

# NUMERIČNA MATEMATIKA V PROGRAMSKEM JEZIKU JULIA

Martin Vuk

2024

## Predgovor

Knjige o numerični matematiki se pogosto posvečajo predvsem matematičnim vprašanjem. Pričujoča knjiga poskuša nasloviti bolj praktične vidike numerične matematike, zato so primeri, če je le mogoče, povezani s problemom praktične narave s področja fizike, matematičnega modeliranja ali računalništva. Za podrobnejši matematični opis uporabljenih metod in izpeljav bralcu priporočam učbenik *Osnove numerične matematike* Bojana Orla [1].

Pričujoča knjiga je prvenstveno namenjena študentom Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani kot gradivo za izvedbo laboratorijskih vaj pri predmetu Numerična matematika. Kljub temu je primerna za vse, ki bi želeli bolje spoznati algoritme numerične matematike, uporabo numeričnih metod ali se naučiti uporabljati programski jezik [Julia](#). Pri sem se od bralca pričakuje osnovno znanje programiranja v kakšnem drugem programskem jeziku.

V knjigi so naloge razdeljene na vaje in na domače naloge. Vaje so zasnovane za samostojno delo z računalnikom, pri čemer lahko bralec naloge rešuje z različno mero samostojnosti. Vsaka vaja se začne z opisom naloge in jasnimi navodili, kaj je njen cilj oziroma končni rezultat. Sledijo podrobnejša navodila, kako se naloge lotiti, na koncu pa je rešitev z razlago posameznih korakov. Rešitev vključuje matematične izpeljave, programsko kodo in rezultate, ki jih dobimo, če programsko kodo uporabimo.

V zbirki je več vaj, kot jih je mogoče predstaviti v 15 tednih, kolikor traja en semester. Poleg tega je smiselno vsaj dvoje vaj posvetiti izdelavi domačih nalog. Nekatere vaje (na primer vaja o minimalnih ploskvah) so toliko obsežne, da potrebujemo 2 tedna, da jih v celoti obravnavamo. V praksi se je izkazalo, da je mogoče v enem semestru v celoti obravnavati 10 do 12 vaj.

Domače naloge rešuje bralec povsem samostojno, zato so naloge brez rešitev. Odločitev, da niso vključene rešitve za domače naloge je namerna, saj bralec lahko verodostojno preveri svoje znanje le, če rešuje tudi naloge, za katere nima dostopa do rešitev.

Vsekakor bralcu svetujem, da vso kodo napiše in preskusi sam. Še bolje je, če kodo razširi, jo spreminja in se z njo igra. Koda, ki je navedena v tej knjigi, je najosnovnejša različica kode, ki reši določen problem in še ustreza minimalnim standardom pisanja kvalitetne kode. Pogosto je izpuščeno preverjanje ali implementacija robnih primerov, včasih tudi obravnava pričakovanih napak. Da je bralcu lažje razumeti, kaj koda počne, sem dal prednost berljivosti pred kompletnostjo.

Na tem mestu bi se rad zahvalil Bojanu Orlu, Emilu Žagarju, Petru Kinku in Aljažu Zalarju, s katerimi sem sodeloval ali še sodelujem pri numeričnih predmetih na FRI. Veliko idej za naloge, ki so v tej knjigi, prihaja prav od njih. Prav tako bi se zahvalil članom Laboratorija za matematične metode v računalništvu in informatiki, še posebej Neži Mramor-Kosta in Damirju Franetiču, ki so tako ali drugače prispevali k nastanku te knjige. Moja draga žena Mojca Vilfan je opravila delo urednika, za kar sem ji izjemno hvaležen. Na koncu bi se rad zahvalil študentom, ki so obiskovali numerične predmete. Čeprav sem jih jaz učil, so bili oni tisti, ki so me naučili marsikaj novega.

# Kazalo

1 Uvod v programski jezik Julia .....	5
1.1 Namestitev in prvi koraki .....	5
1.2 Avtomatsko posodabljanje kode .....	11
1.3 Priprava korenske mape .....	11
1.4 Vodenje različic s programom Git .....	12
1.5 Priprava paketa za vajo .....	13
1.6 Koda .....	14
1.7 Testi .....	15
1.8 Dokumentacija .....	17
1.9 Zaključek .....	21
2 Računanje kvadratnega korena .....	22
2.1 Naloga .....	22
2.2 Rešitev naloge .....	22
3 Tridiagonalni sistemi .....	31
4 Minimalne ploskve .....	32
4.1 Naloga .....	32
4.2 Matematično ozadje .....	33
4.3 Diskretizacija in linearni sistem enačb .....	33
4.4 Matrika sistema linearnih enačb .....	34
4.5 Izpeljava s Kronekerjevim produktom .....	35
4.6 Primer .....	35
4.7 Napolnitev matrike ob eliminaciji .....	35
4.8 Koda .....	35
4.9 Iteracijske metode .....	36
5 Interpolacija z implicitnimi funkcijami .....	39
5.1 Naloga .....	39
5.2 Opis krivulj z implicitno interpolacijo .....	40
5.3 Problem .....	40
5.4 Naloga .....	40
5.5 RBF s kompaktnim nosilcem .....	41
5.6 Povezave .....	41
6 Fizikalna metoda za vložitev grafov .....	42
6.1 Naloga .....	42
7 Invariantna porazdelitev Markovske verige .....	43
8 Spektralno gručenje .....	44
9 Nelinearne enačbe in geometrija .....	45
10 Konvergenčna območja nelinearnih enačb .....	46
11 Interpolacija z zlepci .....	47
12 Aproksimacija z linearnim modelom .....	48
13 Aproksimacija s polinomi Čebiševa .....	49
14 Povprečna razdalja med dvema točkama na kvadratu .....	50
15 Porazdelitvena funkcija normalne porazdelitve .....	51
16 Avtomatsko odvajanje z dualnimi števili .....	52
17 Aproksimacija z dinamičnim modelom .....	53
17.1 Reševanje začetnega problema za NDE .....	53
17.2 Hermitova interpolacija .....	53

17.3 Poševni met z zračnim uporom .....	53
18 Aproksimacija podatkov z dinamičnim modelom .....	54
19 Perioda geostacionarne orbite .....	55
20 Domače naloge .....	56
20.1 Navodila za pripravo domačih nalog .....	56
20.2 1. domača naloga .....	60
20.3 2. domača naloga .....	66
20.4 3. domača naloga .....	69
Literatura .....	73

# 1 Uvod v programski jezik Julia

V knjigi bomo uporabili programski jezik [Julia](#). Zavaljo učinkovitega izvajanja, uporabe [dinamičnih tipov](#), [funkcij](#), [specializiranih glede na signaturo](#), in dobre podpore za interaktivno uporabo, je Julia zelo primerna za programiranje numeričnih metod in ilustracijo njihove uporabe. V nadaljevanju sledijo kratka navodila, kako začeti z Julio.

Cilji tega poglavja so:

- naučiti se uporabljati Julio v interaktivni ukazni zanki,
- pripraviti okolje za delo v programskem jeziku Julia,
- ustvariti prvi paket in
- ustvariti prvo poročilo v formatu PDF.

Tekom te vaje bomo pripravili svoj prvi paket v Juliji, ki bo vseboval parametrično enačbo [Geronove lemniskate](#), in napisali teste, ki bodo preverili pravilnost funkcij v paketu. Nato bomo napisali skripto, ki uporabi funkcije iz našega paketa in nariše sliko Geronove lemniskate. Na koncu bomo pripravili lično poročilo v formatu PDF.

## 1.1 Namestitev in prvi koraki

Sledite [navodilom](#), namestite programski jezik Julia in v terminalu poženite ukaz `julia`. Ukaz odpre interaktivno ukazno zanko (angl. *Read Eval Print Loop* ali s kratico REPL) in v terminalu se pojavi ukazni pozivnik `julia>`. Za ukazni pozivnik lahko napišemo posamezne ukaze, ki jih nato Julia prevede, izvede in izpiše rezultate. Poskusimo najprej s preprostimi izrazi:

```
julia> 1 + 1
2
julia> sin(pi)
0.0
julia> x = 1; 2x + x^2
3
julia> # vse, kar je za znakom #, je komentar, ki se ne izvede
```

### 1.1.1 Funkcije

Funkcije, ki so v programskem jeziku Julia osnovne enote kode, definiramo na več načinov. Kratke enovrstične funkcije definiramo z izrazom `ime(x) = ...`.

```
julia> f(x) = x^2 + sin(x)
f (generic function with 1 method)
julia> f(pi/2)
3.4674011002723395
```

Funkcija z več argumentu definiramo podobno:

```
julia> g(x, y) = x + y^2
g (generic function with 1 method)

julia> g(1, 2)
5
```

Za funkcije, ki zahtevajo več kode, uporabimo ključno besedo `function`:

```
julia> function h(x, y)
    z = x + y
    return z^2
end
h (generic function with 1 method)

julia> h(3, 4)
49
```

Funkcije lahko uporabljamo kot vsako drugo spremenljivko. Lahko jih podamo kot argumente drugim funkcijam in jih združujemo v podatkovne strukture, kot so sezname, vektorji ali matrice. Funkcije lahko definiramo tudi kot anonimne funkcije. To so funkcije, ki jih vpeljemo brez imena in jih kasneje tudi ne moremo poklicati po imenu.

```
julia> (x, y) -> sin(x) + y
#1 (generic function with 1 method)
```

Anonimne funkcije uporabljamo predvsem kot argumente v drugih funkcijah. Funkcija `map(f, v)` na primer zahteva za prvi argument funkcijo `f`, ki jo nato aplicira na vsak element vektorja:

```
julia> map(x -> x^2, [1, 2, 3])
3-element Vector{Int64}:
 1
 4
 9
```

Vsaka funkcija v programskem jeziku Julia ima lahko več različnih definicij, glede na kombinacijo tipov argumentov, ki jih podamo. Posamezno definicijo funkcije imenujemo [metoda](#). Ob klicu funkcije Julia izbere najprimernejšo metodo.

```
julia> k(x::Number) = x^2
k (generic function with 1 method)

julia> k(x::Vector) = x[1]^2 - x[2]^2
k (generic function with 2 methods)

julia> k(2)
4

julia> k([1, 2, 3])
-3
```

### 1.1.2 Vektorji in matrike

Vektorje vnesemo z oglatimi oklepaji []:

```
julia> v = [1, 2, 3]
3-element Vector{Int64}:
 1
 2
 3

julia> v[1] # vrne prvo komponento vektorja
1

julia> v[2:end] # vrne zadnji dve komponenti vektorja
2-element Vector{Int64}:
 2
 3

julia> sin.(v) # funkcijo uporabimo na komponentah vektorja, če imenu dodamo .
3-element Vector{Float64}:
 0.8414709848078965
 0.9092974268256817
 0.1411200080598672
```

Matrike vnesemo tako, da elemente v vrstici ločimo s presledki, vrstice pa s podpičji:

```
julia> M = [1 2 3; 4 5 6]
2×3 Matrix{Int64}:
 1  2  3
 4  5  6
```

Za razpone indeksov uporabimo :, s ključno besedo end označimo zadnji indeks. Julia avtomatično določi razpon indeksov v matriki:

```
julia> M[1, :] # prva vrstica
3-element Vector{Int64}:
 1
 2
 3

julia> M[2:end, 1:end-1]
1×2 Matrix{Int64}:
 4  5
```

Osnovne operacije delujejo tudi na vektorjih in matrikah. Pri tem moramo vedeti, da gre za matrične operacije. Tako je na primer \* operacija množenja matrik ali matrike z vektorjem in ne morda množenja po komponentah.

```
julia> [1 2; 3 4] * [6, 5] # množenje matrike z vektorjem
2-element Vector{Int64}:
 16
 38
```

Če želimo operacije izvajati po komponentah, moramo pred operator dodati piko, na kar nas Julia opozori z napako:

```
julia> [1, 2] + 1 # seštevanje vektorja in števila ni definirano
ERROR: MethodError: no method matching +(::Vector{Int64}, ::Int64)
For element-wise addition, use broadcasting with dot syntax: array .+ scalar

julia> [1, 2] .+ 1
2-element Vector{Int64}:
 2
 3
```

Posebej uporaben je operator `\`, ki poišče rešitev sistema linearnih enačb. Izraz `A\b` vrne rešitev matričnega sistema  $Ax = b$ :

```
julia> A = [1 2; 3 4]; # podpičje prepreči izpis rezultata

julia> x = A \ [5, 6] # rešimo enačbo A * x = [5, 6]
2-element Vector{Float64}:
-3.9999999999999987
 4.499999999999999
```

Izračun se izvede v aritmetiki s plavajočo vejico, zato pride do zaokrožitvenih napak in rezultat ni povsem točen. Naredimo še preizkus:

```
julia> A * x
2-element Vector{Float64}:
 5.0
 6.0
```

Operator `\` deluje za veliko različnih primerov. Med drugim ga lahko uporabimo tudi za iskanje rešitve pre-določenega sistema po metodi najmanjših kvadratov:

```
julia> [1 2; 3 1; 2 2] \ [1, 2, 3] # rešitev za predoločen sistem
2-element Vector{Float64}:
 0.5999999999999999
 0.5111111111111114
```

### 1.1.3 Moduli

**Moduli** pomagajo organizirati funkcije v enote in omogočajo uporabo istega imena za različne funkcije in tipe. Module definiramo z `module ImeModula ... end`:

```
julia> module KrNeki
    kaj(x) = x + sin(x)
    čaj(x) = cos(x) - x
    export kaj
end
Main.KrNeki
```



Če želimo funkcije, ki so definirane v modulu `ImeModula`, uporabiti izven modula, moramo modul naložiti z `using ImeModula`. Funkcije, ki so izvožene z ukazom `export ime_funkcije` lahko kličemo kar po imenu, ostalim funkcijam pa moramo dodati ime modula kot predpono. Modulom, ki niso del paketa in so definirani lokalno, moramo dodati piko, ko jih naložimo:

```
julia> using .KrNeki
```

```
julia> kaj(1)
1.8414709848078965
```

```
julia> KrNeki.čaj(1)
-0.45969769413186023
```

Modul lahko naložimo tudi z ukazom `import ImeModula`. V tem primeru moramo vsem funkcijam iz modula dodati ime modula in piko kot predpono.

### 1.1.4 Paketi

Nabor funkcij, ki so na voljo v Juliji, je omejen, zato pogosto uporabimo knjižnice, ki vsebujejo dodatne funkcije. Knjižnica funkcij v Juliji se imenuje `paket`. Funkcije v paketu so združene v modul, ki ima isto ime kot paket.

Julia ima vgrajen upravljalnik s paketi, ki omogoča dostop do paketov, ki so del Julije, kot tudi tistih, ki jih prispevajo uporabniki. Poglejmo si primer, kako uporabiti ukaz `norm`, ki izračuna različne norme vektorjev in matrik. Ukaz `norm` ni del osnovnega nabora funkcij, ampak je del modula `LinearAlgebra`, ki je že vključen v program Julia. Če želimo uporabiti `norm`, moramo najprej uvoziti funkcije iz modula `LinearAlgebra` z ukazom `using LinearAlgebra`:

```
julia> norm([1, 2, 3])
ERROR: UndefVarError: `norm` not defined
```

```
julia> using LinearAlgebra
julia> norm([1, 2, 3])
3.7416573867739413
```

Če želimo uporabiti pakete, ki niso del osnovnega jezika Julia, jih moramo prenesti z interneta. Za to uporabimo modul `Pkg`. Paketom je namenjen poseben paketni način vnosa v ukazni zanki. Do paketskega načina pridemo, če za pozivnik vnesemo znak `]`.

#### Različni načini ukazne zanke

Julia ukazna zanka (REPL) pozna več načinov, ki so namenjeni različnim opravilom.

- Osnovni način s pozivom `julia>` je namenjen vnosu kode v Juliji.
- Paketni način s pozivom `pkg>` je namenjen upravljanju s paketi. V paketni način pridemo, če vnesemo znak `]`.
- Način za pomoč s pozivom `help?>` je namenjen pomoči. V način za pomoč pridemo z znakom `?`.
- Lupinski način s pozivom `shell>` je namenjen izvajanju ukazov v sistemski lupini. V lupinski način vstopimo z znakom `;`.
- Iz posebnih načinov pridemo nazaj v osnovni način s pritiskom na vračalko (`⏮`).

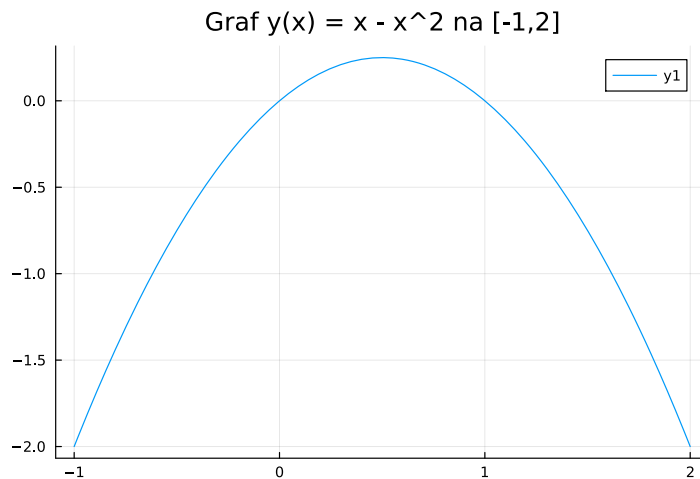
Za primer si oglejmo, kako namestiti knjižnico za ustvarjanje slik in grafov `Plots.jl`. Najprej aktiviramo paketni način z vnosom znaka `]` za pozivnikom. Nato paket dodamo z ukazom `add`.

```
(@v1.10) pkg> add Plots
```

```
...
```

```
julia> using Plots # naložimo modul s funkcijami iz paketa
```

```
julia> plot(x -> x - x^2, -1, 2, title="Graf  $y(x) = x - x^2$  na  $[-1,2]$ ")
```



### 1.1.5 Datoteke s kodo

Kodo lahko zapišemo tudi v datoteke. Vnašanje ukazov v interaktivni zanki je uporabno za preproste ukaze na primer namesto kalkulatorja, za resnejše delo pa je bolje kodo shraniti v datoteke. Praviloma imajo datoteke s kodo v jeziku Julia končnico `.jl`.

Napišimo preprost skript. Ukaze, ki smo jih vnesli doslej, shranimo v datoteko z imenom `01uvod.jl`. Ukaze iz datoteke poženemo z ukazom `include` v ukazni zanki:

```
julia> include("01uvod.jl")
```

ali pa v lupini operacijskega sistema:

```
$ julia 01uvod.jl
```

#### *Urejevalniki in programska okolja za Julijo*

Za lažje delo z datotekami s kodo potrebujemo dober urejevalnik besedila, ki je namenjen programiranju. Če še nimate priljubljenega urejevalnika, priporočam [VS Code](#) in [razširitev za Julio](#).

Če odprete datoteko s kodo v urejevalniku VS Code, lahko s kombinacijo tipk `Ctrl + Enter` posamezno vrstico kode pošljemo v ukazno zanko za Julio, da se izvede. Na ta način združimo prednosti interaktivnega dela in zapisovanja kode v datoteke `.jl`.

Priporočam, da večino kode napišete v datoteke. V nadaljevanju bomo spoznali, kako organizirati datoteke v projekte in pakete tako, da lahko kodo uporabimo na več mestih.

## 1.2 Avtomatsko posodabljanje kode

Ko uporabimo kodo iz datoteke v interaktivni zanki, je treba ob vsaki spremembi datoteko ponovno naložiti z ukazom `include`. Paket [Revise.jl](#) poskrbi za to, da se nalaganje zgodi avtomatično vsakič, ko se datoteke spremenijo. Zato najprej namestimo paket `Revise` in poskrbimo, da se zažene ob vsakem zagonu interaktivne zanke.

Naslednji ukazi namestijo paket `Revise`, ustvarijo mapo `$HOME/.julia/config` in datoteko `startup.jl`, ki naloži paket `Revise` in se izvede ob vsakem zagonu programa `julia`:

```
julia> # pritisnemo ], da pridemo v paketni način
(@v1.10) pkg> add Revise
julia> startup = """
    try
        using Revise
    catch e
        @warn "Error initializing Revise" exception=(e, catch_backtrace())
    end
    """
...
julia> path = homedir() * "/.julia/config"
julia> mkdir(path)
julia> write(path * "/startup.jl", startup) # zapišemo startup.jl
```

Okolje za delo z `Julio` je pripravljeno.

## 1.3 Priprava korenske mape

Programe, ki jih bomo napisali v nadaljevanju, bomo hranili v mapi `nummat`. Ustvarimo jo z ukazom:

```
$ mkdir nummat
```

Korenska mapa bo služila kot [projektno okolje](#), v katerem bodo zabeleženi vsi paketi, ki jih bomo potrebovali.

```
$ cd nummat
$ julia

julia> # s pritiskom na ] vključimo paketni način
(@v1.10) pkg> activate . # pripravimo projektno okolje v korenski mapi
(nummat) pkg>
```

Zgornji ukaz ustvari datoteko `Project.toml` in pripravi novo projektno okolje v mapi `nummat`.

### Projektno okolje v Juliji

Projektno okolje je mapa, ki vsebuje datoteko `Project.toml` z informacijami o paketih in zahtevanih različicah paketov. Projektno okolje aktiviramo z ukazom `Pkg.activate("pot/do/mape/z/okoljem")` oziroma v paketnem načinu z:

```
(@v1.10) pkg> activate pot/do/mape/z/okoljem
```

Uporaba projektne okolja delno rešuje problem [ponovljivosti](#), ki ga najlepše ilustriramo z izjavo „Na mojem računalniku pa koda dela!“. Projektno okolje namreč vsebuje tudi datoteko `Manifest.toml`, ki hrani različice in kontrolne vsote za pakete iz `Project.toml` in vse njihove odvisnosti. Ta informacija omogoča, da Julia naloži vedno iste različice vseh odvisnosti, kot v času, ko je bila datoteka `Manifest.toml` zadnjič posodobljena.

Projektna okolja v Juliji so podobna [virtualnim okoljem v Pythonu](#).

Projektnemu okolju dodamo pakete, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Zaenkrat je to le paket [Plots.jl](#), ki ga potrebujemo za risanje grafov:

```
(nummat) pkg> add Plots
```

Datoteka `Project.toml` vsebuje le ime paketa `Plots` in identifikacijski niz:

```
[deps]
Plots = "91a5bcdd-55d7-5caf-9e0b-520d859cae80"
```

Točna verzija paketa `Plots` in vsi paketi, ki jih potrebuje, so zabeležena v datoteki `Manifest.toml`.

## 1.4 Vodenje različic s programom Git

Priporočamo uporabo programa za vodenje različic [Git](#). V nadaljevanju bomo opisali, kako pripraviti v korenski mapi `nummat` pripraviti Git repozitorij in vpisati datoteke, ki smo jih do sedaj ustvarili.

### Sistem za vodenje različic Git

[Git](#) je sistem za vodenje različic, ki je postal *de facto* standard v razvoju programske opreme pa tudi drugod, kjer se dela s tekstovnimi datotekami. Priporočamo, da si bralec ustvari svoj Git repozitorij, kjer si uredi kodo in zapiske, ki jo bo napisal pri spremljanju te knjige.

Git repozitorij lahko hranimo zgolj lokalno na lastnem računalniku, ali pa ga repliciramo na lastnem strežniku ali na enem od javnih spletnih skladišč programske kode, na primer [Github](#) ali [Gitlab](#).

Z naslednjim ukazom v mapi `nummat` ustvarimo repozitorij za `git` in registriramo novo ustvarjene datoteke.

```
$ git init .
$ git add .
$ git commit -m "Začetni vpis"
```

Z ukazoma `git status` in `git diff` lahko pregledamo, kaj se je spremenilo od zadnjega vpisa. Ko smo zadovoljni s spremembami, jih zabeležimo z ukazoma `git add` in `git commit`. Priporočamo redno uporabo ukaza `git commit`. Pogosti vpisi namreč precej olajšajo nadzor nad spremembami kode in spodbujajo k razdelitvi dela na majhne zaključene probleme, ki so lažje obvladljivi.

## 1.5 Priprava paketa za vajo

Ob začetku vsake vaje bomo v korenski mapi (`nummat`) najprej ustvarili mapo oziroma **paket**, v katerem bo shranjena koda za določeno vajo. S ponavljanjem postopka priprave paketa za vsako vajo posebej se bomo naučili, kako hitro začeti s projektom. Obenem bomo optimizirali način dela (angl. *workflow*) in odpravili ozka grla v postopkih priprave projekta. Ponavljanje vedno istih postopkov nas prisili, da postopke kar se da poenostavimo in ponavljajoča se opravila avtomatiziramo. Na dolgi rok se tako lahko bolj posvečamo dejanskemu reševanju problemov.

Za vajo bomo ustvarili paket `Vaja01`, s katerim bomo narisali [Geronovo lemniskato](#).

V mapi `nummat` ustvarimo paket `Vaja01`, v katerega bomo postavili kodo. Nov paket ustvarimo v paketnem načinu z ukazom `generate`:

```
$ cd nummat
$ julia

julia> # pritisnemo ] za vstop v paketni način
(@v1.10) pkg> generate Vaja01
```

Ukaz `generate` ustvari mapo `Vaja01` z osnovno strukturo **paketa v Juliji**:

```
$ tree Vaja01
Vaja01
├── Project.toml
└── src
    └── Vaja01.jl

1 directory, 2 files
```

Paket `Vaja01` nato dodamo v projektno okolje v korenski mapi `nummat`, da bomo lahko kodo iz paketa uporabili v programih in ukazni zanki:

```
(@v1.10) pkg> activate .
(nummat) pkg> develop ./Vaja01 # paket dodamo projektnemu okolju
```

### *Za obsežnejši projekti uporabite šablone*

Za obsežnejši projekt ali projekt, ki ga želite objaviti, je bolje uporabiti že pripravljene šablone [PkgTemplates](#) ali [PkgSkeleton](#). Zavoljo enostavnosti bomo v sklopu te knjige projekte ustvarjali s `Pkg.generate`.

Osnovna struktura paketa je pripravljena. Paketu bomo v nadaljevanju dodali še:

- kodo (Poglavje 1.6),
- teste (Poglavje 1.7) in
- dokumentacijo (Poglavje 1.8).

## 1.6 Koda

Ko je mapa s paketom Vaja01 pripravljena, lahko začnemo. Napisali bomo funkcije, ki izračunajo koordinate [Geronove lemniskate](#):

$$x(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad y(t) = 2 \frac{t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}. \quad (1.1)$$

V urejevalniku odpremo datoteko Vaja01/src/Vaja01.jl in vanjo shranimo definiciji:

```
module Vaja01

    """Izračunaj `x` kordinato Geronove lemniskate."""
    lemniskata_x(t) = (t^2 - 1) / (t^2 + 1)
    """Izračunaj `y` kordinato Geronove lemniskate."""
    lemniskata_y(t) = 2t * (t^2 - 1) / (t^2 + 1)^2

    # izvozimo imena funkcij, da so dostopna brez predpone `Vaja01`
    export lemniskata_x, lemniskata_y
end # module Vaja01
```

Program 1: Definicije funkcij v paketu Vaja01.

Funkcije iz datoteke Vaja01/src/Vaja01.jl lahko uvozimo z ukazom `using Vaja01`, če smo paket Vaja01 dodali v projektno okolje (Project.toml). V mapo src sodijo splošno uporabne funkcije, ki jih želimo uporabiti v drugih programih. V interaktivni zanki lahko sedaj pokličemo novo definirani funkciji:

```
julia> using Vaja01
julia> lemniskata_x(1.2)
0.180327868852459
```

V datoteko Vaja01/doc/01uvod.jl bomo zapisali preprost program, ki uporabi kodo iz paketa Vaja01 in nariše lemniskato:

```
using Vaja01
# Krivuljo narišemo tako, da koordinati tabeliramo za veliko število parametrov.
t = range(-5, 5, 300) # generiramo zaporedje 300 vrednosti na [-5, 5]
x = lemniskata_x.(t) # funkcijo apliciramo na elemente zaporedja
y = lemniskata_y.(t) # tako da imenu funkcije dodamo .
# Za risanje grafov uporabimo paket `Plots`.
using Plots
plot(x, y, label=false, title="Geronova lemniskata")
```

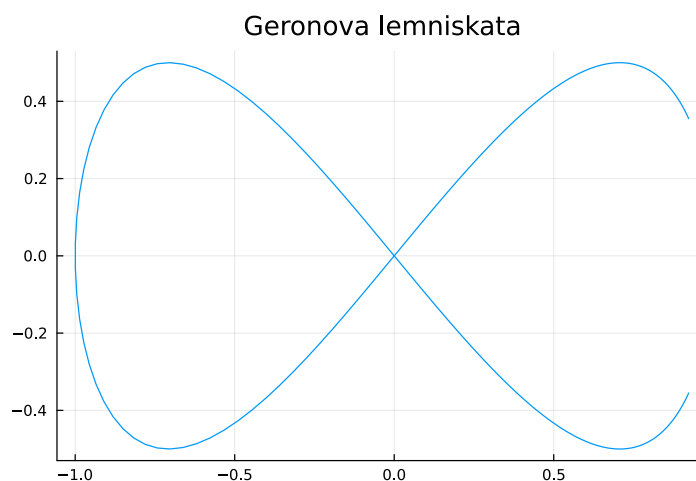
Program 01uvod.jl poženemo z ukazom:

```
julia> include("Vaja01/doc/01uvod.jl")
```

### Poganjanje ukaz za ukazom v VS Code

Če uporabljate urejevalnik [VS Code](#) in [razširitev za Julio](#), lahko ukaze iz programa poganjate vrstico za vrstico kar iz urejevalnika. Če pritisnete kombinacijo tipk Shift + Enter, se bo izvedla vrstica v kateri je trenutno kazalka.

Rezultat je slika lemniskate.



Slika 2: Geronova lemniskata

## 1.7 Testi

Naslednji korak je, da dodamo avtomatske teste, s katerimi preizkusimo pravilnost kode, ki smo je napisali v prejšnjem poglavju. Avtomatski test je preprost program, ki pokliče določeno funkcijo in preveri rezultat.

### Avtomatsko testiranje programov

Pomembno je, da pravilnost programov preverimo. Najlažje to naredimo „na roke“, tako da program poženemo in preverimo rezultat. Testiranja „na roke“ ima veliko pomankljivosti. Zahteva veliko časa, je lahko nekonsistentno in dovzetno za človeške napake.

Alternativa ročnemu testiranju programov so avtomatski testi. To so preprosti programi, ki izvedejo testirani program in rezultate preverijo. Avtomatski testi so pomemben del [agilnega razvoja programske opreme](#) in omogočajo avtomatizacijo procesov razvoja programske opreme, ki se imenuje [nenehna integracija](#).

Uporabili bomo paket [Test](#), ki olajša pisanje testov. Vstopna točka za teste je datoteka `test/runtests.jl`. Uporabili bomo makroje `@test` in `@testset` iz paketa `Test`.

V datoteko `test/runtests.jl` dodamo teste za obe koordinatni funkciji, ki smo ju definirali:

```

using Vaja01, Test

@testset "Koordinata x" begin
    @test lemniskata_x(1.0) ≈ 0.0
    @test lemniskata_x(2.0) ≈ 3 / 5
end

@testset "Koordinata y" begin
    @test lemniskata_y(1.0) ≈ 0.0
    @test lemniskata_y(2.0) ≈ 12 / 25
end

```

Program 3: Rezultat funkcij primerjamo s pravilno vrednostjo.

Za primerjavo rezultatov smo uporabili .

#### Primerjava števil s plavajočo vejico

Pri računanju s števili s plavajočo vejico se izogibajmo primerjanju števil z operatorjem `==`, ki števili primerja bit po bit. Pri izračunih, v katerih nastopajo števila s plavajočo vejico, pride do zaokrožitvenih napak. Zato se različni načini izračuna za isto število praviloma razlikujejo na zadnjih decimalkah. Na primer izraz `asin(sin(pi/4)) - pi/4` ne vrne točne ničle ampak vrednost `-1.1102230246251565e-16`, ki pa je zelo majhno število. Za približno primerjavo dveh vrednosti `a` in `b` zato uporabimo izraz

$$|a - b| < \varepsilon, \quad (1.2)$$

kjer je  $\varepsilon$  večji, kot pričakovana zaokrožitvena napaka. V Juliji lahko za približno primerjavo števil in vektorjev uporabimo operator `≈`, ki je alias za funkcijo `isapprox`.

Preden lahko poženemo teste, moramo ustvariti testno okolje. Sledimo [priporočilom za testiranje paketov](#). V mapi `Vaja01/test` ustvarimo novo okolje in dodamo paket `Test`.

```

(@v1.10) pkg> activate Vaja01/test
(test) pkg> add Test
(test) pkg> activate .

```

Teste poženemo tako, da v paketnem načinu poženemo ukaz `test Vaja01`.

```

(nummat) pkg> test Vaja01
Testing Vaja01
  Testing Running tests
  ...
  ...
Test Summary: | Pass  Total  Time
Koordinata x |    2     2  0.1s
Test Summary: | Pass  Total  Time
Koordinata y |    2     2  0.0s
Testing Vaja01 tests passed

```



## 1.8 Dokumentacija

Dokumentacija programske kode je sestavljena iz različnih besedil in drugih virov, npr. videov, ki so namenjeni uporabnikom in razvijalcem programa ali knjižnice. Dokumentacija vključuje komentarje v kodi, navodila za namestitve in uporabo programa in druge vire z razlagami ozadja, teorije in drugih zadev, povezanih s projektom. Dobra dokumentacija lahko veliko pripomore k uspehu določenega programa. To še posebej velja za knjižnice.

Slabo dokumentirane kode, nihče ne želi uporabljati. Tudi če vemo, da kode ne bo uporabljal nihče drug razen nas samih, bodimo prijazni do samega sebe v prihodnosti in pišimo dobro dokumentacijo.

V tej knjigi bomo pisali tri vrste dokumentacije:

- dokumentacijo za posamezne funkcije v sami kodi,
- navodila za uporabnika v datoteki `README.md`,
- poročilo v formatu PDF.

### *Zakaj format PDF*

Izbira formata PDF je mogoče presenetljiva za pisanje dokumentacije programske kode. V praksi so precej uporabnejše HTML strani. Dokumentacija v obliki HTML strani, ki se generira avtomatično v procesu [nenehne integracije](#), je postala *de facto* standard. V kontekstu popravljanja domačih nalog in poročil za vaje pa ima format PDF še vedno prednosti, saj ga je lažje pregledovati in popravljati.

### 1.8.1 Dokumentacija funkcij in tipov

Funkcije in podatkovne tipe v Juliji dokumentiramo tako, da pred definicijo dodamo niz z opisom funkcije, kot smo to naredili v programu Program 1. Več o tem si lahko preberete [v poglavju o dokumentacij](#) priročnika za Julijo.

### 1.8.2 README dokument

Dokument README(preberi me) je namenjen najbolj osnovnim informacijam o paketu. Dokument je vstopna točka za dokumentacijo in navadno vsebuje

- kratek opis projekta,
- povezavo na dokumentacijo,
- navodila za osnovno uporabo in
- navodila za namestitve.

## # Vzorčni projekt za vajo

Avtor: Martin Vuk <[martin.vuk@fri.uni-lj.si](mailto:martin.vuk@fri.uni-lj.si)>

Preprost paket, ki definira koordinatne funkcije [Geronove lemniskate]([https://sl.wikipedia.org/wiki/Geronova\\_lemniskate](https://sl.wikipedia.org/wiki/Geronova_lemniskate)). Primer uporabe je opisan v programu [01uvod.jl](./doc/01uvod.jl), ki ga poženemo z ukazom

```
``jl
include("Vaja01/doc/01uvod.jl")
``

v interaktivni zanki Julije.
```

## ## Testi

Teste poženemo z ukazom:

```
``
julia --project=Vaja01 -e "import Pkg; Pkg.test()"
``
```

## ## Poročilo PDF

Poročilo pripravimo z ukazom:

```
``
julia --project=@. Vaja01/doc/makedocs.jl
``
```

Program 4: README.md vsebuje osnove informacije o projektu.

### 1.8.3 PDF poročilo

Za pripravo dokumentov v formatu PDF priporočamo uporabo naslednjih programov

- [TeX/LaTeX](#),
- [pandoc](#),
- [AsciiDoctor](#),
- [Typst](#).

V nadaljevanju bomo opisali, kako poročilo pripraviti s paketom [Weave.jl](#). Paket `Weave.jl` omogoča mešanje besedila in programske kode v enem dokumentu: [literarnemu programu](#), kot ga je opisal D. E. Knuth ([2]). Za pisanje besedila bomo uporabili format [Markdown](#), ki ga bomo dodali kot komentarje v kodi.

Za generiranje PDF dokumentov je potrebno namestiti [TeX/LaTeX](#). Priporočam namestitev [TinyTeX](#) ali [TeX Live](#), ki pa zasede več prostora na disku. Po [namestitvi](#) programa TinyTex moramo dodati še nekaj LaTeX paketov, ki jih potrebuje paket Weave. V terminalu izvedemo naslednji ukaz

```
$ tlmgr install microtype upquote minted
```

Poročilo pripravimo v obliki literarnega programa. Uporabili bom kar `Vaja01/doc/01uvod.jl`, ki smo jo ustvarili, da smo pripravili sliko. V datoteko dodamo besedilo v obliki komentarjev. Komentarje, ki

se začnejo z `#'`, paket Weave uporabi kot tekst v formatu [Markdown](#), medtem ko se koda in navadni komentarji v poročilu izpišejo kot koda.

```
#' # Geronova lemniskata
#' Komentarji, ki se začnejo s `#'` se prevedejo v Markdown in
#' v PDF dokumentu nastopajo kot besedilo.
using Vaja01
# Krivuljo narišemo tako, da koordinati tabeliramo za veliko število parametrov.
t = range(-5, 5, 300) # generiramo zaporedje 300 vrednosti na [-5, 5]
x = lemniskata_x.(t) # funkcijo apliciramo na elemente zaporedja
y = lemniskata_y.(t) # tako da imenu funkcije dodamo .
# Za risanje grafov uporabimo paket `Plots`.
using Plots
plot(x, y, label=false, title="Geronova lemniskata")
#' Zadnji rezultat pred besedilom se vstavi v dokument. Če je rezultat
#' graf, se slika z grafom vstavi v dokument.
```

Program 5: Vrstice, ki se začnejo z znakoma `#'`, so v formatu Markdown

Poročilo pripravimo z ukazom `Weave.weave`. Ustvarimo program `Vaja01\doc\makedocs.jl`, ki pripravi pdf dokument:

```
using Weave
# Poročilo generiramo z ukazom `Weave.weave`
Weave.weave("Vaja01/doc/01uvod.jl",
    doctype="minted2pdf", out_path="Vaja01/pdf")
```

Program 6: Program za pripravo PDF dokumenta

Program poženemo z ukazom `include("Vaja01/doc/makedocs.jl")` v Juliji. Preden poženemo program `makedocs.jl`, moramo projektnemu okolju `nummat` dodati paket `Weave.jl`.

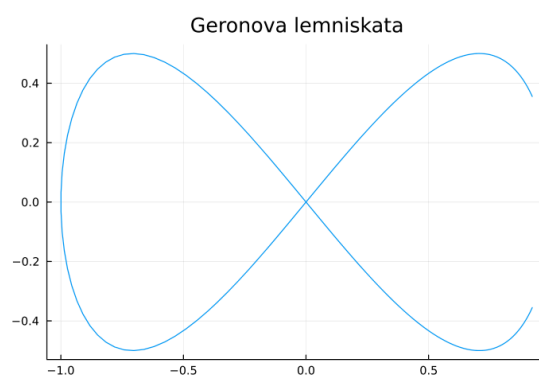
```
(nummat) pkg> add Weave
julia> include("Vaja01/doc/makedocs.jl")
```

Poročilo se shrani v datoteko `Vaja01/pdf/demo.pdf`.

## 1 Geronova lemniskata

Komentarji, ki se začnejo s '#' se prevedejo v Markdown in v PDF dokumentu nastopajo kot besedilo.

```
using Vaja01
# Krivuljo narišemo tako, da koordinati tabeliramo za veliko število parametrov.
t = range(-5, 5, 300) # generiramo zaporedje 300 vrednosti na [-5,5]
x = lemniskata_x(t) # funkcijo apliciramo na elemente zaporedja
y = lemniskata_y(t) # tako da imenu funkcije dodamo .
# Za risanje grafov uporabimo paket 'Plots'.
using Plots
plot(x, y, label=false, title="Geronova lemniskata")
```



Zadnji rezultat pred besedilom se vstavi v dokument. Če je rezultat graf, se slika z grafom vstavi v dokument.

Slika 3: Poročilo v PDF formatu

### Alternativni paketi za pripravo PDF dokumentov

Poleg paketa `Weave.jl` je na voljo še nekaj programov, ki so primerni za pripravo PDF dokumentov s programi v Juliji:

- [IJulia](#),
- [Literate.jl](#) in
- [Quadro](#).

### Povezave, ki so povezane s pisanjem dokumentacije.

- [Pisanje dokumentacije](#) v jeziku Julia.
- [Priporočila za stil](#) za programski jezik Julia.
- [Documenter.jl](#) je najbolj razširjen paket za pripravo dokumentacije v Julii.
- [Diátaxis](#) je sistematičen pristop k pisanju dokumentacije.
- [Dokumentacija kot koda](#) je ime za način dela, pri katerem z dokumentacijo ravnamo na enak način kot s kodo.

## 1.9 Zaključek

Ustvarili smo svoj prvi paket, ki vsebuje kodo, avtomatske teste in dokumentacijo. Mapa Vaja01 bi morala imeti naslednjo strukturo:

```
$ tree Vaja01
Vaja01
├── Manifest.toml
├── Project.toml
├── README.md
├── doc
│   ├── 01uvod.jl
│   └── makedocs.jl
├── src
│   └── Vaja01.jl
└── test
    ├── Manifest.toml
    ├── Project.toml
    └── runtests.jl
```

Preden nadaljujete, preverite ponovno, če vse deluje tako kot bi moralo. V Juliji aktivirajte projektno okolje:

```
julia> # pritisnite ] za vstop v paketni način
(@v1.10) pkg> activate .
```

Nato najprej poženemo teste:

```
(nummat) pkg> test Vaja01
...
Testing Vaja01 tests passed
```

Na koncu pa poženemo še demo:

```
julia> include("Vaja01/doc/01uvod.jl")
```

in pripravimo poročilo:

```
julia> include("Vaja01/doc/makedocs.jl")
```

Priporočamo, da si pred branjem naslednjih poglavij vzamete čas in poskrbite, da se zgornji ukazi izvedejo brez napak.

## 2 Računanje kvadratnega korena

Računalniški procesorji navadno implementirajo le osnovne številske operacije: seštevanje, množenje in deljenje. Za računanje drugih matematičnih funkcij mora nekdo napisati program. Večina programskih jezikov vsebuje implementacijo elementarnih funkcij v standardni knjižnici. V tej vaji si bomo ogledali, kako implementirati korensko funkcijo.

### *Implementacija elementarnih funkcij v julii*

Lokacijo metod, ki računajo določeno funkcijo lahko dobite z ukazoma `methods` in `@match`. Tako bo ukaz `methods(sqrt)` izpisal implementacije kvadratnega korena za vse podatkovne tipe, ki jih julia podpira. Ukaz `@which(sqrt(2.0))` pa razkrije metodo, ki računa koren za vrednost `2.0`, to je za števila s plavajočo vejico.

### 2.1 Naloga

Napiši funkcijo `y = koren(x)`, ki bo izračunala približek za kvadratni koren števila `x`. Poskrbi, da bo rezultat pravilen na 10 decimalnih mest in da bo časovna zahtevnost neodvisna od argumenta `x`.

#### 2.1.1 Podrobna navodila

- Zapiši enačbo, ki ji zadošča kvadratni koren.
- Uporabi [newtonovo metodo](#) in izpelji [Heronovo rekurzivno formulo](#) za računanje kvadratnega korena.
- Kako je konvergenca odvisna od vrednosti `x`?
- Nariši graf potrebnega števila korakov v odvisnosti od argumenta `x`.
- Uporabi lastnosti [zapisa s plavajočo vejico](#) in izpelji formulo za približno vrednost korena, ki uporabi eksponent (funkcija `exponent` v Juliji).
- Implementiraj funkcijo `koren(x)`, tako da je časovna zahtevnost neodvisna od argumenta `x`. Grafično preveri, da funkcija dosega zahtevano natančnost za poljubne vrednosti argumenta `x`.

### 2.2 Rešitev naloge

Najprej ustvarimo projekt za trenutno vajo in ga dodamo v delovno okolje.

```
(nummat-julia) pkg> generate Vaja02  
(nummat-julia) pkg> develop Vaja02//
```

Tako bomo imeli v delovnem okolju dostop do vseh funkcij, ki jih bomo definirali v paketu `Vaja02`.

#### 2.2.1 Izbira algoritma

Z računanjem kvadratnega korena so se ukvarjali že pred 3500 leti v Babilonu. O tem si lahko več preberete v [članku v reviji Presek](#). če želimo poiskati algoritem za računanje kvadratnega korena, se moramo najprej vprašati, kaj sploh je kvadratni koren. Kvadratni koren števila  $x$  je definiran kot pozitivna vrednost  $y$ , katere kvadrat je enak  $x$ . Število  $y$  je torej pozitivna rešitev enačbe

$$y^2 = x. \tag{2.1}$$

Da bi poiskali vrednost  $\sqrt{x}$ , moramo rešiti *nelinearno enačbo* Enačba (2.1). Za numerično reševanje nelinearnih enačb obstaja cela vrsta metod. Ena najbolj popularnih metod je [Newtonova ali tangentna](#) metoda, ki jo bomo uporabili tudi mi. Pri Newtonovi metodi rešitev enačbe

$$f(x) = 0 \quad (2.2)$$

poiščemo z rekurzivnim zaporedjem približkov

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.3)$$

Če zaporedje Enačba (2.3) konvergira, potem konvergira k rešitvi enačbe  $f(x) = 0$ .

Enačbo Enačba (2.1) najprej preoblikujemo v obliko, ki je primerna za reševanje z Newtonovo metodo. Premaknemo vse člene na eno stran, da je na drugi strani nič

$$y^2 - x = 0, \quad (2.4)$$

V formulo za Newtonovo metodo vstavimo funkcijo  $f(y) = y^2 - x$  in odvod  $f'(y) = 2y$ , da dobimo formulo

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - \frac{y_n^2 - x}{2y_n} = \frac{2y_n^2 - y_n^2 + x}{2y_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{y_n^2 + x}{y_n} \right) \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( y_n + \frac{x}{y_n} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Rekurzivno formulo Enačba (2.5) imenujemo [Haronov obrazec](#). Zgornja formula določa zaporedje, ki vedno konvergira bodisi k  $\sqrt{x}$  ali  $-\sqrt{x}$ , odvisno od izbire začetnega približka. Poleg tega, da zaporedje hitro konvergira k limiti, je program, ki računa člene izjemno preprost. Poglejmo si za primer, kako izračunamo  $\sqrt{2}$ :

```
julia> let
    x = 1.5
    for n = 1:5
        x = (x + 2 / x) / 2
        println(x)
    end
end
```

```
1.4166666666666665
1.4142156862745097
1.4142135623746899
1.414213562373095
1.414213562373095
```

Vidimo, da se približki začnejo ponavljati že po 4. koraku. To pomeni, da se zaporedje ne bo več spreminjalo in smo dosegli najboljši približek, kot ga lahko predstavimo z 64 bitnimi števili s plavajočo vejico.

Napišimo zgornji algoritem še kot funkcijo.

```

"""
y = koren_heron(x, x0, n)

Izračuna približek za koren števila `x` z `n` koraki Heronovega obrazca z začetnim
približkom `x0`.
"""
function koren_heron(x, x0, n)
    y = x0
    for i = 1:n
        y = (y + x / y) / 2
        @info "Približek na koraku $i je $y"
    end
    return y
end

```

Program 7: Funkcija, ki računa kvadratni koren s Heronovim obrazcem.

Preskusimo funkcijo na številu 3.

```

x = koren_heron(3, 1.7, 5)
println("koren 3 je $(x)!")

[ Info: Približek na koraku 1 je 1.7323529411764707
[ Info: Približek na koraku 2 je 1.7320508339159093
[ Info: Približek na koraku 3 je 1.7320508075688776
[ Info: Približek na koraku 4 je 1.7320508075688772
[ Info: Približek na koraku 5 je 1.7320508075688772
koren 3 je 1.7320508075688772!

```

#### Metoda navadne iteracije in tangentna metoda

Metoda računanja kvadratnega korena s Heronovim obrazcem je poseben primer [tangentne metode](#), ki je poseben primer [metode fiksne točke](#). Obe metodi, si bomo podrobneje ogledali, v poglavju o nelinearnih enačbah.

### 2.2.2 Določitev števila korakov

Funkcija `koren_heron(x, x0, n)` ni uporabna za splošno rabo, saj mora uporabnik poznati tako začetni približek, kot tudi število korakov, ki so potrebni, da dosežemo željeno natančnost. Da bi bila funkcija zares uporabna, bi morala sama izbrati začetni približek, kot tudi število korakov. Najprej bomo poskrbeli, da je število korakov ravno dovolj veliko, da dosežemo željeno natančnost.



### Relativna in absolutna napaka

Kako vemo, kdaj smo dosegli želeno natančnost? Navadno nekako ocenimo napako približka in jo primerjamo z želeno natančnostjo. To lahko storimo na dva načina, tako da preverimo, če je absolutna napaka manjša od **absolutne tolerance** ali pa če je relativna napaka manjša od **relativne tolerance**.

Julia za namen primerjave dveh števil ponuja funkcijo `isapprox`, ki pove ali sta dve vrednosti približno enaki. Funkcija `isapprox` omogoča relativno in absolutno primerjavo vrednosti. Primerjava števil z relativno toleranco  $\delta$  se prevede na neenačbo

$$|a - b| < \delta(\max(|a|, |b|)) \quad (2.6)$$

Ko uporabljamo relativno primerjavo, moramo biti previdni, če primerjamo vrednosti s številom 0. Če je namreč eno od števil, ki ju primerjamo, enako 0 in  $\delta < 1$ , potem neenačba Enačba (2.6) nikoli ni izpolnjena. **Število 0 nikoli ni približno enako nobenemu neničelnemu številu, če ju primerjamo z relativno toleranco.**

### Število pravih decimalnih mest

Ko govorimo o številu pravih decimalnih mest, imamo navadno v mislih število signifikantnih mest v zapisu s plavajočo vejico. V tem primeru moramo poskrbeti, da je relativna napaka dovolj majhna. Če želimo, da bo 10 signifikantnih mest pravih, mora biti relativna napaka manjša od  $5 \cdot 10^{-11}$ . Naslednja števila so vsa podana s 5 signifikantnimi mesti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{70} &\approx 0.014285, & \frac{1}{7} &\approx 0.14285 \\ \frac{10}{7} &\approx 1.4285, & \frac{10^{10}}{7} &\approx 1428500000. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pri iskanju kvadratnega korena lahko napako ocenimo tako, da primerjamo kvadrat približka z danim argumentom. Pri tem je treba raziskati, kako sta povezani relativni napaki približka za kore in njegovega kvadrata. Naj bo  $y$  točna vrednost kvadratnega korena  $\sqrt{x}$ . Če je  $\hat{y}$  približek z relativno napako  $\delta$ , potem je  $\hat{y} = y(1 + \delta)$ . Poglejmo si kako je relativna napaka  $\delta$  povezana z relativno napako kvadrata  $\hat{y}^2$ .

$$\varepsilon = \frac{\hat{y}^2 - x}{x} = \frac{(y(1 + \delta))^2 - x}{x} = \frac{x(1 + \delta)^2 - x}{x} = (1 + \delta)^2 - 1 = 2\delta + \delta^2. \quad (2.8)$$

Pri tem smo upoštevali, da je  $y^2 = x$ . Relativna napaka kvadrata je enaka  $\varepsilon = 2\delta + \delta^2$ . Ker je  $\delta^2 \ll \delta$ , dobimo dovolj natančno oceno, če  $\delta^2$  zanemarimo

$$\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta^2) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.9)$$

Od tod dobimo pogoj, kdaj je približek dovolj natančen. Če je

$$|\hat{y}^2 - x| < 2\delta \cdot x \quad (2.10)$$

potem je

$$|\hat{y} - \sqrt{x}| < \delta \cdot \sqrt{x}. \quad (2.11)$$

### Ocene za napako ni vedno lahko poiskati

V primeru računanja kvadratnega korena je bila analiza napak relativno enostavna in smo lahko dobili točno oceno za relativno napako metode. Večinoma ni tako. Točne ocene za napako ni vedno lahko ali sploh mogoče poiskati. Zato pogosto v praksi napako ocenimo na podlagi različnih indecev brez zagotovila, da je ocena točna.

Pri iterativnih metodah konstruiramo zaporedje približkov  $x_n$ , ki konvergira k iskanemu številu. Razlika med dvema zaporednima približkoma  $|x_{n+1} - x_n|$  je pogosto dovolj dobra ocena za napako iterativne metode. Toda zgolj dejstvo, da je razlika med zaporednima približkoma majhna, še ne zagotavlja, da je razlika do limite prav tako majhna. Če poznamo oceno za hitrost konvergence (oziroma odvod iteracijske funkcije), lahko izpeljemo zvezo med razliko dveh sosednjih približkov in napako metode. Vendar se v praksi pogosto zanašamo, da sta razlika sosednjih približkov in napaka sorazmerni. Problem nastane, če je konvergenca počasna.

Če uporabimo pogoj Enačba (2.11), lahko napišemo funkcijo, ki sama določi število korakov iteracije.

```
"""
    y = koren(x, y0)

Izračunaj vrednost kvadratnega korena danega števila `x` s Heronovim
obrazcem z začetnim približkom `y0`.
"""
function koren(x, y0)
    if x == 0.0
        # Vrednost 0 obravnavamo posebej, saj relativna primerjava z 0
        # problematična
        return 0.0
    end
    delta = 5e-11
    for i = 1:10
        y = (y0 + x / y0) / 2
        if abs(x - y^2) <= 2 * delta * abs(x)
            @info "Število korakov $i"
            return y
        end
        y0 = y
    end
    throw("Iteracija ne konvergira")
end
```

Program 8: Metoda koren(x, y0), ki avtomatsko določi število korakov iteracije.

### 2.2.3 Izbira začetnega približka

Kako bi učinkovito izbrali dober začetni približek? Dokazati je mogoče, da rekurzivno zaporedje Enačba (2.5) konvergira ne glede na izbran začetni približek. Problem je, da je število korakov iteracije večje, dlje kot je začetni približek oddaljen od rešitve. Če želimo, da bo časovna zahtevnost funkcije neodvisna od argumenta, moramo poskrbeti, da za poljubni argument uporabimo dovolj dober začetni približek. Poskusimo lahko za začetni približek uporabiti kar samo število  $x$ . Malce boljši približek dobimo s Taylorjevim razvojem korenske funkcije okrog števila 1

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + \dots \approx \frac{1}{2} + \frac{x}{2}. \quad (2.12)$$

Vendar opazimo, da za večja števila, potrebuje iteracija več korakov.

```
julia> tangenta(x) = 0.5 + x / 2
      y = koren(10, tangenta(10))
      y = koren(200, tangenta(200))
```

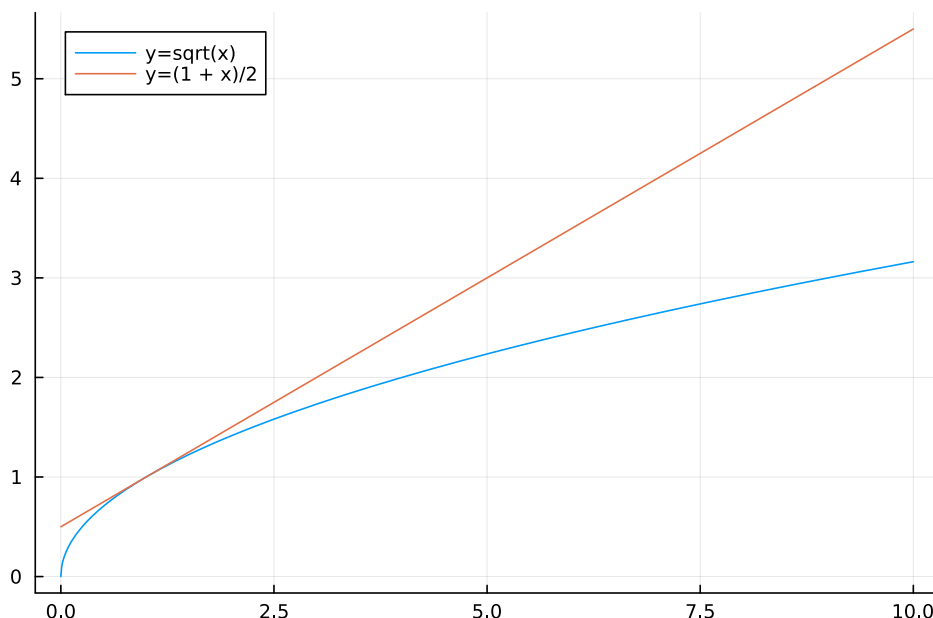
```
[ Info: Število korakov 5
```

```
[ Info: Število korakov 7
```

```
14.142135623730955
```

Začetni približek  $\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$  dobro deluje za števila blizu 1, če isto formulo za začetni približek preskusimo za večja števila, dobimo večjo relativno napako. Oziroma potrebujemo več korakov zanke, da pridemo do enake natančnosti.

```
using Plots
plot(sqrt, 0, 10, label="y=sqrt(x)")
plot!(x -> 0.5 + x / 2, 0, 10, label="y=(1 + x)/2")
```



Slika 4: Korenska funkcija in tangenta v  $x = 1$ .

Da bi dobili boljši približek, si pomagamo s tem, kako so števila predstavljena v računalniku. Realna števila predstavimo s [števili s plavajočo vejico](#). Število je zapisano v obliki

$$x = m2^e \quad (2.13)$$

kjer je  $1 \leq m < 2$  mantisa,  $e$  pa eksponent. Za 64 bitna števila s plavajočo vejico se za zapis mantise uporabi 53 bitov (52 bitov za decimalke, en bit pa za predznak), 11 bitov pa za eksponent (glej [IEEE 754 standard](#)). Koren števila  $x$  lahko potem izračunamo kot

$$\sqrt{x} = \sqrt{m} \cdot 2^{\frac{e}{2}}. \quad (2.14)$$

Koren mantise lahko približno ocenimo s tangento v  $x = 1$

$$\sqrt{m} = \frac{1}{2} + \frac{m}{2}. \quad (2.15)$$

Če eksponent delimo z 2 in upoštevamo ostanek  $e = 2d + o$ , lahko  $\sqrt{2^e}$  zapišemo kot

$$\sqrt{2^e} \approx 2^d \cdot \begin{cases} 1; & o = 0 \\ \sqrt{2}; & o = 1 \end{cases} \quad (2.16)$$

Formula za približek je enaka:

$$\sqrt{x} \approx \left( \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \right) \cdot 2^d \cdot \begin{cases} 1; & o = 0 \\ \sqrt{2}; & o = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Potenco števila  $2^n$  lahko izračunamo z binarnim premikom števila 1 v levo za  $n$  mest. Tako lahko zapišemo naslednjo funkcijo za začetni približek:

```
"""
y0 = zacetni(x)

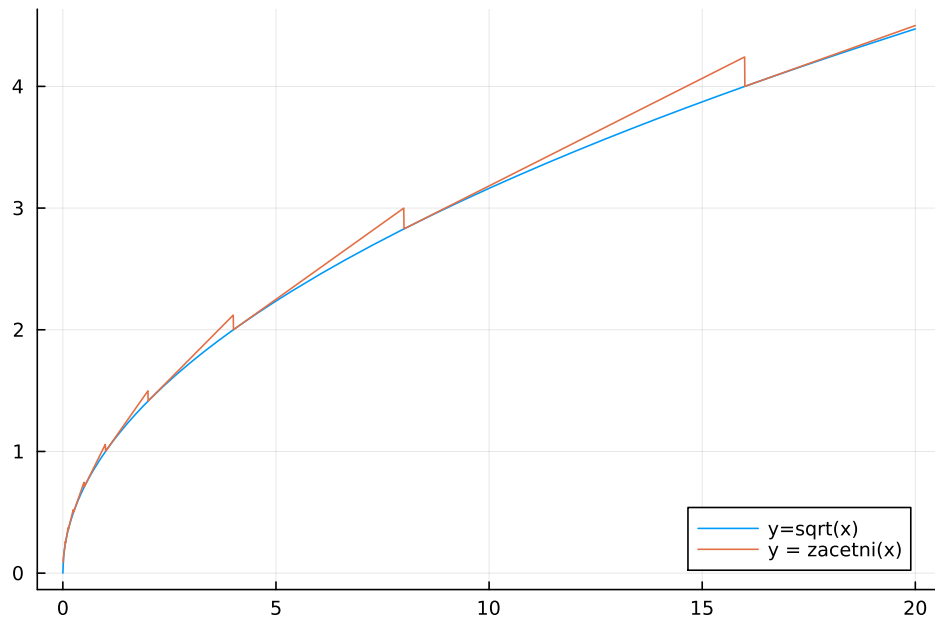
Izračunaj začetni približek za kvadratni koren števila `x` z uporabo
eksponenta za števila s plavajočo vejico.
"""
function zacetni(x)
    d, ost = divrem(abs(exponent(x)), 2)
    m = significand(x)
    s2 = (ost == 0) ? 1 : 1.4142135623730951

    if x > 1
        return (1 << d) * (0.5 + m / 2) * s2
    else
        return (0.5 + m / 2) / (1 << d) / s2
    end
end
```

Program 9: Funkcija `zacetni(x)`, ki izračuna začetni približek.

Primerjajmo izboljšano verzijo začetnega približka s pravo korensko funkcijo.

```
plot(sqrt, 0, 20, label="y=sqrt(x)")
plot!(Vaja02.zacetni, 0, 20, label="y = zacetni(x)")
```



Slika 5: Korenska funkcija in začetni približek.

#### 2.2.4 Zaključek

Ko smo enkrat izbrali dober začetni približek, tudi Newtonova iteracija hitreje konvergira, ne glede na velikost argumenta. Tako lahko definiramo metodo `koren(x)` brez dodatnega argumenta.

```
"""
    y = koren(x)

Izračunaj vrednost kvadratnega korena danega števila `x`.
"""
koren(x) = koren(x, zacetni(x))
```

Program 10: Funkcija `koren(x)`.

#### Julia omogoča več definicij iste funkcije

Julia uporablja posebno vrsto **polimorfizma** imenovano **večlična razdelitev** (angl. multiple dispatch). Večlična razdelitev omogoča, da za isto funkcijo definiramo več različic, ki se uporabijo glede na to, katere argumente podamo funkciji. Tako smo definirali dve metodi za funkcijo `koren`. Prva metoda sprejme 2 argumenta, druga pa en argument. Ko pokličemo `koren(2.0, 1.0)` se izvede različica Program 8, ko pokličemo `koren(2.0)` se izvede Program 10.

Metode, ki so definirane za neko funkcijo `fun` lahko vidimo z ukazom `methods(fun)`. Metodo, ki se uporabi za določen klic funkcije lahko poiščemo z makrojem `@which`, npr. `@which koren(2.0, 1.0)`.

Opazimo, da se število korakov ne spreminja več z naraščanjem argumenta, to pomeni, da je časovna zahtevnost funkcije `koren(x)` neodvisna od izbire argumenta.

```
julia> koren(10.0), koren(200.0), koren(2e10)

[ Info: Število korakov 3
[ Info: Število korakov 3
[ Info: Število korakov 2
(3.162277660168379, 14.142135623730965, 141421.35623853415)
```

#### *Hitro računanje obratne vrednosti kvadratnega korena*

Pri razvoju računalniških iger, ki poskušajo verno prikazati 3 dimenzionalni svet na zaslonu, se veliko uporablja normiranje vektorjev. Pri operaciji normiranja je potrebno komponente vektorja deliti s korenom vsote kvadratov komponent. Kot smo spoznali pri računanju kvadratnega korena s Heronovim obrazcem, je posebej problematično poiskati ustrezen začetni približek, ki je dovolj blizu pravi rešitvi. Tega problema so se zavedali tudi inženirji igre Quake, ki so razvili posebej zvit, skoraj magičen način za dober začetni približek. Metoda uporabi posebno vrednost `0x5f3759df`, da pride do začetnega približka, nato pa še en korak [Newtonove metode](#). Več o [računanju obratne vrednosti kvadratnega korena](#).

### **3 Tridiagonalni sistemi**

## 4 Minimalne ploskve

### 4.1 Naloga

Žično zanko s pravokotnim tlorisom potopimo v milnico, tako da se nanjo napne milna opna.

Radi bi poiskali obliko milne opne, razpete na žični zanki. Malo brskanja po fizikalnih knjigah in internetu hitro razkrije, da ploskve, ki tako nastanejo, sodijo med [minimalne ploskve](#), ki so burile domišljijo mnogim matematikom in nematematikom. Minimalne ploskve so navdihovale tudi umetnike npr. znanega arhitekta [Otto Frei](#), ki je sodeloval pri zasnovi Muenchenskega olimpijskega stadiona, kjer ima streha obliko minimalne ploskve.



Slika 6: Slika [olimpijskega stadiona v Münchnu](#).

Namen te vaje je primerjava eksplicitnih in iterativnih metod za reševanje linearnih sistemov enačb. Prav tako se bomo naučili, kako zgradimo matriko sistema in desne strani enačb za spremenljivke, ki niso podane z vektorjem ampak kot elementi matrike. V okviru te vaje opravi naslednje naloge.

- Izpelji matematični model za minimalne ploskve s pravokotnim tlorisom.
- Zapiši problem iskanja minimalne ploskve kot [robni problem](#) za [Laplaceovo enačbo](#) na pravokotniku.
- Robni problem diskretiziraj in zapiši v obliki sistema linearnih enačb.
- Reši sistem linearnih enačb z LU razcepom. Uporabi knjižnico [SparseArrays](#) za varčno hranjenje matrike sistema.
- Preveri, kako se število neničelnih elementov poveča pri LU razcepu razpršene matrike.
- Uporabi iterativne metode (Jacobijska, Gauss-Seidlova in SOR iteracija) in reši sistem enačb direktno na elementih matrike višinskih vrednosti ploskve brez eksplicitne uporabe matrike sistema.
- Nariši primer minimalne ploskve in animiraj konvergenco iterativnih metod.



## 4.2 Matematično ozadje

Ploskev lahko predstavimo s funkcijo dveh spremenljivk  $u(x, y)$ , ki predstavlja višino ploskve nad točko  $(x, y)$ . Naša naloga bo poiskati funkcijo  $u(x, y)$  na tlorisu žične mreže.

Funkcija  $u(x, y)$ , ki opisuje milno opno, zadošča matematična enačbi, znani pod imenom [Poissonova enačba](#)

$$\Delta u(x, y) = \rho(x, y) \quad (4.1)$$

Funkcija  $\rho(x, y)$  je sorazmerna tlačni razliki med zunanjo in notranjo površino milne opne. Tlačna razlika je lahko posledica višjega tlaka v notranjosti milnega mehurčka ali pa teže, v primeru opne, napete na žični zanki. V primeru minimalnih ploskev pa tlačno razliko kar zanemarimo in dobimo [Laplaceovo enačbo](#):

$$\Delta u(x, y) = 0. \quad (4.2)$$

Če predpostavimo, da je oblika na robu območja določena z obliko zanke, rešujemo [robni problem](#) za Laplaceovo enačbo. Predpostavimo, da je območje pravokotnik  $[a, b] \times [c, d]$ . Poleg Laplaceove enačbe, veljajo za vrednosti funkcije  $u(x, y)$  tudi *robni pogoji*:

$$\begin{aligned} u(x, c) &= f_s(x) \\ u(x, d) &= f_z(x) \\ u(a, y) &= f_l(y) \\ u(b, y) &= f_d(y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

kjer so  $f_s, f_z, f_l$  in  $f_d$  dane funkcije. Rešitev robnega problema je tako odvisna od območja, kot tudi od robnih pogojev.

Za numerično rešitev Laplaceove enačbe za minimalno ploskev dobimo navdih pri arhitektu Frei Otto, ki je minimalne ploskve [raziskoval tudi z elastičnimi tkaninami](#).

## 4.3 Diskretizacija in linearni sistem enačb

Problema se bomo lotili numerično, zato bomo vrednosti  $u(x, y)$  poiskali le v končno mnogo točkah: problem bomo *diskretizirali*. Za diskretizacijo je najpreprosteje uporabiti enakomerno razporejeno pravokotno mrežo točk na pravokotniku. Točke na mreži imenujemo *vozlišča*. Zaradi enostavnosti se omejimo na mreže z enakim razmikom v obeh koordinatnih smereh. Interval  $[a, b]$  razdelimo na  $n + 1$  delov, interval  $[c, d]$  pa na  $m + 1$  delov in dobimo zaporedje koordinat

$$\begin{aligned} a &= x_0, x_1, \dots, x_{n+1} = b \\ c &= y_0, y_1, \dots, y_{m+1} = d \end{aligned} \quad (4.4)$$

ki definirajo pravokotno mrežo točk  $(x_i, y_j)$ . Namesto funkcije  $u : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  tako iščemo le vrednosti

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.5)$$

Iščemo torej enačbe, ki jim zadoščajo elementi matrike  $u_{i,j}$ . Laplaceovo enačbo lahko diskretiziramo z [končnimi diferencami](#), lahko pa izpeljemo enačbe, če si ploskev predstavljamo kot elastično tkanino, ki je fina kvadratna mreža iz elastičnih nitk. Vsako vozlišče v mreži je povezano s 4 sosednjimi vozlišči. Vozlišče bo v ravnovesju, ko bo vsota vseh sil nanj enaka 0. Predpostavimo, da so vozlišča povezana z

idealnimi vzmetmi in je sila sorazmerna z razliko. Če zapišemo enačbo za komponente sile v smeri  $z$ , dobimo za točko  $(x_i, y_j, u_{ij})$  enačbo

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0. \quad (4.6)$$

Za  $u_{ij}$  imamo tako sistem linearnih enačb. Ker pa so vrednosti na robu določene z robnimi pogoji, moramo elemente  $u_{0j}$ ,  $u_{n+1,j}$ ,  $u_{i0}$  in  $u_{im+1}$  prestaviti na desno stran in jih upoštevati kot konstante.

## 4.4 Matrika sistema linearnih enačb

Sisteme linearnih enačb običajno zapišemo v matrični obliki

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (4.7)$$

kjer je  $A$  kvadratna matrika,  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{b}$  pa vektorja. Spremenljivke  $u_{i,j}$  razvrstimo po stolpcih v vektor  $\mathbf{x}$ , tako da je

$$\mathbf{x} = [u_{11}, u_{21} \dots u_{n1}, u_{12}, u_{22} \dots u_{1n} \dots u_{m-1n}, u_{mn}]^T. \quad (4.8)$$

Za  $n = m = 3$  dobimo  $9 \times 9$  matriko

$$A^{9,9} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

ki je sestavljena iz  $3 \times 3$  blokov

$$L^{3,3} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad I^{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

in desne strani

$$\mathbf{b} = -[u_{01} + u_{10}, u_{20} \dots u_{n0} + u_{n+11}, u_{02}, 0 \dots u_{n+1,2}, u_{03}, 0 \dots u_{nm+1}, u_{nm+1} + u_{n+1m}]^T. \quad (4.11)$$

### Razvrstitev po stolpih in operator vec

Eden od načinov, kako lahko elemente matrike razvrstimo v vektor, je po stolpcih. Stolpce matrike enega za drugim postavimo v vektor. Indeks v vektorju  $k$  lahko izrazimo z indeksi  $i, j$  v matriki s formulo

$$k = i + (n - 1)j. \quad (4.12)$$

Ta način preoblikovanja matrike v vektor bomo označili s posebnim operatorjem vec:

$$\text{vec} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot m}. \quad (4.13)$$

## 4.5 Izpeljava s Kronekerjevim produktom

Množenje vektorja  $x = \text{vec}(U)$  z matriko  $A$  lahko prestavimo kot množenje matrike  $U$  z matriko  $L$  z leve in desne:

$$A \text{vec}(Z) = \text{vec}(LU + ZU), \quad (4.14)$$

kjer je  $L$  Laplaceova matrika v eni dimenziji, ki ima  $-2$  na diagonali in  $1$  na spodnji in zgornji obdiagonali:

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Ker velja  $\text{vec}(AXB) = A \otimes B \cdot \text{vec}(X)$ , lahko matriko  $A$  zapišemo s [Kronekerjevim produktom](#)  $\otimes$  matrik  $L$  in  $I$ :

$$\begin{aligned} A \cdot \text{vec}(U) &= \text{vec}(LU + UL) = \text{vec}(LUI + IUL) \\ A^{N,N} &= L^{m,m} \otimes I^{n,n} + I^{m,m} \otimes L^{n,n}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

### Kroneckerjev produkt in operator vec v Juliji

Programski jezik Julia ima vgrajene funkcije `vec` in `kron` za preoblikovanje matrik v vektorje in računanje Kronekerjevega produkta. Z ukazom `reshape` pa lahko iz vektorja zgradimo matriko.

## 4.6 Primer

```
robni_problem = RobniProblemPravokotnik( LaplaceovOperator{2}, ((0,
pi), (0, pi)), [sin, y->0, sin, y->0] ) Z, x, y = resi(robni_problem) surface(x,
y, Z) savefig("milnica.png")
```

## 4.7 Napolnitev matrike ob eliminaciji

Matrika Laplaceovega operatorja ima veliko ničelnih elementov. Takim matrikam pravimo [razpršene ali redke matrike](#). Razpršenost matrike lahko izkoristimo za prihranek prostora in časa, kot smo že videli pri [tridiagonalnih matrikah](#). Vendar se pri Gaussovi eliminaciji delež ničelnih elementov matrike pogosto zmanjša. Poglejmo kako se odreže matrika za Laplaceov operator.

```
using Plots L = matrika(100,100, LaplaceovOperator(2)) spy(sparse(L),
seriescolor = :blues)
```

Če izvedemo eliminacijo, se matrika deloma napolni z neničelnimi elementi:

```
import LinearAlgebra.lu LU = lu(L) spy!(sparse(LU.L), seriescolor =
:blues) spy!(sparse(LU.U), seriescolor = :blues)
```

## 4.8 Koda

```
@index Pages = ["03_minimalne_ploskve.md"]
@autodocs Modules = [NumMat] Pages = ["Laplace2D.jl"]
```

## 4.9 Iteracijske metode

```
@meta
CurrentModule = NumMat
DocTestSetup = quote
    using NumMat
end
```

V [nalogi o minimalnih ploskvah](#) smo reševali linearen sistem enačb

$$u_{i,j-1} + u_{i-1,j} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0$$

za elemente matrike  $U = [u_{ij}]$ , ki predstavlja višinske vrednosti na minimalni ploskvi v vozliščih kvadratne mreže. Največ težav smo imeli z zapisom matrike sistema in desnih strani. Poleg tega je matrika sistema  $L$  razpršena (ima veliko ničel), ko izvedemo LU razcep ali Gaussovo eliminacijo, veliko teh ničelnih elementov postane neničelni in matrika se napolni. Pri razpršenih matrikah tako pogosto uporabimo [iterativne metode](#) za reševanje sistemov enačb, pri katerih matrika ostane razpršena in tako lahko prihranimo veliko na prostorski in časovni zahtevnosti.

!!! note „Ideja iteracijskih metod je preprosta“

Enačbe preuredimo tako, da ostane na eni strani le en element s koeficientom 1. Tako dobimo iteracijsko formulo za zaporedje približkov  $u_{ij}^{(k)}$ . Limita rekurzivnega zaporedja je ena od fiksnih točk rekurzivne enačbe, če zaporedje konvergira. Ker smo rekurzivno enačbo izpeljali iz originalnih enačb, je njena fiksna točka ravno rešitev originalnega sistema.

V primeru enačb za laplaceovo enačbo (minimalne ploskve), tako dobimo rekurzivne enačbe

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left( u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} \right),$$

ki ustrezajo [jacobijevi iteraciji](#)

!!! tip „Pogoji konvergence“

Rekli boste, to je preveč enostavno, če enačbe le pruredimo in se potem rešitelj kar sama pojavi, če le dovolj dolgo računamo. Gotovo se nekje skriva kak hakelc. Res je! Težave se pojavijo, če zaporedje približkov **ne** konvergira dovolj hitro ali pa sploh ne. Jakobijeva, Gauss-Seidlova in SOR iteracija **ne** konvergirajo vedno, zagotovo pa konvergirajo, če je matrika po vrsticah [diagonalno dominantna] ([https://sl.wikipedia.org/wiki/Diagonalno\\_dominantna\\_matrika](https://sl.wikipedia.org/wiki/Diagonalno_dominantna_matrika)).

Konvergenco jacobijeve iteracije lahko izboljšamo, če namesto vrednosti na prejšnjem približku, uporabimo nove vrednosti, ki so bile že izračunani. Če računamo element  $u_{ij}$  po leksikografskem vrstnem redu, bodo elementi  $u_{il}^{(k+1)}$  za  $l < j$  in  $u_{lj}^{(k+1)}$  za  $l < i$  že na novo izračunani, ko računamo  $u_{ij}^{(k+1)}$ . Če jih upobimo v iteracijski formuli, dobimo [gauss-seidlovo iteracijo](#)

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left( u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} \right) \quad (4.17)$$

Konvergenco še izboljšamo, če približek  $u_{ij}^{(k+1)}$ , ki ga dobimo z gauss-seidlovo metodo, malce zmešamo s približkom na prejšnjem koraku  $u_{ij}^{(k)}$

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(GS)} &= \frac{1}{4} \left( u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} \right) \\ u_{i,j}^{(k+1)} &= \omega u_{i,j}^{(GS)} + (1 - \omega) u_{i,j}^{(k)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

in dobimo [metodo SOR](#). Parameter  $\omega$  je lahko poljubno število  $(0, 2]$  Pri  $\omega = 1$  dobimo gauss-seidlovo iteracijo.

#### 4.9.1 Primer

```
using Plots
U0 = zeros(20, 20)
x = LinRange(0, pi, 20)
U0[1,:] = sin.(x)
U0[end,:] = sin.(x)
surface(x, x, U0, title="Začetni približek za iteracijo")
savefig("zacetni_priblizek.png")

L = LaplaceovOperator(2)
U = copy(U0)
animation = Animation()
for i=1:200
    U = korak_sor(L, U)
    surface(x, x, U, title="Konvergenca Gauss-Seidlove iteracije")
    frame(animation)
end
mp4(animation, "konvergenca.mp4", fps = 10)

@raw html <video width="600" height="400" controls> <source src="../konvergenca.mp4"
type="video/mp4"> <source src="konvergenca.mp4" type="video/mp4"> </video>
```

[Konvergenca Gauss-Seidlove iteracije](#)

#### 4.9.2 Konvergenca

Grafično predstavi konvergenco v odvisnosti od izbire  $\omega$ .

```
using Plots
n = 50
U = zeros(n,n)
U[:,1] = sin.(LinRange(0, pi, n))
U[:, end] = U[:, 1]
L = LaplaceovOperator(2)
omega = LinRange(0.1, 1.95, 40)
it = [iteracija(x->korak_sor(L, x, om), U; tol=1e-3)[2] for om in omega]
plot(omega, it, title = "Konvergenca SOR v odvisnosti od omega")
savefig("sor_konvergenca.svg")
```

#### 4.9.3 Metoda konjugiranih gradientov

Ker je laplaceova matrika diagonalno dominantna z  $-4$  na diagonali je negativno definitna. Zato lahko uporabimo [metodo konjugiranih gradientov](#). Algoritem konjugiranih gradientov potrebuje le množenje z laplaceovo matriko, ne pa tudi samih elementov. Zato lahko izkoristimo možnosti, ki jih ponuja programski jezik julia, da lahko za [isto funkcijo napišemo različne metode za različne tipe argumentov](#).

Preprosto napišemo novo metodo za množenje  $*$ , ki sprejme argumente tipa `LaplaceovOperator{2}` in `Matrix`. Metoda konjugiranih gradientov še hitreje konvergira kot SOR.

```
@example
using NumMat
```

```
n = 50
U = zeros(n,n)
U[:,1] = sin.(LinRange(0, pi, n))
U[:, end] = U[:, 1]
L = LaplaceovOperator{2}()
b = desne_strani(L, U)
Z, it = conjgrad(L, b, zeros(n, n))
println("Število korakov: $it")
```

## 5 Interpolacija z implicitnimi funkcijami

**Radialne bazne funkcije (RBF)** so funkcije, katerih vrednosti so odvisne od razdalje do izhodiščne točke

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \quad (5.1)$$

Uporabljajo se za interpolacijo ali aproksimacijo s funkcijo oblike

$$\sum_i w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|), \quad (5.2)$$

npr. za rekonstrukcijo 2D in 3D oblik v računalniški grafiki. Funkcija  $\varphi$  je navadno pozitivna soda funkcija zvončaste oblike in jo imenujemo funkcija oblike.

Podan je 2D ali 3D oblak točk  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  in realne vrednosti  $\{f_1, \dots, f_n\}$ . Napiši funkcijo, ki interpolira omenjene podatke s funkcijo oblike

$$F(\mathbf{x}) = \sum_i w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|). \quad (5.3)$$

To pomeni, da poiščeš vrednosti uteži  $w_i$  tako, da bodo izpolnjene enačbe

$$F(\mathbf{x}_i) = f_i. \quad (5.4)$$

### 5.1 Naloga

Napiši dve funkciji:

- `w = koeficienti_rbf(phi, x0, f)`, ki poišče vrednosti uteži, če so podane funkcija oblike `phi`, oblak točk podan z matriko `x0` in tabela vrednosti `f`.
- `z = vrednost_rbf(x, w, x0)`, ki izračuna vrednost

$$F(\mathbf{x}) = \sum_i w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \quad (5.5)$$

za argument `x`, pri čemer je `w` vektor uteži  $w_i$ , `x0` pa oblak točk, podan kot matrika.

Funkciji uporabi za interpolacijo točk v ravnini z implicitno podano krivuljo, kot v naslednjem primeru:

```
using Plots
fi = range(0, 2π, length=6)
tocke = [2(1-cos(t)).*(cos(t), sin(t)) for t in fi]
scatter(tocke)
f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + 4x*(x^2 + y^2) - 4y^2
x = y = range(-4, 4, length = 100)
contour!(x, y, f, levels = [0])
```

Točke ležijo na nivojnici funkcije  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 4x(x^2 + y^2) - 4y^2$  za nivo  $f(x, y) = 0$ .

#### 5.1.1 Danes bomo spoznali

1. kako napisati sistem enačb za praktičen primer
2. primerno izbiro metode za reševanje
3. implementacija v programskem jeziku in težave

## 5.2 Opis krivulj z implicitno interpolacijo

Iz množice točk želimo rekonstruirati krivuljo, ki gre skozi te točke. Krivulje v ravnini lahko opišemo na različne načine

1. **eksplicitno**:  $y = f(x)$
2. **parametrično**:  $(x, y) = (x(t), y(t))$
3. **implicitno** z enačbo  $F(x, y) = 0$

Tokrat se bomo posvetili implicitni predstavitvi krivulje.

## 5.3 Problem

Imamo točke v ravnini s koordinatami  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Iščemo krivuljo, ki gre skozi vse točke. Po možnosti naj bo krivulja gladka, poleg tega ni nujno, da do zaporedne točke v seznamu, tudi zaporedne točke na krivulji. Krivuljo iščemo v **implicitni** obliki, torej v obliki enačbe

$$F(x, y) = 0. \quad (5.6)$$

Iskano krivuljo bomo zapisali kot ničto nivojnico neke funkcije  $F(x, y)$ . Iščemo torej funkcijo  $F(x, y)$ , za katero velja

$$F(x_i, y_i) = 0 \quad i \leq n. \quad (5.7)$$

Ta pogoj žal ne zadošča. Dodamo moramo še nekaj točk, ki so znotraj območja omejenega s krivuljo. Označimo jih z  $(x_{n+1}, y_{n+1}), \dots, (x_m, y_m)$ , v katerih predpišemo vrednost 1

$$F(x_i, y_i) = 1 \quad i \geq n + 1. \quad (5.8)$$

## 5.4 Naloga

Napiši program, ki za dane točke poišče interpolacijsko funkcijo oblike

$$F(\mathbf{x}) = \sum_i d_i \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + P(\mathbf{x}), \quad (5.9)$$

kjer so

- $\mathbf{x} = (x, y)$
- $P(\mathbf{x})$  polinom stopnje 1 (linearna funkcija v  $x$  in  $y$ )
- $d_i$  primerno izbrane uteži.
- $\phi$  radialna bazna funkcija, ki je odvisna zgolj od razdalje do  $i$ -te točke  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ .
  - "thin plate":  $\phi(r) = |r|^2 \log(|r|)$  za 2D in  $\phi(r) = |r|^3$  za 3D
  - Gaussova:  $\phi(r) = \exp(-r^2/\sigma^2)$
  - racionalni približek za Gaussovo

$$\phi(r) = \frac{1}{1 + r^{2p}} \quad (5.10)$$

### 5.4.1 Časovna in prostorska zahtevnost

- zgraditev matrike:  $\mathcal{O}(n^2)$
- rešitev sistema:  $\mathcal{O}((n^2))$ , če uporabimo iteracijske metode



- računanje vrednosti funkcije:  $\mathcal{O}(n)$

## 5.5 RBF s kompaktnim nosilcem

Matrika sistema, če uporabimo klasične RBF iz prejšnjega razdelka je polna. Čeprav je večina členov izven diagonale zelo majhnih npr. pri gaussovi RBF. Zato so [Morse et. all][@ref\(Povezave\)](#) prišli na idejo, da uporabijo RBF s kompaktnim nosilcem. V tem primeru je matrika precej bolj redka in se tako prostorska kot tudi časovna zahtevnost algoritmov bistveno zmanjšata.

## 5.6 Povezave

- Savchenko V. V., Pasko, A. A., Okunev, O. G. and Kunii T. L. *Function representation of solids reconstructed from scattered surface points and contours*, Computer Graphics Forum 14(4) (1995),[pdf](#)
- G. Turk and J. O'Brien, *Variational Implicit Surfaces*, Technical Report GIT-GVU-99-15, Georgia Institute of Technology, 1998.[pdf](#)
- Morse, B. S., Yoo, T. S., Rheingans, P., et al. Interpolating implicit surfaces from scattered surface data using compactly supported radial basis functions, SMI 2001 International Conference on Shape Modeling and Applications, Genova Italy, (2001) [pdf](#)

## 6 Fizikalna metoda za vložitev grafov

### 6.1 Naloga

- Izpelji sistem enačb za koordinate vozlišč grafa, tako da so v ravnovesju.
- Pokaži, da je matrika sistema diagonalno dominantna in negativno definitna.
- Napiši funkcijo, ki za dani graf in koordinate fiksiranih vozlišč, poišče koordinate vseh vozlišč, tako da reši sistem enačb z metodo konjugiranih gradientov.
- V ravnini nariši [graf krožno lestev](#), tako da polovico vozlišč razporediš enakomerno po enotski krožnici.
- V ravnini generiraj naključni oblak točk v notranjosti in na robu kvadrata  $[0, 1]^2$ . Nariši graf, ki ga dobiš z [Delaunayevo triangulacijo](#). Fiksiraj točke na robu.

## **7 Invariantna porazdelitev Markovske verige**

## **8 Spektralno gručenje**

## 9 Nelinearne enačbe in geometrija

## **10 Konvergenčna območja nelinearnih enačb**

## **11 Interpolacija z zleпки**

## **12 Aproksimacija z linearnim modelom**



## 13 Aproksimacija s polinomi Čebiševa

## **14 Povprečna razdalja med dvema točkama na kvadratu**

## **15 Porazdelitvena funkcija normalne porazdelitve**

## **16 Avtomatsko odvajanje z dualnimi števili**

## 17 Aproksimacija z dinamičnim modelom

### 17.1 Reševanje začetnega problema za NDE

Navadna diferencialna enačba

$$u'(t) = f(t, u, p) \quad (17.1)$$

ima enolično rešitev za vsak začetni pogoj  $u(t_0) = u_0$ . Iskanje rešitve NDE z danim začetnim pogojem imenujemo **začetni problem**.

V naslednji vaji bomo napisali knjižnico za reševanje začetnega problema za NDE. Napisali bomo naslednje:

1. Podatkovno strukturo, ki hrani podatke o začetnem problemu.
2. Podatkovno strukturo, ki hrani podatke o rešitvi začetnega problema.
3. Različne metode za funkcijo `resi`, ki poiščejo približek za rešitev začetnega problema z različnimi metodami:
  - Eulerjevo metodo,
  - Runge-Kutta reda 2,
  - prediktor korektor z Eulerjevo in implicitno trapezno metodo in kontrolo koraka.
4. Funkcijo `vrednost`, ki za dano rešitev začetnega problema izračuna vrednost rešitve v vmesnih točkah s **Hermitovim kubičnim zlepkom**. Uporabite Hermitovo bazo kubičnih polinomov, ki zadoščajo pogojem v tabeli

	$p(0)$	$p(1)$	$p'(0)$	$p'(1)$
$h_{00}$	1	0	0	0
$h_{01}$	0	1	0	0
$h_{10}$	0	0	1	0
$h_{11}$	0	0	0	1

Tabela 1: Vrednosti baznih polinomov  $h_{ij}(t)$  in njihovih odvodov v točkah  $t = 0$  in  $t = 1$ .

5. Napisane funkcije uporabite, da poiščete rešitev začetnega problema za poševni met z zračnim uporom. Kako daleč leti telo preden pade na tla? Koliko časa leti?
6. Ocenite napako, tako da rezultat izračunajte z dvakrat manjšim korakom.

### 17.2 Hermitova interpolacija

Približne metode za začetni problem NDE izračunajo približke za rešitev zgolj v nekaterih vrednostih spremenljivke  $t$ . Vrednosti rešitve diferencialne enačbe lahko interpoliramo s **kubičnim Hermitovim zlepkom**. Hermitov zlepek je na intervalu  $(x_i, x_{i+1})$  enak kubičnemu polinomu, ki se z rešitvijo ujema v vrednostih in odvodih v krajših intervala  $x_i$  in  $x_{i+1}$ .

### 17.3 Poševni met z zračnim uporom

## **18 Aproksimacija podatkov z dinamičnim modelom**

## **19 Perioda geostacionarne orbite**

## 20 Domače naloge

### 20.1 Navodila za pripravo domačih nalog

Ta dokument vsebuje navodila za pripravo domačih nalog. Navodila so napisana za programski jezik [Julia](#). Če uporabljate drug programski jezik, navodila smiselno prilagodite.

#### 20.1.1 Kontrolni seznam

Spodaj je seznam delov, ki naj jih vsebuje domača naloga.

- koda (`src\DomacaXY.jl`)
- testi (`test\runtests.jl`)
- dokument `README.md`
- demo skripta, s katero ustvarite rezultate za poročilo
- poročilo v formatu PDF

Preden oddate domačo nalogo, uporabite naslednji *kontrolni seznam*:

- vse funkcije imajo dokumentacijo
- testi pokrivajo večino kode
- *README* vsebuje naslednje:
  - ime in priimek avtorja
  - opis naloge
  - navodila kako uporabiti kodo
  - navodila, kako pognati teste
  - navodila, kako ustvariti poročilo
- *README* ni predolg
- poročilo vsebuje naslednje:
  - ime in priimek avtorja
  - splošen(matematičen) opis naloge
  - splošen opis rešitve
  - primer uporabe (slikice prosim :-)

#### 20.1.2 Kako pisati in kako ne

V nadaljevanju je nekaj primerov dobre prakse, kako pisati kodo, teste in poročilo. Pri pisanju besedil je vedno treba imeti v mislih, komu je poročilo namenjeno.

Pisec naj uporabi empatijo do bralca in naj poskuša napisati zgodbo, ki ji bralec lahko sledi. Tudi, če je pisanje namenjeno strokovnjakom, je dobro, če je čim več besedila razumljivega tudi širši publiki. Tudi strokovnjaki radi beremo besedila, ki jih hitro razumemo. Zato je dobro začeti z okvirnim opisom z malo formulami in splošnimi izrazi. V nadaljevanju lahko besedilo stopnujemo k vedno večjim podrobnostim.

Določene podrobnosti, ki so povezane s konkretno implementacijo, brez škode izpustimo.



### 20.1.2.1 Opis rešitve naj bo okviren

Opis rešitve naj bo zgolj okviren. Izogibajte se uporabi programerskih izrazov ampak raje uporabljajte matematične. Na primer izraz **uporabimo for zanko**, lahko nadomestimo s **postopek ponavljamo**. Od bralca zahteva splošen opis manj napora in dobi širšo sliko. Če želite dodati izpeljave, jih napišite z matematičnimi formulami, ne v programskem jeziku. Koda sodi zgolj v del, kjer je opisana uporaba za konkreten primer.

#### *DOBRO! Splošen opis algoritma*

Algoritem za LU razcep smo prilagodili tridiagonalni strukturi matrike. Namesto trojne zanke smo uporabili le enojno, saj je pod pivotnim elementom neničelen le en element. Časovna zahtevnost algoritma je tako z  $\mathcal{O}(n^3)$  padla na zgolj  $\mathcal{O}(n)$ .

#### *SLABO! Podrobna razlaga kode, vrstico po vrstico*

V programu za LU razcep smo uporabili for zanko od 2 do velikosti matrike. V prvi vrstici zanke smo izračunali  $L.s[i]$ , tako da smo element  $T.s[i]$  delili z  $U.z[i-1]$ . Nato smo izračunali diagonalni element, tako da smo uporabili formulo  $U.d[i] - L.s[i]*U.d[i-1]$ . Na koncu zanke smo vrnilo matriki  $L$  in  $U$ .

### 20.1.2.2 Podrobnosti implementacije ne sodijo v poročilo

Podrobnosti implementacije so razvidne iz kode, zato jih nima smisla ponavljati v poročilu. Algoritme opišete okvirno, tako da izpustite podrobnosti, ki niso nujno potrebne za razumevanje. Podrobnosti lahko dodate, v nadaljevanju, če mislite, da so nujne za razumevanje.

#### *DOBRO! Algoritem opišemo okvirno, podrobnosti razložimo kasneje*

V matriki želimo eliminirati spodnji trikotnik. To dosežemo tako, da stolpce enega za drugim preslikamo s Householderjevimi zrcaljenji. Za vsak stolpec poiščemo vektor, preko katerega bomo zrcalili. Vektor poiščemo tako, da bo imela zrcalna slika ničle pod diagonalnim elementom.

Tu lahko z razlago zaključimo. Če želimo dodati podrobnosti, pa jih navedemo za okvirno idejo.

#### *DOBRO! Podrobnosti sledijo za okvirno razlago*

Vektor zrcaljenja dobimo kot

$$u = [s(k) + A_{k,k}, A_{k+1,k}, \dots, A_{n,k}], \quad (20.1)$$

kjer je  $s(k) = \text{sign}(A_{k,k}) * \|A(k:n, k)\|$ . Podmatriko  $A(k:n, k+1:n)$  prezrcalimo preko vektorja  $u$ , tako da podmatriki odštejemo matriko

$$2u \frac{u^T A(k:n, k+1:n)}{u^T u}. \quad (20.2)$$

Na  $k$ -tem koraku prezrcalimo le podmatriko  $k:n \times k:n$ , ostali deli matrike pa ostanejo nespremenjeni.

Takojšnje razlaganje podrobnosti, brez predhodnega opisa osnovne ideje, ni dobro. Bralec težko loči, kaj je zares pomembno in kaj je zgolj manj pomembna podrobnost.

**SLABO!** *Takoj dodamo vse podrobnosti, ne da bi razložili zakaj*

Za vsak  $k$ , poiščemo vektor  $u = [s(k) + A_{k,k}, A_{k+1,k}, \dots, A_{n,k}]$ , kjer je  $s(k) = \text{sign}(A_{k,k}) * \|[A_{k,k}, \dots, A_{n,k}]\|$ .

Nato matriko popravimo

$$A(k:n, k+1:n) = A(k:n, k+1:n) - 2 * u * \frac{u^T * A(k:n, k+1:n)}{u^T * u}. \quad (20.3)$$

Če implementacija vsebuje posebnosti, kot na primer uporaba posebne podatkovne strukture ali algoritma, jih lahko opišemo v poročilu. Vendar pazimo, da bralca ne obremenjujemo s podrobnostmi.

**DOBRO!** *Posebnosti implementacije opišemo v grobem in se ne spuščamo v podrobnosti*

Za tri-diagonalne matrike definiramo posebno podatkovno strukturo `Tridiag`, ki hrani le neničelne elemente matrike. Julia omogoča, da LU razcep tri-diagonalne matrike, implementiramo kot specializirano metodo funkcije `lu` iz paketa `LinearAlgebra`. Pri tem upoštevamo posebnosti tri-diagonalne matrike in algoritem za LU razcep prilagodimo tako, da se časovna in prostorska zahtevnost zmanjšata na  $\mathcal{O}(n)$ .

Pazimo, da v poročilu ne povzemamo direktno posameznih korakov kode.

**SLABO!** *Opisovanje, kaj počnejo posamezni koraki kode, ne sodi v poročilo.*

Za tri-diagonalne matrike definiramo podatkovni tip `Tridiag`, ki ima 3 attribute `s`, `d` in `z`. Atribut `s` vsebuje elemente pod diagonalo, ...

LU razcep implementiramo kot metodo za funkcijo `LinearAlgebra.lu`. V for zanki izračunamo naslednje:

1. element `l[i]=a[i, i-1]/a[i-1, i-1]`
2. ...

### 20.1.3 Kako pisati teste

Nekaj nasvetov, kako lahko testiramo kodo.

- Na roke izračunajte rešitev za preprost primer in jo primerjajte z rezultati funkcije.
- Ustvarite testne podatke, za katere je znana rešitev. Na primer za testiranje kode, ki reši sistem  $Ax=b$ , izberete  $A$  in  $x$  in izračunate desne strani  $b=A*x$ .
- Preverite lastnost rešitve. Za enačbe  $f(x)=0$ , lahko rešitev, ki jo izračuna program preprosto vstavite nazaj v enačbo in preverite, če je enačba izpolnjena.
- Red metode lahko preverite tako, da naredite simulacijo in primerjate red

metode z redom programa, ki ga eksperimentalno določite.

- Če je le mogoče, v testih ne uporabljamo rezultatov, ki jih proizvede koda sama. Ko je koda dovolj časa v uporabi, lahko rezultate kode same uporabimo za [regresijske teste](#).

#### 20.1.3.1 Pokritost kode s testi

Pri pisanju testov je pomembno, da testi izvedejo vse veje v kodi. Delež kode, ki se izvede med testi, imenujemo [pokritost kode](#) (angl. [Code Coverage](#)). V juliji lahko pokritost kode dobimo, če dodamo argument `coverage=true` metodi `Pkg.test`:

```
julia> import Pkg; Pkg.test("DomacaXY"; coverage=true)
```

Zgornji ukaz bo za vsako datoteko iz mape `src` ustvaril ustrezno datoteko s končnico `.cov`, v kateri je shranjena informacija o tem, kateri deli kode so bili uporabljeni med izvajanjem testov.

Za poročanje o pokritosti kode lahko uporabite paket [Coverage.jl](#). Povzetek o pokritosti kode s testi lahko pripravite z naslednjim programom:

```
using Coverage
cov = process_folder("DomacaXY")
pokrite_vrstice, vse_vrstice = get_summary(cov)
delez = pokrite_vrstice / vse_vrstice
println("Pokritost kode s testi: $(round(delez*100))%.")
```

#### 20.1.4 Priprava zahteve za združitev na Github

Za lažjo komunikacijo predlagam, da rešitev domače naloge postavite v svojo vejo in ustvarite zahtevo za združitev (*Pull request* na Githubu oziroma *Merge request* na Gitlabu). V nadaljevanju bomo opisali, kako to storiti, če repozitorij z domačimi nalogami gostite na Githubu. Postopek za Gitlab in druge platforme je podoben.

Preden začnete z delom, ustvarite vejo na svoji delovni kopiji repozitorija in jo potisnete na Github ali Gitlab. Ime veje naj bo domača-X, se pravi domaca-1 za 1. domačo nalogo in tako naprej. To storite z ukazom

```
$ git checkout -b domaca-1
$ git push -u origin domaca-1
```

Stikalo -u pove git-u, da naj z domačo vejo sledi veji na Githubu/Gitlabu.

Med delom sproti dodajate vnose z `git commit` in jih prenesete na splet z ukazom `git push`. Ko je domača naloga končana, na Githubu ustvarite zahtevo za združitev (angl. *Pull request*).

- Kliknete na zavihek *Pull requests* in nato na zelen gumb *Create pull request*.
- Na desni strani izberete vejo *domaca-1* in kliknete na gumb *Create draft pull request*.
- Ko je koda pripravljena na pregled, kliknite na gumb *Ready for review*.
- V komentarju za novo ustvarjeno zahtevo povabite asistenta k pregledu. To storite tako, da v komentar dodate uporabniško ime asistenta (npr. @mojZlobniAsistent).

@mojZlobniAsistent Prosim za pregled.

#### *Pri domačih nalogah se posvetujte s kolegi*

Nič ni narobe, če za pomoč pri domači nalogi prosite kolega. Seveda morate kodo in poročilo napisati samo, lahko pa kolega prosite za pregled ali za pomoč, če vam kaj ne dela.

Domačo nalogo tudi napišete v skupini, vendar morate v tem primeru rešiti toliko različnih nalog, kot je študentov v skupini.

## 20.2 1. domača naloga

Izberite eno izmed spodnjih nalog.

### Naloge

20.2.1 SOR iteracija za razpršene matrike .....	61
20.2.2 Metoda konjugiranih gradientov za razpršene matrike .....	62
20.2.3 Metoda konjugiranih gradientov s pred-pogojevanjem .....	62

20.2.4 QR razcep zgornje hessenbergove matrike .....	62
20.2.5 QR razcep simetrične tridiagonalne matrike .....	63
20.2.6 Inverzna potenčna metoda za zgornje hessenbergovo matriko .....	63
20.2.7 Inverzna potenčna metoda za tridiagonalno matriko .....	64
20.2.8 Naravni zlepek .....	65
20.2.9 QR iteracija z enojnim premikom .....	65

### 20.2.1 SOR iteracija za razpršene matrike

Naj bo  $A$   $n \times n$  diagonalno dominantna razpršena matrika (velika večina elementov je ničelnih  $a_{ij} = 0$ ).

Definirajte nov podatkovni tip `RazprsenaNatrika`, ki matriko zaradi prostorskih zahtev hrani v dveh matrikah  $V$  in  $I$ , kjer sta  $V$  in  $I$  matriki  $n \times m$ , tako da velja

$$V(i, j) = A(i, I(i, j)). \quad (20.4)$$

V matriki  $V$  se torej nahajajo neničelni elementi matrike  $A$ . Vsaka vrstica matrike  $V$  vsebuje neničelne elemente iz iste vrstice v  $A$ . V matriki  $I$  pa so shranjeni indeksi stolpcev teh neničelnih elementov.

Za podatkovni tip `RazprsenaNatrika` definirajte metode za naslednje funkcije:

- indeksiranje: `Base.getindex`, `Base.setindex!`, `Base.firstindex` in `Base.lastindex`
- množenje z desne `Base.*` z vektorjem

Več informacij o [tipih](#) in [vmesnikih](#).

Napišite funkcijo `x, it = sor(A, b, x0, omega, tol=1e-10)`, ki reši razpršeni sistem  $Ax = b$  z SOR iteracijo. Pri tem je `x0` začetni približek, `tol` pogoj za ustavitev iteracije in `omega` parameter pri SOR iteraciji. Iteracija naj se ustavi, ko je

$$|Ax^{(k)} - b|_{\infty} < \delta, \quad (20.5)$$

kjer je  $\delta$  podan s argumentom `tol`.

Metodo uporabite za vložitev grafa v ravnino ali prostor [s fizikalno metodo](#). Če so  $(x_i, y_i, z_i)$  koordinate vozlišč grafa v prostoru, potem vsaka koordinata posebej zadošča enačbam

$$\begin{aligned} -st(i)x_i + \sum_{j \in N(i)} x_j &= 0, \\ -st(i)y_i + \sum_{j \in N(i)} y_j &= 0, \\ -st(i)z_i + \sum_{j \in N(i)} z_j &= 0, \end{aligned} \quad (20.6)$$

kjer je  $st(i)$  stopnja  $i$ -tega vozlišča,  $N(i)$  pa množica indeksov sosednjih vozlišč. Če nekatera vozlišča fiksiramo, bodo ostala zavzela ravnovesno lego med fiksiranimi vozlišči. Napišite funkcijo `ravnovesni_sistem`, ki za dani graf in koordinate vozlišč, ki so fiksirane, vrne matriko sistema in desne strani enačb za posamezne koordinate za vozlišča, ki niso fiksirana.

Za primer lahko upodobite [graf krožno lestev]([https://en.wikipedia.org/wiki/Ladder\\_graph#Circular\\_ladder\\_graph](https://en.wikipedia.org/wiki/Ladder_graph#Circular_ladder_graph)), kjer polovica vozlišč enakomerno razporedite na enotski krožnici.

Za risanje grafa lahko uporabite [GraphRecipes.jl](#).

Za primere, ki jih boste opisali, poiščite optimalni  $\omega$ , pri katerem SOR najhitreje konvergira in predstavite odvisnost hitrosti konvergence od izbire  $\omega$ .

### 20.2.2 Metoda konjugiranih gradientov za razpršene matrike

Definirajte nov podatkovni tip `RazprsenaNatrika`, kot je opisano v prejšnji nalogi.

Napišite funkcijo `[x, i]=conj_grad(A, b)`, ki reši sistem

$$Ax = b, \quad (20.7)$$

z metodo konjugiranih gradientov za `A` tipa `RazprsenaNatrika`.

Metodo uporabite na primeru vložitve grafa v ravnino ali prostor s fizikalno metodo, kot je opisano v prejšnji nalogi.

### 20.2.3 Metoda konjugiranih gradientov s pred-pogojevanjem

Za pohitritev konvergence iterativnih metod, se velikokrat izvede t. i. pred-pogojevanje (angl. preconditioning). Za simetrične pozitivno definitne matrike je to pogosto nepopolni razcep Choleskega, pri katerem sledimo algoritmu za razcep Choleskega, le da ničelne elemente pustimo pri miru.

Naj bo  $A$   $n \times n$  pozitivno definitna razpršena matrika (velika večina elementov je ničelnih  $a_{ij} = 0$ ). Matriko zaradi prostorskih zahtev hranimo kot *sparse* matriko. Poglejte si dokumentacijo za [razpršene matrike](#).

Napišite funkcijo `L = nep_chol(A)`, ki izračuna nepopolni razcep Choleskega za matriko tipa `AbstractSparseMatrix`. Napišite še funkcijo `x, i = conj_grad(A, b, L)`, ki reši linearni sistem

$$Ax = b \quad (20.8)$$

s pred-pogojeno metodo konjugiranih gradientov za matriko  $M = L^T L$  kot pred-pogojevalcem. Pri tem pazite, da matrike  $M$  ne izračunate, ampak uporabite razcep  $M = L^T L$ . Za različne primere preverite, ali se izboljša hitrost konvergence.

### 20.2.4 QR razcep zgornje hessenbergove matrike

Naj bo  $H$   $n \times n$  zgornje hessenbergova matrika (velja  $a_{ij} = 0$  za  $j < j - 2i$ ). Definirajte podatkovni tip `ZgornjiHessenberg` za zgornje hessenbergovo matriko.

Napišite funkcijo `Q, R = qr(H)`, ki izvede QR razcep matrike  $H$  tipa `ZgornjiHessenberg` z Givensovimi rotacijami. Matrika  $R$  naj bo zgornje trikotna matrika enakih dimenzij kot  $H$ , v  $Q$  pa naj bo matrika tipa `Givens`.

Podatkovni tip `Givens` definirajte sami tako, da hrani le zaporedje rotacij, ki se med razcepom izvedejo in indekse vrstic, na katere te rotacije delujejo. Posamezno rotacijo predstavite s parom

$$[\cos(\alpha); \sin(\alpha)], \quad (20.9)$$

kjer je  $\alpha$  kot rotacije na posameznem koraku. Za podatkovni tip definirajte še množenje `Base.*` z vektorji in matrikami.

Uporabite QR razcep za QR iteracijo zgornje hesenbergove matrike. Napišite funkcijo `lastne_vrednosti, lastni_vektorji = eigen(H)`, ki poišče lastne vrednosti in lastne vektorje zgornje hessenbergove matrike.

Preverite časovno zahtevnost vaših funkcij in ju primerjajte z metodami `qr` in `eigen` za navadne matrike.

## 20.2.5 QR razcep simetrične tridiagonalne matrike

Naj bo  $A$   $n \times n$  simetrična tridiagonalna matrika (velja  $a_{ij} = 0$  za  $|i - j| > 1$ ).

Definirajte podatkovni tip `SimetricnaTridiagonalna` za simetrično tridiagonalno matriko, ki hrani glavno in stransko diagonalo matrike. Za tip `SimetricnaTridiagonalna` definirajte metode za naslednje funkcije:

- indeksiranje: `Base.getindex`, `Base.setindex!`, `Base.firstindex` in `Base.lastindex`
- množenje z desne `Base.*` z vektorjem ali matriko

Časovna zahtevnost omenjenih funkcij naj bo linearna. Več informacij o [tipih](#) in Napišite funkcijo `Q, R = qr(T)`, ki izvede QR razcep matrike `T` tipa `Tridiagonalna` z Givensovimi rotacijami. Matrika `R` naj bo zgornje trikotna tridiagonalna matrika tipa `ZgornjeTridiagonalna`, v `Q` pa naj bo matrika tipa `Givens`. [vmesnikih](#).

Podatkovna tipa `ZgornjeTridiagonalna` in `Givens` definirajte sami (glejte tudi nalogo Poglavje 20.2.4). Poleg tega implementirajte množenje `Base.*` matrik tipa `Givens` in `ZgornjeTridiagonalna`.

Uporabite QR razcep za QR iteracijo simetrične tridiagonalne matrike. Napišite funkcijo `lastne_vrednosti, lastni_vektorji = eigen(T)`, ki poišče lastne vrednosti in lastne vektorje simetrične tridiagonalne matrike.

Preverite časovno zahtevnost vaših funkcij in ju primerjajte z metodami `qr` in `eigen` za navadne matrike.

## 20.2.6 Inverzna potenčna metoda za zgornje hessenbergovo matriko

Lastne vektorje matrike  $A$  lahko računamo z **inverzno potenčno metodo**. Naj bo  $A_\lambda = A - \lambda I$ . Če je  $\lambda$  približek za lastno vrednost, potem zaporedje vektorjev

$$x^{(n+1)} = \frac{A_\lambda^{-1} x^{(n)}}{|A_\lambda^{-1} x^{(n)}|}, \quad (20.10)$$

konvergira k lastnemu vektorju za lastno vrednost, ki je po absolutni vrednosti najbližje vrednosti  $\lambda$ .

Da bi zmanjšali število operacij na eni iteraciji, lahko poljubno matriko  $A$  prevedemo v zgornje hessenbergovo obliko (velja  $a_{ij} = 0$  za  $j < i - 2$ ). S hausholderjevimi zrcaljenji lahko poiščemo zgornje hessenbergovo matriko  $H$ , ki je podobna matriki  $A$ :

$$H = Q^T A Q. \quad (20.11)$$

Če je  $v$  lastni vektor matrike  $H$ , je  $Qv$  lastni vektor matrike  $A$ , lastne vrednosti matrik  $H$  in  $A$  pa so enake.

Napišite funkcijo `H, Q = hessenberg(A)`, ki s Hausholderjevimi zrcaljenji poišče zgornje hessenbergovo matriko  $H$  tipa `ZgornjiHessenberg`, ki je podobna matriki  $A$ .

Tip `ZgornjiHessenberg` definirajte sami, kot je opisano v nalogi o QR razcepu zgornje hessenbergove matrike. Poleg tega implementirajte metodo `L, U = lu(A)` za matrike tipa `ZgornjiHessenberg`, ki bo pri razcepu upoštevala lastnosti zgornje hessenbergovih matrik. Matrika  $L$  naj ne bo polna, ampak tipa `SpodnjaTridiagonalna`. Tip `SpodnjaTridiagonalna` definirajte sami, tako da bo hranil le neničelne elemente in za ta tip matrike definirajte operator `Base.\`, tako da bo upošteval strukturo matrik  $L$ .

Napišite funkcijo `lambda, vektor = inv_lastni(A, l)`, ki najprej naredi hessenbergov razcep in nato izračuna lastni vektor in točno lastno matrike  $A$ , kjer je  $l$  približek za lastno vrednost. Inverza matrike

A nikar ne računajte, ampak raje uporabite LU razcep in na vsakem koraku rešite sistem  $L(Ux^{n+1}) = x^n$ .

Metodo preskusite za izračun ničel polinoma. Polinomu

$$x^n + a_{\{n-1\}}x^{\{n-2\}} + \dots a_1x + a_0 \quad (20.12)$$

lahko priredimo matriko

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (20.13)$$

katere lastne vrednosti se ujemajo z ničlami polinoma.

### 20.2.7 Inverzna potenčna metoda za tridiagonalno matriko

Lastne vektorje matrike  $A$  lahko računamo z **inveržno potenčno metodo**. Naj bo  $A_\lambda = A - \lambda I$ . Če je  $\lambda$  približek za lastno vrednost, potem zaporedje vektorjev

$$x^{\{(n+1)\}} = \frac{A_\lambda^{-1}x^{(n)}}{|A_\lambda^{-1}x^{(n)}|}, \quad (20.14)$$

konvergira k lastnemu vektorju za lastno vrednost, ki je po absolutni vrednosti najbližje vrednosti  $\lambda$ .

Naj bo  $A$  **simetrična matrika**. Da bi zmanjšali število operacij na eni iteraciji, lahko poljubno simetrično matriko  $A$  prevedemo v tridiagonalno obliko. S hausholderjevimi zrcaljenji lahko poiščemo tridiagonalno matriko  $T$ , ki je podobna matriki  $A$ :

$$T = Q^T A Q. \quad (20.15)$$

Če je  $v$  lastni vektor matrike  $T$ , je  $Qv$  lastni vektor matrike  $A$ , lastne vrednosti matrik  $T$  in  $A$  pa so enake.

Napišite funkcijo `T, Q = tridiag(A)`, ki s Hausholderjevimi zrcaljenji poišče tridiagonalno matriko  $H$  tipa `Tridiagonalna`, ki je podobna matriki  $A$ .

Tip `Tridiagonalna` definirajte sami, kot je opisano v nalogi o QR razcepu tridiagonalne matrike. Poleg tega implementirajte metodo `L, U = lu(A)` za matrike tipa `Tridiagonalna`, ki bo pri razcepu upoštevala lastnosti tridiagonalnih matrik. Matrike  $L$  in  $U$  naj ne bodo polne matrike. Matrika  $L$  naj bo tipa `SpodnjaTridiagonalna`, matrika  $U$  pa tipa `ZgornjaTridiagonalna`. Tipa `SpodnjaTridiagonalna` in `ZgornjaTridiagonalna` definirajte sami, tako da bosta hranila le neničelne elemente. Za oba tipa definirajte operator `Base.\`, tako da bo upošteval strukturo matrik.

Napišite funkcijo `lambda, vektor = inv_lastni(A, l)`, ki najprej naredi hessenbergov razcep in nato izračuna lastni vektor in točno lastno matrike  $A$ , kjer je  $l$  približek za lastno vrednost. Inverza matrike  $A$  nikar ne računajte, ampak raje uporabite LU razcep in na vsakem koraku rešite sistem  $L(Ux^{n+1}) = x^n$ .

Metodo preskusite na laplaceovi matriki, ki ima vse elemente 0 razen  $l_{ii} = -2, l_{i+1,j} = l_{i,j+1} = 1$ . Poiščite nekaj lastnih vektorjev za najmanjše lastne vrednosti in jih vizualizirajte z ukazom `plot`.

Lastni vektorji laplaceove matrike so približki za rešitev robnega problema za diferencialno enačbo



$$y''(x) = \lambda^2 y(x), \quad (20.16)$$

katere rešitve sta funkciji  $\sin(\lambda x)$  in  $\cos(\lambda x)$ .

## 20.2.8 Naravni zlepek

Danih je  $n$  interpolacijskih točk  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . **Naravni interpolacijski kubični zlepek**  $S$  je funkcija, ki izpolnjuje naslednje pogoje:

1.  $S(x_i) = f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2.  $S$  je polinom stopnje 3 ali manj na vsakem podintervalu  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .
3.  $S$  je dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na interpolacijskem intervalu  $[x_1, x_n]$
4.  $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$ .

Zlepek  $S$  določimo tako, da postavimo

$$S(x) = S_{i(x)} = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (20.17)$$

nato pa izpolnimo zahtevane pogoje<sup>1</sup>.

Napišite funkcijo `Z = interpoliraj(x, y)`, ki izračuna koeficient polinoma  $S_i$  in vrne element tipa Zlepek.

Tip Zlepek definirajte sami in naj vsebuje koeficiente polinoma in interpolacijske točke. Za tip Zlepek napišite dve funkciji

- `y = vrednost(Z, x)`, ki vrne vrednost zlepka v dani točki  $x$ .
- `plot(Z)`, ki nariše graf zlepka, tako da različne odseke izmenično nariše z rdečo in modro barvo (uporabi paket `Plots`).

## 20.2.9 QR iteracija z enojnim premikom

Naj bo  $A$  simetrična matrika. Napišite funkcijo, ki poišče lastne vektorje in vrednosti simetrične matrike z naslednjim algoritmom

- Izvedi Hessenbergov razcep matrike  $A = U^T T U$  (uporabite lahko vgrajeno funkcijo `LinearAlgebra.hessenberg`)
- Za tridiagonalno matriko  $T$  ponavljaj, dokler ni  $h_{n-1,n}$  dovolj majhen:
  - za  $T - \mu I$  za  $\mu = h_{n,n}$  izvedi QR razcep
  - nov približek je enak  $RQ + \mu I$
- Postopek ponovi za podmatriko brez zadnjega stolpca in vrstice

Napiši metodo `lastne_vrednosti`, `lastni_vektorji = eigen(A, EnojniPremik(), vektorji = false)`, ki vrne

- vektor lastnih vrednosti simetrične matrike  $A$ , če je vrednost `vektorji` enaka `false`.
- vektor lastnih vrednosti `lambda` in matriko s pripadajočimi lastnimi vektorji  $V$ , če je `vektorji` enaka `true`

Pazi na časovno in prostorsko zahtevnost algoritma. QR razcep tridiagonalne matrike izvedi z Givensovimi rotacijami in hrani le elemente, ki so nujno potrebni (glej nalogo [QR razcep simetrične tridiagonalne matrike](#)).

<sup>1</sup>pomagajte si z: Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Mühlig: **Matematični priročnik**, Tehniška založba Slovenije, 1997, str. 754 ali pa J. Petrišič: **Interpolacija**, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1999, str. 47

Funkcijo preiskusi na Laplaceovi matriki grafa podobnosti (glej [vajo o spektralnem gručenju](#)).

## 20.3 2. domača naloga

Tokratna domača naloga je sestavljena iz dveh delov. V prvem delu morate implementirati program za računanje vrednosti dane funkcije  $f(x)$ . V drugem delu pa izračunati eno samo številko. Obe nalogi rešite na **10 decimalk** (z relativno natančnostjo  $10^{-10}$ ) Uporabite lahko le osnovne operacije, vgrajene osnovne matematične funkcije  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , ..., osnovne operacije z matrikami in razcepe matrik. Vse ostale algoritme morate implementirati sami.

Namen te naloge ni, da na internetu poiščete optimalen algoritem in ga implementirate, ampak da uporabite znanje, ki smo ga pridobili pri tem predmetu, čeprav na koncu rešitev morda ne bo optimalna. Uporabite lahko interpolacijo ali aproksimacijo s polinomi, integracijske formule, Taylorjevo vrsto, zamenjave spremenljivk, itd. Kljub temu pazite na **časovno in prostorsko zahtevnost**, saj bo od tega odvisna tudi ocena.

Izberite **eno** izmed nalog. Domačo nalogo lahko delate skupaj s kolegi, vendar morate v tem primeru rešiti toliko različnih nalog, kot je študentov v skupini.

Če uporabljate drug programski jezik, ravno tako kodi dodajte osnovno dokumentacijo, teste in demo.

## Naloge

20.3.1 Naloge s funkcijami .....	66
20.3.2 Naloge s števili .....	67
20.3.3 Lažje naloge (ocena največ 9) .....	69

### 20.3.1 Naloge s funkcijami

Implementacija funkcije naj zadošča naslednjim zahtevam:

- relativna napaka je manjša od  $5 \cdot 10^{-11}$  za vse argumente in
- časovna zahtevnost je omejena s konstanto, ki je neodvisna od argumenta.

## Naloge

20.3.1.1 Porazdelitvena funkcija normalne slučajne spremenljivke .....	66
20.3.1.2 Fresnelov integral (težja) .....	67
20.3.1.3 Funkcija kvantilov za $N(0, 1)$ .....	67
20.3.1.4 Integralski sinus (težja) .....	67
20.3.1.5 Besselova funkcija (težja) .....	67

### 20.3.1.1 Porazdelitvena funkcija normalne slučajne spremenljivke

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna vrednosti porazdelitvene funkcije za standardno normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko  $X \sim N(0, 1)$ .

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (20.18)$$

### 20.3.1.2 Fresnelov integral (težja)

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna vrednosti Fresnelovega kosinusa

$$C(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^x \cos(t^2) dt. \quad (20.19)$$

**Namig:** Uporabite pomožni funkciji

$$f(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty e^{-2xt} \cos(t^2) dt \quad (20.20)$$

$$g(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty e^{-2xt} \sin(t^2) dt \quad (20.21)$$

kot je opisano v [priročniku Abramowitz in Stegun](#).

### 20.3.1.3 Funkcija kvantilov za $N(0, 1)$

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna funkcijo kvantilov za normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko. Funkcija kvantilov je inverzna funkcija  $\Phi^{-1}(x)$  porazdelitvene funkcije:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (20.22)$$

Poskrbite, da bo relativna napaka za majhne vrednosti (negativne vrednosti z veliko absolutno vrednostjo)  $x$  dovolj majhna.

### 20.3.1.4 Integralski sinus (težja)

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna integralski sinus

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt. \quad (20.23)$$

Uporabite pomožne funkcije, kot je opisano v [priročniku Abramowitz in Stegun](#).

### 20.3.1.5 Besselova funkcija (težja)

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna Besselovo funkcijo  $J_0$ :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt. \quad (20.24)$$

## 20.3.2 Naloge s števili

### Naloge

20.3.2.1 Sila težnosti .....	68
20.3.2.2 Ploščina hipotrohoide .....	68

20.3.2.3 Povprečna razdalja (težja) .....	68
20.3.2.4 Ploščina Bézierove krivulje .....	68

### 20.3.2.1 Sila težnosti

Izračunajte velikost sile težnosti med dvema vzporedno postavljenima enotskima homogenima kockama na razdalji 1. Predpostavite, da so vse fizikalne konstante, ki nastopajo v problemu, enake 1. Sila med dvema telesoma  $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^3$  je enaka

$$\mathbf{F} = \int_{T_1} \int_{T_2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (20.25)$$

### 20.3.2.2 Ploščina hipotrohoide

Izračunajte ploščino območja, ki ga omejuje hipotrochoida podana parametrično z enačbama:

$$x(t) = (a + b) \cos(t) + b \cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) \quad (20.26)$$

$$y(t) = (a + b) \sin(t) + b \sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \quad (20.27)$$

za parametra  $a = 1$  in  $b = -\frac{11}{7}$ .

**Namig:** Uporabite formulo za [ploščino krivočrtnega trikotnika](#) pod krivuljo:

$$P = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt \quad (20.28)$$

### 20.3.2.3 Povprečna razdalja (težja)

Izračunajte povprečno razdaljo med dvema točkama znotraj telesa  $T$ , ki je enako razliki dveh kock:

$$T = ([-1, 1])^3 - ([0, 1])^3. \quad (20.29)$$

Integral na produktu razlike dveh množic  $(A - B) \times (A - B)$  lahko izrazimo kot vsoto integralov:

$$\begin{aligned} \int_{A-B} \int_{A-B} f(x, y) dx dy &= \int_A \int_A f(x, y) dx dy \\ &\quad - 2 \int_A \int_B f(x, y) dx dy + \int_B \int_B f(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (20.30)$$

### 20.3.2.4 Ploščina Bézierove krivulje

Izračunajte ploščino zanke, ki jo omejuje Bézierova krivulja dana s kontrolnim poligonom:

$$(0, 0), (1, 1), (2, 3), (1, 4), (0, 4), (-1, 3), (0, 1), (1, 0). \quad (20.31)$$

**Namig:** Uporabite lahko formulo za [ploščino krivočrtnega trikotnika](#) pod krivuljo:

$$P = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt. \quad (20.32)$$

### 20.3.3 Lažje naloge (ocena največ 9)

Naloge so namenjen tistim, ki jih je strah eksperimentiranja ali pa za to preprosto nimajo interesa ali časa. Rešiti morate eno od obeh nalog:

#### 20.3.3.1 Gradientni spust z iskanjem po premici

#### 20.3.3.2 Ineterpolacija z baricentrično formulo

Napišite program, ki za dano funkcijo  $f$  na danem intervalu  $[a, b]$  izračuna polinomski interpolant, v Čebiševih točkah. Vrednosti naj računa z [baricentrično Lagrangevo interpolacijo](#), po formuli

$$l(x) = \begin{cases} \frac{\sum \frac{f(x_j)\lambda_j}{x-x_j}}{\sum \frac{\lambda_j}{x-x_j}} & x \neq x_j \\ f(x_j) & \text{sicer} \end{cases} \quad (20.33)$$

Čebiševe točke so podane na intervalu  $[-1, 1]$  s formulo

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, 1 \dots n-1, \quad (20.34)$$

vrednosti uteži  $\lambda_k$  pa so enake

$$\lambda_k = (-1)^k \begin{cases} 1 & 0 < i < n \\ \frac{1}{2} & i = 0 \\ n & \text{sicer.} \end{cases} \quad (20.35)$$

Za interpolacijo na splošnem intervalu  $[a, b]$  si pomagaj z linearno preslikavo na interval  $[-1, 1]$ . Program uporabi za tri različne funkcije  $e^{-x^2}$  na  $[-1, 1]$ ,  $\frac{\sin x}{x}$  na  $[0, 10]$  in  $|x^2 - 2x|$  na  $[1, 3]$ . Za vsako funkcijo določi stopnjo polinoma, da napaka ne bo presegla  $10^{-6}$ .

#### 20.3.3.3 Gauss-Legendrove kvadrature

Izpelji [Gauss-Legendreovo integracijsko pravilo](#) na dveh točkah

$$\int_0^h f(x)dx = Af(x_1) + Bf(x_2) + R_f \quad (20.36)$$

vklučno s formulo za napako  $R_f$ . Izpelji sestavljeno pravilo za  $\int_a^b f(x)dx$  in napiši program, ki to pravilo uporabi za približno računanje integrala. Ocen, koliko izračunov funkcijske vrednosti je potrebnih, za izračun približka za

$$\int_0^5 \frac{\sin x}{x} dx \quad (20.37)$$

na 10 decimalk natančno. *Namig:* Najprej izpelji pravilo na intervalu  $[-1, 1]$  in ga nato prevedi na poljuben interval  $[x_i, x_{i+1}]$ . Za oceno napake uporabite izračun z dvojnim številom korakov.

### 20.4 3. domača naloga

### 20.4.1 Navodila

Zahtevana števila izračunajte na **10 decimalk** (z relativno natančnostjo  $10^{-10}$ ) Uporabite lahko le osnovne operacije, vgrajene osnovne matematične funkcije  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , ..., osnovne operacije z matrikami in razcepe matrik. Vse ostale algoritme morate implementirati sami.

Namen te naloge ni, da na internetu poiščete optimalen algoritem in ga implementirate, ampak da uporabite znanje, ki smo ga pridobili pri tem predmetu, čeprav na koncu rešitev morda ne bo optimalna. Kljub temu pazite na **časovno in prostorsko zahtevnost**, saj bo od tega odvisna tudi ocena.

Izberite **eno** izmed nalog. Domačo nalogo lahko delate skupaj s kolegi, vendar morate v tem primeru rešiti toliko različnih nalog, kot je študentov v skupini.

Če uporabljate drug programski jezik, ravno tako kodi dodajte osnovno dokumentacijo in teste.

### 20.4.2 Težje naloge

#### 20.4.2.1 Ničle Airyjeve funkcije

Airyjeva funkcija je dana kot rešitev začetnega problema

$$Ai''(x) - x Ai(x) = 0, \quad Ai(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})} Ai'(0) = -\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{1}{3})}. \quad (20.38)$$

Poiščite čim več ničel funkcije  $Ai$  na 10 decimalnih mest natančno. Ni dovoljeno uporabiti vgrajene funkcije za reševanje diferencialnih enačb. Lahko pa uporabite Airyjevo funkcijo `airyai` iz paketa `SpecialFunctions.jl`, da preverite ali ste res dobili pravo ničlo.

##### 20.4.2.1.1 Namig

Za računanje vrednosti  $y(x)$  lahko uporabite Magnusovo metodo reda 4 za reševanje enačb oblike

$$y'(x) = A(x)y, \quad (20.39)$$

pri kateri nov približek  $Y_{k+1}$  dobimo takole:

$$\begin{aligned} A_1 &= A\left(x_k + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \\ A_2 &= A\left(x_k + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \\ \sigma_{k+1} &= \frac{h}{2}(A_1 + A_2) - \frac{\sqrt{3}}{12}h^2[A_1, A_2] \\ Y_{k+1} &= \exp(\sigma_{k+1})Y_k. \end{aligned} \quad (20.40)$$

Izraz  $[A, B]$  je komutator dveh matrik in ga izračunamo kot  $[A, B] = AB - BA$ . Eksponentno funkcijo na matriki ( $\exp(\sigma_{k+1})$ ) pa v programskem jeziku julia dobite z ukazom `exp`.

##### 20.4.2.2 Dolžina implicitno podane krivulje

Poiščite približek za dolžino krivulje, ki je dana implicitno z enačbama

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= x^4 + y^2/2 + z^2 = 12 \\ F_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 4z^2 = 8. \end{aligned} \quad (20.41)$$

Krivuljo lahko poiščete kot rešitev diferencialne enačbe

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla F_1 \times \nabla F_2. \quad (20.42)$$

### 20.4.2.3 Perioda limitnega cikla

Poiščite periodo limitnega cikla za diferencialno enačbo

$$x''(t) - 4(1 - x^2)x'(t) + x = 0 \quad (20.43)$$

na 10 decimalk natančno.

### 20.4.2.4 Obhod lune

Sondo Appolo pošljite iz Zemljine orbite na tir z vrnitvijo brez potiska (free-return trajectory), ki obkroži Luno in se vrne nazaj v Zemljino orbito. Rešujte sistem diferencialnih enačb, ki ga dobimo v koordinatnem sistemu, v katerem Zemlja in Luna mirujeta (omejen krožni problem treh teles). Naloge ni potrebno reševati na 10 decimalk.

#### 20.4.2.4.1 Omejen krožni problem treh teles

Označimo z  $M$  maso Zemlje in z  $m$  maso Lune. Ker je masa sonde zanemarljiva, Zemlja in Luna krožita okrog skupnega masnega središča. Enačbe gibanja zapišemo v vrtečem koordinatnem sistemu, kjer masi  $M$  in  $m$  mirujeta. Označimo

$$\mu = \frac{m}{M+m} \quad \text{ter} \quad \mu^- = 1 - \mu = \frac{M}{M+m}. \quad (20.44)$$

V brezdimenzijskih koordinatah (dolžinska enota je kar razdalja med masama  $M$  in  $m$ ) postavimo maso  $M$  v točko  $(-\mu, 0, 0)$ , maso  $m$  pa v točko  $(\mu^-, 0, 0)$ . Označimo z  $R$  in  $r$  oddaljenost satelita s položajem  $(x, y, z)$  od mas  $M$  in  $m$ , tj.

$$\begin{aligned} R &= R(x, y, z) = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \\ r &= r(x, y, z) = \sqrt{(x - \mu^-)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (20.45)$$

Enačbe gibanja sonde so potem:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x + 2\dot{y} - \frac{\mu}{R^3}(x + \mu) - \frac{\mu}{r^3}(x - \mu^-), \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} - \frac{\mu}{R^3}y - \frac{\mu}{r^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{R^3}z - \frac{\mu}{r^3}z. \end{aligned} \quad (20.46)$$

### 20.4.3 Lažja naloga (ocena največ 9)

Naloga je namenjena tistim, ki jih je strah eksperimentiranja ali pa za to preprosto nimajo interesa ali časa.

#### 20.4.3.1 Matematično nihalo

Kotni odmik  $\theta(t)$  (v radianih) pri nedušenem nihanju nitnega nihala opišemo z diferencialno enačbo

$$\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) + \theta''(t) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta'_0, \quad (20.47)$$

kjer je  $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$  težni pospešek in  $l$  dolžina nihala. Napišite funkcijo nihalo, ki računa odmik nihala ob določenem času. Enačbo drugega reda prevedite na sistem prvega reda in računajte z metodo Runge-Kutta četrtega reda:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h f(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 &= h f(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 &= h f(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \end{aligned} \quad (20.48)$$

Klic funkcije naj bo oblike `odmik=nihalo(l,t,theta0,dtheta0,n)`

- kjer je odmik enak odmiku nihala ob času  $t$ ,
- dolžina nihala je  $l$ ,
- začetni odmik (odmik ob času 0) je  $\theta_0$
- in začetna kotna hitrost ( $\theta'(0)$ ) je  $d\theta_0$ ,
- interval  $[0, t]$  razdelimo na  $n$  podintervalov enake dolžine.

Primerjajte rešitev z nihanjem harmoničnega nihala. Za razliko od harmoničnega nihala (sinusno nihanje), je pri matematičnem nihalu nihajni čas odvisen od začetnih pogojev (energije). Narišite graf, ki predstavlja, kako se nihajni čas spreminja z energijo nihala.



## Literatura

- [1] B. Orel, *Osnove numerične matematike*. 2020.
- [2] D. E. Knuth, „Literate programming“, let. 27. 1984.