《高等数学 I、Ⅱ》历年真题（三）答案

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

得 分	

1.设二元函数 $z = x^y (x>0)$，则 $dz =$ <u>yx^{y-1} dx + x^y lnx dy</u> 。

2.求 $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \dfrac{\sin(x^2+2xy+y^2-1)}{x+y-1} =$ <u>2</u>。

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} dx =$ <u>1</u>。

4.向量场 $\vec{A}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + ye^z\vec{j} + x\ln(1+z^2)\vec{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度为<u>2</u>。

5. 设曲面 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧，则 $\oiint\limits_s zdxdy =$ <u>$\dfrac{4}{3}\pi R^3$</u>。

6.设有点 A（1,2,3）和 B（2，-1，4），则线段 AB 的垂直平分面方程为 <u>2x-6y+2z-7=0</u> 。

7.设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $x+y-z=e^z$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1,0)} =$ <u>$\dfrac{1}{2}$</u> 。

8.已知 $\vec{a}=(-1,2,3), \vec{b}=(2,4,\lambda), \vec{a}\perp\vec{b},$ 则 $\lambda =$ <u>-2</u> 。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 24 分）

得 分	

9.设有空间闭区域 $\Omega_1 = \left\{(x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2 \le R^2, z\ge 0\right\}$，

$\Omega_2 = \left\{(x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2 \le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$，则有（ C ）

（A）$\iiint\limits_{\Omega_1} xdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xdv$ （B）$\iiint\limits_{\Omega_1} ydv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} ydv$

（C）$\iiint\limits_{\Omega_1} zdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} zdv$ （D）$\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdv$

10.若$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(x+1\right)^n$ 在$x=-2$处收敛，则该级数在$x=1$处（ D ）

（A）发散 （B） 条件收敛

（C）绝对收敛 （D） 不能判定

11.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ 在$(-\infty,+\infty)$的和函数是 （ D ）

（A） $-e^{-x^2}$ （B）e^{x^2} （C）$-e^{x^2}$ （D）e^{-x^2}

12. L为上半椭圆周$x^2+4y^2=4$，$y\geq 0$沿逆时针方向的

积分$\int_L (y+1)e^x dx+(e^x-y)dy=\underline{e^{-1}-e}$.

13.已知$\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$为某函数的全微分，则$a$等于 （ D ）

（A）-1 （B）0 （C）1 （D）2

14. 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微的充分条件是（D）

（A） $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续

（B） $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处偏导存在

（C）$\lim\limits_{\rho\to 0}[\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y]=0$

（D）$\lim\limits_{\rho\to 0}[\frac{\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\rho}]=0$

（其中：$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ）

15.函数 $z=x^3+y^3-9xy+27$ 的极小值点是　（　B　）

（A）$(0,0)$　　（B）$(3,3)$　　（C）$(0,3)$　　（D）$(3,0)$

16. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[5]{x^2+y^2}\,dxdy$ 的值等于（　B　）

（A）$\frac{5}{3}\pi$　　（B）$\frac{5}{6}\pi$　　（C）$\frac{10}{7}-\pi$　　（D）$\frac{10}{11}\pi$

三．解答题（每小题 6 分，共 24 分）

得 分	

17.计算 $I=\oint_L (x^3-y)dx+(x-y^3)dy$，其中 L 是圆域 D: $x^2+y^2\le -2x$ 的正向圆界。

解：$I=\iint\limits_D (1+1)dxdy$　　　........(3)

$=2\pi$　　　　..........(3)

18.计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} x(y-z)dv$，其中$\Omega$是由平面$x=0, x=2, y=0, y=1,$ $z=2$以及$z=-2$所围成的闭区域。

解：$I=\int_0^2 xdx\int_0^1 dy\int_{-2}^2 (y-z)dz$　　　...........(3)

$=\int_0^2 xdx\int_0^1 4ydy=4$　　　.......(3)

19.把函数 $f(x)=\frac{2-x}{1+x}$ 展开成麦克劳林级数，并求收敛域。

解: $f(x)=\frac{3}{1+x}-1$　　　…………(1)

$=3\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n-$

$$=2+3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x)^n$$ ....(3)

收敛域为 $(-1,1)$ …………(2)

20.求曲线 $\begin{cases} y=x^2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 上点 $(1,1,2)$ 处的切线方程和法平面方程。

解：$\vec{S}=(1,2x,2x+4x^3)\Big|_{(1,1,2)}=(1,2,6)$ …………(2)

所求的切线方程：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{6}$ …………(2)

所求的法平面方程： (x−1)+2(y−1)+6(z−2)=0

…………(2)

即x+2y+6z−15=0

四．解答题（每小题 6 分，共 24 分）

得 分	

21.计算曲线积分 $\int_L \sqrt{y}ds$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点（0,0）与点（1,1）之间的一段弧。

解：$ds=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+4x^2}dx$ ....(2)

$$\int_L \sqrt{y}ds=\int_0^1\sqrt{x^2}\sqrt{1+4x^2}dx$$ ....(2)

$$=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$$ ....(2)

22.设 $u=f(x+y,xy)$, f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'$ ....(3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f_1^{'}}{\partial y}+f_2^{'}+y\frac{\partial f_2^{'}}{\partial y}$$

$$=f_{11}^{''}+xf_{12}^{''}+f_2^{'}+y(f_{21}^{''}+xf_{22}^{''}) \qquad ....(3)$$

$$=f_{11}^{''}+f_2^{'}+xyf_{22}^{''}+(x+y)f_{12}^{''}$$

23.计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z)ds$,其中Σ是平面z=$\frac{3}{2}(2-2x-y)$上满足$x\ge 0, y\ge 0$及$z\ge 0$的一部分。

解：$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{7}{2}dxdy \qquad ....(2)$

原式 $=\iint\limits_{D_{xy}}(x+\frac{1}{2}y+1-x-\frac{1}{2}y)\frac{7}{2}dxdy \qquad .$

$$=\frac{7}{2}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\frac{7}{2} \qquad ....(4)$$

24.在曲面$z^2-xy=1$上求一点，使得它到原点的距离d最短。

解：设所求的点为（x,y,z），则

$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$， 满足$z^2-xy=1 \qquad ....(2)$

令$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-1)$

$$\begin{cases}F_x=2x-y\lambda=0\\ F_y=2y-x\lambda=0\\ F_z=2z+2z\lambda=0\\ z^2-xy-1=0\end{cases} \qquad ....(2)$$

解之，得点$(1,-1,0),(-1,1,0),(0,0,1),(0,0,-1)$

由于最小值客观存在，故在$(0,0,1)$和（0, 0,-1）处取得最小值 1..................(2)

五、证明题（共 4 分）

得 分	

25.判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$的敛散性；若收敛，问：收敛到何值。（ $a>1$）

解：因$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a^{n+1}}\cdot\frac{a^n}{n}=\frac{1}{a}<1 \qquad (a>1)$

由比值判定法知原级数收敛 ....(2)

考查幂级数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=x\left(\frac{x}{1-x}\right)' \qquad (|x|<1)$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2} \qquad (|x|<1)$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=S\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{(a-1)^2} \qquad \left(\frac{1}{a}<1\right)$

即：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=\frac{a}{(a-1)^2}$ ....(2)