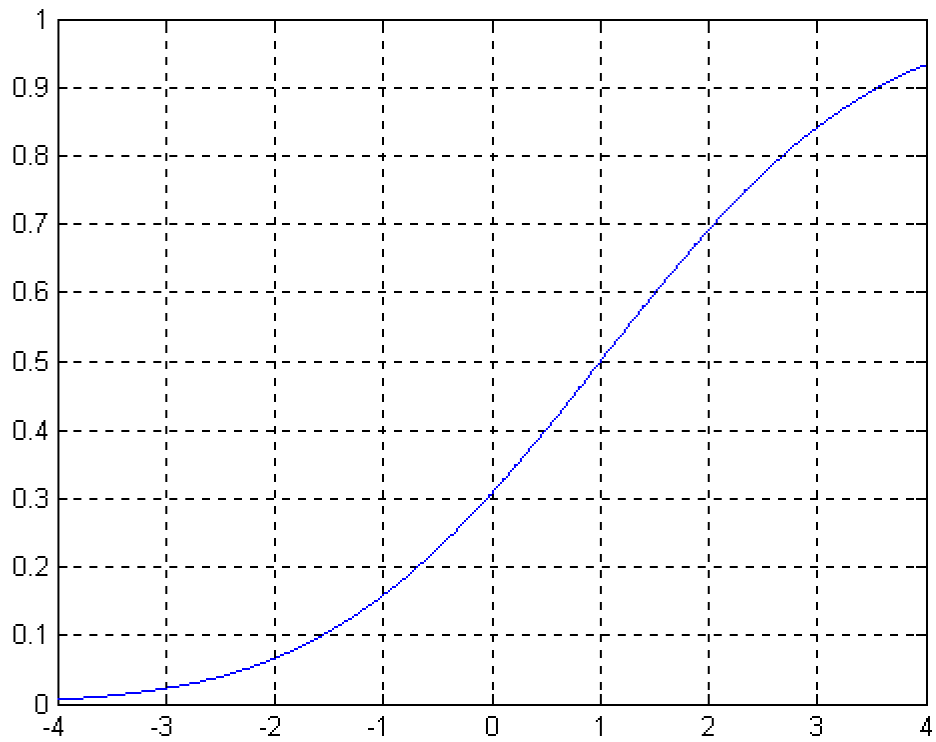
- ***Hàm phân bố tích lỹ cdf***

**CDF = normcdf(X,MU,SIGMA) thực hiện tính cdf tại mỗi giá trị X (có thể 1 giá trị hoặc vector) t- ơng ứng với các thông số MU và SIGMA.**

$$p = F(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

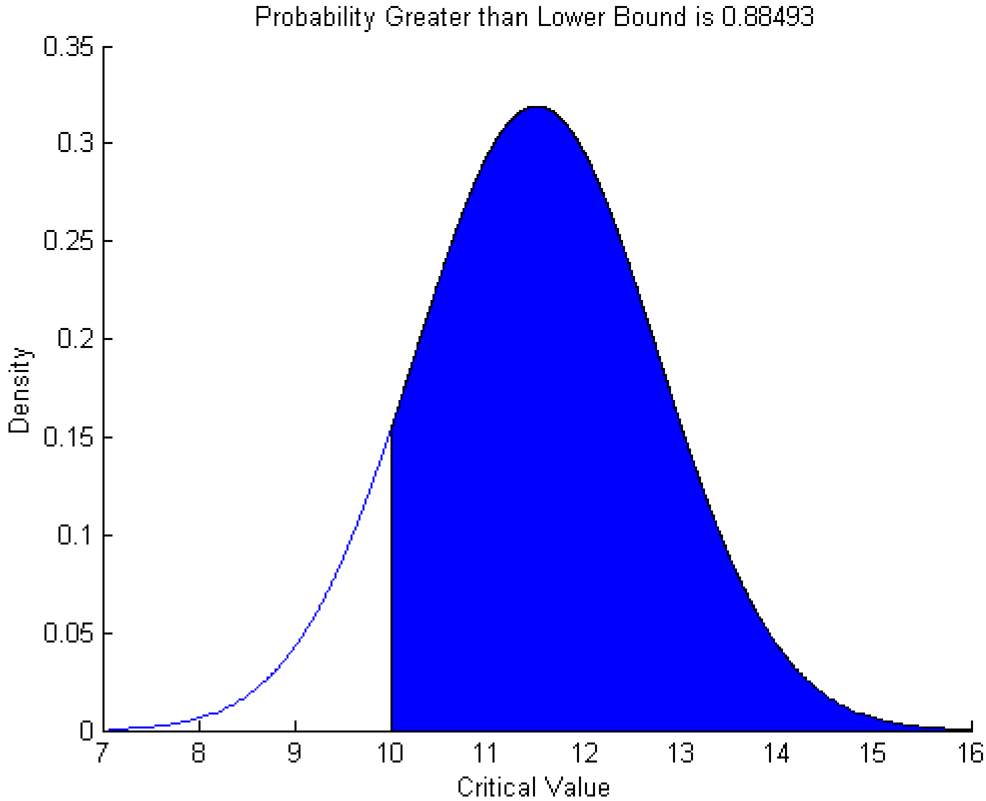
**<u>Ví dụ</u> Khảo sát theo biến x**

```
X = -4:0.001:4;
Mu = 1;
Sigma = 2;
Plot(x,normcdf(x,mu,sigma));
```

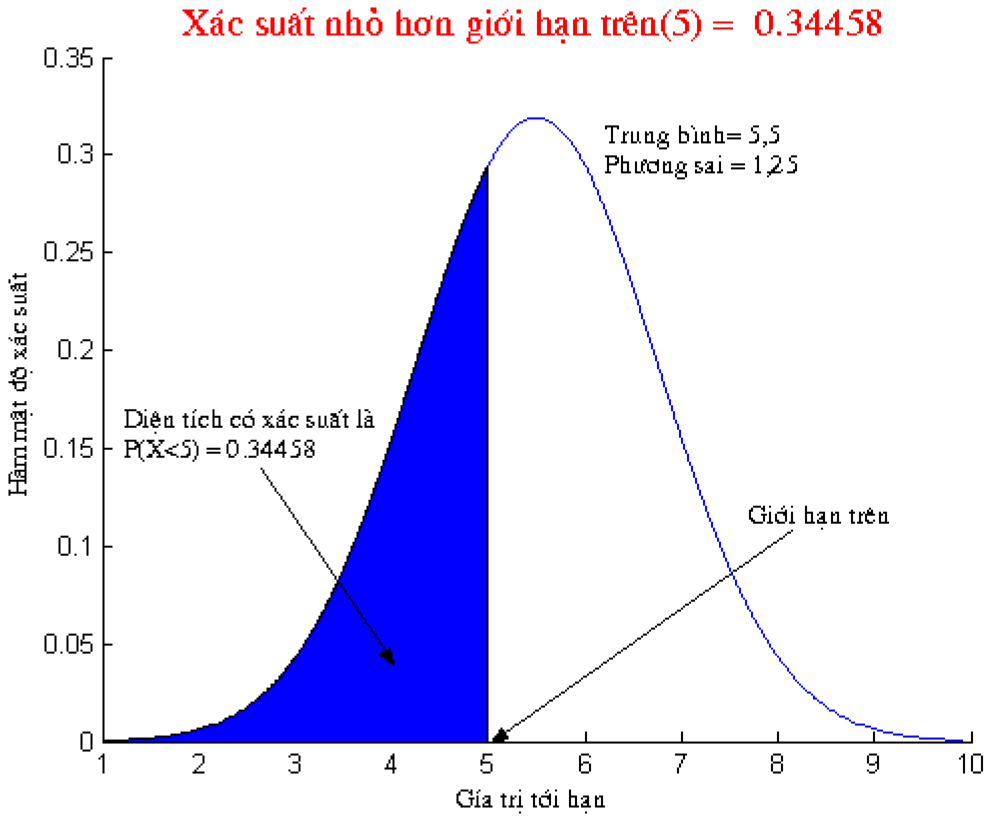



**Hàm mfcnormspec:** **Vẽ hàm mật độ xác suất trong khoảng xác định (PL1).**

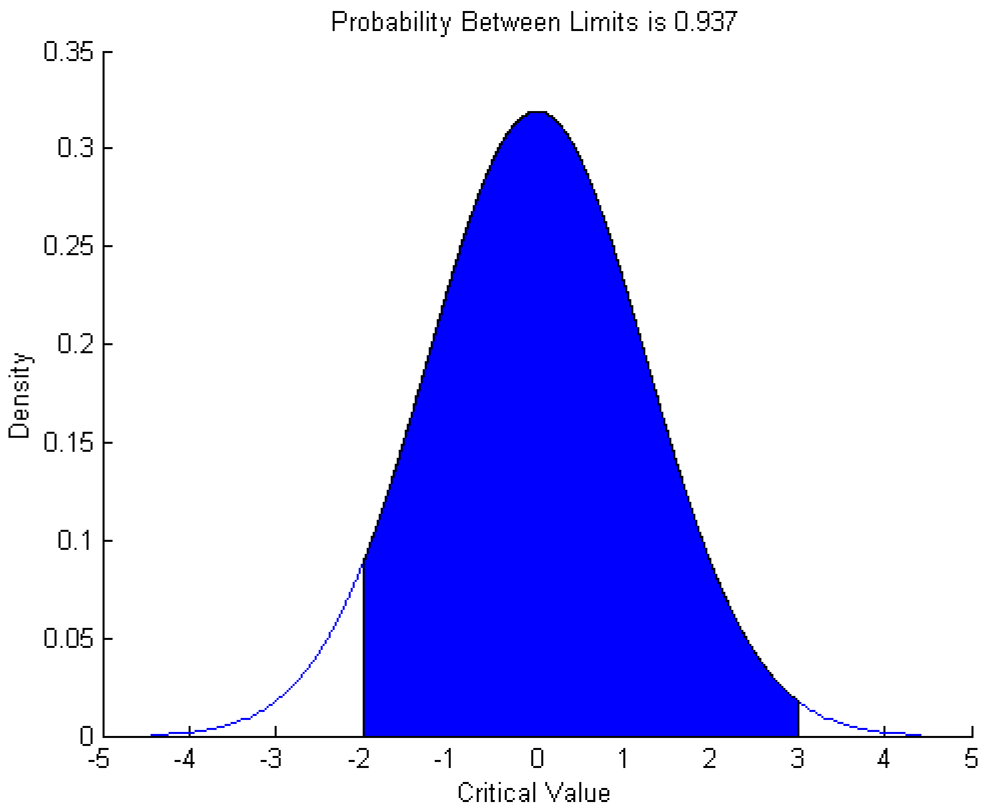
**<u>Ví dụ</u>: mfcnormspec([10 Inf],11.5,1.25)**




**mfcnormspec([-Inf 5],5.5,1.25)**




**mfcnormspec([-2 3],0,1.25)**




**<u>Nhận xét:</u> Ta thấy rõ tính hữu hiệu của hàm mfcnormspec cho phép khảo sát tính toán các khoảng giả định thống kê theo các thông số đặc tr- ng của phân bố Gausơ đặc biệt ứng dụng trong các hàm lỗi erf**

❖ **Phân bố Gausơ đa biến**

➢ ***Lý thuết***

***Nếu*** **xét n biến ngẫu nhiên phân bố Gausơ giá trị thực $\mu_1$, $\mu_2$... $\mu_n$ t- ơng ứng có các giá trị kỳ vọng $m_{\mu i}$ (i=1,2,....,n) và ph- ơng sai $\sigma^2_{\mu i}$ (i=1, 2,....., n).**

***Thì***, **hàm Gausơ đa biến (hay phân bố chuẩn đa biến) của các biến ngẫu nhiên Gausơ $\mu_1$, $\mu_2$,...., $\mu_n$ đ- ợc xác định bởi**

$$p_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}(x_1, x_2, ...., x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \sqrt{\det C_\mu}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - m_\mu\right)^T \times C_\mu^{-1} \times \left(x - m_\mu\right)\right] \qquad \textbf{(2.20)}$$

**trong đó T ký hiệu cho chuyển vị của vectơ (hay ma trận).**

**Trong biểu thức trên x và $m_\mu$ là các vectơ cột đ- ợc xác định nh- sau**

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in IR^{n\times 1} \qquad \textbf{(2.21)}$$

$$m_\mu = \begin{pmatrix} E\{\mu_1\} \\ E\{\mu_2\} \\ . \\ . \\ E\{\mu_n\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{\mu 1} \\ m_{\mu 2} \\ . \\ . \\ m_{\mu n} \end{pmatrix} \in \mathbf{IR}^{n\times 1} \qquad \textbf{(2.21b)}$$

**det$C_\mu$ ký hiệu cho định thức của ma trận đồng ph- ơng sai và $\left(C_\mu^{-1}\right)$ ký hiệu cho nghich đảo của ma trận đồng ph- ơng sai**

$$C_\mu = \begin{pmatrix} C_{\mu_1\mu_1} & C_{\mu_1\mu_2} & . & . & . & C_{\mu_1\mu_n} \\ C_{\mu_2\mu_1} & C_{\mu_2\mu_2} & . & . & . & C_{\mu_2\mu_n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ C_{\mu_n\mu_1} & C_{\mu_n\mu_2} & . & . & . & C_{\mu_n\mu_n} \end{pmatrix} \in IR^{n\times n} \qquad \textbf{(2.22)}$$

**Các phần tử của ma trận đồng ph- ơng sai (hiệp biến) đ- ợc xác định nh-  sau**

$$C_{\mu_i\mu_j} = Cov(\mu_i, \mu_j) = E\{(\mu_i - m_{\mu i})(\mu_j - m_{\mu j})\} \qquad \textbf{(2.23)}$$

**$\Rightarrow$ Rõ thấy,** $C_{\mu_i\mu_i} = \sigma_{\mu i}{}^2$ **(i=1,2,..,n)**

**Nếu n biến ngẫu nhiên $\mu_i$ có phân bố chuẩn và không t- ơng quan từng đôi một $\Rightarrow$ thì ma trận đồng ph- ơng sai $C_\mu$ sẽ là ma trận đ- ờng chéo với các phần tử đ- ờng chéo $\sigma^2_{\mu_i}$. Trong tr- ờng hợp này hàm mật độ xác suất đồng thời (2.20) biến đổi thành tích cả n phân bố Gauss của các biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn $\mu_i$ ~N($m_{\mu i}, \sigma^2_{\mu i}$). Điều này có nghĩa là các biến ngẫu nhiên $\mu_i$ là các biến độc lập thống kê đối với mọi i=1,2,....,n.**

- ***Khảo sát***

**Khảo sát cho tr- ờng hợp hai biến hay pdf phân phối Gausơ 2 chiều. Trung bình $m_\mu$ và ma trận hiệp biến $C_\mu$ cho tr- ờng hợp này là**

$$m_\mu = \begin{bmatrix} m_{\mu_1} \\ m_{\mu_2} \end{bmatrix}, \qquad C_\mu = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\mu 1} & C_{\mu_1\mu_2} \\ C_{\mu_1\mu_2} & \sigma^2_{\mu 2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(PL2.22)}$$

**trong đó Monent trung tâm hợp $C_{\mu 1\mu 2}$ đ- ợc định nghĩa là**

$$C_{\mu_1\mu_2} = Cov\{\mu_{1i}, \mu_{2j}\} = E\{(\mu_1 - m_{\mu_1})(\mu_2 - m_{\mu_2})\} \qquad \textbf{(PL2.23)}$$

**Để thuận tiện ta định nghĩa hiệp biến danh định.**

$$\rho_{\mu i\mu j} = \frac{C_{\mu_i\mu_j}}{\sigma_{\mu i}.\sigma_{\mu j}}, \quad i \neq j \qquad \textbf{(PL224)}$$

**trong đó** $0 \le \left|\rho_{\mu i\mu j}\right| \le 1$**. Khi liên hệ với tr- ờng hợp hai chiều, th- ờng bỏ qua chỉ số bên d- ới đối với $C_{\mu 1\mu 2}$ và** $\rho_{\mu_1\mu_2}$**. Vì vậy ma trận hiệp biến đ- ợc biểu diễn là**

$$C_\mu = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho.\sigma_1.\sigma_2 \\ \rho.\sigma_1.\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(PL2.225)}$$

**Nghịch đảo của ma trận hiệp biến này là**

$$C_\mu^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2.\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho.\sigma_1.\sigma_2 \\ -\rho.\sigma_1.\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(PL2.226)}$$

**Và định thức của ma trận hiệp biến là**

$$\det C_\mu = \sigma_1{}^2.\sigma_2{}^2(1-\rho^2). \qquad \textbf{(PL2.227)}$$

**Thế nghịch đảo của ma trận đồng ph- ơng sai $C_\mu^{-1}$ vào ph- ơng trình (2.20) đ- ợc pdf hai biến d- ới dạng sau**

$$p_{\mu 1\mu 2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{\sigma_2{}^2(x_1-m_1)^2 - 2\rho.\sigma_1\sigma_2(x_1-m_1)(x_2-m_2) + \sigma_1{}^2(x_2-m_2)^2}{2\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2(1-\rho^2)}\right]$$

**(PL2.228)**

***Ta l- u ý rằng*** **khi hệ số hiệp biến $\rho = 0$ thì hàm pdf hợp $p_{\mu 1\mu 2}(x_1,x_2)$ ph- ơng trình (PL2.228) chuyển thành tích của hai hàm mật độ xác xuất riêng $p_{\mu 1}(x_1)\times p_{\mu 2}(x_2)$, trong đó $p_{\mu i}(x_i)$ i =1,2 là các hàm pdf duyên biên (marginal).**

$$\begin{aligned} p_{\mu 1\mu 2}(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1.\sigma_2}\exp\left[-\frac{\sigma_2{}^2(x_1-m_1)^2 + \sigma_1{}^2(x_2-m_2)^2}{2.\sigma_2{}^2.\sigma_1{}^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{\sigma_2{}^2(x_1-m_1)^2}{2.\sigma_2{}^2.\sigma_1{}^2}\right]\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{\sigma_1{}^2(x_2-m_2)^2}{2.\sigma_2{}^2.\sigma_1{}^2}\right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x_1-m_1)^2}{2.\sigma_1{}^2}\right]}_{p_{\mu 1}(x_1)}\times\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{(x_2-m_2)^2}{2.\sigma_2{}^2}\right]}_{p_{\mu 2}(x_2)} \\ &= p_{\mu 1}(x_1)\times p_{\mu 2}(x_2) \end{aligned} \qquad \textbf{(PL2.229)}$$

**Vì $\rho$ đánh giá sự t- ơng quan giữa $\mu_1$ & $\mu_2$, nên ta thấy rằng khi các biến ngẫu nhiên $\mu_1$ & $\mu_2$, *không t- ơng quan* nhau, thì chúng cũng *độc lập* thống kê nhau (*đây là thuộc tính quan trọng của biến ngẫu nhiên Gausơ mà nói chung các biến ngẫu nhiên phân phối khác không có đ- ợc, nghĩa là độc lập thì không t- ơng quan nh- ng không t- ơng quan ch- a chắc đã độc lập thống kê*).**

**⇒ Mở rộng cho các biến ngẫu nhiên phân phối Gausơ n chiều. Nghĩa là, nếu $\rho_{ij} = 0$ với $i\neq j$, thì các biến ngẫu nhiên $\mu_i$ (i=1,2,...,n) không t- ơng quan nhau và vì thế chúng độc lập thống kê nhau.**

- **Xét biến đổi tuyến tính n biến ngẫu nhiên Gausơ $\mu_i$ (i=1,2,..,n) có trung bình $m_\mu$ và ma trận hiệp biến $C_\mu$.**

**Đặt** $\quad Y = A\mu \quad$ **(PL2.2210)**

**Trong đó A là ma trận không đơn trị (nonsingular matrix). Biết rằng Jacobian của chuyển đổi này là J =1/detA. Vì $\mu$ = $A^{-1}$.Y, nên ta có thể thế $\mu$ vào ph- ơng trình 2.20 và vì vậy ta đ- ợc pdf hợp của Y là.**

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det C_\mu}\,\det A}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(A^{-1}y-m_\mu\right)^T \times C_\mu^{-1}\times\left(A^{-1}y-m_\mu\right)\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det Q}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(y-m_Y\right)^T\times Q^{-1}\times\left(y-m_Y\right)\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(PL2.2211)}$$

**Trong đó vector $m_Y$ và ma trận Q đ- ợc định nghĩa**

$$m_Y = Am_\mu \qquad \textbf{(PL2.2212)}$$

$$Q = AC_\mu A^T \qquad \textbf{(PL2.2213)}$$

**Vì vậy ta đã chỉ ra rằng chuyển đổi tuyến tính tập các biến ngẫu nhiên phân phối Gausơ hợp cho ta tập các biến ngẫu nhiên phân phối Gausơ hợp khác.**

**⇒ Giả sử ta muốn chuyển tuyến tính tập các biến Gausơ hợp để có đ- ợc n biến ngẫu nhiên phân phối Gausơ độc lập thống kê khác. Ma trận A nên đ- ợc chọn ra sao? Từ phần đã đề cập trên, ta biết rằng các biến ngẫu nhiên phân phối Gausơ là độc lập thống kê nếu chúng không t- ơng quan nhau theo từng cặp (pairwise) nghĩa là nếu ma trận hiệp biến Q là ma trận đ- ờng chéo.⇒Vì vậy, ta phải có.**

$$AC_\mu A^T = D \qquad \textbf{(PL2.2214)}$$

**Trong đó D là ma trận đ- ờng chéo. Ma trận $C_\mu$ là ma trận hiệp biến; vì vậy nó là số d- ơng xác định.**

**Một giải pháp để lựa chọn A là ma trận trực giao ($A^T$ = $A^{-1}$) chứa các cột mà là các vector riêng (Eigenvector) của ma trận hiệp biến $C_\mu$. Vì vậy, D là ma trận đ- ờng chéo có các phần tử đ- ờng chéo bằng với giá trị riêng (Eigenvalue) của $C_\mu$.**

***<u>Ví du</u>*: Xét pdf phân phối Gausơ hai biến có ma trận hiệp biến là**

$$C_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Hãy xác định chuyển đổi A sao cho có đ- ợc các biến ngẫu nhiên không t- ơng quan.**

- ***Tr- ớc hết,***

**Giải ph- ơng trình để tìm các giá trị riêng của $C_\mu$.**

**Ph- ơng trình đặc tr- ng là.**

$$\begin{aligned} \det\left(C_\mu - \lambda I\right) &= 0 \\ (1-\lambda)^2 &= 0 \\ \lambda &= 3/2,\ 1/2 \end{aligned}$$

- ***Tiếp theo,***

**Xác định hai vector riêng. Nếu a ký hiệu vector riêng, thì ta có**

**$(M - \lambda I)a = 0$**

**với $\lambda_1 = 3/2$ và $\lambda_2 = 1/2$, thì ta có đ- ợc các vector riêng là**

$$a_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \end{bmatrix}$$

**Vì vậy**

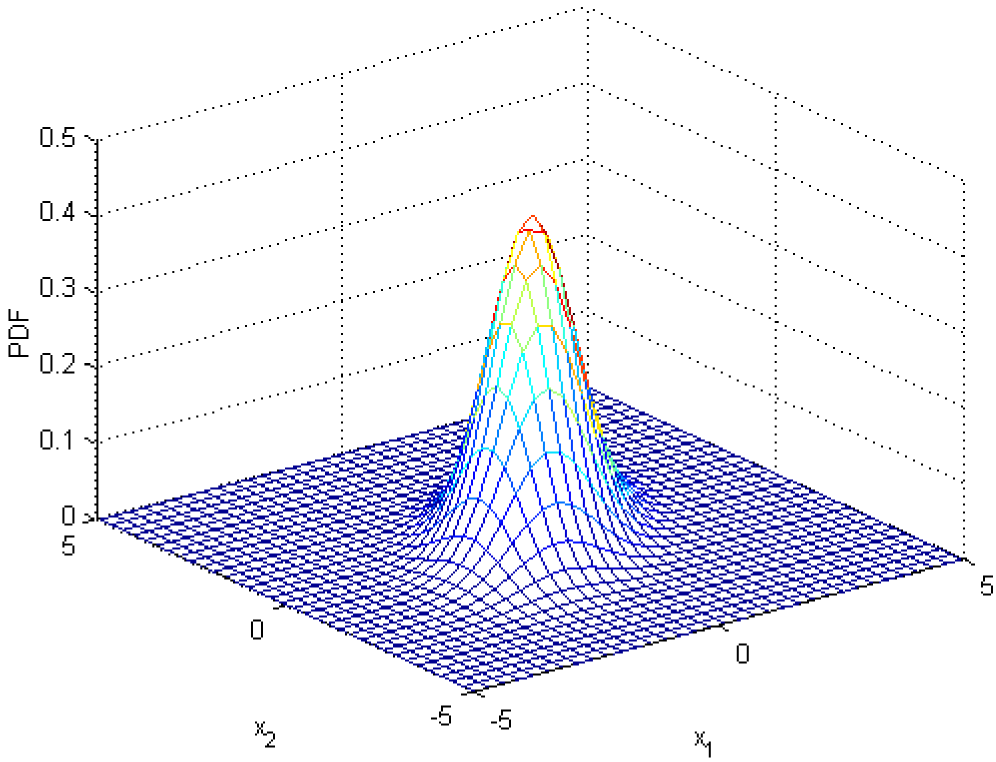
$$A = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Dễ dàng kiểm tra thấy $A^{-1} = A^T$ và**

**$AC_\mu A^T = D$**

**Trong đó các phần tử đ- ờng chéo của D là 3/2 và 1/2**

**Ch- ơng trình Matlab thực hiện cho hai biến (Xem PL2)**




***Thay đổi các giá trị $m_\mu$ và $C_\mu$ để khảo sát.***

- **Phân bố Rayleigh**
  - ***Lý thuyết***

**Ta xét hai biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn độc lập thống kê trung bình không $\mu_1$ và $\mu_2$, mỗi biến có ph- ơng sai $\sigma_0^2$, nghĩa là $\mu_1,\mu_2 \sim N(0,\sigma_0^2)$. Ngoài ra từ hai biến $\mu_1$**

**và $\mu_2$ ta rút ra một biến mới $\zeta = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$ . Khi này $\zeta$ sẽ là một biến phân bố Rayleigh. Hàm mật độ xác suất $p_\zeta(x)$ của các biến $\zeta$ phân bố Rayleigh đ- ợc xác dịnh nh- sau**

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_0^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \textbf{(2.24)}$$

**Các biến ngẫu nhiên phân bố Rayleigh $\zeta$ có**

***Giá trị kỳ vọng***

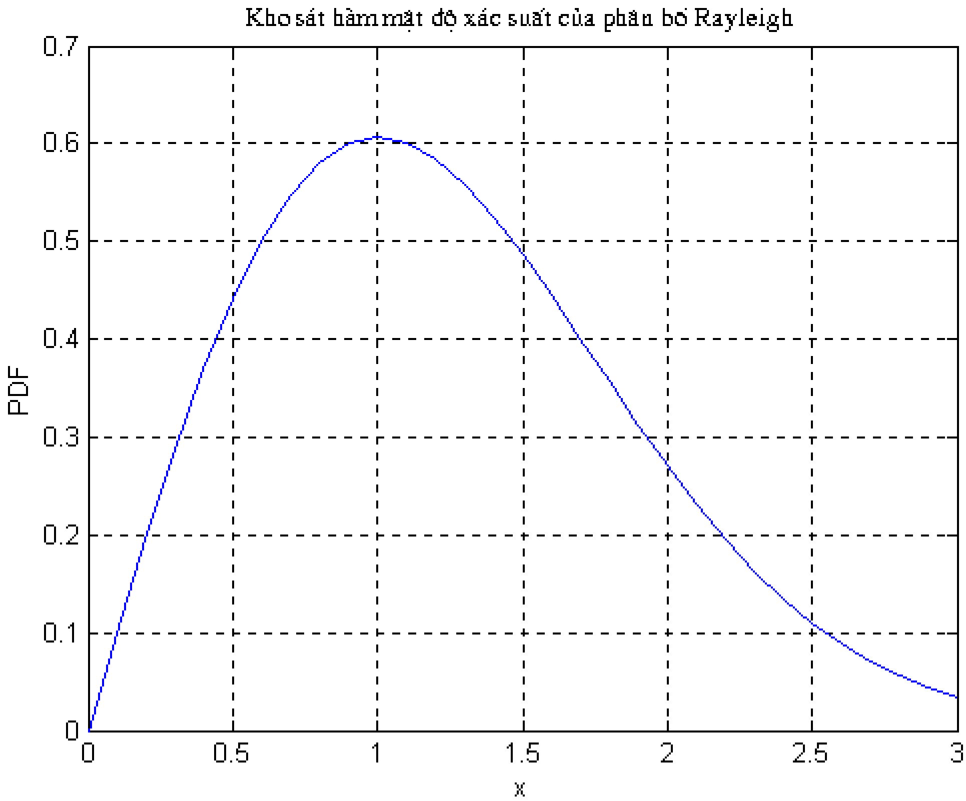
$$E\{\zeta\} = \int_0^\infty x p_\zeta(x) dx = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \textbf{(2.25a)}$$

***Ph- ơng sai***

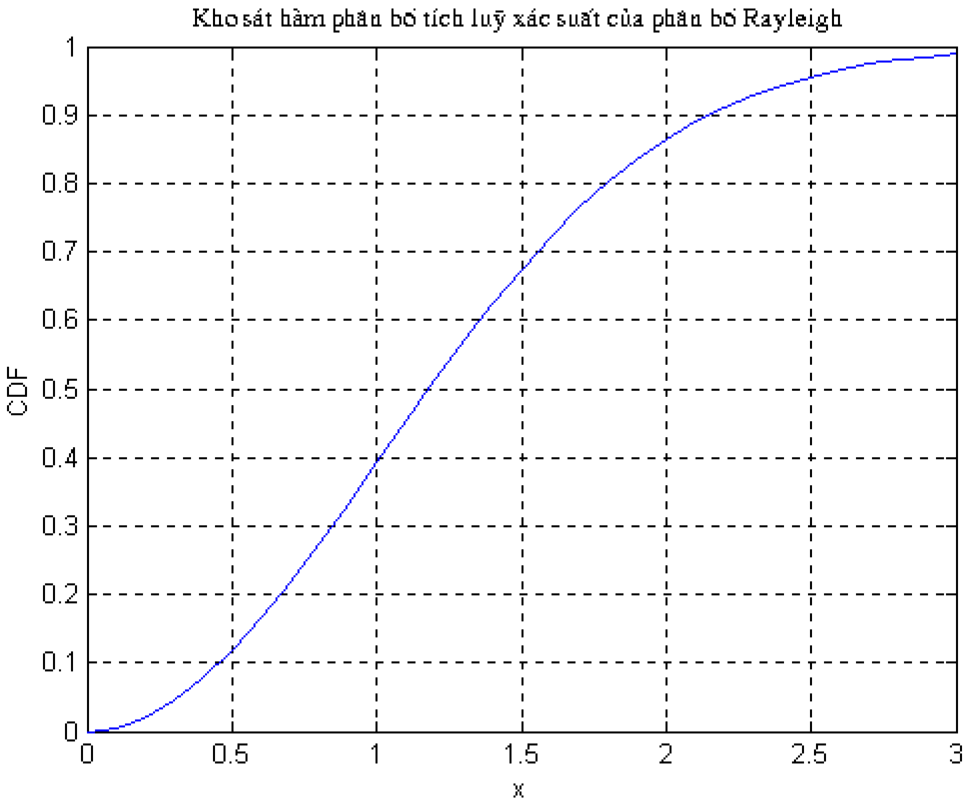
$$\begin{aligned} Var\{\zeta\} &= E[x^2] - E^2[r] \\ &= \int_0^\infty x^2 p_\zeta(x) dx - \frac{\sigma_0^2 \pi}{2} \\ &= \sigma_0^2 \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad \textbf{(2.25b)}$$

- ***Khảo sát***

  **- Hàm mật độ xác suất pdf phân bố Rayleigh. Ch- ơng trình Matlab đ- ợc cho ở PL3**




**- Hàm phân bố tích luỹ xác suất CDF phân bố Rayleigh Ch- ơng trình Matlab đ- ợc cho ở PL4**




**Thay đổi các thông số để khảo sát**

❖ **Phân bố Rice**

***Nếu*** **$\mu_1, \mu_2 \sim N(0, \sigma_0^2)$ và $\rho \in IR$.**

***Thì*** **biến ngẫu nhiên $\xi = \sqrt{(\mu_1 + \rho)^2 + \mu_2^2}$ đ- ợc gọi là biến ngẫu nhiên có phân bố Rice. Hàm mật độ xác suất $p_\xi(x)$ của các biến ngẫu nhiên $\xi$ phân bố Rice là**

$$p_\zeta(x) = \underbrace{\begin{cases} \frac{x}{\sigma_0^2} e^{-\frac{x^2+\rho^2}{2\sigma_0^2}} I_0\left(\frac{x\rho}{\sigma_0^2}\right), & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}_{\text{Rice}} : \underbrace{\begin{cases} \frac{x}{\sigma_0^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}_{\text{Rayeigh}} \qquad \textbf{(2.26)}$$

**trong đó $I_0(.)$ ký hiệu cho hàm Bessel biến đổi bậc 0.**

**$\Rightarrow$ Khi $\rho = 0$, phân bố Rice $p_\xi(x)$ trở thành phân bố Rayleigh. Mômen bậc một và hai của các biến phân bố Rice $\xi$ nh- sau**

➢ ***Moment bậc một (kỳ vọng)***

$$E\{\xi\} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\sigma_0^2}} \left\{ \left(1 + \frac{\rho^2}{2\sigma_0^2}\right) I_0\left(\frac{\rho^2}{4\sigma_0^2}\right) + \frac{\rho^2}{2\sigma_0^2} I_1\left(\frac{\rho^2}{4\sigma_0^2}\right) \right\} \qquad \textbf{(2.27a)}$$

➢ ***Mômen bậc hai (ph- ơng sai)***

$$E\{\xi^2\} = 2\sigma_0^2 + \rho^2 \qquad \textbf{(2.27b)}$$

**trong đó $I_n(.)$ ký hiệu cho hàm Bessel cải tiến (biến đổi) bậc n. Từ (2.27a), (2.27b) và sử dụng (2.11), ta có thể dễ ràng tính toán ph- ơng sai của các biến ngẫu nhiên $\xi$ phân bố Rice.**

❖ **Phân bố log**

**<u>Nếu</u> $\mu$ là một biến ngẫu nhiên phân bố Gauss có giá trị kỳ vọng $m_\mu$ và ph- ơng sai $\sigma_\mu^2$, nghĩa là $\mu \sim N(m_\mu, \sigma_\mu^2)$,**

**<u>Thì</u> biến ngẫu nhiên $\lambda = e^\mu$ đ- ợc gọi là có phân bố chuẩn log.**

**Hàm mật độ xác suất $p_\lambda(x)$ của biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn log $\lambda$ đ- ợc xác định nh- sau**

$$p_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu x} e^{-\frac{(\ln x - m_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.28)}$$

➢ ***Giá trị kỳ vọng của $\lambda$***

$$E\{\lambda\} = e^{m_\mu + \frac{\sigma_\mu^2}{2}} \qquad \textbf{(2.29)}$$

➢ ***Ph- ơng sai của $\lambda$***

$$\mathrm{Var}\{\lambda\} = e^{2m_\mu+\sigma_\mu^2}\left(e^{\sigma_\mu^2} - 1\right) \qquad \textbf{(2.30)}$$

❖ **Phân bố Suziki**

**Ta xét một biến ngẫu nhiên phân bố Rayleigh $\zeta$ có hàm mật độ xác suất $p_\zeta(x)$ xác định theo (2.24) và một biến ngẫu nhiên $\lambda$ phân bố log có hàm mật độ xác suất $p_\lambda(x)$ xác định theo (2.28). Ta coi rằng $\varsigma$ và $\lambda$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê. Ngoài ra cho $\eta$ là một biến ngẫu nhiên đ- ợc xác định bằng tích $\eta = \varsigma.\lambda$. Thì hàm mật độ xác suất $p_\eta(z)$ của biến ngẫu nhiên $\eta$ là**

$$p_\eta(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\sqrt{2\pi}\sigma_0^2\sigma_\mu}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{y^2}.e^{-\frac{(\ln y - m_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2}}, & z \ge 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.30)}$$

**đ- ợc gọi là phân bố Suzuki và biến ngẫu nhiên $\eta$ có**

➢ ***Giá trị kỳ vọng***

$$E\{\eta\} = \sigma_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{m_\mu+\frac{\sigma_\mu^2}{2}} \qquad \textbf{(2.31)}$$

➢ ***Ph- ơng sai***

$$\mathrm{Var}\{\eta\} = \sigma_0^2.e^{2m_\mu+\sigma_\mu^2}.\left(2e^{\sigma_\mu^2} - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \textbf{(2.32)}$$

❖ **Phân bố Nakagami**

**Ta xét một biến ngẫu nhiên $\omega$ đ- ợc phân bố theo hàm mật độ xác suất sau**

$$p_\varpi x) = \begin{cases} \dfrac{2m^m x^{2m-1} e^{-(m/\Omega)x^2}}{\Gamma(m)\Omega^m}, & m \ge 1/2,\ x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.33)}$$

**Thì $\omega$ ký hiệu cho một biến ngẫu nhiên có phân bố Nakagami và t- ơng ứng với hàm mật độ xác suất $p_\omega(x)$ đ- ợc gọi là phân bố Nakagami hay phân bố m. Trong (2.33) ký hiệu $\Gamma(.)$ là hàm Gamma nhận giá trị đặc biệt sau: $\Gamma(1) = 1$ và $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, moment bậc hai của biến ngẫu nhiên $\omega$ đ- ợc đ- a vào bởi $\Omega = E\{\omega^2\}$ và thông số m ký hiệu cho giá trị ngịch đảo của ph- ơng sai đ- ợc chuẩn hoá theo $\Omega^2$, nghĩa là** $m = \Omega^2 \Big/ E\left\{(\omega^2 - \Omega)^2\right\}$.

**$\Rightarrow$ Từ phân bố Nakagami, ta nhận đ- ợc phân bố Gauss một phía ($x \ge 0$) và phân bố Rayleigh nh-  là các tr- ờng hợp đặc biệt khi m =1/2 và m = 1. Trong các giới hạn nhất dịnh, phân bố Nakagami xấp xỉ hoá cả hai phân bố Rice và phân bố chuẩn log.**

## 2.1.2. Hàm của các biến ngẫu nhiên

**Trong một số phần của cuốn sách này ta sẽ xét các hàm hai hay nhiều biến ngẫu nhiên. Chẳng hạn ta sẽ th- ờng xuyên sử dụng các quy tắc cơ bản về cộng, nhân và chuyển đổi các biến ngẫu nhiên. Vì thế ta sẽ xét tổng quan các nguyên tắc tóan học cần thiết.**

❖ **Cộng hai biến ngẫu nhiên**

***<u>Nếu</u>*** **$\mu_1$ và $\mu_2$ là hai biến ngẫu nhiên đ- ợc đặc tr- ng thống kê bởi hàm mật độ xác suất đồng thời $p_{\mu1\mu2}(x_1,x_2)$.**

***<u>Thì</u>*** **ta đ- ợc hàm mật độ xác suất của tổng của hai biến ngẫu nhiên $\mu = \mu_1 + \mu_2$ nh- sau**

$$p_\mu(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1\mu_2}(x_1, y - x_1)dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1\mu_2}(y - x_2, x_2)dx_2 \qquad \textbf{(2.34)}$$

***<u>Nếu</u>*** **hai biến ngẫu nhiên $\mu_1$, $\mu_2$ độc lập thống kê**

***<u>Thì</u>*** **hàm mật độ xác suất của $\mu$ đ- ợc xác định bởi tích chập của các mật độ xác suất $\mu_1$và $\mu_2$. Vậy**

$$p_\mu(y) = p_{\mu_1}(y) * p_{\mu_2}(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1}(x_1)p_{\mu_2}(y - x_1)dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu_1}(y - x_2)p_{\mu_2}(x_2)dx_2 \qquad \textbf{(2.35)}$$

**trong đó ký hiệu * cho toán tử tích chập.**

❖ **Nhân hai biến ngẫu nhiên**

***<u>Nếu</u>*** **$\varsigma$ và $\lambda$ là hai biến ngẫu nhiên đ- ợc thể hiện thống kê bởi hàm mật độ xác suất đồng thời $p_{\varsigma.\lambda}(x,y)$.**

***<u>Thì</u>*** **hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $\eta = \varsigma.\lambda$ bằng**

$$p_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} p_{\varsigma\lambda}\left(\frac{z}{y}, y\right)dy \qquad \textbf{(2.36)}$$

**Từ quan hệ này ta nhận đ- ợc biểu thức sau**

$$p_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} p_\varsigma\left(\frac{z}{y}\right) . \times p_\lambda(y)dy \qquad \textbf{(2.37)}$$

**đối với các biến ngẫu nhiên độc lập thống kê $\varsigma.\lambda$.**

❖ **Các hàm của các biến ngẫu nhiên**

**Giả sử $\mu_1$, $\mu_2$...., $\mu_n$ là các biến ngẫu nhiên đ- ợc thể hiện thống kê bởi hàm mật độ xác suất đồng thời $p_{\mu 1\ \mu 2....,\mu n}(x_1, x_2,....,x_n)$. Ngoài ra giả thiết rằng các hàm $f_1$, $f_2$,..., $f_n$ đ- ợc cho. Nếu hệ ph- ơng trình $f_i(x_1, x_2,....,x_n) = y_i$ với (i=1,2,...,n) có các nghiệm thực $x_{1\nu},x_{2\nu},...,x_{n\nu}$ với ($\nu$ =1,2,...,m), thì hàm mật độ xác suất của các biến ngẫu nhiên $\xi_1=f_1(\mu_1, \mu_2,...., \mu_n)$, $\xi_2 =f_2(\mu_1, \mu_2,...., \mu_n)$,...., $\xi_n=f_n(\mu_1, \mu_2,...., \mu_n)$ có thể đ- ợc biểu diễn nh- sau**

$$p_{\xi_1\xi_2.....\xi_n}(y_1,y_2,....,y_n)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{p_{\mu_1\mu_2....\mu_n}(x_{1\nu},x_{2\nu},....,x_{n\nu})}{\left|J(x_{1\nu},x_{2\nu},....,x_{n\nu})\right|} \qquad \textbf{(2.38)}$$

**trong đó**

$$J(x_1,x_2,....,x_n)=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{dx_1} & \frac{\partial f_1}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{dx_n} \\ \frac{\partial f_2}{dx_1} & \frac{\partial f_2}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{dx_n} \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ \frac{\partial f_n}{dx_1} & \frac{\partial f_n}{dx_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{dx_n} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(2.39)}$$

**ký hiệu cho định thức Jacobi**

**Ngoài ra ta có thể tính hàm mật độ xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên $\xi_1$, $\xi_2$,..., $\xi_n$ đối với k < n bằng cách sử dụng (2.38) nh- sau**

$$p_{\zeta_1,\zeta_2,...\zeta_k}(y_1,y_2,...,y_k)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}....\int_{-\infty}^{\infty}}_{n-k} p_{\zeta_1,\zeta_2,...\zeta_n}(y_1,y_2,...,y_n)\underbrace{dy_{k+1}dy_{k+2}...dy_n}_{n-k} \qquad \textbf{(2.40)}$$

**$\Rightarrow$ Cho phép loại bỏ bớt biến ra khỏi hàm nhiều biến.**

## 2.2. QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

**Nếu cho (Q,A,P) là không gian xác suất. Nếu ta gán cho mỗi kết cục $s = s_i \in Q$ của một thí nghiệm ngẫu nhiên, một hàm thời gian cụ thể $\mu(t,s_i)$ theo một quy tắc. Thì đối với từng $s_i \in Q$, hàm $\mu(t,s_i)$ ký hiệu cho ánh xạ từ IR đến IR (hay C) theo**

$$\mu(.,s_i): \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}(\text{hay}\, C), \quad t \mapsto \mu(t,s_i) \qquad \textbf{(2.41)}$$

**Các hàm riêng $\mu(t,s_i)$ phụ thuộc vào thời gian đ- ợc gọi là các thực hiện hay các hàm mẫu. Một quá trình ngẫu nhiên $\mu(t,s)$ là một họ (hay một tập hợp, toàn bộ Ensemble) các hàm mẫu $\mu(t,s_i)$, nghĩa là**

$$\mu(t,s)=\{\mu(t,s_i)|s_i\in Q\}=\{\mu(t,s_1),\mu(t,s_2),....\}$$

**Mặt khác, tại một thời điểm cụ thể $t = t_0 \in IR$, thì quá trình ngẫu nhiên $\mu(t_0,s)$ chỉ phụ thuộc vào kết cục s, và bằng một biến ngẫu nhiên. Vì thế đối với $t_0 \in IR$, $\mu(t_0,s)$ ký hiệu cho ánh xạ từ Q vào IR (hay C) theo quy tắc**

$$\mu(t_0,.):Q \to IR \text{ (hay C)}, \quad s \mapsto \mu(t_0,s) \qquad \textbf{(2.42)}$$

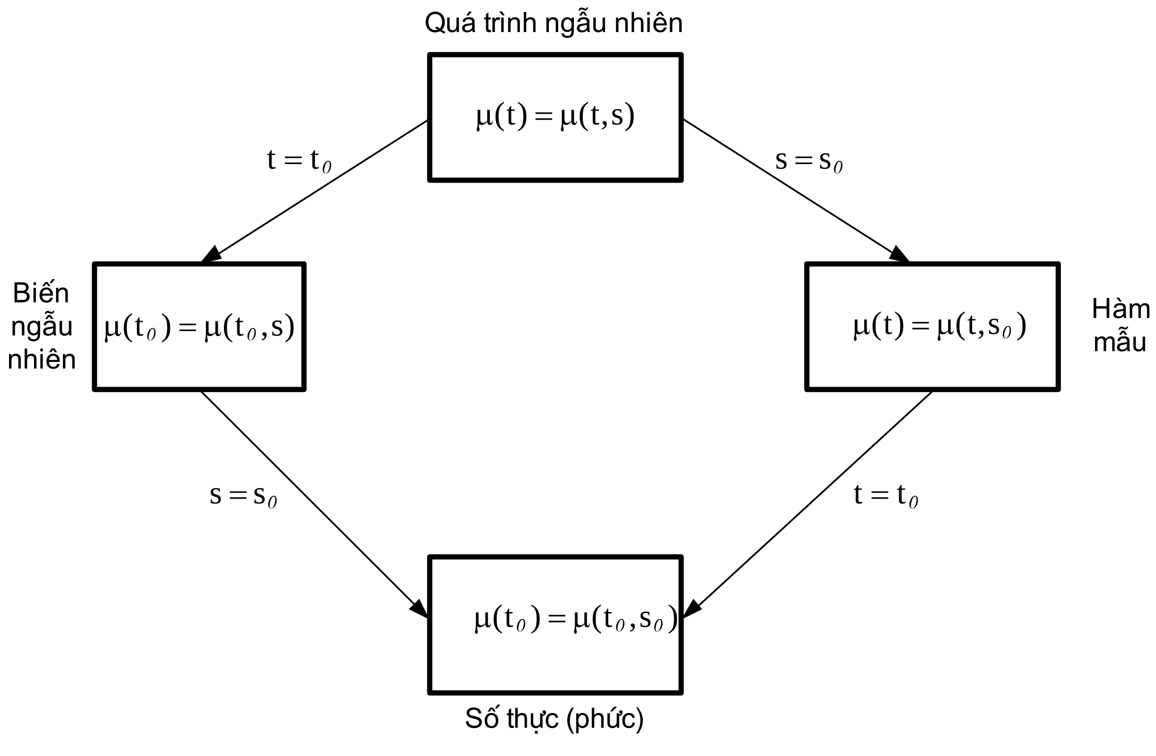
**Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $\mu(t_0,s)$ đ- ợc xác định bởi sự xuất hiện của các kết cục.**

**⇒ Vì vậy quá trình ngẫu nhiên là một hàm hai biến: $t \in IR$ và $s \in Q$, nên ký hiệu chính xác là $\mu(t,s)$. Tuy nhiên ta sẽ bỏ qua đối số thứ hai và chỉ viết đơn giản là $\mu(t)$ nh- th- ờng thấy trong thực tế.**

**Từ các phát biểu trên, ta có thể kết luận rằng một quá trình ngẫu nhiên $\mu(t)$ đ- ợc hiểu nh- sau**

1. ***Nếu t là một biến và s là một biến ngẫu nhiên, thì $\mu(t)$ thể hiện một họ hay một tập hợp các hàm mẫu $\mu(t,s)$***
2. ***Nếu t là một biến và $s = s_0$ là hằng số, thì $\mu(t)=\mu(t,s_0)$ là một thực hiện hay một hàm mẫu của quá trình ngẫu nhiên***
3. ***Nếu $t=t_0$ là một hằng số và s là một biến ngẫu nhiên thì $\mu(t_0)$ cũng là một biến ngẫu nhiên***
4. ***Nếu cả $t=t_0$ và $s=s_0$ đều hằng số, thì $\mu(t_0)$ là một số thực (hoặc phức)***

**Các quan hệ theo các phát biểu (1)-(4) nói trên đ- ợc minh hoạ trên hình 2.1.**




**Hình 2.1. Quan hệ giữa các quá trình ngẫu nhiên, các biến ngẫu nhiên, các hàm mẫu và các số thực (phức)**

❖ **Các quá trình ngẫu nhiên phức**

***Nếu*** **$\mu'(t)$ và $\mu''(t)$ là hai quá trình ngẫu nhiên giá trị thực.**

***Thì*** **một quá trình ngẫu nhiên phức đ- ợc định nghĩa bởi $\mu(t)=\mu'(t)+ j\mu''(t)$.**

**⇒ Thấy rằng một *quá trình* ngẫu nhiên $\mu(t)$ đ- ợc hiểu nh- là một *biến ngẫu nhiên* đối với các giá trị cố định của $t\in IR$. Biến ngẫu nhiên này lại có thể đ- ợc mô tả bằng một hàm phân bố $F_\mu(x;t)=P(\mu(t)\le x)$ hay một hàm mật độ xác suất $p_\mu(x;t)=dF_\mu(x;t)/dx$. Việc mở rộng khái niệm giá trị kỳ vọng mà đ- ợc dùng đối với các biến ngẫu nhiên cho các quá trình ngẫu nhiên dẫn đến khái niệm hàm giá trị kỳ vọng.**

➢ ***Hàm giá trị kỳ vọng***

$$m_\mu(t) = E\{\mu(t)\} \quad (2.43)$$

➢ ***Hàm tự t- ơng quan***

***Nếu*** **ta xét các biến ngẫu nhiên $\mu(t_1)$ và $\mu(t_2)$ mà đ- ợc gán cho quá trình ngẫu nhiên $\mu(t)$ tại các thời điểm $t_1$ và $t_2$. *Thì***

$$r_{\mu\mu}(t_1,t_2) = E\{\mu^*(t_1)\times\mu(t_2)\} \quad (2.44)$$

**đ- ợc gọi là hàm tự t- ơng quan của $\mu(t)$ trong đó dấu * ký hiệu cho đồng thời phức. L- u ý rằng đồng thời phức liên kết với biến độc lập thứ nhất trong $r_{\mu\mu}(t_1,t_2)$ (cũng cần l- u ý rằng trong các tài liệu phức đồng thời cũng th- ờng đi với biến ngẫu nhiên độc lập thứ hai của hàm t- ơng quan $r_{\mu_1\mu_2}(t_1,t_2)$, nghĩa là $r_{\mu_1\mu_2} = E\{\mu(t_1)\times\mu^*(t_2)\}$).**

➢ ***Hàm ph- ơng sai***

**Hàm đ- ợc gọi là ph- ơng sai của quá trình ngẫu nhiên phức $\mu(t)$ đ- ợc xác định nh- sau**

$$\begin{aligned}\sigma_\mu^2 &= \mathrm{Var}\{\mu(t)\}\\ &= E\left\{|\mu(t)-E\{\mu(t)\}|^2\right\}\\ &= E\{\mu^*(t)\mu(t)\}-E\{\mu^*(t)\}E\{\mu(t)\}\\ &= r_{\mu\mu}(t,t)-|m_\mu(t)|^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

**trong đó $r_{\mu\mu}(t,t)$ ký hiệu cho hàm tự t- ơng quan (2.44) tại thời điểm $t_1=t_2=t$ và $m_\mu(t)$ biểu hiện hàm gía trị kỳ vọng theo (2.43).**

➢ ***Hàm t- ơng quan chéo***

$$r_{\mu_1\mu_2}(t_1,t_2) = E\{\mu_1^*(t_1)\mu_2(t_2)\} \quad (2.46)$$

**thể hiện hàm t- ơng quan chéo của quá trình ngẫu nhiên $\mu_1(t)$ và $\mu_2(t)$ tại các thời điểm $t_1$ và $t_2$.**

## 2.2.1. Các quá trình dừng

**Các quá trình dừng có tầm quan trọng đặc biệt để lập mô hình kênh vô tuyến di động và vì thế ta ở đây sẽ khảo sát ngắn gọn. Ta th- ờng *phân biệt* giữa các quá trình dừng nghĩa chặt chẽ và các quá trình dừng nghĩa rộng.**

❖ **Quá trình dừng chặt SSS**

**Một quá trình ngẫu nhiên $\mu(t)$ d- ợc gọi là quá trình ngẫu nhiên dừng chặt chẽ nếu các thuộc tính thông kê không phụ thuộc vào sự dịch của gốc toạ độ, nghĩa là $\mu(t_1)$ và $\mu(t_1+t_2)$ có cùng đăc tính thông kê cho mọi $t_1,t_2 \in IR$. Điều này dẫn đến các kết luận sau: $\Leftrightarrow$ thoả mã các điều kiện (2.47a); (2.47b);(2.47c).**

$$p_{\mu}(x;t) = p_{\mu}(x) \qquad \text{(2.47a)}$$

$$E\{\mu(t)\} = m_{\mu} = Hằng\ số \qquad \text{(2.47b)}$$

$$r_{\mu\mu}(t_1,t_2) = r_{\mu\mu}(|t_1 - t_2|) \qquad \text{(2.47c)}$$

**Q□a tr□nh d□ng theo ngh□a r□ng WSS** (2.47b, 2.47c)

**Q□a tr□nh d□ng theo ngh□a ch□t SSS** (2.47a, 2.47b, 2.47c)

❖ **Quá trình dừng rộng WSS**

**Quá trình ngẫu nhiên $\mu(t)$ đ- ợc gọi là quá trình ngẫu nhiên dừng nghĩa rộng nếu thoả mãn các điều kiện (2.47b) và (2.47c) $\Leftrightarrow$ Trong tr- ờng hợp này**

- ***Hàm giá trị kỳ vọng*: $E\{\mu(t)\}$ không phụ thuộc vào thời gian và đơn giản chỉ là giá trị kỳ vọng $m_\mu$ của các biến ngẫu nhiên.**
- ***Hàm t- ơng quan***
  - **Hàm tự t- ơng quan: $r_{\mu\mu}(t_1,t_2)$ chỉ phụ thuộc vào hiệu số thời gian $t_1$- $t_2$. Từ (2.44) và (2.47c), với $t_1$=t và $t_2$= t+$\tau$, với $\tau > 0$ ta đ- ợc**

    $$r_{\mu\mu}(\tau) = r_{\mu\mu}(t,t+\tau) = E\{\mu^*(t)\times\mu(t+\tau)\} \qquad \text{(2.48)}$$

    **trong đó $r_{\mu\mu}(0)$ là công suất trung bình của $\mu(t)$.**
  - **Hàm t- ơng quan chéo: $r_{\mu_1\mu_2}(t_1,t_2)$ theo (2.46) của hai quá trình dừng nghĩa rộng $\mu_1(t)$ và $\mu_2(t)$, ta đ- ợc**

    $$r_{\mu_1\mu_2}(\tau) = E\{\mu_1^*(t)\mu_2(t+\tau)\} = r^*_{\mu_2\nu_1}(-\tau) \qquad \text{(2.49)}$$
- ***Mật độ phổ công suất***

  **Nếu cho $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ và $\mu(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên dừng nghĩa rộng WSS, thì biến đổi Fourrier của hàm tự t- ơng quan $r_{\mu\mu}(\tau)$ đ- ợc xác định nh- sau**

$$S_{\mu\mu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mu\mu}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \qquad \text{(2.50)}$$

**đ- ợc gọi là mật độ phổ công suất (phổ mật độ công suất). Quan hệ tổng quát giữa hàm tự t- ơng quan và mật độ phổ công suất nói trên đ- ợc gọi là t- ơng quan Wiener-Khichine.**

➢ ***Mật độ phổ công suất chéo***

**Biến đổi Fourrier của hàm t- ơng quan chéo $r_{\mu 1\mu 2}(\tau)$ đ- ợc xác định nh- sau**

$$S_{\mu 1\mu 2}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mu 1\mu 2}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \qquad \textbf{(2.51)}$$

**đ- ợc gọi là mật độ phổ công suất chéo (phổ mật độ công suất chéo). Nếu xét (2.49) ta nhận thấy ngay rằng $S_{\mu 1\mu 2}(f)=S^*_{\mu 2\mu 1}(f)$.**

***<u>Nếu</u>*** **$\nu(t)$ là quá trình đầu vào và $\mu(t)$ là quá trình đầu ra của một hệ thống ổn định không phụ thuộc thời gian có đáp ứng xung kim h(t). Ngoài ra giả sử rằng hệ thống này là hệ thống tất định, nghĩa là nó chỉ hoạt dộng phụ thuộc biến t.**

***<u>Thì</u>*** **quá trình ra $\mu(t)$ là tích chập của quá trình vào $\nu(t)$ với đáp ứng xung kim h(t), nghĩa là $\mu(t) = \nu(t)*h(t)$. Ta cũng biết rằng hàm truyền đạt H(f) của hệ thống này là biến đổi Fourrier của đáp ứng xung kim h(t) $\Leftrightarrow$ H(f)=FT[h(t)]. Ngoài ra tồn tại các t- ơng quan sau**

$$r_{\nu\mu}(\tau)=r_{\nu\nu}(\tau)*h(\tau) \Leftrightarrow S_{\nu\mu}(f)=S_{\nu\nu}(f).H(f) \qquad \textbf{(2.52a,b)}$$

$$r_{\mu\nu}(\tau)=r_{\nu\nu}(\tau)*h^*(-\tau) \Leftrightarrow S_{\mu\nu}(f)=S_{\nu\nu}(f).H^*(f) \qquad \textbf{(2.52c,d)}$$

$$r_{\mu\mu}(\tau)=r_{\nu\nu}(\tau)*h(\tau)h^*(-\tau) \Leftrightarrow S_{\mu\mu}(f)=S_{\nu\nu}(f).|H(f)|^2 \qquad \textbf{(2.52e,f)}$$

**trong đó $\Leftrightarrow$ ký hiệu cho biến đổi Fourrier. Tiếp theo ta sẽ coi rằng tất cả các hệ thống đ- ợc xét là hệ tuyến tính, không phụ thuộc thời gian và ổn định (*hệ thống tuyến tính bất biến ổn định*).**

**Cần l- u ý rằng, nếu nói một cách chặt chẽ, không tồn tại bất cứ một quá trình dừng nào. Các quá trình dừng chỉ đ- ợc sử dụng nh- là các mô hình toán học cho các quá trình, nếu nó giữ nguyên đ- ợc các thuộc tính thống kê trong một khoảng thời gian t- ơng đối dài $\Rightarrow$Từ giờ trở đi, ta sẽ coi quá trình ngẫu nhiên là quá trình dừng chặt SSS nếu không có giải thích khác đi.**

❖ **Một hệ thống với hàm truyền đạt**

$$\breve{H}(f) = \textbf{-jsgn(f)} \qquad \textbf{(2.53)}$$

**đ- ợc gọi là bộ biến đổi Hilbert.**

**$\Rightarrow$ Ta thấy rằng hệ thống này chỉ gây ra dịch pha $-\pi/2$ đối với f > 0 và dịch pha $+\pi/2$ đối với f < 0 mà không làm ảnh h- ởng biên độ tín hiệu vào ra của hệ nghĩa là H(f) =1. Biến đổi Fourrier ng- ợc của hàm $\check{H}(f)$ là đáp ứng xung kim sau**

$$\breve{h}(t) = \frac{1}{\pi t} \qquad \textbf{(2.54)}$$

**Vì $\check{h}(t) \neq 0$ đối với t<0, nên biến đổi Hilbert là hệ không nhân quả (*hệ nhân quả và hệ không nhân quả*).**

**⇒ Nếu quá trình ν(t) có E{ν(t)}= 0 là quá trình đầu vào giá trị thực của bộ biến đổi Hilbert, thì quá trình ra là**

$$\breve{\nu}(t) = \nu(t) * \breve{h}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu(t')}{t-t'}dt' \qquad \textbf{(2.55)}$$

**đ- ợc gọi là biến đổi Hilbert của ν(t). Cũng cần l- u ý rằng tính toán tích phân (2.55) phải đ- ợc thực hiện theo giá trị cơ bản Cauchy.**

**Với (2.52) và (2.54), ta đ- ợc các quan hệ sau**

$r_{\nu\breve{\nu}}(\tau) = \breve{r}_{\nu\nu}(\tau) \Leftrightarrow S_{\nu\breve{\nu}}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f).S_{\nu\nu}(f)$ **(2.56a,b)**

$r_{\nu\breve{\nu}}(\tau) = -r_{\breve{\nu}\nu}(\tau) \Leftrightarrow S_{\nu\breve{\nu}}(f) = -S_{\breve{\nu}\nu}(f)$ **(2.56c,d)**

$r_{\breve{\nu}\breve{\nu}}(\tau) = r_{\nu\nu}(\tau) \Leftrightarrow S_{\breve{\nu}\breve{\nu}}(f) = S_{\nu\nu}(f)$ **(2.56e,f)**

## 2.2.2. Quá trình Ergodic

**Việc mô tả các thuộc tính của quá trình ngẫu nhiên nh- : giá trị kỳ vọng hoặc hàm tự t- ơng quan cho tất cả các hàm mẫu có thể có của quá trình ngẫu nhiên đều dựa trên cơ sở trung bình toàn bộ (Ensemble means - Statical means). Tuy nhiên trong thực tế ta chỉ gặp hoặc ghi lại đ- ợc số l- ợng hữu hạn các hàm mẫu (thậm chí chỉ có một hàm mẫu) ⇒ Vì thế để có đ- ợc các công bố về các thuộc tính thống kê của quá trình ngẫu nhiên, thì ng- ời ta th- ờng đ- a ra giả định Ergodic (liên hệ với giả định Ergodic).**

**Giả định Ergodic trả lời câu hỏi: hoặc chỉ cần đánh giá một hàm mẫu của quá trình ngẫu nhiên dừng (*thay vì* phải tính toán trung bình tất cả các hàm mẫu) tại một thời điểm hay nhiều thời điểm. Nhất là trả lời câu hỏi, giá trị kỳ vọng và hàm tự t- ơng quan của một quá trình ngẫu nhiên μ(t) có bằng trung bình theo thời gian của một hàm mẫu bất kỳ $\mu(t,s_i)$ hay không.**

**<u>L- u ý rằng:</u> Nếu là quá trình ergodic thì chỉ cần đánh giá một hàm mẫu của quá trình ở nhiều thời điểm khác nhau thay cho việc lấy trung bình toàn bộ (tất cả các hàm mẫu) của quá trình.**

**Theo *định lý Ergodic*, thì**

***Giá trị kỳ vọng* E{μ(t)} = $m_\mu$ bằng trung bình thời gian của $\mu(t,s_i)$, nghĩa là**

$$m_\mu = \tilde{m}_\mu := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu(t,s_i)dt \qquad \textbf{(2.57)}$$

***Hàm tự t- ơng quan* $r_{\mu\mu}(\tau)=E\{\mu^*(t)\mu(t+\tau)\}$ bằng hàm tự t- ơng quan thời gian của $\mu(t,s_i)$, nghĩa là**

$$r_{\mu\mu} = \tilde{r}_{\mu\mu}(\tau) := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu^*(t,s_i)\mu(t+\tau,s_i)dt \qquad \textbf{(2.58)}$$

**Quá trình ngẫu nhiên dừng μ(t) đ- ợc gọi là ergodic chặt chẽ, nếu tất cả các giá trị kỳ vọng xét cho toàn bộ các hàm mẫu bằng các giá trị trung bình thời gian của một hàm mẫu bất kỳ.**

**Nếu điều kiện này chỉ thoả mãn cho giá trị kỳ vọng và hàm tự t- ơng quan, nghĩa là chỉ thực hiên (2.57) và (2.58), thì quá trình ngẫu nhiên $\mu(t)$ đ- ợc gọi là quá trình Ergodic nghĩa rộng.**

**⇒ Quá trình ergodic chặt chẽ luôn là quá trình ngẫu nhiên dừng. Phát biểu ng- ợc lại luôn luôn không đúng, mặc dù th- ờng đ- ợc tiếp nhận.**

### 2.2.3. Tốc độ cắt ngang mức và thời gian phađinh trung bình

**⇒ Để mô tả đặc tính thống kê kênh phadinh di động sử dụng bốn đại l- ợng đặc tr- ng**

- ✓ ***Hàm mật độ xác suất.***
- ✓ ***Hàm tự t- ơng quan.***
- ✓ ***Tốc độ cắt ngang mức.***
- ✓ ***Khoảng thời gian phadinh trung bình.***

**Nh- ta biết, tín hiệu thu trong thông tin di động th- ờng bị thăng giáng thống kê rất nặng, có thể lên đến 30 dB và hơn nữa. Trong thông tin số, sự giảm mạnh tín hiệu thu sẽ trực tiếp dẫn đến tăng nhanh tỷ số bit lỗi.**

**⇒ Để tối - u hoá các hệ thống mã hoá sửa lỗi cần phải biết,**

- ✓ **Tần suất tín hiệu thu cắt ngang một mức tín hiệu cho tr- ớc trong một đơn vị thời gian.**
- ✓ **Thời gian trung bình tín hiệu thu bị thấp hơn một mức nhất định.**

**⇒ Sử dụng hai đại l- ợng: *Tốc độ cắt ngang mức* và *thời gian phađinh trung bình* để làm các số đo cho việc đánh giá.**

❖ **Tốc độ cắt ngang mức**

***Tốc độ cắt ngang mức*** **$N_\varsigma(r)$, mô tả tần suất quá trình ngẫu nhiên $\varsigma(t)$ cắt ngang qua mức cho tr- ớc r theo h- ớng trên xuống (hoặc d- ới lên) trong một giây. Theo [Ric44, Ric45], tốc độ cắt ngang mức $N_\varsigma(r)$ có thể đ- ợc tính bởi**

$$N_\varsigma(r) = \int_0^\infty \dot{x} p_{\varsigma\dot{\varsigma}}(r,\dot{x})d\dot{x}, \ r \geq 0 \qquad (2.50)$$

**trong đó $p_{\varsigma\dot{\varsigma}}(x,\dot{x})$ ký hiệu cho hàm mật độ xác suất hợp của quá trình ngẫu nhiên $\varsigma(t)$ và đạo hàm của nó theo thời gian $\dot{\varsigma} = d\varsigma/dt$ tại *cùng thời điểm*.**

**Ta có thể dễ dàng tìm đ- ợc biểu biểu thức giải tích cho tốc độ cắt ngang mức của các quá trình Rayleigh và Rice.**

➢ ***Biểu thức giải tích tốc độ cắt ngang mức cho quá trình ngẫu nhiên Rayleigh $N_\varsigma(r)$***

***Nếu*** **xét hai quá trình ngẫu nhiên Gausơ trung bình không giá trị thực không t- ơng quan $\mu_1(t)$ và $\mu_2(t)$ có các hàm tự t- ơng quan nh- nhau, nghĩa là $r_{\mu1\mu1}(\tau)=r_{\mu2\mu2}(\tau)$.**

***Thì*** **biểu thức tốc độ cắt ngang mức của các quá trình ngẫu nhiên Rayleigh $\varsigma(t) = \sqrt{\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)}$ nh- sau [Jak93]**

$$N_\varsigma(r) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \cdot \frac{r}{\sigma_0^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} . p_\varsigma(r), \qquad r \geq 0 \qquad (2.60)$$

**trong đó $\sigma_0^2 = r_{\mu_i\mu_i}(0)$ ký hiệu cho *công suất trung bình* của các quá trình ngẫu nhiên Gauss đ- ợc xét $\mu_i(t)$ (i=1,2). Ở đây $\beta$ là ký hiệu rút gọn cho *độ uốn âm* của các hàm tự t- ơng quan $r_{\mu_1\mu_1}(\tau)$ và $r_{\mu_2\mu_2}(\tau)$ tại điểm gốc $\tau$ = 0, nghĩa là**

$$\beta = -\frac{d^2}{d\tau^2} r_{\mu_i\mu_i}(\tau)\Big|_{\tau=0} = -\ddot{r}_{\mu_i\mu_i}(0), \qquad i=1,2 \qquad (2.61)$$

➢ ***Biểu thức giải tích tốc độ cắt ngang mức cho quá trình ngẫu nhiên Rice***

**Đối với quá trình Rice $\xi(t) = \sqrt{(\mu_1(t)+\rho)^2 + \mu_2^2(t)}$ , ta đ- ợc biểu thức sau cho tốc độ cắt ngang mức [Ric48]**

$$N_\xi(r) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \cdot \frac{r}{\sigma_0^2} e^{-\frac{r^2+\rho^2}{2\sigma_0^2}} I_0\left(\frac{r\rho}{\sigma_0^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} . p_\xi(r), \qquad r \geq 0 \qquad (2.62)$$

❖ **Thời gian phađing trung bình**

***Thời gian phađinh trung bình*** **$T_{\varsigma\_}(r)$ là giá trị kỳ vọng cho độ dài của khoảng thời gian mà ở đó quá trình ngẫu nhiên $\varsigma$(t) thấp hơn một mức cho tr- ớc r. Thời gian phađinh trung bình $T_{\varsigma-}$(r) có thể tính toán theo [Jak93]**

$$T_{\varsigma-}(r) = \frac{F_{\varsigma-}(r)}{N_\varsigma(r)} \qquad (2.63)$$

**trong đó $F_{\varsigma-}$(r) ký hiệu hàm phân bố tích luỹ xác suất của quá trình ngẫu nhiên $\varsigma$(t) là xác suất mà $\varsigma$(t) nhỏ hơn hay bằng mức r, nghĩa là**

$$F_{\varsigma-}(r) = P(\varsigma(t) \leq r) = \int_0^r p_\varsigma(x)dx \qquad (2.64)$$

➢ ***Đối với quá trình Rayleigh* $\varsigma$(t)**

**Thời gian phađinh trung bình $T_{\varsigma-}(r)$ đối với các quá trình Rayleigh đ- ợc xác định bởi**

$$T_{\varsigma-}(r) = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}.\frac{\sigma_0^2}{r}\left(e^{\frac{r^2}{2\sigma_0^2}} - 1\right), r \geq 0 \quad (2.65)$$

**trong đó đại l- ợng β cũng đ- ợc xác định bởi (2.61)**

➢ ***Đối với quá trình Rice***

**Bằng cách thay thế (2.26), (2.64) và (2.62) vào (2.63) ta đ- ợc**

$$T_{\varsigma-}(r) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}.\frac{e^{\frac{r^2}{2\sigma_0^2}}}{r \times I_0\left(\frac{r\rho}{\sigma_0^2}\right)}\int_0^r xe^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} I_0\left(\frac{x\rho}{\sigma_0^2}\right)dx \quad (2.66)$$

**tính theo ph- ơng pháp số.**

❖ **Thời gian kết nối trung bình Tς+(r)**

**Thời gian kết nối trung bình $T_{\varsigma+}(r)$ mô tả giá trị kỳ vọng cho độ dài của các khoảng thời gian mà ở đó quá trình ngẫu nhiên ς(t) lớn hơn mức cho tr- ớc r. Vậy**

$$T_{\varsigma+}(r) = \frac{F_{\varsigma+}(r)}{N_{\varsigma}(r)} \quad (2.67)$$

**trong đó $F_{\varsigma+}(r)$ đ- ợc gọi là hàm phân bố tích luỹ xác suất bù của quá trình ς(t). Hàm này mô tả xác suất mà ς(t) lớn hơn r, nghĩa là $F_{\varsigma+}(r)=P(\varsigma(t)>r)$. Hàm phân bố tích luỹ bù $F_{\varsigma+}(r)$ và hàm phân bố tích luỹ $F_{\varsigma-}(r)$ liên hệ với nhau bởi $F_{\varsigma+}(r)=1- F_{\varsigma-}(r)$.**

## 2.3. TÍN HIỆU TẤT ĐỊNH LIÊN TỤC THỜI GIAN

**Theo nguyên lý, ta phân biệt các tín hiệu liên tục thời gian và rời rạc thời gian. Đối với các tín hiệu tất định, ta sẽ sử dụng trình bầy liên tục thời gian mỗi khi có thể. Chỉ trong các phần cần mô phỏng số, ta sẽ chọn trình bầy tín hiệu rời rạc thời gian.**

**Tín hiệu tất định (liên tục thời gian) th- ờng đ- ợc định nghĩa trên IR. Tập giá trị thực IR đ- ợc coi là *không gian thời gian* trong đó biến t nhận các giá trị của tập này, nghĩa là t∈IR. Tín hiệu tất định đ- ợc mô tả bằng một hàm (ánh xạ), trong đó mỗi giá trị t đ- ợc gán cho một giá trị thực (hoặc phức). Ngoài để phân biệt các tín hiệu tất định với các quá trình ngẫu nhiên, ta sử dụng *dấu ngã* bên trên các ký hiệu của tín hiệu tất định.**

**Vì vậy, tín hiệu tất định $\tilde{\mu}(t)$ sẽ đ- ợc hiểu là ánh xạ thuộc loại sau**

$$\tilde{\mu}: IR \to IR(hay\,C), \qquad t \mapsto \tilde{\mu}(t) \quad (2.68)$$

❖ **Giá trị trung bình: *Giá trị trung bình* của một tín hiệu tất định $\tilde{\mu}(t)$ đ- ợc định nghĩa bởi**

$$\tilde{m}_{\mu} := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\tilde{\mu}(t)dt \quad (2.69)$$

❖ **Công suất trung:** ***Công suất trung bình*** **của một tín hiệu tất định $\tilde{\mu}(t)$ đ- ợc định nghĩa bởi**

$$\tilde{\sigma}_{\mu}^{2} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\tilde{\mu}(t)|^{2} dt \qquad \textbf{(2.70)}$$

**Từ nay về sau ta sẽ coi rằng công suất của tín hiệu tất định là *hữu hạn*.**

❖ **Hàm tự t- ơng quan**

**Cho $\tilde{\mu}(t)$ là một tín hiệu tất định. Khi này hàm tự t- ơng quan của $\tilde{\mu}(t)$ đ- ợc định nghĩa bởi**

$$\tilde{r}_{\mu\mu}(\tau) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \tilde{\mu}^{*}(t)\tilde{\mu}(t+\tau)dt \qquad \textbf{(2.71)}$$

**So sánh (2.70) và (2.71), nhận thấy giá trị $\tilde{r}_{\mu\mu}(\tau)$ tại $\tau$=0 bằng công suất trung bình của $\tilde{\mu}(t)$, nghĩa là $\tilde{r}_{\mu\mu}(0) = \tilde{\sigma}_{\mu}^{2}$.**

❖ **Hàm t- ơng quan chéo**

**Cho $\tilde{\mu}_1(t)$ và $\tilde{\mu}_2(t)$ là hai tín hiệu tất định. Khi này hàn t- ơng quan chéo của $\tilde{\mu}_1(t)$ và $\tilde{\mu}_2(t)$ đ- ợc xác định bởi**

$$\tilde{r}_{\mu_1\mu_2} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \tilde{\mu}_1^{*}(t)\tilde{\mu}_2(t+\tau)dt, \ \tau\in \mathbf{IR} \qquad \textbf{(2.72)}$$

**Từ đó suy ra $\tilde{r}_{\mu_1\mu_2}(\tau) = \tilde{r}^{*}_{\mu_2\mu_1}(-\tau)$.**

❖ **Mật độ phổ công suất**

**Cho $\tilde{\mu}(t)$ là một tín hiệu tất định. Khi này biến đổi Fourrier của hàm tự t- ơng quan $\tilde{r}_{\mu\mu}(\tau)$**

$$\tilde{S}_{\mu\mu}(f) := \int \tilde{r}_{\mu\mu}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau, \ f\in \mathbf{IR} \qquad \textbf{(2.73)}$$

**đ- ợc gọi là mật độ phổ công suất (hay phổ mật độ công suất) của $\tilde{\mu}(t)$.**

❖ **Mật độ phổ công suất chéo**

**Cho $\tilde{\mu}_1(t)$ và $\tilde{\mu}_2(t)$ là hai tín hiệu tất định. Khi này, biến đổi Fourrier của hàm t- ơng quan chéo $\tilde{r}_{\mu_1\mu_2}(\tau)$**

$$\tilde{S}_{\mu_1\mu_2}(f) := \int \tilde{r}_{\mu_1\mu_2}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau, \ f\in \mathbf{IR} \qquad \textbf{(2.74)}$$

**đ- ợc gọi là *mật độ phổ công suất chéo* (hay *phổ mật độ công suất chéo*).**

**Từ (2.74) và quan hệ $\tilde{r}_{\mu_1\mu_2}(\tau) = \tilde{r}^{*}_{\mu_2\mu_1}(-\tau) \Rightarrow$ ta rút ra $\tilde{S}_{\mu_1\mu_2}(\tau) = \tilde{S}^{*}_{\mu_2\mu_1}(\tau)$.**

❖ **Quan hệ tín hiệu tất định vào/ra hệ LTI ổn định**

**Cho $\tilde{v}(t)$ và $\tilde{\mu}(t)$ là các tín hiệu tất định đầu vào/ra của một hệ tuyến tính bất biến ổn định có hàm truyền đạt H(f). Khi này ta có t- ơng quan sau**

$$\tilde{S}_{\mu\mu}(f) = |H(f)|^2 \tilde{S}_{vv}(f) \qquad \textbf{(2.75)}$$

## 2.4. TÍN HIỆU TẤT ĐỊNH RỜI RẠC THỜI GIAN

❖ **Tín hiệu rời rạc thời gian $\{\tilde{\mu}(kT_s)\}$**

➢ ***Tạo tín hiệu RR thời gian***

**Bằng cách lấy mẫu cách đều một tín hiệu liên tục thời gian $\tilde{\mu}(t)$ tại các thời điểm rời rạc $t=t_k=kT_s$, trong đó $k \in Z$ và $T_s$ ký hiệu cho khoảng lấy mẫu, ta đ- ợc chuỗi các số $\{\tilde{\mu}(kT_s)\} = \{\ldots,\tilde{\mu}(-T_s),\tilde{\mu}(0),\tilde{\mu}(T_s),\ldots\}$.**

➢ ***Phân biệt giữa tín hiệu rời rạc thời gian và phần tử của nó.***

**Trong nhiều tr- ờng hợp cần phải phân biệt rõ giữa bản thân $\{\tilde{\mu}(kT_s)\}$ (đ- ợc gọi là tín hiệu rời rạc thời gian) với phần tử thứ k $\tilde{\mu}(kT_s)$ của nó. Đối với mục đích khảo xát ở đây, ta không cần nhắc lại sự phân biệt này. Vì thế d- ới đây, ta chỉ *đơn giản* viết $\tilde{\mu}(kT_s)$ cho các tín hiệu rời rạc thời gian hoặc các chuỗi, ngoài ra ta sẽ sử dụng ký hiệu $\bar{\mu}[k] := \tilde{\mu}(kT_s) = \tilde{\mu}(t)\big|_{t=kT_s}$ .**

**Ngoài để phân biệt các tín hiệu tất định rời rạc thời gian với tín hiệu tất định liên tục và các quá trình ngẫu nhiên, ta sử dụng *dấu ngạch ngang* bên trên các ký hiệu của tín hiệu tất định rời rạc.**

❖ **Tín hiệu tất định rời rạc thời gian**

**⇒ <u>Rõ thấy:</u> bằng cách lấy mẫu tín hiệu *tất định* liên tục thời gian $\tilde{\mu}(t)$ ta đ- ợc tín hiệu rời rạc thời gian $\bar{\mu}[k]$ cũng sẽ là một tín hiệu *tất định*. Khi nói về một tín hiệu tất định rời rạc thời gian, ta hiểu rằng là ánh xạ thuộc loại**

$$\bar{\mu} := Z \to IR \ (\text{hay } C),\ k \mapsto \bar{\mu}[k] \qquad \textbf{(2.76)}$$

**Các thuật ngữ đ- ơc sử dụng tr- ớc đây cho tín hiệu tất định *liên tục* thời gian nh- : hàm tự t- ơng quan và mật độ phổ công suất cũng đ- ợc áp dụng cho các tín hiệu tất định *rời rạc* thời gian. Các mối quan hệ và các định nghĩa quan trọng nhất sẽ chỉ đ- ợc đ- a ra ở đây, đặc biệt đ- ợc dùng cho ch- ơng 8. Ta có thể tìm thấy trình bầy chi tiết các quan hệ này trong [Opp75, Kam98, Unb90].**

❖ **Các thuật ngữ**

➢ ***Giá trị trung bình: Giá trị trung bình* của một chuỗi tất định $\bar{\mu}[k]$ đ- ơc định nghĩa bởi**

$$\bar{m}_{\mu} := \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{K} \bar{\mu}[k] \qquad \textbf{(2.77)}$$

➢ ***Công suất trung bình:*** ***Công suất trung bình*** **của một chuỗi tất định $\overline{\mu}[k]$ đ- ợc định nghĩa bởi**

$$\overline{\sigma}_{\mu}^{2} := \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{K} \left|\overline{\mu}[k]\right|^{2} \qquad \textbf{(2.78)}$$

➢ ***Chuỗi tự t- ơng quan:*** **Cho $\overline{\mu}[k]$ là một chuỗi tất định, khi này *chuỗi tự t- ơng quan* đ- ợc định nghĩa bởi**

$$\overline{r}_{\mu\mu}[i] := \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{K} \overline{\mu}[i]^{*}[k]\overline{\mu}[k+i],\ i\in\mathbf{Z} \qquad \textbf{(2.79)}$$

**Vậy xét (7.78), ta rút ra $\overline{\sigma}_{\mu}^{2} = \overline{r}_{\mu\mu}[0]$.**

➢ ***Chuỗi t- ơng quan chéo:*** **Cho $\overline{\mu}_1[k]$ và $\overline{\mu}_2[k]$ là hai chuỗi tất định, khi này *chuỗi t- ơng quan chéo* đ- ợc xác định nh- sau**

$$\overline{r}_{\mu_1\mu_2}[k] := \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{K} \overline{\mu}_1^{*}[k]\overline{\mu}_2[K-k] \quad k\in\mathbf{Z} \qquad \textbf{(2.80)}$$

**Từ đây ta rút ra quan hệ sau:** $\overline{r}_{\mu_1\mu_2}[k] = \overline{r}^{*}_{\mu_2\mu_1}[-k]$

➢ ***Mật độ phổ công suất:*** **Cho $\overline{\mu}[k]$ là một chuỗi tất định. Khi này *biến đổi Fourrier* của chuỗi tự t- ơng quan $\tilde{r}_{\mu\mu}[k]$**

$$\overline{S}_{\mu\mu}(f) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{r}_{\mu\mu}[k] e^{-j2\pi f T_s k},\ \ f\in\mathbf{IR} \qquad \textbf{(2.81)}$$

**đ- ợc gọi là mật độ phổ công suất hay phổ mật độ công suất của $\overline{\mu}[k]$.**

***⇒ Giữa (2.81) và (2.73) tồn tại quan hệ giữa mật độ phổ công suất của tín hiệu tất định liên tục và tín hiệu tất định rời rạc sau***

$$\overline{S}_{\mu\mu}(f) := \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_{\mu\mu}(f - mf_s) \qquad \textbf{(2.82)}$$

**trong đó $f_s=1/T_s$ đ- ợc gọi là tần số lấy mẫu hay tốc độ lấy mẫu.**

**⇒ Rõ ràng rằng mật độ phổ công suất tín hiệu tất định rời rạc $\overline{S}_{\mu\mu}(f)$ là một hàm tuần hoàn có chu kỳ $f_s$, vì tồn tại $\overline{S}_{\mu\mu}(f) = \overline{S}_{\mu\mu}(f - mf_s)$ cho mọi $m\in\mathbf{Z}$.** ***Quan hệ (2.82) phát biểu rằng mật độ phổ công suất $\overline{S}_{\mu\mu}(f)$ của $\overline{\mu}[k]$ rút ra từ mật độ phổ công suất $\tilde{S}_{\mu\mu}(f)$ của $\tilde{\mu}[t]$, nếu chia (nhân) mật độ phổ công suất của tín hiệu thứ hai cho $1/T_s$ và lặp lại định kỳ tại các thời điểm $mf_s$, trong đó $m\in Z$.***

***Biến đổi Fourrier rời rạc ng- ợc IDFT*** **của mật độ phổ công suất tín hiệu tất định rời rạc $\overline{S}_{\mu\mu}(f)$ cho ta chuỗi tự t- ơng quan $\overline{r}_{\mu\mu}[k]$ của $\overline{\mu}[k]$, nghĩa là**

$$\overline{r}_{\mu\mu}[k] := \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} \overline{S}_{\mu\mu}(f) e^{j2\pi f T_s k} df\ ,\ k\in\mathbf{Z} \qquad \textbf{(2.83)}$$

➢ ***Mật độ phổ công suất chéo:*** **Cho $\bar{\mu}_1[k]$ và $\bar{\mu}_2[k]$ là hai chuỗi tất định. Khi này biến đổi Fourrier rời rạc DFT của chuỗi t- ơng quan chéo $\bar{r}_{\mu_1\mu_2}[k]$ đ- ợc định nghĩa bởi.**

$$\bar{S}_{\mu_1\mu_2}(f) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{r}_{\mu_1\mu_2}[k] e^{-j2\pi f T_s k}, \qquad f \in IR \qquad \textbf{(2.84)}$$

**đ- ợc gọi là *mật độ phổ công suất chéo* hay *phổ mật độ công suất chéo*. Từ ph- ơng trình trên và $\bar{r}_{\mu_1\mu_2}[k] = \bar{r}^*_{\mu_2\mu_1}[-k]$, ta rút ra $\bar{S}_{\mu_1\mu_2}(f) = \bar{S}^*_{\mu_2\mu_1}(-f)$.**

➢ ***Định lý lấy mẫu:*** **Cho $\tilde{\mu}[k]$ là một tín hiệu liên tục thời gian có phổ giới hạn với tần số cắt $f_c$.**

**Nếu lấy mẫu tín hiệu này với tần số lấy mẫu $f_s$ lớn hơn hai lần tần số cắt $f_c$, nghĩa là**

$$f_s > 2f_c \qquad \textbf{(2.85)}$$

**thì $\tilde{\mu}[t]$ sẽ đ- ợc hoàn toàn đ- ợc xác định bởi các giá trị lấy mẫu t- ơng ứng $\bar{\mu}[k] = \tilde{\mu}[kT_s]$.**

**⇒ Đặc biệt từ chuỗi $\bar{\mu}[k]$ ta có thể khôi phục lại tín hiệu liên tục thời gian $\tilde{\mu}[t]$ theo quan hệ sau**

$$\tilde{\mu}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\mu}[k] \operatorname{sinc}\left[\pi \frac{t - kT_s}{T_s}\right] \qquad \textbf{(2.86)}$$

**trong đó sinc(.) ký hiệu cho hàm sinc đ- ợc định nghĩa nh- sau: sinc(x)=sin(x)/x.**

**Cần nói thêm rằng ta có thể thay điều kiện lấy mẫu (2.85) trên bằng điều kiện mở rộng hơn $f_s \geq 2f_c$, nếu mật độ phổ công suất $\tilde{S}_{\mu\mu}(f)$ không có các thành phần $\delta$ trong giới hạn $f = \pm f_c$ [Fet96]. Trong tr- ờng hợp này thậm chí cả khi đảm bảo điều kiện $f_s \geq 2f_c$, tính đúng đắn của định lý lấy mẫu hoàn toàn đ- ợc đảm bảo.**

## Phu luc 1

## Khảo sát hàm CDF và pdf của phân bố đều

**Hàm phân bố xác suất CDF:**

```
x = 0:10;
y = unidcdf(x,10);
stairs(x,y) % Stairstep plot
set(gca,'Xlim',[0 11]);
xlabel('x');
ylabel('CDF');
title('Khảo sát hàm phân bố xác suất tích luỹ CDF phân bố đều', 'FontName','.VnTime');
grid on;
```

**Hàm mật độ xác suất pdf:**

```
x = 0:10;
y = unidpdf(x,10);
stairs(x,y) % Stairstep plot
set(gca,'Xlim',[0 11]);
xlabel('x');
ylabel('PDF')
grid on;
```

## Hàm mfcnormspec: Vẽ hàm mật độ xác suất trong khoảng xác định.

```
function [p, h] = mfcnormspec(specs,mu,sigma)

p = mfcnormspec(specs,mu,sigma) thực hiện vẽ hàm mật độ xác suất giữa các gới hạn trên và d- ới đ- ợc xác định bởi thông số specs (là vector hai phần tử xác định khoảng giá trị cần khảo sát), trong đó mu & sigma là các thông số của phân bố cần vẽ. Nếu dùng [p,h] = mfcnormspec(specs,mu,sigma), thì hàm trả lại giá trị xác suất P của mẫu nằm trong khoảng giới hạn trên và giới hạn d- ới và h để điều khiển các đối t- ợng đ- ờng vẽ.

if prod(size(specs)) ~= 2,
 error('Yêu cầu đối số thứ nhất là một vector hai phần tử');
end

lb = specs(1);
ub = specs(2);
if lb > ub
 lb = specs(2);
 ub = specs(1);
end

if lb == -Inf & ub == Inf
 error('Vector xác định giới hạn phải có ít nhất một phần tử hữu hạn');
end

if nargin < 2
 mu = 0;
 sigma = 1;
end

if max(size(mu)) > 1 | max(size(sigma)) > 1,
 error('Yêu cầu các đối số đầu vào thứ 2 & 3 vô h- ớng ');
end

prob = (0.0002:0.0004:0.9998)';

x = norminv(prob,mu,sigma);
y = normpdf(x,mu,sigma);
if lb == -Inf,
 p = normcdf(ub,mu,sigma);
elseif ub == Inf,
 p = 1 - normcdf(lb,mu,sigma);
else
 p = diff(normcdf([lb ub],mu,sigma));
end
nspecfig = figure;
nspecaxes = axes;
set(nspecaxes, 'Parent', nspecfig);
set(nspecaxes,'Nextplot','add');
hh = plot(x,y,'b-');
xl = get(nspecaxes,'Xlim');
lbinf = isinf(lb);
ubinf = isinf(ub);
if lbinf,
 lb = xl(1);
 yll = [0; eps];
else
 yll = normpdf(lb,mu,sigma);
 yll = [0; yll];
end
if ubinf,
```

```
 ub = xl(2);
 yul = [eps; 0];
else
 yul = normpdf(ub,mu,sigma);
 yul = [yul; 0];
end

ll = [lb; lb];
ul = [ub; ub];

if ubinf
 title(['Xác suất lớn hơn giới hạn d- ới = ',num2str(p)],'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
 k = find(x > lb);
 hh1 = plot(ll,yll,'b-');
elseif lbinf
 title(['Xác suất nhỏ hơn giới hạn trên = ',num2str(p)],'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
 k = find(x < ub);
 hh1 = plot(ul,yul,'b-');
else
 title(['Xác suất nằm trong khoảng giới hạn trên & d- ới = ',num2str(p)],'FontName','.VnTime','color','b','FontSize',12);
 k = find(x > lb & x < ub);
 hh1 = plot(ll,yll,'b-',ul,yul,'b-');

end
xfill = x(k);
xfill = [ll; xfill; ul];
yfill = [yll; y(k); yul];
fill(xfill,yfill,'b');

if nargout == 2
 h = [hh; hh1];
end

xaxis = refline(0,0);
set(xaxis,'Color','k');
ylabel('Mật độ xác suất','FontName','.VnTime');
xlabel('Giá trị tới hạn','FontName','.VnTime');
```

## Phu luc 2

**Hàm chính**

```
function y=CS22
mx = input('Nhap vector trung binh duoi dang MT cot [0 0] = );
mx=mx';
Cx = input('Nhap ma tran hiep bien Cx [1 1/2;1/2 1] = );

x=multi_gp(mx,Cx);

% Tính pdf của (x1,x2)

delta = 0.3;
x1=-5:delta:5;
x2=-5:delta:5;
for i=1:length(x1)
 for j=1:length(x2)
f(i,j)=(1/((2*pi)*det(Cx)^1/2))*exp((-1/2)*(([x1(i) x2(j)] - mx')*inv(Cx)*([x1(i);x2(j)] -mx)));
 end
end
```

```
% Vẽ pdf
mesh(x1,x2,f);
xlabel('x_1');
ylabel('x_2');
zlabel('pdf')
```

**Hàm con:**

```
function [x]=multi_gp(m,C)

% MULTI_GP tạo quá trình ngẫu nhiên Gausơ nhiều biến có trung bình m (vector cột) và ma trận hiệp biến C

N=length(m);
for i=1:N
 y(i)=gngauss;
end
y=y.';
x=sqrt(C)*y + m;

%--------------------

function [gsrv1,gsrv2] = gngauss(m,sgma)

% GNGASS tạo hai biến ngẫu nhiên độc lập có trung bình m và độ lệch chuẩn sgma. Nếu một trong hai đối số vào không có thì gán trung bình là '0'. Nếu có trung bình hoặc ph- ơng sai thì tạo hai biến ngẫu nhiên Gausơ tiêu chuẩn

if nargin==0,
 m=0;
 sgma=1;
elseif nargin==1,
 sgma=m;
 m=0;
end;
u=rand;                              % Biến ngẫu nhiên phân phối đều trong khoảng (0,1)
z=sgma*(sqrt(2*log(1/(1-u)))); % Biến ngẫu nhiên phân phối Rayleigh.
u=rand;                              % Biến ngẫu nhiên phân phối đều trong khoảng (0,1) khác
gsrv1=m+z*cos(2*pi*u);
gsrv2=m+z*cos(2*pi*u);
```

## Phu luc 3

**Ch- ơng trình chính:**

```
x = 0:0.1:3;
p = mfcraylpdf(x,1);
plot(x,p);
xlabel('x');
ylabel('pdf');
title('Khảo sát hàm mật độ xác suất của phân bố Rayleigh', 'FontName','.VnTime');
grid on;
```

**Ch- ơng trình con:**

**Xây dựng hàm mật độ xác suất cho phân bố Rayleigh:**

```
function Y = mfcraylpdf(x,b)
```

**Y = mfcraylpdf(X,B) thực hiện tính PDF của phân bố Rayleigh tại mỗi giá trị trong X cùng với các thông số t- ơng ứng trong B. Các đầu vào Vector or matrix đối với X & B phải có cùng kích th- ớc, cũng là kích th- ớc của Y. Một đầu vào vô h- ớng đối với X hoặc B đ- ợc khai triển thành ma trận hằng số với các chiều giống với các đầu vào khác.**

**Hàm đ- ợc viết gọn**

$$y = f(x|b) = \frac{x}{b^2}e^{\left(\frac{-x^2}{2b^2}\right)}$$

```
if nargin < 1,
 error('Yêu cầu ít nhất có một đối số đầu vào');
end

[errorcode x b] = distchck(2,x,b);

if errorcode > 0
 error('Yêu cầu các đối số không phải là vô h- ớng để phù hợp về kích th- ớc');
end

% Khởi tạo Y =0.
y=zeros(size(x));

% Trở về NaN Nếu B không phải là số d- ơng.
k1 = find(b <= 0);
if any(k1)
 tmp = NaN;
 y(k1) = tmp(ones(size(k1)));
end

k=find(b > 0 & x >= 0);
if any(k),
 xk = x(k);
 bk = b(k);
 y(k) = (xk./ bk.^ 2).* exp(-xk.^ 2./ (2*bk.^ 2));
end
```

## Phu luc 4

**Ch- ơng trình chính:**

```
x = 0:0.1:3;
p = mfcraylcdf(x,1);
plot(x,p);
xlabel('x');
ylabel('CDF');
title('Khảo sát hàm phân bố tích luỹ xác suất của phân bố Rayleigh', 'FontName','.VnTime');
```

**Ch- ơng trình con:**

**Xây dựng hàm phân bố xác suất tích luỹ cho phân bố Rayleigh:**

```
function p = mfcraylcdf(x,b)
```

**P = mfcraylcdf(X,B) thực hiện tính CDF của phân bố Rayleigh tại mỗi giá trị trong X cùng với các thông số t- ơng ứng trong B. Các đầu vào Vector or matrix đối với X & B phải có cùng kích th- ớc, cũng là kích th- ớc của P. Một A đầu vào vô h- ớng đối với X hoặc B đ- ợc khai triển thành ma trận hằng số với các chiều giống với các đầu vào khác.**

**Hàm đ- ợc viết gọn**

$$y = F(x|b) = \int_0^x \frac{t}{b^2}e^{\left(\frac{-t^2}{2b^2}\right)}dt$$

```
if nargin < 1,
 error('Yêu cầu ít nhất có một đối số đầu vào');
end

[errorcode x b] = distchck(2,x,b);

if errorcode > 0
```

```
 error('Yêu cầu các đối số không phải là vô h- ớng để phù hợp về kích th- ớc');
end

% Khởi tạo P = 0.

p=zeros(size(x));

% Trở về NaN nếu B không phải là số d- ơng.
k1 = find(b <= 0);
if any(k1)
 tmp = NaN;
 p(k1) = tmp(ones(size(k1)));
end

k=find(b > 0 & x >= 0);
if any(k),
 xk = x(k);
 bk = b(k);
 p(k) = 1 - exp(-xk.^ 2./ (2*bk.^ 2));
end
```