《高等数学》（上）期末考试模拟试题（一）

一、判断题（10分每题2分，正确的打“√”，错误的打“×”）

1、数0是一个无穷小量。（ ）

答案：√

2、设 $f=\varphi\cdot\psi$，若φ在点 x_0可导,ψ 在点x_0不可导，则 f在点x_0一定不可导.（ ）

反例：$\varphi\equiv 0$,$\Psi=\begin{cases}1, x>0\\-1, x\le 0\end{cases}$ $\Rightarrow f=\varphi\cdot\psi\equiv 0$

答案：×

3、若$f(x)$在x_0连续，则$f(x)$在x_0可微.　　（　）

分析：可导$\Leftrightarrow$可微$\Rightarrow$连续

答案：×

4、$y' = (\int_{x}^{-1} \sin t dt)' = -\sin x$　　（　）

答案：√

5、可导的奇函数，其导数也为奇函数.　　（　）

反例：$f(x) = x^3$为奇函数，但是$f'(x) = 3x^2$为偶函数

答案：×

二、填空题（30分每小题 3 分）

6、$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$ $\underline{\qquad\frac{\pi}{2}\qquad}$。

分析：原式$=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$

7、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\arcsin x\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=$ $\underline{\qquad 0\qquad}$.

分析：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\arcsin x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$

8、若函数 $f(x)=\begin{cases} x+a, & x\le 0 \\ \ln(x+e), & x>0 \end{cases}$**,在** $(-\infty,+\infty)$ **连续，则**

$a=$ ____1____.

分析：由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+a\right)=a$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x+e)=\ln e=1$$

$$f\left(0\right)=a$$

由函数连续的定义知

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)=f\left(0\right)$$

9、设 f 为定义在区间 I 上的函数，若对 $\forall x_1, x_2 \in I$,

总有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) > \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ，则称

f 为 I 上向上凸的函数。

注：见课本第**149**页

10、函数 $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt$ 的导数是 $2x\sin x^4$ 。

11、$f(x)=x^3-x$, 则 f 的单调递减区间为 $\underline{[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]}$.

12、$\sin x$ 的麦克劳林公式是：

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)$$

______.

见课本第**143**页

Maclaurin公式：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{(n+1)}\ (0<\theta<1)$$

13、曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的法线方程为 $\underline{y - 8 = -\frac{1}{3}(x-5)}$.

分析：曲线在 $t = 2$ 处的切线的斜率为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=2} = \left.\frac{\left(t^3\right)'}{\left(1+t^2\right)'}\right|_{t=2} = \left.\frac{3t}{2}\right|_{t=2} = 3$$

故曲线在 $t = 2$ 处的法线的斜率为 $-\frac{1}{3}$

14、 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\qquad\qquad e^2 \qquad\qquad}$。

分析：

$$\lim_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+2x\right)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2x\cdot\frac{1}{x}} = e^2$$

15、设 $f'(5)=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-f(5)}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=$ $\underline{4\sqrt{5}}$。

分析：$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-f(5)}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(f(x)-f(5)\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}\cdot\lim_{x\to 5}\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)$$

$$=2\times 2\sqrt{5}$$

三、计算题（30分，每题5分）

16、 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n+8^n}$

解： $\because 8=\sqrt[n]{8^n}\le\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n+8^n}\le\sqrt[n]{8^n+8^n+8^n+8^n}=\sqrt[n]{4\cdot 8^n}=8\sqrt[n]{4}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=\lim\limits_{n\to\infty}4^{\frac{1}{n}}=1$ ，故由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n+8^n}=8$$

思考题：

设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正整数，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^{\ n} + a_2^{\ n} + \cdots + a_m^{\ n}} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$$

17、 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, **求** $f'(x)$.

解： $$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

18、 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}).$

解： $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

19、求 $y = x \cdot e^{-x}$，在 $[0,2]$ 上的最大值和最小值.

解：求一阶导数 $y' = (1-x) \cdot e^{-x}$

令 $y' = 0$ 得 $x = 1$

而：$y(1) = \frac{1}{e}$

另外 $y(0) = 0$, $y(2) = \frac{2}{e^2}$

因此 $y = xe^{-x}$ 在[0，2]上的最小值为 $y(0) = 0$

最大值为 $y(1) = \frac{1}{e}$

20、求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$

解：$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\left(a\sin^3 t\right)'}{\left(a\cos^3 t\right)'} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{(-\tan t)'}{\left(a\cos^3 t\right)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{\sec^2 t}{3a\cos^2 t\sin t}$$

21、计算 $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

解：原式$=2\int_1^4 \ln x d\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=2\left(\left[x^{\frac{1}{2}}\ln x\right]\Big|_1^4-\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx\right)$

$$=4\ln 4-4x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4=4\left(2\ln 2-1\right)$$

四、计算题（20分）

22、计算 $\int \cos^3 x dx$. (6分)

解：原式 $=\int \cos^2 x d(\sin x)$

$$=\int (1-\sin^2 x) d(\sin x)$$

$$=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$$

23、求曲线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 所围图形的面积。 **(7分)**

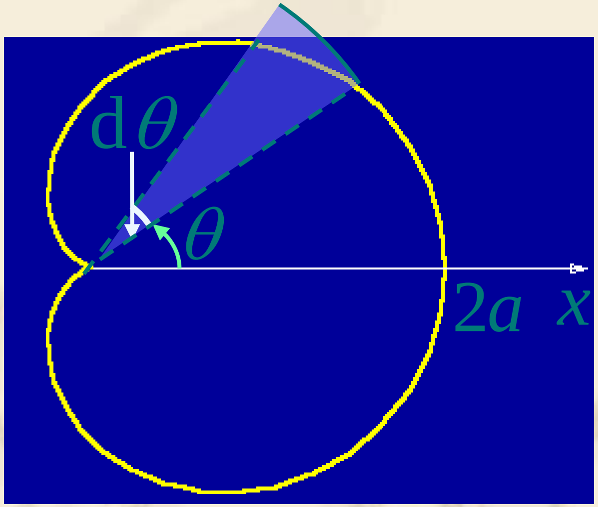
解: $A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$ **(利用对称性)**

$= a^2 \int_0^{\pi} 4\cos^4 \frac{\theta}{2} \,\mathrm{d}\theta$

令 $t = \frac{\theta}{2}$

$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \,\mathrm{d}t$

$= 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$



24、求由抛物线 $2y=x^2$ 及直线 $2x+2y-3=0$ 所围曲边梯形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积。**(7分)**

解：由 $\begin{cases} 2y=x^2 \\ 2x+2y-3=0 \end{cases}$ 得交点为 $\left(-3,\frac{9}{2}\right),\left(1,\frac{1}{2}\right)$

故 $V=\int_{-3}^{1}\pi(\frac{3}{2}-x)^2dx-\int_{-3}^{1}\pi\cdot\frac{x^4}{4}dx=\frac{272}{5}\pi$

五、 25、设 $f''(x)$ 连续，且适合关系式 $f(x)=e^x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$，试求函数 $f(x)$

解： $f(x)=e^x-\int_0^x (x-t)f(t)dt=e^x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$

$$f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$$

$f''(x)=e^x-f(x)$ 即： $y''+y=e^x$

由 $f(x)=e^x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$，得 $f(0)=1$

又由 $f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$，得 $f'(0)=1$

所以就是求 $\begin{cases} y''+y=e^x \\ y(0)=1, y'(0)=1 \end{cases}$ 的解

$$\begin{cases} y'' + y = e^x \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$$

由 $r^2 + 1 = 0$ 得， $r = \pm i$

$\therefore Y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$（齐次的通解）

设 $y^* = ae^x$ ，代入 $y'' + y = e^x$ 得， $a = \dfrac{1}{2}$

所以非齐次的一个特解为 $y^* = \dfrac{1}{2} e^x$

通解为 $y = Y + y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \dfrac{1}{2} e^x$

代入初始条件，得 $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$

所以所求的函数为 $f(x) = y = \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x)$

六、证明题（**10**分，每题**5**分）

26、设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，求 $\int_0^\pi f(x)dx$. **(5分)**

解: $\int_0^\pi f(x)dx = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x)dx$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}dx - \int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin x}{(\pi-x)}dx$$

$$= \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2$$

27、证明：$\dfrac{2x}{\pi} < \sin x, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$**.(5分)**

证明：$\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{2}{\pi}, \quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

设: $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}, x \in (0, \dfrac{\pi}{2}]$

则$g'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{\cos x(x - \tan x)}{x^2}$

令 $f(x) = x - \tan x$ 因 $f'(x) = 1 - \sec^2 x < 0$

$f(x)$在$x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$上严格递减，$f(x) < f(0) = 0$

$$\Rightarrow \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})\text{，有 } g'(x) = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0$$

$g(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上严格递减

$$\Rightarrow \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})\text{，有} g(x) = \frac{\sin x}{x} > g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

从而 $\frac{2x}{\pi} < \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

《高等数学》（上）期末考试模拟试题（二）

一、填空题（每题2分，共10分）

1. $\int_{-1}^{2} |x|\,dx =$ $\underline{\quad 2\frac{1}{2} \quad}$。

分析：$\int_{-1}^{2}|x|dx=\int_{-1}^{0}-xdx+\int_{0}^{2}xdx=2\frac{1}{2}$

2. 设 $f(x)=x\sin\frac{2}{x}+\frac{\sin x}{x}$，求 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$ $\underline{\quad 2 \quad}$。

分析：$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot 2=2$ ，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

3. $\int_{-2}^{2} x\, e^{\sqrt{1+x^2}} \cos x dx =$ __0__。

分析：被积区间是对称的，被积函数是奇函数。

4. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$，在**[－1，1]**上是否连续__是__（填是或否）。

分析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

5．当 $x \to 0$ **时,** $2x^2 + 3x^{\frac{5}{2}}$ **是*x*的k阶无穷小，k=** $\underline{\ \ 2\ \ }$ **。**

分析:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + 3x^{\frac{5}{2}}}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(2+3x^{\frac{1}{2}}\right)}{x^k}$$

$$\overset{取 k=2}{=} \lim_{x\to 0}\left(2+3x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2 \neq 0$$

二、解答下列各题（每题5分，共25分）

6. 求曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ 的斜渐近线方程。

解：设曲线的斜渐近线方程为：$y=kx+b$，则

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=0$$

故曲线的斜渐近线方程为：$y=x$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e$

8. 求 $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$

解：原式$=\int_1^e(1+\ln x)d(1+\ln x)$

$$=\left.\frac{(1+\ln x)^2}{2}\right|_1^e=\frac{3}{2}$$

9．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin^2 t dt}{x^3}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin^2 t dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2=\frac{1}{3}$$

10. 若 $f'(x_0)$存在，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

解： $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{2h}\cdot 2$$

$$=2f'\left(x_0\right)$$

三、解答下列各题（每题5分，共20分）

11．求 $y = 2x^2 - \ln x$ 的单调区间。

解： 定义域为：$(0, +\infty)$

由 $y' = 4x - \dfrac{1}{x} = 0$，得 $x = \dfrac{1}{2}$

在 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 上，$y' < 0$，函数单调递减；

在 $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ 上，$y' > 0$，函数单调递增。

12. 设参数方程 $\begin{cases} x = \int_t^1 u^2 \ln u du \\ y = \int_1^t u \ln u du \end{cases}$ （$t > 1$）所确定的

函数是 $y = y(x)$，求 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$

$$\begin{cases} x = \int_t^1 u^2 \ln u du \\ y = \int_1^t u \ln u du \end{cases}$$

解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\int_1^t u \ln u du\right)'}{\left(\int_t^1 u^2 \ln u du\right)'} = \frac{t \ln t}{-t^2 \ln t} = -\frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{t}\right)'}{\left(\int_t^1 u^2 \ln u du\right)'} = \frac{\frac{1}{t^2}}{-t^2 \ln t} = -\frac{1}{t^4 \ln t}$$

13. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x$ (n>0)

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-n}}$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^n}{n}$$

$$= 0$$

14. 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$

解：原式 $= -\int_0^{+\infty} \sin x d\left(e^{-x}\right)$

$$= -e^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$$

$$= 0 + \left(-\int_0^{+\infty} \cos x de^{-x} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$$

$$=-e^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}-e^{-x}\sin x dx$$

$$=1-\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$$

因此，原式= $\frac{1}{2}$

四、解答下列各题（每题6分，共30分）

15. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\sqrt{2x-1}}dx$

解：设 $\sqrt{2x-1}=t$，则 $x=\dfrac{1+t^2}{2}$，$dx=tdt$

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=1$

因此，原式 $=\int_0^1 te^t dt=\int_0^1 tde^t$

$$=te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t dt$$

$$=e-e^t\Big|_0^1=1$$

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 3 \\ ax+b & x>3 \end{cases}$ 在 $x=3$ 处可导，求***a***和***b***的值。

解：$f\left(x\right)$ 在 $x=3$ 处可导，所以有 $f\left(x\right)$ 在 $x=3$处连续

$$f(3-0)=9,\quad f(3+0)=3a+b,\quad f(3)=9$$

$$3a+b=9 \;\Rightarrow\; b=9-3a$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 3 \\ ax+b & x>3 \end{cases}$$

又因 $f(x)$ 在 $x=3$ 可导，则

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(x+3)=6$$

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{ax+b-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{ax+(9-3a)-9}{x-3}=a$$

$$b=9-3a$$

从而 $f'_-(3)=f'_+(3)\Rightarrow a=6\Rightarrow b=-9$

17． 证明：当 $x>1$时，$e^{x}>ex$。

证明：令 $f(x)=e^{x}-ex$，则 $f^{'}\left(x\right)=e^{x}-e$

显然，当 $x>1$，时 $f'(x)>0$

故 $f\left(x\right)$ 单调递增

则 $f\left(x\right)>f\left(1\right)=0$

因此有：$e^{x}>ex$

18. 求$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

解：设 $\sqrt{x}=t$

$$原式=\int \frac{\arcsin t}{t}\cdot 2tdt=\int 2\arcsin tdt$$

$$=2t\arcsin t-2\int t\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=2t\arcsin t+2\sqrt{1-t^2}+c$$

$$\boxed{=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+c}$$

19．求由曲线 $y=e^{x}$，该曲线过原点的切线，以及y轴所围图形绕x轴旋转一周而成的旋转体体积。

解：设切线为 $y=kx$ ，切点为 (x_0, e^{x_0})

因为$k=e^{x_0}$，所以切线为$y=e^{x_0}x$

$\therefore \quad e^{x_0}=e^{x_0}x_0$，得 $x_0=1$

$\therefore \quad$ 切线方程 $y=ex$ 　　得交点为 $(1,e)$

$$V=\int_0^1 \pi(e^x)^2 dx-\int_0^1 \pi(ex)^2 dx=\frac{\pi}{6}e^2-\frac{\pi}{2}$$

五、解答下列各题（每题**5**分，共**15**分）

20．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，并且 $g(0)=g'(0)=0$，

$g''(0)=3$，试求 $f'(0)$。

解: $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}$$

$$g(0)=0$$
$$g'(0)=0$$
$$g''(0)=3$$

由洛必达法则有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}}$$

$$=\frac{1}{2}g''(0)=\frac{3}{2}$$

21. 设$f(x)$在$[0, +\infty]$可导且函数单调递增，求证：函数

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$ 在$(0,+\infty)$上单调递增。

证：$F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt+\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x^2}\left[xf(x)-\int_0^x f(t)dt\right]$

令 $g(x)=xf(x)-\int\limits_0^x f(t)dt$

$$\Rightarrow g'(x)=f(x)+xf'(x)-f(x)=xf'(x)\geq 0$$

$g(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增

因此有 $g(x)\geq g(0)=0\Rightarrow F'(x)\geq 0$

故 $F(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增

22．设函数 $f(x)$在[0，1]上可微，且满足

$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=0$，求证：在（0，1）上内至少

存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

$\xi f'(\xi)=-f(\xi)$

$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$

证：令 $g(x)=xf(x)$

$(\quad ? \quad)'\Big|_{\xi}=0$

则 $g(1)=1\cdot f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$

而由定积分中值定理，得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=\xi_1 f(\xi_1)(\frac{1}{2}-0)=\frac{1}{2}\xi_1 f(\xi_1),\quad 0<\xi_1<\frac{1}{2}$$

所以 $g(1)=1\cdot f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=\xi_1 f(\xi_1)$

而 $g(\xi_1)=\xi_1 f(\xi_1) \qquad 0<\xi_1<\dfrac{1}{2}$

所以 $g(1)=1\cdot f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=\xi_1 f(\xi_1)$

而 $g(\xi_1)=\xi_1 f(\xi_1)$

对于 $g(x)=xf(x)$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,\ 1)$ ，使

$$g'(\xi)=\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$$ ，即 $$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$$

23．试建立二阶常系数线性齐次微分方程，已知其特征方程的一个根是 $r=3+2i$ ，并求出微分方程的通解。

解： $r_1=3+2i \quad \Rightarrow r_{1,2}=3\pm 2i$

$$\Rightarrow [r-(3+2i)][r-(3-2i)]=0$$

$$\Rightarrow r^2-(3+2i)r-(3-2i)r+(3+2i)(3-2i)=0$$

$$\Rightarrow r^2-6r+13=0$$

对应的微分方程为 $\quad y''-6y'+13y=0$

通解 $\quad Y=e^{3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

《高等数学》（上）期末考试模拟试题（三）

一.填空题（每空3分，共15分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-c}{x+c}\right)^{x}=e^{2}$，则 c = $\underline{-1}$。

分析：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2c}{x+c}\right)^{\frac{x+c}{-2c}}\right]^{\frac{-2cx}{x+c}}=e^{-2c}=e^{2}$$

2. $f(x)$是可导的奇函数，$f'(-1)=1$，则 $f'(1)=$ $\underline{\ 1\ }$。

分析：$\because f(x)$是可导的奇函数 $\therefore f(-x)=-f(x)$

两边求导可得：$-f'(-x)=-f'(x)$

即：$f'(-x)=f'(x)$

3. 设 $f'(\ln x)=x$，则 $f(x)=$ $\underline{\ \cancel{e^x}\ }$。 $\boxed{e^x+C}$

分析：令 $\ln x=t$，则 $f'(t)=e^t$

即 $f'(x)=e^x$

4. $\int_{-1}^{1} x^2 \sin x^3 dx$ = $\underline{\quad 0 \quad}$。

5.过点 $(2,4,-3)$，平行于向量$\{0,2,4\}$和 $\{-1,-2,1\}$

的平面方程为$\underline{\quad 5x-2y+z+1=0 \quad}$。不做

分析：(解法一)设所求平面方程的法向量为 $\vec{n}=\{a,b,c\}$

则有$\begin{cases} 2b+4c=0 \\ -a-2b+c=0 \end{cases}$，得$\begin{cases} b=-2c \\ a=5c \end{cases}$

用点积

所以所求平面方程的法向量为 $\vec{n}=\{5,-2,1\}$

故所求平面方程为$5(x-2)-2(y-4)+(z+3)=0$

即：$5x-2y+z+1=0$

5.过点 $(2,4,-3)$，平行于向量$\{0,2,4\}$和 $\{-1,-2,1\}$

的平面方程为 $\underline{\quad 5x-2y+z+1=0 \quad}$。

分析：(解法二)设所求平面方程的法向量为$\vec{n}=\{a,b,c\}$

$$\vec{n}=\{0,2,4\}\times\{-1,-2,1\}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$$

用叉积

所以所求平面方程的法向量为 $\vec{n}=\{5,-2,1\}$

故所求平面方程为 $5(x-2)-2(y-4)+(z+3)=0$

即：$5x-2y+z+1=0$

二.单项选择题（每小题3分，共15分）

6. 下列各函数中，（B）是无界函数。

(A) $\frac{1}{x}\sin x$　　(B) $x\sin x$

(C) $\frac{\ln x}{1+\ln^2 x}$　　(D) $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$

分析：**(B)**选项当 $x=\frac{\pm(2n-1)\pi}{2}$ 时

$$\left|x\sin x\right|=\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

随x的增大而增大，故无界。

7. 已知 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{1+e^{\frac{1}{x}}}+1 & x<0 \\ a & x=0 \\ \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+b & x>0 \end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$，则

a,b 的值为（　）

(A) $a=1, b=2$　　**(B)** $a=2, b=1$

(C) $a=2, b=2$　　**(D)** $a=1, b=1$

分析：

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{a}{\underbrace{1+e^{\frac{1}{x}}}_{\boxed{1}}}+1\right)=a+1$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{1+e^{\frac{1}{x}}}+1 & x<0\\ a & x=0\\ \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+b & x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\underbrace{1+e^{\frac{1}{x}}}_{\boxed{\infty}}}+b\right)=b$$

有左右极限存在且相等即 $a+1=b=2$

故答案为：**A**

8. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)-f(x_0)|}{x-x_0}$ 存在的充分必要条件是（C）

(A) $f(x_0)=0$ **(B)** $f(x)$在 x_0 点连续

(C) $f'(x_0)=0$ **(D)** $f(x)$ 在 x_0 点可导

分析：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\pm\left(f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right)}{x-x_0}$$

$$=\pm f^{'}\left(x_0\right)$$

9. $\int \sin x \cos x dx$ 不等于（B）

(A) $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$　　(B) $\frac{1}{2}\sin^2 2x + C$

(C) $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$　　(D) $-\frac{1}{2}\cos^2 x + C$

分析: $\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos^2 x) + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_1$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2x + 1}{2} + C_1 = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2$$

10. 若 $\int_0^k (2x-3x^2)dx=0$ ，则**k**的值为（D ）

(A) 0 **(B) 1**

(C) -1 **(D) 0 或1**

分析：$$\int_0^k\left(2x-3x^2\right)dx=\left(x^2-x^3\right)\Big|_0^k$$

$$=k^2-k^3$$

$$=0$$

三.解答题：（每小题6分，共36分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$

解：$\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}$

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\csc x}$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x} = -\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x\tan x}{x}$$

$$= -\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\tan x = 0$$

故原式=1

12. $f(x)$为连续函数，求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2\int_a^x f(t)dt}{x-a}$

解:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2\int_a^x f(t)dt}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2x\int_a^x f(t)dt+x^2f(x)}{1}$$

$$=a^2f(a)$$

13. $y=e^{-x}\sin x$，求$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解:

$$\frac{dy}{dx}=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-e^{-x}\left(\cos x-\sin x\right)+e^{-x}\left(-\sin x-\cos x\right)$$

$$=-2e^{-x}\cos x$$

14. $\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $dy.$

解：等式两边对*x*求导，得

$$\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}$$

解出 $\quad y'=\dfrac{y+2x}{x-2y}$

故 $\quad dy=\dfrac{y+2x}{x-2y}dx$

15. 设 $\int xf(x)dx = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$ ，求 $\int \frac{dx}{f(x)}$

解：等式两边对 x 求导，得 $xf\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

故 $f\left(x\right)=\frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\int\frac{dx}{f\left(x\right)}=\int x\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{a^2+x^2}d\left(a^2+x^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

16. 求 $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$

解：令 $1+x^2=t$

则当 $x=0$时，$t=1$；当 $x=1$时，$t=2$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)d\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t dt$$

$$=\frac{1}{2}[t\ln t\Big|_1^2-\int_1^2 dt]$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}$$

四、解答题（每小题6分，共18分）

17. 求函数 $y = x\ln x$ 的单调区间和极值。

解：函数定义域为 $(0, +\infty)$

$$y' = \ln x + 1,\ 驻点为\ x = e^{-1}$$

$$y'' = \frac{1}{x} > 0,\quad x = e^{-1}\ 为极小值点$$

$$y_{极小} = y(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$$

函数在 $(0, \frac{1}{e})$ 单调递减，在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 单调递增

18. $f(x)=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$, $g(x)=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$, 求 $f(x)$和 $g(x)$

解： $f(x)+g(x)=\int dx=x+c_1$

$$f(x)-g(x)=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=-\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=-\ln\left|\sin x+\cos x\right|+c_2$$

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=x+c_1 \\ f(x)-g(x)=-\ln\left|\sin x+\cos x\right|+c_2 \end{cases}$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{2}[x-\ln|\sin x+\cos x|]+c$

$$g(x)=\frac{1}{2}[x+\ln|\sin x+\cos x|]+c$$

19. 求 $y=x^2$及 $y=x$所围平面图形的面积以及该图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

解：由$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$，得两交点坐标（**0,0**），（**1,1**）

因此 $S=\int_0^1 x dx-\int_0^1 x^2 dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}$

$$V=\pi\left(\int_0^1 x^2 dx-\int_0^1 x^4 dx\right)=\pi\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{2}{15}\pi$$

五、证明题（每小题5分，共10分）

20. 证明方程 $x = \sin x + a\,(a > 0)$ 在 $[0,1+a]$ 上至少有一个根。

证明：记 $f(x) = x - \sin x - a$

则 $f(0) = -a < 0$

$$f(1+a) = 1 - \sin(1+a) \geq 0$$

由零点存在定理，$f(x)$ 在 $[0,\ 1+a]$ 上至少有一个零点

即方程 $x = \sin x + a(a > 0)$ 在 $[0,\ 1+a]$ 上至少有一个根。

21. 已知 $a>0$, $f(x)$在 $[0,a]$二阶可导，$f(0)=0$, $f''(x)<0$，证明:$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在 $(0,a)$单调递减。

证明: $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，记 $g(x)=xf'(x)-f(x)$

则 $g'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)$

又因 $f''(x)<0$，所以$g'(x)<0$

故 $g(x)$在 $(0,a)$上单调递减

又因$g(0)=0$，故 $x>0$时,$g(x)<0$, 即: $F'(x)<0$

所以$F(x)$在$(0,a)$ 单调递减

六.（6分）

22.函数$f(x)$为可导函数，且对任意 $x>0, y>0$

有$f(xy)=f(x)+f(y)$及$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$，证明：

$f(x)=\ln x.$

证明：取 $y=1$，有$f(x)=f(x)+f(1)$

故$f(1)=0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$$

故 $f'(1)=1$

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

又 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left[x\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$f(1)=0$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\dfrac{\Delta x}{x}\cdot x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right) - f(1)}{\dfrac{\Delta x}{x} \cdot x}$$

$$f'(1) = 1$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right) - f(1)}{\dfrac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} f'(1) = \frac{1}{x}$$

$\therefore\ f(x) = \ln x + c$，由 $f(1) = 0$ 得 $c = 0$

$\therefore\ f(x) = \ln x$