成都理工大学 2019—2020 学年第二学期
《概率论与数理统计》考试试卷

大题	一	二	三	总分
得分				

院系______ 班级______ 姓名______ 学号______

密 封 线

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1．一袋中有 2 个红球，3 个白球，5 个黑球，则从中任取 3 个恰为一红，一白，一黑的概率为 0.25 .

2．设 A、B 是随机事件，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，$P(A\cup B)=0.8$，则 $P(A|B)=$ 0.2 .

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} k\sin x, & 0<x<\pi \\ 0, & 其他 \end{cases}$，则常数 $k=$ 0.5 .

4．设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(0，1)$和 $N(1，1)$，则 $P\{X+Y\le 1\}=$ 0.5 .

5. 随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式，$P\{|X-E(X)|\ge 2\}\le$ 0.5 .

二、单项选择题（每小题 3 分，共 45 分）

1.设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{a}{k!}$，$k=0,1,2,\ldots$，则常数 a 为（ B ）.

A. 1； B. 1/e； C. e； D. −1.

2．假设 A、B 为两个互斥事件，$P(A)>0$, $P(B)>0$，则下列关系中，不一定正确的是（ B ）.

A．$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$； B．$P(A)=1-P(B)$；
C．$P(AB)=0$； D．$P(A|B)=0$.

3．设 X 服从区间$[20,30]$上的均匀分布，则 $P\{15<X<26\}$等于（ C ）.

A．0.3； B．0.4； C．0.6； D．0.7.

4. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=k(\pi+2\arctan x)$, 则常数 k=（　B　）.

A. $\dfrac{1}{\pi}$;　　B. $\dfrac{1}{2\pi}$;　　C. $\dfrac{2}{\pi}$;　　D. π.

5. 设 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 为总体 $N(1, 2^2)$ 的一个简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列结论中正确的是（　D　）.

A. $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim \chi^2(n-1)$;　　B. $\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \sim F(n,1)$;

C. $\dfrac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$;　　D. $\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 N（μ，3^2）的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S 为样本标准差.若方差不变,在给定的显著性水平 α 下,检验假设 H_0 ：$\mu=\mu_0$ 时，下列说法正确的是（　A　）.

A. 检验统计量为 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{3/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $|Z|>z_{\frac{\alpha}{2}}$;

B. 检验统计量为 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{3/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $|Z|>z_{\alpha}$;

C. 检验统计量为 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $|T|>t_{\frac{\alpha}{2}}$;

D. 检验统计量为 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $|T|>t_{\alpha}$.

7. 设总体 X 的期望和方差都存在，X_1，X_2，X_3 是来自 X 的简单随机样本，下列关于总体期望的估计量中，不是无偏估计的是（ D　）.

A. $\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{2}X_1+\dfrac{1}{3}X_2+\dfrac{1}{6}X_3$;　　B. $\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{4}X_2+\dfrac{5}{12}X_3$;

C. $\hat{\mu}_3=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{3}X_2+\dfrac{1}{3}X_3$;　　D. $\hat{\mu}_4=\dfrac{1}{8}X_1+\dfrac{2}{3}X_2+\dfrac{1}{6}X_3$.

8. 某高校有 10000 名学生参加计算机等级考试，按往年经验该考试通过率为 0.8。$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数，由中心极限定理，这些学生中至少有 7950 人通过考试的概率近似为（　A　）.

A. Φ（1.25）； B. Φ（－1.25）；C. 1－Φ（1.25）；D. 2Φ（1.25）−1.

9. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ （ C ）.

A. 单调增大； B. 单调减小； C. 保持不变； D. 增减不定.

10. 随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从二项分布 $\boldsymbol{b}(2,p)$，且 $P\{Y \geq 1\}=\frac{8}{9}$ ，

则 $P\{X+Y=1\}=$（ B ）.

A. $\frac{64}{81}$； B. $\frac{8}{81}$； C. $\frac{8}{27}$； D. $\frac{4}{81}$.

11. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

若 X 与 Y 相互独立，则α、β 的值分别为（ A ）.

A. $\alpha=\frac{2}{9}$，$\beta=\frac{1}{9}$ ； B. $\alpha=\frac{1}{9}$，$\beta=\frac{2}{9}$ ；

C. $\alpha=\frac{1}{3}$，$\beta=\frac{2}{3}$ ； D. $\alpha=\frac{2}{3}$，$\beta=\frac{1}{3}$.

12. 设相互独立的两个随机变量 X 与 Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2},$$

则随机变量 $Z=max(X, Y)$ 的分布律为（ C ）.

A. $P\{Z=0\}=\frac{1}{2}$，$P\{Z=1\}=\frac{1}{2}$； B. $P\{Z=0\}=1$，$P\{Z=1\}=0$；

C. $P\{Z=0\}=\frac{1}{4}$，$P\{Z=1\}=\frac{3}{4}$； D. $P\{Z=0\}=\frac{3}{4}$，$P\{Z=1\}=\frac{1}{4}$.

13. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，X_1，X_2，…，X_n 是来自 X 的简单随机样本，

则 μ 的$1-\alpha$ 置信区间为（ B ）.

A. $[\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}]$ ；　　B. $[\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}]$ ；

C. $[\bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}]$ ；　　D. $[\bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}]$.

14. 设两个独立随机变量 X 与 Y 的方差分别为 3 与 1，则随机变量 $X-3Y+2$ 的方差为 （ A ）.

A. 12；　B. 10；　C. 0 ；　D. −5.

15. 设随机变量的分布律为

X_i	−1	0	1
p_k	0.25	0.5	0.25

（i=1,2）

且满足 $P\{X_1X_2 = 0\} = 1$，$P\{X_1 = X_2\}$ =（ A ）.

A. 0；　B. 0.25；　C. 0.5 ；　D. 1 .

三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1. 某地区爆发一种疾病，患者占比 0.02，某研究所研制了一种测试方法，已知患者对这种测试反应是阳性的概率为 0.98，非患者对这种测试反应是阳性的概率为 0.03. 现随机抽查了一个人，求：

（1）此人测试反应是阳性的概率；

（2）若此人测试反应是阳性，其为患者的概率.

解：设 C={抽查的人患有该疾病}，　A={测试结果是阳性}

则 $\bar{C}$ 表示“抽查的人未患该疾病”.

易知 $P(C)$=0.02, $P(\bar{C})$=0.98, $P(A|C)$=0.98,　$P(A|\bar{C})$=0.03　------2 分

由全概率公式有：$P(A)=P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})$=0.049；------4 分

由贝叶斯公式有：

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C})}$$

=0.4　------4 分

2. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$

$Y=e^X$，求：（1）X 的方差 $D(X)$；（2）随机变量 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2\dfrac{x^2}{2}dx=\dfrac{4}{3}$，------2 分

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^2\dfrac{x^3}{2}dx=2$，------2 分

所以，$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{2}{9}$. ------1 分

（2）函数 $y=e^x$ 单调递增，其反函数为 $x=h(y)=lny$，且 $h'(y)=\dfrac{1}{y}$，

------2 分

因此，$1<y<e^2$ 时，$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=f_X(lny)\left|\dfrac{1}{y}\right|=\dfrac{lny}{2y}$.------2 分

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{lny}{2y}, & 1<y<e^2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ ------1 分

3.设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$,

其中 θ 是未知参数(θ>0). $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，试求：

(1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；(2) θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$.

解：（1）由 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\dfrac{\theta}{\theta+1}$ ----2 分

令 $E(X)=\overline{X}$，即：$\dfrac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}$， ----2 分

解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$； ----1 分

（2） 设样本值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta-1}$

$\ln L(\theta)= n \ln \boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{\theta} - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ ----2 分

$$\frac{d \ln L(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} = \frac{n}{\boldsymbol{\theta}} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

令 $\frac{d \ln L(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} = \frac{n}{\boldsymbol{\theta}} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$， ----2 分

得 θ 的最大似然估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$

所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2 = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$ ----1 分

4. 设二维连续型随机变量（X,Y）的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

试求：（1）边缘概率密度函数 $f_X(x)$， $f_Y(y)$，并判断 X 和 Y 的独立性;

（2） $P\{X + Y \le 1\}$.

解：（1）当 $x \le 0$ 时， $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = 0$；

当 $x>0$ 时， $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \int_{x}^{+\infty} e^{-y}dy = e^{-x}$

故有 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ ------2 分

当 $y \le 0$ 时， $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = 0$；

当 $y>0$ 时， $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_{0}^{y} e^{-y}dx = ye^{-y}$

故有 $f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$ ------2 分

由于在区域 0<x<y, $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

所以 X 和 Y 不独立。 ------2 分

（2） $P\{X+Y\le 1\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$ ------4 分