

Izpit iz Numerične matematike

9.9.2013

1. Za Hermitovo enačbo

$$y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (1)$$

je ena od rešitev polinom $y_1(x) = x$. Naj bo $y_2(x)$ rešitev (1), ki je neodvisna od y_1 in zadošča začetnemu pogoju

$$y_2(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0.$$

Poišči približek za $y_2(1)$ z metodo Runge-Kutta reda 2

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= hf(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 &= hf(x_{n+1}, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \end{aligned}$$

s koraki $h = 0.5$ in $h = 0.1$. Poiščite približek za rešitev robnega problema za Hermitovo enačbo s homogenimi robnimi pogoji

$$y(0) = y(1) = 0$$

v točkah $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1$. *Namig: Splošna rešitev enačbe (1) je*

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

2. Naj bo A pozitivno definitna simetrična matrika, za katero smo že izračunali razcep Choleskega

$$A = R^T R.$$

Napiši učinkovit algoritem za iskanje najmanjše lastne vrednosti in pripadajočega lastnega vektorja matrike A z inverzno potenčno metodo. Koliko osnovnih operacij je potrebnih za vsak korak? Z algoritmom poišči približek za najmanjšo lastno vrednost in pripadajoči lastni vektor 20×20 matrike z elementi

$$a_{ij} = ij \exp(-|i - j|).$$