

Chương 16

KỸ THUẬT MÔ PHỎNG HIỆU QUẢ

16.1. Mở đầu

Kỹ thuật mô phỏng Monte Carlo cơ bản đã được nghiên cứu và ứng dụng vào một số hệ thống truyền thông đơn giản trong chương 9 và chương 10, ở đó đã cho thấy phương pháp Monte Carlo có khả năng ứng dụng cho tất cả các hệ thống bất kể tính phức tạp và kiến trúc của hệ thống, nhưng để đạt được ước tính hiệu năng tin cậy thì thời gian mô phỏng rất lâu, vì vậy đôi khi trở nên không thực tế.

Kỹ thuật bán phân tích SA trong chương 10 cho ta thực thi các mô phỏng rất nhanh nhưng phải biết hàm mật độ xác suất pdf.

Chương này sẽ trình bày ngắn gọn các kỹ thuật mô phỏng nhằm khắc phục nhược điểm gian mô phỏng của phương pháp Monte Carlo. Ta xét ba phương pháp: (i) *Phương pháp 1*, ngoại suy đuôi là phương pháp làm cho đường cong phù hợp với các kết quả mô phỏng MC; (ii) *Phương pháp thứ 2*, là phương pháp dựa vào việc ước tính pdf của số đo quyết định thông qua ứng dụng các phương pháp moment; (iii) *Phương pháp thứ 3*, là đánh địa chỉ, lấy mẫu quan trọng, bao gồm việc làm chệch tập âm kênh theo cách ép các lỗi quyết định hơn nữa. Lấy mẫu quan trọng là kỹ thuật làm giảm phương sai để tạo ra ước tính BER có phương sai nhỏ hơn ước tính bởi mô phỏng MC với thời gian mô phỏng tương đương. Ứng dụng các kỹ thuật giảm phương sai về cơ bản bao gồm việc dung hòa giữa thời gian chạy máy tính và phân tích. Một số kỹ thuật này được nghiên cứu và khám phá cho các kỹ thuật mô phỏng hiệu quả vẫn còn là lĩnh vực nghiên cứu hấp dẫn.

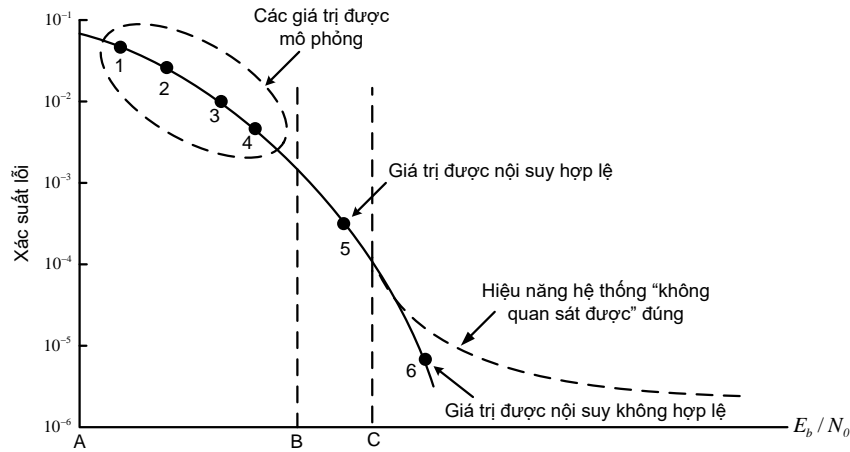
Trong 03 kỹ thuật được trình bày trong chương này, thì kỹ thuật lấy mẫu quan trọng nhận được sự quan tâm nhất trong hầu hết các ứng dụng, do đó được xét chi tiết hơn. Để ứng dụng hiệu quả các phương pháp này (đặc biệt là lấy mẫu quan trọng) cần phải có kỹ năng phân tích. Chương này sẽ chỉ xét tóm tắt của các chủ đề này.

16.2. Ngoại suy đuôi

Phương pháp này được ứng dụng bằng cách thực hiện một số mô phỏng MC sử dụng các giá trị của E_b/N_0 để được các kết quả mô phỏng chính xác với các thời gian mô phỏng hợp lý. Sau đó các kết quả này được ngoại suy tới các giá trị E_b/N_0 mà không thực tế đối với các mô phỏng MC. Tất nhiên, phải rất cẩn thận để tránh ngoại suy rơi vào vùng E_b/N_0 mà ở đó ngoại suy bị sai. Ví dụ hệ thống minh họa ở hình 16.1. Khi $A < E_b/N_0 < B$, có thể tính toán giá trị xác suất lỗi khả tin với thời gian mô phỏng hợp lý bằng mô phỏng MC, tạo ra các điểm 1, 2, 3, 4. Với hệ thống quan tâm, ngoại suy hợp lệ đối với $B < E_b/N_0 < C$, và do đó điểm 5 được ngoại suy hợp lệ. Tiếp tục ngoại suy đến điểm 6. Tuy nhiên, hệ thống thể hiện một sản xuất lỗi, và kết quả là việc ngoại suy các giá trị mô phỏng trong vùng $E_b/N_0 > C$ là không hợp lệ. Vì vậy,

điểm 6 là không hợp lệ. Ta phải rất cẩn thận với các kết quả ngoại suy trong các vùng mà các kết quả mô phỏng hoặc thực nghiệm không khả dụng.

Giả sử ta biết (hoặc sẽ cho rằng), hàm mật độ xác suất pdf của số đo quyết định là biến ngẫu nhiên Gausơ. Khi này, xác suất lỗi hệ thống được cho bởi $Q\left(\sqrt{g\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right)$, trong đó $Q(x)$ là hàm Q Gausơ và $g\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ là hàm của E_b/N_0 được xác định bởi các tham số hệ thống như dạng điều chế. Ta thấy rằng việc làm phù hợp các điểm mô phỏng với hàm Gausơ Q (như các điểm 1, 2, 3 và 4 trong hình 16.1) có thể cho phép ngoại suy hiệu năng chính xác đến các giá trị E_b/N_0 cao hơn.



Hình 16.1: Dùng giá trị hợp lệ và không hợp lệ của ngoại suy đuôi

Ví dụ tổng quát hơn, giả sử rằng số đo quyết định không hoàn toàn là Gausơ nhưng có thể được xấp xỉ bởi pdf của lớp mũ tổng quát.

Lớp các pdf này được định nghĩa bởi

$$f_X(x|v, \sigma, m) = \frac{v}{\sigma \Gamma(1/v) \sqrt{8}} e^{-\left|\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right|^v} \quad (16.1)$$

Trong đó $\Gamma(\cdot)$ là hàm gamma, m là giá trị trung bình của X , v là chế độ, σ là tham số liên quan tới việc trải rộng pdf xung quanh giá trị trung bình. Tất nhiên, khi $v = 2$ thì tham số σ là độ lệch chuẩn của X (vì các kết quả pdf phân bố Gausơ có $v = 2$). Các kết quả pdf phân bố Laplace có $v = 1$. Nếu coi rằng, giá trị trung bình bằng 0, thì có thể chỉ ra rằng tại các giá trị T (ngưỡng lỗi) lớn:

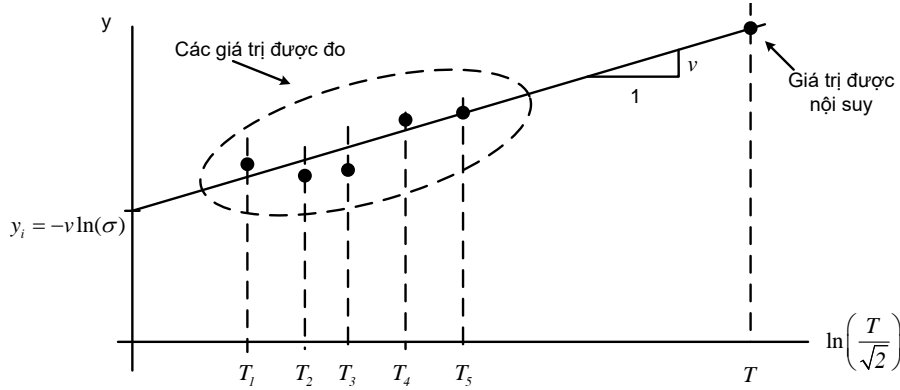
$$\int_T^\infty f_X(x|v, \sigma) dx \approx e^{-\left(\frac{T}{\sigma\sqrt{2}}\right)^v} \quad (16.2)$$

Vế trái của (16.2) là BER của hệ thống khi ta dùng ngưỡng T và, vì vậy ta viết vế trái là $\hat{P}_e(T)$. Lấy logarit biểu thức (16.2) hai lần ta được:

$$\ln \left[-\ln \left(\hat{P}_e(T) \right) \right] \approx \nu \ln \left(\frac{T}{\sigma \sqrt{2}} \right) \quad (16.3)$$

$$\ln \left[-\ln \left(\hat{P}_e(T) \right) \right] \approx \nu \ln \left(\frac{T}{\sqrt{2}} \right) - \nu \ln(\sigma) \quad (16.4)$$

Tại đây, giả sử ta chạy M lần mô phỏng MC với các ngưỡng khác nhau T_1, T_2, \dots, T_M , thì ước tính BER tương ứng với mỗi ngưỡng này là $\hat{P}_e(T_1), \hat{P}_e(T_2), \dots, \hat{P}_e(T_M)$. Đồ thị của $\ln \left[-\ln \left(\hat{P}_e(T) \right) \right]$ là một hàm của $\ln(T/\sqrt{2})$ sẽ là một đường thẳng, được xác định bằng cách sử dụng hồi quy tuyến tính, với đường thẳng chắn y là $-\nu \ln(\sigma)$ và độ dốc ν . Điều này được minh họa trong hình 16.2.



Hình 16.2: Quá trình ngoại suy đuôi

Chế độ ν được xác định từ độ dốc. Một khi đã biết ν , thì σ được xác định từ đường thẳng chắn y là y_i theo:

$$\sigma = e^{-y_i/\nu} \quad (16.5)$$

Một khi ν và σ được xác định thì, (16.2) được sử dụng làm bộ ước tính BER hệ thống. Ngoại suy đuôi có thể được mở rộng cho các pdf khác. Kỹ thuật này sẽ chính xác nếu có kỹ xảo phân tích, đủ để chọn một họ pdf gần đúng cho hệ thống đã cho.

16.3. Bộ ước tính pdf

Ta biết rằng xác suất lỗi của một hệ thống truyền tin số được viết dưới dạng sau:

$$P_E = \int_T^{\infty} f_V(v) dv \quad (16.6)$$

Trong đó T là ngưỡng lỗi (các giá trị của $V > T$ gây ra các lỗi) và $f_V(v)$ là pdf của con số quyết định. Việc đầu tiên để ước tính BER là ước tính pdf sau đó ước lượng tích phân được xác định trong (16.6) bằng tích phân số. Một cách trực giác là tạo một hoành đồ (tổ chức đồ dữ liệu) biểu diễn các giá trị của V . Để được hữu hiệu, hoành đồ này phải có đủ số bin khi $V > T$ để cho phép thực hiện tích phân (16.6) với độ chính xác cần thiết. Hơn nữa, như ta thấy trong

chương 8, hoành đồ là một bộ ước tính *chệch* khi kích thước dữ liệu N hữu hạn. May thay, tồn tại các lựa chọn cho phương pháp hoành đồ. Hai kỹ thuật phổ biến nhất để ước tính pdf từ một tập dữ liệu $x[n]$ là chuỗi Gram-Charlier và chuỗi Parzen.

16.3.1. Phương pháp chuỗi Gram-Charlier

Chuỗi Gram-Charlier gần đúng với pdf dạng:

$$\hat{f}_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \sum_{k=1}^N C_k H_k(y) \quad (16.7)$$

Trong đó $H_k(\cdot)$ biểu diễn các đa thức Chebyshev-Hermite và C_k là các hệ số chuỗi. Trong quá trình (16.7), để đơn giản ta coi rằng X là một biến ngẫu nhiên phương sai đơn vị trung bình không. Các đa thức Chebyshev-Hermite được định nghĩa bởi quan hệ hồi quy:

$$H_k(y) = yH_{k-1}(y) - (k-1)H_{k-2}(y), \quad k \geq 2 \quad (16.8)$$

Trong đó $H_0(y) = 1$ và $H_1(y) = y$. Khi cho trước các đa thức Chebyshev-Hermite, thì các hệ số có thể được tính từ:

$$C_k = \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(y) f_Y(y) dy \quad (16.9)$$

Lưu ý rằng, mặc dù $f_Y(y)$ chưa biết, nhưng (16.9) có thể được ước lượng theo các mô men của Y . Nếu Y không phải là biến ngẫu nhiên phương sai đơn vị trung bình không, thì ta có thể áp dụng chuyển đổi:

$$Z = \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} \quad (16.10)$$

Trong đó μ_y và σ_y biểu diễn giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của Y . Theo biến đổi này Z trở thành biến ngẫu nhiên phương sai đơn vị trung bình không sao cho (16.7) có thể được áp dụng trực tiếp với Y được thay bởi Z .

Các chuỗi Gram-Charlier tạo ra phép gần đúng tốt cho pdf đích ở lân cận giá trị trung bình nhưng kém chính xác ở đuôi của pdf. Đáng tiếc, khi ước tính BER, BER lại là đuôi của pdf. Chuỗi Gram-Charlier có một số khó khăn khác. Một cách xấp xỉ hóa Gram-Charlier không thuộc loại không chệch tiệm cận và không hội tụ đều tới pdf khi thêm nhiều số hạng. Ngoài ra, với một số hữu hạn các số hạng, N , phép gần đúng được định nghĩa bởi (16.7) không phải là pdf đúng và thậm chí là âm đối với các giá trị đặc biệt của y . Tuy tồn tại những khiếm khuyết song chuỗi Gram-Charlier vẫn là một bộ ước tính pdf hữu hiệu cho nhiều ứng dụng.

Bộ ước tính cho các mô men của biến ngẫu nhiên tạo ra một chuỗi số liệu $x[n]$ được cho bởi:

$$E\{X^k\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^k[n] \right] \quad (16.11)$$

Tất nhiên trong thực tế, kích thước số liệu N phải hữu hạn. Đáng tiếc, khi N hữu hạn thì bộ ước tính này không có các thuộc tính tối ưu. Tuy nhiên, nó là một bộ ước tính kiên định vì vậy hiệu năng thỏa đáng có thể được mong đợi khi N đủ lớn.

16.3.2. Phương pháp chuỗi Parzen:

Những khiếm khuyết của chuỗi Gram-Charlier ít nhất có thể khắc phục một phần qua việc sử dụng bộ ước tính pdf Parzen. Bộ ước tính Parzen có dạng:

$$\hat{f}_v(v) = \frac{1}{N h(N)} \sum_{k=1}^N g\left(\frac{v - v_k}{h(N)}\right) \quad (16.12)$$

Các lựa chọn $g(x)$ và $h(N)$ có phần tùy ý nhưng lựa chọn hợp lý trong nhiều ứng dụng là:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (16.13)$$

$$h(N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (16.14)$$

Trong (16.12), N là kích thước của tập số liệu, hàm $g(\cdot)$ là hàm trọng số, $h(N)$ là hệ số làm nhẵn (san bằng). Mặc dù bộ ước tính Parzen bị chệch khi N hữu hạn, nhưng có thể thấy rằng nếu $h(N) \rightarrow 0$ khi $N \rightarrow \infty$ và $Nh(N) \rightarrow \infty$ khi $N \rightarrow \infty$, thì bộ ước tính Parzen là không chệch một cách tiệm cận. Rõ ràng, hàm làm nhẵn được định nghĩa bởi (16.14) thỏa mãn các yêu cầu này. Cũng có thể thấy rằng bộ ước tính Parzen là kiên định.

Cả hai kỹ thuật Gram-Charlier và Parzen đều được ứng dụng thành công cho một số bài toán. Gần đây, chúng được dùng để ước tính BER của hệ thống thông tin số hoạt động trong rất nhiều kịch bản kênh như: kênh AWGN, kênh AWGN có nhiễu đồng kênh và kênh AWGN cộng với đa đường.

16.4. Lấy mẫu quan trọng

Ta đã thấy ở chương 9 và 10, các mô phỏng MC thực hiện phép thử ngẫu nhiên một số lượng lớn các lần N , và đếm số các kết cục N_A , biểu thị một số sự kiện quan tâm A . Ta có thể ước tính xác suất của sự kiện A bằng phương trình:

$$\Pr(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} \quad (16.15)$$

Giả sử N_A là số lỗi trong truyền dẫn N ký hiệu, thì các hệ thống truyền thông hiệu năng cao tạo ra các giá trị của N_A nhỏ hơn nhiều N . Đề cập ngắn gọn về các khoảng tin cậy trong chương 9 cho thấy rằng để tạo một bộ ước tính khả tin, ta cần có N_A ít nhất phải bằng 10 và tốt nhất là 100. Trong nhiều tình huống yêu cầu N_A lớn có thể dẫn đến thời gian mô phỏng rất lâu đặc biệt khi BER thấp (SNR cao). Nếu BER nhỏ, lỗi giải điều chế được mô phỏng là hiếm (xác suất thấp, khả năng xảy ra thấp) nhưng là sự kiện quan trọng. Mục đích của lấy mẫu quan trọng là: (i) thay đổi mô phỏng theo cách điều khiển được; (ii) tăng số lượng các sự kiện hiếm và quan trọng này trong khi đó vẫn có thể xác định chính xác xuất lỗi giải điều chế. Điều này cần phải thay đổi trong (16.15). Lấy mẫu quan trọng thuộc lớp phương pháp luận mô phỏng được xem là các kỹ thuật giảm phương sai. Mục đích của các kỹ thuật giảm phương sai là triển

khai một bộ ước tính không chệch mà biểu lộ phương sai được giảm và/hoặc thời gian mô phỏng được giảm so với mô phỏng Monte Carlo.

Trước khi đề cập việc lấy mẫu quan trọng, lưu ý rằng việc mô tả chi tiết lấy mẫu quan trọng là ngoài phạm vi tài liệu này. Theo đó, thay vì xét ước tính diện tích hình học bằng cách sử dụng các khái niệm cơ bản của lấy mẫu quan trọng.

Trong chương 9 vấn đề mô phỏng Monte Carlo được đề cập bằng cách triển khai bộ ước tính cho diện tích có dạng hai chiều (lưu ý rằng vấn đề này dẫn đến bộ ước tính cho giá trị của π). Trong chương này ta lại xét một bộ ước tính cho diện tích có dạng hai chiều (trong trường hợp này là elip) nhằm làm sáng tỏ kỹ thuật mô phỏng lấy mẫu quan trọng. Cuối chương trình bày mô phỏng hệ thống thông tin đơn giản.

16.4.1. Diện tích elip

Giả sử ta muốn dùng các mô phỏng Monte Carlo để ước tính diện tích elip trong mặt phẳng (x, y) . Cụ thể, ta khảo sát bài toán tìm diện tích elip có trục chính theo hướng x có độ dài $2\sqrt{2}$ và trục phụ có độ dài 2.

Xem lại các bộ ước tính Monte Carlo

Elip bao gồm tất cả các điểm (x, y) sao cho:

$$x^2 + 2y^2 < 2 \quad (16.16)$$

Diện tích của elip A_e là:

$$A_e = \int_{y=-1}^1 \int_{x=-\sqrt{2-2y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}} dx dy = \pi\sqrt{2} \cong 4,443 \quad (16.17)$$

Bằng cách viết lại tích phân, ta có thể đưa bài toán vào dạng phù hợp với tích phân Monte Carlo hơn và để giải thích lấy mẫu quan trọng. Muốn vậy,

Trước hết, biểu diễn các giới hạn của tích phân bằng một hàm bị tích bằng cách định nghĩa hàm chỉ báo $h_e(x, y)$, sao cho:

$$h_e(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + 2y^2 \leq 2 \quad \text{trong elip} \\ 0, & x^2 + 2y^2 > 2 \quad \text{ngoài elip} \end{cases} \quad (16.18)$$

Dẫn đến:

$$A_e = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_e(x, y) dx dy \quad (16.19)$$

Tiếp theo, xác định vùng biên giới chứa elip và có một vùng dễ tính toán. Diện tích của vùng biên giới này được ký hiệu là $A_{\text{biên}}$. Nhân hàm bị tích với phân tử đơn vị có dạng $A_{\text{biên}}/A_{\text{biên}}$ cho ta:

$$A_e = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_e(x, y) A_{\text{biên}} \frac{1}{A_{\text{biên}}} dx dy \quad (16.20)$$

Sau đó, xác định cặp biến ngẫu nhiên (X, Y) được phân bố đều trên $A_{biên}$. Hàm pdf của cặp biến ngẫu nhiên này là:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1/A_{biên}, & h_e(x, y) = 1 \\ \text{tùy ý}, & h_e(x, y) = 0 \end{cases} \quad (16.21)$$

Cuối cùng là, kết hợp (16.20) và (16.21):

$$A_e = A_{biên} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_e(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy \quad (16.22)$$

Như ở trong chương 9, bộ ước tính diện tích elip là

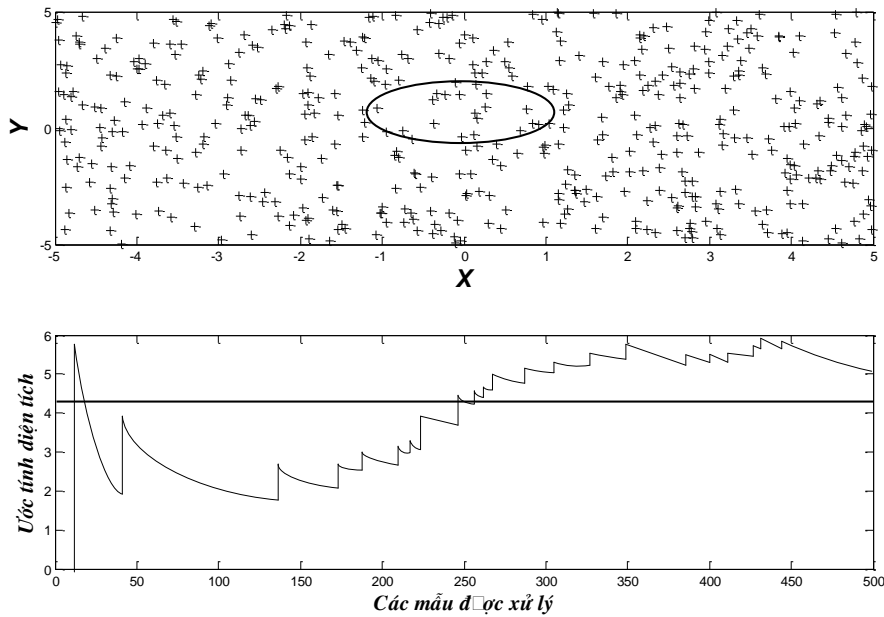
$$\hat{A}_e = A_{biên} \left(\frac{N_e}{N} \right) \quad (16.23)$$

Trong đó N biểu thị số điểm được tạo trong vùng biên giới và N_e biểu thị số các điểm rơi vào trong elip.

Lựa chọn các hộp bao cho các mô phỏng MC

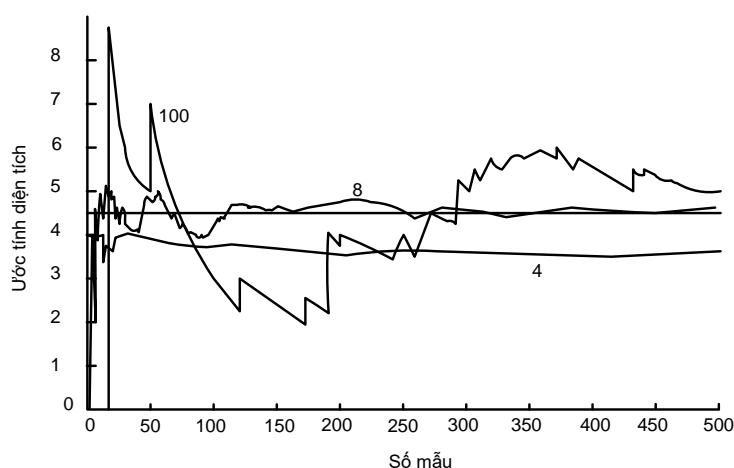
Có thể thấy rằng bộ ước tính được định nghĩa bởi (16.23) là kiên định và không chệch đã tạo ra vùng biên giới đóng bao hoàn toàn elip, được minh hoạ trong ví dụ sau đây

Ví dụ 16.1: Tạo $N = 500$ điểm trong hộp bao hình vuông được đặt tại trung tâm gốc tọa độ. Sử dụng (16.23) để ước tính diện tích elip với ba kích thước hình biên khác nhau; $A_{biên} = 4, 8, \text{ và } 100$. Nửa trên của hình 16.3 cho thấy các điểm mẫu được tạo trong mô phỏng này với $A_{biên} = 100$ (10 đơn vị trên 1 chiều), và nửa dưới của hình này cho thấy ước tính liên tục của diện tích cùng với giá trị được tính theo lý thuyết. Thấy rõ từ hình 16.3, cần có nhiều hơn 500 mẫu trong mô phỏng này để tạo ước tính diện tích elip chính xác.



Hình 16.3: Quá trình ước tính diện tích với $N = 100$

Tiếp theo, ta khảo sát ảnh hưởng của việc thay đổi diện tích hình bao biên giới. Đặt $A_{biên} = 8$ cải thiện đột ngột các thuộc tính hội tụ của bộ ước tính. Kết quả là, vùng được ước tính nằm trong vài phần trăm giá trị đúng chỉ sau 100 mẫu. Dựa vào quan sát này ta có thể kết luận rằng, đường bao biên giới càng nhỏ thì bộ ước tính hội tụ càng nhanh. Nó chính xác tới một điểm. Tuy nhiên, khi $A_{biên} = 4$, thì bộ ước tính hội tụ nhanh, nhưng tới giá không chính xác. Bộ ước tính bị chệch vì hình bao biên giới không chứa toàn bộ elip nữa. Nếu đường bao biên giới tiếp tục co lại, thì tốc độ hội tụ tiếp tục được cải thiện nhưng độ chệch tăng và cuối cùng thì ta có thể đơn giản hóa việc tìm diện tích hình bao và không phải là diện tích elip. Các tính chất hội tụ khi $A_{biên} = 100, 8, 4$ được minh họa ở hình 16.4.



Hình 16.4: Minh họa tính hội tụ đối với các diện tích bao khác nhau

Ảnh hưởng của kích thước hình bao biên giới có thể được dự đoán từ (16.23). Mức độ chính xác của tỉ số N_e/N tăng theo N_e . Nói cách khác, ta muốn có nhiều điểm nhất bên trong elip, dẫn đến ta chọn các đường bao nhỏ. Tuy nhiên, bộ ước tính MC sẽ trở nên bị chệch nếu đường bao rơi hoàn toàn vào elip, dẫn đến kích thước đường bao tối ưu là $A_{biên} = 8$, là hình vuông nhỏ nhất bao quanh elip. Thách thức là ở chỗ làm thế nào tìm được các bộ ước tính vừa không bị chệch vừa hội tụ nhanh.

Các vùng biên giới tối ưu

Trong phần mô phỏng trước cho thấy, mô phỏng MC hai chiều sẽ tạo ra các điểm ngẫu nhiên trên một số vùng của mặt phẳng (x, y) . Để tạo ra bộ ước tính hội tụ nhanh, ta muốn có bộ ước tính MC sử dụng vùng nhỏ nhất có thể mà vẫn đảm bảo diện tích quan tâm được bao hoàn toàn. Để đơn giản, ban đầu ta giả sử vùng biên giới là hình chữ nhật. Tuy nhiên, không gặp khó khăn khi triển khai thuật toán ước tính theo yêu cầu này. Thuật toán có thể áp dụng cho bất kỳ vùng biên giới của vùng đã cho. Chẳng hạn, xét một biên giới hình chữ nhật. Hình chữ nhật nhỏ nhất chứa elip có diện tích là $4\sqrt{2}$. Vì nó nhỏ hơn diện tích biên giới hình vuông nhỏ nhất, nên bộ ước tính dựa vào vùng biên giới hình chữ nhật sẽ hội tụ nhanh hơn bộ ước tính dựa vào vùng biên giới hình vuông.

Tại đây ra có thể mở rộng tìm hình bao biên giới tốt hơn cho các đa giác bậc cao hơn. Ta có thể tìm các đa giác bao quanh elip và có các diện tích thậm chí nhỏ hơn $4\sqrt{2}$. Sẽ khó tính toán vùng đa giác biên giới theo cách giải tích hơn và cũng sẽ khó tạo các điểm phân bố đều trong đa giác hơn. Vùng biên giới cuối cùng chính là elip. Trường hợp này $A_{\text{biên}} = A_e$, và mọi điểm ngẫu nhiên được tạo ra sẽ rơi vào bên trong elip. Vì vậy, $N_e = N$. Phương trình (16.23) chỉ ra rằng mô phỏng sẽ hiệu quả và sẽ tạo ra *kết quả chính xác sau khi tạo ra một điểm ngẫu nhiên*. Tất nhiên, trong trường hợp lấy giới hạn này không cần thiết thực hiện mô phỏng, vì A_e phải được xác định theo cách giải tích trước khi triển khai mã mô phỏng. Dĩ nhiên, nó loại bỏ sự cần thiết mô phỏng.

Một trong những thách thức của việc tạo ra những mô phỏng hiệu quả cao là lỗi tính toán nhỏ có thể gây ra một phần elip rơi ra ngoài vùng biên giới, tạo ra một bộ ước tính bị chệch. Nếu một khi không biết câu trả lời chính xác, thì không thể phát hiện sự chệch bằng cách chỉ quan trắc các kết quả mô phỏng.

Tóm tắt lại khi sử dụng pdf phân bố đều trong các mô phỏng MC, thì nên:

1. *Xác định diện tích vùng biên giới theo cách giải tích.*
2. *Chứng minh theo cách giải tích rằng vùng biên giới bao quanh hoàn toàn diện tích quan tâm.*
3. *Tìm một giải thuật để tạo các điểm phân bố đều một cách hiệu quả trong vùng biên giới.*
4. *Giảm thiểu diện tích vùng biên giới, được cho trong các ràng buộc 1, 2, và 3.*
5. *Chạy mô phỏng đủ lâu để quan sát số lượng lớn các mẫu trong elip.*

Các quan tâm và các yêu cầu này rất dễ để hiểu đối với bài toán đơn giản này. Chúng sẽ xuất hiện lại trong các phần sau trong nhiều chiến lược mô phỏng phức tạp hơn, và mức độ phức tạp toán học sẽ làm cho nó khó hình dung và đánh giá đúng hơn.

Các hàm pdf không đều và các hàm trọng số

Tại đây ta mới chỉ xét thuật toán Monte Carlo cơ bản. Các mô phỏng Monte Carlo từ chương 9 ta có hai bộ đếm, một bộ *đếm sự kiện* và một bộ *đếm mẫu*. Bộ đếm mẫu được tăng mỗi lần thử nghiệm ngẫu nhiên được thực hiện (ví dụ tạo một mẫu và kiểm tra xem nếu nó rơi vào vùng quan tâm). Bộ đếm sự kiện được tăng mỗi lần xuất hiện sự kiện quan tâm như xuất hiện một mẫu rơi vào vùng đã cho. Các bộ đếm thường được tăng bằng cách tăng nội dung bộ nhớ. Ta thấy rằng, bằng cách cộng trọng số ω_i vào bộ đếm sự kiện chứ không phải là số 1. *Khái niệm làm tăng các trọng số chứ không phải là làm tăng các số nguyên là trung tâm để áp dụng phương pháp luận lấy mẫu quan trọng cho ước tính BER.*

Trong phương trình (16.19) ta đã nhân hàm bị tích với phần tử đơn vị có dạng $A_{\text{biên}}/A_{\text{biên}}$ để có được (16.20). Bộ ước tính tổng quát hơn được thiết lập bằng cách nhân hàm bị tích trong (16.19) với *hàm trọng số hai chiều* được chia bởi chính nó $\omega(x, y)/\omega(x, y)$. Giống như trước đó, ta thay $1/\omega(x, y)$ bởi pdf. Cụ thể là:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1/\omega(x, y), & h_e(x, y) = 1 \\ \text{tùy ý}, & h_e(x, y) = 0 \end{cases}$$

Dẫn đến:

$$A_e = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_e(x, y) \cdot \omega(x, y) \cdot f_{XY}(x, y) dx dy \quad (16.24)$$

Đây là dạng tổng quát hơn của (16.22), trong đó $f_{XY}(x, y)$ có thể là pdf bất kỳ khác không trong elip. Bộ ước tính diện tích tương ứng với (16.24) là:

$$\hat{A}_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_e(x_i, y_i) \cdot \omega(x_i, y_i) \quad (16.25)$$

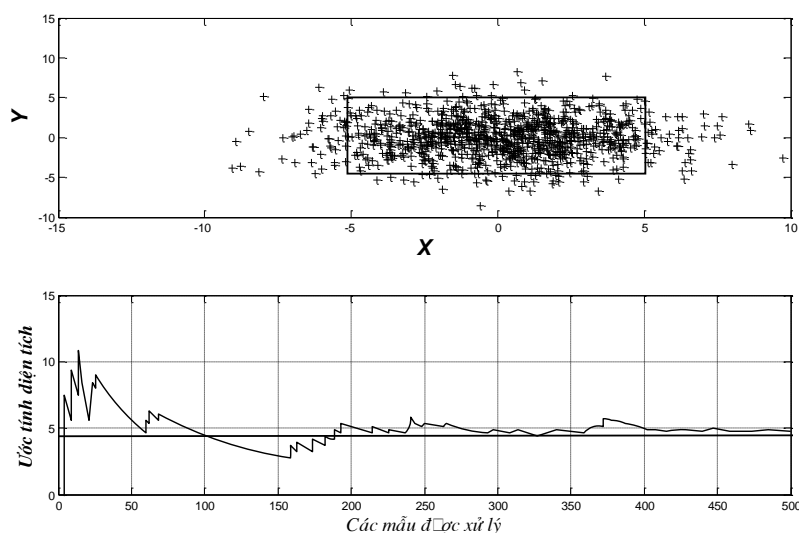
Trong đó các véc tơ ngẫu nhiên (x_i, y_i) là phân bố đồng dạng và độc lập *iid* có pdf là $f_{XY}(x, y)$. Đây là sự tổng quát hoá của kết quả trước, vì với trường hợp phân bố đều, thì đảo của pdf, nghĩa là hàm trọng lượng $A_{biên}$ là không đổi đối với tất cả các điểm bên trong elip. Phương trình (16.25) cho phép ta sử dụng gần như pdf bất kỳ trong mô phỏng và bao gồm pdf phân bố đều như trường hợp đặc biệt. Phương sai và độ chệch của bộ ước tính là hàm của pdf được chọn cho mô phỏng.

Để tránh độ chệch bộ ước tính, pdf phân bố đều phải chứa toàn bộ elip. Nói cách khác, pdf phân bố đều phải khác không trong bên trong elip. Ta có thể thấy rằng, bộ ước tính diện tích không bị chệch với giả thiết $f_{XY}(x, y) > 0$ với tất cả các điểm bên trong elip. Vì có nhiều pdf là khác không trên toàn bộ mặt phẳng (x, y) , nên không khó để tạo các bộ ước tính không chệch. Giảm thiểu phương sai là một bài toán khó hơn vì tốc độ hội tụ mô phỏng là một hàm của pdf phức tạp hơn. Ví dụ sau đây làm sáng tỏ bài toán này.

Ví dụ 16.2: Trong ví dụ này ta chỉ xét các pdf phân bố Gausơ và khảo sát tốc độ hội tụ cho ba giá trị độ lệch chuẩn khác nhau là $\sigma = 10, \sigma = 1$ và $\sigma = 0,2$.

Trường hợp $\sigma = 10$

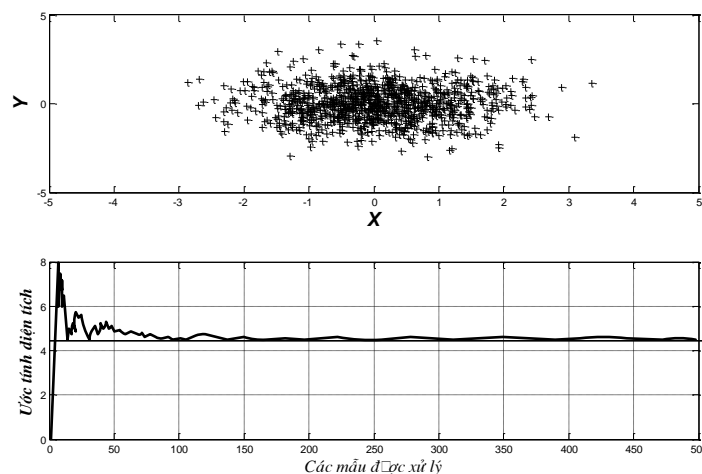
Hình 16.4 cho thấy kết quả với $\sigma = 10$. (Lưu ý hộp bao ban đầu có kích thước 5×5 . Elip được che bởi các điểm mẫu). Khi σ lớn, pdf bên trong elip là nhỏ nhưng gần như không đổi. Vì vậy, trọng số tương đối lớn được gán cho mỗi mẫu rơi vào trong elip. Cho thấy một vài bước nhảy lớn sau các khoảng có tốc độ phân rã hyperbolic ($1/N$). Ước tính diện tích hội tụ đến giá trị đúng *chậm*, trong phần lớn các cách tương tự như pdf phân bố đều và diện tích biên giới lớn.



Hình 16.5: Hiệu năng bộ ước tính với lấy mẫu Gauss và $\sigma = 10$

Trường hợp $\sigma = 1$

Khi này độ lệch chuẩn đóng gần kích thước của elip và kết quả là tốc độ hội tụ nhanh hơn nhiều. Một số lượng lớn các mẫu rơi vào trong elip, và mỗi mẫu được ấn định một trọng số tương đối nhỏ. Trường hợp này tương ứng với pdf phân bố đều khi vùng biên giới chỉ lớn hơn elip không đáng kể. Kết quả này được thể hiện trong hình 16.6.

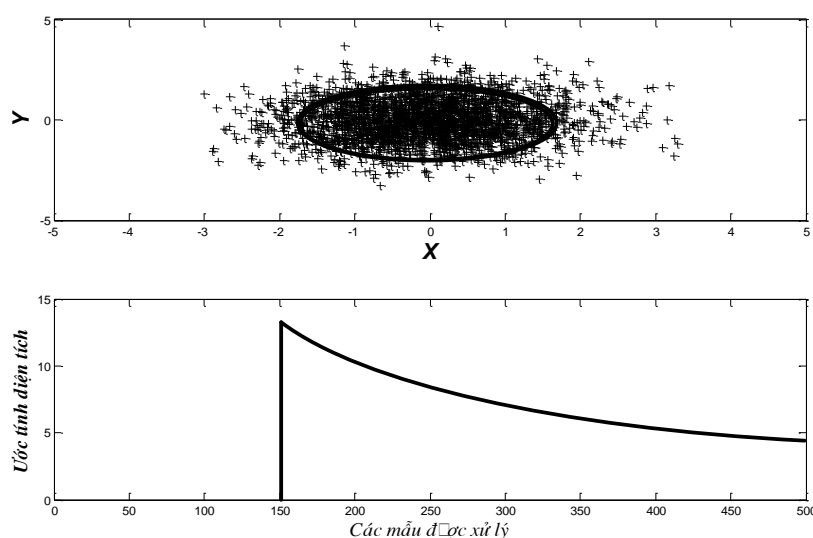


Hình 16.6: Hiệu năng bộ ước tính với lấy mẫu Gauss và $\sigma = 1$

Trường hợp $\sigma = 0,15$

Ảnh hưởng của tính cách sự kiện cực trị đã quen thuộc với ta từ các nghiên cứu trước. Ví dụ đơn giản giả sử: (i) hệ thống truyền tin số có BER bằng 10^{-6} ; (ii) thực hiện mô phỏng MC; (iii) thu được 99 ký hiệu đầu tiên không có lỗi. Bộ ước tính BER $\hat{P}_E = N_e / N$ bằng 0 khi $1 \leq N \leq 99$ là giá trị quá nhỏ. Nếu ký hiệu số 100 bị lỗi (sự kiện cực trị) thì \hat{P}_E nhảy từ 0 lên

10^{-2} (là quá lớn). Nếu kéo dài các quyết định chính xác theo lỗi này, thì \hat{P}_E sẽ giảm là $1/N$ khi $N > 100$. Tính cách này sẽ tiếp tục cho tới khi xảy ra lỗi tiếp theo. Về cơ bản giống như tính cách trong hình 16.7 chỉ khác là lỗi trong hình 16.7 được nhân với một trọng số lớn ω_i . Lưu ý rằng các sự kiện cực trị xuất hiện sớm trong chạy mô phỏng có ảnh hưởng rõ ràng hơn các sự kiện cực trị xuất hiện sau.



Hình 16.7: Hiệu năng bộ ước tính với lấy mẫu Gauss và $\sigma = 0,15$

Cả ba mô phỏng đều dùng cùng số gốc ngẫu nhiên. Cả ba bộ ước tính đều không bị chệch và kiên định, nhưng cách thức hội tụ khác nhau rất nhiều. Các cách thức này được tổng hợp trong bảng 16.1.

Bảng 16.1: Cách thức hội tụ

Độ chệch chuẩn σ	Số các mẫu trong Elip	Cách thức hội tụ
Quá nhỏ	Gần như tất cả	Chậm (biểu hiện các sự kiện cực trị)
Phù hợp	Từ 10% đến 90%	Nhanh
Quá lớn	Rất ít	Chậm

Trong ví dụ rất đơn giản này, có rất nhiều phương pháp để dự đoán cách thức hội tụ. Các biểu đồ tán xạ cho biết khi pdf bao phủ quá ít elip hoặc quá nhiều mặt phẳng. Bộ chỉ thị rõ nét khác là hàm trọng số. Hàm trọng số lý tưởng sẽ nhỏ trên toàn bộ diện tích elip. Nếu tập hợp đủ dữ liệu, thì các ước tính và các mẫu của các hàm lỗi cũng cho thấy rõ các cách thức. Về lý tưởng, ta mong muốn thiết lập các khoảng tin cậy cho các bộ ước tính này. Đây là việc rất khó vì các ước tính không có phân bố nhị thức nữa. Có thể lấy gần đúng Gauss nếu số lượng đủ lớn các ký hiệu được xử lý. Số lượng mẫu cần thiết cho phép lấy gần đúng được chính xác là phụ thuộc vào cách thức hội tụ. Khi hội tụ nhanh chỉ cần vài trăm mẫu. Các bộ ước tính hội tụ chậm tương tự với trường hợp đều và cần vài trăm điểm bên trong elip. Trường hợp cuối cùng, cần quan sát hàng trăm sự kiện cực trị trước khi lấy gần đúng Gauss.

16.4.2. Tính nhạy cảm với pdf

Việc tìm diện tích elip là bài toán tất định. Các biến ngẫu nhiên được sử dụng trong mô phỏng MC là *hoàn toàn giả định*, và không mô hình hóa cho bất kỳ thiết bị vật lý hoặc tín hiệu nào. Hầu hết các hệ thống truyền thông vật lý đều phải chịu các xáo trộn ngẫu nhiên và xử lý số liệu ngẫu nhiên. Khuynh hướng đầu tiên là triển khai mô phỏng sử dụng cùng hàm pdf nguồn tạp âm làm hệ thống vật lý. Tuy nhiên, ta sẽ thấy là không cần thiết. Mô phỏng có thể sử dụng nguồn tạp âm *bị chệch*, có hàm pdf khác với hàm pdf được dùng trong hệ thống vật lý. Ví dụ, giả sử hệ thống vật lý tạo ra một cặp biến ngẫu nhiên Gauss (x, y) có pdf là:

$$f_{\text{vật lý}}(x, y) = \frac{I}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2rxy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)} \quad (16.26)$$

Trong đó σ_x và σ_y là các độ lệch chuẩn của X và Y , và r là hệ số tương quan. Xác suất mà cặp biến ngẫu nhiên rơi vào trong elip là:

$$B_e = \int_{y=-I}^I \int_{x=-\sqrt{2-2y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}} f_{\text{vật lý}}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_e(x, y) f_{\text{vật lý}}(x, y) dx dy \quad (16.27)$$

Biểu thức này khó ước lượng. Giải pháp MC đơn giản cho bài toán này sử dụng tổng:

$$\hat{B}_e = \frac{I}{N} \sum_{i=1}^N h_e(x_i, y_i) = \frac{N_e}{N} \quad (16.28)$$

Trong đó các véc tơ ngẫu nhiên (x_i, y_i) là phân bố đồng nhất độc lập thống kê **idd** có pdf là $f_{\text{vật lý}}(x, y)$. Giả sử ta không có bộ tạo số ngẫu nhiên để tạo ra $f_{\text{vật lý}}(x, y)$, nhưng ta đã có bộ tạo số ngẫu nhiên để tạo ra các mẫu có phân bố là $f_{\text{mô phỏng}}(x, y)$. Ta vẫn có thể giải quyết bài toán bằng các kỹ thuật Monte Carlo. Trong các phần trước, ta nhân hàm bị tích của (16.27) với phần tử đơn vị có dạng $\omega(x, y) / \omega(x, y)$. Khác với triển khai trước đây, hàm trọng số bây giờ được định nghĩa là:

$$\omega(x, y) = \begin{cases} f_{\text{vật lý}}(x, y) / f_{\text{mô phỏng}}(x, y), & h_e(x, y) = I \\ \text{tùy ý}, & h_e(x, y) = 0 \end{cases} \quad (16.29)$$

Thay (16.29) vào (16.27) ta được:

$$B_e = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_e(x, y) \omega(x, y) f_{\text{mô phỏng}}(x, y) dx dy \quad (16.30)$$

Có thể được xấp xỉ bởi tổng:

$$\hat{B}_e = \frac{I}{N} \sum_{i=1}^N h_e(x_i, y_i) \omega(x_i, y_i) \quad (16.31)$$

Các vec tơ ngẫu nhiên (x_i, y_i) là phân bố đồng nhất độc lập thống kê **idd** có $f_{mô phỏng}(x, y)$. Cũng giống như các bài toán trước, ta phải quan tâm độ chệch, tính kiên định và cách thức hội tụ của bộ ước tính này. Dễ dàng thấy rằng khi $f_{mô phỏng}(x, y) > 0$ với mọi điểm trong đó $h_e(x, y) \cdot f_{vật lý}(x, y) > 0$, thì ước tính sẽ không bị chệch. Cũng cho thấy rằng điều này đảm bảo ước tính là kiên định. Trong bài toán đơn giản hơn, cách thức hội tụ có thể chậm, nhanh, hoặc rất chậm do tồn tại các sự kiện cực trị. Cách thức sẽ phụ thuộc vào hàm trọng số $w(x, y) = f_{vật lý}(x, y) / f_{mô phỏng}(x, y)$ bên trong elip. Các tốc độ hội tụ được tổng kết trong bảng 16.2.

Bảng 16.2: Tóm tắt các tốc độ hội tụ

Các PDF bên trong Elip	Hàm trọng số bên trong Elip	Tốc độ hội tụ
$f_{mô phỏng}(x, y) = f_{vật lý}(x, y)$	$\omega(x, y) = 1$	Giống MC đơn giản
$f_{mô phỏng}(x, y) > f_{vật lý}(x, y)$	$\omega(x, y) < 1$	Nhanh hơn MC đơn giản
$f_{mô phỏng}(x, y) < f_{vật lý}(x, y)$	$\omega(x, y) > 1$	Chậm hơn MC đơn giản

16.4.3. Xem xét đầy đủ

Trước khi ứng dụng bài toán ước tính diện tích elip vào hệ thống truyền tin, ta cần phải xem xét đầy đủ cuối cùng. Kênh tạo ra tạp âm, nhưng tạp âm này có thể bị biến đổi bởi máy thu thành phân bố mới có pdf chưa biết. Ta phải tìm xác xuất các mẫu được tạo bởi pdf mới này rơi vào bên trong vùng quan tâm. Bây giờ chỉ làm việc với các pdf hai chiều, giả sử rằng kênh tạo ra tạp âm vật lý (x, y) , có pdf là $f_{vật lý}(x, y)$. Các biến ngẫu nhiên này được đưa vào máy thu, áp dụng toán tử $g(x, y) = (\alpha, \beta)$. Tập các biến ngẫu nhiên mới này có hàm pdf là $f_{thu}(\alpha, \beta)$. Xác xuất biến ngẫu nhiên (α, β) rơi vào một số vùng quan tâm, chẳng hạn như vùng elip là:

$$B_e = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_e(\alpha, \beta) \cdot f_{thu}(\alpha, \beta) \cdot d\alpha d\beta \quad (16.32)$$

Tính phức tạp của hàm g làm cho việc tính $f_{thu}(\alpha, \beta)$ từ $f_{vật lý}(x, y)$ không thực tế. Mô phỏng MC của bài toán này sẽ là:

$$\hat{B}_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_e(\alpha_i, \beta_i) \quad (16.33)$$

Trong đó (α_i, β_i) có pdf là $f_{thu}(\alpha, \beta)$. Có thể chạy mô phỏng này ngay cả khi ta không biết cách tính $f_{rec}(\alpha, \beta)$. Nếu ta tạo các vector ngẫu nhiên (x_i, y_i) có pdf là $f_{vật lý}(x, y)$ và sau đó cho mỗi vec tơ mẫu qua hàm g , thì vec tơ kết quả (α_i, β_i) sẽ có pdf là $f_{thu}(\alpha, \beta)$. Chi tiết hóa biểu thức (16.33) hơn nữa ta có:

$$\hat{B}_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_e(g(x_i, y_i)) \quad (16.34)$$

Giả sử tại đây ta thay $f_{\text{vật lý}}(x, y)$ bằng $f_{\text{chênh}}(x, y)$. Điều này sẽ làm $f_{\text{thu}}(\alpha, \beta)$ thành $f_{\text{thu-chênh}}(\alpha, \beta)$. Để loại bỏ các ảnh hưởng độ chênh này từ ước tính MC, ta cần tính hàm trọng số:

$$\omega(\alpha_i, \beta_i) = \frac{f_{\text{thu}}(\alpha_i, \beta_i)}{f_{\text{thu-chênh}}(\alpha_i, \beta_i)} = \frac{f_{\text{vật lý}}(x_i, y_i)}{f_{\text{chênh}}(x_i, y_i)} \quad (16.35)$$

Trong đó $(\alpha_i, \beta_i) = g(x_i, y_i)$. Hàm trọng số này được sử dụng để biến đổi (16.34) nhằm tạo:

$$\hat{B}_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega(g(x_i, y_i)) h_e(g(x_i, y_i)) \quad (16.36)$$

Có thể được thấy là ước tính không bị chênh và kiên định.

16.4.4. Bài toán truyền thông

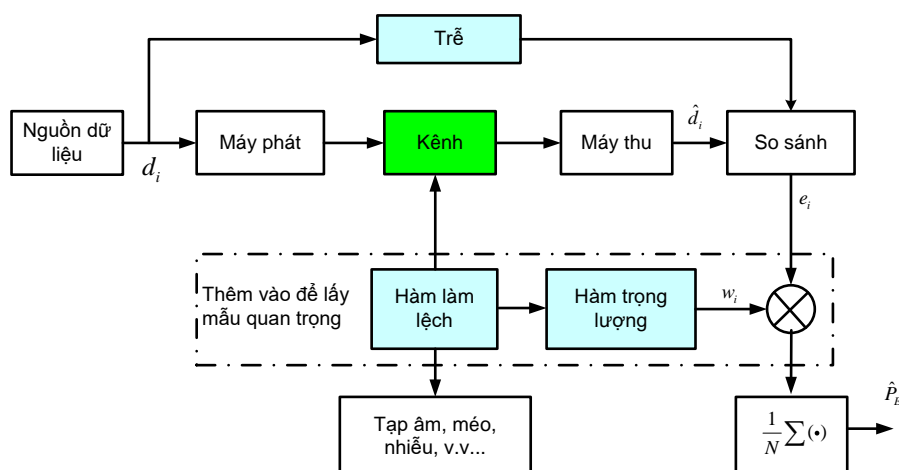
Bài toán hình học tìm diện tích elip có thể ánh xạ thành bài toán tìm BER của hệ thống truyền thông. Hai tập biến ngẫu nhiên (x, y) và (α, β) biểu diễn dạng sóng tạp âm kênh và số đo quyết định. Trong bài toán truyền thông, tạp âm kênh thường có nhiều hơn hai chiều, mặc dù số đo quyết định chỉ có một chiều. Quan hệ giữa hai cặp biến ngẫu nhiên bởi toán tử $g(\cdot)$, thể hiện cho máy thu. Tại đây, elip của bài toán hình học tương ứng với các giá trị của số đo quyết định làm cho máy thu mắc lỗi giải điều chế. Việc tìm BER của hệ thống tương đương với việc tìm xác suất của một mẫu được tạo ra một cách ngẫu nhiên rơi vào bên trong elip. Ta sẽ làm lệch tạp âm kênh để tăng tần xuất của các sự kiện lỗi, và tính hàm trọng số:

$$\omega_i = \frac{f_{\text{vật lý}}(n_i)}{f_{\text{chênh}}(n_i)} \quad (16.37)$$

Bộ ước tính BER là:

$$\hat{P}_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega(n_i) h_e(g(x_i, y_i)) \quad (16.38)$$

Trong bài toán hình học, ta đã đảm bảo một bộ ước tính không chênh bằng cách làm cho vùng biên giới chứa toàn bộ elip. Ở đây chỉ cần tạo ra tất cả các giá trị của số đo quyết định. Không khó để đáp ứng yêu cầu này. Tốc độ hội tụ trong bài toán hình học phụ thuộc vào cách chọn phương sai nguồn tạp âm thiết lập các điểm mẫu. Nếu nhiều mẫu nằm ngoài elip, thì tốc độ hội tụ chậm. Nếu ta tạo gần như không có mẫu nào nằm ngoài elip, thì tính hội tụ lại chậm do các sự kiện cực trị. Về lý tưởng, ta mong muốn một hỗn hợp các mẫu cả bên trong và bên ngoài elip. Trong bài toán hệ thống truyền thông, ta muốn một hỗn hợp các giá trị số đo quyết định cả trong vùng lỗi và vùng không có lỗi. Tập trung quá nhiều mẫu ở một trong hai vùng sẽ làm cho tốc độ hội tụ rất chậm. Hình 16.8 minh họa hệ thống với yêu cầu thêm các hàm phụ để thực hiện lấy mẫu quan trọng được biểu diễn bởi các đường kẻ đậm.



Hình 16.8: Mô phỏng hệ thống với việc lấy mẫu quan trọng

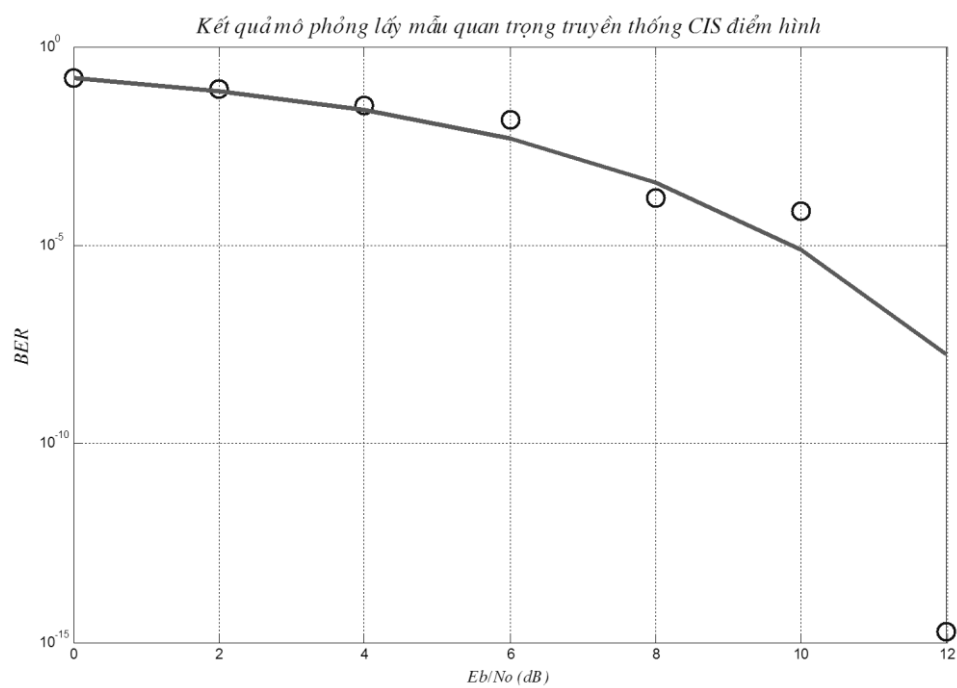
16.4.5. Lấy mẫu quan trọng truyền thống và cải tiến

Tồn tại nhiều phương pháp để làm lệch tập âm khi áp dụng lấy mẫu quan trọng. Hai phương pháp phổ biến nhất được gọi là lấy mẫu quan trọng truyền thống (CIS) và lấy mẫu quan trọng được cải tiến (IIS). Trong CIS ta chỉ tăng phương sai tập âm kênh, tương đương với hệ thống hoạt động tại SNR thấp. Trong IIS, thay đổi giá trị trung bình của tập âm chứa không phải là phương sai.

Ví dụ 16.3: Trong ví dụ này ta xét CIS được áp dụng cho hệ thống QPSK vi sai, đã được xét trong chương 10. Mã chương trình Matlab mô phỏng CIS được cho bởi file **NVD16_CISQPSK.m** trong Phụ lục 16A.

Hàm này gần giống với mô phỏng Monte Carlo cho hệ thống QPSK được xét trong chương 10 chỉ khác là tập âm kênh bị lệch bằng cách tăng phương sai tập âm.

Bộ ước tính BER trong ví dụ này được định nghĩa bởi (16.38). Kết quả điển hình từ mô phỏng này được cho ở hình 16.9. Các vòng trong hình này trình bày các ước tính CIS của BER trong khi đó đường cong nét liền là hiệu năng lý thuyết. Thấy rõ tại SNR cao sự lệch giữa lý thuyết và mô phỏng. Tuy nhiên, các kết quả này chỉ dựa vào 1000 ký hiệu giải điều chế. Sử dụng các mô phỏng MC truyền thống sẽ không thực tế để đo BER bất kỳ nhỏ hơn 10^{-3} . Tuy nhiên, từ các kết quả mô phỏng CIS cho ta một số ý tưởng về BER đối với các tỷ số lỗi đạt tới 10^{-8} .



Hình 16.9: Minh họa kết quả mô phỏng CIS điển hình