

NUMERIČNA MATEMATIKA V PROGRAMSKEM JEZIKU JULIA

Martin Vuk

2024

Predgovor

Knjige o numerični matematiki se pogosto posvečajo predvsem matematičnim vprašanjem. Pričujoča knjiga poskuša nasloviti bolj praktične vidike numerične matematike, zato so primeri, če je le mogoče, povezani s problemom praktične narave s področja fizike, matematičnega modeliranja ali računalništva. Za podrobnejši matematični opis uporabljenih metod in izpeljav bralcu priporočam učbenik *Osnove numerične matematike* Bojana Orla [1].

Pričujoča knjiga je prvenstveno namenjena študentom Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani kot gradivo za izvedbo laboratorijskih vaj pri predmetu Numerična matematika. Kljub temu je primerna za vse, ki bi želeli bolje spoznati algoritme numerične matematike, uporabo numeričnih metod ali se naučiti uporabljati programski jezik *Julia*. Pri sem se od bralca pričakuje osnovno znanje programiranja v kakšnem drugem programskem jeziku.

V knjigi so naloge razdeljene na vaje in na domače naloge. Vaje so zasnovane za samostojno delo z računalnikom, pri čemer lahko bralec naloge rešuje z različno mero samostojnosti. Vsaka vaja se začne z opisom naloge in jasnimi navodili, kaj je njen cilj ozziroma končni rezultat. Sledijo podrobnejša navodila, kako se naloge lotiti, na koncu pa je rešitev z razlago posameznih korakov. Rešitev vključuje matematične izpeljave, programsko kodo in rezultate, ki jih dobimo, če programsko kodo uporabimo.

Domače naloge rešuje bralec povsem samostojno, zato so naloge brez rešitev. Odločitev, da rešitve niso vključene, je namerna, saj bralec lahko verodostojno preveri svoje znanje le, če rešuje tudi naloge, za katere nima dostopa do rešitev.

Vsekakor bralcu svetujem, da vso kodo napiše in preskusi sam. Še bolje je, če kodo razširi, jo spreminja in se z njo igra. Koda, ki je navedena v tej knjigi, je najosnovnejša različica kode, ki reši določen problem in še ustreza minimalnim standardom pisanja kvalitetne kode. Pogosto je izpuščeno preverjanje ali implementacija robnih primerov, včasih tudi obravnava pričakovanih napak. Da je bralcu lažje razumeti, kaj koda počne, sem dal prednost berljivosti pred kompletnostjo.

Na tem mestu bi se rad zahvalil Bojanu Orlu, Emilu Žagarju, Petru Kinku in Aljažu Zalarju, s katerimi sem sodeloval ali še sodelujem pri numeričnih predmetih na FRI. Veliko idej za naloge, ki so v tej knjigi, prihaja prav od njih. Prav tako bi se zahvalil članom Laboratorija za matematične metode v računalništvu in informatiki, še posebej Neži Mramor-Kosta in Damirju Franetiču, ki so tako ali drugače prispevali k nastanku te knjige. Moja draga žena Mojca Vilfan je opravila delo urednika, za kar sem ji izjemno hvaležen. Na koncu bi se rad zahvalil študentom, ki so obiskovali numerične predmete. Čeprav sem jih jaz učil, so bili oni tisti, ki so me naučili marsikaj novega.

avtor Martin Vuk

Kazalo

1 Uvod v programski jezik Julia	6
1.1 Namestitev in prvi koraki	6
1.2 Avtomatsko posodabljanje kode	12
1.3 Priprava korenske mape	13
1.4 Vodenje različic s programom Git	14
1.5 Priprava paketa za vajo	14
1.6 Koda	15
1.7 Testi	16
1.8 Dokumentacija	18
1.9 Zaključek	22
2 Računanje kvadratnega korena	23
2.1 Naloga	23
2.2 Izbira algoritma	23
2.3 Določitev števila korakov	25
2.4 Izbira začetnega približka	27
2.5 Zaključek	30
3 Tridiagonalni sistemi	32
3.1 Naloga	32
3.2 Tridiagonalne matrike	32
3.3 Reševanje tridiagonalnega sistema	34
3.4 Slučajni sprehod	34
3.5 Pričakovano število korakov	36
3.6 Rešitve	40
4 Minimalne ploskve	44
4.1 Naloga	44
4.2 Matematično ozadje	45
4.3 Diskretizacija in linearni sistem enačb	45
4.4 Matrika sistema linearnih enačb	47
4.5 Izpeljava sistema s Kroneckerjevim produktom	48
4.6 Numerična rešitev z LU razcepom	49
4.7 Napolnitev matrike ob eliminaciji	51
4.8 Iteracijske metode	52
4.9 Rešitve	55
5 Interpolacija z implicitnimi funkcijami	59
5.1 Naloga	59
5.2 Interpolacija z radialnimi baznimi funkcijami	59
5.3 Program	61
5.4 Rešitve	63
6 Fizikalna metoda za vložitev grafov	65
6.1 Naloga	65
6.2 Ravnovesje sil	65
6.3 Rešitev v Juliji	67
6.4 Krožna lestev	67
6.5 Dvodimenzionalna Mreža	69
6.6 Rešitve	70
7 Invariantna porazdelitev Markovske verige	75

7.1 Naloga	75
7.2 Invariantna porazdelitev Markovske verige	75
7.3 Potenčna metoda	75
7.4 Razvrščanje spletnih strani	76
7.5 Skakanje konja po šahovnici	78
7.6 Rešitve	80
8 Spektralno razvrščanje v gruče	82
8.1 Naloga	82
8.2 Podobnostni graf in Laplaceova matrika	82
8.3 Algoritem	83
8.4 Primer	83
8.5 Inverzna potenčna metoda	85
8.6 Inverzna iteracija s QR razcepom	86
8.7 Premik	87
8.8 Rešitve	88
8.9 Testi	90
9 Konvergenčna območja nelinearnih enačb	91
9.1 Naloga	91
9.2 Newtonova metoda za sisteme enačb	91
9.3 Konvergenčno območje	92
9.4 Rešitve	93
10 Nelinearne enačbe v geometriji	96
10.1 Naloga	96
10.2 Presečišča geometrijskih objektov	96
10.3 Minimalna razdalja med dvema krivuljama	99
10.4 Rešitve	105
11 Aproksimacija z linearnim modelom	107
11.1 Naloga	107
11.2 Linearni model	107
11.3 Opis sprememb koncentracije CO ₂	108
11.4 Normalni sistem	109
11.5 QR razcep	111
11.6 Kaj pa CO ₂ ?	112
12 Interpolacija z zlepki	114
12.1 Naloga	114
12.2 Hermitov kubični zlepak	114
12.3 Ocena za napako	117
12.4 Newtonov interpolacijski polinom	119
12.5 Rungejev pojav	120
12.6 Rešitve	120
12.7 Testi	123
13 Porazdelitvena funkcija normalne porazdelitve	125
13.1 Naloga	125
13.2 Izračun na $[-c, \infty)$	125
13.3 Izračun na $(-\infty, -c]$	125
13.4 Aproksimacija s polinomi Čebiševa	125
13.5 Čebiševa aproksimacija funkcije Φ za majhne x	127
13.6 Izračun funkcije $\Phi(x)$ na $[c, \infty)$	128
14 Povprečna razdalja med dvema točkama na kvadratu	129

14.1 Naloga	129
14.2 Metoda Monte Carlo	129
15 Avtomatsko odvajanje z dualnimi števili	130
15.1 Naloga	130
15.2 Dualna števila	130
15.3 Računajne gradientov	132
15.4 Rešitve	132
16 Reševanje začetnega problema za NDE	135
16.1 Reševanje enačbe z eno spremenljivko	135
16.2 Ogrodje za reševanje NDE	139
16.3 Hermitova interpolacija	140
16.4 Poševni met z zračnim uporom	141
16.5 Rešitve	141
17 Aproksimacija podatkov z dinamičnim modelom	146
17.1 Naloga	146
18 Domače naloge	147
18.1 Navodila za pripravo domačih nalog	147
18.2 1. domača naloga	151
18.3 2. domača naloga	157
18.4 3. domača naloga	161
Literatura	164

1 Uvod v programski jezik Julia

V knjigi bomo uporabili programski jezik **Julia**. Zavoljo učinkovitega izvajanja, uporabe [dinamičnih tipov](#) in [funkcij, specializiranih glede na signaturo](#), ter dobre podpore za interaktivno uporabo, je Julia zelo primerna za programiranje numeričnih metod in ilustracijo njihove uporabe. V nadaljevanju sledijo kratka navodila, kako začeti z Julio.

Cilji tega poglavja so:

- naučiti se uporabljati Julio v interaktivni ukazni zanki,
- pripraviti okolje za delo v programskem jeziku Julia,
- ustvariti prvi paket in
- ustvariti prvo poročilo v formatu PDF.

Tekom te vaje bomo pripravili svoj prvi paket v Juliji, ki bo vseboval parametrično enačbo [Geronove lemniskate](#), in napisali teste, ki bodo preverili pravilnost funkcij v paketu. Nato bomo napisali skripto, ki uporabi funkcije iz našega paketa in nariše sliko Geronove lemniskate. Na koncu bomo pripravili lično poročilo v formatu PDF.

1.1 Namestitev in prvi koraki

Namestite programski jezik Julia, tako da sledite [navodilom](#), in v terminalu poženite ukaz `julia`. Ukaz odpre interaktivno ukazno zanko (angl. *Read Eval Print Loop* ali s kratico REPL) in v terminalu se pojavi ukazni pozivnik `julia>`. Za ukaznim pozivnikom lahko napišemo posamezne ukaze, ki jih nato Julia prevede, izvede in izpiše rezultate. Poskusimo najprej s preprostimi izrazi:

```
julia> 1 + 1
2

julia> sin(pi)
0.0

julia> x = 1; 2x + x^2
3

julia> # vse, kar je za znakom #, je komentar, ki se ne izvede
```

1.1.1 Funkcije

Funkcije, ki so v programskem jeziku Julia osnovne enote kode, definiramo na več načinov. Kratke enovrstične funkcije definiramo z izrazom `ime(x) =`

```
julia> f(x) = x^2 + sin(x)
f (generic function with 1 method)

julia> f(pi/2)
3.4674011002723395
```

Funkcije z več argumenti definiramo podobno:

```
julia> g(x, y) = x + y^2
g (generic function with 1 method)

julia> g(1, 2)
5
```

Za funkcije, ki zahtevajo več kode, uporabimo ključno besedo `function`:

```
julia> function h(x, y)
    z = x + y
    return z^2
end
h (generic function with 1 method)

julia> h(3, 4)
49
```

Funkcije lahko uporabljammo kot vsako drugo spremenljivko. Lahko jih podamo kot argumente drugim funkcijam in jih združujemo v podatkovne strukture, kot so seznamy, vektorji ali matrike. Funkcije lahko definiramo tudi kot anonimne funkcije. To so funkcije, ki jih vpeljemo brez imena in jih kasneje ne moremo poklicati po imenu.

```
julia> (x, y) -> sin(x) + y
#1 (generic function with 1 method)
```

Anonimne funkcije uporabljammo predvsem kot argumente v drugih funkcijah. Funkcija `map(f, v)` na primer zahteva za prvi argument funkcijo `f`, ki jo nato aplicira na vsak element vektorja `v`:

```
julia> map(x -> x^2, [1, 2, 3])
3-element Vector{Int64}:
 1
 4
 9
```

Vsaka funkcija v programskejem jeziku Julia ima lahko več različnih definicij, glede na kombinacijo tipov argumentov, ki jih podamo. Posamezno definicijo funkcije imenujemo `metoda`. Ob klicu funkcije Julia izbere najprimernejšo metodo.

```
julia> k(x::Number) = x^2
k (generic function with 1 method)

julia> k(x::Vector) = x[1]^2 - x[2]^2
k (generic function with 2 methods)

julia> k(2)
4

julia> k([1, 2, 3])
-3
```

1.1.2 Vektorji in matrike

Vektorje vnesemo z oglatimi oklepaji []:

```
julia> v = [1, 2, 3]
3-element Vector{Int64}:
 1
 2
 3

julia> v[1] # vrne prvo komponento vektorja
1

julia> v[2:end] # vrne od 2. do zadnje komponente vektorja
2-element Vector{Int64}:
 2
 3

julia> sin.(v) # funkcijo uporabimo na komponentah vektorja, če imenu dodamo .
3-element Vector{Float64}:
 0.8414709848078965
 0.9092974268256817
 0.1411200080598672
```

Matrike vnesemo tako, da elemente v vrstici ločimo s presledki, vrstice pa s podpičji:

```
julia> M = [1 2 3; 4 5 6]
2×3 Matrix{Int64}:
 1  2  3
 4  5  6
```

Za razpone indeksov uporabimo :, s ključno besedo end označimo zadnji indeks. Julia avtomačno določi razpon indeksov v matriki:

```
julia> M[1, :] # prva vrstica
3-element Vector{Int64}:
 1
 2
 3

julia> M[2:end, 1:end-1]
1×2 Matrix{Int64}:
 4  5
```

Osnovne operacije delujejo tudi na vektorjih in matrikah. Pri tem moramo vedeti, da gre za matrične operacije. Tako je na primer * operacija množenja matrik ali matrike z vektorjem in ne morda množenja po komponentah.

```
julia> [1 2; 3 4] * [6, 5] # množenje matrike z vektorjem
2-element Vector{Int64}:
 16
 38
```

Če želimo operacije izvajati po komponentah, moramo pred operator dodati piko, na kar nas Julia opozori z napako:

```
julia> [1, 2] + 1 # seštevanje vektorja in števila ni definirano
ERROR: MethodError: no method matching +(::Vector{Int64}, ::Int64)
For element-wise addition, use broadcasting with dot syntax: array .+ scalar

julia> [1, 2] .+ 1
2-element Vector{Int64}:
 2
 3
```

Posebej uporaben je operator \, ki poišče rešitev sistema linearnih enačb. Izraz $A \backslash b$ vrne rešitev matričnega sistema $Ax = b$:

```
julia> A = [1 2; 3 4]; # podpičje prepreči izpis rezultata

julia> x = A \ [5, 6] # reši enačbo A * x = [5, 6]
2-element Vector{Float64}:
 -3.9999999999999987
 4.499999999999999
```

Izračun se izvede v aritmetiki s plavajočo vejico, zato pride do zaokrožitvenih napak in rezultat ni povsem točen. Naredimo še preizkus:

```
julia> A * x
2-element Vector{Float64}:
 5.0
 6.0
```

Operator \ deluje za veliko različnih primerov. Med drugim ga lahko uporabimo tudi za iskanje rešitve pre-določenega sistema po metodi najmanjših kvadratov:

```
julia> [1 2; 3 1; 2 2] \ [1, 2, 3] # rešitev za predoločen sistem
2-element Vector{Float64}:
 0.5999999999999999
 0.5111111111111114
```

1.1.3 Podatkovni tipi

Podatkovne **type** definiramo z ukazom **struct**. Ustvarimo tip, ki predstavlja točko z dvema koordinatama:

```
julia> struct Tocka
    x
    y
end
```

Ko definiramo nov tip, se avtomatično ustvari tudi funkcija z istim imenom, s katero lahko ustvarimo vrednost novo definiranega tipa. Vrednost tipa **Tocka** ustvarimo s funkcijo **Tocka(x, y)**:

```

julia> T = Tocka(1, 2) # ustvari vrednost tipa Tocka
Tocka(1, 2)

julia> T.x
1

julia> T.y
2

```

Julia omogoča različne definicije iste funkcije za različne podatkovne tipe. Za določitev tipa argumenta funkcije uporabimo operator `::`. Za primer definirajmo funkcijo, ki izračuna razdaljo med dvema točkama:

```

julia> razdalja(T1::Tocka, T2::Tocka) = sqrt((T2.x - T1.x)^2 + (T2.y - T1.y)^2)
razdalja (generic function with 1 method)

julia> razdalja(Tocka(1, 2), Tocka(2, 1))
1.4142135623730951

```

1.1.4 Moduli

Moduli pomagajo organizirati funkcije v enote in omogočajo uporabo istega imena za različne funkcije in tipe. Module definiramo z `module ImeModula ... end`:

```

julia> module KrNeki
    kaj(x) = x + sin(x)
    čaj(x) = cos(x) - x
    export kaj
end
Main.KrNeki

```

Če želimo funkcije, ki so definirane v modulu `ImeModula`, uporabiti izven modula, moramo modul naložiti z `using ImeModula`. Funkcije, ki so izvozene z ukazom `export ime_funkcije` lahko kličemo kar po imenu, ostalim funkcijam pa moramo dodati ime modula kot predpono. Modulom, ki niso del paketa in so definirani lokalno, moramo dodati piko, ko jih naložimo:

```

julia> using .KrNeki

julia> kaj(1)
1.8414709848078965

julia> KrNeki.čaj(1)
-0.45969769413186023

```

Modul lahko naložimo tudi z ukazom `import ImeModula`. V tem primeru moramo vsem funkcijam iz modula dodati ime modula in piko kot predpono.

1.1.5 Paketi

Nabor funkcij, ki so na voljo v Juliji, je omejen, zato pogosto uporabimo knjižnice, ki vsebujejo dodatne funkcije. Knjižnica funkcij v Juliji se imenuje `paket`. Funkcije v paketu so združene v modul, ki ima isto ime kot paket.

Julia ima vgrajen upravljalnik s paketi, ki omogoča dostop do paketov, ki so del Julije, kot tudi tistih, ki jih prispevajo uporabniki. Poglejmo si primer, kako uporabiti ukaz `norm`, ki izračuna različne norme vektorjev in matrik. Ukaz `norm` ni del osnovnega nabora funkcij, ampak je del modula `LinearAlgebra`, ki je že vključen v program Julia. Če želimo uporabiti `norm`, moramo najprej uvoziti funkcije iz modula `LinearAlgebra` z ukazom `using LinearAlgebra`:

```
julia> norm([1, 2, 3]
ERROR: UndefVarError: `norm` not defined

julia> using LinearAlgebra
julia> norm([1, 2, 3])
3.7416573867739413
```

Če želimo uporabiti pakete, ki niso del osnovnega jezika Julia, jih moramo prenesti z interneta. Za to uporabimo modul `Pkg`. Paketom je namenjen poseben paketni način vnosa v ukazni zanki. Do paketnega načina pridemo, če za pozivnik vnesemo znak `[`.

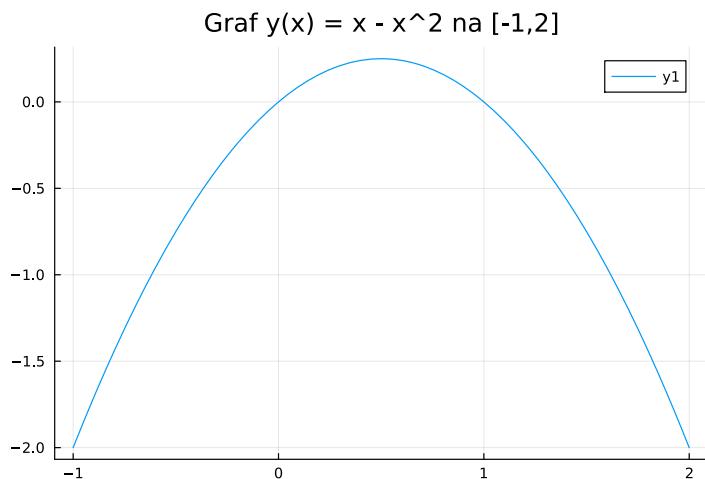
Različni načini ukazne zanke

Julia ukazna zanka (REPL) pozna več načinov, ki so namenjeni različnim opravilom.

- Osnovni način s pozivom `julia>` je namenjen vnosu kode v Juliji.
- Paketni način s pozivom `pkg>` je namenjen upravljanju s paketi. V paketni način pridemo, če vnesemo znak `[`.
- Način za pomoč s pozivom `help?>` je namenjen pomoči. V način za pomoč pridemo z znakom `?`.
- Lupinski način s pozivom `shell>` je namenjen izvajanju ukazov v sistemski lupini. V lupinski način vstopimo z znakom `;`.
- Iz posebnih načinov pridemo nazaj v osnovni način s pritiskom na vračalko(`✉`).

Za primer si oglejmo, kako namestiti knjižnico za ustvarjanje slik in grafov `Plots.jl`. Najprej aktiviramo paketni način z vnosom znaka `[` za pozivnikom. Nato paket dodamo z ukazom `add`.

```
(@v1.10) pkg> add Plots
...
julia> using Plots # naložimo modul s funkcijami iz paketa
julia> plot(x -> x - x^2, -1, 2, title="Graf y(x) = x - x^2 na [-1,2]" )
```



1.1.6 Datoteke s kodo

Kodo lahko zapišemo tudi v datoteke. Vnašanje ukazov v interaktivni zanki je uporabno za preproste ukaze, na primer namesto kalkulatorja, za resnejše delo pa je bolje kodo shraniti v datoteke. Praviloma imajo datoteke s kodo v jeziku Julia končnico `.jl`.

Napišimo preprost program. Ukaze, ki smo jih vnesli doslej, shranimo v datoteko z imenom `0luvod.jl`. Ukaze iz datoteke poženemo z ukazom `include` v ukazni zanki:

```
julia> include("0luvod.jl")
```

ali pa v lupini operacijskega sistema:

```
$ julia 0luvod.jl
```

Urejevalniki in programska okolja za Julio

Za lažje delo z datotekami s kodo potrebujemo dober urejevalnik besedila, ki je namenjen programiranju. Če še nimate priljubljenega urejevalnika, priporočam [VS Code](#) in [razširitev za Julio](#).

Če odprete datoteko s kodo v urejevalniku VS Code, lahko s kombinacijo tipk `Ctrl + Enter` posamezno vrstico kode pošljemo v ukazno zanko za Julio, da se izvede. Na ta način združimo prednosti interaktivnega dela in zapisovanja kode v datoteke `.jl`.

Priporočam, da večino kode napišete v datoteke. V nadaljevanju bomo spoznali, kako organizirati datoteke v projekte in pakete tako, da lahko kodo uporabimo na več mestih.

1.2 Avtomatsko posodabljanje kode

Ko uporabimo kodo iz datoteke v interaktivni zanki, je treba ob vsaki spremembi datoteko ponovno naložiti z ukazom `include`. Paket [Revise.jl](#) poskrbi za to, da se nalaganje zgodi avtomatično vsakič, ko se datoteke spremenijo. Zato najprej namestimo paket Revise in poskrbimo, da se zažene ob vsakem zagonu interaktivne zanke.

Naslednji ukazi namestijo paket Revise, ustvarijo mapo `$HOME/.julia/config` in datoteko `startup.jl`, ki naloži paket Revise in se izvede ob vsakem zagonu programa julia:

```
julia> # pritisnemo ], da pridemo v paketni način
(@v1.10) pkg> add Revise
julia> startup = """
try
    using Revise
catch e
    @warn "Error initializing Revise" exception=(e, catch_backtrace())
end
"""
...
julia> path = homedir() * "./.julia/config"
julia> mkdir(path)
julia> write(path * "/startup.jl", startup) # zapišemo startup.jl
```

Okolje za delo z Julio je pripravljeno.

1.3 Priprava korenske mape

Programe, ki jih bomo napisali v nadaljevanju, bomo hranili v mapi `nummat`. Ustvarimo jo z ukazom:

```
$ mkdir nummat
```

Korenska mapa bo služila kot [projektno okolje](#), v katerem bodo zabeleženi vsi paketi, ki jih bomo potrebovali.

```
$ cd nummat
$ julia

julia> # s pritiskom na ] vključimo paketni način
(@v1.10) pkg> activate . # pripravimo projektno okolje v korenski mapi
(nummat) pkg>
```

Zgornji ukaz ustvari datoteko `Project.toml` in pripravi novo projektno okolje v mapi `nummat`.

Projektno okolje v Juliji

Projektno okolje je mapa, ki vsebuje datoteko `Project.toml` z informacijami o paketih in zahtevanih različicah paketov. Projektno okolje aktiviramo z ukazom `Pkg.activate("pot/do/mape/z/okoljem")` oziroma v paketnem načinu z:

```
(@v1.10) pkg> activate pot/do/mape/z/okoljem
```

Uporaba projektnega okolja delno rešuje problem [ponovljivosti](#), ki ga najlepše ilustriramo z izjavo „Na mojem računalniku pa koda dela!“. Projektno okolje namreč vsebuje tudi datoteko `Manifest.toml`, ki hrani različice in kontrolne vsote za pakete iz `Project.toml` in vse njihove odvisnosti. Ta informacija omogoča, da Julia naloži vedno iste različice vseh odvisnosti, kot v času, ko je bila datoteka `Manifest.toml` zadnjič posodobljena.

Projektna okolja v Juliji so podobna [virtualnim okoljem v Pythonu](#).

Projektnemu okolju dodamo pakete, ki jih bomo rabili v nadaljevanju. Zaenkrat je to le paket `Plots.jl`, ki ga uporabljam za risanje grafov:

```
(nummat) pkg> add Plots
```

Datoteka `Project.toml` vsebuje le ime paketa `Plots` in identifikacijski niz:

```
[deps]
Plots = "91a5bcdd-55d7-5caf-9e0b-520d859cae80"
```

Točna verzija paketa `Plots` in vsi paketi, ki jih potrebuje, so zabeleženi v datoteki `Manifest.toml`.

1.4 Vodenje različic s programom Git

Za vodenje različic priporočam uporabo programa [Git](#). V nadaljevanju bomo opisali, kako v korenški mapi `nummat` pripraviti Git repozitorij in vpisati datoteke, ki smo jih do sedaj ustvarili.

Sistem za vodenje različic Git

[Git](#) je sistem za vodenje različic, ki je postal *de facto* standard v razvoju programske opreme in tudi drugod, kjer se dela z besedilnimi datotekami. Priporočam, da si bralec ustvari svoj Git repozitorij, kjer si uredi kodo in zapiske, ki jo bo napisal pri spremeljanju te knjige.

Git repozitorij lahko hranimo zgolj lokalno na lastnem računalniku, lahko pa ga repliciramo na lastnem strežniku ali na enem od javnih spletnih skladišč programske kode, na primer [Github](#) ali [Gitlab](#).

Z naslednjim ukazom v mapi `nummat` ustvarimo repozitorij za `git` in registriramo novo ustvarjene datoteke.

```
$ git init .
$ git add .
$ git commit -m "Začetni vpis"
```

Z ukazoma `git status` in `git diff` lahko pregledamo, kaj se je spremenilo od zadnjega vpisa. Ko smo zadovoljni s spremembami, jih zabeležimo z ukazoma `git add` in `git commit`. Priporočamo redno uporabo ukaza `git commit`. Pogosti vpisi namreč precej olajšajo nadzor nad spremembami kode in spodbujajo k razdelitvi dela na majhne zaključene probleme, ki so lažje obvladljivi.

1.5 Priprava paketa za vajo

Ob začetku vsake vaje bomo v korenški mapi (`nummat`) najprej ustvarili mapo oziroma [paket](#), v katerem bo shranjena koda za določeno vajo. S ponavljanjem postopka priprave paketa za vsako vajo posebej se bomo naučili, kako hitro začeti s projektom. Obenem bomo optimizirali potek dela in odpravili ozka grla v postopkih priprave projekta. Ponavljanje vedno istih postopkov nas prisili, da postopke kar se da poenostavimo in ponavljača se opravila avtomatiziramo. Na dolgi rok se tako lahko bolj posvečamo dejanskemu reševanju problemov.

Za vajo bomo ustvarili paket `Vaja01`, s katerim bomo narisali [Geronovo lemniskato](#).

V mapi `nummat` ustvarimo paket `Vaja01`, v katerega bomo shranili kodo. Nov paket ustvarimo v paketenem načinu z ukazom `generate`:

```
$ cd nummat
$ julia

julia> # pritisnemo ] za vstop v paketni način
(@v1.10) pkg> generate Vaja01
```

Ukaz `generate` ustvari mapo `Vaja01` z osnovno strukturo [paketa v Juliji](#):

```
$ tree Vaja01
Vaja01
├── Project.toml
└── src
    └── Vaja01.jl

1 directory, 2 files
```

Paket `Vaja01` nato dodamo v projektno okolje v korenski mapi `nummat`, da bomo lahko kodo iz paketa uporabili v programih in ukazni zanki:

```
(@v1.10) pkg> activate .
(nummat) pkg> develop ./Vaja01 # paket dodamo projektnemu okolju
```

Za obsežnejši projekti uporabite šablone

Za obsežnejši projekt ali projekt, ki ga želite objaviti, je bolje uporabiti že pripravljene šablone [PkgTemplates](#) ali [PkgSkeleton](#). Zavoljo enostavnosti bomo v sklopu te knjige projekte ustvarjali s `Pkg.generate`.

Osnovna struktura paketa je pripravljena. Paketu bomo v nadaljevanju dodali še:

- kodo (Poglavlje 1.6),
- teste (Poglavlje 1.7) in
- dokumentacijo (Poglavlje 1.8).

1.6 Koda

Ko je mapa s paketom `Vaja01` pripravljena, lahko začnemo. Napisali bomo funkcije, ki izračunajo koordinate [Geronove lemniskate](#):

$$x(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad y(t) = 2 \frac{t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}. \quad (1.1)$$

V urejevalniku odpremo datoteko `Vaja01/src/Vaja01.jl` in vanjo shranimo definiciji:

```
module Vaja01

"""Izračunaj `x` kordinato Geronove lemniskate."""
lemniskata_x(t) = (t^2 - 1) / (t^2 + 1)
"""Izračunaj `y` kordinato Geronove lemniskate."""
lemniskata_y(t) = 2t * (t^2 - 1) / (t^2 + 1)^2

# izvozimo imena funkcij, da so dostopna brez predpone `Vaja01`
export lemniskata_x, lemniskata_y
end # module Vaja01
```

Program 1: Definicije funkcij v paketu `Vaja01`

Funkcije iz datoteke `Vaja01/src/Vaja01.jl` lahko uvozimo z ukazom `using Vaja01`, če smo paket `Vaja01` dodali v projektno okolje (`Project.toml`). V mapo `src` sodijo splošno uporabne funkcije, ki jih želimo uporabiti v drugih programih. V interaktivni zanki lahko sedaj pokličemo novo definirani funkciji:

```
julia> using Vaja01
julia> lemniskata_x(1.2)
0.180327868852459
```

V datoteko `Vaja01/doc/01uvod.jl` bomo zapisali preprost program, ki uporabi kodo iz paketa `Vaja01` in nariše lemniskato:

```
using Vaja01
# Krivuljo narišemo tako, da koordinati tabeliramo za veliko število parametrov.
t = range(-5, 5, 300) # generiramo zaporedje 300 vrednosti na [-5, 5]
x = lemniskata_x.(t) # funkcijo apliciramo na elemente zaporedja
y = lemniskata_y.(t) # tako da imenu funkcije dodamo .
# Za risanje grafov uporabimo paket `Plots`.
using Plots
plot(x, y, label=false, title="Geronova lemniskata")
```

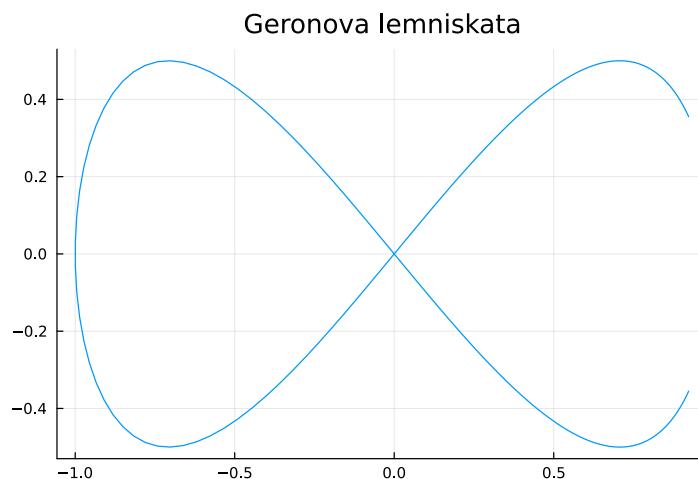
Program `01uvod.jl` poženemo z ukazom:

```
julia> include("Vaja01/doc/01uvod.jl")
```

Poganjanje ukaz za ukazom v VS Code

Če uporabljate urejevalnik [VS Code](#) in [razširitev za Julio](#), lahko ukaze iz programa poganjate vrstico za vrstico kar iz urejevalnika. Če pritisnete kombinacijo tipk `Shift + Enter`, se bo izvedla vrstica, v kateri je trenutno kazalka.

Rezultat je slika lemniskate.



Slika 2: Geronova lemniskata

1.7 Testi

Naslednji korak je, da dodamo avtomatske teste, s katerimi preizkusimo pravilnost kode, ki smo je napisali v prejšnjem poglavju. Avtomatski test je preprost program, ki pokliče določeno funkcijo in preveri rezultat.

Avtomatsko testiranje programov

Pomembno je, da pravilnost programov preverimo. Najlažje to naredimo „na roke“, tako da program poženemo in preverimo rezultat. Testiranje „na roke“ ima veliko pomankljivosti. Zahteva veliko časa, je lahko nekonsistentno in je dovezetno za človeške napake.

Alternativa ročnemu testiranju programov so avtomatski testi. To so preprosti programi, ki izvedejo testirani program in rezultate preverijo. Avtomatski testi so pomemben del [agilnega razvoja programske opreme](#) in omogočajo automatizacijo procesov razvoja programske opreme, ki se imenuje [nenehna integracija](#).

Uporabili bomo paket `Test`, ki olajša pisanje testov. Vstopna točka za teste je datoteka `test/runtests.jl`. Uporabili bomo makroje `@test` in `@testset` iz paketa `Test`.

V datoteko `test/runtests.jl` dodamo teste za obe koordinatni funkciji, ki primerjajo izračunane vrednosti s pravimi vrednostmi, ki smo jih izračunali „na roke“:

```
using Vaja01, Test

@testset "Koordinata x" begin
    @test lemniskata_x(1.0) ≈ 0.0
    @test lemniskata_x(2.0) ≈ 3 / 5
end

@testset "Koordinata y" begin
    @test lemniskata_y(1.0) ≈ 0.0
    @test lemniskata_y(2.0) ≈ 12 / 25
end
```

Program 3: Rezultat funkcij primerjamo s pravilno vrednostjo

Primerjava števil s plavajočo vejico

Pri računanju s števili s plavajočo vejico se izogibajmo primerjanju števil z operatorjem `==`, ki števili primerja bit po bit. Pri izračunih, v katerih nastopajo števila s plavajočo vejico, pride do zaokrožitvenih napak. Zato se različni načini izračuna za isto število praviloma razlikujejo na zadnjih decimalkah. Na primer izraz `asin(sin(pi/4)) - pi/4` ne vrne točne ničle ampak vrednost `-1.1102230246251565e-16`, ki pa je zelo majhno število. Za približno primerjavo dveh vrednosti `a` in `b` zato uporabimo izraz

$$|a - b| < \varepsilon, \quad (1.2)$$

kjer je ε večji od pričakovane zaokrožitvene napake. V Juliji lahko za približno primerjavo števil in vektorjev uporabimo operator `≈`, ki je alias za funkcijo `isapprox`.

Preden lahko poženemo teste, moramo ustvariti testno okolje. Sledimo [priporočilom za testiranje paketov](#). V mapi `Vaja01/test` ustvarimo novo okolje in dodamo paket `Test`.

```
(@v1.10) pkg> activate Vaja01/test
(test) pkg> add Test
(test) pkg> activate .
```

Teste poženemo tako, da v paketnem načinu poženemo ukaz `test Vaja01`.

```
(nummat) pkg> test Vaja01
Testing Vaja01
    Testing Running tests
    ...
    ...
Test Summary: | Pass  Total  Time
Koordinata x |    2      2  0.1s
Test Summary: | Pass  Total  Time
Koordinata y |    2      2  0.0s
    Testing Vaja01 tests passed
```

1.8 Dokumentacija

Dokumentacija programske kode je sestavljena iz različnih besedil in drugih virov, npr. videov, ki so namenjeni uporabnikom in razvijalcem programa ali knjižnice. Dokumentacija vključuje komentarje v kodi, navodila za namestitev in uporabo programa ter druge vire z razlagami ozadja, teorije in drugih zadev, povezanih s projektom. Dobra dokumentacija lahko veliko pripomore k uspehu določenega programa. To še posebej velja za knjižnice.

Slabo dokumentirane kode ne želi nihče uporabljati. Tudi če vemo, da kode ne bo uporabljal nihče drug razen nas samih, bodimo prijazni do samega sebe v prihodnosti in pišimo dobro dokumentacijo.

V tej knjigi bomo pisali tri vrste dokumentacije:

- dokumentacijo za posamezne funkcije v sami kodi,
- navodila za uporabnika v datoteki README.md,
- poročilo v formatu PDF.

Zakaj format PDF

Izbira formata PDF je mogoče presenetljiva za pisanje dokumentacije programske kode. V praksi so precej uporabnejše HTML strani. Dokumentacija v obliki HTML strani, ki se generira avtomatično v procesu [nenehne integracije](#), je postala *de facto* standard. V kontekstu popravljanja domačih nalog in poročil za vaje pa ima format PDF še vedno prednosti, saj ga je lažje pregledovati in popravljati.

1.8.1 Dokumentacija funkcij in tipov

Funkcije in podatkovne tipe v Juliji dokumentiramo tako, da pred definicijo dodamo niz z opisom funkcije, kot smo to naredili v programu Program 1. Več o tem si lahko preberete [v poglavju o dokumentaciji priročnika za Julijo](#).

1.8.2 README dokument

Dokument README (preberi me) je namenjen najbolj osnovnim informacijam o paketu. Dokument je vstopna točka za dokumentacijo in navadno vsebuje:

- kratek opis projekta,
- povezavo na dokumentacijo,
- navodila za osnovno uporabo in
- navodila za namestitev.

Vzorčni projekt za vajo

Avtor: Martin Vuk <martin.vuk@fri.uni-lj.si>

Preprost paket, ki definira koordinatne funkcije [Geronove lemniskate](https://sl.wikipedia.org/wiki/Geronova_lemniskata). Primer uporabe je opisan v programu [01uvod.jl](doc/01uvod.jl), ki ga poženemo z ukazom

```
```jl
include("Vaja01/doc/01uvod.jl")
```
v interaktivni zanki Julije.
```

Testi

Teste poženemo z ukazom:

```
```
julia --project=Vaja01 -e "import Pkg; Pkg.test()"
```
```

Poročilo PDF

Poročilo pripravimo z ukazom:

```
```
julia --project=@. Vaja01/doc/makedocs.jl
```
```

Program 4: README.md vsebuje osnove informacije o projektu

1.8.3 PDF poročilo

V nadaljevanju bomo opisali, kako poročilo pripraviti s paketom [Weave.jl](#). Paket Weave.jl omogoča mešanje besedila in programske kode v enem dokumentu: [literarnemu programu](#), kot ga je opisal D. E. Knuth ([2]). Za pisanje besedila bomo uporabili format [Markdown](#), ki ga bomo dodali kot komentarje v kodi.

Za generiranje PDF dokumentov je potrebno namestiti [TeX/LaTeX](#). Priporočam namestitev [TinyTeX](#) ali [TeX Live](#), ki pa zasede več prostora na disku. Po [namestitvi](#) programa TinyTeX moramo dodati še nekaj LaTeX paketov, ki jih potrebuje paket Weave. V terminalu izvedemo naslednji ukaz

```
$ tlmgr install microtype upquote minted
```

Poročilo pripravimo v obliki literarnega programa. Uporabili bom kar datoteko `Vaja01/doc/01uvod.jl`, s katero smo pripravili sliko. V datoteko dodamo besedilo v obliki komentarjev. Če želimo, da se komentarji uporabijo kot besedilo v formatu [Markdown](#), uporabimo `#'`. Koda in navadni komentarji se v poročilu izpišejo nespremenjeni.

```

#' # Geronova lemniskata
#' Komentarji, ki se začnejo z `#`' se uporabijo kot Markdown in
#' v PDF dokumentu nastopajo kot besedilo.
using Vaja01
# Krivuljo narišemo tako, da koordinati tabeliramo za veliko število parametrov.
t = range(-5, 5, 300) # generiramo zaporedje 300 vrednosti na [-5, 5]
x = lemniskata_x.(t) # funkcijo apliciramo na elemente zaporedja
y = lemniskata_y.(t) # tako da imenu funkcije dodamo .
# Za risanje grafov uporabimo paket `Plots`.
using Plots
plot(x, y, label=false, title="Geronova lemniskata")
#' Zadnji rezultat pred besedilom označenim z `#`' se vstavi v dokument.
#' Če je rezultat graf, se v dokument vstavi slika z grafom.

```

Program 5: Vrstice, ki se začnejo z znakoma '#', so v formatu Markdown

Poročilo pripravimo z ukazom `Weave.weave`. Ustvarimo program `Vaja01/doc/makedocs.jl`, ki pripravi pdf dokument:

```

using Weave
# Poročilo generiramo z ukazom `Weave.weave`
Weave.weave("Vaja01/doc/01uvod.jl",
doctype="minted2pdf", out_path="Vaja01/pdf")

```

Program 6: Program za pripravo PDF dokumenta

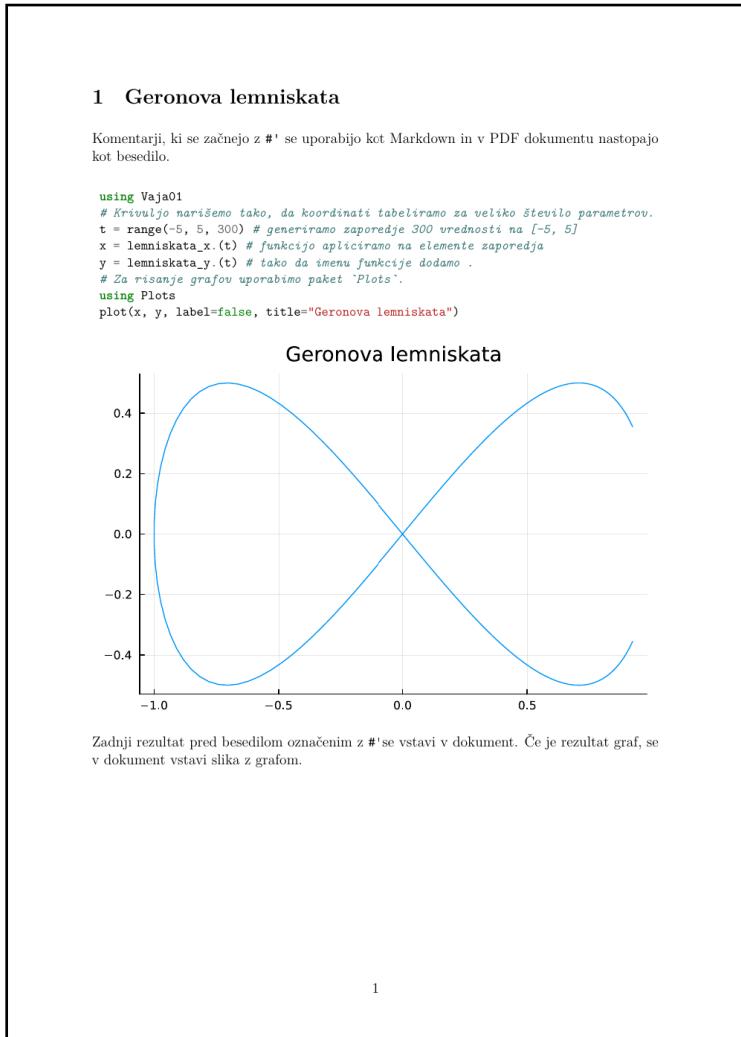
Program poženemo z ukazom `include("Vaja01/doc/makedocs.jl")` v Juliji. Preden poženemo program `makedocs.jl`, moramo projektnemu okolju `nummat` dodati paket `Weave.jl`.

```

(nummat) pkg> add Weave
julia> include("Vaja01/doc/makedocs.jl")

```

Poročilo se shrani v datoteko `Vaja01/pdf/01uvod.pdf`.



1

Slika 3: Poročilo v PDF formatu

Alternativni paketi za pripravo PDF dokumentov

Poleg paketa Weave.jl je na voljo še nekaj programov, ki so primerni za pripravo PDF dokumentov s programi v Juliji:

- [IJulia](#),
- [Literate.jl](#) in
- [Quadro](#).

Če potrebujemo več nadzora pri pripravi PDF dokumenta, priporočam uporabo naslednjih programov:

- [TeX/LaTeX](#),
- [pandoc](#),
- [AsciiDoctor](#),
- [Typst](#).

Povezave na temo pisanja dokumentacije

- Pisanje dokumentacije v jeziku Julia.
- Priporočila za stil za programski jezik Julia.
- Documenter.jl je najbolj razširjen paket za pripravo dokumentacije v Julii.
- Diátaxis je sistematičen pristop k pisanju dokumentacije.
- Dokumentacija kot koda je ime za način dela, pri katerem z dokumentacijo ravnamo na enak način kot s kodo.

1.9 Zaključek

Ustvarili smo svoj prvi paket, ki vsebuje kodo, avtomatske teste in dokumentacijo. Mapa Vaja01 bi morala imeti naslednjo strukturo:

```
$ tree Vaja01
Vaja01
├── Manifest.toml
├── Project.toml
├── README.md
└── doc
    ├── 01uvod.jl
    └── makedocs.jl
└── src
    └── Vaja01.jl
└── test
    ├── Manifest.toml
    ├── Project.toml
    └── runtests.jl
```

Preden nadaljujete, ponovno preverite, če vse deluje tako, kot bi moralo. V Juliji aktivirajte projektno okolje:

```
julia> # pritisnite ] za vstop v paketni način
(@v1.10) pkg> activate .
```

Nato najprej poženemo teste:

```
(nummat) pkg> test Vaja01
...
Testing Vaja01 tests passed
```

Na koncu pa poženemo še program 01uvod.jl:

```
julia> include("Vaja01/doc/01uvod.jl")
```

in pripravimo poročilo:

```
julia> include("Vaja01/doc/makedocs.jl")
```

Priporočam, da si pred branjem naslednjih poglavij vzamete čas in poskrbite, da se zgornji ukazi izvedejo brez napak.

2 Računanje kvadratnega korena

Računalniški procesorji navadno implementirajo le osnovne številske operacije: seštevanje, množenje in deljenje. Za računanje drugih matematičnih funkcij mora nekdo napisati program. Večina programskih jezikov vsebuje implementacijo elementarnih funkcij v standardni knjižnici. V tej vaji si bomo ogledali, kako implementirati korenko funkcijo.

Implementacija elementarnih funkcij v Juliji

Lokacijo metod, ki računajo določeno funkcijo, lahko dobite z ukazoma `methods` in `@which`. Tako bo ukaz `methods(sqrt)` izpisal implementacije kvadratnega korena za vse podatkovne tipe, ki jih Julia podpira. Ukaz `@which(sqrt(2.0))` pa razkrije metodo, ki računa koren za vrednost `2.0`, to je za števila s plavajočo vejico.

2.1 Naloga

Napiši funkcijo `y = koren(x)`, ki bo izračunala približek za kvadratni koren števila `x`. Poskrbi, da bo rezultat pravilen na 10 decimalnih mest in da bo časovna zahtevnost neodvisna od argumenta `x`.

- Zapiši enačbo, ki ji zadošča kvadratni koren.
- Uporabi [Newtonovo metodo](#) in izpelji [Heronovo rekurzivno formulo](#) za računanje kvadratnega korena.
- Kako je konvergenca odvisna od vrednosti `x`?
- Nariši graf potrebnega števila korakov v odvisnosti od argumenta `x`.
- Uporabi lastnosti [zapisa s plavajočo vejico](#) in izpelji formulo za približno vrednost korena, ki uporabi eksponent (funkcija `exponent` v Juliji).
- Implementiraj funkcijo `koren(x)`, tako da je časovna zahtevnost neodvisna od argumenta `x`. Grafično preveri, ali funkcija dosega zahtevano natančnost za poljubne vrednosti argumenta `x`.

Preden se lotimo reševanja, ustvarimo projekt za trenutno vajo in ga dodamo v delovno okolje.

```
(nummat) pkg> generate Vaja02
(nummat) pkg> develop Vaja02/
```

Tako bomo imeli v delovnem okolju dostop do vseh funkcij, ki jih bomo definirali v paketu `Vaja02`.

2.2 Izbira algoritma

Z računanjem kvadratnega korena so se ukvarjali že pred 3500 leti v Babilonu. O tem si lahko več preberete v [članku v reviji Presek](#). Če želimo poiskati algoritmom za računanje kvadratnega korena, se moramo najprej vprašati, kaj sploh je kvadratni koren. Kvadratni koren števila x je definiran kot pozitivna vrednost y , katere kvadrat je enak x . Število y je torej pozitivna rešitev enačbe

$$y^2 = x. \quad (2.1)$$

Da bi poiskali vrednost \sqrt{x} , moramo rešiti [nelinearno enačbo \(2.1\)](#). Za numerično reševanje nelinearnih enačb obstaja cela vrsta metod. Ena najpopularnejših metod je [Newtonova ali tangentna metoda](#), ki jo bomo uporabili tudi mi. Pri Newtonovi metodi rešitev enačbe

$$f(x) = 0 \quad (2.2)$$

poiščemo z rekurzivnim zaporedjem približkov

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.3)$$

Če zaporedje (2.3) konvergira, potem konvergira k rešitvi enačbe $f(x) = 0$.

Enačbo (2.1) najprej preoblikujemo v obliko, ki je primerna za reševanje z Newtonovo metodo. Prema-knemo vse člene na eno stran, da je na drugi strani nič

$$y^2 - x = 0. \quad (2.4)$$

V formulo za Newtonovo metodo vstavimo funkcijo $f(y) = y^2 - x$ in odvod $f'(y) = \frac{df}{dy} = 2y$, da dobimo formulo:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - \frac{y_n^2 - x}{2y_n} = \frac{2y_n^2 - y_n^2 + x}{2y_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_n^2 + x}{y_n} \right) \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{x}{y_n} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Rekurzivno formulo (2.5) imenujemo **Haronov obrazec**. Zgornja formula določa zaporedje, ki vedno konvergira bodisi k \sqrt{x} ali $-\sqrt{x}$, odvisno od izbire začetnega približka. Poleg tega, da zaporedje hitro konvergira k limiti, je program izjemno preprost. Poglejmo, kako izračunamo $\sqrt{2}$:

```
julia> x = 1.5
      for n = 1:5
          x = (x + 2 / x) / 2
          println(x)
      end

1.4166666666666665
1.4142156862745097
1.4142135623746899
1.414213562373095
1.414213562373095
```

Vidimo, da se približki začnejo ponavljati že po 4. koraku. To pomeni, da se zaporedje ne bo več spreminjalo in smo dosegli najboljši približek, kot ga lahko predstavimo s 64 bitnimi števili s plavajočo vejico.

Napišimo zgornji program še kot funkcijo. Da lažje spremljamo, kaj se dogaja med izvajanjem kode, uporabimo makro @info iz modula **Logging**, ki je del standardne knjižnice.

```

using Logging
"""

y = koren_heron(x, x0, n)

Izračuna približek za koren števila `x` z `n` koraki Heronovega obrazca z začetnim
približkom `x0`.

"""

function koren_heron(x, x0, n)
    y = x0
    for i = 1:n
        y = (y + x / y) / 2
        @info "Približek na koraku $i je $y"
    end
    return y
end

```

Program 7: Funkcija, ki računa kvadratni koren s Heronovim obrazcem.

Preskusimo funkcijo `koren_heron` na številu 3.

```

x = koren_heron(3, 1.7, 5)
println("Koren 3 je $(x).")

[ Info: Približek na koraku 1 je 1.7323529411764707
[ Info: Približek na koraku 2 je 1.7320508339159093
[ Info: Približek na koraku 3 je 1.7320508075688776
[ Info: Približek na koraku 4 je 1.7320508075688772
[ Info: Približek na koraku 5 je 1.7320508075688772
Koren 3 je 1.7320508075688772.

```

Metoda navadne iteracije in tangentna metoda

Metoda računanja kvadratnega korena s Heronovim obrazcem je poseben primer [tangentne metode](#), ki je poseben primer [metode fiksne točke](#). Obe metodi sta si bomo podrobnejše ogledali kasneje.

2.3 Določitev števila korakov

Funkcija `koren_heron(x, x0, n)` ni uporabna za splošno rabo, saj mora uporabnik poznati tako začetni približek kot tudi število korakov, ki so potrebni, da dosežemo želeno natančnost. Da bi bila funkcija zares uporabna, bi morala sama izbrati začetni približek in število potrebnih korakov. Najprej se bomo naučili poiskati dovolj veliko število korakov, da dosežemo želeno natančnost.

Relativna in absolutna napaka

Kako vemo, kdaj smo dosegli želeno natančnost? Navadno nekako ocenimo napako približka in jo primerjamo z želeno natančnostjo. To lahko storimo na dva načina, tako da:

- preverimo, ali je absolutna napaka manjša od **absolutne tolerance** ali
- preverimo, ali je relativna napaka manjša od **relativne tolerance**.

Julia za namen primerjave dveh števil ponuja funkcijo `isapprox`, ki pove ali sta dve vrednosti približno enaki. Funkcija `isapprox` omogoča relativno in absolutno primerjavo vrednosti. Primerjava števil z relativno toleranco δ se prevede na neenačbo

$$|a - b| < \delta(\max(|a|, |b|)). \quad (2.6)$$

Ko uporabljam relativno primerjavo, moramo biti previdni, če primerjamo vrednosti s številom 0. Če je namreč eno od števil, ki ju primerjamo, enako 0 in $\delta < 1$, potem neenačba (2.6) nikoli ni izpolnjena.

Število 0 nikoli ni približno enako nobenemu neničelnemu številu, če ju primerjamo z relativno toleranco.

Število pravilnih decimalnih mest

Ko govorimo o številu pravilnih decimalnih mest, imamo navadno v mislih število signifikantnih mest v zapisu s plavajočo vejico. V tem primeru moramo poskrbeti, da je relativna napaka dovolj majhna. Če želimo, da bo 10 signifikantnih mest pravilnih, mora biti relativna napaka manjša od $5 \cdot 10^{-11}$. Naslednja števila so vsa podana s 5 signifikantnimi mesti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{70} &\approx 0.014285, & \frac{1}{7} &\approx 0.14285 \\ \frac{10}{7} &\approx 1.4285, & \frac{10^{10}}{7} &\approx 1428500000. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pri iskanju kvadratnega korena lahko napako ocenimo tako, da primerjamo kvadrat približka z danim argumentom. Pri tem je treba raziskati, kako sta povezani relativni napaki približka za koren in njegova kvadrata. Naj bo y točna vrednost kvadratnega korena \sqrt{x} . Če je \hat{y} približek z relativno napako δ , potem je $\hat{y} = y(1 + \delta)$. Poglejmo, kako je relativna napaka δ povezana z relativno napako kvadrata \hat{y}^2 .

$$\varepsilon = \frac{\hat{y}^2 - x}{x} = \frac{(y(1 + \delta))^2 - x}{x} = \frac{x(1 + \delta)^2 - x}{x} = (1 + \delta)^2 - 1 = 2\delta + \delta^2. \quad (2.8)$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\hat{y}^2 = x$. Relativna napaka kvadrata je enaka $\varepsilon = 2\delta + \delta^2$. Ker je $\delta^2 \ll \delta$, dobimo dovolj natančno oceno, če δ^2 zanemarimo

$$\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta^2) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.9)$$

Od tod dobimo pogoj, kdaj je približek dovolj natančen. Če je

$$|\hat{y}^2 - x| < 2\delta \cdot x \quad (2.10)$$

potem velja začetna zahteva:

$$|\hat{y} - \sqrt{x}| < \delta \cdot \sqrt{x}. \quad (2.11)$$

Ocene za napako ni vedno lahko poiskati

V primeru računanja kvadratnega korena je bila analiza napak relativno enostavna in smo lahko dobili točno oceno za relativno napako metode. Večinoma ni tako. Točne ocene za napako ni vedno lahko ali sploh mogoče poiskati. Zato pogosto v praksi napako ocenimo na podlagi različnih indicev brez zagotovila, da je ocena točna.

Pri iterativnih metodah konstruiramo zaporedje približkov x_n , ki konvergira k iskanemu številu. Razlika med dvema zaporednima približkoma $|x_{n+1} - x_n|$ je pogosto dovolj dobra ocena za napako iterativne metode. Toda zgolj dejstvo, da je razlika med zaporednima približkoma majhna, še ne zagotavlja, da je razlika do limite prav tako majhna. Če poznamo oceno za hitrost konvergence (ozziroma odvod iteracijske funkcije), lahko izpeljemo zvezo med razliko dveh sosednjih približkov in napako metode. Vendar se v praksi pogosto zanašamo, da sta razlika sosednjih približkov in napaka sorazmerni. Problem nastane, če je konvergenca počasna.

Uporabimo pogoj (2.11) in napišemo funkcijo, ki sama določi število korakov iteracije:

```
'''  
y = koren(x, y0)
```

Izračunaj vrednost kvadratnega korena števila `x` s Heronovim obrazcem z začetnim približkom `y0`.

```
'''  
  
function koren(x, y0)  
    if x == 0.0  
        # Vrednost 0 obravnavamo posebej, saj je relativna primerjava z 0  
        # problematična  
        return 0.0  
    end  
    delta = 5e-11 # zahtevana relativna natančnost rezultata  
    maxit = 10 # 10 korakov je dovolj, če je začetni približek dober  
    for i = 1:maxit  
        y = (y0 + x / y0) / 2  
        if abs(x - y^2) <= 2 * delta * abs(x)  
            @info "Število korakov $i"  
            return y  
        end  
        y0 = y  
    end  
    throw("Iteracija ne konvergira!")  
end
```

Program 8: Metoda `koren(x, y0)`, ki avtomatsko določi število korakov iteracije

2.4 Izbira začetnega približka

Kako bi učinkovito izbrali dober začetni približek? Dokazati je mogoče, da rekurzivno zaporedje (2.5) konvergira ne glede na izbran začetni približek. Problem je, da je število korakov iteracije večje, dlje kot je začetni približek oddaljen od rešitve. Če želimo, da bo časovna zahtevnost funkcije neodvisna od argumenta, moramo poskrbeti, da za poljubni argument uporabimo dovolj dober začetni približek. Poskusimo lahko za začetni približek uporabiti kar samo število x . Malce boljši približek dobimo s Taylorjevem razvojem korenske funkcije okrog števila 1

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + \dots \approx \frac{1}{2} + \frac{x}{2}. \quad (2.12)$$

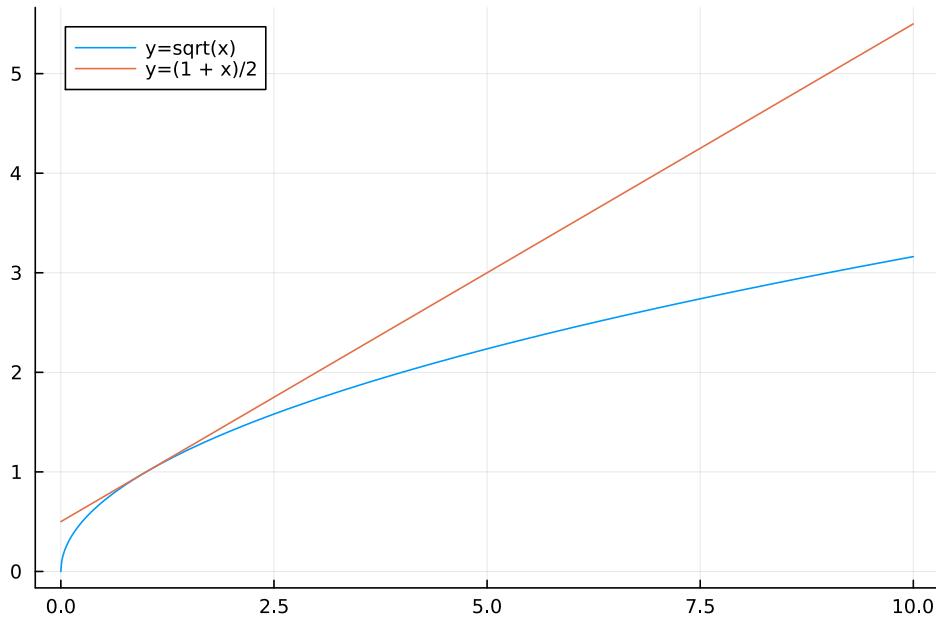
Opazimo, da za večja števila, iteracija potrebuje več korakov:

```
julia> tangenta(x) = 0.5 + x / 2
y = koren(10, tangenta(10))
y = koren(200, tangenta(200))

[ Info: Število korakov 5
[ Info: Število korakov 7
14.142135623730955
```

Začetni približek $\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ dobro deluje za števila blizu 1. Če isto formulo za začetni približek uporabimo na večjih številih, dobimo večjo relativno napako oziroma potrebujemo več korakov zanke, da pridemo do enake natančnosti. Na isti graf narišimo korensko funkcijo in tangento $\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$:

```
using Plots
plot(sqrt, 0, 10, label="y=sqrt(x)")
plot!(x -> 0.5 + x / 2, 0, 10, label="y=(1 + x)/2")
```



Slika 4: Korenska funkcija in tangentna v $\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$

Za boljši približek, si pomagamo z načinom predstavitev števil v računalniku. Realna števila predstavimo s števili s plavajočo vejico. Število je zapisano v obliki

$$x = m2^e, \quad (2.13)$$

kjer je $1 \leq m < 2$ mantisa, e pa eksponent. Za 64 bitna števila s plavajočo vejico se za zapis mantise uporabi 53 bitov (52 bitov za decimalke, en bit pa za predznak), 11 bitov pa za eksponent (glej IEE 754 standard). Koren števila x potem izračunamo kot

$$\sqrt{x} = \sqrt{m} \cdot 2^{\frac{e}{2}}. \quad (2.14)$$

Koren mantise, ki leži na $[1, 2)$, približno ocenimo s tangentno v $x = 1$

$$\sqrt{m} = \frac{1}{2} + \frac{m}{2}. \quad (2.15)$$

Če eksponent delimo z 2 in upoštevamo ostanek $e = 2d + o$, vrednost $\sqrt{2^e}$ zapišemo kot

$$\sqrt{2^e} \approx 2^d \cdot \begin{cases} 1; & o = 0 \\ \sqrt{2}; & o = 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Formula za približek je enaka:

$$\sqrt{x} \approx \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \right) \cdot 2^d \cdot \begin{cases} 1; & o = 0 \\ \sqrt{2}; & o = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Potenco števila 2^n lahko izračunamo s premikom binarnega zapisa števila 1 v levo za n mest. V Juliji za levi premik uporabimo operator `<<`, s funkcijama exponent in significand pa dobimo eksponent in mantiso števila s plavajočo vejico. Tako lahko zapišemo naslednjo funkcijo za začetni približek:

```
"""
y0 = zacetni(x)

Izračunaj začetni približek za kvadratni koren števila `x` z uporabo
eksponenta za števila s plavajočo vejico.

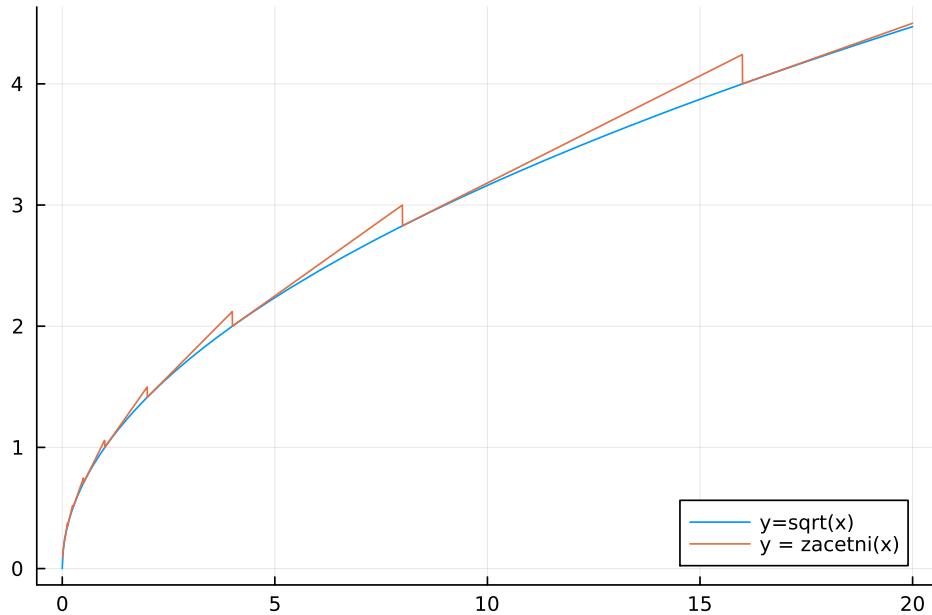
"""

function zacetni(x)
    d, ost = divrem(abs(exponent(x)), 2)
    m = significand(x) # mantisa
    koren2ost = (ost == 0) ? 1 : 1.4142135623730951 # koren(2^ost)
    koren2e = (1 << d) * koren2ost # koren(2^e)
    if x > 1
        return (0.5 + m / 2) * koren2e
    else
        return (0.5 + m / 2) / koren2e
    end
end
```

Program 9: Funkcija `zacetni(x)`, ki izračuna začetni približek

Primerjajmo izboljšano verzijo začetnega približka s pravo korensko funkcijo.

```
plot(sqrt, 0, 20, label="y=sqrt(x)")
plot!(Vaja02.zacetni, 0, 20, label="y = zacetni(x)")
```



Slika 5: Korenska funkcija in izboljšani začetni približek

2.5 Zaključek

Ko smo enkrat izbrali dober začetni približek, tudi Newtonova iteracija hitreje konvergira, ne glede na velikost argumenta. Tako lahko definiramo metodo `koren(x)` brez dodatnega argumenta.

```
''''
y = koren(x)
```

Izračunaj vrednost kvadratnega korena danega števila `x`.

```
''''
koren(x) = koren(x, zacetni(x))
```

Program 10: Funkcija `koren(x)`

Julia omogoča več definicij iste funkcije

Julia uporablja posebno vrsto **polimorfizma** imenovano **večlična razdelitev** (angl. multiple dispatch). Za razliko od polmorfizma v objektno orientiranih jezikih, kjer se metoda izbere ne le na podlagi razreda objekta, ki to metodo kliče, se v Juliji metodo izbere na podlagi tipov vseh vhodnih argumentov. Ta lastnost omogoča pisanje generične kode, ki deluje za zelo različne vhodne argumente.

Večlična razdelitev omogoča, da za isto funkcijo definiramo več različic, ki se uporabijo glede na to, katere argumente podamo funkciji. Tako smo definirali dve metodi za funkcijo `koren`. Prva metoda sprejme 2 argumenta, druga pa en argument. Ko pokličemo `koren(2.0, 1.0)`, se izvede različica Program 8, ko pa pokličemo `koren(2.0)`, se izvede Program 10.

Metode, ki so definirane za neko funkcijo `fun`, lahko vidimo z ukazom `methods(fun)`. Metodo, ki se uporabi za določen klic funkcije, lahko poiščemo z makrojem `@which`, npr. `@which koren(2.0, 1.0)`.

Opazimo, da se število korakov ne spreminja več z naraščanjem argumenta, kar pomeni, da je časovna zahtevnost funkcije `koren(x)` neodvisna od izbire argumenta.

```
julia> koren(10.0), koren(200.0), koren(2e10)
[ Info: Število korakov 3
[ Info: Število korakov 3
[ Info: Število korakov 2
(3.162277660168379, 14.142135623730965, 141421.35623853415)
```

Hitro računanje obratne vrednosti kvadratnega korena

Pri razvoju računalniških iger, ki poskušajo verno prikazati 3-dimenzionalni svet na zaslonu, se veliko uporablja normiranje vektorjev. Pri normirjanju je treba komponente vektorja deliti z normo vektorja, ki je enaka korenu vsote kvadratov komponent. Kot smo spoznali pri računanju kvadratnega korena s Heronovim obrazcem, je posebej problematično poiskati ustrezni začetni približek, ki je dovolj blizu pravi rešitvi. Tega problema so se zavedali tudi inženirji igre Quake, ki so razvili posebej zvit, skoraj magičen način za izračun funkcije $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Metoda uporabi posebno vrednost `0x5f3759df`, da pride do dobrega začetnega približka, nato pa še en korak [Newtonove metode](#). Več o [računanju obratne vrednosti kvadratnega korena](#).

3 Tridiagonalni sistemi

3.1 Naloge

- Ustvari podatkovni tip za tridiagonalno matriko ter implementiraj operacije množenja $*$ z vektorjem in reševanja sistema $Ax = b$.
- Za slučajni sprehod v eni dimenziji izračunaj povprečno število korakov, ki jih potrebujemo, da se od izhodišča oddaljimo za k korakov.
 - ▶ Zapiši fundamentalno matriko za [Markovsko verigo](#), ki modelira slučajni sprehod, ki se lahko odalji od izhodišča le za k korakov.
 - ▶ Reši sistem s fundamentalno matriko in vektorjem enic.
 - ▶ Povprečno število korakov oceni še z vzorčenjem velikega števila simulacij slučajnega sprehoda.

Primerjaj oceno z rešitvijo sistema.

3.2 Tridiagonalne matrike

Matrika je *tridiagonalna*, če ima neničelne elemente le na glavni diagonali in na dveh najbližjih diagonalah. Primer 5×5 tridiagonalne matrike:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Elementi tridiagonalne matrike, za katere se indeksa razlikujeta za več kot 1, so vsi enaki 0:

$$|i - j| > 1 \Rightarrow a_{ij} = 0. \quad (3.2)$$

Z implementacijo posebnega podatkovnega tipa za tridiagonalno matriko lahko prihranimo tako na prostoru kot tudi pri časovni zahtevnosti algoritmov, saj jih lahko prilagodimo posebnim lastnostim tridiagonalnih matrik.

Preden se lotimo naloge, ustvarimo nov paket `Vaja03`, kamor bomo postavili kodo:

```
(nummat) pkg> generate Vaja03
(nummat) pkg> develop Vaja03/
```

Podatkovni tip za tridiagonalne matrike imenujemo `Tridiag` in vsebuje tri polja z elementi na posameznih diagonalah. Definicijo postavimo v `Vaja03/src/Vaja03.jl`:

```

"""
Tridiag(sd, d, zd)

Sestavi tridiagonalno matriko iz prve poddiagonale `sd`, glavne diagonale `d`
in prve naddiagonale `zd`. Rezultat je tipa `Tridiag`, ki hrani le neničelne
elemente matrike in omogoča učinkovito reševanje tridiagonalnega sistema
linearnih enačb. Dolžina vektorjev `sd` in `zd` mora biti za ena manj od dolžine
vektorja `d`.
"""

struct Tridiag
    sd::Vector # spodnja poddiagonala
    d::Vector # glavna diagonala
    zd::Vector # zgornja naddiagonala
    function Tridiag(sd, d, zd)
        if (length(sd) != length(d) - 1) || (length(zd) != length(d) - 1)
            error("Napačne dimenzijs diagonali.")
        end
        new(sd, d, zd)
    end
end
export Tridiag

```

Zgornja definicija omogoča, da ustvarimo nove objekte tipa `Tridiag`

```
julia> using Vaja03
julia> Tridiag([3, 6, 5, 2], [1, 4, 7, 4, 1], [2, 5, 6, 3])
```

Preverjanje skladnosti polj v objektu

V zgornji definiciji `Tridiag` smo poleg deklaracije polj dodali tudi **notranji konstruktor** v obliki funkcije `Tridiag`. Vemo, da mora biti dolžina vektorjev `sd` in `zd` za ena manjša od dolžine vektorja `d`. Zato je pogoj najbolje preveriti, ko ustvarimo objekt in se nam s tem v nadaljevanju ni več treba ukvarjati. Z notranjim konstruktorjem lahko te pogoje uveljavimo ob nastanku objekta in preprečimo ustvarjanje objektov z nekonsistentnimi podatki.

Želimo, da se matrike tipa `Tridiag` obnašajo podobno kot generične matrike vgrajenega tipa `Matrix`. Zato funkcijam, ki delajo z matrikami, dodamo specifične metode za podatkovni tip `Tridiag`. Argumentu funkcije lahko dodamo informacijo o tipu, tako da dodamo `::Tip` in na ta način definiramo specifično metodo, ki deluje le za dan podatkovni tip. Če želimo, da metoda deluje za argumente tipa `Tridiag`, argumentu dodamo `::Tridiag`. Več informacij o **tipih** in **vmesnikih**.

Implementirajmo naslednje metode specifične za tip `Tridiag`:

- `size(T::Tridiag)` vrne dimenzije matrike (Program 14),
- `getindex(T::Tridiag, i, j)` vrne element `T[i, j]` (Program 15),
- `setindex!(T::Tridiag, x, i, j)` nastavi element `T[i, j]` (Program 16) in
- `*(T::Tridiag, x::Vector)` izračuna produkt matrike `T` z vektorjem `x` (Program 17).

Za tridiagonalne matrike je časovna zahtevnost množenja matrike z vektorjem bistveno manjša kot v splošnem ($\mathcal{O}(n)$ namesto $\mathcal{O}(n^2)$).

Preden nadaljujemo, preverimo, ali so funkcije pravilno implementirane. Napišemo avtomatske teste, ki jih lahko kadarkoli poženemo. V projektu `Vaja03` ustvarimo datoteko `Vaja03/test/runtests.jl` in vanjo zapišemo kodo, ki preveri pravilnost zgoraj definiranih funkcij.

```

using Vaja03
using Test

@testset "Velikost" begin
    T = Tridiag([1, 2], [3, 4, 5], [6, 7])
    @test size(T) == (3, 3)
end

```

V paket `Vaja03` moramo dodati še paket `Test`:

```
(nummat) pkg> activate Vaja03
(Vaja03) pkg> add Test
```

Teste poženemo v paketnem načinu z ukazom `test Vaja03`:

```
(Vaja03) pkg> activate .
(nummat) pkg> test Vaja03
...
      Testing Running tests...
Test Summary: | Pass  Total  Time
Velikost     |    1      1  0.0s
```

Podobno definiramo teste še za druge funkcije. Primeri testov so v poglavju Poglavlje 3.6.1.

3.3 Reševanje tridiagonalnega sistema

Poiskali bomo rešitev sistema linearnih enačb $Tx = b$, kjer je matrika sistema T tridiagonalna. Sistem lahko rešimo z Gaussovo eliminacijo in obratnim vstavljanjem (glej učbenik [1]). Ker je v tridiagonalni matriki bistveno manj elementov, se število potrebnih operacij tako za Gaussovo eliminacijo kot za obratno vstavljanje bistveno zmanjša. Dodatno predpostavimo, da je matrika T takšna, da med eliminacijo ni treba delati delnega pivotiranja. V nasprotnem primeru se tridiagonalna oblika matrike med Gaussovo eliminacijo podre in se algoritmom nekoliko zakomplcira. Za diagonalno dominantne matrike po stolpcih pri Gaussovji eliminaciji pivotiranje ni potrebno.

Časovna zahtevnost Gaussove eliminacije brez pivotiranja je za tridiagonalni sistem $Tx = b$ linearna $\mathcal{O}(n)$ namesto kubična $\mathcal{O}(n^3)$. Za obratno vstavljanje pa se časovna zahtevnost s kvadratne $\mathcal{O}(n^2)$ zmanjša na linearno $\mathcal{O}(n)$.

Priredimo splošna algoritma Gaussove eliminacije in obratnega vstavljanja, da bosta upoštevala lastnosti tridiagonalnih matrik. Napišimo funkcijo \:

```
function \(T::Tridiagonal, b::Vector)
```

ki poišče rešitev sistema $Tx = b$ (rešitev je Program 18). V datoteko `Vaja03/test/runtests.jl` dajte test, ki na primeru preveri pravilnost funkcije \.

3.4 Slučajni sprehod

Metodo za reševanje tridiagonalnega sistema bomo uporabili na primeru **slučajnega sprehoda** v eni dimenziji. Slučajni sprehod je vrsta **stohastičnega procesa**, ki ga lahko opišemo z **Markovsko verigo**

z množico stanj, ki je enako množici celih števil \mathbb{Z} . Če se na nekem koraku slučajni sprehod nahaja v stanju n , se lahko v naslednjem koraku z verjetnostjo $p \in [0, 1]$ premakne v stanje $n - 1$ ali z verjetnostjo $q = 1 - p$ v stanje $n + 1$. Prehodne verjetnosti slučajnega sprehoda so enake:

$$\begin{aligned} P(X_{i+1} = n + 1 \mid X_i = n) &= q \\ P(X_{i+1} = n - 1 \mid X_i = n) &= p. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Definicija Markovske verige

Markovska veriga je zaporedje slučajnih spremenljivk

$$X_1, X_2, X_3, \dots \tag{3.4}$$

z vrednostmi v množici stanj (\mathbb{Z} za slučajni sprehod), za katere velja Markovska lastnost

$$P(X_{i+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots X_i = x_i) = P(X_{i+1} = x \mid X_i = x_i). \tag{3.5}$$

Ta pove, da je verjetnost za prehod v naslednje stanje odvisna le od prejšnjega stanja in ne od starejše zgodovine stanj. V Markovski verigi tako zgodovina, kako je proces prišel v neko stanje, ne odloča o naslednjem stanju, odloča le stanje, v katerem se proces trenutno nahaja.

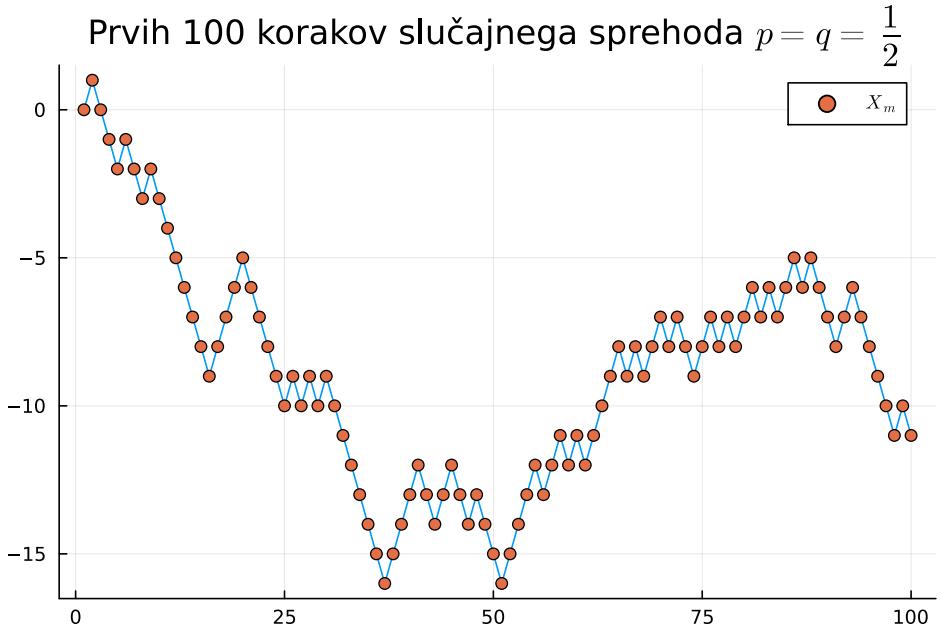
Verjetnosti $P(X_{i+1} = x \mid X_i = x_i)$ imenujemo *prehodne verjetnosti* Markovske verige. V nadaljevanju bomo privzeli, da so prehodne verjetnosti enake za vse korake k :

$$P(X_{k+1} = x \mid X_k = y) = P(X_2 = x \mid X_1 = y). \tag{3.6}$$

Simulirajmo prvih 100 korakov slučajnega sprehoda

```
""" Simuliraj `n` korakov slučajnega sprehoda s prehodno verjetnostima `p`
    in `1-p`."""
function sprehod(p, n)
    x = zeros(n)
    for i = 1:n-1
        x[i+1] = rand() < p ? x[i] + 1 : x[i] - 1
    end
    return x
end

using Plots
x = sprehod(0.5, 100)
plot(x, label=false)
scatter!(x, title="Prvih 100 korakov slučajnega sprehoda \$p=q=\frac{1}{2}\$",
    label="\$X_m\$")
```



Slika 6: Simulacija slučajnega sprehoda

Prehodna matrika Markovske verige

Za Markovsko verigo s končno množico stanj $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, lahko prehodne verjetnosti zložimo v matriko. Brez škode lahko stanja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ nadomestimo z naravnimi števili $\{1, 2, \dots, n\}$. Matriko P , katere elementi so prehodne verjetnosti prehodov med stanji Markovske verige

$$p_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i), \quad (3.7)$$

imenujemo **prehodna matrika** Markovske verige. Za prehodno matriko velja, da vsi elementi ležijo na $[0, 1]$ in da je vsota elementov po vrsticah enaka 1

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1. \quad (3.8)$$

Posledično je vektor samih enic $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ lastni vektor matrike P za lastno vrednost 1:

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}. \quad (3.9)$$

Prehodna matrika povsem opiše porazdelitev Markovske verige. Potence prehodne matrike P^m na primer določajo prehodne verjetnosti po m korakih:

$$P(X_m = j | X_1 = i). \quad (3.10)$$

3.5 Pričakovano število korakov

Poiskati želimo pričakovano število korakov, ko se slučajni sprehod prvič pojavi v stanju k ali $-k$. Zato bomo privzeli, da se sprehod v stanjih $-k$ in k ustavi in se ne premakne več.

Stanje, iz katerega se veriga ne premakne več, imenujemo *absorbirajoče stanje*. Za absorbirajoče stanje k je diagonalni element prehodne matrike enak 1, vsi ostali elementi v vrstici pa 0:

$$\begin{aligned} p_{kk} &= P(X_{i+1} = k | X_i = k) = 1 \\ p_{kl} &= P(X_{i+1} = l | X_i = k) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Stanje, ki ni absorbirajoče, imenujemo *prehodno stanje*. Markovske verige, ki vsebujejo vsaj eno absorbirajoče stanje, imenujemo **absorbirajoča Markovska veriga**.

Predpostavimo lahko, da je začetno stanje enako 0. Iščemo pričakovano število korakov, ko se slučajni sprehod prvič pojavi v stanju k ali $-k$. Zanemarimo stanja, ki so več kot k oddaljena od izhodišča in stanji k in $-k$ spremenimo v absorbirajoči stanji. Obravnavamo torej absorbirajočo verigo z $2k + 1$ stanji, pri kateri sta stanji $-k$ in k absorbirajoči, ostala stanja pa ne. Iščemo pričakovano število korakov, da iz začetnega stanja pridemo v eno od absorbirajočih stanj.

Za izračun iskane pričakovane vrednosti uporabimo **kanonično obliko prehodne matrike**.

Kanonična oblika prehodne matrike

Če ima Markovska veriga absorbirajoča stanja, lahko prehodno matriko zapišemo v bločni obliki

$$P = \begin{pmatrix} Q & T \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

kjer vrstice $[Q, T]$ ustrezajo prehodnim, vrstice $[0, I]$ pa absorbirajočim stanjem. Matrika Q opisuje prehodne verjetnosti za sprehod med prehodnimi stanji, matrika Q^m pa prehodne verjetnosti po m korakih, če se sprehajamo le po prehodnih stanjih.

Vsoto vseh potenc matrike Q

$$N = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m = (I - Q)^{-1} \quad (3.13)$$

imenujemo *fundamentalna matrika* absorbirajoče markovske verige. Element n_{ij} predstavlja pričakovano število obiskov stanja j , če začnemo v stanju i .

Pričakovano število korakov, da dosežemo absorbirajoče stanje iz začetnega stanja i , je i -ta komponenta produkta matrike N z vektorjem samih enic:

$$|(m) = N\mathbf{1} = (I - Q)^{-1}\mathbf{1}. \quad (3.14)$$

Če želimo poiskati pričakovano število korakov $|(m)$, moramo rešiti sistem linearnih enačb:

$$(I - Q) |(m) = \mathbf{1}. \quad (3.15)$$

Če nas zanima, kdaj bo sprehod prvič za k oddaljen od izhodišča, lahko začnemo v 0 in stanji k in $-k$ proglasimo za absorbcijska stanja. Prehodna matrika, ki jo dobimo, je tridiagonalna z 0 na diagonali. Matrika $I - Q$ je prav tako tridiagonalna z 1 na diagonali in z negativnimi verjetnostmi $-p$ na prvi poddiagonali in $-q = p - 1$ na prvi naddiagonali:

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -q & 0 & \dots & 0 \\ -p & 1 & -q & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -p & 1 & -q \\ 0 & \dots & 0 & -p & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Matrika $I - Q$ je tridiagonalna in po stolpcih diagonalno dominantna, zato lahko uporabimo Gaussovo eliminacijo brez pivotiranja. Najprej napišemo funkcijo, ki zgradi matriko $I - Q$:

```

using Vaja03
"""
N = matrika_sprehod(k, p)

Sestavi fundamentalno matriko za slučajni sprehod, ki se konča, ko se prvič
za `k` korakov oddalji od izhodišča.
"""

matrika_sprehod(k, p) = Tridiag(-p * ones(2k - 2), ones(2k - 1), -(1 - p) * ones(2k
- 2))

```

Program 11: Sestavi tridiagonalno matriko $I - Q$ za slučajni sprehod, ki se konča, ko se prvič oddalji za k korakov od izhodišča

Pričakovano število korakov izračunamo kot rešitev sistema $(I - Q)\mathbf{k} = \mathbf{1}$. Uporabimo operator \ za tridiagonalno matriko:

```

"""
Em = koraki(k, p)

Izračunaj pričakovano število korakov `Em`, ki jih potrebuje slučajni sprehod,
da doseže stanje `0` ali `2k`. Komponente vektorja `Em` vsebujejo pričakovano
število korakov, da sprehod pride v stanje `0` ali `2k`, če začne v stanju med
`1` in `2k - 1`.

"""

koraki(k, p) = matrika_sprehod(k, p) \ ones(2k - 1)

```

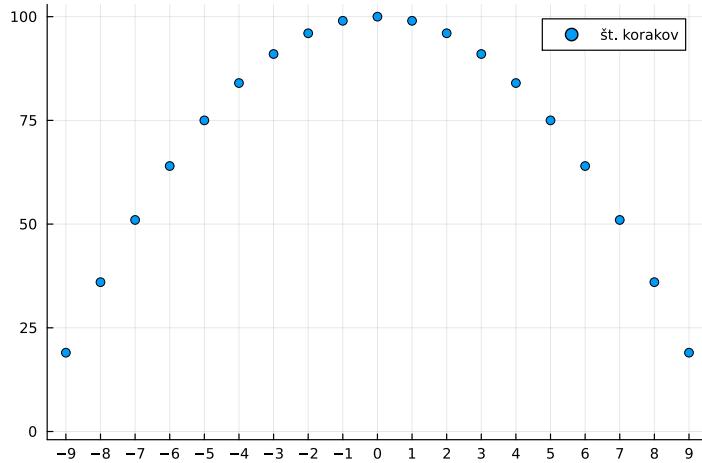
Program 12: Izračunaj vektor pričakovanih števil korakov, ki jih potrebuje slučajni sprehod, da se iz začetnega stanja med 1 in $2k - 1$ premakne v stanje 0 ali $2k$.

V matriki Q so stanja označena z indeksi matrike od 1 do $2k - 1$. Zato stanja premaknemo za $-k$, dobimo stanja $-k, -k + 1, \dots, 0, \dots, k$. Komponente vektorja \mathbf{k} tako predstavljajo pričakovano število korakov, ki jih slučajni sprehod potrebuje, da prvič doseže stanji $-k$ ali k , če začnemo v stanju $i \in \{-k + 1, -k + 2, \dots, 0, 1, \dots, k - 1\}$.

```

Em = koraki(10, 0.5)
scatter(-9:9, Em, label="št. korakov", xticks=-9:9)

```



Slika 7: Pričakovano število korakov, ko slučajni sprehod prvič doseže stanji -10 ali 10 , v odvisnosti od začetnega stanja $i \in \{-9, -8, \dots, -1, 0, 1, \dots, 8, 9\}$.

Za konec se prepričajmo še s [simulacijo Monte Carlo](#), da so rešitve, ki jih dobimo kot rešitev sistema, res prave. Slučajni sprehod simuliramo z generatorjem naključnih števil in izračunamo [vzorčno povprečje](#) za število korakov m .

```

using Random

"""
x1 = naslednje_stanje(p, x0)

Simuliraj naslednje stanje slučajnega sprehoda z naključnim generatorjem števil.

naslednje_stanje(p, x0) = x0 + (rand() < p ? -1 : 1)

"""

st_korakov = simuliraj_sprehod(k, p)

Simuliraj slučajni sprehod s prehodnima verjetnostima `p` in `1-p`.
Vrni število korakov, ki jih slučajni sprehod potrebuje, da se prvič
oddalji za `k` korakov od izhodišča.

"""

function simuliraj_sprehod(k, p, x0=0)
    koraki = 0
    while (abs(x0) < k)
        x0 = naslednje_stanje(p, x0)
        koraki += 1
    end
    koraki
end

```

Program 13: Simulacija z generatorjem naključnih števil. Vzorčno povprečje da oceno za pričakovano število korakov.

Za $k = 10$ je pričakovano število korakov enako 100. Poglejmo, kako se rezultat ujema z vzorčnim povprečjem po velikem številu sprehodov.

```

Random.seed!(691)
n = 100_000
k, p = 10, 0.5
kp = sum([simuliraj_korake(k, p) for _ in 1:n]) / n
println("Vzorčno povprečje za vzorec velikosti $n je $kp.")

```

Vzorčno povprečje za vzorec velikosti 100000 je 100.09526

3.6 Rešitve

```

# Vgrajene funkcije moramo naložiti, če jim želimo dodati nove metode.
import Base: size, getindex, setindex!, *, \
"""
size(T::Tridiag)

Vrni dimenzije tridiagonalne matrike `T`.
"""
size(T::Tridiag) = (length(T.d), length(T.d))

```

Program 14: Metoda `size` vrne dimenzije matrike

```

"""
elt = getindex(T, i, j)

Vrni element v `i`-ti vrstici in `j`-tem stolpcu tridiagonalne matrike `T`.
Ta funkcija se pokliče, ko dostopamo do elementov matrike z izrazom `T[i, j]`.
"""
function getindex(T::Tridiag, i, j)
    n, _m = size(T)
    if (i < 1) || (i > n) || (j < 1) || (j > n)
        throw(BoundsError(T, (i, j)))
    end
    if i == j - 1
        return T.zd[i]
    elseif i == j
        return T.d[i]
    elseif i == j + 1
        return T.sd[j]
    else
        return zero(T.d[1])
    end
end

```

Program 15: Metoda `getindex` se pokliče, ko uporabimo izraz `T[i, j]`

```

"""
setindex!(T, x, i, j)

Nastavi element `T[i, j]` na vrednost `x`. Ta funkcija se pokliče, ko uporabimo
zapis `T[i, j] = x`.

"""
function setindex!(T::Tridiag, x, i, j)
    n, _m = size(T)
    if (i < 1) || (i > n) || (j < 1) || (j > n)
        throw(BoundsError(T, (i, j)))
    end
    if i == j - 1
        T.zd[i] = x
    elseif i == j
        T.d[i] = x
    elseif i == j + 1
        T.sd[j] = x
    else
        error("Elementa [$i, $j] ni mogoče spremeniti.")
    end
end

```

Program 16: Metoda `setindex!` se pokliče, ko uporabimo izraz $T[i, j]=x$

```

"""
y = T*x

Izračunaj produkt tridiagonalne matrike `T` z vektorjem `x`.

"""
function *(T::Tridiag, x::Vector)
    n = length(T.d)
    if (n != length(x))
        error("Dimenzije se ne ujemajo!")
    end
    y = zero(x)
    y[1] = T[1, 1] * x[1] + T[1, 2] * x[2]
    for i = 2:n-1
        y[i] = T[i, i-1] * x[i-1] + T[i, i] * x[i] + T[i, i+1] * x[i+1]
    end
    y[n] = T[n, n-1] * x[n-1] + T[n, n] * x[n]
    return y
end

```

Program 17: Množenje tridiagonalne matrike z vektorjem

```

"""
x = T\b

Izračunaj rešitev sistema `Tx = b`, kjer je `T` tridiagonalna matrika in `b`
vektor desnih strani.

"""

function \(T::Tridiag, b::Vector)
n, _ = size(T)
# ob eliminaciji se spremeni le glavna diagonala
T = Tridiag(T.sd, copy(T.d), T.zd)
b = copy(b)
# eliminacija
for i = 2:n
    l = T[i, i-1] / T[i-1, i-1]
    T[i, i] = T[i, i] - l * T[i-1, i]
    b[i] = b[i] - l * b[i-1]
end
# obratno vstavljanje
b[n] = b[n] / T[n, n]
for i = (n-1):-1:1
    b[i] = (b[i] - T[i, i+1] * b[i+1]) / T[i, i]
end
return b
end

```

Program 18: Reševanje tridiagonalnega sistema linearnih enačb

3.6.1 Testi

```

@testset "Dostop do elementov" begin
    T = Tridiag([1, 2], [3, 4, 5], [6, 7])
    # diagonalna
    @test T[1, 1] == 3
    @test T[2, 2] == 4
    @test T[3, 3] == 5
    # spodaj
    @test T[2, 1] == 1
    @test T[3, 2] == 2
    @test T[3, 1] == 0
    # zgoraj
    @test T[1, 2] == 6
    @test T[2, 3] == 7
    @test T[1, 3] == 0
    # izven obsega
    @test_throws BoundsError T[1, 4]
end

```

Program 19: Testi za funkcijo getindex

```

@testset "Nastavljanje elementov" begin
    T = Tridiag([1, 1], [1, 1, 1], [1, 1])
    T[2, 2] = 2
    T[2, 3] = 3
    T[2, 1] = 4
    @test T[1, 1] == 1
    @test T[2, 2] == 2
    @test T[2, 3] == 3
    @test T[2, 1] == 4
    # izven obsega
    @test_throwsErrorException T[1, 3] = 2
end

```

Program 20: Testi za funkcijo setindex!

```

@testset "Množenje z vektorjem" begin
    T = Tridiag([1, 2], [3, 4, 5], [6, 7])
    A = [3 6 0; 1 4 7; 0 2 5]
    x = [1, 2, 3]
    @test T * x == A * x
end

```

Program 21: Testi za množenje

```
@testset "Reševanje sistema" begin
```

Program 22: Testi za operator \ (reševanje tridiagonalnega sistema)

4 Minimalne ploskve

4.1 Naloga

Žično zanko s pravokotnim tlorisom potopimo v milnico, tako da se nanjo napne milna opna. Naša naloga bo poiskati obliko milne opne. Malo brskanja po fizikalnih knjigah in internetu hitro razkrije, da ploskve, ki tako nastanejo, sodijo med **minimalne ploskve**, ki so burile domišljijo mnogih matematikov in nematematikov. Minimalne ploskve so navdihovale tudi umetnike in arhitekte. Eden najbolj znanih primerov uporabe minimalnih ploskev v arhitekturi je streha münchenskega olimpijskega stadiona, ki jo je zasnoval **Frei Otto** s sodelavci. Frei Otto je eksperimentiral z milnimi mehurčki in elastičnimi tkaninami, s katerimi je ustvarjal nove oblike.



Slika 8: Streha olimpijskega stadiona v Münchenu (vir [wikipedia](#))

Namen te vaje je primerjava eksplisitnih in iterativnih metod za reševanje linearnih sistemov enačb. Prav tako se bomo naučili, kako zgradimo matriko sistema in desne strani enačb za spremenljivke, ki niso podane z vektorjem, temveč kot elementi matrike. V okviru te vaje zato opravi naslednje naloge:

- Izpelji matematični model za minimalne ploskve s pravokotnim tlorisom.
- Zapiši problem iskanja minimalne ploskve kot **robni problem za Laplaceovo enačbo** na pravokotniku.
- Robni problem diskretiziraj in zapiši v obliki sistema linearnih enačb.
- Reši sistem linearnih enačb z LU razcepom. Uporabi knjižnico **SparseArrays** za varčno hranjenje matrike sistema.
- Preveri, kako se število neničelnih elementov poveča pri LU razcepu razpršene matrike.
- Uporabi iterativne metode (Jacobijeva, Gauss-Seidlova in SOR iteracija) na elementih matrike višinskih vrednosti ploskevin reši sistem enačb brez eksplisitne uporabe matrike sistema.
- Nariši primer minimalne ploskve.

- Animiraj konvergenco iterativnih metod.

4.2 Matematično ozadje

Ploskev v trirazsežnem prostoru lahko predstavimo eksplisitno s funkcijo dveh spremenljivk $z = u(x, y)$, ki predstavlja višino ploskve nad točko (x, y) . Naša naloga je poiskati približek za funkcijo $u(x, y)$ na danem pravokotnem območju, ki opisuje obliko milne opne napete na žični zanki s pravokotnim tlorisom.

Funkcija $u(x, y)$, ki opisuje milno opno, zadošča matematična enačbi:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y), \quad (4.1)$$

znani pod imenom [Poissonova enačba](#). Diferencialni operator

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

imenujemo [Laplaceov operator](#).

Funkcija $\rho(x, y)$ je sorazmerna tlačni razliki med zgornjo in spodnjo površino milne opne in je posledica teže milnice. Če tlačno razliko zanemarimo, dobimo [Laplaceovo enačbo](#):

$$\Delta u(x, y) = 0. \quad (4.3)$$

Enačbo, ki vsebuje parcialne odvode, imenujemo [parcialna diferencialna enačba](#) ali s kratico PDE. Rešitev PDE je funkcija več spremenljivk, ki zadošča dani enačbi. Vrednosti $u(x, y)$ na robu območja so določene z obliko zanke, medtem ko za vrednosti v notranjosti velja enačba (4.3). Problem za diferencialno enačbo, pri katerem so podane vrednosti na robu, imenujemo [robni problem](#). Ker je oblika milnice določena na robu, lahko iskanje oblike milnice prevedemo na robni problem za Laplaceovo PDE na območju, omejenem s tlorisom žične zanke.

V nadaljevanju predpostavimo, da je območje pravokotnik $[a, b] \times [c, d]$. Poleg Laplaceove enačbe (4.3) veljajo za vrednosti funkcije $u(x, y)$ tudi [robni pogoji](#):

$$\begin{aligned} u(x, c) &= f_s(x), \\ u(x, d) &= f_z(x), \\ u(a, y) &= f_l(y) \text{ in} \\ u(b, y) &= f_d(y), \end{aligned} \quad (4.4)$$

kjer so f_s, f_z, f_l in f_d dane funkcije. Rešitev robnega problema je tako odvisna od izbire območja, kot tudi od robnih pogojev.

4.3 Diskretizacija in linearni sistem enačb

Problema se bomo lotili numerično, zato bomo vrednosti $u(x, y)$ poiskali le v končno mnogo točkah: problem bomo [diskretizirali](#). Za diskretizacijo je najpreprosteje uporabiti enakomerno razporejeno pravokotno mrežo točk na pravokotniku. Točke na mreži imenujemo [vozlišča](#). Zaradi enostavnosti se omejimo na mreže z enakim razmikom v obeh koordinatnih smereh. Interval $[a, b]$ razdelimo na $n + 1$ delov, interval $[c, d]$ pa na $m + 1$ delov. Dobimo zaporedje koordinat, ki definirajo pravokotno mrežo točk (x_j, y_i) :

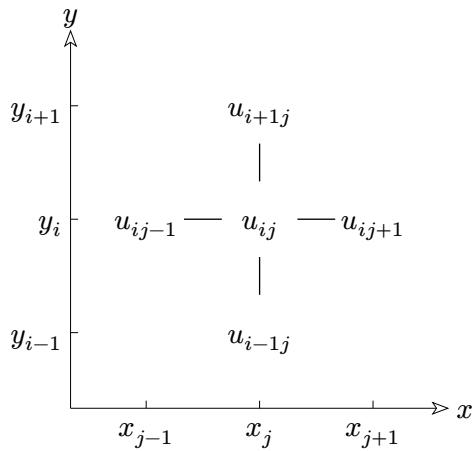
$$\begin{aligned} a = x_0, x_1 \dots x_{n+1} &= b \text{ in} \\ c = y_0, y_1 \dots y_{m+1} &= d. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Namesto funkcije $u : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tako iščemo le vrednosti

$$u_{ij} = u(x_j, y_i), \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m. \tag{4.6}$$

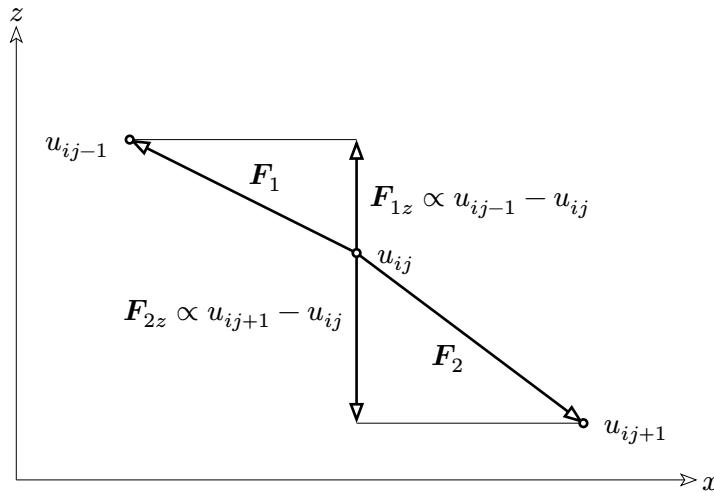
Elemente matrike u_{ji} določimo tako, da je v limiti, ko gre razmik med vozlišči proti 0, izpolnjena Laplaceova enačba (4.3).

Laplaceovo enačbo lahko diskretiziramo s **končnimi diferencami**. Lahko pa dobimo navdih pri arhitektu Ottu, ki je minimalne ploskve raziskoval z **elastičnimi tkaninami**. Ploskev si predstavljamo kot elastično tkanino, ki je fina kvadratna mreža iz elastičnih nitk. Vsako vozlišče v mreži je povezano s štirimi sosednjimi vozlišči.



Slika 9: Sosedne vrednosti vozlišča

Vozlišče bo v ravnovesju, ko bo vsota vseh sil nanj enaka 0.



Slika 10: Vektorske komponente sil, ki delujejo na vozlišče (x_j, y_i) iz sosednjih vozlišč (x_{j-1}, y_i) in (x_{j+1}, y_i) .

Predpostavimo, da so vozlišča povezana z idealnimi vzmetmi in je sila sorazmerna z vektorjem med položaji vozlišč. Če zapišemo enačbo za komponente sile v smeri z , dobimo za točko (x_j, y_i, u_{ij}) enačbo:

$$\begin{aligned}(u_{i-1j} - u_{ij}) + (u_{ij-1} - u_{ij}) + (u_{i+1j} - u_{ij}) + (u_{ij+1} - u_{ij}) &= 0 \\ u_{i-1j} + u_{ij-1} - 4u_{ij} + u_{i+1j} + u_{ij+1} &= 0.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Za vsako vrednost u_{ij} dobimo eno enačbo. Tako dobimo sistem $n \cdot m$ linearnih enačb za $n \cdot m$ neznank. Ker so vrednosti na robu določene z robnimi pogoji, moramo elemente u_{0j}, u_{m+1j}, u_{i0} in u_{in+1} prestaviti na desno stran in jih upoštevati kot konstante.

4.4 Matrika sistema linearnih enačb

Sisteme linearnih enačb navadno zapišemo v matrični obliki:

$$Ax = b,\tag{4.8}$$

kjer je A kvadratna matrika, x in b pa vektorja. V našem primeru je to nekoliko bolj zapleteno, saj so spremenljivke u_{ij} elementi matrike. Zato jih moramo najprej razvrstiti v vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots]^T$. Najpogosteje elemente u_{ij} razvrstimo v vektor \mathbf{x} po stolpcih, tako da je:

$$\mathbf{x} = [u_{11}, u_{21} \dots u_{m1}, u_{12}, u_{22} \dots u_{1m} \dots u_{m-1n}, u_{mn}]^T.\tag{4.9}$$

Iz enačb (4.7) lahko potem razberemo matriko A. Za $n = m = 3$ dobimo 9×9 matriko

$$A^{9,9} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},\tag{4.10}$$

ki je sestavljena iz 3×3 blokov

$$L^{3,3} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad I^{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{4.11}$$

Vektor desnih strani prav tako razberemo iz enačbe (4.7). Za $n = m = 3$ dobimo vektor:

$$\mathbf{b} = -[u_{01} + u_{10}, u_{20}, u_{30} + u_{41}, u_{02}, 0, u_{42}, u_{03} + u_{14}, u_{24}, u_{34} + u_{43}]^T.\tag{4.12}$$

V splošnem je formulo za vektor desnih strani lažje sprogramirati, zato bomo zapis izpustili.

Razvrstitev po stolpcih in operator vec

Eden od načinov, kako lahko elemente matrike razvrstimo v vektor, je tako, da stolpce matrike enega za drugim postavimo v vektor. Indeks v vektorju k lahko izrazimo z indeksi i, j v matriki s formulo

$$k = i + (j - 1)m. \quad (4.13)$$

Ta način preoblikovanja matrike v vektor označimo s posebnim operatorjem vec:

$$\begin{aligned} \text{vec} : \mathbb{R}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n} \\ \text{vec}(A)_{i+(j-1)m} &= a_{ij}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.5 Izpeljava sistema s Kroneckerjevim produkтом

Množenje matrike A z vektorjem $x = \text{vec}(U)$ lahko zapišemo kot:

$$A \text{vec}(U) = \text{vec}(LU + UL), \quad (4.15)$$

kjer je L matrika Laplaceovega operatorja v eni dimenziji, ki ima -2 na diagonali in 1 na spodnji in zgornji obdiagonali:

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Res! Moženje matrike U z matriko L z leve je ekvivalentno množenju stolpcev matrike U z matriko L , medtem ko je množenje z matriko L z desne ekvivalentno množenju vrstic matrike U z matriko L . Prispevek množenja z leve predstavlja vsoto sil sosednjih vozlišč v smeri y , medtem ko množenje z desne predstavlja vsoto sil sosednjih vozlišč v smeri x . Element produkta $LU + UL$ na mestu (i, j) je enak:

$$\begin{aligned} (LU + UL)_{ij} &= \sum_{k=1}^m l_{ik} u_{kj} + \sum_{k=1}^n u_{ik} l_{kj} \\ &= u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j} + u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

kar je enako desni strani enačbe (4.7).

Operacijo množenja matrike $U : U \mapsto LU + UL$ lahko predstavimo s **Kroneckerjevim produkтом** \otimes , saj velja $\text{vec}(AXB) = A \otimes B \cdot \text{vec}(X)$. Tako velja:

$$\begin{aligned} A \text{vec}(U) &= \text{vec}(LU + UL) = \text{vec}(LUI + IUL) = \text{vec}(LUI) + \text{vec}(IUL) \\ &= (L \otimes I) \text{vec}(U) + (I \otimes L) \text{vec}(U) \end{aligned} \quad (4.18)$$

in

$$A^{N,N} = L^{m,m} \otimes I^{n,n} + I^{m,m} \otimes L^{n,n}. \quad (4.19)$$

Kroneckerjev produkt in operator vec v Juliji

Programski jezik Julia ima vgrajene funkcije `vec` in `kron` za preoblikovanje matrik v vektorje in računanje Kroneckerjevega produkta. Z ukazom `reshape` pa lahko iz vektorja znova zgradimo matriko.

4.6 Numerična rešitev z LU razcepom

Preden se lotimo programiranja, ustvarimo nov paket za to vajo:

```
(nummat) pkg> generate Vaja04
(nummat) pkg> develop Vaja04/
```

Nato dodamo pakete, ki jih bomo potrebovali:

```
(nummat) pkg> activate Vaja04
(Vaja04) pkg> add SparseArrays
```

Kodo bomo organizirali tako, da bomo najprej ustvarili podatkovni tip, ki opiše robni problem za PDE na pravokotniku:

```
"""
rp = RobniProblemPravokotnik(op, ((a, b), (c, d)), [fs, fz, fl, fd])

Ustvari objekt tipa `RobniProblemPravokotnik`, ki hrani podatke za robni problem
za diferencialni operator `op` na pravokotniku `[a, b] x [c, d]` z robnimi
pogoji, podanimi s funkcijami `fs`, `fz`, `fl`, `fd`. Funkcija `fs` določa robni
pogoj na spodnjem robu `y = c`, funkcija `fz` robni pogoj na zgornjem robu `y = d`,
funkcija `fl` na levem robu `x = a` in funkcija `fd` robni pogoj na desnem robu
`x = b`.

"""
struct RobniProblemPravokotnik
    op # abstraktni podatkovni tip, ki opiše diferencialni operator
    meje # meje pravokotnika [a, b] x [c, d] v obliki [(a, b), (c, d)]
    rp # funkcije na robu [fs, fz, fl, fd], f(a, y) = fl(y), f(x, c) = fs(x) ...
end
```

Definiramo še abstraktni tip brez polj, ki predstavlja Laplaceov diferencialni operator (4.2) in ga bomo lahko dodali v polje za operator v `RobniProblemPravokotnik`:

```
"""
L = Laplace()

Ustvari abstraktni objekt tipa `Laplace`, ki predstavlja Laplaceov diferencialni
operator.

"""
struct Laplace end
```

Abstraktni podatkovni tipi

Programski jezik Julija ne pozna razredov. Uporaba [abstraktnih podatkovnih tipov](#), kot je `Laplace`, omogoča [polimorfizem](#). Na ta način lahko kodo organiziramo tako, da odraža abstraktne matematične pojme, kot je v našem primeru robni problem za PDE.

Robni problem za Laplaceovo enačbo na pravokotniku $[0, \pi] \times [0, \pi]$ z robnimi pogoji:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, \pi) = \sin(x) \text{ in} \\ u(0, y) &= u(\pi, y) = \sin(y) \end{aligned} \tag{4.20}$$

lahko predstavimo z objektom:

```
rp = RobniProblemPravokotnik(  
    Laplace(),           # operator  
    ((0, pi), (0, pi)), # pravokotnik  
    (sin, sin, sin, sin) # funkcije na robu  
)
```

Zaenkrat si s tem objektom še ne moremo nič pomagati. Zato napišemo funkcije, ki bodo poiskale rešitev za dan robni problem. Kot smo videli v poglavju 4.3, lahko približek za rešitev robnega problema poiščemo kot rešitev linearnega sistema enačb (4.7). Najprej napišemo funkcijo, ki generira matriko sistema:

```
function matrika(_::Laplace, n, m)
```

za dane dimenzijs notranje mreže $n \times m$ (za rešitev glej Program 24). Nato na robu mreže izračunamo robne pogoje in sestavimo vektor desnih strani sistema (4.7). Ker je preslikovanje dvojnega indeksa v enojni in nazaj precej sitno, bomo večino operacij naredili na matriki vrednosti $U = [u_{ij}]$ dimenzij $(m + 2) \times (n + 2)$, ki vsebuje tudi vrednosti na robu. Napisali bomo funkcijo

```
U0, x, y = diskretiziraj(rp::RobniProblemPravokotnik, h),
```

ki poišče pravokotno mrežo z razmikom med vozlišči približno h in izračuna vrednosti na robu. Rezultati funkcije `diskretiziraj` so matrika $U0$, vektor x in vektor y . Rezultat $U0$ je matrika, ki ima notranje elemente enake 0, robni elementi pa so določeni z robnimi pogoji. Vektorja x in y pa vsebujeta delilne točke na intervalih $[a, b]$ in $[c, d]$.

Iz matrike $U0$ lahko sedaj dokaj preprosto sestavimo desne strani enačb. Notranje indekse zaporedoma zamaknemo v levo, desno, gor in dol in seštejemo ustrezne podmatrike. Rezultat nato spremenimo v vektor s funkcijo `vec` (za rešitev glej Program 25).

Ko imamo pripravljeno matriko in desne strani, vse skupaj zložimo v funkcijo:

```
U, x, y = resi(rp::RobniProblemPravokotnik, h),
```

ki za dani robni problem rp in razmik med vozlišči h sestavi matriko sistema, izračuna desne strani na podlagi robnih pogojev in reši sistem. Rezultat nato vrne v obliki matrike vrednosti U in vektorjev delilnih točk x in y (za rešitev glej Program 26).

Napisane programe uporabimo za rešitev robnega problema za pravokotnik $[0, \pi] \times [0, \pi]$ z robnimi pogoji

$$\begin{aligned}
 u(0, y) &= 0 \\
 u(\pi, y) &= 0 \\
 u(x, 0) &= \sin(x) \\
 u(x, \pi) &= \sin(x).
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

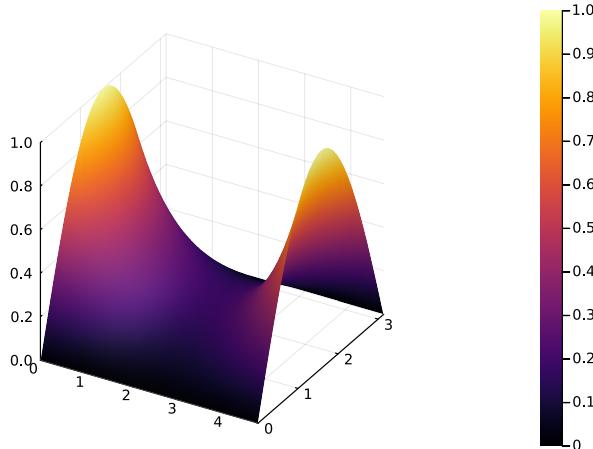
Definiramo robni problem in uporabimo funkcijo `resi`. Ploskev narišemo s funkcijo `surface`.

```

rp = RobniProblemPravokotnik(
    Laplace(),           # operator
    ((0, 3pi/2), (0, pi)), # pravokotnik
    (x -> 0, x -> 0, sin, sin) # funkcije na robu
)

U, x, y = resi(rp, 0.1)
using Plots
surface(x, y, U)

```



Slika 11: Rešitev robnega problema za Laplaceovo enačbo

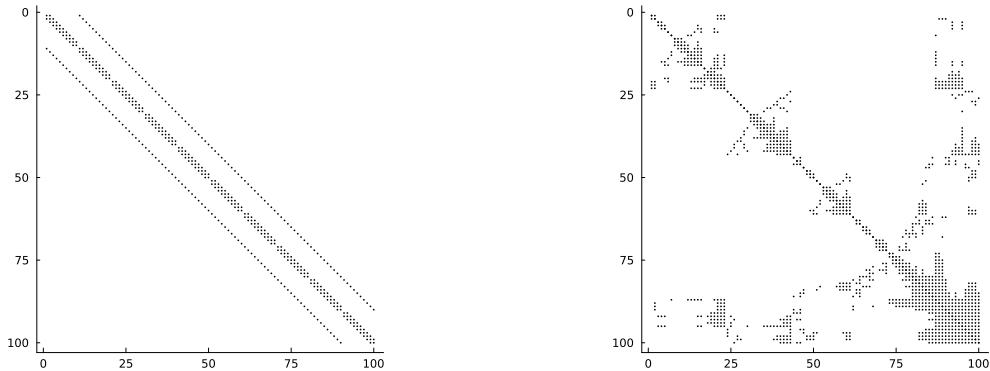
4.7 Napolnitev matrike ob eliminaciji

Matrika Laplaceovega operatorja ima veliko ničelnih elementov. Takim matrikam pravimo [razpršene ali redke matrike](#). Razpršenost matrike lahko izkoristimo za prihranek prostora in časa, kot smo že videli pri tridiagonalnih matrikah (Poglavlje 3). Vendar se pri LU razcepu, ki ga uporablja operator `\` za rešitev sistema, delež neničelnih elementov matrike pogosto poveča. Poglejmo, kako se odreže matrika za Laplaceov operator.

```

using LinearAlgebra
A = Vaja04.matrika(Laplace(), 10, 10)
p1 = spy(A .!= 0, legend=false) # na grafu prikažemo neničelne elemente
F = lu(A)
p2 = spy(F.L .!= 0, legend=false) # neničelni elementi za faktor L
spy!(p2, F.U .!= 0, legend=false) # in za faktor U

```



Slika 12: Neničelni elementi matrike za Laplaceov operator (levo) in njenega LU razcepa (desno). Število ničelnih elementov se pri LU razcepnu poveča. Kljub temu sta L in U v razcepnu še vedno precej redki matriki.

Podatkovni tipi za matrične razcepe v Juliji

V knjižnici [LinearAlgebra](#) so implementacije standardnih matričnih razcepov, kot so LU razcep, razcep Choleskega, QR razcep in drugi. Rezultat, ki ga Julia vrne, ko naredimo matrični razcep je poseben podatkovni tip. Tako metoda `lu` vrne rezultat tipa `LU`. Podatkovni tip `LU` je poseben tip, ki hrani rezultate LU razcepa na učinkovit način. Poleg tega so za tip `LU` definirane posebne metode za generične funkcije kot na primer `\`, ki uporabi matrični razcep za učinkovito reševanje linearnega sistema. Poglejmo si, kako LU razcep uporabimo za rešitev sistema enačb:

```
A = [1 2; 3 4] # matrika sistema A x = b
b = [1, 1] # desne strani
F = lu(A) # funkcija lu vrne poseben podatkovni tip,
x = F \ b # ki ga lahko uporabimo za rešitev sistema
```

Funkcija `factorize` vrne najbolj primeren razcep za dano matriko. Na primer za simetrično pozitivno definitno matriko, funkcija `facotrize` vrne razcep Choleskega.

4.8 Iteracijske metode

V prejšnjih podpoglavljih smo poiskali približno obliko minimalne ploskve, tako da smo linearni sistem (4.7) rešili z LU razcepom. Največ težav smo imeli z zapisom matrike sistema in desnih strani. Poleg tega je matrika sistema redka, ko izvedemo LU razcep pa se matrika deloma napolni. Pri razpršenih matrikah tako pogosto uporabimo [iterativne metode](#) za reševanje sistemov enačb, pri katerih se matrika ne spreminja in zato prihranimo veliko na prostorski in časovni zahtevnosti.

Ideja iteracijskih metod je preprosta. Enačbe preuredimo tako, da ostane na eni strani le en element s koeficientom 1. Tako dobimo iteracijsko formulo za zaporedje približkov $u_{ij}^{(k)}$. Če zaporedje konvergira, je limita ena od rešitev rekurzivne enačbe. V primeru linearnih sistemov je rešitev enolična.

V našem primeru enačb za minimalne ploskve (4.7), izpostavimo element u_{ij} in dobimo rekurzivne enačbe:

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{ij-1}^{(k)} + u_{i-1j}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k)} + u_{ij+1}^{(k)} \right), \quad (4.22)$$

ki ustrezajo [Jacobijevi iteraciji](#). Približek za rešitev dobimo tako, da zaporedoma uporabimo rekurzivno formulo (4.22).

Pogoji konvergencije

Rekli boste, da je preveč enostavno enačbe le prurediti in se potem rešitev kar sama pojavi, če le dovolj dolgo računamo. Gotovo se nekje skriva kak „hakelc“. Res je! Težave se pojavijo, če zaporedje približkov **ne konvergira dovolj hitro** ali pa sploh ne. Jacobijeva, Gauss-Seidlova in SOR iteracija **ne konvergirajo vedno**, zagotovo pa konvergirajo, če je matrika **diagonalno dominantna po vrsticah**.

Konvergenco Jacobijeve iteracije lahko izboljšamo, če namesto vrednosti $u_{i-1,j}^{(k)}$ in $u_{i,j-1}^{(k)}$ uporabimo nove vrednosti $u_{i-1,j}^{(k+1)}$ in $u_{i,j-1}^{(k+1)}$, ki so bile že izračunane (elemente $u_{i,j}^{(k+1)}$ računamo po leksikografskem vrstnem redu). Če nove vrednosti upobimo v iteracijski formuli, dobimo **Gauss-Seidlovo iteracijo**:

$$u_{i,j}^{(k+1)}\{GS\} = \frac{1}{4}\left(u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}\right). \quad (4.23)$$

Konvergenco še izboljšamo, če približek $u_{i,j}^{(k+1)}$, ki ga dobimo z Gauss-Seidlovo metodo, malce „pokvarimo“ s približkom na prejšnjem koraku $u_{i,j}^{(k)}$. Tako dobimo **metodo SOR**:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(k+1)}\{GS\} &= \frac{1}{4}\left(u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}\right) \\ u_{i,j}^{(k+1)}\{SOR\} &= \omega u_{i,j}^{(k+1)}\{GS\} + (1 - \omega)u_{i,j}^{(k)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Parameter ω je lahko poljubno število na intervalu $(0, 2)$. Pri $\omega = 1$ dobimo Gauss-Seidlovo iteracijo.

Prednost iteracijskih metod je, da jih je zelo enostavno implementirati. Za Laplaceovo enačbo je en korak Gauss-Seidlove iteracije podan s preprosto zanko.

```
"""
U = korak_gs(U0)

Izvedi en korak Gauss-Seidlove iteracije za Laplaceovo enačbo. Matrika `U0`
vsebuje približke za vrednosti funkcije na mreži.

"""

function korak_gs(U0)
    U = copy(U0)
    m, n = size(U)
    # spremenimo le notranje vrednosti
    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1
            # Gauss Seidel
            U[i, j] = (U[i+1, j] + U[i, j+1] + U[i-1, j] + U[i, j-1]) / 4
        end
    end
    return U
end
```

Program 23: Poišči naslednji približek Gauss-Seidlove iteracije za diskretizacijo Laplaceove enačbe.

Napišite še funkciji `korak_jacobi(U0)` in `korak_sor(U0, omega)`, ki izračunata naslednji približek za Jacobijovo in SOR iteracijo za sistem za Laplaceovo enačbo. Nato napišite še funkcijo

```
x, k = iteracija(korak, x0),
```

ki izračuna zaporedje približkov za poljubno iteracijsko metodo, dokler se rezultat ne spreminja več znotraj določene tolerance. Argument korak je funkcija, ki iz danega približka izračuna naslednjega, argument x_0 pa začetni približek iteracije.

Rešitve so na koncu poglavja v programih Program 27, Program 28 in Program 29.

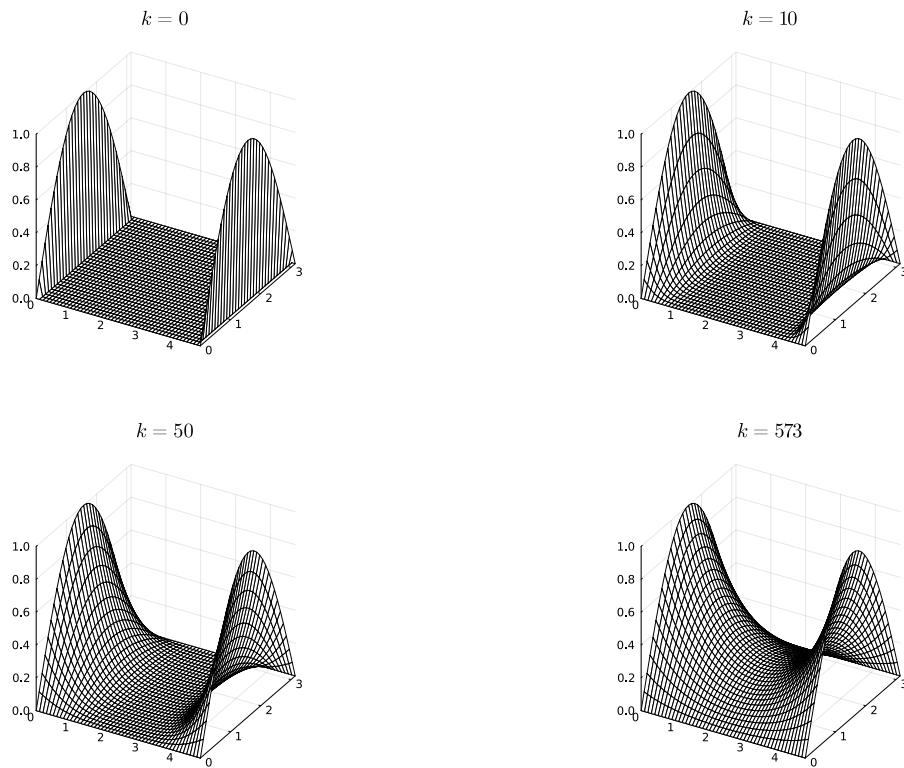
4.8.1 Konvergenca

Poglejmo si, kako zaporedje približkov Gauss-Seidlove iteracije konvergira k rešitvi.

```
U0, x, y = Vaja04.diskretiziraj(rp, 0.1)
wireframe(x, y, U0, legend=false, title="\$ k=0 \$")

U = U0
for i = 1:10
    U = Vaja04.korak_gs(U)
end
wireframe(x, y, U, legend=false, title="\$k=10\$")

U, it = Vaja04.iteracija(Vaja04.korak_gs, U0; atol=1e-3)
wireframe(x, y, U, legend=false, title="\$k=\$it\$")
```



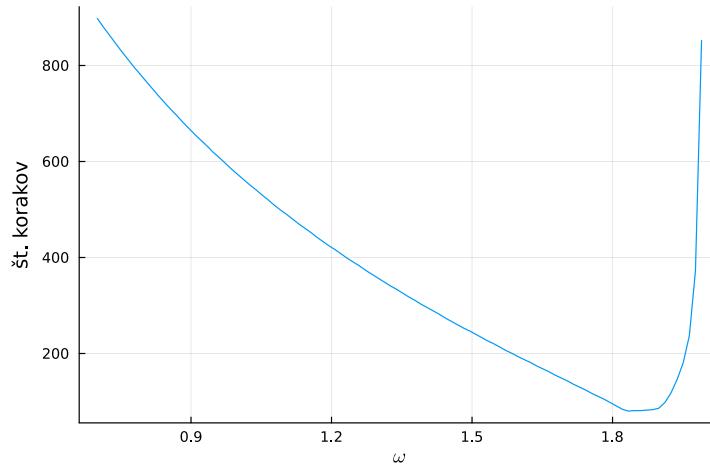
Slika 13: Približki Gauss-Seidlove iteracije za $k = 0, 10, 50$ in končni približek.

Za metodo SOR je hitrost konvergencije odvisna od izbire parametra ω . Odvisnost od parametra ω je različna za različne matrike in začetne približke. Oglejmo si odvisnost za primer sistema, ki ga dobimo z diskretizacijo Laplaceove enačbe.

```

ω = range(0.7, 1.99, 100)
koraki = Vector{Float64}()
for ω_i in ω
    _, k = Vaja04.iteracija(U -> Vaja04.korak_sor(U, ω_i), U0; atol=1e-3)
    push!(koraki, k)
end
plot(ω, koraki, label=false, ylabel="št. korakov", xlabel="\$\\omega\$")

```



Slika 14: Odvisnost potrebnega število korakov SOR iteracije od parametra ω

4.9 Rešitve

```

using SparseArrays

laplace(n) = spdiagm(1 => ones(n - 1), 0 => -2 * ones(n), -1 => ones(n - 1))
enota(n) = spdiagm(0 => ones(n))

"""
A = matrika(Laplace(), n, m)

Ustvari matriko za diskretizacijo Laplaceovega operatorja v dveh dimenzijah
na pravokotni mreži dimenzije `n` krat `m`. Parameter `m` je število delilnih
točk v y smeri, `n` pa v x smeri.
"""

function matrika(_::Laplace, m, n)
    return kron(laplace(n), enota(m)) + kron(enota(n), laplace(m))
end

```

Program 24: Generiraj matriko za diskretizacijo Laplaceovega operatorja.

```

"""
U0, x, y = diskretiziraj(rp::RobniProblemPravokotnik, h)

Diskretiziraj robni problem na pravokotniku `rp` s korakom `h`.
"""

function diskretiziraj(rp::RobniProblemPravokotnik, h)
    (a, b), (c, d) = rp.meje
    m = Integer(floor((d - c) / h))
    n = Integer(floor((b - a) / h))
    U0 = zeros(m + 2, n + 2)
    fs, fz, fl, fd = rp.rp
    x = range(a, b, n + 2)
    y = range(c, d, m + 2)
    U0[:, 1] = fl.(y)
    U0[:, end] = fd.(y)
    U0[1, :] = fs.(x)
    U0[end, :] = fz.(x)
    return U0, x, y
end

function desne_strani(U0)
    return -vec(U0[2:end-1, 1:end-2] + U0[2:end-1, 3:end] +
                U0[1:end-2, 2:end-1] + U0[3:end, 2:end-1])
end

```

Program 25: Izračunaj robne pogoje in desne strani sistema za diskretizacijo Laplaceove enačbe.

```

"""
U, x, y = resi(rp, h, metoda)

Poišči rešitev robnega problema na pravokotniku na pravokotni mreži z razmikom
`h` med posameznimi vozlišči v obeh dimenzijah.
"""

function resi(rp::RobniProblemPravokotnik, h)
    U, x, y = diskretiziraj(rp, h)
    n = length(x) - 2
    m = length(y) - 2
    A = matrika(rp.op, m, n)
    d = desne_strani(U)
    res = A \ d # reši sistem
    U[2:end-1, 2:end-1] = reshape(res, m, n) # preoblikuj rešitev v matriko
    return U, x, y
end

```

Program 26: Poišči približno rešitev robnega problema za Laplaceovo enačbo.

```

"""
U = korak_jacobi(U0)

Izvedi en korak Jacobijeve iteracije za Laplaceovo enačbo. Matrika `U0` vsebuje
približke za vrednosti funkcije na mreži, funkcija vrne naslednji približek.
"""

function korak_jacobi(U0)
    U = copy(U0)
    m, n = size(U)
    # spremenimo le notranje vrednosti
    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1
            # Jacobi
            U[i, j] = (U0[i+1, j] + U0[i, j+1] + U0[i-1, j] + U0[i, j-1]) / 4
        end
    end
    return U
end

```

Program 27: Poišči naslednji približek Jacobijeve iteracije za diskretizacijo Laplaceove enačbe.

```

"""
U = korak_sor(U0, ω)

Izvedi en korak SOR iteracije za Laplaceovo enačbo. Matrika `U0` vsebuje
približke za vrednosti funkcije na mreži, funkcija vrne naslednji približek.
"""

function korak_sor(U0, ω)
    U = copy(U0)
    m, n = size(U)
    # spremenimo le notranje vrednosti
    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1
            U[i, j] = (U[i+1, j] + U[i, j+1] + U[i-1, j] + U[i, j-1]) / 4
            U[i, j] = (1 - ω) * U0[i, j] + ω * U[i, j] # SOR popravek
        end
    end
    return U
end

```

Program 28: Poišči naslednji približek SOR iteracije za diskretizacijo Laplaceove enačbe.

```

"""
x, it = iteracija(korak, x0; maxit=maxit, atol=atol)

Poišči približek za limito rekurzivnega zaporedja podanega rekurzivno s
funkcijo `korak` in začentim členom `x0`.

"""
function iteracija(korak, x0; maxit=1000, atol=1e-8)
    for i = 1:maxit
        x = korak(x0)
        if isapprox(x, x0, atol=atol)
            return x, i
        end
        x0 = x
    end
    throw("Iteracija ne konvergira po $maxit korakih!")
end

```

Program 29: Poišči približek za limito rekurzivnega zaporedja.

5 Interpolacija z implicitnimi funkcijami

Krivulje v ravnini in ploskve v prostoru lahko opišemo na različne načine:

| | krivulje v \mathbb{R}^2 | ploskve v \mathbb{R}^3 |
|--------------|---------------------------|---|
| eksplicitno | $y = f(x)$ | $z = f(x, y)$ |
| parametrično | $(x, y) = (x(t), y(t))$ | $(x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ |
| implicitno | $F(x, y) = 0$ | $F(x, y, z) = 0$ |

Tabela 1: Različni načini predstavitev krivulj v \mathbb{R}^2 in ploskev v \mathbb{R}^3

Implicitne enačbe oblike $F(x_1, x_2, \dots) = 0$ so zelo dober način za opis krivulj in ploskev. Hitri algoritmi za izračun nivojskih krivulj in ploskev kot sta **korakajoči kvadrati** in **korakajoče kocke** omogočajo učinkovito generiranje poligonske mreže za implicitno podane krivulje in ploskev. Predstavitev s **predznačeno funkcijo razdalje** pa je osnova za mnoge grafične programe, ki delajo s ploskvami v 3D prostoru.

V tej vaji bomo spoznali, kako poiskati implicitno krivuljo ali ploskev, ki dobro opiše dani oblak točk v ravnini ali prostoru. Funkcijo F v implicitni enačbi $F(x, y) = 0$ bomo poiskali kot linearne kombinacije **radialnih baznih funkcij (RBF)** ([3], [4], [5]).

5.1 Naloga

- Definiraj podatkovni tip za linearne kombinacije radialnih baznih funkcij (RBF) v \mathbb{R}^d . Podatkovni tip naj vsebuje središča RBF $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$, funkcijo oblike $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in koeficiente $w_i \in \mathbb{R}$ v linearnej kombinaciji:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|). \quad (5.1)$$

- Napiši sistem za koeficiente w_i v linearnej kombinaciji RBF, če so podane vrednosti $f_i = F(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}$ v središčih RBF. Napiši funkcijo, ki za dane vrednosti f_i , funkcijo φ in središča \mathbf{x}_i poišče koeficiente w_1, w_2, \dots, w_n . Katero metodo za reševanja sistema lahko uporabimo?
- Napiši funkcijo **vrednost**, ki izračuna vrednost funkcije $F(\mathbf{x})$ v dani točki \mathbf{x} .
- Uporabi napisane metode in interpoliraj oblak točk v ravnini z implicitno podano krivuljo. Oblak točk ustvari na krivulji, podani s parametrično enačbo:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= 8 \cos(\varphi) - \cos(4\varphi) \\ y(\varphi) &= 8 \sin(\varphi) - \sin(4\varphi). \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.2 Interpolacija z radialnimi baznimi funkcijami

V ravnini¹ je podan oblak točk $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^2$. Iščemo krivuljo, ki dobro opiše dane točke. Če zahtevamo, da vse točke ležijo na krivulji, problemu rečemo *interpolacija*, če pa dovolimo, da je krivulja zgolj blizu danih točk in ne nujno vsebuje vseh točk, problem imenujemo *aproximacija*. Krivuljo bomo

¹Postopek, ki ga bomo opisali, deluje ravno tako dobro tudi za točke v prostoru. Vendar se bomo zavoljo enostavnosti omejili na točke v ravnini.

poiskali v implicitni obliki kot nivojsko krivuljo funkcije dveh spremenljivk. Za izbrano vrednost $c \in \mathbb{R}$ isčemo funkcijo $f(x, y)$, za katero velja:

$$f(x_i, y_i) = c \quad (5.3)$$

za vse točke $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ v danem oblaku točk. Problem bomo rešili malce bolj splošno. Denimo, da imamo za vsako dano točko v oblaku \mathbf{x}_i , podano tudi vrednost funkcije f_i . Isčemo zvezno funkcijo $f(x, y)$, tako da so izpolnjene enačbe:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= f_1 \\ &\vdots \\ f(x_n, y_n) &= f_n. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Zveznih funkcij, ki zadoščajo enačbam (5.4), je neskončno. Zato se moramo omejiti na podmnožico funkcij, ki je dovolj raznolika, da je sistem rešljiv, hkrati pa dovolj majhna, da je rešitev ena sama. V tej vaji, se bomo omejili na n -parametrično družino funkcij oblike:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = F(\mathbf{x}, w_1, w_2, \dots, w_n) = \sum_i w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|). \quad (5.5)$$

Funkcije $\varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|)$ sestavljajo bazo za množico funkcij oblike (5.1).

Radialne bazne funkcije (RBF) so funkcije, katerih vrednosti so odvisne od razdalje do izhodiščne točke:

$$r(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|). \quad (5.6)$$

Uporabljajo se za interpolacijo ali aproksimacijo podatkov s funkcijo oblike:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_i w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|), \quad (5.7)$$

npr. za rekonstrukcijo 2D in 3D oblik v računalniški grafiki. Funkcija φ je navadno pozitivna soda funkcija zvončaste oblike in jo imenujemo funkcija oblike.

Problem (5.4) se prevede na iskanje vrednosti koeficientov $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^T$, tako da je izpolnjen sistem enačb:

$$\begin{aligned} F(x_1, w_1, w_2, \dots, w_n) &= f_1 \\ &\vdots \\ F(x_n, w_1, w_2, \dots, w_n) &= f_n. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Enačbe (5.8) so linearne za koeficiente w_1, \dots, w_n :

$$\begin{aligned} w_1 \varphi_1(\mathbf{x}_1) + w_2 \varphi_2(\mathbf{x}_1) + \dots + w_n \varphi_n(\mathbf{x}_1) &= f_1 \\ &\vdots \\ w_1 \varphi_1(\mathbf{x}_n) + w_2 \varphi_2(\mathbf{x}_n) + \dots + w_n \varphi_n(\mathbf{x}_n) &= f_n. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Vektor desnih strani sistema (5.9) je kar vektor funkcijskih vrednosti $[f_1, f_2, \dots, f_n]$, matrika sistema pa je enaka:

$$\begin{pmatrix} \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n\|) \\ \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_n\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \varphi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n\|) \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Ker je

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \varphi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) = \varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = \varphi_j(\mathbf{x}_i), \quad (5.11)$$

je matrika sistema (5.10) simetrična. V literaturi [3] se pojavijo naslednje izbire za funkcijo oblike φ :

- **poliharmonični zlepek (pločevina):** $\varphi(r) = r^2 \log(r)$ za 2D in $\varphi(r) = r^3$ za 3D [4]
- Gaussova funkcija: $\varphi(r) = \exp(-r^2/\sigma^2)$
- racionalni približek za Gaussovo funkcijo:

$$\varphi(r) = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{\sigma}\right)^{2p}}. \quad (5.12)$$

Če izberemo primo funkcijo oblike, lahko dosežemo, da je matrika sistema (5.10) pozitivno definitsna. V tem primeru lahko za reševanje sistema uporabimo razcep Choleskega (poglavje 2.6 v [1]). Za funkcijo oblike bomo izbrali Gaussovo funkcijo

$$\varphi(r) = \exp(-t^2/\sigma^2), \quad (5.13)$$

za katero je matrika sistema (5.9) pozitivno definitna, če so točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ različne [6].

5.3 Program

Najprej definiramo podatkovni tip, ki opisuje linearno kombinacijo RBF (5.1).

```
"""
RBF(tocke, utezi, phi)

Podatkovni tip za linearno kombinacijo *radialnih baznih funkcij* oblike
`phi(norm(x - tocke[i])^2)`.

"""

struct RBF
    tocke
    utezi
    phi
end
```

Za podatkovni tip napišimo funkcijo `vrednost(x, rbf::RBF)`, ki izračuna vrednost linearne kombinacije (5.1) v dani točki x (rešitev Program 30). Za primer ustvarimo mešanico dveh Gaussovih RBF v točkah $(1, 0)$ in $(2, 1)$ in izračunamo vrednost v točki $(1.5, 1.5)$:

```
using Vaja05
""" Ustvari Gaussovo funkcijo z danim `sigma`.
gauss(sigma) = r -> exp(-r^2 / sigma^2)

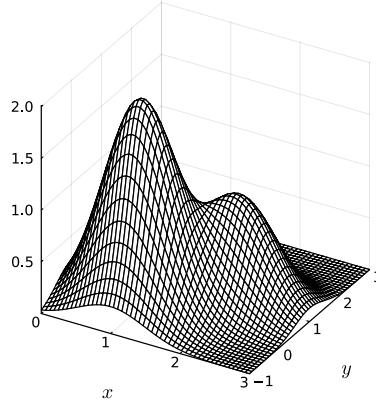
tocke = [[1, 0], [2, 1]]
utezi = [2, 1]
rbf = RBF(tocke, utezi, gauss(0.7))
# za izračun vrednosti v dani točki lahko uporabimo `vrednost([1.5, 1.5], rbf)`,
# lahko pa objekt tipa RBF kličemo direktno kot funkcijo
z = rbf([1.5, 1.5])
0.3726164224242583
```

Narišimo še graf funkcije dveh spremenljivk, podane z linearno kombinacijo RBF.

```

using Plots
x = range(0, 3, 50)
y = range(-1, 3, 50)
wireframe(x, y, (x, y) -> rbf([x, y]), xlabel="\$x\$$", ylabel="\$y\$$")

```



Slika 15: Linearna kombinacija dveh RBF v središčema v točkah $(1, 0)$ in $(2, 1)$ s funkcijo oblike $\varphi(r) = \exp(-r^2/0.7^2)$

Rešimo sedaj problem interpolacije. Zapišimo funkcijo `interpoliraj(tocke, vrednosti, phi)`, ki poišče koeficiente v linearni kombinaciji (5.1) in vrne objekt tipa RBF, ki dane podatke interpolira (rešitev Program 31). Funkcijo preskusimo na točkah, ki jih generiramo na parametrično podani krivulji (5.2). Sledimo [4] in točkam na krivulji dodamo točke znotraj krivulje, v smeri normal, ki poskrbijo, da ne dobimo trivialne rešitve.

```

fi = range(0, 2π, 21)
tocke = [[8cos(t) - cos(4t), 8sin(t) - sin(4t)] for t in fi[1:end-1]]
tocke_noter = tocke .* 0.9 # točke v smeri normal določimo približno
scatter(Tuple.(tocke), label="točke na krivulji")
scatter!(Tuple.(tocke_noter), label="točke v notranjosti")

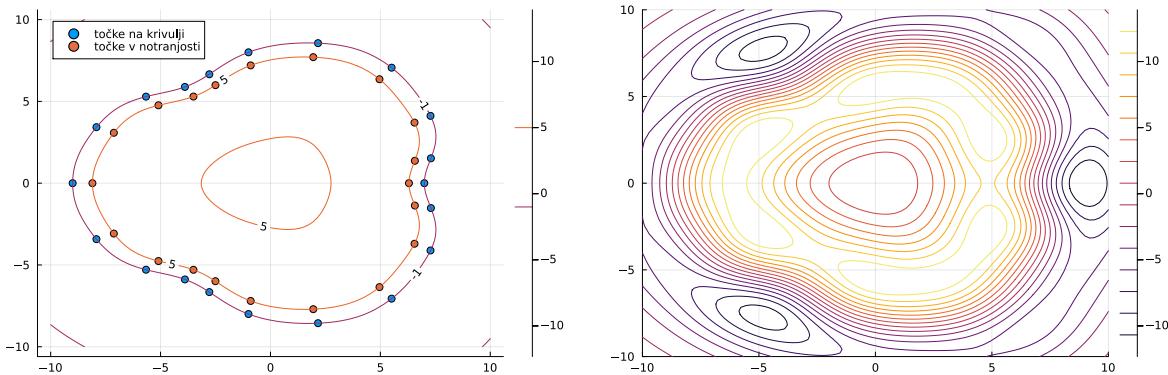
```

Vrednosti funkcije f_i za točke na krivulji izberemo tako, da so enake in se razlikujejo od vrednosti v notranjosti.

```

vse_tocke = vcat(tocke, tocke_noter)
c1, c2 = -1, 5
vrednosti = vcat(
    c1 * ones(length(tocke)), c2 * ones(length(tocke)))
rbf = interpoliraj(vse_tocke, vrednosti, gauss(3))
x = range(-10, 10, 100)
y = range(-10, 10, 100)
contour!(x, y, (x, y) -> rbf([x, y]), levels=[c1, c2], clabels=true)

```



Slika 16: Nivojske krivulje funkcije podane z linearno kombinacijo RBF, ki interpolirajo dane točke.
Iskana krivulja, ki interpolira dane točke, je nivojska krivulja za vrednost -1 .

5.4 Rešitve

```
using LinearAlgebra
"""
y = vrednost(x, rbf::RBF)

Izračunaj vrednost linearne kombinacije radialnih baznih funkcij podane z
`rbf` v točki `x`.

"""
function vrednost(x, rbf::RBF)
    vsota = zero(x[1])
    n = length(rbf.tocke)
    for i = 1:n
        norma = norm(rbf.tocke[i] - x) # norma razlike
        vsota += rbf.utezi[i] * rbf.phi(norma) # utežena vsota
    end
    vsota
end
"""
rbf::RBF(x)
```

Izračunaj vrednost linearne kombinacije radialnih baznih funkcij `rbf`` v dani točki `x`.

```
"""
(rbf::RBF)(x) = vrednost(x, rbf)
```

Program 30: Izračunaj vrednost linearne kombinacije RBF v dani točki

```

"""
A = matrika(tocke, phi)

Poišči matriko sistema enačb za interpolacijo točk, podanih v seznamu `tocke`,
z linearno kombinacijo radialnih baznih funkcij s funkcijo oblike
`phi`.

"""

function matrika(tocke, phi)
n = length(tocke)
A = zeros(n, n)
for i = 1:n, j = i:n
    A[i, j] = phi(norm(tocke[i] - tocke[j]))
    A[j, i] = A[i, j]
end
return A
end

"""

rbf = interpoliraj(tocke, vrednosti, phi)

Interpoliraj `vrednosti` v danih točkah iz seznama `tocke` z linearno
kombinacijo radialnih baznih funkcij s funkcijo oblike `phi`.

"""

function interpoliraj(tocke, vrednosti, phi)
A = matrika(tocke, phi)
F = chol(cholesky!(A)) # da prihranimo prostor, razcep naredimo kar v matriko A
utezi = F \ vrednosti
return RBF(tocke, utezi, phi)
end

```

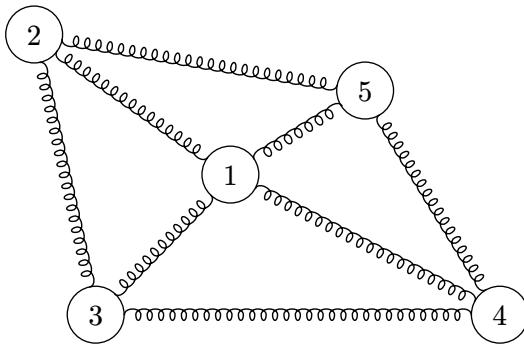
Program 31: Interpoliraj vrednosti funkcij z linearno kombinacijo RBF

6 Fizikalna metoda za vložitev grafov

Naj bo G neusmerjen povezan graf z množico vozlišč $V(G)$ in povezav $E(G) \subset V(G)^2$. Brez škode predpostavimo, da so vozlišča grafa G kar zaporedna naravna števila $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$. Vložitev grafa G v \mathbb{R}^d je preslikava $V(G) \rightarrow \mathbb{R}^d$, ki je podana z zaporedjem koordinat. Vložitev v \mathbb{R}^3 je podana z zaporedjem točk v \mathbb{R}^3

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n). \quad (6.1)$$

Za dani graf G želimo poiskati vložitev v \mathbb{R}^3 (ali \mathbb{R}^2). Pri fizikalni metodi grafu G priredimo fizikalni sistem in uporabimo fizikalne zakone za določanje položajev vozlišč. V tej vaji bomo grafu priredili sistem harmoničnih vzmeti, pri katerem na vsako vozlišče delujejo sosednja vozlišča s silo, ki je sorazmerna razdalji med vozlišči.



Slika 17: Sistem vzmeti za dani graf

6.1 Naloga

- Izpeli sistem enačb za koordinate vozlišč grafa, tako da so vozlišča v ravnotesju.
- Pokaži, da je matrika sistema diagonalno dominantna in negativno definitna.
- Napiši funkcijo, ki za dani graf in koordinate fiksiranih vozlišč poišče koordinate vseh vozlišč, tako da reši sistem enačb z metodo konjugiranih gradientov.
- V ravnini nariši [graf krožno lestev](#), tako da polovico vozlišč razporediš enakomerno po enotski krožnici.
- V ravnini nariši pravokotno mrežo. Fiksiraj vogale, nato točke na robu enakomerno razporedi po krožnici.

6.2 Ravnotesje sil

Harmonična vzmet je idealna vzmet dolžine 0, za katero sila ni sorazmerna sprememb dolžine, pač pa dolžini vzmeti. Sila harmonične vzmeti, ki je vpeta med točki (x_1, y_1, z_1) in (x_2, y_2, z_2) in deluje na prvo krajišče, je enaka

$$\vec{F}_{21} = k \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

kjer je k koeficient vzmeti.

Koordinate vozlišč določimo tako, da poiščemo koordinate, pri katerih je sistem v ravnovesju. To pomeni, da so v vsakem vozlišču j v ravnovesju sile, s katerimi sosednja vozlišča delujejo na dano vozlišče:

$$\sum_{i \in N(j)} \vec{F}_{ij} = 0, \quad (6.3)$$

kjer je $N(j) = \{i; (i, j) \in E(G)\}$ množica sosednjih točk v grafu za točko j in \vec{F}_{ij} sila, s katero vozlišče i deluje na vozlišče j . Iz enačbe (6.3) lahko izpeljemo sistem enačb za koordinate x_j, y_j in z_j . Iz vektorske enačbe za vozlišče j :

$$\sum_{i \in N(j)} \vec{F}_{ij} = \sum_{i \in N(j)} k \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \end{pmatrix} = 0, \quad (6.4)$$

dobimo 3 enačbe za posamezne koordinate:

$$\begin{aligned} -\text{st}(j)x_j + x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_{\text{st}(i)}} &= 0 \\ -\text{st}(j)y_j + y_{i_1} + y_{i_2} + \dots + y_{i_{\text{st}(i)}} &= 0 \\ -\text{st}(j)z_j + z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_{\text{st}(i)}} &= 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

kjer je $\text{st}(j) = |N(j)|$ stopnja vozlišča j in $i_1, i_2 \dots i_{\text{st}(j)} \in N(j)$. Ker so koordinate x, y in z med seboj neodvisne, dobimo za vsako koordinato en sistem enačb. Za koordinato x dobimo naslednji sistem:

$$\begin{aligned} -\text{st}(1)x_1 + \sum_{i \in N(1)} x_i &= 0 \\ -\text{st}(2)x_2 + \sum_{i \in N(2)} x_i &= 0 \\ &\vdots \\ -\text{st}(n)x_n + \sum_{i \in N(n)} x_i &= 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Enačbe (6.6) so homogene, kar pomeni, da ima sistem le ničelno rešitev. Če želimo netrivialno rešitev, moramo nekatera vozlišča v grafu pritrdati in jim predpisati koordinate. Brez škode lahko predpostavimo, da so vozlišča, ki jih pritrdimo, na koncu. Označimo z $F = \{m+1, \dots, n\} \subset V(G)$ množico vozlišč, ki imajo določene koordinate. Koordinate za vozlišča iz F niso več spremenljivke, ampak jih moramo prestaviti na drugo stran enačbe. Sistem enačb (6.6) postane nehomogen sistem:

$$\begin{aligned} -\text{st}(1)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= -a_{1m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 - \text{st}(2)x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= -a_{2m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 + \dots - \text{st}(m)x_m &= -a_{mm+1}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n \end{aligned} \quad (6.7)$$

kjer je vrednost a_{ji} enaka 1, če sta i in j sosedna, in 0 sicer

$$a_{ji} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E(G) \\ 0 & (i, j) \notin E(G) \end{cases}. \quad (6.8)$$

Matrika sistema (6.7) je odvisna le od povezav v grafu in izbire točk, ki niso pritrjene, medtem ko so desne stani odvisne od koordinat pritrjenih točk:

$$A = \begin{pmatrix} -\text{st}(1) & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & -\text{st}(2) & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & -\text{st}(m) \end{pmatrix} \text{ in } \mathbf{b} = - \begin{pmatrix} \sum_{i=m+1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=m+1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=m+1}^n a_{ni}x_i \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Sistema za y in z imata iste koeficiente, kot sistem (6.6), razlikujeta se le v desnih straneh, ki so odvisne od koordinat pritrjenih točk.

Kakšne posebnosti ima matrika sistema (6.9)? Matrika je simetrična in diagonalno dominantna. Res! Velja $\text{st}(j) = |N(j)|$ in zato

$$|a_{jj}| = |N(j)| \geq |N(j) \cap F^C| = \sum_{i \neq j} |a_{ji}|. \quad (6.10)$$

Za sosedne fiksni vozlišč je neenakost stroga. Ker so vsi elementi na diagonali negativni, je matrika A negativno definitna. Za večino grafov, za katere uporabimo zgornji postopek, bo matrika sistema A redka. Zato lahko za reševanje sistema $-Ax = -b$ uporabimo **metodo konjugiranih gradientov**. Metoda konjugiranih gradientov in druge iterativne metode so zelo primerne za redke matrike. Za razliko od eliminacijskih metod, iterativne metode ne izvedejo sprememb na matriki, ki bi dodale neničelne elemente.

6.3 Rešitev v Juliji

Za predstavitev grafa bomo uporabili paket **Graphs.jl**, ki definira podatkovne tipe in vmesnike za lažje delo z grafi.

Napišimo naslednje funkcije:

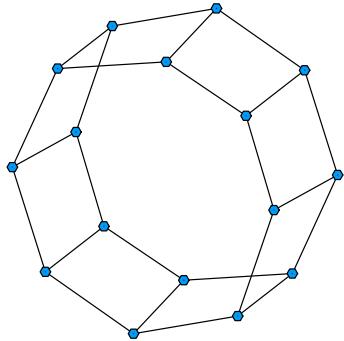
- **krozna_lestev(n)**, ki ustvari graf krožne lestve z $2n$ vozlišči (rešitev Program 32).
- **matrika(G::AbstractGraph, sprem)**, ki vrne matriko sistema (6.9) za dani graf G in seznam vozlišč, ki niso pritrjena sprem (rešitev Program 33),
- **desne_strani(G::AbstractGraph, sprem, koordinate)**, ki vrne vektor desnih strani za sistem (6.7) (rešitev Program 34),
- **cg(A, b; atol=1e-8)**, ki poišče rešitev sistema $Ax = b$ z metodo konjugiranih gradientov (rešitev Program 35) in
- **vlozi!(G::AbstractGraph, fix, tocke)**, ki poišče vložitev grafa G v \mathbb{R}^d s fizikalno metodo. Argument **fix** naj bo seznam fiksni vozlišč, argument **tocke** pa matrika s koordinatami točk. Metoda naj ne vrne ničesar, ampak naj vložitev zapiše kar v matriko **tocke** (rešitev Program 36).

6.4 Krožna lestev

Uporabimo napisano kodo za primer grafa krožna lestev. Graf je sestavljen iz dveh ciklov enake dolžine n , ki sta med seboj povezana z n povezavami. Za grafično predstavitev grafov bomo uporabili paket **GraphRecipes.jl**.

```
using Vaja06
G = krozna_lestev(8)

using GraphRecipes, Plots
graphplot(G, curves=false)
```



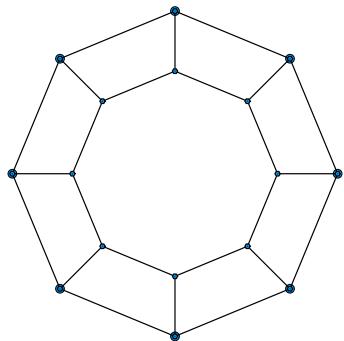
Slika 18: Graf krožna lestev s 16 vozlišči

Poščimo drugačno vložitev s fizikalno metodo, tako da vozlišča enega cikla enakomerno razporedimo po krožnici.

```
t = range(0, 2pi, 9)[1:end-1]
x = cos.(t)
y = sin.(t)
scatter(x[1:8], y[1:8], label="fiksna vozlišča")

tocke = hcat(hcat(x, y)', zeros(2, 8))
fix = 1:8

vlozi!(G, fix, tocke)
graphplot!(G, x=tocke[1, :], y=tocke[2, :], curves=false)
```



Slika 19: Graf krožna lestev s 16 vozlišči vložen s fizikalno metodo. Zunanja vozlišča so fiksna, notranja pa postavljena tako, da so sile vzmeti na povezavah v ravnovesju.

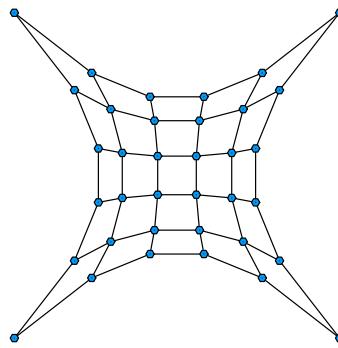
6.5 Dvodimenzionalna Mreža

Preizkusimo algoritem na dvodimenzionalni mreži. Dvodimenzionalna mreža je graf, ki ga dobimo, če v ravnini pravokotnik razdelimo v pravokotno mrežo.

```
m, n = 6, 6
G = grid((m, n), periodic=false)

# vogali imajo stopnjo 2
vogali = filter(v -> degree(G, v) <= 2, vertices(G))
tocke = zeros(2, n * m)
tocke[:, vogali] = [0 0 1 1; 0 1 0 1]

vlozi!(G, vogali, tocke)
graphplot(G, x=tocke[1, :], y=tocke[2, :], curves=false)
```

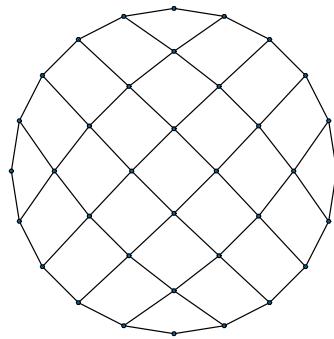


Slika 20: Dvodimenzionalna mreža, vložena s fizikalno metodo. Pritrjeni so le vogali.

Sedaj pritrdimo cel rob in ga enakomerno razporedimo po krožnici.

```
m, n = 6, 6
G = grid((m, n), periodic=false)
rob = filter(v -> degree(G, v) <= 3, vertices(G))
urejen_rob = [rob[1]]

# uredi točke na robu v cikel
for i = 1:length(rob)-1
    sosedji = neighbors(G, urejen_rob[end])
    sosedji = intersect(sosedji, rob)
    sosedji = setdiff(sosedji, urejen_rob)
    push!(urejen_rob, sosedji[1])
end
t = range(0, 2pi, length(rob) + 1)[1:end-1]
tocke = zeros(2, n * m)
tocke[:, urejen_rob] = hcat(cos.(t), sin.(t))'
vlozi!(G, urejen_rob, tocke)
graphplot(G, x=tocke[1, :], y=tocke[2, :], curves=false)
```



Slika 21: Dvodimenzionalna mreža vložena s fizikalno metodo. Rob mreže je enakomerno razporejen po krožnici.

6.6 Rešitve

```
using Graphs
"""
G = krozna_lestev(n)

Ustvari graf krožna lestev z `2n` točkami.

function krozna_lestev(n)
    G = SimpleGraph(2 * n)
    # prvi cikel
    for i = 1:n-1
        add_edge!(G, i, i + 1)
    end
    add_edge!(G, 1, n)
    # drugi cikel
    for i = n+1:2n-1
        add_edge!(G, i, i + 1)
    end
    add_edge!(G, n + 1, 2n)
    # povezave med obema cikloma
    for i = 1:n
        add_edge!(G, i, i + n)
    end
    return G
end
```

Program 32: Ustvari graf krožna lestev

```

using SparseArrays

"""
A = matrika(G::AbstractGraph, sprem)

Poišči matriko linearnega sistema za vložitev grafa `G` s fizikalno metodo.
Argument `sprem` je vektor vozlišč grafa, ki nimajo določenih koordinat.
Indeksi v matriki `A` ustrezajo vozliščem v istem vrstnem redu,
kot nastopajo v argumentu `sprem`.
"""

function matrika(G::AbstractGraph, sprem)
    # preslikava med vozlišči in indeksi v matriki
    v_to_i = Dict([sprem[i] => i for i in eachindex(sprem)])
    m = length(sprem)
    A = spzeros(m, m)
    for i = 1:m
        vertex = sprem[i]
        sosedi = neighbors(G, vertex)
        for vertex2 in sosedi
            if haskey(v_to_i, vertex2)
                j = v_to_i[vertex2]
                A[i, j] = 1
            end
        end
        A[i, i] = -length(sosedi)
    end
    return A
end

```

Program 33: Ustvari matriko sistema za ravnoesje sil v grafu

```

"""
    b = desne_strani(G::AbstractGraph, sprem, koordinate)

Poišči desne strani linearnega sistema za eno koordinato vložitve grafa `G`
s fizikalno metodo. Argument `sprem` je vektor vozlišč grafa, ki nimajo
določenih koordinat. Argument `koordinate` vsebuje eno koordinato za vsa
vozlišča grafa. Metoda uporabi le koordinato vozlišč, ki so pritrjena.
Indeksi v vektorju `b` ustrezajo vozliščem v istem vrstnem redu,
kot nastopajo v argumentu `sprem`.

"""

function desne_strani(G::AbstractGraph, sprem, koordinate)
    set = Set(sprem)
    m = length(sprem)
    b = zeros(m)
    for i = 1:m
        v = sprem[i]
        for v2 in neighbors(G, v)
            if !(v2 in set) # dodamo le točke, ki so fiksirane
                b[i] -= koordinate[v2]
            end
        end
    end
    return b
end

```

Program 34: Izračunaj desne strani sistema za ravnovesje sil v grafu na podlagi koordinat pritrjenih
vozlišč

```

using Logging
"""

x = cg(A, b; atol=1e-10)

Metoda konjugiranih gradientov za reševanje sistema enačb `Ax = b`
s pozitivno definitno matriko `A`. Argument `A` ni nujno matrika, lahko je
tudi drugega tipa, če ima implementirano množenje z vektorjem `b`.

Metoda ne preverja, ali je argument `A` pozitivno definiten.

"""

function cg(A, b; atol=1e-8)
    # za začetni približek vzamemo kar desne strani
    x = copy(b)
    r = b - A * b
    p = r
    res0 = sum(r .* r)
    for i = 1:length(b)
        Ap = A * p
        alpha = res0 / sum(p .* Ap)
        x = x + alpha * p
        r = r - alpha * Ap
        res1 = sum(r .* r)
        if sqrt(res1) < atol
            @info "Metoda KG konvergira po $i korakih."
            break
        end
        p = r + (res1 / res0) * p
        res0 = res1
    end
    return x
end

```

Program 35: Metoda konjugiranih gradientov za reševanje sistema $Ax = b$ za pozitivno definitno matriko A

```
"""
vlozi!(G::AbstractGraph, fix, tocke)
```

Pošči vložitev grafa `G` v prostor s fizikalno metodo. Argument `fix` vsebuje vektor vozlišč grafa, ki imajo določene koordinate. Argument `tocke` je začetna vložitev grafa. Koordinate vozlišč, ki niso pritrjena, bodo nadomeščene z novimi koordinatami.

Metoda ne vrne ničesar, ampak zapiše izračunane koordinate v matriko `tocke`.

```
"""
function vlozi!(G::AbstractGraph, fix, tocke)
    sprem = setdiff(vertices(G), fix)
    dim, _ = size(tocke)
    A = matrika(G, sprem)
    for k = 1:dim
        b = desne_strani(G, sprem, tocke[k, :])
        x = cg(-A, -b) # matrika A je negativno definitna
        tocke[k, sprem] = x
    end
end
```

Program 36: Pošči koordinate vložitve grafa v \mathbb{R}^d s fizikalno metodo

7 Invariantna porazdelitev Markovske verige

7.1 Naloga

- Implementiraj potenčno metodo za iskanje največje lastne vrednosti in lastnega vektorja matrike.
- Uporabi potenčno metodo in poišči invariantno porazdelitev Markovske verige z dano prehodno matriko P . Poišči invariantne porazdelitve za naslednja primera:
 - ▶ veriga, ki opisuje skakanje konja (skakača) po šahovnici,
 - ▶ veriga, ki opisuje brskanje po mini spletu s 5-10 stranmi (podobno spletni iskalniki [razvrščajo strani po relevantnosti](#)).

7.2 Invariantna porazdelitev Markovske verige

Z [Markovskimi verigami](#) smo se že srečali v poglavju o tridiagonalnih sistemih (Poglavlje 3). Porazdelitev Markovske verige X_k je podana z matriko \mathcal{P} , katere elementi so prehodne verjetnosti:

$$p_{ij} = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i). \quad (7.1)$$

Naj bo X_k Markovska veriga z n stanji in naj bo $\mathbf{p}^{(k)} = [p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}]$ porazdelitev po stanjih na k -tem koraku ($p_i^{(k)} = P(X_k = i)$). Porazdelitev na naslednjem koraku X_{k+1} dobimo tako, da seštejemo verjetnosti po vseh možnih stanjih na prejšnjem koraku, pomnožene s pogojnimi verjetnostmi, da iz enega stanja preidemo v drugega:

$$\begin{aligned} p_i^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^n P(X_{k+1} = i \mid X_k = j) P(X_k = j) = \sum_{j=1}^n p_{ji} p_j^{(k)} \\ \mathbf{p}^{(k+1)} &= \mathcal{P}^T \mathbf{p}^{(k)}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Če zaporedje porazdelitev $\mathbf{p}^{(k)}$ konvergira k limitni porazdelitvi \mathbf{p}^∞ , potem je limitna porazdelitev lastni vektor \mathcal{P}^T z lastno vrednostjo 1:

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}^T \mathbf{p}^{(k)} = \mathcal{P}^T \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(k)} = \mathcal{P}^T \mathbf{p}^\infty. \quad (7.3)$$

Ker so vsote elementov po vrsticah za prehodno matriko \mathcal{P} enake 1, je 1 lastna vrednost matrike \mathcal{P} in zato tudi lastna vrednost matrike \mathcal{P}^T . Posledično limitna porazdelitev \mathbf{p}^∞ vedno obstaja, ni pa nujno enolična. Ker matrika \mathcal{P}^T ne spremeni limitne porazdelitve \mathbf{p}^∞ , limitno porazdelitev imenujemo tudi *invariantna porazdelitev*.

Da se pokazati, da je 1 po absolutni vrednosti največja lastna vrednost matrike \mathcal{P} in \mathcal{P}^T , zato lahko invariantno porazdelitev poiščemo s [potenčno metodo](#).

7.3 Potenčna metoda

S potenčno metodo poiščemo lastni vektor matrike A s po absolutni vrednosti največjo lastno vrednostjo. Izberemo neničelen začetni vektor $\mathbf{p}^{(0)} \neq 0$ in sestavimo zaporedje približkov:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{A\mathbf{x}^{(k)}}{\|A\mathbf{x}^{(k)}\|}. \quad (7.4)$$

Zaporedje x^k konvergira k lastnemu vektorju matrike A z lastno vrednostjo, ki je po absolutni vrednosti največja. Če je takih lastnih vrednosti več (npr. 1 in -1), se lahko zgodi, da potenčna metoda ne konvergira. Za normo, s katero delimo produkt $Ax^{(k)}$, lahko izberemo katerokoli vektorsko normo. Navadno je to neskončna norma $\|\cdot\|_\infty$, saj jo lahko najhitreje izračunamo.

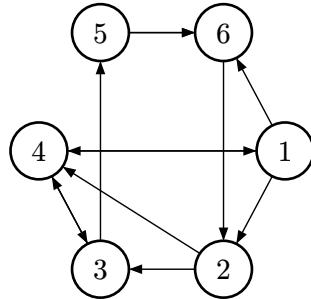
Napišimo program `x, it = potencna(A, x0)`, ki poišče lastni vektor za po absolutni vrednosti največjo lastno vrednost matrike A (Program 37).

7.4 Razvrščanje spletnih strani

Spletne iskalniki želijo uporabniku prikazati čim relevantnejše rezultate. Zato morajo ugotoviti, katere spletne strani so pomembnejše od drugih. Brskanje po spletu lahko modeliramo z Markovsko verigo, kjer na vsakem koraku obiščemo eno spletne strani. Na vsaki spletne strani, ki jo obiščemo, naključno izberemo povezavo, ki nas vodi do naslednje strani. Če spletne strani nima povezav, se lahko vrnemo nazaj na prejšnjo stran ali pa naključno izberemo novo stran. Limitna porazdelitev pove, kolikšen delež vseh obiskov pripada posamezni spletne strani, če se naključno sprehajamo po spletu. Večji delež obiskov ima spletne strani, pomembnejša je.

Limitno porazdelitev Markovske verige s prehodno matriko \mathcal{P} poiščemo s potenčno metodo, kot lastni vektor matrike \mathcal{P}^T za lastno vrednost 1.

Približno tako deluje algoritem za razvrščanje spletnih strani po pomembnosti [Page Rank](#), ki sta ga prva opisala in uporabila ustanovitelja podjetja Google Larry Page in Sergey Brin.



Slika 22: Mini splet s 6 stranmi

Prehodna matrika verige je

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Poiščimo invariantno porazdelitev s potenčno metodo:

```

P = [
0 1/3 0 1/3 0 1/3;
0 0 1/2 1/2 0 0;
0 0 0 1/2 1/2 0;
1/2 0 1/2 0 0 0;
0 0 0 0 0 1;
0 1 0 0 0 0
]
x, it = potencna(P', rand(6))

```

Preverimo, ali je dobljeni vektor res lastni vektor za lastno vrednost 1, tako da izračunamo razliko $P^T x - x$, ki za lastni vektor konvergira k 0:

```

delta = P' * x - x
6-element Vector{Float64}:
-1.761793266830125e-9
8.700961284802133e-9
-5.06670871924797e-9
-4.618036397729952e-9
-2.595118120396478e-9
5.3406952194023916e-9

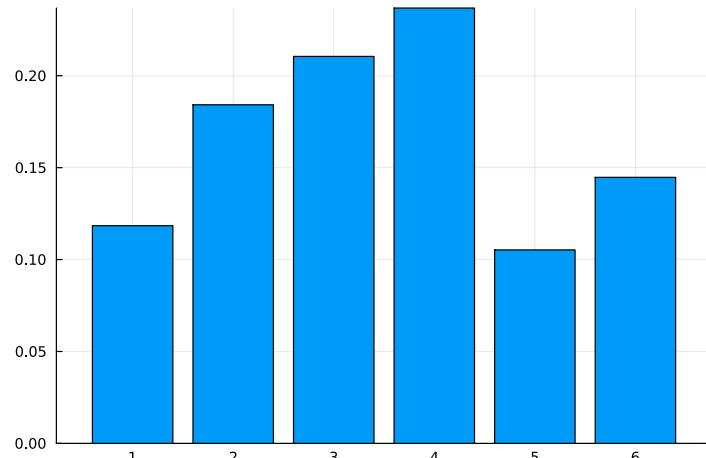
```

Invariantno porazdelitev predstavimo s stolpčnim diagramom:

```

x = x / sum(x)
using Plots
bar(x, label=false)

```

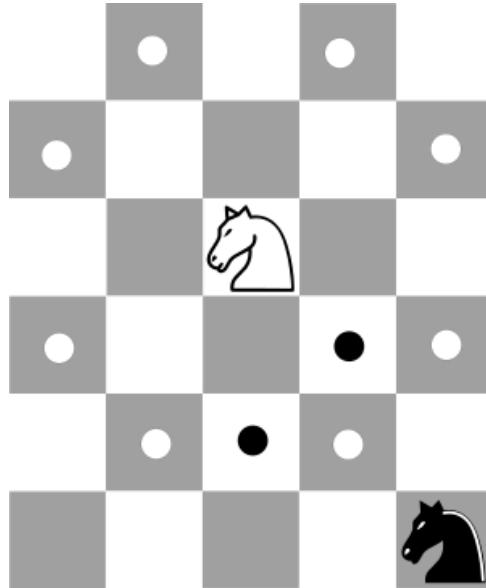


Slika 23: Delež obiskov posamezne strani v limitni porazdelitvi

Iz diagrama vidimo, da je najpogosteje obiskana spletna stran 4, najredkeje pa spletna stran 5.

7.5 Skakanje konja po šahovnici

Tudi naključno skakanje konja po šahovnici lahko opišemo z Markovsko verigo. Stanja Markovske verige so polja na šahovnici, prehodne verjetnosti pa določimo tako, da konj v naslednji potezi naključno skoči na eno od polj, ki so mu dostopna. Predpostavimo, da so vsa dostopna polja enako verjetna.



Slika 24: Možne poteze, ki jih lahko naredita beli in črni konj na 5×5 šahovnici

Stanja označimo s pari indeksov (i, j) , ki označujejo posamezno polje. Invariantna porazdelitev je podana z matriko, katere elementi p_{ij} so enaki verjetnosti, da je konj na polju (i, j) . Ponovno se srečamo s problemom iz prejšnjega poglavja (Poglavlje 4), kako elemente matrike postaviti v vektor. Elemente matrike zložimo v vektor po stolpcih. Preslikava med indeksi i, j v matriki in indeksom k v vektorju je podana s formulami

$$\begin{aligned} k &= i + (j - 1)m \\ j &= \lfloor (k - 1)/m \rfloor \\ i &= ((k - 1) \bmod m) + 1. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Za lažje delo napišimo funkciji

- `k = ij_v_k(i, j, m)` in
- `i, j = k_v_ij(k, m)`,

ki izračunata preslikavamo med indeksi i, j v matriki in indeksom k v vektorju (Program 38).

Nato definirajmo:

- podatkovno strukturo `Konj(m, n)`, ki predstavlja Markovsko verigo za konja na $m \times n$ šahovnici (Program 39) in
- funkcijo `prehodna_matrika(k:Konj)`, ki vrne prehodno matriko za Markovsko verigo za konja (Program 40).

Invariantno porazdelitev poskusimo poiskati s potenčno metodo:

```
P = prehodna_matrika(Konj(8, 8))

x, it = potencna(P^, rand(64))
```

Potenčna metoda ne konvergira, saj ima matrika \mathcal{P}^T dve dominantni lastni vrednosti 1 in -1 . Skoraj vsi začetni približki vsebujejo tako komponento v smeri lastnega vektorja za 1 kot tudi komponento v smeri lastnega vektorja za -1 . Zaporedje približkov v limiti začne preskakovati med dvema vrednostima:

$$\frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{-1}}{\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{-1}\|} \text{ in } \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{-1}}{\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{-1}\|}, \quad (7.7)$$

kjer je \mathbf{v}_1 lastni vektor za 1 in \mathbf{v}_{-1} lastni vektor za -1 .

```
# funkcija `eigen` iz modula LinearAlgebra izračuna lastni razcep matrike
lambda, v = eigen(Matrix(P'))
# lambda ima tudi imaginarni komponente, ki pa so zanemarljivo majhne
lambda = real.(lambda)
println("Največja in najmanjša lastna vrednost matrike P':")
println("\$(maximum(lambda)), \$minimum(lambda))")
```

```
Največja in najmanjša lastna vrednost matrike P':
1.0000000000000018, -1.0000000000000018
```

Težavo rešimo s preprostim premikom. Če matriki prištejemo večkratnik identitete, se lastni vektorji ne spremenijo, le lastne vrednosti se premaknejo. Če so $(\lambda_1, \mathbf{v}_1), (\lambda_2, \mathbf{v}_2), \dots$ lastni pari matrike A , so:

$$(\lambda_1 + \delta, \mathbf{v}_1), (\lambda_2 + \delta, \mathbf{v}_2) \dots \quad (7.8)$$

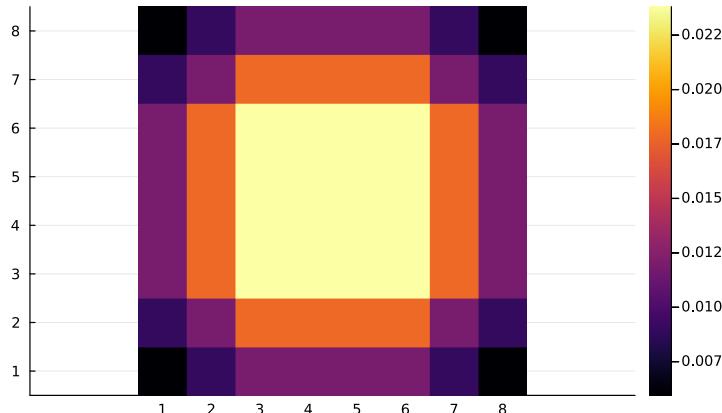
lastni pari matrike

$$A + \delta I. \quad (7.9)$$

S premikom $\mathcal{P}^T + I$ dosežemo, da se lastne vrednosti premaknejo za 1 v pozitivni smeri in se lastna vrednost -1 premakne v 0, lastna vrednost 1 pa v 2. Tako lastna vrednost 2 postane edina dominanta lastna vrednost. Za matriko $\mathcal{P}^T + I$ potenčna metoda konvergira k lastnemu vektorju za lastno vrednost 2, ki je hkrati lastni vektor matrike \mathcal{P}^T za lastno vrednost 1.

```
x, it = potencna(P' + I, rand(64))
x = x / sum(x) # vrednosti normiramo, da je vsota enaka 1
porazdelitev = reshape(x, 8, 8)

using Plots
heatmap(porazdelitev, aspect_ratio=1, xticks=1:8, yticks=1:8)
```



Slika 25: Invariantna porazdelitev za konja na standardni 8×8 šahovnici. Svetlejša polja so pogosteje obiskana.

7.6 Rešitve

```

using LinearAlgebra

"""
x, it = potencna(A)

Poišči lastni vektor matrike `A` za največjo lastno vrednost s potenčno metodo.
"""

function potencna(A, x0; atol=1e-8, maxit=1000)
    for i = 1:maxit
        x = A * x0
        x = x / norm(x, Inf)
        if norm(x - x0, Inf) < atol
            return x, i
        end
        x0 = x
    end
    throw("Potenčna metoda ne konvergira po $maxit korakih!")
end

```

Program 37: Potenčna metoda poišče lastni vektor za po absolutni vrednosti največjo lastno vrednost dane matrike.

```

ij_v_k(i, j, n) = i + (j - 1) * n

function k_v_ij(k, m)
    j, i = divrem(k - 1, m)
    return (i + 1, j + 1)
end

```

Program 38: Preslikave med indeksi v matriki in indeksi v vektorju, ki je sestavljen iz stolpcev matrike

```

"""
Konj(m, n)

Podatkovna struktura, ki označuje Markovsko verigo za konja na šahovnici
dimenzijs `m` x `n`.

"""

struct Konj
    m
    n
end

```

Program 39: Podatkovni tip, ki predstavlja Markovsko verigo za konja na šahovnici

```

using SparseArrays
"""

P = prehodna_matrika(k::Konj)

Poišči prehodno matriko za Markovsko verigo, ki opisuje skanje figure konja po
šahovnici.

"""

function prehodna_matrika(konj::Konj)
    m = konj.m
    n = konj.n
    N = m * n
    P = spzeros(N, N)
    skoki = [(1, 2), (2, 1), (-1, 2), (-2, 1),
              (1, -2), (2, -1), (-1, -2), (-2, -1)]
    for k = 1:N
        i0, j0 = k_v_ij(k, m)
        for skok in skoki
            i = i0 + skok[1]
            j = j0 + skok[2]
            if i >= 1 && i <= m && j >= 1 && j <= n
                k1 = ij_v_k(i, j, m)
                P[k, k1] = 1
            end
        end
        P[k, :] /= sum(P[k, :]) # normiramo vrstico, da je vsota enaka 1
    end
    return P
end

```

Program 40: Funkcija, ki ustvari prehodno matriko za Markovsko verigo za konja na šahovnici

8 Spektralno razvrščanje v gruče

Pokazali bomo metodo razvrščanja v gruče, ki uporabi [spektralno analizo Laplaceove matrike](#) podobnega grafa, tako da podatke preslika v prostor, v katerem jih je preprosteje razvrstiti. Sledili bomo postopku imenovanemu [spektralno gručenje](#), kot je opisan v [7].

8.1 Naloga

- Napiši funkcijo, ki zgradi podobnostni graf za podatke, podane kot oblak točk v \mathbb{R}^d . V podobnostnem grafu je vsaka točka v oblaku vozlišče, povezani pa so vsi pari točk i in j , ki so za manj kot ε oddaljeni za primerno izbrani ε .
- Napiši funkcijo, ki za dano simetrično matriko poišče k po absolutni vrednosti najmanjih lastnih vrednosti in pripradajoče lastne vektorje. Inverzno iteracijo uporabi za k vektorjev in s QR razcepom poskrbi, da so ortogonalni. Faktor Q konvergira k lastnim vektorjem, diagonalna faktorja R pa h k po absolutni vrednosti najmanjšim lastnim vrednostim matrike.
- Funkcijo za iskanje lastnih vektorjev uporabi na Laplaceovi matriki podobnega grafa podatkov. Za primer podatkov naključno generiraj mešanico treh različnih Gaussovih porazdelitev. Komponente lastnih vektorjev uporabi kot nove koordinate in podatke predstavi v novih koordinatah.

8.2 Podobnostni graf in Laplaceova matrika

Podatke (množico točk v \mathbb{R}^d) želimo razvrstiti v več gruč. Osnova za spektralno gručenje je *podobnostni uteženi graf*, ki povezuje točke, ki so si v nekem smislu blizu. Podobnostni graf lahko ustvarimo na več načinov:

- **ε okolice:** s točko x_k povežemo vse točke, ki ležijo v ε okolini te točke
- **k najbližji sosedji:** x_k povežemo z x_i , če je x_i med k najbližjimi točkami. Tako dobimo usmerjen graf, zato ponavadi upoštevamo povezavo v obe smeri.
- **poln utežen graf:** povežemo vse točke, vendar povezave utežimo glede na razdaljo. Pogosto uporabljeni utež je nam znana [radialna bazna funkcija](#):

$$w(x_i, x_k) = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_k\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (8.1)$$

pri kateri s parametrom σ določamo velikost okolic.

Uteženemu grafu podobnosti z matriko uteži

$$W = [w_{ij}] \quad (8.2)$$

priredimo [Laplaceovo matriko](#)

$$L = D - W, \quad (8.3)$$

kjer je $D = [d_{ij}]$ diagonalna matrika z elementi $d_{ii} = \sum_{j \neq i} w_{ij}$. Če graf ni utežen, namesto matrike uteži uporabimo [matriko sosednosti](#). Laplaceova matrika L je simetrična, nenegativno definitna in ima vedno eno lastno vrednost enako 0 za lastni vektor iz samih enic. Laplaceova matrika je pomembna v [spektralni teoriji grafov](#), ki preučuje lastnosti grafov s pomočjo analize lastnih vrednosti in vektorjev matrik. Knjižnica [Laplacians.jl](#) je namenjena spektralni teoriji grafov.

8.3 Algoritem

Velja izrek, da ima Laplaceova matrika natanko toliko lastnih vektorjev za lastno vrednost 0, kot ima graf komponent za povezanost. Na prvi pogled se zdi, da bi lahko bile gruče kar komponente grafa, a se izkaže, da to ni najbolje. Namesto tega bomo gruče poiskali s standardnimi metodami gručenja v drugem koordinatnem sistemu, ki ga določajo lastni podprostori Laplaceove matrike podobnognega grafa. Postopek je sledeči:

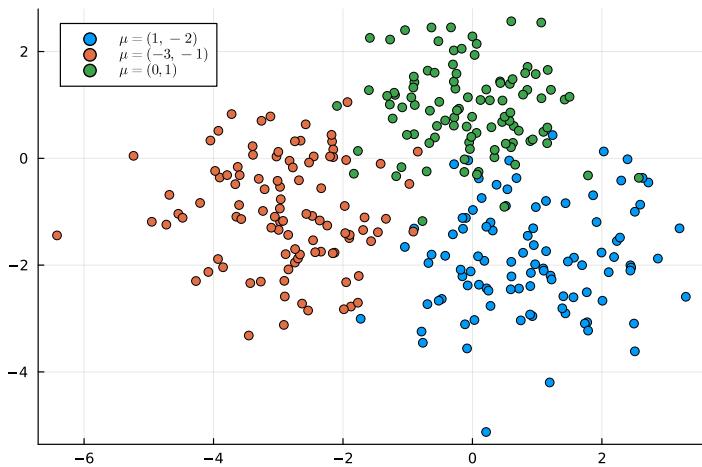
- Poiščemo k najmanjših lastnih vrednosti za Laplaceovo matriko in izračunamo njihove lastne vektorje.
- Označimo matriko lastnih vektorjev $Q = [v_1, v_2, \dots, v_k]$. Stolpci Q^T ustrezajo koordinatam točk v novem prostoru.
- Za stolpce matrike Q^T izvedemo izbran algoritem gručenja (npr. algoritem k povprečij).

V tej vaji bomo postopek gručenja izpustili. Ogledali si bomo grafično, kako je videti oblak točk v novem koordinatnem sistemu.

8.4 Primer

Algoritem preverimo na mešanici treh Gaussovih porazdelitev.

```
using Plots
using Random
m = 100;
Random.seed!(12)
x = [1 .+ randn(m, 1); -3 .+ randn(m, 1); randn(m, 1)];
y = [-2 .+ randn(m, 1); -1 .+ randn(m, 1); 1 .+ randn(m, 1)];
scatter(x[1:100], y[1:100], label="\$\mu = (1, -2)\$")
scatter!(x[101:200], y[101:200], label="\$\mu = (-3, -1)\$")
scatter!(x[201:300], y[201:300], label="\$\mu = (0, 1)\$")
```



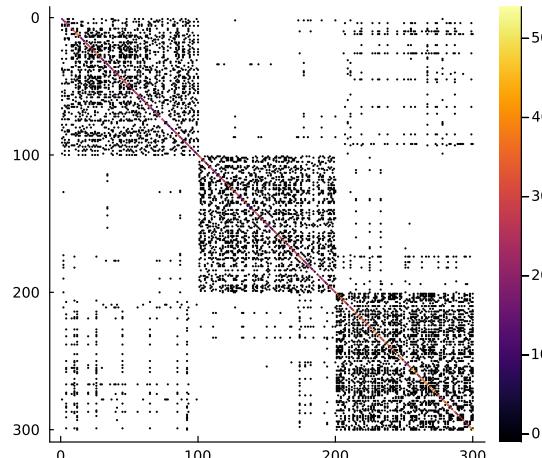
Slika 26: Mešanica treh različnih Gaussovih porazdelitev v ravnini

Izračunamo graf sosednosti z metodo ε okolic in poiščemo Laplaceovo matriko dobljenega grafa.

```

using Vaja08
using SparseArrays
tocke = hcat(x, y)'
r = 1.0
G = graf_eps(tocke, r)
L = laplace(G)
spy(L)

```



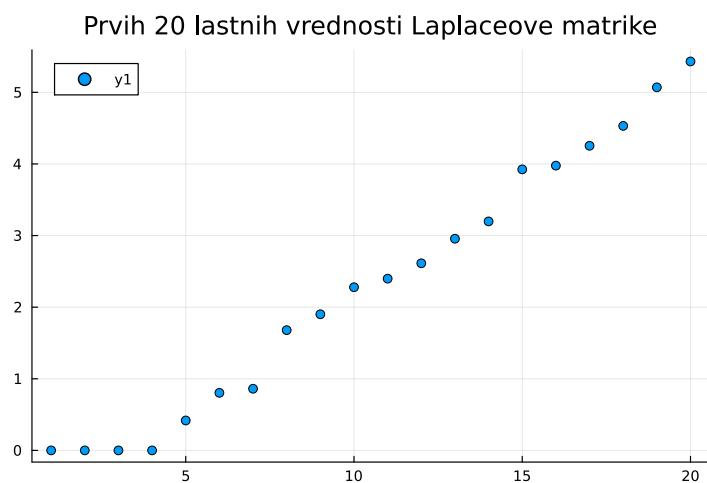
Slika 27: Neničelni elementi Laplaceove matrike

Izračunamo lastne vrednosti Laplaceove matrike dobljenega grafa:

```

using LinearAlgebra
razcep = eigen(Matrix(L))
scatter(razcep.values[1:20], title="Prvih 20 lastnih vrednosti Laplaceove matrike")

```



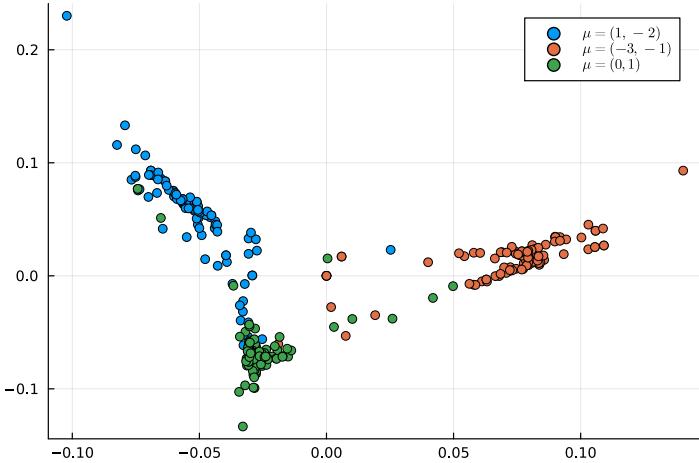
Slika 28: Lastne vrednosti Laplaceove matrike

Vidimo, da sta peta in šesta lastna vrednost najmanjši vrednosti, ki sta različni od 0. Komponente lastnih vektorjev za peto in šesto lastno vrednost uporabimo za nove koordinate.

```

xnov = razcep.vectors[:, 5]
ynov = razcep.vectors[:, 6]
scatter(xnov[1:100], ynov[1:100], label="$\mu=(1, -2)$")
scatter!(xnov[101:200], ynov[101:200], label="$\mu=(-3, -1)$")
scatter!(xnov[201:300], ynov[201:300], label="$\mu=(0, 1)$")

```



Slika 29: Vložitev točk v nov prostor, določen z lastnima vektorjem Laplaceove matrike. Slika ilustrira, kako lahko s preslikavo v drug prostor gruče postanejo bolj očitne.

Seveda se pri samem algoritmu gručenja ni treba omejiti le na dva lastna vektorja, ampak se izbere lastne vektorje za k najmanjših neničelnih lastnih vrednosti in algoritem gručenja avtomatsko bolj upošteva dimenzije, v katerih so gruče najbolj razčlenjene.

8.5 Inverzna potenčna metoda

Ker nas zanima le nekaj najmanjših lastnih vrednosti, lahko njihov izračun in za izračun lastnih vektorjev uporabimo [inverzno potenčno metodo](#). Pri inverzni potenčni metodi zgradimo zaporedje približkov z rekurzivno formulo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{A^{-1}\mathbf{x}^{(k)}}{\|A^{-1}\mathbf{x}^{(k)}\|}. \quad (8.4)$$

Zaporedje približkov $\mathbf{x}^{(k)}$ konvergira k lastnemu vektorju za najmanjšo lastno vrednost matrike A za skoraj vse izbire začetnega približka.

Namesto inverza uporabite LU razcep ali drugo metodo za reševanje linearnega sistema

V inverzni iteraciji moramo večkrat zaporedoma izračunati vrednost

$$A^{-1} \mathbf{x}^{(k)}. \quad (8.5)$$

Za izračun te vrednosti pa v resnici ne potrebujemo inverzne matrike A^{-1} . Računanje inverzne matrike je namreč časovno zelo zahtevna operacija, zato se ji, razen v nizkih dimenzijah, če je le mogoče, izognemo. Produkt $\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$ je rešitev linearnega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in metode za reševanje sistema so bolj učinkovite kot računanje inverza A^{-1} .

Inverz A^{-1} matrike A lahko nadomestimo tudi z razcepom matrike A . Če na primer uporabimo LU razcep $A = LU$, lahko $A^{-1} \mathbf{b}$ izračunamo tako, da rešimo sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oziroma $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ v dveh korakih

$$\begin{aligned} L\mathbf{y} &= \mathbf{b} \text{ in} \\ U\mathbf{x} &= \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

ki sta časovno toliko zahtevna, kot je množenje z matriko A^{-1} . Programski jezik julia ima za ta namen prav posebno metodo `factorize`, ki za različne vrste matrik izračuna najbolj primeren razcep. Rezultat metode `factorize` je vrednost posebnega tipa, za katero lahko uporabimo operator `\`, da učinkovito izračunamo rešitev sistema:

```
julia> F = factorize(A)
julia> x = F\b # ekvivalentno A\b, a učinkovitejše
```

Napišimo funkcijo `inviter(resi, x0)`, ki poišče lastni par za najmanjšo lastno vrednost matrike (rešitev je Program 41). Matrika ni podana eksplicitno, ampak je podana le funkcija `resi`, ki reši sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ za dani vektor \mathbf{b} .

8.6 Inverzna iteracija s QR razcepom

Laplaceova matrika je simetrična, zato so lastni vektorji ortogonalni. Lastne vektorje lahko poiščemo tako, da iteracijo izvajamo na več vektorjih hkrati in nato na dobljeni bazi izvedemo ortogonalizacijo s QR razcepom. Tako dobljeno zaporedje lastnih vektorjev konvergira k lastnim vektorjem za po absolutni vrednosti najmanjše lastne vrednosti. Priredimo sedaj funkcijo `inviter`, da za začetni približek sprejme $k \times n$ matriko in izvede inverzno iteracijo s QR razcepom. Napišimo funkcijo `inviterqr(resi, X0)`, ki poišče lastne vektorje za prvih nekaj najmanjših lastnih vrednosti (rešitev je Program 42). Število lastnih vektorjev, ki jih metoda poišče, naj bo določeno z dimenzijami začetnega približka $X0$.

Laplaceova matrika grafa je pogosto redka. Zato se splača uporabiti eno izmed iterativnih metod. Poleg tega je Laplaceova matrika simetrična in pozitivno semidefinitna. Zato za rešitev sistema uporabimo metodo [konjugiranih gradientov](#). Težava je, ker ima Laplaceova matrika grafa tudi lastno vrednost 0, zato metoda konjugiranih gradientov ne konvergira, če jo uporabimo na Laplaceovi matriki. To lahko rešimo s preprostim premikom Laplaceove matrike za εI .

8.7 Premik

Inverzna iteracija (8.4) konvergira k lastnemu vektorju za najmanjšo lastno vrednost. Lastne vektorje za katero drugo lastno vrednost, poiščemo preprosto s premikom. Naj ima matrika A lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, potem ima matrika

$$A - \delta I \quad (8.7)$$

lastne vrednosti $\lambda_1 - \delta, \lambda_2 - \delta \dots \lambda_n - \delta$. Če izberemo δ dovolj blizu λ_k lahko poskrbimo, da je $\lambda_k - \delta$ najmanjša lastna vrednost matrike $A - \delta I$. Tako lahko z inverzno iteracijo za matriko $A - \delta I$ poiščemo lastni vektor za poljubno lastno vrednost.

Podobno lahko premaknemo Laplaceovo matriko, da postane strogo pozitivno definitna. Potem lahko za reševanje sistema uporabimo metodo konjugiranih gradientov. Namesto da računamo lastne vrednosti in vektorje matrike L , iščemo lastne vrednosti in vektorje malce premaknjene matrike $L + \varepsilon I$, ki ima enake lastne vektorje kot L .

```
A = L + 0.1 * I # premik, da dobimo pozitivno definitno matriko
n = size(L, 1)
# poiščemo prvih 10 lastnih vektorjev
X, lambda = inviterqr(B -> Vaja08.cgmat(A, B), ones(n, 10), 1000)
```

```
[ Info: Metoda KG konvergira po 4 korakih.
[ Info: Metoda KG konvergira po 8 korakih.
[ Info: Metoda KG konvergira po 9 korakih.
Inverzna iteracija s QR razcepom se je končala po 205 korakih.
([ -0.05773502691368182      -0.005802588523008474      ...      -0.005040782182521457
-0.009367575049040844;      -0.057735026915228076      -0.0058025885339489935      ...
-0.0350631801228755      -0.022053224269263837;      ...      ;      -0.05773502691797562
-0.005802588530438843      ...      0.005847112228594752      -0.0012243787826357164;
-0.05773502691890123      -0.005802588531702566      ...      0.009046192382646001
0.0025458880730825474],      [0.10000000000000134,      0.09999999999999998,
0.5179003965208074,      0.903836883326621,      0.9609470847648324,      1.7793419216657385,
0.10000000000000002,      2.001222553034165,      2.378682969684288,      2.4982258638596693])
```

Vidimo, da metoda konjugiranih gradientov zelo hitro konvergira za naš primer. Z inverzno iteracijo s QR razcepom smo učinkovito poiskali lastne vektorje Laplaceove matrike za najmanše lastne vrednosti. Ti lastni vektorji pa izboljšajo proces gručenja.

V našem primeru je bila količina podatkov majhna. Vendar bi z inverzno iteracijo s QR razcepom in metodo konjugiranih gradientov lahko obdelali tudi bistveno večje količine podatkov, pri katerih bi splošne metode, kot na primer QR iteracija za iskanje lastnih parov ali LU razcep za reševanje sistema, odpovedale.

Velike količine podatkov zahtevajo učinkovite algoritme

Z naraščanjem količine podatkov je nujno izbrati učinkovite metode. V praksi se količine podatkov merijo v miljonih in miljardah. Metode s kvadratno ali višjo časovno ali prostorsko zahtevnostjo so pri tako velikih količinah podatkov neuporabne. V tem primeru je mogoče izvesti spektralno gručenje le, če uporabimo učinkovite metode kot sta *inverzna iteracija s QR razcepom* in *metoda konjugiranih gradientov*.

8.8 Rešitve

```
"""
v, lambda = inviter(resi, x0)

Poišči lastno vrednost `lambda` in lastni vektor `v` za matriko z inverzno iteracijo.
Argument `resi` je funkcija, ki za dani vektor `b` poišče rešitev sistema `Ax=b`.
Argument `x0` je začetni približek.

# Primer

```jl
A = [3 1 1; 1 1 3; 1 3 4]
F = lu(A)
resi(b) = F \ b
v, lambda = inviter(resi, [1., 1., 1.])
```

"""

function inviter(resi, x0, maxit=100, tol=1e-10)
    # poiščemo po absolutni največji element v x0
    ls, index = findmax(abs, x0)
    ls = x0[index]
    x = x0 / ls # normiramo, da je največji element enak 1
    for i = 1:maxit
        x = resi(x) # poišči rešitev sistema Ay = x
        ln, index = findmax(abs, x)
        ln = x[index]
        x = x / ln # x normiramo, da je največji element enak 1
        if abs(ln - ls) < tol
            println("Inverzna potenčna metoda se je končala po $i korakih.")
            return x, 1 / ln
        end
        ls = ln
    end
    throw("Inverzna potenčna metoda ne konvergira v $maxit korakih.")
end
```

Program 41: Inverzna iteracija

```

"""
x, lambda = inviterqr(resi, x0)

Poišči nekaj najmanjših lastnih vrednosti in lastnih vektorjev z inverzno iteracijo
s QR razcepom.

Argument `resi` je funkcija, ki za dani vektor `b` poišče rešitev sistema `Ax=b`.

Argument `x0` je matrika začetnih približkov. Toliko, kot je stolpcev v matriki
`x0`, toliko lastnih parov vrne funkcija.

"""

function inviterqr(resi, x0, maxit=100, tol=1e-10)
    _, m = size(x0)
    x = x0
    ls = Inf * ones(m)
    for i = 1:maxit
        x = resi(x) # poišči rešitev sistema Ay = x
        Q, R = qr(x)
        x = Matrix(Q)
        ln = diag(R) # lastne vrednosti A^(-1) so na diagonali R
        if norm(ln - ls, Inf) < tol
            println("Inverzna iteracija s QR razcepom se je končala po $i korakih.")
            return x, 1 ./ ln
        end
        ls = ln
    end
    throw("Inverzna iteracija s QR razcepom ne konvergira v $maxit korakih.")
end

```

Program 42: Inverzna iteracija s QR razcepom

```

"""
A = graf_eps(oblak, epsilon)

Poišči podobnostni graf ε okolic za dani oblak točk.
Argument `oblak` je `k x n` matrika, katere stolpci so koordinate točk v oblaku.
Funkcija vrne matriko sosednosti A za podobnostni graf.

"""

function graf_eps(oblak, epsilon)
    _, n = size(oblak)
    A = spzeros(n, n)
    for i = 1:n
        for j = i+1:n
            if norm(oblak[:, i] - oblak[:, j]) < epsilon
                A[i, j] = 1
                A[j, i] = 1
            end
        end
    end
    return A
end

```

Program 43: Graf podobnosti z ε okolicami

```

"""
L = laplace(A)

Poišči Laplaceovo matriko za dani graf, podan z matriko sosednosti `A`.
Laplaceova matrika grafa ima na diagonali stopnje točk, izven diagonale
pa vrednosti -1 ali 0, odvisno, ali sta indeksa povezana v grafu ali ne.
"""

laplace(A) = spdiags(vec(sum(A, dims=2))) - A

```

Program 44: Laplaceova matrika grafa

8.9 Testi

```

@testset "Inverzna iteracija" begin
    Q = [2 2 1; 1 -2 2; -2 1 2]
    A = Q * diagm([2.0, 3.0, 4.0]) / Q
    F = factorize(A)
    v, lambda = inviter(b -> F \ b, [1, 1, 1])
    @test isapprox(lambda, 2)
    cosinus = dot(v, Q[:, 1]) / norm(v) / norm(Q[:, 1])
    @test isapprox(abs(cosinus), 1)
end

```

Program 45: Test za inverzno iteracijo

```

@testset "Inverzna iteracija QR" begin
    Q = [2 2 1; 1 -2 2; -2 1 2]
    A = Q * diagm([2.0, 3.0, 4.0]) / Q
    F = factorize(A)
    v, lambda = inviterqr(b -> F \ b, [1 1; 1 1; 1 1])
    @test isapprox(lambda, [2, 3])
    cosinus = dot(v[:, 1], Q[:, 1]) / norm(v[:, 1]) / norm(Q[:, 1])
    @test isapprox(abs(cosinus), 1)
end

```

Program 46: Test za inverzno iteracijo s QR razcepom

```

@testset "Graf sosednosti" begin
    oblak = [1 2 3; 1 2 3]
    A = graf_eps(oblak, 2)
    @test isapprox(A, [0 1 0; 1 0 1; 0 1 0])
end

```

Program 47: Test za matriko sosednosti z ε okolicami

9 Konvergenčna območja nelinearnih enačb

9.1 Naloge

- Implementiraj Newtonovo metodo za reševanje sistemov nelinearnih enačb.
- Pošči rešitev dveh nelinearnih enačb z dvema neznankama

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= 1 \\ 3x^2y - y^3 &= 0. \end{aligned} \tag{9.1}$$

- Sistem nelinearnih enačb ima navadno več rešitev. Grafično predstavi, h kateri rešitvi konvergira Newtonova metoda v odvisnosti od začetnega približka. Začetne približke izberi na pravokotni mreži. Vsakemu vozlišču v mreži priredi različne barve, glede na to, h kateri rešitvi konvergira Newtonova metoda. Ves postopek zapiši v funkcijo konvergencno_obmocje.

9.2 Newtonova metoda za sisteme enačb

Sistem nelinearnih enačb lahko zapišemo v obliki

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{9.2}$$

kjer sta $\mathbf{0} = [0, 0, \dots]^T$ in $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots]^T \in \mathbb{R}^n$ n -dimenzionalna vektorja in $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija z vektorskimi argumentom:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

Denimo, da je $\mathbf{x}^{(k)}$ približek za rešitev enačbe (9.2). Funkcijo \mathbf{F} lahko, podobno kot funkcijo ene spremenljivke, v točki $\mathbf{x}^{(k)}$ aproksimiramo z linearo funkcijo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + \mathcal{O}\left((\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)})^2\right), \tag{9.4}$$

kjer je $\text{JF}(\mathbf{x})$ Jacobijeva matrika parcialnih odvodov komponent $f_i(x_1, x_2, \dots)$ po koordinatah x_j

$$\text{JF}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Naslednji približek $\mathbf{x}^{(k+1)}$ v Newtonovi iteraciji dobimo kot rešitev linearnega sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) \\ \text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x}^{(k+1)} &= \text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}). \end{aligned} \tag{9.6}$$

Formulo za naslednji približek $\mathbf{x}^{(k+1)}$ lahko formalno zapišemo kot:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (9.7)$$

pri čemer formule ne smemo jemati dobesedno, saj inverzne matrike $\text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}$ dejansko ne izračunamo. Izraz $\text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ poiščemo tako, da rešimo sistem $\text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ (npr. z LU razcepom ali kako drugače).

Poglejmo si, kako uporabimo Newtonovo metodo za enačbe (9.1). Spremenljivke x, y postavimo v vektor $\mathbf{x} = [x, y]$ in za lažje pisanje programa vpeljemo komponente $x_1 = x$ in $x_2 = y$. Funkcija $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je enaka

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{pmatrix}, \quad (9.8)$$

Jacobijeva matrika $\text{JF}(\mathbf{x})$ pa

$$\text{JF}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3x_2^2 & -6x_1x_2 \\ -6x_1x_2 & 3x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

```
f(x) = [x[1]^3 - 3x[1] * x[2]^2 - 1, 3x[1]^2 * x[2] - x[2]^3]
function jf(x)
    a = 3x[1]^2 - 3x[2]^2
    b = 6x[1] * x[2]
    jf = [a -b; b a]
end
```

Napišimo funkcijo `newton(f, jf, x0)`, ki poišče rešitev sistema nelinearnih enačb z Newtonovo metodo (Program 48). Sistem (9.1) ima 3 rešitve: $(x_1 = 1, y_1 = 0)$, $(x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2})$ in $(x_3 = -\frac{1}{2}, y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Za različne začetne približke Newtonova metoda konvergira k različnim rešitvam.

```
x1, it1 = newton(f, jf, [2, 0])
x2, it2 = newton(f, jf, [-1, 1.0])
x3, it3 = newton(f, jf, [-1, -1.0])
```

Avtomatsko odvajanje

Jacobijevu matriko odvodov lahko učinkovito izračunamo z [avtomatskim odvajanjem](#). V Juliji uporabimo funkcijo `jacobian` iz paketa [ForwardDiff](#).

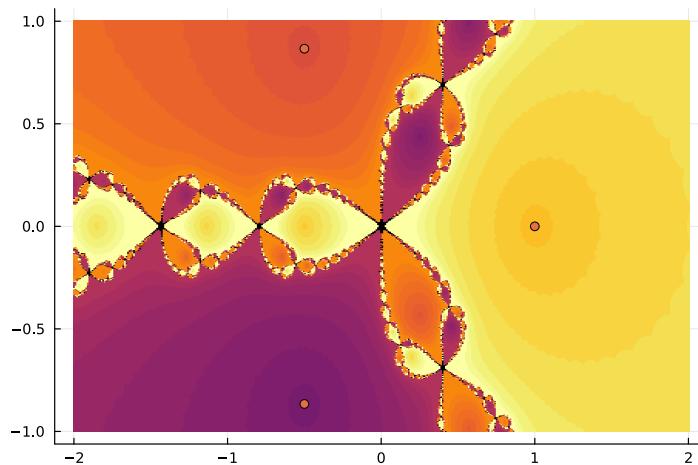
9.3 Konvergenčno območje

Za razliko od linearnih enačb imajo nelinearne enačbe lahko zelo različno število rešitev. Newtonova metoda je občutljiva glede izbire začetnega približka. Če je začetni približek dovolj blizu neke rešitve, Newtonova metoda konvergira k tisti rešitvi. Če pa je približek med ničlami, postane obnašanje Newtonove metode precej bolj nepredvidljivo. Napišimo funkcijo `konvergenca(obmocje, metoda, nx, ny)`, ki poišče h katerim ničlam na danem območju konvergira Newtonova metoda (Program 50). Za lažje delo s pravokotnimi območji, si bomo pripravili nekaj pomožnih tipov in funkcij (Program 49).

```

using Plots
maxit = 20
obmocje = Box2d(Interval(-2, 2), Interval(-1, 1))
metoda(x0) = newton(f, jf, x0; atol=1e-4, maxit=maxit)
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(obmocje, metoda, 800, 400; atol=1e-3)
heatmap(x, y, Z + 0.8*min.(koraki/10, 1), legend=false)
scatter!(Tuple.(nicle), label="rešitve")

```



Slika 30: Newtonova metoda konvergira k različnim rešitvam odvisno od začetnega približka

9.4 Rešitve

```

using LinearAlgebra

function newton(f, jf, x0; maxit=100, atol=1e-8)
    for i = 1:maxit
        x = x0 - jf(x0) \ f(x0)
        if norm(x - x0, Inf) < atol
            return x, i
        end
        x0 = x
    end
    throw("Metoda ne konvergira po $maxit korakih!")
end

```

Program 48: Newtonova metoda za sisteme enačb

```

struct Interval
    min
    max
end

vsebuje(x, i::Interval) = x >= i.min && x <= i.max

struct Box2d
    int_x
    int_y
end

vsebuje(x, b::Box2d) = vsebuje(x[1], b.int_x) && vsebuje(x[2], b.int_y)

diskretiziraj(i::Interval, n) = range(i.min, i.max, n)
diskretiziraj(b::Box2d, m, n) = (
    diskretiziraj(b.int_x, m), diskretiziraj(b.int_y, n))

```

Program 49: Pomožne funkcije za delo s pravokotnimi območji

```

"""
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(obmocje, metoda, n=50, m=50; maxit=50,
tol=1e-3)

Izračunaj h katerim vrednostim konvergira metoda `metoda`, če uporabimo različne
začetne približke na pravokotniku `[a, b]x[c, d]` podanim z argumentom `obmocje`.

# Primer
Konvergenčno območje za Newtonovo metodo za kompleksno enačbo ``z^3=1``

```jl
F((x, y)) = [x^3-3x*y^2; 3x^2*y-y^3];
JF((x, y)) = [3x^2-3y^2 -6x*y; 6x*y 3x^2-3y^2]
metoda(x0) = newton(F, JF, x0; maxit=10; tol=1e-3);
obmocje = Box2d(Interval(-2, 2), (-1, 1))
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(obmocje, metoda; n=5, m=5)
```
"""

function konvergenca(obmocje::Box2d, metoda, m=50, n=50; atol=1e-3)
    Z = zeros(m, n)
    koraki = zeros(m, n)
    x, y = diskretiziraj(obmocje, n, m)
    nicle = []
    for i = 1:n, j = 1:m
        z = [x[i], y[j]]
        it = 0
        try
            z, it = metoda(z)
        catch
            continue
        end
        k = findfirst([norm(z - z0, Inf) < 2atol for z0 in nicle])
        if isnothing(k)
            if vsebuje(z, obmocje)
                push!(nicle, z)
                k = length(nicle)
            else
                continue
            end
        end
        Z[j, i] = k # vrednost elementa je enka indeksu ničle
        koraki[j, i] = it # število korakov metode
    end
    return x, y, Z, nicle, koraki
end

```

Program 50: Funkcija, ki razišče konvergenco dane metode na danem pravokotniku

10 Nelinearne enačbe v geometriji

10.1 Naloga

- Implementirajte Newtonovo metodo za sisteme nelinearnih enačb.
- Napišite funkcijo, ki poišče samopresečišče [Lissajousove krivulje](#)

$$(x(t), y(t)) = (a \sin(nt), b \cos(mt)) \quad (10.1)$$

za parametre $a = b = 1$ in $n = 3$ in $m = 2$.

- Poiščite minimalno razdaljo med dvema parametrično podanimi krivuljama:

$$\begin{aligned} (x_1(t), y_1(t)) &= \left(2 \cos(t) + \frac{1}{3}, \sin(t) + \frac{1}{4} \right) \\ (x_2(s), y_2(s)) &= \left(\frac{1}{3} \cos(s) - \frac{1}{2} \sin(s), \frac{1}{3} \cos(s) + \frac{1}{2} \sin(t) \right). \end{aligned} \quad (10.2)$$

- Zapišite razdaljo med točko na prvi krivulji in točko na drugi krivulji kot funkcijo $d(t, s)$ parameterov t in s .
- Minimum funkcije $d(t, s)$ oziroma $d^2(t, s)$ poiščite z [gradientnim spustom](#).
- Minimum funkcije $d^2(t, s)$ poiščite z Newtonovo metodo kot rešitev vektorske enačbe

$$\nabla d^2(t, s) = 0. \quad (10.3)$$

- Grafično predstavite zaporedja približkov za gradientno metodo in Newtonovo metodo.
- Primerjajte konvergenčna območja za gradientno in Newtonovo metodo (glej Poglavlje 9).

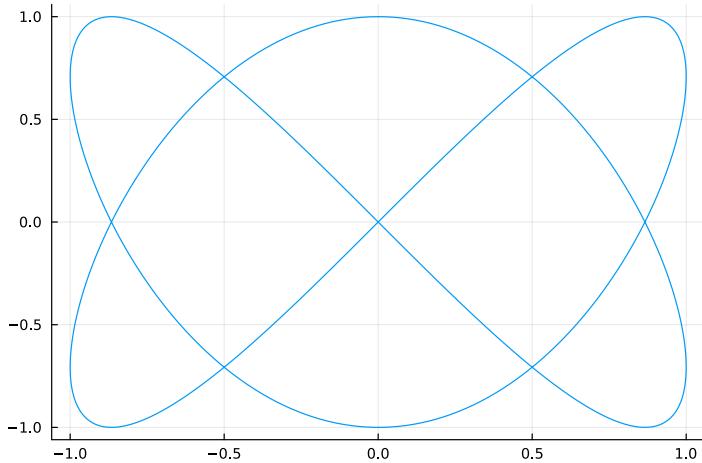
10.2 Presečišča geometrijskih objektov

Poiščimo samopresečišča [Lissajousove krivulje](#)

$$\begin{aligned} x(t) &= a \sin(nt) \\ y(t) &= b \cos(mt) \end{aligned} \quad (10.4)$$

za parametre $a = b = 1$, $n = 2$ in $m = 3$. Da si lažje predstavljamo, kaj iščemo, najprej narišimo krivuljo.

```
using Plots
l(t) = [sin(2t), cos(3t)]
t = range(0, 2pi, 500)
plot(Tuple.(l.(t)), label=nothing)
```



Slika 31: Lissajousova krivulja za $a = b = 1$, $n = 2$ in $m = 3$

Iščemo parametra t in s , ki sta različna $t \neq s$ in za katera velja

$$\begin{aligned} x(t) &= x(s) \\ y(t) &= y(s). \end{aligned} \tag{10.5}$$

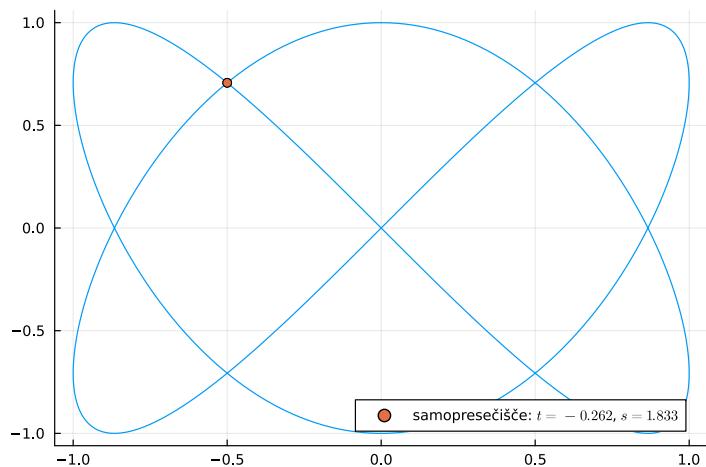
Dobili smo torej sistem dveh nelinearnih enačb z dvema neznankama. Rešitve sistema (10.5) poiščemo z Newtonovo metodo, ki smo jo spoznali v prejšnjem poglavju (Poglavlje 9). Newtonova metoda zahteva, da sistem enačb prevedemo v vektorsko enačbo $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Funkcija, katere ničlo iščemo je

$$F\left(\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x(t) - x(s) \\ y(t) - y(s) \end{bmatrix}, \tag{10.6}$$

njena Jacobijeva matrika pa

$$JF\left(\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) & -\dot{x}(s) \\ \dot{y}(t) & -\dot{y}(s) \end{pmatrix}. \tag{10.7}$$

```
using Vaja09: newton
using Printf
f(ts) = l(ts[1]) - l(ts[2])
dl(t) = [2cos(2t), -3sin(3t)]
df(ts) = hcat(dl(ts[1]), -dl(ts[2]))
ts, it = newton(f, df, [0.0, pi / 2])
scatter!(Tuple.(l.(ts)),
    label=@sprintf "samopresečišče: \$t=% .3f \$, \$s=% .3f \$" ts...)
```



Slika 32: Krivulja doseže samopresečišče pri dveh različnih vrednostih parametra.

Napišimo sedaj funkcijo, `samopres(k, dk, ts0)`, ki poišče samopresečišče z Newtonovo metodo (rešitev Program 51).

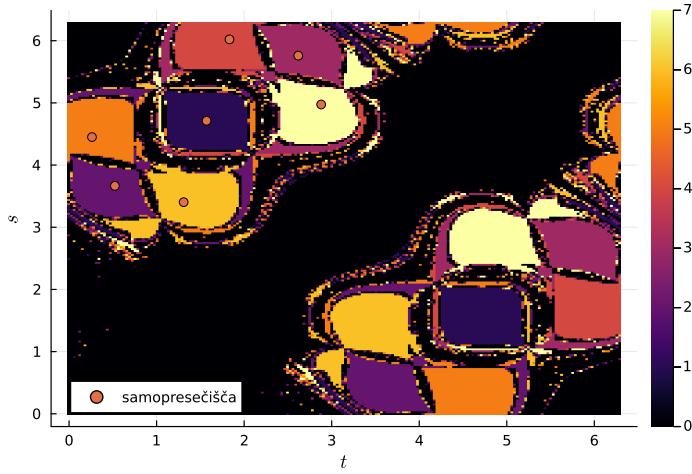
Nato uporabimo Program 50, da določimo območja konvergence in poiščemo vsa samopresečišča.

```

using Vaja10: samopres
mod2pi(x) = rem(x, 2pi)
""" Poišči samopresečišče Lissjousove krivulje. Upoštevaj periodičnost."""
function splissajous(ts0)
    ts, it = samopres(l, dl, ts0)
    ts = mod2pi.(ts)
    if abs(ts[1] - ts[2]) < 1e-12
        throw("Ista parametra ne pomenita samopresečišča.")
    end
    return sort(ts), it
end

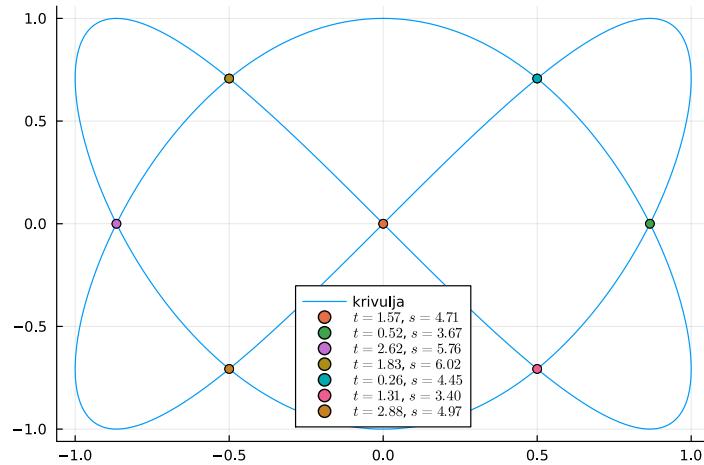
using Vaja09: konvergenca, Box2d, Interval
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(Box2d(Interval(0, 2pi), Interval(0, 2pi)),
                                         splissajous, 200, 200)
heatmap(x, y, Z, xlabel="\$t\$$", ylabel="\$s\$$")
scatter!(Tuple.(nicle), label="samopresečišča", legend=:bottomleft)

```



Slika 33: Območje konvergencije za samopresečišča Lissajousove krivulje

```
p = plot(Tuple.(l.(t)), label="krivulja", legend=:bottom) # narišemo zopet krivuljo
for ts in nicle
    scatter!(p, Tuple.(l.(ts)), label=@sprintf "\$t=% .2f \$, \$s=% .2f \$" ts...)
end
display(p)
```

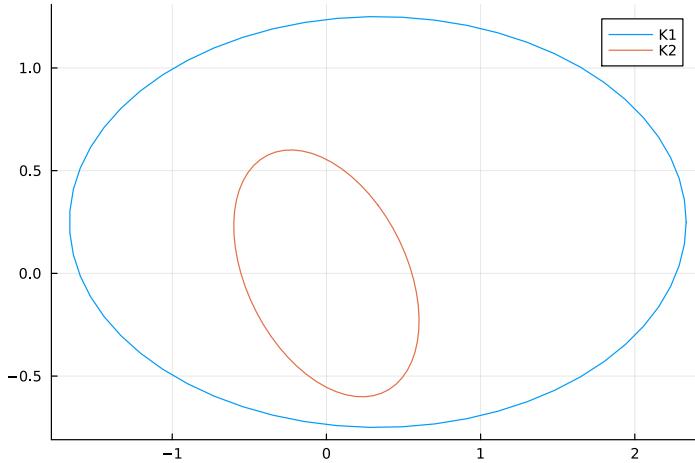


10.3 Minimalna razdalja med dvema krivuljama

Naj bosta K_1 in K_2 parametrično podani krivulji:

$$\begin{aligned} K_1 : \mathbf{k}_1(t) &= (x_1(t), y_1(t)); \quad t \in \mathbb{R} \\ K_2 : \mathbf{k}_2(s) &= (x_2(s), y_2(s)); \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{10.8}$$

```
using Plots
k1(t) = [2 * cos(t) + 1 / 3, sin(t) + 0.25]
k2(s) = [cos(s) / 3 - sin(s) / 2, cos(s) / 3 + sin(s) / 2]
t = range(0, 2pi, 60);
plot(Tuple.(k1.(t)), label="K1")
plot!(Tuple.(k2.(t)), label="K2")
```



Slika 35: Krivulji v ravnini

Razdaljo med krivuljama lahko definiramo na različne načine. Poglejmo si dva načina, kako definiramo razdaljo med krivuljama:

- *Minimalna razdalja*:

$$d_m(K_1, K_2) = \min_{T_1 \in K_1, T_2 \in K_2} d(T_1, T_2), \quad (10.9)$$

- *Hausdorffova razdalja*:

$$d_h(K_1, K_2) = \max \left(\max_{T_1 \in K_1} \min_{T_2 \in K_2} d(T_1, T_2), \max_{T_2 \in K_2} \min_{T_1 \in K_1} d(T_1, T_2) \right) \quad (10.10)$$

Hausdorffova razdalja

Hausdorffova razdalja pove, koliko je lahko točka na eni krivulji največ oddaljena od druge krivulje. Če sta množici blizu v Hausdorffovi razdalji, je vsaka točka ene množice blizu drugi množici. Medtem, ko je minimalna razdalja med dvema krivuljama vedno končna, pa je lahko Hausdorffova razdalja tudi neskončna (na primer, če je ena krivulja omejena, druga pa neomejena).

V primeru minimalne razdalje iščemo točko $\mathbf{k}_1(t)$ na krivulji \mathbf{k}_1 in točko $\mathbf{k}_2(s)$ na krivulji \mathbf{k}_2 , ki sta najbližji med vsemi pari točk. Iščemo vrednosti parametrov t in s pri katerih funkcija razdalje

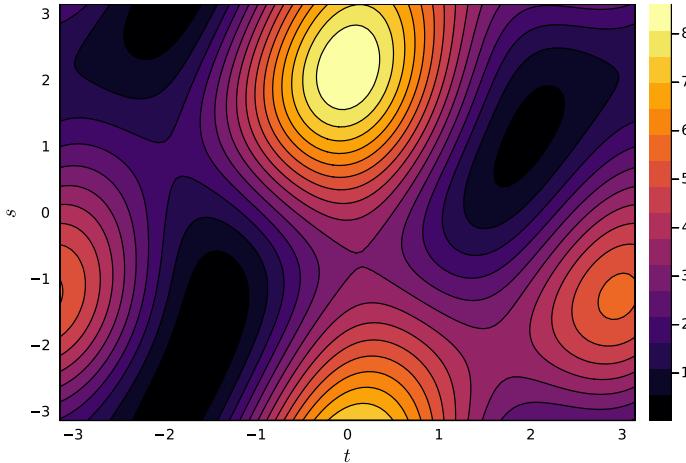
$$d(t, s) = \sqrt{(x_1(t) - x_2(s))^2 + (y_1(t) - y_2(s))^2} \quad (10.11)$$

doseže minimum. Ker je koren naraščajoča funkcija imata $d(t, s)$ in $d^2(t, s)$ minimum v isti točki. Zato bomo raje poiskali minimum funkcije

$$D(t, s) = d^2(t, s) = (x_1(t) - x_2(s))^2 + (y_1(t) - y_2(s))^2. \quad (10.12)$$

```
using Vaja10: razdajla2
d2 = razdajla2(k1, k2)

t = range(-pi, pi, 100)
s = t
contourf(t, s, d2, xlabel="\$t\$$", ylabel="\$s\$$")
```



Slika 36: Razdalja med točkama na krivuljah k_1 in k_2 v odvisnosti od parametrov na krivulji

10.3.1 Gradientni spust

Metoda gradientnega spusta je sila enostavna. Predstavljamo si, da je gosta meglja in da smo na pobočju gore. Želimo čim prej priti v dno doline. Na vsakem koraku izberemo smer, v kateri je pobočje najbolj strmo in se premaknemo v tej smeri. Na ta način bomo prej ali slej bomo prišli v dolino. Ni nujno, da bomo na ta način prišli v dolino, saj lahko prej pristanemo v kakšni kotanji ali vrtači na pobočju gore. V vsakem primeru bomo prej ali slej prišli nekam na dno, kjer bo šlo le še navzgor.

V jeziku funkcij iščemo minimum funkcije več spremenljivk $f(\mathbf{x})$. Na vsakem koraku izberemo smer, v kateri funkcija najhitreje pada, in se premaknemo za določen korak v tej smeri. To je ravno v nasprotni smeri gradijeta funkcije. Če koraki niso preveliki, bomo prej ali slej pristali v lokalnemu minimu funkcije $f(\mathbf{x})$. Računamo naslednje zaporedje približkov:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - h_n \nabla f(\mathbf{x}^{(n)}), \quad (10.13)$$

kjer je $\nabla f(\mathbf{x}^{(n)})$ vrednost gradijeta v točki $\mathbf{x}^{(n)}$, vrednost h_n pa je parameter, ki poskrbi, da zaporedje približkov ne skače preveč po domeni in se lahko na vsakem koraku spremeni. Napišimo funkcijo `spust(gradf, x0, h)`, ki poišče lokalni minimum funkcije z metodo gradientnega spusta (rešitev Program 53).

Gradient funkcije $D(t, s)$ bi lahko izračunali na roke, vendar je to zamudno in se pri tem lahko hitro zmotimo. Uporabili bomo knjižnico za [avtomatsko odvajanje ForwardDiff.jl](#), ki učinkovito izračuna vrednosti parcialnih odvodov funkcije v posameznih točkah. Knjižnica `ForwardDiff` zna odvajati le funkcije vektorske spremenljivke, zato funkcijo dveh spremenljivk `d2(t, s)` sprememimo v funkcijo vektorske spremenljivke `ts -> d2(ts...)`. Operator `...` elemente vektorja razporedi kot argumente funkcije.

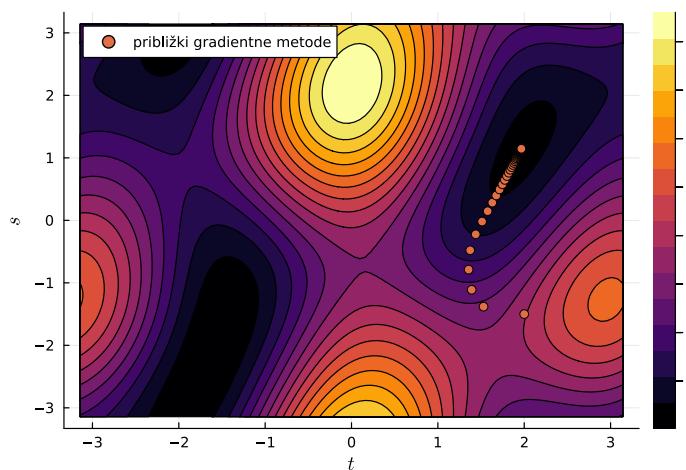
```
using ForwardDiff
gradd2(ts) = ForwardDiff.gradient(ts -> d2(ts...), ts)
v = gradd2([pi / 2, pi]) # vrednost grad(d2) v t=2, s=1
```

```

"Izračunaj zaporedje približkov gradientne metode."
function priblizki(grad, x0, h, n)
    p = [x0]
    for i = 1:n
        x = x0 - h * grad(x0)
        push!(p, x)
        x0 = x
    end
    return p
end

pribl = priblizki(gradd2, [2.0, -1.5], 0.2, 40)
scatter!(Tuple.(pribl), label="približki gradientne metode")

```



Slika 37: Zaporedje približkov gradientnega spusta

Iz slike je razvidno, da gradientni spust konvergira k lokalnemu minimumu, da pa je konvergenca počasna, ko se približamo minimu. Konvergenco lahko pohitrimo s primerno izbiro parametra h_n , na primer tako da gradientni spust kombiniramo z metodo [minimiziranja v dani smeri](#).

10.3.2 Newtonova metoda

Fermat je med drugim dokazal izrek, ki pove, da je v lokalnem ekstremu vrednost odvoda vedno enaka 0. Isti izrek velja tudi za funkcije več spremenljivk, le da je v tem primeru gradient funkcije enak 0.

Ta izrek morda ni tako razvpit kot njegov zadnji izrek, je pa zato toliko bolj uporaben. Potreben pogoj za nastop lokalnega ekstrema je namreč vektorska enačba

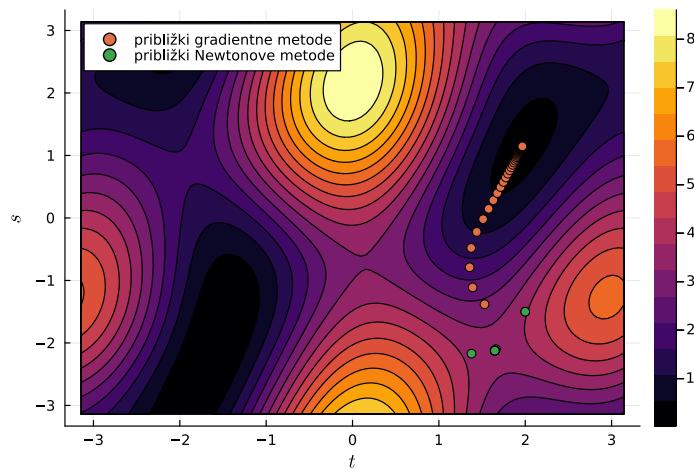
$$\nabla D(t, s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial D(t, s)}{\partial t} \\ \frac{\partial D(t, s)}{\partial s} \end{pmatrix} = 0. \quad (10.14)$$

Rešitev enačbe (10.14) lahko poiščemo z Newtonovo metodo, ki smo jo spoznali v prejšnjem poglavju (Poglavlje 9).

```

jacd2(x0) = ForwardDiff.jacobian(gradd2, x0)
korak_newton(f, Jf, x0) = x0 - Jf(x0) \ f(x0)
x0 = [2.0, -1.5]
pribl_newton = [x0]
for i = 1:10
    x0 = korak_newton(gradd2, jacd2, x0)
    push!(pribl_newton, x0)
end
scatter!(Tuple.(pribl_newton), label="približki Newtonove metode")

```



Slika 38: Zaporedje približkov gradientnega spusta in Newtonove metode z istim začetnim približkom

Za razliko od gradientnega spusta, Newtonova metoda ne konvergira nujno k lokalnemu minimu, ampak h eni od stacionarnih točk funkcije $D(t, s)$, med katerimi so tudi sedla in maksimumi. Zato je Newtonova metoda precej bolj občutljiva za izbiro začetnega približka kot gradientni spust. Poglejmo si točki na krivuljah, ki ustrezajo parametrom najdenim z gradientnim spustom:

```

using Vaja10: spust
t = range(0, 2pi, 100)
plot(Tuple.(k1.(t)), label="\$k_1(t)\$")
plot!(Tuple.(k2.(t)), label="\$k_2(s)\$")
ts, it = spust(gradd2, [2, -1.5], 0.2)
scatter!(Tuple(k1(ts[1])), label="\$k_1(t_0)\$")
scatter!(Tuple(k2(ts[2])), label="\$k_2(s_0)\$")

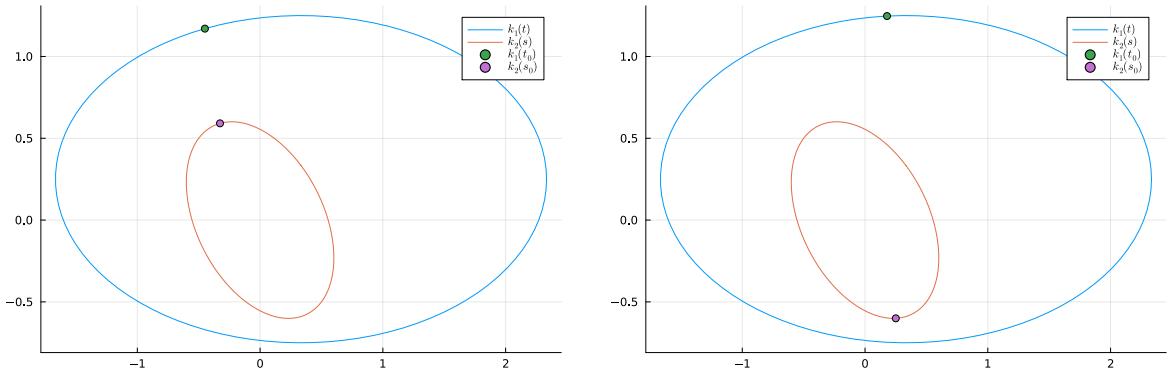
```

in Newtonovo metodo:

```

using Vaja09: newton
t = range(0, 2pi, 100)
plot(Tuple.(k1.(t)), label="\$k_1(t)\$")
plot!(Tuple.(k2.(t)), label="\$k_2(s)\$")
ts, it = newton(gradd2, jacd2, [2, -1.5])
scatter!(Tuple(k1(ts[1])), label="\$k_1(t_0)\$")
scatter!(Tuple(k2(ts[2])), label="\$k_2(s_0)\$")

```



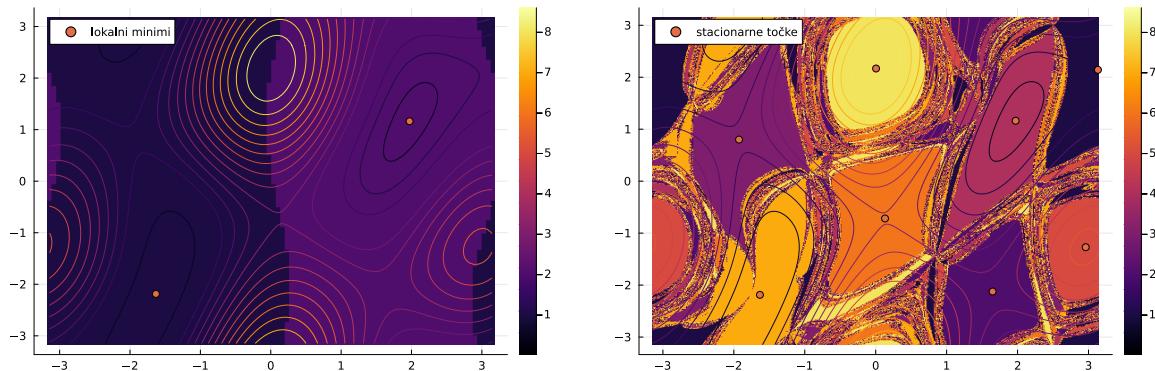
Slika 39: Levo: Točki na krivuljah, h katerima konvergira gradientna metoda sta lokalni minimum, ki pa ni globalni. Desno: Newtonova metoda konvergira k sedlu. Točka na k_1 je lokalni minimum, točka na k_2 pa lokalni maksimum.

Za konec si oglejmo še konvergenčna območja za gradientni spust:

```
using Vaja09: konvergenca
using Vaja10: spust
function spustd2(x0)
    ts, it = spust(gradd2, x0, 0.2; maxit=1000)
    ts = map(t -> mod(t + pi, 2pi) - pi, ts)
    return ts, it
end
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(
    Box2d(Interval(-pi, pi), Interval(-pi, pi)), spustd2, 100, 100;
    atol=1e-2)
heatmap(x, y, Z)
scatter!(Tuple.(nicle), label="lokalni minimi")
contour!(x, y, d2)
```

in Newtonovo metodo:

```
function newtond2(x0)
    ts, it = newton(gradd2, jacd2, x0; atol=1e-5)
    ts = map(t -> mod(t + pi, 2pi) - pi, ts)
    return ts, it
end
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(
    Box2d(Interval(-pi, pi), Interval(-pi, pi)), newtond2, 500, 500;
    atol=1e-2)
heatmap(x, y, Z)
scatter!(Tuple.(nicle), label="stacionarne točke")
contour!(x, y, d2)
```



Slika 40: Območja konvergencije za gradientni spust (levo) in Newtonovo metodo (desno)

10.4 Rešitve

```
''''
ts, it = samopres(k, dk, ts0)
```

Poisci samopresecišče krivulje `k` s smernim odvodom `dk` z Newtonovo metodo z začetnim približkom `ts0`. Začetni približek `ts0` in rezultat `ts` sta dvodimensionalna vektorja z dvema različnima parametroma.

```
# Primer
```

```
'''jl
k(t) = [t^2, t^3-t]
dk(t) = [2t, 3t^2-1]
ts, it = samopres(k, dk, [-0.5, 0.5])
'''

function samopres(k, dk, ts0)
    f(ts) = k(ts[1]) - k(ts[2])
    df(ts) = hcat(dk(ts[1]), -dk(ts[2]))
    ts, it = newton(f, df, ts0)
    ts = sort(ts)
    if abs(ts[1] - ts[2]) < 1e-12
        throw("Ista parametra ne pomenita samopresecišča.")
    end
    return ts, it
end
```

Program 51: Poišči samopresecišče krivulje z Newtonovo metodo.

```

using LinearAlgebra

"""
d2 = razdalja2(k1, k2)

Vrni funkcijo kvadrata razdalje `d2(t, s)` med točkama na krivuljah
`k1` in `k2`. Rezultat `d2` je funkcija dveh spremenljivk `t` in `s`, kjer je
`t` parameter na krivulji `k1` in `s` parameter na krivulji `k2`.
# Primer
```jl
k1(t) = [t, t^2 - 2]
k2(s) = [cos(s), sin(s)]
d2 = razdalja(k1, k2) # vrne funkcijo d2
d2(1, pi) # izračuna kvadrat razdalje med k1(1) in k2(pi)
```
"""

function razdalja2(K1, K2)
    function d2(t, s)
        delta = K1(t) - K2(s)
        return dot(delta, delta)
    end
    return d2
end

```

Program 52: Funkcija razdalje med dvema krivuljama

```

"""
x0, it = spust(gradf, x0, h)

Poišči lokalni minimum za funkcijo podano z gradientom `gradf` z metodo
najhitrejšega spusta. Argument `x0` je začetni približek `h` pa vrednost s
katero pomnožimo gradient.
"""

function spust(gradf, x0, h; maxit=500, atol=1e-8)
    for i = 1:maxit
        x = x0 - h * gradf(x0)
        if norm(x0 - x) < atol
            return x, i
        end
        x0 = x
    end
    throw("Gradientni spust ni konvergiral po $maxit korakih!")
end

```

Program 53: Gradientni spust

11 Aproksimacija z linearnim modelom

11.1 Naloga

- Podatke o koncentraciji CO₂ v ozračju aproksimiraj s kombinacijo kvadratnega polinoma in sinusnega nihanja s periodo 1 leto.
- Parametre modela poišči z normalnim sistemom in QR razcepom.
- Model uporabi za napoved obnašanja koncentracije CO₂ za naslednjih 20 let.

11.2 Linearni model

V znanosti pogosto želimo opisati odvisnost dveh količin npr. kako se spreminja koncentracija CO₂ v odvisnosti od časa. Matematičnemu opisu povezave med dvema ali več količinami pravimo **matematični model**. Primer modela je Hookov zakon za vzmet, ki pravi, da je sila vzmeti F sorazmerna z raztezkom x :

$$F = kx \quad (11.1)$$

Model povezuje dve količini silo F in raztezek x . Poleg tega Hookov zakon vpelje še koeficient vzmeti k . Koeficientu k pravimo **parameter modela** in ga lahko določimo za vsako vzmet posebej z meritvami sile in raztezka.

Najpreporješči je **linearni model**, pri katerem odvisno količino y zapišemo kot linearno kombinacijo baznih funkcij $\varphi_j(x)$ neodvisne spremenljivke x :

$$y(x) = M(p, x) = p_1\varphi_1(x) + p_2\varphi_2(x) + \dots + p_k\varphi_k(x). \quad (11.2)$$

Koeficientom p_j pravimo parametri modela in jih določimo na podlagi meritv. Znanstveniki hočejo model, pri katerem imajo parametri p_i preprosto interpretacijo in pomagajo pri razumevanju pojava, ki ga opisujejo. Zato so bazne funkcije pogosto elementarne funkcije, pri katerih je jasno razvidna narava odvisnosti.

11.2.1 Metoda najmanjših kvadratov

Koeficiente modela, ki najbolje opisujejo izmerjene podatke lahko poiščemo z metodo najmanjših kvadratov. Napišemo najprej pogoje, ki bi jim zadoščali parametri, če bi izmerjeni podatki povsem sledili modelu. Za vsako meritve $y_i = y(x_i)$ bi bila vrednost odvisne količine y_i natanko enaka vrednosti, ki jo predandi model $M(p, x_i)$. To predpostavko lahko zapišemo s sistemom enačb

$$\begin{aligned} y_1 &= M(p, x_1) = p_1\varphi_1(x_1) + \dots + p_k\varphi_k(x_1) \\ y_2 &= M(p, x_2) = p_1\varphi_1(x_2) + \dots + p_k\varphi_k(x_2) \\ &\vdots \\ y_n &= M(p, x_n) = p_1\varphi_1(x_n) + \dots + p_k\varphi_k(x_n). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Neznane v zgornjem sistemu so parametri p_j in za **linearni model** so enačbe linearne. To je tudi ena glavnih prednosti linearnega modela. Meritve redko povsem sledijo modelu, zato sistem (11.3) v splošnem ni rešljiv, saj je meritve običajno več kot je parametrov sistema. Sistem (11.3) je **predoločen**. Lahko pa poiščemo vrednosti parametrov p_j pri katerih bo razlika med meritvami in modelom kar

se da majhna. Izkaže se, da je najboljša mera za odstopanje modela od podatkov kar vsota kvadratov razlik med meritvami in napovedjo modela:

$$(y_1 - M(p, x_1))^2 + \dots + (y_n - M(p, x_n))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - M(p, x_i))^2. \quad (11.4)$$

Sistem (11.3) lahko zapišemo v matrični obliki

$$A\mathbf{p} = \mathbf{y}, \quad (11.5)$$

kjer so stolpci matrike sistema enaki vrednostim baznih funkcij

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_k(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_k(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_k(x_n) \end{pmatrix} \quad (11.6)$$

in stolpec desnih strani je enak meritvam

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T. \quad (11.7)$$

Pogoj najmanjših kvadratov razlik (11.4) za optimalne vrednosti parametrov \mathbf{p}_{opt} lahko sedaj zapišemo s kvadratno vektorsko normo

$$\mathbf{p}_{opt} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{p}} \|A\mathbf{p} - \mathbf{y}\|_2^2. \quad (11.8)$$

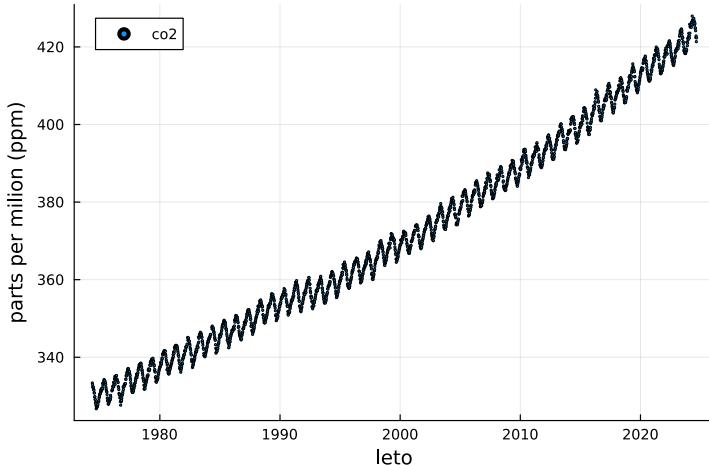
11.3 Opis sprememb koncentracije CO₂

Na observatoriju [Mauna Loa](#) na Hawaiih že leta spremljajo koncentracijo CO₂ v ozračju. Podatke lahko dobimo na njihovi spletni strani v različnih oblikah. Oglejmo si tedenska povprečja od začetka maritev leta 1974

```
using FTPClient
url = "ftp://aftp.cmdl.noaa.gov/products/trends/co2/co2_weekly_mlo.txt"
io = download(url)
data = readlines(io)
```

Nato odstranimo komentarje in izluščimo podatke

```
filter!(l -> l[1] != '#', data)
data = strip.(data)
data = [split(line, r"\s+") for line in data]
data = [[parse(Float64, x) for x in line] for line in data]
filter!(l -> l[5] > 0, data)
t = [l[4] for l in data]
co2 = [l[5] for l in data]
using Plots
scatter(t, co2, xlabel="leto",
        ylabel="parts per milion (ppm)", label="co2", markersize=1)
```



Slika 41: Koncentracija atmosferskega CO₂ na Mauna Loa v zadnjih desetletjih

Časovni potek koncentracije CO₂ matematično opišemo kot funkcijo koncentracije v odvisnosti od časa

$$y = \text{CO}_2(t). \quad (11.9)$$

Model, ki dobro opisuje spremembe CO₂ lahko sestavimo iz kvadratne funkcije, ki opisuje naraščanje letnih povprečij in periodičnega dela, ki opiše nihanja med letom:

$$\text{CO}_2(\mathbf{p}, t) = p_1 + p_2 t + p_3 t^2 + p_4 \sin(2\pi t) + p_5 \cos(2\pi t). \quad (11.10)$$

Čas t naj bo podan v letih. Predoločeni sistem (11.3), ki ga dobimo za naš model ima $n \times 5$ matriko sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \sin(2\pi t_1) & \cos(2\pi t_1) \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \sin(2\pi t_2) & \cos(2\pi t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \sin(2\pi t_n) & \cos(2\pi t_n) \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

desne strani pa so vrednosti koncentracij.

Po metodi najmanjših kvadratov iščemo vrednosti parametrov \mathbf{p} modela CO₂(\mathbf{p} , t), pri katerih bo vsota kvadratov razlik med napovedjo modela in izmerjenimi vrednostmi najmanjša. Zapišimo vsoto kvadratov kot evklidsko normo razlike med vektorjem napovedi modela $A\mathbf{p}$ in vektorjem izmerjenih vrednosti \mathbf{y} . Iščemo torej vektor parametrov \mathbf{p} , pri katerem bo

$$\|A\mathbf{p} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (11.12)$$

najmanjša.

11.4 Normalni sistem

Vektor parametrov modela \mathbf{p} izberemo tako, da je napoved modela $A\mathbf{p}$ enaka pravokotni projekciji \mathbf{y} na stolpčni prostor matrike A . Tako lahko izpeljemo *normalni sistem* za dani predoločen sistem $A\mathbf{p} = \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}
A\mathbf{p} - \mathbf{y} &\perp C(A) \\
A\mathbf{p} - \mathbf{y} &\in N(A^T) \\
A^T(A\mathbf{p} - \mathbf{y}) &= 0 \\
A^T A\mathbf{p} &= A^T \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Normalni sistem $A^T A\mathbf{p} = A^T \mathbf{y}$ je kvadraten in je vedno rešljiv, če so le bazne funkcije modela izračunane v izmerjenih vrednostih neodvisne spremenljivke linearno neodvisne.

```

using LinearAlgebra
A = hcat(ones(size(t)), t, t.^2, cos.(2pi * t), sin.(2pi * t))
N = A' * A
b = A' * co2
p = N \ b

```

Problem normalnega sistema (11.13) je, da je zelo občutljiv:

```
cond(A), cond(N)
```

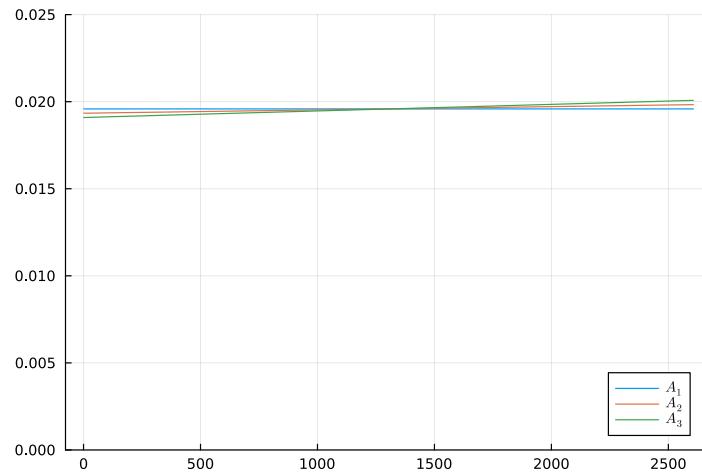
```
(8.485720131253891e10, 8.844594773755016e21)
```

Pravzaprav je že sama matrika A zelo občutljiva. Razlog je v izbiri baznih funkcij. Če narišemo normirane stolpce A kot funkcije, vidimo, da so zelo podobni.

```

plot(A[:, 1] / norm(A[:, 1]), ylims=[0, 0.025], label="\$A_1\$")
plot!(A[:, 2] / norm(A[:, 2]), label="\$A_2\$")
plot!(A[:, 3] / norm(A[:, 3]), label="\$A_3\$")

```



Slika 42: Normirani prvi trije bazni vektorji (stolpci matrike A)

Občutljivost je deloma posledica dejstva, da čas merimo v letih od začetka našega štetja. Vrednosti 1975 in 2020 sta relativno blizu in tako ima vektor vrednosti t_i skoraj enako smer kot vektor enic. Občutljivost matrike A lahko precej zmanjšamo, če časovno skalo premaknemo, da je 0 bliže dejanskim podatkom. Namesto t uporabimo spremenljivko $t - \tau$, kjer je τ premik časovne skale. Najboljša izbira za τ je na sredini podatkov:

```

t = sum(t) / length(t)
A = hcat(ones(size(t)), t - τ, (t - τ) .^ 2, cos.(2pi * t), sin.(2pi * t))
o = cond(A)

```

423.0901800882157

Matrika A je sedaj precej dlje od singularne matrike in posledično je tudi normalni sistem manj občutljiv.

Prednosti normalnega sistema

Čeprav je normalni sistem zelo občutljiv, se v praksi izkaže, da napaka vendarle ni tako velika. Ima pa normalni sistem nekatere prednosti pred QR razcepom.

Dimenzijs normalnega sistema so dane s številom parametrov in so bistveno manjše, kot dimenzijs matrike predoločenega sistema A . Zato je prostor, ki ga potrebujemo za normalni sistem bistveno manjši od prostora, ki ga potrebujemo za QR razcep.

Druga prednost normalnega sistema je, da ga lahko posodobimo, če dobimo nove podatke. To je uporabno, če na primer podatke dobivamo v toku. Normalni sistem lahko posodobimo, vsakič, ko dobimo nov podatek, ne da bi bilo treba hraniti prejšnje podatke.

11.5 QR razcep

Normalni sistem se redko uporablja v praksi. Standarden postopek za iskanje rešitve predoločenega sistema z metodo najmanjših kvadratov je s QR razcepom. Pri QR razcepu $QR = A$ matrike A , so stolpci matrike Q ortonormirana baza stolpčnega prostora matrike A , matrika R vsebuje koeficiente v razvoju stolpcov matrike A po ortonormirani bazi določeni s Q . Projekcija na stolpčni prostor ortogonalne matrike še lažje izračunamo, saj lahko koeficiente izračunamo s skalarnim produktom s stolpci Q . Če predoločeni sistem $Ap = y$ pomnožimo z desne s Q^T in upoštevamo, da je $Q^T Q = I$, dobimo zopet kvadratni sistem za vektor parametrov p :

$$\begin{aligned}
 Ap &= y \\
 QRp &= y \\
 Q^T QRp &= Q^T y \\
 Rp &= Q^T y.
 \end{aligned} \tag{11.14}$$

Matrika R je zgornje trikotna, tako da lahko sistem rešimo z obratnim vstavljanjem. V Juliji lahko uporabimo funkcijo `qr`, ki vrne posebni podatkovni tip posebej namenjen QR razcepu matrike:

```

F = qr(A) # vrednost posebnega tipa, ki predstavlja QR razcep
p_qr = F \ co2 # ekvivalentno R\Q^T*b
p_norm = (A' * A) \ (A' * co2) # rešitev z normalnim sistemom
razlika = norm(p_norm - p_qr)

```

1.157851410664121e-13

Razcep QR uporabi tudi vgrajen operator `\`, če je matrika s katero delimo dimenzij $n \times k$ in $k < n$.

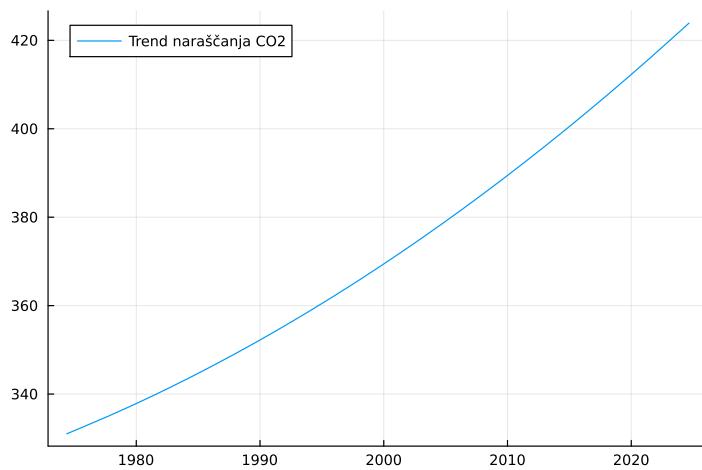
11.6 Kaj pa CO₂?

Koncentracije CO₂ se vztrajno povečuje. Kot kaže naš model, je naraščanje kvadratično in ne le linearno. To pomeni, da ne le, da se vsako leto poveča koncentracija, pač pa se vsako leto poveča za večjo vrednost.

```
julia> p_qr
5-element Vector{Float64}:
368.7094438649718
1.8496832153845584
0.014097723877440856
-0.8054905572276
2.855749924500857
```

Koeficient p_1 pove povprečno koncentracijo na sredini merilnega obdobja, p_2 in p_3 sta koeficienta pri linearinem in kvadratnem členu, medtem ko je amplituda letnih nihanj enaka velikosti vektorja $[p_4, p_5]$. Če odmislimo nihanja zaradi letnih časov, dobimo trend naraščanja:

```
model_trend(t) = p_qr[1:3]' * [1, t - τ, (t - τ)^2]
plot(model_trend, t[1], t[end], label="Trend naraščanja CO2")
```



Slika 43: Rezultati modela brez letnih nihanj

Lahko poskusimo tudi napovedati prihodnost:

```
model(t) = p_qr' * [1, t - τ, (t - τ)^2, cos(2π * t), sin(2π * t)]
napoved = model.([2030, 2040, 2050])
```

```
3-element Vector{Float64}:
437.1230978262453
465.5969747495033
496.89039644824965
```

Kaj smo se naučili?

- Linearni model je funkcija, pri kateri *parametri* nastopajo *linearno*.
- Parametre modela poiščemo z *metodo najmanjših kvadratov*.
- Za iskanje parametrov po metodi najmanjših kvadratov je numerično najbolj primeren *QR razcep*, če smo v stiski s prostorom, pa lahko uporabimo *normalni sistem*.
- Štetje z začetkom ob Kristusovem rojstvu numerično ni vedno najboljše.
- Koncentracija CO₂ prav zares narašča.

12 Interpolacija z zlepki

12.1 Naloga

- Podatke iz tabele (Tabela 2) interpolirajte s Hermitovim kubičnim zlepkom.

| x | x_1 | x_2 | \dots | x_n |
|---------|--------|--------|---------|--------|
| $f(x)$ | y_1 | y_2 | \dots | y_n |
| $f'(x)$ | dy_1 | dy_2 | \dots | dy_n |

Tabela 2: Podatki, ki jih potrebujemo za Hermitov kubični zlepek.

- Uporabite Hermitovo bazo kubičnih polinomov, ki zadoščajo pogojem iz tabele 3 in jih z linearno preslikavo preslikate z intervala $[0, 1]$ na interval $[x_i, x_{i+1}]$.

| | $p(0)$ | $p(1)$ | $p'(0)$ | $p'(1)$ |
|----------|--------|--------|---------|---------|
| h_{00} | 1 | 0 | 0 | 0 |
| h_{01} | 0 | 1 | 0 | 0 |
| h_{10} | 0 | 0 | 1 | 0 |
| h_{11} | 0 | 0 | 0 | 1 |

Tabela 3: Vrednosti baznih polinomov $h_{ij}(t)$ in njihovih odvodov v točkah $t = 0$ in $t = 1$.

- Definirajte podatkovni tip `HermitovZlepek` za Hermitov kubični zlepek, ki vsebuje podatke iz tabele Tabela 2.
- Napišite funkcijo `vrednost(zlepek, x)`, ki izračuna vrednost Hermitovega kubičnega zlepka za dano vrednost argumenta x . Omogočite, da se vrednosti tipa `HermitovZlepek` kliče kot funkcije.
- S Hermitovim zlepkom interpolirajte funkcijo $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$ na intervalu $[0, 6]$ v 10 točkah. Napako ocenite s formulo za napako polinomske interpolacije

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \quad (12.1)$$

in oceno primerjajte z dejansko napako. Upoštevajte, da je pri Hermitovi interpolaciji $x_1 = x_2$ in $x_3 = x_4$. Narišite graf napake.

- Z oceno za napako (12.1) določite število interpolacijskih točk, da bo napaka Hermitovega zlepka manjša od 10^{-7} . Funkcijo $f(x)$ interpolirajte tudi z Newtonovim polinomom in primerjajte napako z napako Hermitovega zlepka.

12.2 Hermitov kubični zlepek

Pogosto je bolje uporabiti različne definicije funkcije na različnih intervalih, kot eno funkcijo z veliko parametri. Funkcijam, ki so sestavljene iz več različnih definicij pravimo zlepki. Hermitov kubični zlepek ki interpolira podatke iz tabele 2 je sestavljen iz kubičnih polinomov $p_k(x)$ na intervalih $[x_k, x_{k+1}]$. Kubični polinom je podan s štirimi parametri, ravno toliko kot je podatkov v krajiščih intervala $[x_k, x_{k+1}]$. Zato lahko vsak polinom $p_k(x)$ določimo le na podlagi podatkov v točkah x_k in x_{k+1} . Polinom $p_k(x)$ poiščemo tako, da interval $[x_k, x_{k+1}]$ preslikamo z linearno preslikavo na $[0, 1]$ in uporabimo Lagrangevo bazo $h_{00}(t), h_{01}(t), h_{10}(t)$ in $h_{11}(t)$ za podatke iz tabele 3. Polinome poiščemo kar v standardni bazi

$$h_{ij}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \quad (12.2)$$

Če izračunamo še odvod $h'_{ij}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$, dobimo naslednji sistem enačb za koeficiente baznega polinoma $h_{00}(t)$:

$$\begin{aligned} h_{00}(0) &= a_0 &= 1 \\ h'_{00}(0) &= a_1 &= 0 \\ h_{00}(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ h'_{00}(1) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Za ostale polinome dobimo podobne sisteme, ki imajo isto matriko sistema, razlikujejo pa se v desnih straneh. Če desne strani postavimo v matriko, dobimo ravno identično matriko. Če izračunamo inverzno matriko sistema (12.3), bodo v stolpcih ravno koeficienti baznih polinomov $h_{ij}(t)$. Inverz izračunamo z Julijo.

```
A = [1 0 0 0; 1 1 1 1; 0 1 0 0; 0 1 2 3]
inv(A)
```

```
4x4 Matrix<Float64>:
1.0 -0.0 0.0 -0.0
0.0 0.0 1.0 -0.0
-3.0 3.0 -2.0 -1.0
2.0 -2.0 1.0 1.0
```

Bazni polinomi so enaki

$$\begin{aligned} h_{00}(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ h_{01}(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\ h_{10}(t) &= t - 2t^2 + t^3 \\ h_{11}(t) &= -t^2 + t^3. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Sedaj moramo še določiti preslikavo z intervala $[x_k, x_{k+1}]$ na $[0, 1]$. Naj bo x in t medtem, da je

$$t(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (12.5)$$

preslikava med x in t , medtem ko je

$$x(t) = x_k + t(x_{k+1} - x_k) \quad (12.6)$$

preslikava med t in x . Želimo uporabiti bazo $h_{ij}(t)$ in tako interpoliramo polinoma $p_k(x(t))$ na intervalu $[0, 1]$. Vidimo, da je

$$\begin{aligned}
p_k(x(0)) &= p_{k(x_k)} = y_k, \\
\frac{d}{dt}p_k(x(0)) &= p'_k(x_k)x'(0) = p'_k(x_k)(x_{k+1} - x_k) = dy_k(x_{k+1} - x_k), \\
p_k(x(1)) &= p_{k(x_{k+1})} = y_{k+1}, \\
\frac{d}{dt}p_k(x(1)) &= p'_k(x_k)x'(1) = p'_k(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = dy_{k+1}(x_{k+1} - x_k)
\end{aligned} \tag{12.7}$$

in

$$p_k(x) = y_k h_{00}(t) + y_{k+1} h_{01}(t) + (x_{k+1} - x_k)(dy_k h_{10}(t) + dy_{k+1} h_{11}(t)), \tag{12.8}$$

kjer t izračunamo kot $t(x)$ iz (12.5). Sedaj lahko napišemo naslednje funkcije in tipe:

- funkcijo `hermiteint(x, xint, y, dy)`, ki izračuna vrednost Hermitovega polinoma v x (Program 60),
- podatkovni tip `HermitovZlepek` in funkcijo `vrednost(x, Z::HermitovZlepek)`, ki izračuna Hermitovega zlepka z v dani točki x (Program 61).

Vrednosti kot funkcije

Na primeru Hermitovega zlepka lahko ilustriramo, kako v Juliji ustvarimo vrednosti, ki se obnašajo kot funkcije. Tako lahko zapis v programskemu jeziku prilbližamo matematičnemu zapisu. Za Hermitov zlepek smo definirali tip `HermitovZlepek` in funkcijo `vrednost`, s katero lahko izračunamo vrednost Hermitovega zlepka v dani točki. Vrednost tipa `HermitovZlepek` hrani interpolacijske podatke in hkrati predstavlja zlepek kot funkcijo. V Juliji lahko definiramo, da se vrednosti tipa `HermitovZlepek` obnašajo kot funkcije:

```
(z::HermitovZlepek)(x) = vrednost(z, x)
```

Vrednosti zlepka v dani točki lahko izračunamo tako, kot bi to naredili v matematičnem zapisu:

```
z = HermitovZlepek([0, 1, 2], [1, 2, 3], [2, 1, 2])
z(1.23)
```

Napisane funkcije preiskusimo tako, da funkcijo $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$ interpoliramo v 10 ekvidistančnih točkah na intervalu $[0, 6]$:

```

f(x) = cos(2x) + sin(3x)
df(x) = -2sin(2x) + 3cos(3x)
x = range(0, 6, 10)
y = f.(x)
dy = df.(x)

z = HermitovZlepek(x, y, dy)

```

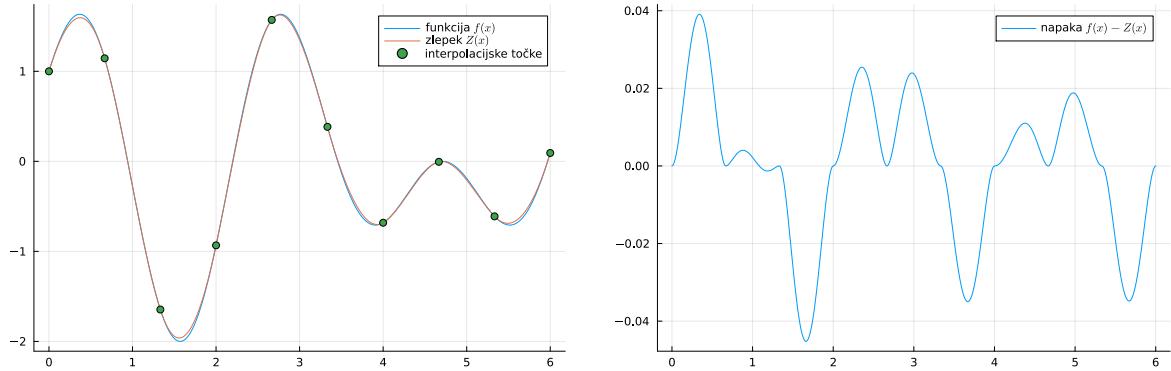
Nato narišemo na isto sliko funkcijo in zlepek, na drugo sliko pa napako interpolacije (razliko med funkcijo in zlepkom):

```

using Plots
plot(f, 0, 6, label="funkcija \$f(x)\$", legend=:topright)
plot!(x -> z(x), 0, 6, label="zlepak \$Z(x)\$")
scatter!(x, y, label="interpolacijske točke")

plot(x -> f(x) - z(x), 0, 6, label="napaka \$f(x) - Z(x)\$")

```



Slika 44: Levo: Graf funkcije $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$ in Hermitovega zlepka, ki interpolira funkcijo $f(x)$ na 10 točkah. Desno: Graf napake interpolacije. Zlepak interpolira tudi vrednosti odvodov, zato ima napaka v interpolacijskih točkah stacionarne točke.

12.3 Ocena za napako

Oceno za napako interpolacije lahko za Hermitov polinom izračunamo analitično. Napako polinomske interpolacije v splošnem zapišemo kot:

$$f(x) - p_{n(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=1}^n (x - x_i), \quad (12.9)$$

kjer je ξ neznana vrednost znotraj interpolacijskega območja. Ker imamo poleg vrednosti na voljo odvode interpolacijski točki štejemo dvojno. Tako dobimo naslednjo formulo za napako:

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_1)^2 (x - x_2)^2. \quad (12.10)$$

Poiskali bi radi oceno za največjo možno vrednost napake. Vrednosti $f^{(4)}(\xi)$ ne poznamo in jo lahko zgolj ocenimo. Poleg tega moramo poiskati po absolutni vrednosti največjo vrednost polinoma $p(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2$ na intervalu $[x_1, x_2]$. V krajiščih intervala je vrednost polinoma $p(x)$ enaka nič, zato je maksimum dosežen v notranjosti in je dosežen v stacionarni točki. Poiščimo torej stacionarno točko $p(x)$, ki leži znotraj intervala $[x_1, x_2]$. Odvod je enak

$$\begin{aligned} p'(x) &= 2(x - x_1)(x - x_2)^2 + 2(x - x_1)^2(x - x_2) \\ &= 2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_2 + x - x_1) = 4(x - x_1)(x - x_2) \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (12.11)$$

Polinom $p(x)$ ima tri stacionarne točke: dve v krajiščih intervala in eno v središču $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Vrednost polinoma v središču je tudi maksimalna vrednost dosežena na $[x_1, x_2]$:

$$p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right)^2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^4 \quad (12.12)$$

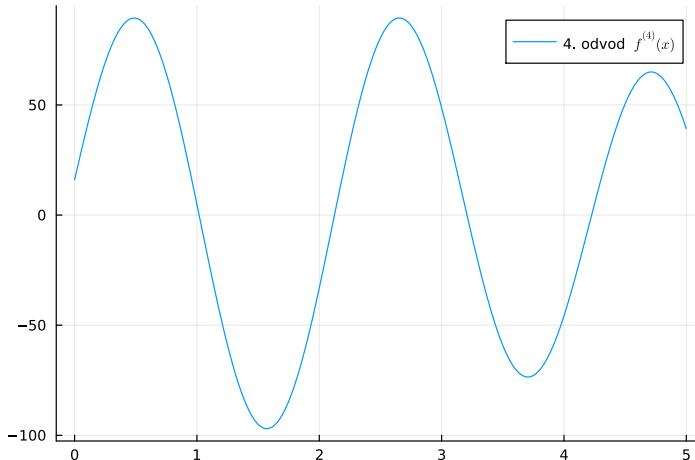
Maksimalno napako lahko ocenimo z

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \frac{(x_2 - x_1)^4}{4} = \frac{1}{96} f^{(4)}(\xi)(x_2 - x_1)^4. \quad (12.13)$$

Če želimo oceno (12.13) uporabiti, moramo poznati oceno za četrти odvod funkcije. Za približno oceno uporabimo avtomatsko odvajanje in narišemo graf četrtega odvoda:

```
using ForwardDiff
ddf(x) = ForwardDiff.derivative(df, x)
d3f(x) = ForwardDiff.derivative(ddf, x)
d4f(x) = ForwardDiff.derivative(d3f, x)

plot(d4f, 0, 5, label="4. odvod \$f^{(4)}(x)\$, legend=:topright)
```



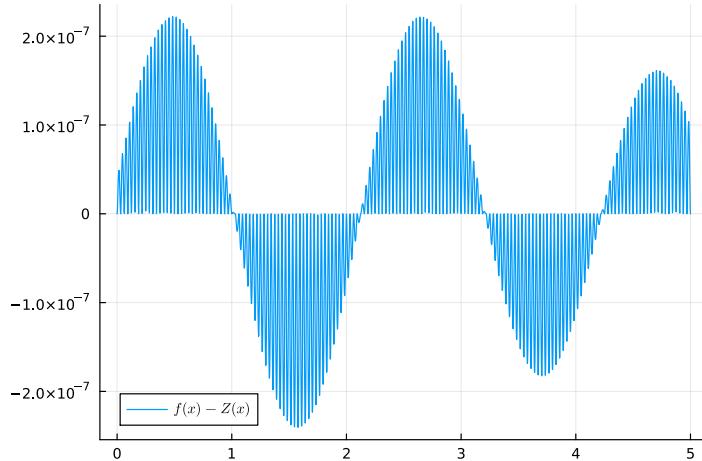
Slika 45: Četrtri odvod funkcije $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$ na intervalu $[0, 6]$

Ocena za napako omogoča, da v naprej izberemo interpolacijske točke, za katere bo napaka manjša od predpisane. Če želimo, da je napaka manjša od ε , potem mora biti širina intervala manjša od:

$$|x_2 - x_1| \leq \sqrt[4]{\frac{96}{f^{(4)}(\xi)}} \varepsilon. \quad (12.14)$$

Peverimo še numerično, če izračunana formula deluje:

```
eps = 1e-6
d4fmax = 100
h = (96 * eps / d4fmax)^0.25
n = Integer(ceil((5 - 0) / h))
x = range(0, 5, n + 1)
Z = HermitovZlepek(x, f.(x), df.(x))
plot(x -> f(x) - Z(x), 0, 5, label="\$f(x) - Z(x)\$")
```



Slika 46: Napaka interpolacije, pri čemer smo število interpolacijskih točk izbrali tako, da bo napaka pod 10^{-6}

Teoretične ocene za napako niso vedno uporabne

Za določitev napake smo uporabili oceno (12.13). Pri tem smo meje za četrti odvod, ki nastopa v oceni, določili kar iz grafa. V praksi teoretične ocene kot na primer (12.1) ni mogoče vedno uporabiti, saj bi bilo nepraktično določiti meje za višje odvode. Pogosto zato uporabimo manj eksaktne načine, da dobimo vsaj neko informacijo o napaki, četudi ni povsem zanesljiva.

12.4 Newtonov interpolacijski polinom

Naj bodo x_1, x_2, \dots, x_n vrednosti neodvisne spremenljivke in y_1, y_2, \dots, y_n vrednosti neznane funkcije. Interpolacijski polinom, ki interpolira podatke x_i, y_i je polinom $p(x)$, ki zadošča enačbam

$$\begin{aligned} p(x_1) &= y_1 \\ p(x_2) &= y_2 \\ &\vdots \\ p(x_n) &= y_n \end{aligned} \tag{12.15}$$

Newtonov interpolacijski polinom je interpolacijski polinom zapisan v obliki

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k), \tag{12.16}$$

ki uporabi Newtonovo bazo polinomov za dane interpolacijske točke:

$$1, x - x_1, (x - x_1)(x - x_2), \dots, \prod_{k=1}^{n-2} (x - x_k), \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k). \tag{12.17}$$

Koeficiente a_i je lažje izračunati, kot če bi bil polinom zapisan v standardni bazi. Poleg tega je računanje vrednosti polinoma v standardni bazi lahko numerično nestabilno, če so vrednosti x_i relativno skupaj. Koeficiente a_i lahko poiščemo bodisi tako, da rešimo spodnje trikotni sistem, ki ga dobimo iz enačb (12.15), ali pa z [deljenimi diferencami](#). Definirajte:

- podatkovno strukturo za Newtonov interpolacijski polinom `NewtonovPolinom` (Program 57),
- funkcijo `vrednost(p, x)`, ki izračuna vrednost Newtonovega polinoma v dani točki (Program 58),

- funkcijo interpoliraj (NewtonovPolinom, x , y), ki poišče koeficiente polinoma za dane interpolacijske podatke (Program 59).

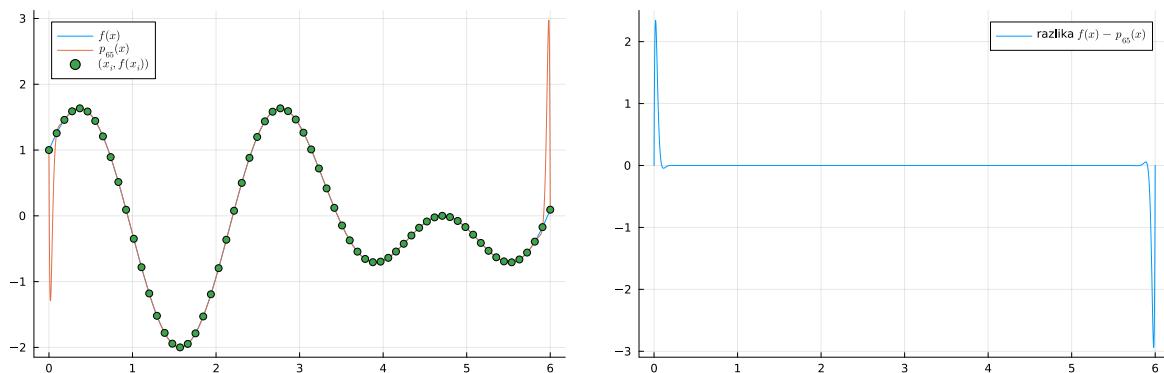
12.5 Rungejev pojav

Pri nizkih stopnjah polinomov se napaka interpolacije zmanjuje, če povečamo število interpolacijskih točk. A le do neke mere! Če stopnjo polinoma preveč povečamo, začne napaka spet naraščati.

```
f(x) = cos(2x) + sin(3x)
n = 65
x = range(0, 6, n + 1)
p_newton = interpoliraj(NewtonovPolinom, x, f.(x))

plot(f, 0, 6, label="$f(x)$")
plot!(x -> p_newton(x), 0, 6, label="$p_{65}(x)$")
scatter!(x, f.(x), label="$f(x_i)$")

plot(x -> f(x) - p_newton(x), 0, 6, label="razlika $f(x) - p_{65}(x)$")
```



Slika 47: Interpolacija s polinomi visokih stopenj na ekvidistančnih točkah močno niha na robu območja. Levo: Interpolacija funkcije $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$ s polinomom stopnje 65. Desno: Razlika med funkcijo in interpolacijskim polinomom.

Opazimo, da se napaka na robu znatno poveča. Povečanje je posledica velikih oscilacij, ki se pojavijo na robu, če interpoliramo s polinomom visoke stopnje na ekvidistančnih točkah. To je znan pojav pod imenom [Rungejev pojav](#). Problemu se izognemo, če namesto ekvidistančnih točk uporabimo [Čebiševe točke](#).

Kaj smo se naučili?

- Deljene diference in Newtonov polinom lahko uporabimo tudi, če so poleg vrednosti podani tudi odvodi.
- Zaradi Rungejevega pojava interpolacija s polinomi visokih stopenj na ekvidistančnih točkah ni najboljša izbira. Interpolacija na Čebiševih točkah pa deluje tudi za visoke stopnje polinoma.
- Zlepki so enostavni za uporabo, učinkoviti (malo operacij za izračun) in imajo v določenih primerih boljše lastnosti kot polinomi visokih stopenj

12.6 Rešitve

```

# bazne funkcije na [0, 1]
h00(t) = 1 + t^2 * (-3 + 2 * t)
h01(t) = t^2 * (3 - 2 * t)
h10(t) = t * (1 + t * (-2 + t))
h11(t) = t^2 * (-1 + t)

"""
hermiteint(x, xint, y, dy)

Izračunaj vrednost Hermitovega kubičnega polinoma p v točki `x`, ki interpolira
podatke `p(xint[1]) == y[1]`, `p(xint[2]) == y[2]` in
`p'(xint[1]) == dy[1]`, `p'(xint[2]) == dy[2]`.

"""
function hermiteint(x, xint, y, dy)
    dx = xint[2] - xint[1]
    t = (x - xint[1]) / dx
    return y[1] * h00(t) + y[2] * h01(t) + dx * (dy[1] * h10(t) + dy[2] * h11(t))
end

```

Program 54: Interpoliraj podatke iz tabele 2 s Hermitovim kubičnim polinomom

```

"""
Podatkovna struktura, ki hrani podatke za Hermitov kubični zlepak
v interpolacijskih točkah `x` z danimi vrednostmi `y` in vrednostmi
odvoda `dy`.

"""
struct HermitovZlepak
    x
    y
    dy
end

```

Program 55: Podatkovni tip za Hermitov kubični zlepak

```

"""
y = vrednost(x, Z)

Izračunaj vrednost Hermitovega kubičnega zlepka `Z` v dani točki `x`.

"""
function vrednost(x, Z::HermitovZlepak)
    i = searchsortedfirst(Z.x, x)
    if (x == first(Z.x))
        return first(Z.y)
    end
    if (i > lastindex(Z.x)) || (i == firstindex(Z.x))
        throw(BoundsError(Z, x))
    end
    return hermiteint(x, Z.x[i-1:i], Z.y[i-1:i], Z.dy[i-1:i])
end

(Z::HermitovZlepak)(x) = vrednost(x, Z)

```

Program 56: Izračunaj vrednost Hermitovega kubičnega zlepka

```

"""
NewtonovPolinom(a, x)

Vrni [newtonov interpolacijski polinom](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_
polynomial)
oblike `a[1]+a[2](x-x[1])+a[3](x-x[1])(x-x[2])+...`
s koeficienti `a` in vozlišči `x`.

# Primer

Poglejmo si polinom ``1+x+x(x-1)`` , ki je definiran s koeficienti `[1, 1, 1]` in z
vozlišči
``x_0 = 0`` in ``x_1 = 1``

```jldoctest
julia> p = NewtonovPolinom([1, 1, 1], [0, 1])
NewtonovPolinom([1, 1, 1], [0, 1])
```

"""
struct NewtonovPolinom
    a # koeficienti
    x # vozlišča
end

```

Program 57: Podatkovni tip za polinom v Newtonovi obliki

```

"""
vrednost(p::NewtonovPolinom, x)

Izračuna vrednot newtonovega polinoma `p` v `x` s Hornerjevo metodo.

# Primer

```jldoctest
julia> p = NewtonovPolinom([0, 0, 1], [0, 1]);

julia> vrednost(p, 2)
2
```

"""
function vrednost(p::NewtonovPolinom, x)
    n = length(p.x)
    v = p.a[n+1]
    for i = n:-1:1
        v = p.a[i] + (x - p.x[i]) * v
    end
    return v
end

(p::NewtonovPolinom)(x) = vrednost(p, x)

```

Program 58: Izračunaj vrednost Newtonovega polinoma

```

using LinearAlgebra
"""
    p = interpoliraj(NewtonovPolinom, x, f)

Izračunaj koeficiente Newtonovega interpolacijskega polinoma, ki interpolira
podatke `y(x[k])=f[k]`. Če se katere vrednosti `x` večkrat ponovijo, potem
metoda predvideva, da so v `f` poleg vrednosti, podani tudi odvodi.

# Primer

Polinom ``x^2-1`` interpolira podatke `x=[0,1,2]` in `y=[-1, 0, 3]` lahko v
Newtonovi obliki zapišemo kot ``1 + x + x(x-1)``

```jldoctest
julia> p = interpoliraj(NewtonovPolinom, [0, 1, 2], [-1, 0, 3])
NewtonovPolinom([-1.0, 1.0, 1.0], [0, 1])
```

Če imamo več istih vrednosti abscise `x`, moramo v `f` podati vrednosti funkcije
in odvodov. Na primer polinom ``p(x) = x^4 = x + 3x(x-1) + 3x(x-1)^2 + x(x-1)^3```
ima v ``x=1`` vrednosti ``p(1)=1, p'(1)=4, p''(1)=12``

```jldoctest
julia> p = interpoliraj(NewtonovPolinom, [0,1,1,1,2], [0,1,4,12,16])
NewtonovPolinom([0.0, 1.0, 3.0, 3.0, 1.0], [0, 1, 1, 1])

julia> x = (1,2,3,4,5); p.(x) .- x.^4
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
```
"""

function interpoliraj(P::Type{<:NewtonovPolinom}, x, f)
    n = length(x) - 1
    m = length(f) - 1
    @assert n == m
    a = zeros(n + 1, n + 1)
    a[:, 1] = f;
    fakulteta = 1
    for j = 2:n + 1
        fakulteta *= j - 1
        for i = j:n + 1
            if x[i] != x[i-j+1]
                a[i,j] = (a[i,j-1] - a[i-1,j-1])/(x[i] - x[i-j+1]);
            else
                a[i,j] = a[i,j-1]/fakulteta
                a[i,j-1] = a[i-1,j-1]
            end
        end
    end
    return NewtonovPolinom(diag(a), x[1:end-1])
end

```

Program 59: Izračun koeficientov Newtonovega polinoma z deljenimi diferencami

12.7 Testi

```

@testset "Hermitov polinom" begin
    # kubični polinom se bo vedno ujemal s Hermitovim polinomom
    p3(x) = x^3 - x
    dp3(x) = 3x^2 - 1
    xint = [0, 2]
    h(x) = hermiteint(x, xint, p3.(xint), dp3.(xint))
    @test isapprox(p3(0), h(0))
    @test isapprox(p3(0.5), h(0.5))
    @test isapprox(p3(1.5), h(1.5))
end

```

Program 60: Test za izračun Hermitovega kubičnega polinoma

```

@testset "Hermitov zlepek" begin
    p3(x) = x^3 - 2x^2 + 1
    dp3(x) = 3x^2 - 4x
    x = [-1, 0.5, 3.5, 4]
    z = HermitovZlepek(x, p3.(x), dp3.(x))
    @test_throws BoundsError z(-2)
    for xi in x
        @test isapprox(z(xi), p3(xi))
    end
    @test isapprox(z(-0.2), p3(-0.2))
    @test isapprox(z(1.1), p3(1.1))
    @test isapprox(z(3.7), p3(3.7))
    @test_throws BoundsError z(5.1)
end

```

Program 61: Test za izračun vrednosti zlepka

```

@testset "Vrednost Newtonovega polinoma" begin
    p = NewtonovPolinom([1, 1, 2], [0, 1])
    f(x) = 1 + x*(1 + 2*(x - 1))
    @test isapprox(p(1), f(1))
    @test isapprox(p(2.5), f(2.5))
    @test isapprox(p(pi), f(pi))
end

```

Program 62: Test za izračun vrednosti Newtonovega polinoma

```

@testset "Interpolacija z Newtonovim polinomom" begin
    f(x) = 1 + (x-2)*(2.5 + (x-1)*3.5)
    p = interpoliraj(NewtonovPolinom, [2, 1, 0], f.([2, 1, 0]))
    @test isapprox(p.a, [1, 2.5, 3.5])
    @test isapprox(p.x, [2, 1])
end

```

Program 63: Test za izračun koeficientov Newtonovega interpolacijskega polinoma

13 Porazdelitvena funkcija normalne porazdelitve

13.1 Naloga

- Implementiraj porazdelitveno funkcijo standardne normalne porazdelitve

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (13.1)$$

- Poskrbi, da je relativna napaka manjša od $0.5 \cdot 10^{-11}$. Definicjsko območje razdeli na več delov in na vsakem delu uporabi primerno metodo, da zagotoviš relativno natančnost.
- Interval $(-\infty, -1]$ transformiraj s funkcijo $\frac{1}{x}$ na interval $[-1, 0]$ in uporabi interpolacijo s polinomom na Čebiševih točkah.
 - Namesto funkcije $\Phi(x)$ aproksimiraj funkcijo $xe^{x^2}\Phi(x)$.
 - Vrednosti funkcije $\Phi(x)$ v Čebiševih točkah izračunaj
- Na intervalu $[-1, a]$ za primerno izbran a uporabi [Gauss-Legendrove kvadrature](#).
- Izberi a , da je na intervalu $[a, \infty)$ vrednost na 10 decimalk enaka 1.

13.2 Izračun na $[-c, \infty)$

Izračunamo $\Phi(-c)$ in $\Phi(x) = \Phi(-c) + \int_{-c}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Integral izračunamo z Gauss-Legendrovimi kvadraturami s fiksni številom vozlišč, tako da je absolutna napaka enakomerno omejena. Na $[b, \infty)$ za dovolj velik b je vrednost enaka 1.

13.3 Izračun na $(-\infty, -c]$

Izračunati moramo $\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Integral s transformacijo $u = \frac{\sqrt{2}}{t}$ prestavimo na končen interval. Ne pozabimo na transformacijo mej in diferenciala $du = -\frac{\sqrt{2}}{t^2} dt$ ozziroma $dt = -\frac{\sqrt{2}}{u^2} du$

$$\int_{-\infty}^{-x} e^{\frac{t^2}{2}} dt = -\sqrt{2} \int_0^{-\frac{1}{u}} \frac{e^{-\frac{1}{u^2}}}{u^2} du = \sqrt{2} \int_{-\frac{1}{u}}^0 \frac{e^{-\frac{1}{u^2}}}{u^2} du \quad (13.2)$$

Funkcija $\frac{e^{-\frac{1}{u^2}}}{u^2}$ ni podobna polinomom, saj pri nič zelo hitro konvergira k 0. Zato metode visokega reda ne bodo dale dobrih rezultatov in bomo raje uporabili sestavljeni pravila na primer adaptivno Simpsonovo metodo.

13.4 Aproksimacija s polinomi Čebiševa

Weierstrassov izrek pravi, da lahko poljubno zvezno funkcijo na končnem intervalu enakomerno na vsem intervalu aproksimiramo s polinomi. Polinom dane stopnje, ki neko funkcijo najbolje aproksimira je težko poiskati. Z razvojem funkcije po ortogonalnih polinomih Čebiševa, pa se optimalni aproksimaciji zelo približamo. Naj bo $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem lahko f zapišemo z neskončno Fourierovo vrsto

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{n(t)}, \quad (13.3)$$

kjer so T_n polinomi Čebiševa, a_n pa koeficienti. Koeficienti a_n so dani z integralom

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Polinomi Čebiševa so definirani z relacijo

$$T_n(\cos(\varphi)) = \cos(n\varphi) \quad (13.5)$$

in zadoščajo dvočlenski rekurzivni enačbi

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (13.6)$$

Prvih nekaj polinomov $T_n(x)$ je enakih:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x \end{aligned} \quad (13.7)$$

Namesto cele vrste (13.3), lahko obdržimo le prvih nekaj členov in funkcijo aproksimiramo s končno vsoto

$$f(x) \approx C_{N(x)} = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x), \quad (13.8)$$

koeficiente a_n pa poiščemo numerično z Gauss-Čebiševimi kvadraturami [8].

Vozlišča za Gauss-Čebiševa kvadraturo v n vozliščih so v [Čebiševih vozliščih](#)

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (13.9)$$

uteži pa so vse enake $w_k = \frac{\pi}{n}$. Za vrsto $C_{N(x)}$ uporabimo kvadraturne formule z $N+1$ vozlišči. Za koeficiente tako na intervalu $[-1, 1]$ dobimo približne formule

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f(x_k) \\ a_1 &= \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N T_1(x_k) f(x_k) \\ a_2 &= \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N T_2(x_k) f(x_k) \\ &\vdots \\ a_N &= \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N T_N(x_k) f(x_k). \end{aligned} \quad (13.10)$$

Koeficiente Čebiševe vrste natančneje in hitreje računamo s FFT

Na vajah bomo koeficiente an računali približno z Gauss-Čebiševimi kvadraturnimi formulami. V praksi je mogoče koeficiente a_n izračunati bolj natančno in hitreje ($\mathcal{O}(n \log(n))$ namesto $\mathcal{O}(n^2)$) z diskretno Fourierovo kosinusno transformacijo funkcijskih vrednosti v Čebiševih interpolacijskih točkah [9].

Če želimo aproksimirati funkcijo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, moramo argument preslikati na interval $[-1, 1]$ z linearno preslikavo. V splošnem sta linearni preslikavi med $x \in [a, b]$ in $t \in [c, d]$ podani kot:

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c \\ x(t) &= \frac{b - a}{d - c}(t - c) + b. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Namesto $f(x)$ aproksimiramo funkcijo $\tilde{f}(t) = f(x(t))$ na intervalu $[-1, 1]$.

Napako aproksimacije lahko ocenimo z velikostjo koeficientov a_n . Ker je

$$|T_{n(x)}| \leq 1, \quad x \in [-1, 1], \tag{13.12}$$

je napaka $f(x) - C_{N(x)}$ omejena s $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$

$$|f(x) - C_{N(x)}| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n T_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \tag{13.13}$$

Ker neskončne vrste $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$ ne moremo sešteeti, za približno oceno napake vzamemo kar zadnji koeficient a_N v končni vsoti $C_{N(x)}$.

13.5 Čebiševa aproksimacija funkcije Φ za majhne x

Za majhne x se vrednost Φ približuje 0

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0. \tag{13.14}$$

Zato ni dovolj, da omejimo absolutno napako, ampak moramo poskrbeti, da je tudi relativna napaka dovolj majhna. Formula

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \tag{13.15}$$

ni uporabna, saj pri odštevanju dveh skoraj enakih vrednosti relativna napaka nekontrolirano naraste. Zato definicijsko območje razdelimo na dva intervala $(-\infty, c]$ in $[c, \infty)$. Na intervalu $[c, \infty)$ je vrednost Φ navzdol omejena z $\Phi(c)$ in je relativna napaka največ $\frac{1}{\Phi(c)}$ kratnik absolutne napake. Zato je na $[c, \infty)$ dovolj, če poskrbimo, da je absolutna napaka majhna.

Pri aproksimaciji s polinomi Čebiševa imamo kontrolo le nad absolutno napako. Če blizu ničle funkcije pa majhna absolutna napaka ne pomeni nujno tudi majhne relativne napake. Težavo lahko rešimo tako, da funkcijo $\Phi(x)$ pomnožimo s faktorjem $k(x)$ tako, da je limita

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)\Phi(x) = 1. \tag{13.16}$$

Namesto funkcije $\Phi(x)$ aproksimiramo funkcijo $g(x) = k(x)\Phi(x)$, ki je navzdol omejena z neničelno vrednostjo na $(-\infty, c]$. Za funkcijo $g(x)$ lahko poskrbimo, da je absolutna napaka enakomerno omejena na $(-\infty, c]$. Vrednost funkcije $\Phi(x)$ nato izračunamo tako, da izračunamo kvocient

$$\Phi(x) = \frac{g(x)}{k(x)}, \quad (13.17)$$

kar pa ne povzroči bistvenega povečanja relativne napake, saj je deljenje za razliko od odštevanja ne povzroči **katastrofalnega krajšanja**.

Če je $c < 0$, lahko za dodatni faktor izberemo $k(x)$. Izračun vrednosti za majhne vrednosti x lahko izračunamo z Gauss-Laguerrovimi kvadraturami [8]

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx \approx \sum_{k=1}^N w_k f(x_k)m, \quad (13.18)$$

kjer so x_k ničle Laguerrovega polinoma stopnje $N - 1$, w_i pa primerno izbrane uteži. Vrednost $\Phi(x)$ za majhne vrednosti x

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad (13.19)$$

lahko z uvedbo nove spremenljivke $u = x - t$, ki preslika interval $(-\infty, x)$ v interval $(0, \infty)$, prevedemo na integral

$$\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int_0^\infty e^{-\frac{(u-x)^2}{2}}du = \int_0^\infty e^{-\frac{(u-x)^2}{2}+u}e^{-u}du \quad (13.20)$$

in uporabimo Gauss-Laguerove kvadrature (13.18) za funkcijo $f(u) = e^{-\frac{(u-x)^2}{2}+u}$.

13.6 Izračun funkcije $\Phi(x)$ na $[c, \infty)$

14 Povprečna razdalja med dvema točkama na kvadratu

14.1 Naloga

- Izpeljite algoritem, ki izračuna integral na več dimenzionalnem kvadru kot večkratni integral tako, da za vsako dimenzijo uporabite isto kvadraturno formulo za enkratni integral.
- Pri implementaciji pazite, da ne delate nepotrebnih dodelitev pomnilnika.
- Uporabite algoritem za izračun povprečne razdalje med dvema točkama na enotskem kvadratu $[0, 1]^2$ in enotski kocki $[0, 1]^3$.
- Za sestavljeno Simpsonovo formulo in Gauss-Legendrove kvadrature ugotovite, kako napaka pada s številom izračunov funkcije, ki jo integriramo. Primerjajte rezultate s preprosto Monte-Carlo metodo (računanje vzorčnega povprečja za enostaven slučajni vzorec).

14.2 Metoda Monte Carlo

[centralni limitni izrek](#).

15 Avtomatsko odvajanje z dualnimi števili

V grobem poznamo tri načine, kako lahko izračunamo odvod funkcije z računalnikom:

- simbolično odvajanje
- numerično odvajanje s končnimi diferencami
- avtomatsko odvajanje programske kode z uporabo verižnega pravila

V tej vaji si bomo ogledali en način, kako lahko implementiramo [avtomatsko odvajanje](#) v Juliji.

15.1 Naloga

- Definirajte podatkovni tip za dualna števila.
- Za podatkovni tip dualnega števila definirajte osnovne operacije in elementarne funkcije, kot so sin, cos in exp.
- Uporabite dualna števila in izračunajte hitrost nebesnega telesa, ki se giblje po Keplerjevi orbiti. Keplerjevo orbito izrazite z rešitvijo [Keplerjeve enačbe](#), ki jo rešite z Newtonovo metodo.
- Posloši dualna števila, da je komponenta pri ε lahko vektor. Uporabite pospoljena dualna števila za izračun gradienata funkcije več spremenljivk.

15.2 Dualna števila

[Dualna števila](#) so števila oblike $a + b\varepsilon$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$, medtem ko je [dualna enota](#) ε neničelno število katerega kvadrat je nič $\varepsilon^2 = 0$ in $\varepsilon \neq 0$. Podobno kot dobimo kompleksna števila, če realna števila razširimo z imaginarno enoto $i = \sqrt{-1}$, dobimo dualna števila, če realna števila razširimo z dualno enoto ε .

Z dualnimi števili računamo kot z navadnimi binomi, pri čemer upoštevamo, da je $\varepsilon^2 = 0$. Pri vsoti dveh dualnih števil se realna in dualna komponenta seštejeta:

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (a + b) + (c + d)\varepsilon. \quad (15.1)$$

Pri izpeljavi pravila za produkt moramo upoštevati lastnost $\varepsilon^2 = 0$ in da da je produkt komutativen:

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + ad\varepsilon + bc\varepsilon + bd\varepsilon^2 = ac + (ad + bc)\varepsilon. \quad (15.2)$$

Pravilo za deljenje oziroma inverz dobimo tako, da število pomnožimo z ulomkom $1 = \frac{a - b\varepsilon}{a - b\varepsilon}$

$$\frac{1}{a + b\varepsilon} = \frac{a - b\varepsilon}{(a + b\varepsilon)(a - b\varepsilon)} = \frac{a - b\varepsilon}{a^2 + b^2\varepsilon^2} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\varepsilon. \quad (15.3)$$

Pri izpeljavi pravila za potenciranje, si pomagamo z razvojem v binomsko vrsto

$$(a + b\varepsilon)^n = a^n + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b\varepsilon + \binom{n}{n-2} a^{n-2} b^2 \varepsilon^2 + \dots = a^n + n a^{n-1} b\varepsilon. \quad (15.4)$$

Z racionalne potence lahko uporabimo binomsko vrsto, če pa ε nastopa v eksponentu, pa uporabimo vrsto za e^x .

Dualna števila lahko uporabimo za računanje odvodov. Z dualnimi števili se namreč računa podobno kot z diferenciali, oziroma linearnim delom Taylorjeve vrste. Linearni del Taylorjeve vrste imenujemo tudi [1-tok](#). Množica 1-tokov v neki točki predstavlja vse možne tangente na vse možne funkcije, ki gredo skozi to točko. V točki x_0 lahko 1-tok funkcije f zapisemo kot

$$f(x_0) + f'(x_0)dx, \quad (15.5)$$

kjer je $dx = x - x_0$ diferencial neodvisne spremenljivke. Poglejmo si primer 1-toka za produkt dveh funkcij f in g :

$$(f(x_0) + f'(x_0)dx)(g(x_0) + g'(x_0)dx) = \\ f(x_0)g(x_0) + (f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0))dx + \mathcal{O}(dx^2). \quad (15.6)$$

Vse potence dx^k za $k \geq 2$ potisnemo v ostanek $\mathcal{O}(dx^2)$ in v limiti zanemarimo. Pravila računanja 1-tokov in dualnih števil so povsem enaka. Pri računanju z differenciali ravno tako upoštevamo, da je $dx^2 \approx 0$ in vse potence dx^k za $k \geq 2$ zanemarimo. Vrednosti odvoda v neki točki lahko izračunamo z dualnimi števili. Če poznamo vrednost funkcije in vrednost odvoda funkcije v neki točki, lahko z dualnimi števili izračunamo vrednosti odvodov različnih operacij. 1-tokove lahko predstavimo z dualnimi števili. Če sta f in g funkciji, potem dualni števili

$$f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon \quad \text{in} \quad g(x_0) + g'(x_0)\varepsilon \quad (15.7)$$

predstavlja 1-tokova za funkciji f in g v točki x_0 . Če dualni števili vstavimo v nek izraz npr. x^2y , dobimo 1-tok funkcije $f(x)^2g(x)$ in s tem tudi vrednost odvoda v točki x_0 .

Za primer izračunajmo odvod $f(x)^2g(x)$ v točki $x_0 = 1$ za funkciji $f(x) = x^2$ in $g(x) = 2 - x$. Dualno število za 1-tok za f je

$$f(1) + f'(1)\varepsilon = 1 + 2\varepsilon, \quad (15.8)$$

dualno število za 1-tok za g pa je

$$g(1) + g'(1)\varepsilon = 1 - \varepsilon. \quad (15.9)$$

Vstavimo zdaj dualni števili v izraz x^2y in upoštevamo $\varepsilon^2 = 0$:

$$(1 + 2\varepsilon)^2(1 - \varepsilon) = (1 + 4\varepsilon + 4\varepsilon^2)(1 - \varepsilon) = (1 + 4\varepsilon)(1 - \varepsilon) = \\ 1 + 4\varepsilon - \varepsilon - 4\varepsilon^2 = 1 + 3\varepsilon. \quad (15.10)$$

Od tod lahko razberemo, da je 1-tok za (f^2g) v točki 1 enak

$$(f^2g)(1) + (f^2g)'(1)\varepsilon = 1 + 3\varepsilon \quad (15.11)$$

in odvod $(f^2g)'(1) = 3$.

```

"""
DualNumber(x, dx)

Predstavlja skalarno spremenljivko x in njen diferencial dx.

"""
struct DualNumber <: Number
    x::Float64
    dx::Float64
end

import Base: show, promote_rule, convert
show(io::IO, a::DualNumber) = print(io, a.x, " + ", a.dx, "ε")

ε = DualNumber(0, 1)
convert(::Type{DualNumber}, x::Real) = DualNumber(x, zero(x))
promote_rule(::Type{DualNumber}, ::Type{<:Number}) = DualNumber

```

15.3 Računajne gradientov

15.4 Rešitve

```

import Base: +, -, *, /, ^
*(a::DualNumber, b::DualNumber) = DualNumber(a.x * b.x, a.x * b.dx + a.dx * b.x)
+(a::DualNumber, b::DualNumber) = DualNumber(a.x + b.x, a.dx + b.dx)
-(a::DualNumber) = DualNumber(-a.x, -a.dx)
-(a::DualNumber, b::DualNumber) = DualNumber(a.x - b.x, a.dx - b.dx)
^(a::DualNumber, b::Number) = DualNumber(a.x^b, b * a.x^(b - 1) * a.dx)
^(a::Number, b::DualNumber) = DualNumber(a^b.x, log(a)a^b.x * b.dx)

```

Program 64:

```

import Base: sin, cos, exp, log
sin(a::DualNumber) = DualNumber(sin(a.x), cos(a.x) * a.dx)
cos(a::DualNumber) = DualNumber(cos(a.x), -sin(a.x) * a.dx)
exp(a::DualNumber) = DualNumber(exp(a.x), exp(a.x) * a.dx)
log(a::DualNumber) = DualNumber(log(a.x), a.dx / a.x)

```

Program 65:

```

"""
Dual(x, dx::Vector)

Predstavlja vrednost `f` odvisno od `n` spremenljivk in njen gradient
```\nabla f = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots f_n \frac{\partial}{\partial x_n}```.
"""

struct Dual <: Number
 x::Float64
 dx::Vector{Float64}
end

odvod(y::Dual) = y.dx
vrednost(y::Dual) = y.x

convert(::Type{Dual}, x::Real) = Dual(x, [zero(x)])
promote_rule(::Type{Dual}, ::Type{<:Number}) = Dual

```

Program 66:

```

*(a::Dual, b::Dual) = Dual(a.x * b.x, a.x * b.dx .+ a.dx * b.x)
+(a::Dual, b::Dual) = Dual(a.x + b.x, a.dx .+ b.dx)
-(a::Dual) = Dual(-a.x, -a.dx)
-(a::Dual, b::Dual) = Dual(a.x - b.x, a.dx .- b.dx)
^(a::Dual, b::Float64) = Dual(a.x ^ b, b * a.x^(b - 1) * a.dx)
^(a::Float64, b::Dual) = Dual(a ^ b.x, log(a) * a^b.x * b.dx)
/(a::Dual, b::Dual) = Dual(a.x / b.x, (b.x * a.dx - a.x * b.dx) / b.x^2)
/(a::Float64, b::Dual) = Dual(a / b.x, (-a * b.dx) / b.x^2)

```

Program 67:

```

sin(a::Dual) = Dual(sin(a.x), cos(a.x) * a.dx)
cos(a::Dual) = Dual(cos(a.x), -sin(a.x) * a.dx)
exp(a::Dual) = Dual(exp(a.x), exp(a.x) * a.dx)
log(a::Dual) = Dual(log(a.x), a.dx / a.x)

```

Program 68:

```
function spremenljivka(v::Vector{T}) where {T}
 n = length(v)
 x = Vector{Dual}()
 for i = 1:n
 xi = Dual(convert(Float64, v[i]), zeros(Float64, n))
 xi.dx[i] = 1
 push!(x, xi)
 end
 return x
end

gradient(f, x::Vector) = odvod(f(spremenljivka(x)))
```

Program 69:

# 16 Reševanje začetnega problema za NDE

Navadna diferencialna enačba

$$u'(t) = f(t, u, p) \quad (16.1)$$

ima enolično rešitev za vsak začetni pogoj  $u(t_0) = u_0$ . Iskanje rešitve NDE z danim začetnim pogojem imenujemo **začetni problem**.

V naslednji vaji bomo napisali knjižnico za reševanje začetnega problema za NDE. Napisali bomo naslednje:

1. Podatkovno strukturo, ki hrani podatke o začetnemu problemu.
2. Podatkovno strukturo, ki hrani podatke o rešitvi začetnega problema.
3. Različne metode za funkcijo `resi`, ki poiščejo približek za rešitev začetnega problema z različnimi metodami:
  - Eulerjevo metodo,
  - Runge-Kutta reda 2,
  - prediktor korektor z Eulerjevo in implicitno trapezno metodo in kontrolo koraka.
4. Funkcijo `vrednost`, ki za dano rešitev začetnega problema izračuna vrednost rešitve v vmesnih točkah s Hermitovim kubičnim zlepkom (Poglavlje 12).
5. Napisane funkcije uporabite, da poiščete rešitev začetnega problema za poševni met z zračnim uporom. Kako daleč leti telo preden pade na tla? Koliko časa leti?
6. Ocenite napako, tako da rezultat izračunajte z dvakrat manjšim korakom.

## 16.1 Reševanje enačbe z eno spremenljivko

Poglejmo, si najprej, kako numerično poiščemo rešitev diferencialne enačbe z eno spremenljivko. Reševali bomo le enačbe, pri katerih lahko odvod eksplisitno izrazimo. Take enačbe lahko zapišemo v obliki

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (16.2)$$

za neko funkcijo dveh spremenljivk  $f(t, u)$ . Funkcija  $f(t, u)$  določa odvod  $u'(t)$  in s tem tangento na rešitev  $u(t)$  v točki  $(t, u(t))$ . Za vsako točko  $(t, u)$  dobimo tangento oziroma smer v kateri se rešitev premakne. Funkcija  $f(t, u)$  tako določa polje smeri v ravnini  $(t, u)$ .

Za primer vzemimo enačbo

$$u'(t) = -2tu(t), \quad (16.3)$$

ki jo znamo tudi analitično rešiti in ima splošno rešitev

$$u(t) = Ce^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (16.4)$$

Poglejmo si, kako je videti polje smeri za enačbo (16.3). Tangente vzorčimo na pravokotni mreži na pravokotniku  $(t, u) \in [-2, 2] \times [0, 4]$ . Za eksplisitno podano krivuljo  $u = u(t)$  je vektor v smeri tangente podan s koordinatami  $[1, u'(t)]$ . Da dobimo lepšo sliko, vektor v smeri tangente normaliziramo in pomnožimo s primernim faktorjem, da se tangente na sliki ne prekrivajo.

```

using LinearAlgebra

"""
Izračunaj enotski vektor v smeri tangente na rešitev diferencialne enačbe
`u'(t)=f(t, u(t))``."""
function tangenta(f, t, u)
 v = [1, f(t, u)]
 return v / norm(v)
end

function daljica(f, t, u, l)
 v = l * tangenta(f, t, u) / 2
 dt, du = v
 return [t - dt, t + dt], [u - du, u + du]
end

""" Vzorči polje smeri za NDE `u' = fun(t, u)`"""
function vzorci_polje(fun, (t0, tk), (u0, uk), n=21)
 t = range(t0, tk, n)
 u = range(u0, uk, n)

 dt = t[2] - t[1]
 du = u[2] - u[1]
 l = min(dt, du) * 0.6

 # enotske vektorje skaliramo, da se ne prekrivajo
 polje = [daljica(fun, ti, ui, l) for ti in t for ui in u]
 return polje
end

```

Polje smeri nato narišemo s funkcijo quiver iz paketa Plots:

```

using Plots
function risi_polje(polje)
 N = length(polje)
 x = polje[1][1]
 y = polje[1][2]
 for i in 2:N
 # med daljice vrinemo vrednosti NaN, da plot prekine črto
 push!(x, NaN)
 append!(x, polje[i][1])
 push!(y, NaN)
 append!(y, polje[i][2])
 end
 return plot(x, y,
 xlabel="\$t\$$", ylabel="\$u\$$", label=false
)
end

fun(t, u) = -2 * t * u
polje = vzorci_polje(fun, (-2, 2), (0, 4))
plt = risi_polje(polje)

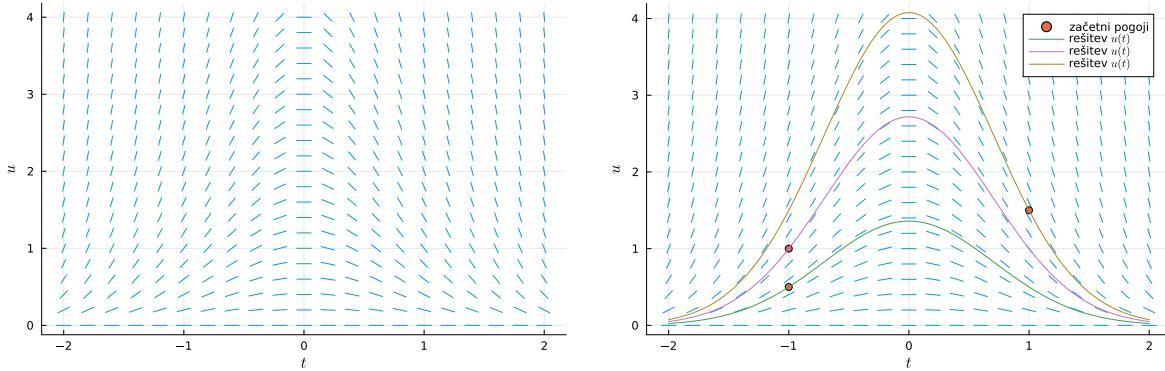
```

Narišimo še nekaj začetnih pogojev in rešitev, ki gredo skoznje.

```

t0 = [-1, -1, 1]
u0 = [0.5, 1, 1.5]
scatter!(plt, t0, u0, label="začetni pogoji")
for i in 1:3
 C = u0[i] / exp(-t0[i]^2)
 plot!(plt, t -> C * exp(-t^2), -2, 2, label="rešitev \$u(t)\$")
end
plt

```



Slika 48: Levo: Polje smeri za enačbo  $u'(t) = -2tu(t)$ . V vsaki točki ravnine  $t, u$  enačba definira odvod  $u'(t) = f(t, u)$  in s tem tudi tangento na rešitev enačbe  $u(t)$ . Desno: Vsaka točka  $(t_0, u_0)$  v ravnini  $t, u$  določa začetni pogoj. Za različne začetne pogoje dobimo različne rešitve. Rešitev NDE se v vsaki točki dotika tangente določene z  $u'(t) = f(t, u)$ .

Diferencialne enačba (16.3) ima neskončno rešitev. Če pa določimo vrednost v neki točki  $u(t_0) = u_0$ , ima enačba (16.3) enolično rešitev  $u(t)$ . Pogoj  $u(t_0) = u_0$  imenujemo *začetni pogoj*, diferencialno enačbo skupaj z začetnim pogojem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \tag{16.5}$$

pa *začetni problem*.

Rešitev začetnega problema (16.3) je funkcija  $u(x)$ . Funkcijo lahko numerično opišemo na mnogo različnih načinov. Dva načina, ki se pogosto uporablja, sta

- z vektorjem vrednosti  $[u_0, u_1, \dots, u_n]$  v danih točkah  $t_0, t_1, \dots, t_n$  ali
- z vektorjem koeficientov  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  v razvoju  $u(t) = \sum a_k \varphi_{k(t)}$  po dani bazi  $\varphi_{k(t)}$ .

Metode, ki poiščejo približek za vektor vrednosti imenujemo **kolokacijske metode**, metode, ki poiščejo približek za koeficiente v razvoju po bazi pa **spektralne metode**. Metode, ki jih bomo spoznali v nadaljevanju, sodijo med kolokacijske metode.

### 16.1.1 Eulerjeva metoda

Najpreprostejša metoda za reševanje začetnega problema je **Eulerjeva metoda**. Za dani začetni problem (16.5) bomo poiskali vrednosti  $u_i = u(t_i)$  v točkah  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_k$  na intervalu  $[t_0, t_k]$ . Vrednosti  $u_i$  poiščemo tako, da najprej izračunamo približek  $u_1$  za  $t_1$  in nato uporabimo isto metodo, da rešimo začetni problem z začetnim pogojem  $u(t_1) = u_1$ . Pri Eulerjevi metodi naslednjo vrednost dobimo tako, da izračunamo vrednost na tangenti v točki  $(t_k, u_k)$ . Tako rekurzivno dobimo približke za vrednosti v točkah  $t_1, t_2, \dots, t_n$ :

$$u_{k+1} = u_k + f(t_k, u_k)(t_{k+1} - t_k). \quad (16.6)$$

Zapišimo sedaj funkcijo `u, t = euler(fun, u0, (t0, tk), n)`, ki implementira Eulerjevo metodo s konstantnim korakom.

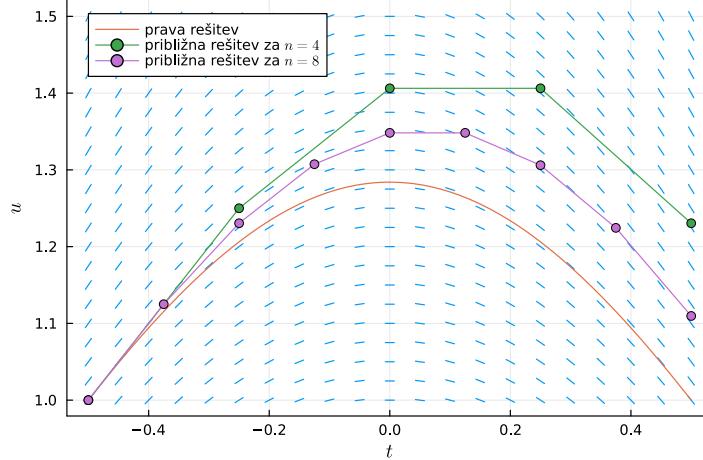
```
using Vaja16

tint = (-0.5, 0.5)
u0 = 1
plt = risi_polje(fun, tint, (u0, 1.5))

C = u0 / exp(-tint[1]^2)
plot!(plt, x -> C * exp(-x^2), tint[1], tint[2],
 label="prava rešitev", legend=:topleft)

u, t = Vaja16.euler(fun, 1.0, [-0.5, 0.5], 4)
plot!(plt, t, u, marker=:circle, label="približna rešitev za \$n=4\$",
 xlabel="\$t\$", ylabel="\$u\$")

u, t = Vaja16.euler(fun, 1.0, [-0.5, 0.5], 8)
plot!(plt, t, u, marker=:circle, label="približna rešitev za \$n=8\$",
 xlabel="\$t\$", ylabel="\$u\$")
for i = 2:4
C = u[i] / exp(-t[i]^2)
plot!(plt, x -> C * exp(-x^2), t[i], t[end],
label="\$u(t); u(t_{\$i-1})=u_{\$i-1}\$")
end
plt
```



Slika 49: Približna rešitev začetnega problema za enačbo  $u' = -2tu$  z začetnim pogojem  $u(-0.5) = 1$  na intervalu  $[-0.5, 0.5]$ . Približki so izračunani s 4 in 8 koraki Eulerjeve metode. Več korakov kot naredimo, boljši je približek za rešitev.

## 16.2 Ogrodje za reševanje NDE

V nadaljevanju bomo definirali tipe in funkcije, ki bodo omogočali enotno obravnavo reševanja začetnega problema in enostavno dodajanje različnih metod za reševanje NDE. Pri tem se bomo zgledovali po paketu [DifferentialEquations.jl](#) (glej [10] za podrobnejšo razlago).

Definirajmo podatkovni tip `ZacetniProblem`, ki vsebuje vse podatke o začetnem problemu (16.5) in ga bomo uporabili kot vhodni podatek za funkcije, ki bodo poiskale numerično rešitev.

```
"""
zp = ZacetniProblem(f!, u0, tspan, p)

Podatkovna struktura s podatki za začetni problem za navadne diferencialne enačbo
(NDE)
```

$$u'(t) = f(u, p, t).$$

```
z začetnim pogojem `` $u(t_0) = u_0$ `` na intervalu `` $tint=[t_0, t_k]$ `` in
vrednostmi parametrov `p`.

Polja

* `f`: funkcija, ki izračuna odvod (desne strani NDE)
* `u0`: začetni pogoj
* `tint`: časovni interval za rešitev
* `p`: vrednosti parametrov
```

struct ZacetniProblem
    f      # desne strani NDE  $u' = f(t, u, p)$ 
    u0    # začetna vrednost
    tint  # interval na katerem iščemo rešitev
    p      # parametri sistema
end
```

Program 70: Podatkovni tip, ki vsebuje vse podatke o začetnem problemu

Približke, ki jih bomo izračunali z različnimi metodami bomo tudi shranili v poseben podatkovni tip `ResitevNDE`.

```
"""
Podatkovna struktura, ki hrani približek za rešitev začetnega problema za NDE.
Uporablja se predvsem kot tip, ki ga vrnejo metode za reševanje začetnega problema.
```

struct ResitevNDE
 zp::ZacetniProblem # referenca na začetni problem
 u # približki za vrednosti rešitve
 t # vrednosti časa(argumenta)
end
```

Program 71: Podatkovni tip, ki vsebuje vse numerično rešitev začetnega problema

Definirajmo podatkovni tip `Euler`, ki vsebuje parametre za Eulerjevo metodo. Nato napišimo funkcijo `resi(p::ZacetniProblem, metoda::Euler)`, ki poišče rešitev začetnega problema z Eulerjevo metodo (za rešitev glej Program 73).

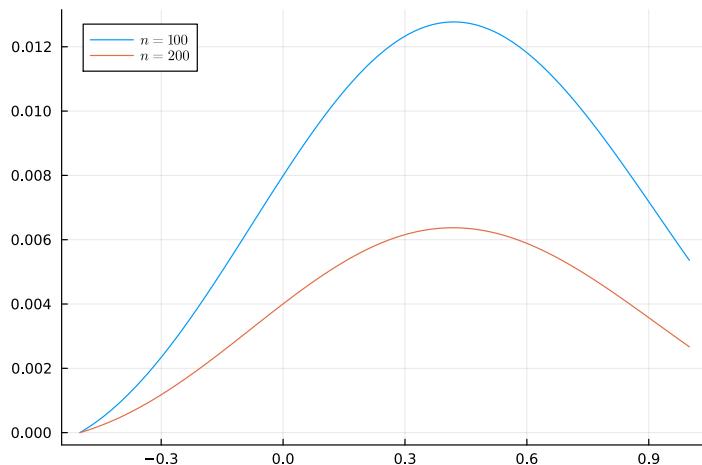
Ponovno rešimo začetni problem

$$\begin{aligned} u'(t) &= -2tu \\ u(-0.5) &= 1. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Faktor 2 v enačbi  $u'(t) = -2tu$  lahko obravnavamo kot parameter enačbe.

```
fun(t, u, p) = -p * t * u
problem = ZacetniProblem(fun, 1.0, (-0.5, 1.0), 2.0)
upravi(t) = exp(-t^2) / exp(-0.5^2)

res100 = resi(problem, Euler(100))
plot(res100.t, res100.u - upravi.(res100.t), label="\$n=100\$")
res200 = resi(problem, Euler(200))
plot!(res200.t, res200.u - upravi.(res200.t), label="\$n=200\$")
```



Slika 50: Napaka Eulerjeve metode za 100 in 200 korakov

#### Večlična razdelitev in posebni podatkovni tipi omogočajo abstraktno obravnavo

Uporaba specifičnih tipov omogoča definicijo specifičnih metod, ki so posebej napisane za posamezen primer. Taka organizacija kode omogoča večjo abstrakcijo in definicijo [domenskega jezika](#), ki je prilagojen posameznemu področju. Tako lahko govorimo o `ZacetnemuProblemuNDE` namesto o funkcijah in vektorjih, ki vsebujejo dejanske podatke. Vrednost tipa `ResitevNDE` se razlikuje od vektorjev in matrik, ki jih vsebuje, predvsem v tem, da Julia ve, da gre za podatke, ki so numerični približek za rešitev začetnega problema. To prevajalniku omogoča, da za dane podatke avtomatično uporabi metode glede na vlogo, ki jo imajo v danem kontekstu. Takšna organizacija je zelo prilagodljiva in omogoča enostavno dodajanje na primer novih numeričnih metod, kot tudi novih formulacij samega problema.

## 16.3 Hermitova interpolacija

Približne metode za začetni problem NDE izračunajo približke za rešitev zgolj v nekaterih vrednostih spremenljivke  $t$ . Vrednosti rešitve diferencialne enačbe lahko interpoliramo s [kubičnim Hermitovim](#)

[zlepkom](#), ki smo ga že spoznali v poglavju o zlepkih (Poglavlje 12). Hermitov zlepak je na intervalu  $(x_i, x_{i+1})$  enak kubičnemu polinomu, ki se z rešitvijo ujema v vrednostih in odvodih v krajiščih intervala  $x_i$  in  $x_{i+1}$ .

## 16.4 Poševni met z zračnim uporom

$$x(t) = \dots \quad (16.8)$$

## 16.5 Rešitve

```
"""
u, t = euler(fun, u0, (t0, tk), n)
```

Izračunaj približek za rešitev začetnega problema za diferencialno enačbo z Eulerjevo metodo z enakimi koraki.

# Argumenti

- `fun` desne strani DE `u'=fun(t, u)`
- `u0` začetni pogoj `u(t0) = u0`
- `(t0, tk)` interval, na katerem iščemo rešitev
- `n` število korakov Eulerjeve metode

```
"""
function euler(fun, u0, tint, n)
 t0, tk = tint
 t = range(t0, tk, n + 1)
 h = t[2] - t[1]
 u = [u0]
 for i = 1:n
 u0 = u0 + h * fun(t[i], u0)
 push!(u, u0)
 end
 return u, t
end
```

Program 72: Eulerjeva metoda za reševanje začetnega problema NDE

```

"""
Euler(n)

Parametri za Eulerjevo metodo za reševanje začetnega problema NDE s fiksним korakom.
Edini parameter je `n`, ki je enak številu korakov Eulerjeve metode.
"""

struct Euler
 n # število korakov
end

"""
r = resi(p::ZacetniProblem, metoda::Euler)

Reši začetni problem za NDE `p` z Eulerjevo metodo s parametri `metoda`.

Primer

Rešimo ZP za enačbo `u'(t) = -2t u` z začetnim pogojem `u(-0.5) = 1.0`:

``julia-repl
julia> fun(t, u, p) = -p * t * u;
julia> problem = ZacetniProblem(fun, 1., (-0.5, 1), 2);
julia> res = resi(problem, Euler(3)) # reši problem s 3 koraki Eulerjeve metode
ResitevNDE(ZacetniProblem(fun, 1.0, (-0.5, 1), 2), [1.0, 1.5, 1.5, 0.75],
-0.5:0.5:1.0)

```
"""

function resi(p::ZacetniProblem, metoda::Euler)
    # vstavimo parametre
    fun(t, u) = p.f(t, u, p.p)
    u, t = euler(fun, p.u0, p.tint, metoda.n)
    return ResitevNDE(p, u, t)
end

```

Program 73: Metoda za funkcijo `resi`, ki poišče rešitev začetnega problema z Eulerjevo metodo z enakimi koraki

```

struct RK2
    n # število korakov
end

"""
res = resi(p::ZacetniProblem, metoda::RK2)

Reši začetni problem za NDE `p` z metodo Runge Kutta reda 2 s parametri `metoda`.
"""

function resi(zp::ZacetniProblem, metoda::RK2)
    t0, t1 = zp.tint
    n = metoda.n
    f = zp.f
    par = zp.p
    t = range(t0, t1, n + 1)
    h = t[2] - t[1]
    u = [zp.u0]
    for i = 1:n
        k1 = h * f(t[i], u[i], par)
        k2 = h * f(t[i+1], u[i] + k1, par)
        push!(u, u[i] + (k1 + k2) / 2)
    end
    return ResitevNDE(zp, u, t)
end

```

Program 74: Metoda za funkcijo `resi`, ki poišče rešitev začetnega problema z metodo Runge Kutta reda 2

```

struct RK2Kontrola
    eps
end

using LinearAlgebra
"""

r = resi(p::ZacetniProblem, metoda::RK2Kontrola)

Reši začetni problem za NDE `p` z metodo Runge Kutta reda 2 s kontrolo koraka s
parametri `metoda`.

"""
function resi(zp::ZacetniProblem, metoda::RK2Kontrola)
    t0, t1 = zp.tint
    eps = metoda.eps
    f = zp.f
    zp = zp.p
    sigma = 0.9 # varnostni faktor
    h = t1 - t0
    u = [zp.u0]
    t = [t0]
    while (last(t) < t1)
        k1 = h * f(t[i], u[i], par)
        k2 = h * f(t[i+1], u[i] + k1, par)
        ln = (-k1 + k2) / 2
        lnorma = norm(ln, Inf)
        if lnorma < eps * h
            t0 = t0 + h
            u0 += (k1 + k2) / 2
            h = minimum([t1 - t0, sigma * h * sqrt(ε * h / lnorma)])
            push!(t, t0)
            push!(u, u0)
        else
            h = h / 2
        end
    end
    return ResitevNDE(zp, u, t)
end

```

Program 75: Metoda za funkcijo `resi`, ki poišče rešitev začetnega problema z metodo Runge Kutta reda 2 s kontrolo koraka

```

h00(t) = (1 + 2 * t) * (1 - t)^2
h01(t) = t^2 * (3 - 2 * t)
h10(t) = t * (1 - t)^2
h11(t) = t^2 * (t - 1)

"""
y = hermiteint(x, xi, y, dy)

Izračunaj vrednost kubičnega polinoma `p(x)`, ki interpolira podatke `xi`, `y` in
`dy`:
`p(xi[j]) = y[j]` in `p'(xi[j]) = dy[j]` za `j = 1, 2`.
"""

function hermiteint(x, xi, y, dy)
    dx = xi[2] - xi[1]
    t = (x - xi[1]) / dx
    return y[1] * h00(t) + y[2] * h01(t) +
        dx * (dy[1] * h10(t) + dy[2] * h11(t))
end

```

Program 76: Izračun vrednosti Hermitovega kubičnega polinoma

```

"""
y = vrednost(r, t)

Izračunaj vrednost rešitve `r` v točki `t`. Funkcija za izračun vrednosti uporabi
Hermitov zlepek.

"""

function vrednost(r::ResitevNDE, t)
    i = searchsortedfirst(r.t, t)
    if i > lastindex(r.t) || (i == firstindex(r.t) && t < first(r.t))
        throw("Vrednost $t izven intervala")
    end
    f = r.zp.f
    p = r.zp.p
    u = r.u
    tabt = r.t
    hermiteint(t, tabt[i:i+1], u[i:i+1], [f(tabt[i], u[i], p), f(tabt[i+1], u[i+1],
    p)])
end

# Omogočimo, da rešitev NDE kličemo kot funkcijo
(res::ResitevNDE)(t) = vrednost(res, t)
```

Program 77: Vmesne vrednosti rešitve NDE, izračunamo s Hermitovim kubičnim zlepkom

17 Aproksimacija podatkov z dinamičnim modelom

17.1 Naloga

- Poišči parametre p dinamičnega modela Lotka-Volterra na podlagi izmerjenih vrednosti v določenih časovnih trenutkih.
- Napiši funkcijo $r(p)$, ki izračuna vsoto kvadratov razlik med vrednostmi modela in izmerjenimi vrednostmi.
- Poišči minimum funkcije r z gradientno metodo. Gradient izračunaj z avtomatskim odvodom.
- Algoritem preskusи na umetno generiranih podatkih.

18 Domače naloge

18.1 Navodila za pripravo domačih nalog

Ta dokument vsebuje navodila za pripravo domačih nalog. Navodila so napisana za programski jezik [Julia](#). Če uporabljate drug programski jezik, navodila smiselno prilagodite.

18.1.1 Kontrolni seznam

Spodaj je seznam delov, ki naj jih vsebuje domača naloga.

- koda (`src\DomacaXY.jl`)
- testi (`test\runtests.jl`)
- dokument `README.md`
- demo skripta, s katero ustvarite rezultate za poročilo
- poročilo v formatu PDF

Preden oddate domačo nalogo, uporabite naslednji *kontrolni seznam*:

- vse funkcije imajo dokumentacijo
- testi pokrivajo večino kode
- *README* vsebuje naslednje:
 - ime in priimek avtorja
 - opis naloge
 - navodila kako uporabiti kodo
 - navodila, kako pognati teste
 - navodila, kako ustvariti poročilo
- *README* ni predolg
- poročilo vsebuje naslednje:
 - ime in priimek avtorja
 - splošen(matematičen) opis naloge
 - splošen opis rešitve
 - primer uporabe (slikice prosim :-)

18.1.2 Kako pisati in kako ne

V nadaljevanju je nekaj primerov dobre prakse, kako pisati kodo, teste in poročilo. Pri pisanju besedil je vedno treba imeti v mislih, komu je poročilo namenjeno.

Pisec naj uporabi empatijo do bralca in naj poskuša napisati zgodbo, ki ji bralec lahko sledi. Tudi, če je pisanje namenjeno strokovnjakom, je dobro, če je čim več besedila razumljivega tudi širši publik. Tudi strokovnjaki radi beremo besedila, ki jih hitro razumemo. Zato je dobro začeti z okvirnim opisom z malo formulami in splošnimi izrazi. V nadaljevanju lahko besedilo stopnjujemo k vedno večjim podrobnostim.

Določene podrobnosti, ki so povezane s konkretno implementacijo, brez škode izpustimo.

18.1.2.1 Opis rešitve naj bo okviren

Opis rešitve naj bo zgolj okviren. Izogibajte se uporabi programerskih izrazov ampak raje uporabljajte matematične. Na primer izraz **uporabimo for zanko**, lahko nadomestimo s **postopek ponavljam**. Od bralca zahteva splošen opis manj napora in dobi širšo sliko. Če želite dodati izpeljave, jih napišite z matematičnimi formulami, ne v programskejem jeziku. Koda sodi zgolj v del, kjer je opisana uporaba za konkreten primer.

DOBRO! Splošen opis algoritma

Algoritem za LU razcep smo prilagodili tridiagonalni strukturi matrike. Namesto trojne zanke smo uporabili le enojno, saj je pod pivotnim elementom neničelen le en element. Časovna zahtevnost algoritma je tako z $\mathcal{O}(n^3)$ padla na zgolj $\mathcal{O}(n)$.

SLABO! Podrobna razлага kode, vrstico po vrstico

V programu za LU razcep smo uporabili for zanko od 2 do velikosti matrike. V prvi vrstici zanke smo izračunali $L.s[i]$, tako da smo element $T.s[i]$ delili z $U.z[i-1]$. Nato smo izračunali diagonalni element, tako da smo uporabili formulo $U.d[i] - L.s[i]*U.d[i-1]$. Na koncu zanke smo vrnili matriki L in U .

18.1.2.2 Podrobnosti implementacije ne sodijo v poročilo

Podrobnosti implementacije so razvidne iz kode, zato jih nima smisla ponavljati v poročilu. Algoritme opišete okvirno, tako da izpustite podrobnosti, ki niso nujno potrebne za razumevanje. Podrobnosti lahko dodate, v nadaljevanju, če mislite, da so nujne za razumevanje.

DOBRO! Algoritem opišemo okvirno, podrobnosti razložimo kasneje

V matriki želimo eleminirati spodnji trikotnik. To dosežemo tako, da stolpce enega za drugim preslikamo s Hausholderjevimi zrcaljenji. Za vsak stolpec poiščemo vektor, preko katerega bomo zrcalili. Vektor poiščemo tako, da bo imela zrcalna slika ničle pod diagonalnim elementom.

Tu lahko z razlago zaključimo. Če želimo dodati podrobnosti, pa jih navedemo za okvirno idejo.

DOBRO! Podrobnosti sledijo za okvirno razlago

Vektor zrcaljenja dobimo kot

$$u = [s(k) + A_{k,k}, A_{k+1,k}, \dots, A_{n,k}], \quad (18.1)$$

kjer je $s(k) = \text{sign}(A_{k,k}) * \|A(k:n, k)\|$. Podmatriko $A(k:n, k+1:n)$ prezrcalimo preko vektorja u , tako da podmatriki odštejemo matriko

$$2u \frac{u^T A(k:n, k+1:n)}{u^T u}. \quad (18.2)$$

Na k -tem koraku prezrcalimo le podmatriko $k:n \times k:n$, ostali deli matrike pa ostanjejo nespremenjeni.

Takošnje razlaganje podrobnosti, brez predhodnega opisa osnovne ideje, ni dobro. Bralec težko loči, kaj je zares pomembno in kaj je zgolj manj pomembna podrobnost.

SLABO! *Tako dodamo vse podrobnosti, ne da bi razložili zakaj*

Za vsak k , poiščemo vektor $u = [s(k) + A_{k,k}, A_{k+1,k}, \dots, A_{n,k}]$, kjer je $s(k) = \text{sign}(A_{k,k}) * \| [A_{k,k}, \dots, A_{n,k}] \|$.

Nato matriko popravimo

$$A(k : n, k + 1 : n) = A(k : n, k + 1 : n) - 2 * u * \frac{u^T * A(k : n, k + 1 : n)}{u^T * u}. \quad (18.3)$$

Če implementacija vsebuje posebnosti, kot na primer uporaba posebne podatkovne strukture ali algoritma, jih lahko opišemo v poročilu. Vendar pazimo, da bralca ne obremenjujemo s podrobnostmi.

DOBRO! *Posebnosti implementacije opišemo v grobem in se ne spuščamo v podrobnosti*

Za tridiagonalne matrike definiramo posebno podatkovno strukturo `Tridiag`, ki hrani le neničelne elemente matrike. Julia omogoča, da LU razcep tridiagonalne matrike, implementiramo kot specifikirano metodo funkcije `lu` iz paketa `LinearAlgebra`. Pri tem upoštevamo posebnosti tridiagonalne matrike in algoritem za LU razcep prilagodimo tako, da se časovna in prostorska zahtevnost zmanjšata na $\mathcal{O}(n)$.

Pazimo, da v poročilu ne povzemamo direktno posameznih korakov kode.

SLABO! *Opisovanje, kaj počnejo posamezni koraki kode, ne sodi v poročilo.*

Za tridiagonalne matrike definiramo podatkovni tip `Tridiag`, ki ima 3 atribute `s`, `d` in `z`. Atribut `s` vsebuje elemente pod diagonalo, ...

LU razcep implementiramo kot metodo za funkcijo `LinearAlgebra.lu`. V `for` zanki izračunamo naslednje:

1. element $l[i] = a[i, i-1] / a[i-1, i-1]$
2. ...

18.1.3 Kako pisati teste

Nekaj nasvetov, kako lahko testiramo kode.

- Na roke izračunajte rešitev za preprost primer in jo primerjajte z rezultati funkcije.
- Ustvarite testne podatke, za katere je znana rešitev. Na primer za testiranje kode, ki reši sistem $Ax=b$, izberete A in x in izračunate desne strani $b=A*x$.
- Preverite lastnost rešitve. Za enačbe $f(x)=0$, lahko rešitev, ki jo izračuna program preprosto vставite nazaj v enačbo in preverite, če je enačba izpolnjena.
- Red metode lahko preverite tako, da naredite simulacijo in primerjate red

metode z redom programa, ki ga eksperimentalno določite.

- Če je le mogoče, v testih ne uporabljamo rezultatov, ki jih proizvede koda sama. Ko je koda dovolj časa v uporabi, lahko rezultate kode same uporabimo za [regresijske teste](#).

18.1.3.1 Pokritost kode s testi

Pri pisanju testov je pomembno, da testi izvedejo vse veje v kodi. Delež kode, ki se izvede med testi, imenujemo [pokritost kode](#) (angl. [Code Coverage](#)). V juliji lahko pokritost kode dobimo, če dodamo argument `coverage=true` metodi `Pkg.test`:

```
julia> import Pkg; Pkg.test("DomacaXY"; coverage=true)
```

Zgornji ukaz bo za vsako datoteko iz mape `src` ustvaril ustrezeno datoteko s končnico `.cov`, v kateri je shranjena informacija o tem, kateri deli kode so bili uporabljeni med izvajanjem testov.

Za poročanje o pokritosti kode lahko uporabite paket [Coverage.jl](#). Povzetek o pokritosti kode s testi lahko pripravite z naslednjim programom:

```
using Coverage
cov = process_folder("DomacaXY")
pokrite_vrstice, vse_vrstice = get_summary(cov)
delez = pokrite_vrstice / vse_vrstice
println("Pokritost kode s testi: $(round(delez*100))%.")
```

18.1.4 Priprava zahteve za združitev na Github

Za lažjo komunikacijo predlagam, da rešitev domače naloge postavite v svojo vejo in ustvarite zahtevo za združitev (*Pull request* na Githubu ozziroma *Merge request* na Gitlabu). V nadaljevanju bomo opisali, kako to storiti, če repozitorij z domačimi nalogami gostite na Githubu. Postopek za Gitlab in druge platforme je podoben.

Preden začnete z delom, ustvarite vejo na svoji delovni kopiji repozitorija in jo potisnete na Github ali Gitlab. Ime veje naj bo domača-X, se pravi domaca-1 za 1. domačo nalogo in tako naprej. To storite z ukazom

```
$ git checkout -b domaca-1
$ git push -u origin domaca-1
```

Stikalo -u pove git-u, da naj z domačo vejo sledi veji na Githubu/Gitlabu.

Med delom sproti dodajate vnose z `git commit` in jih prenesete na splet z ukazom `git push`. Ko je domača naloga končana, na Githubu ustvarite zahtevo za združitev (angl. Pull request).

- Kliknete na zavihek `Pull requests` in nato na zelen gumb `Create pull request`.
- Na desni strani izberete vejo `domaca-1` in kliknete na gumb `Create draft pull request`.
- Ko je koda pripravljena na pregled, kliknite na gumb `Ready for review`.
- V komentarju za novo ustvarjeno zahtevo povabite asistenta k pregledu. To storite tako, da v komentar dodate uporabniško ime asistenta (npr. `@mojZlobniAsistent`).

`@mojZlobniAsistent Prosim za pregled.`

Pri domačih nalogah se posvetujte s kolegi

Nič ni narobe, če za pomoč pri domači nalogi prosite kolega. Seveda morate kodo in poročilo napisati samo, lahko pa kolega prosite za pregled ali za pomoč, če vam kaj ne dela.

Domačo nalogo tudi napišete v skupini, vendar morate v tem primeru rešiti toliko različnih nalog, kot je študentov v skupini.

18.2 1. domača naloga

Izberite eno izmed spodnjih nalog.

Naloge

18.2.1 SOR iteracija za razpršene matrike	152
18.2.2 Metoda konjugiranih gradientov za razpršene matrike	153
18.2.3 Metoda konjugiranih gradientov s pred-pogojevanjem	153

18.2.4 QR razcep zgornje hessenbergove matrike	153
18.2.5 QR razcep simetrične tridiagonalne matrike	154
18.2.6 Inverzna potenčna metoda za zgornje hessenbergovo matriko	154
18.2.7 Inverzna potenčna metoda za tridiagonalno matriko	155
18.2.8 Naravni zlepek	156
18.2.9 QR iteracija z enojnim premikom	156

18.2.1 SOR iteracija za razpršene matrike

Naj bo A $n \times n$ diagonalno dominantna razpršena matrika (velika večina elementov je ničelnih $a_{ij} = 0$).

Definirajte nov podatkovni tip `RazprsenaMatrika`, ki matriko zaradi prostorskih zahtev hrani v dveh matrikah V in I , kjer sta V in I matriki $n \times m$, tako da velja

$$V(i, j) = A(i, I(i, j)). \quad (18.4)$$

V matriki V se torej nahajajo neničelni elementi matrike A . Vsaka vrstica matrike V vsebuje neničelne elemente iz iste vrstice v A . V matriki I pa so shranjeni indeksi stolpcev teh neničelnih elementov.

Za podatkovni tip `RazprsenaMatrika` definirajte metode za naslednje funkcije:

- indeksiranje: `Base.getindex`, `Base.setindex!`, `Base.firstindex` in `Base.lastindex`
- množenje z desne `Base.*` z vektorjem

Več informacij o [tipih in vmesnikih](#).

Napišite funkcijo `x, it = sor(A, b, x0, omega, tol=1e-10)`, ki reši razpršeni sistem $Ax = b$ z SOR iteracijo. Pri tem je `x0` začetni približek, `tol` pogoj za ustavitev iteracije in `omega` parameter pri SOR iteraciji. Iteracija naj se ustavi, ko je

$$|Ax^{(k)} - b|_\infty < \delta, \quad (18.5)$$

kjer je δ podan s argumentom `tol`.

Metodo uporabite za vložitev grafa v ravnino ali prostor [s fizikalno metodo](#). Če so (x_i, y_i, z_i) koordinate vozlišč grafa v prostoru, potem vsaka koordinata posebej zadošča enačbam

$$\begin{aligned} -st(i)x_i + \sum_{j \in N(i)} x_j &= 0, \\ -st(i)y_i + \sum_{j \in N(i)} y_j &= 0, \\ -st(i)z_i + \sum_{j \in N(i)} z_j &= 0, \end{aligned} \quad (18.6)$$

kjer je $st(i)$ stopnja i -tega vozlišča, $N(i)$ pa množica indeksov sosednjih vozlišč. Če nekatera vozlišča fiksiramo, bodo ostala zavzela ravnovesno lego med fiksiranimi vozlišči. Napišite funkcijo `ravnovesni_sistem`, ki za dani graf in koordinate vozlišč, ki so fiksirana, vrne matriko sistema in desne strani enačb za posamezne koordinate za vozlišča, ki niso fiksirana.

Za primer lahko upodobite [graf krožno lestev](https://en.wikipedia.org/wiki/Ladder_graph#Circular_ladder_graph), kjer polovica vozlišč enakomerno razporedite na enotski krožnici.

Za risanje grafa lahko uporabite [GraphRecipes.jl](#).

Za primere, ki jih boste opisali, poiščite optimalni ω , pri katerem SOR najhitreje konvergira in predstavite odvisnost hitrosti konvergence od izbire ω .

18.2.2 Metoda konjugiranih gradientov za razpršene matrike

Definirajte nov podatkovni tip RazprsenaMatrika, kot je opisano v prejšnji nalogi.

Napišite funkcijo `[x, i]=conj_grad(A, b)`, ki reši sistem

$$Ax = b, \quad (18.7)$$

z metodo konjugiranih gradientov za A tipa RazprsenaMatrika.

Metodo uporabite na primeru vložitve grafa v ravnino ali prostor s fizikalno metodo, kot je opisano v prejšnji nalogi.

18.2.3 Metoda konjugiranih gradientov s pred-pogojevanjem

Za pohitritev konvergencije iterativnih metod, se velikokrat izvede t. i. pred-pogojevanje(engl. preconditioning). Za simetrične pozitivno definitne matrike je to pogosto nepopolni razcep Choleskega, pri katerem sledimo algoritmu za razcep Choleskega, le da ničelne elemente pustimo pri miru.

Naj bo A $n \times n$ pozitivno definitna razpršena matrika(velika večina elementov je ničelnih $a_{ij} = 0$). Matriko zaradi prostorskih zahtev hranimo kot sparse matriko. Poglejte si dokumentacijo za [razpršene matrike](#).

Napišite funkcijo `L = nep_chol(A)`, ki izračuna nepopolni razcep Choleskega za matriko tipa AbstractSparseMatrix. Napišite še funkcijo `x, i = conj_grad(A, b, L)`, ki reši linearni sistem

$$Ax = b \quad (18.8)$$

s pred-pogojeno metodo konjugiranih gradientov za matriko $M = L^T L$ kot pred-pogojevalcem. Pri tem pazite, da matrike M ne izračunate, ampak uporabite razcep $M = L^T L$. Za različne primere preverite, ali se izboljša hitrost konvergencije.

18.2.4 QR razcep zgornje hessenbergove matrike

Naj bo H $n \times n$ zgornje hessenbergova matrika (velja $a_{ij} = 0$ za $j < j - 2i$). Definirajte podatkovni tip ZgornjiHessenberg za zgornje hessenbergovo matriko.

Napišite funkcijo `Q, R = qr(H)`, ki izvede QR razcep matrike H tipa ZgornjiHessenberg z Givenovimi rotacijami. Matrika R naj bo zgornje trikotna matrika enakih dimenzij kot H, v Q pa naj bo matrika tipa Givens.

Podatkovni tip Givens definirajte sami tako, da hrani le zaporedje rotacij, ki se med razcepom izvedejo in indekse vrstic, na katere te rotacije delujejo. Posamezno rotacijo predstavite s parom

$$[\cos(\alpha); \sin(\alpha)], \quad (18.9)$$

kjer je α kot rotacije na posameznem koraku. Za podatkovni tip definirajte še množenje `Base.*` z vektorji in matrikami.

Uporabite QR razcep za QR iteracijo zgornje hesenbergove matrike. Napišite funkcijo `lastne_vrednosti, lastni_vektorji = eigen(H)`, ki poišče lastne vrednosti in lastne vektorje zgornje hessenbergove matrike.

Preverite časovno zahtevnost vaših funkcij in ju primerjajte z metodami `qr` in `eigen` za navadne matrike.

18.2.5 QR razcep simetrične tridiagonalne matrike

Naj bo A $n \times n$ simetrična tridiagonalna matrika (velja $a_{ij} = 0$ za $|i - j| > 1$).

Definirajte podatkovni tip `SimetricnaTridiagonalna` za simetrično tridiagonalno matriko, ki hrani glavno in stransko diagonalo matrike. Za tip `SimetricnaTridiagonalna` definirajte metode za naslednje funkcije:

- indeksiranje: `Base.getindex`, `Base.setindex!`, `Base.firstindex` in `Base.lastindex`
- množenje z desne `Base.*` z vektorjem ali matriko

Časovna zahtevnost omenjenih funkcij naj bo linearна. Več informacij o [tipih](#) in Napišite funkcijo `Q`, $R = qr(T)$, ki izvede QR razcep matrike T tipa `Tridiagonalna` z Givensovimi rotacijami. Matrika R naj bo zgornje trikotna tridiagonalna matrika tipa `ZgornjeTridiagonalna`, v Q pa naj bo matrika tipa `Givens`. [vmesnikih](#).

Podatkovna tipa `ZgornjeTridiagonalna` in `Givens` definirajte sami (glejte tudi nalogu Poglavlje 18.2.4). Poleg tega implementirajte množenje `Base.*` matrik tipa `Givens` in `ZgornjeTridiagonalna`.

Uporabite QR razcep za QR iteracijo simetrične tridiagonalne matrike. Napišite funkcijo `lastne_vrednosti`, `lastni_vektorji = eigen(T)`, ki poišče lastne vrednosti in lastne vektorje simetrične tridiagonalne matrike.

Preverite časovno zahtevnost vaših funkcij in ju primerjajte z metodami `qr` in `eigen` za navadne matrike.

18.2.6 Inverzna potenčna metoda za zgornje hessenbergovo matriko

Lastne vektorje matrike A lahko računamo z **inverzno potenčno metodo**. Naj bo $A_\lambda = A - \lambda I$. Če je λ približek za lastno vrednost, potem zaporedje vektorjev

$$x^{(n+1)} = \frac{A_\lambda^{-1} x^{(n)}}{|A_\lambda^{-1} x^{(n)}|}, \quad (18.10)$$

konvergira k lastnemu vektorju za lastno vrednost, ki je po absolutni vrednosti najbližje vrednosti λ .

Da bi zmanjšali število operacij na eni iteraciji, lahko poljubno matriko A prevedemo v zgornje hessenbergovo obliko (velja $a_{ij} = 0$ za $j < i - 2$). S hausholderjevimi zrcaljenji lahko poiščemo zgornje hessenbergovo matriko H , ki je podobna matriki A :

$$H = Q^T A Q. \quad (18.11)$$

Če je v lastni vektor matrike H , je Qv lastni vektor matrike A , lastne vrednosti matrik H in A pa so enake.

Napišite funkcijo `H`, `Q = hessenberg(A)`, ki s Hausholderjevimi zrcaljenji poišče zgornje hessenbergovo matriko H tipa `ZgornjiHessenberg`, ki je podobna matriki A .

Tip `ZgornjiHessenberg` definirajte sami, kot je opisano v nalogi o QR razcepu zgornje hessenbergove matrike. Poleg tega implementirajte metodo `L`, `U = lu(A)` za matrike tipa `ZgornjiHessenberg`, ki bo pri razcepu upoštevala lastnosti zgornje hessenbergovih matrik. Matrika L naj ne bo polna, ampak tipa `SpodnjaTridiagonalna`. Tip `SpodnjaTridiagonalna` definirajte sami, tako da bo hrnil le neničelne elemente in za ta tip matrike definirajte operator `Base.\`, tako da bo upošteval strukturo matrik L .

Napišite funkcijo `lambda`, `vektor = inv_lastni(A, l)`, ki najprej naredi hessenbergov razcep in nato izračuna lastni vektor in točno lastno matrike A , kjer je l približek za lastno vrednost. Inverza matrike

A nikar ne računajte, ampak raje uporabite LU razcep in na vsakem koraku rešite sistem $L(Ux^{n+1}) = x^n$.

Metodo preskusite za izračun ničel polinoma. Polinomu

$$x^n + a_{\{n-1\}}x^{\{n-2\}} + \dots + a_1x + a_0 \quad (18.12)$$

lahko priredimo matriko

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (18.13)$$

katere lastne vrednosti se ujemajo z ničlami polinoma.

18.2.7 Inverzna potenčna metoda za tridiagonalno matriko

Lastne vektorje matrike A lahko računamo z **inverzno potenčno metodo**. Naj bo $A_\lambda = A - \lambda I$. Če je λ približek za lastno vrednost, potem zaporedje vektorjev

$$x^{\{(n+1)\}} = \frac{A_\lambda^{-1}x^{(n)}}{|A_\lambda^{-1}x^{(n)}|}, \quad (18.14)$$

konvergira k lastnemu vektorju za lastno vrednost, ki je po absolutni vrednosti najbližje vrednosti λ .

Naj bo A **simetrična matrika**. Da bi zmanjšali število operacij na eni iteraciji, lahko poljubno simetrično matriko A prevedemo v tridiagonalno obliko. S hausholderjevimi zrcaljenji lahko poiščemo tridiagonalno matriko T , ki je podobna matriki A :

$$T = Q^T A Q. \quad (18.15)$$

Če je v lastni vektor matrike T , je Qv lastni vektor matrike A , lastne vrednosti matrik T in A pa so enake.

Napišite funkcijo T , $Q = \text{tridiag}(A)$, ki s Hausholderjevimi zrcaljenji poišče tridiagonalno matriko H tipa **Tridiagonalna**, ki je podobna matriki A .

Tip **Tridiagonalna** definirajte sami, kot je opisano v nalogi o QR razcepu tridiagonalne matrike. Poleg tega implementirajte metodo L , $U = \text{lu}(A)$ za matrike tipa **Tridiagonalna**, ki bo pri razcepu upoštevala lastnosti tridiagonalnih matrik. Matrike L in U naj ne bodo polne matrike. Matrika L naj bo tipa **SpodnjaTridiagonalna**, matrika U pa tipa **ZgornjaTridiagonalna**. Tipa **SpodnjaTridiagonalna** in **ZgornjaTridiagonalna** definirajte sami, tako da bosta hranila le neničelne elemente. Za oba tipa definirajte operator **Base.**, tako da bo upošteval strukturo matrik.

Napišite funkcijo **lambda**, **vektor** = **inv_lastni(A, l)**, ki najprej naredi hessenbergov razcep in nato izračuna lastni vektor in točno lastno matrike A , kjer je l približek za lastno vrednost. Inverza matrike A nikar ne računajte, ampak raje uporabite LU razcep in na vsakem koraku rešite sistem $L(Ux^{n+1}) = x^n$.

Metodo preskusite na laplaceovi matriki, ki ima vse elemente 0 razen $l_{ii} = -2$, $l_{i+1,j} = l_{i,j+1} = 1$. Poiščite nekaj lastnih vektorjev za najmanjše lastne vrednosti in jih vizualizirajte z ukazom **plot**.

Lastni vektorji laplaceove matrike so približki za rešitev robnega problema za diferencialno enačbo

$$y''(x) = \lambda^2 y(x), \quad (18.16)$$

katere rešitve sta funkciji $\sin(\lambda x)$ in $\cos(\lambda x)$.

18.2.8 Naravni zlepek

Danih je n interpolacijskih točk (x_i, f_i) , $i = 1, 2 \dots n$. **Naravni interpolacijski kubični zlepek** S je funkcija, ki izpolnjuje naslednje pogoje:

1. $S(x_i) = f_i$, $i = 1, 2 \dots n$.
2. S je polinom stopnje 3 ali manj na vsakem podintervalu $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2 \dots n - 1$.
3. S je dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na interpolacijskem intervalu $[x_1, x_n]$
4. $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$.

Zlepek S določimo tako, da postavimo

$$S(x) = S_{i(x)} = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (18.17)$$

nato pa izpolnimo zahtevane pogoje².

Napišite funkcijo `Z = interpoliraj(x, y)`, ki izračuna koeficient polinoma S_i in vrne element tipa Zlepek.

Tip Zlepek definirajte sami in naj vsebuje koeficiente polinoma in interpolacijske točke. Za tip Zlepek napišite dve funkciji

- `y = vrednost(Z, x)`, ki vrne vrednost zlepka v dani točki x .
- `plot(Z)`, ki nariše graf zlepka, tako da različne odseke izmenično nariše z rdečo in modro barvo (uporabi paket `Plots`).

18.2.9 QR iteracija z enojnim premikom

Naj bo A simetrična matrika. Napišite funkcijo, ki poišče lastne vektorje in vrednosti simetrične matrike z naslednjim algoritmom

- Izvedi Hessenbergov razcep matrike $A = U^T TU$ (uporabite lahko vgrajeno funkcijo `LinearAlgebra.hessenberg`)
- Za tridiagonalno matriko T ponavljaj, dokler ni $h_{n-1,n}$ dovolj majhen:
 - za $T - \mu I$ za $\mu = h_{n,n}$ izvedi QR razcep
 - nov približek je enak $RQ + \mu I$
- Postopek ponovi za podmatriko brez zadnjega stolpca in vrstice

Napiši metodo `lastne_vrednosti`, `lastni_vektorji = eigen(A, EnojniPremik(), vektorji = false)`, ki vrne

- vektor lastnih vrednosti simetrične matrike A , če je vrednost `vektorji` enaka `false`.
- vektor lastnih vrednosti `lambda` in matriko s pripadajočimi lastnimi vektorji `V`, če je `vektorji` enaka `true`

Pazi na časovno in prostorsko zahtevnost algoritma. QR razcep tridiagonalne matrike izvedi z Givensovimi rotacijami in hrani le elemente, ki so nujno potrebni (glej nalogo [QR razcep simetrične tridiagonalne matrike](#)).

²pomagajte si z: Bronštajn, Semendjajev, Musiol, Mühlig: **Matematični priročnik**, Tehniška založba Slovenije, 1997, str. 754 ali pa J. Petrišič: **Interpolacija**, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1999, str. 47

Funkcijo preiskusi na Laplaceovi matriki grafa podobnosti (glej [vajo o spektralnem gručenju](#)).

18.3 2. domača naloga

Tokratna domača naloga je sestavljena iz dveh delov. V prvem delu morate implementirati program za računanje vrednosti dane funkcije $f(x)$. V drugem delu pa izračunati eno samo številko. Obe nalogi rešite na **10 decimalk** (z relativno natančnostjo 10^{-10}) Uporabite lahko le osnovne operacije, vgrajene osnovne matematične funkcije `exp`, `sin`, `cos`, ..., osnovne operacije z matrikami in razcepe matrik. Vse ostale algoritme morate implementirati sami.

Namen te naloge ni, da na internetu poiščete optimalen algoritem in ga implementirate, ampak da uporabite znanje, ki smo ga pridobili pri tem predmetu, čeprav na koncu rešitev morda ne bo optimalna. Uporabite lahko interpolacijo ali aproksimacijo s polinomi, integracijske formule, Taylorjevo vrsto, zamenjave spremenljivk, itd. Kljub temu pazite na **časovno in prostorsko zahtevnost**, saj bo od tega odvisna tudi ocena.

Izberite **eno** izmed nalog. Domačo nalogo lahko delete skupaj s kolegi, vendar morate v tem primeru rešiti toliko različnih nalog, kot je študentov v skupini.

Če uporabljate drug programski jezik, ravno tako kodi dodajte osnovno dokumentacijo, teste in demo.

Naloge

18.3.1 Naloge s funkcijami	157
18.3.2 Naloge s števili	158
18.3.3 Lažje naloge (ocena največ 9)	160

18.3.1 Naloge s funkcijami

Implementacija funkcije naj zadošča naslednjim zahtevam:

- relativna napaka je manjša od $5 \cdot 10^{-11}$ za vse argumente in
- časovna zahtevnost je omejena s konstanto, ki je neodvisna od argumenta.

Naloge

18.3.1.1 Fresnelov integral (težja)	157
18.3.1.2 Funkcija kvantilov za $N(0, 1)$	158
18.3.1.3 Integralski sinus (težja)	158
18.3.1.4 Naravni parameter (težja)	158

18.3.1.1 Fresnelov integral (težja)

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna vrednosti Fresnelovega kosinusa

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt. \quad (18.18)$$

Namig: Uporabite pomožni funkciji

$$f(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\pi z^2 t}{2}}}{\sqrt{t(t^2+1)}} dt$$

$$g(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{t} e^{-\frac{\pi z^2 t}{2}}}{t^2+1} dt,$$
(18.19)

kot je opisano v [11].

18.3.1.2 Funkcija kvantilov za $N(0, 1)$

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna funkcijo kvantilov za standardno normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko. Funkcija kvantilov je inverzna funkcija $\Phi^{-1}(x)$ porazdelitvene funkcije:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$
(18.20)

Poskrbite, da bo relativna napaka za vrednosti blizu 0 in 1 dovolj majhna in da je časovna zahtevnost omejena z isto konstanto na celiem intervalu $(0, 1)$.

18.3.1.3 Integralski sinus (težja)

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna integralski sinus

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$
(18.21)

Uporabite pomožni funkciji

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+z} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{t^2+1} dt$$

$$g(z) = \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t+z} dt = \int_0^\infty \frac{te^{-zt}}{t^2+1} dt$$

$$\text{Si}(z) = \frac{\pi}{2} - f(z)\cos(z) - g(z)\sin(z),$$
(18.22)

kot je opisano v [12].

18.3.1.4 Naravni parameter (težja)

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna **naravni parameter**:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2} d\tau$$
(18.23)

za parametrično krivuljo

$$(x(t), y(t)) = (t^3 - t, t^2 - 1).$$
(18.24)

Za velike vrednosti argumenta t aproksimirajte funkcijo $s(\frac{1}{t})^{-1}$ s polinomom.

18.3.2 Naloge s števili

Naloge

18.3.2.1 Sila težnosti	159
18.3.2.2 Ploščina hipotrohoide	159
18.3.2.3 Povprečna razdalja (težja)	159
18.3.2.4 Ploščina Bézierove krivulje	159

18.3.2.1 Sila težnosti

Izračunajte velikost sile težnosti med dvema vzporedno postavljenima enotskima homogenima kockama na razdalji 1. Predpostavite, da so vse fizikalne konstante, ki nastopajo v problemu, enake 1. Sila med dvema telesoma $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^3$ je enaka

$$\mathbf{F} = \int_{T_1} \int_{T_2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (18.25)$$

18.3.2.2 Ploščina hipotrohoide

Izračunajte ploščino območja, ki ga omejuje hypotrochoida podana parametrično z enačbama:

$$x(t) = (a + b) \cos(t) + b \cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) \quad (18.26)$$

$$y(t) = (a + b) \sin(t) + b \sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \quad (18.27)$$

za parametra $a = 1$ in $b = -\frac{11}{7}$.

Namig: Uporabite formulo za [ploščino krivočrtnega trikotnika](#) pod krivuljo:

$$P = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt \quad (18.28)$$

18.3.2.3 Povprečna razdalja (težja)

Izračunajte povprečno razdaljo med dvema točkama znotraj telesa T , ki je enako razlike dveh kock:

$$T = ([-1, 1])^3 - ([0, 1])^3. \quad (18.29)$$

Integral na produktu razlike dveh množic $(A - B) \times (A - B)$ lahko izrazimo kot vsoto integralov:

$$\begin{aligned} \int_{A-B} \int_{A-B} f(x, y) dx dy &= \int_A \int_A f(x, y) dx dy \\ &\quad - 2 \int_A \int_B f(x, y) dx dy + \int_B \int_B f(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (18.30)$$

18.3.2.4 Ploščina Bézierove krivulje

Izračunajte ploščino zanke, ki jo omejuje Bézierova krivulja dana s kontrolnim poligonom:

$$(0, 0), (1, 1), (2, 3), (1, 4), (0, 4), (-1, 3), (0, 1), (1, 0). \quad (18.31)$$

Namig: Uporabite lahko formulo za [ploščino krivočrtnega trikotnika](#) pod krivuljo:

$$P = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))dt. \quad (18.32)$$

18.3.3 Lažje naloge (ocena največ 9)

Naloge so namenjen tistim, ki jih je strah eksperimentiranja ali pa za to preprosto nimajo interesa ali časa. Rešiti morate eno od nalog:

18.3.3.1 Gradientni spust z iskanjem po premici

18.3.3.2 Interpolacija z baricentrično formulo

Napišite program, ki za dano funkcijo f na danem intervalu $[a, b]$ izračuna polinomski interpolant, v Čebiševih točkah. Vrednosti naj računa z [baricentrično Lagrangevo interpolacijo](#), po formuli

$$l(x) = \begin{cases} \frac{\sum \frac{f(x_j)\lambda_j}{x-x_j}}{\sum \frac{\lambda_j}{x-x_j}} & x \neq x_j \\ f(x_j) & \text{sicer} \end{cases} \quad (18.33)$$

Čebiševe točke so podane na intervalu $[-1, 1]$ s formulo

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (18.34)$$

vrednosti uteži λ_k pa so enake

$$\lambda_k = (-1)^k \begin{cases} 1 & 0 < i < n \\ \frac{1}{2} & i = 0 \\ n & \text{sicer.} \end{cases} \quad (18.35)$$

Za interpolacijo na splošnem intervalu $[a, b]$ si pomagaj z linearno preslikavo na interval $[-1, 1]$. Program uporabi za tri različne funkcije e^{-x^2} na $[-1, 1]$, $\frac{\sin x}{x}$ na $[0, 10]$ in $|x^2 - 2x|$ na $[1, 3]$. Za vsako funkcijo določi stopnjo polinoma, da napaka ne bo presegla 10^{-6} .

18.3.3.3 Gauss-Legendrove kvadrature

Izpelji [Gauss-Legendreovo integracijsko pravilo](#) na dveh točkah

$$\int_0^h f(x)dx = Af(x_1) + Bf(x_2) + R_f \quad (18.36)$$

vključno s formulo za napako R_f . Izpelji sestavljeni pravilo za $\int_a^b f(x)dx$ in napiši program, ki to pravilo uporabi za približno računanje integrala. Ocen, koliko izračunov funkcijске vrednosti je potrebnih, za izračun približka za

$$\int_0^5 \frac{\sin x}{x} dx \quad (18.37)$$

na 10 decimalk natančno. *Namig:* Najprej izpelji pravilo na intervalu $[-1, 1]$ in ga nato prevedi na poljuben interval $[x_i, x_{i+1}]$. Za oceno napake uporabite izračun z dvojnim številom korakov.

18.4 3. domača naloga

18.4.1 Navodila

Zahtevana števila izračunajte na **10 decimalk** (z relativno natančnostjo 10^{-10}) Uporabite lahko le osnovne operacije, vgrajene osnovne matematične funkcije \exp , \sin , \cos , ..., osnovne operacije z matrikami in razcepe matrik. Vse ostale algoritme morate implementirati sami.

Namen te naloge ni, da na internetu poiščete optimalen algoritem in ga implementirate, ampak da uporabite znanje, ki smo ga pridobili pri tem predmetu, čeprav na koncu rešitev morda ne bo optimalna. Kljub temu pazite na **časovno in prostorsko zahtevnost**, saj bo od tega odvisna tudi ocena.

Izberite **eno** izmed nalog. Domačo nalogo lahko delete skupaj s kolegi, vendar morate v tem primeru rešiti toliko različnih nalog, kot je študentov v skupini.

Če uporabljate drug programski jezik, ravno tako kodi dodajte osnovno dokumentacijo in teste.

18.4.2 Težje naloge

18.4.2.1 Ničle Airijeve funkcije

Airyjeva funkcija je dana kot rešitev začetnega problema

$$Ai''(x) - x Ai(x) = 0, \quad Ai(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}} \Gamma(\frac{2}{3})}, \quad Ai'(0) = -\frac{1}{3^{\frac{1}{3}} \Gamma(\frac{1}{3})}. \quad (18.38)$$

Poiscičte čim več ničel funkcije Ai na 10 decimalnih mest natančno. Ni dovoljeno uporabiti vgrajene funkcije za reševanje diferencialnih enačb. Lahko pa uporabite Airyjevo funkcijo `airyai` iz paketa `SpecialFunctions.jl`, da preverite ali ste res dobili pravo ničlo.

18.4.2.1.1 Namig

Za računanje vrednosti $y(x)$ lahko uporabite Magnusovo metodo reda 4 za reševanje enačb oblike

$$y'(x) = A(x)y, \quad (18.39)$$

pri kateri nov približek \mathbf{Y}_{k+1} dobimo takole:

$$\begin{aligned} A_1 &= A\left(x_k + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \\ A_2 &= A\left(x_k + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \\ \sigma_{k+1} &= \frac{h}{2}(A_1 + A_2) - \frac{\sqrt{3}}{12}h^2[A_1, A_2] \\ \mathbf{Y}_{k+1} &= \exp(\sigma_{k+1})\mathbf{Y}_k. \end{aligned} \quad (18.40)$$

Izraz $[A, B]$ je komutator dveh matrik in ga izračunamo kot $[A, B] = AB - BA$. Eksponentno funkcijo na matriki ($\exp(\sigma_{k+1})$) pa v programskejem jeziku julia dobite z ukazom `exp`.

18.4.2.2 Dolžina implicinto podane krivulje

Poščite približek za dolžino krivulje, ki je dana implicitno z enačbama

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= x^4 + y^2/2 + z^2 = 12 \\ F_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 4z^2 = 8. \end{aligned} \quad (18.41)$$

Krivuljo lahko poščete kot rešitev diferencialne enačbe

$$\dot{x}(t) = \nabla F_1 \times \nabla F_2. \quad (18.42)$$

18.4.2.3 Perioda limitnega cikla

Poščite periodo limitnega cikla za diferencialno enačbo

$$x''(t) - 4(1 - x^2)x'(t) + x = 0 \quad (18.43)$$

na 10 decimalk natančno.

18.4.2.4 Obhod lune

Sondo Appolo pošljite iz Zemljine orbite na tir z vrnitvijo brez potiska (free-return trajectory), ki obkroži Luno in se vrne nazaj v Zemljino orbito. Rešujte sistem diferencialnih enačb, ki ga dobimo v koordinatnem sistemu, v katerem Zemlja in Luna mirujeta (omejen krožni problem treh teles). Naloge ni potrebno reševati na 10 decimalk.

18.4.2.4.1 Omejen krožni problem treh teles

Označimo z M maso Zemlje in z m maso Lune. Ker je masa sonde zanemarljiva, Zemlja in Luna krožita okrog skupnega masnega središča. Enačbe gibanja zapišemo v vrtečem koordinatnem sistemu, kjer masi M in m mirujeta. Označimo

$$\mu = \frac{m}{M+m} \quad \text{ter} \quad \mu^- = 1 - \mu = \frac{M}{M+m}. \quad (18.44)$$

V brezdimenzijskih koordinatah (dolžinska enota je kar razdalja med masama M in m) postavimo maso M v točko $(-\mu, 0, 0)$, maso m pa v točko $(\mu^-, 0, 0)$. Označimo z R in r oddaljenost satelita s položajem (x, y, z) od mas M in m , tj.

$$\begin{aligned} R &= R(x, y, z) = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \\ r &= r(x, y, z) = \sqrt{(\mu^- - x)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (18.45)$$

Enačbe gibanja sonde so potem:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x + 2\dot{y} - \frac{\mu}{R^3}(x + \mu) - \frac{\mu}{r^3}(x - \mu), \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} - \frac{\mu}{R^3}y - \frac{\mu}{r^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{R^3}z - \frac{\mu}{r^3}z. \end{aligned} \quad (18.46)$$

18.4.2.5 Perioda geostacionarne orbite

Oblika planeta Zemlja ni čisto pravilna krogla. Zato tudi gravitacijsko polje ne deluje v vseh smereh enako. Gravitacijsko polje lahko zapišemo kot odvod gravitacijskega potenciala

$$\mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = m \cdot \nabla V(\mathbf{r}), \quad (18.47)$$

kjer je $V(\mathbf{r})$ skalarna funkcija položaja \mathbf{r} . [Zemljina gravitacija Zemljin gravitacijski potencial](#).

18.4.3 Lažja naloga (ocena največ 9)

Naloga je namenjena tistim, ki jih je strah eksperimentiranja ali pa za to preprosto nimajo interesa ali časa.

18.4.3.1 Matematično nihalo

Kotni odmik $\theta(t)$ (v radianih) pri nedušenem nihanju nitnega nihala opišemo z diferencialno enačbo

$$\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) + \theta''(t) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta'_0, \quad (18.48)$$

kjer je $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ težni pospešek in l dolžina nihala. Napišite funkcijo nihalo, ki računa odmik nihala ob določenem času. Enočbo drugega reda prevedite na sistem prvega reda in računajte z metodo Runge-Kutta četrtega reda:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h f(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 &= h f(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 &= h f(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \end{aligned} \quad (18.49)$$

Klic funkcije naj bo oblike `odmik=nihalo(l,t,theta0,dtheta0,n)`

- kjer je `odmik` enak odmiku nihala ob času `t`,
- dolžina nihala je `l`,
- začetni odmik (odmik ob času 0) je `theta0`
- in začetna kotna hitrost ($\theta'(0)$) je `dtheta0`,
- interval $[0, t]$ razdelimo na `n` podintervalov enake dolžine.

Primerjajte rešitev z nihanjem harmoničnega nihala. Za razliko od harmoničnega nihala (sinusno nihanje), je pri matematičnem nihalu nihajni čas odvisen od začetnih pogojev (energije). Narišite graf, ki predstavlja, kako se nihajni čas spreminja z energijo nihala.

Literatura

- [1] B. Orel, *Osnove numerične matematike*. 2020.
- [2] D. E. Knuth, „Literate programming“, *The Computer Journal*, let. 27, št. 2, str. 97–111, 1984, doi: [10.1093/comjnl/27.2.97](https://doi.org/10.1093/comjnl/27.2.97).
- [3] Savchenko V. V., Pasko, A. A., Okunev, O. G., in Kunii T. L., „Function representation of solids reconstructed from scattered surface points and contours“, *Computer Graphics Forum*, let. 14, št. 4, str. 181–188, 1995, Pridobljeno: 22. julij 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.48.80&rep=rep1&type=pdf>
- [4] Turk G. in O'Brien J., „Variational Implicit Surfaces“. 1999. Pridobljeno: 22. julij 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <https://www.semanticscholar.org/paper/Variational-Implicit-Surfaces-Turk-O'Brien/50dbc9f86af75dad7be6b2e92601e4ded7bee2d6>
- [5] B. S. Morse, T. S. Yoo, P. Rheingans, D. T. Chen, in K. R. Subramanian, „Interpolating implicit surfaces from scattered surface data using compactly supported radial basis functions“. str. 89–98, maj 2001. doi: [10.1109/SMA.2001.923379](https://doi.org/10.1109/SMA.2001.923379).
- [6] M. Buhmann, „Radial Basis Functions“, v *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics*, B. Engquist, Ur., 2015, str. 1216–1219.
- [7] U. von Luxburg, „A tutorial on spectral clustering“, *Statistics and Computing*, let. 17, št. 4, str. 395–416, dec. 2007, doi: [10.1007/s11222-007-9033-z](https://doi.org/10.1007/s11222-007-9033-z).
- [8] N. M. Temme, „Digital Library of Mathematical Functions: Chapter 3 Numerical Methods“. Pridobljeno: 15. junij 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <https://dlmf.nist.gov/3>
- [9] L. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice, Extended Edition*. 2019. doi: [10.1137/1.9781611975949](https://doi.org/10.1137/1.9781611975949).
- [10] C. Rackauckas in Q. Nie, „DifferentialEquations.jl--a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in Julia“, *Journal of Open Research Software*, let. 5, 2017, Pridobljeno: 12. avgust 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <https://openresearchsoftware.metajnl.com/articles/10.5334/jors.151>
- [11] N. M. Temme, „Digital Library of Mathematical Functions: Chapter 7 Error Functions, Dawson's and Fresnel Integrals“. Pridobljeno: 15. junij 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <https://dlmf.nist.gov/7>
- [12] N. M. Temme, „Digital Library of Mathematical Functions: Chapter 6 Exponential, Logarithmic, Sine, and Cosine Integrals“. Pridobljeno: 15. junij 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <https://dlmf.nist.gov/6>