

# NUMERIČNA MATEMATIKA V PROGRAMSKEM JEZIKU JULIA

Martin Vuk

11. 11. 2024

Kataložni zapis o publikaciji (CIP)

Digitalna izdaja je prosto dostopna  
This digital publication is freely available  
<http://zalozba.fri.uni-lj.si/vuk2024.pdf>  
DOI: [XXXX/XXXX](#)

Recenzenta / Reviewers:  
prof. dr. Emil Žagar in doc. dr. Aljaž Zalar

Založnik: Založba UL FRI, Ljubljana  
Izdajatelj: UL Fakulteta za računalništvo in informatiko, Ljubljana  
Urednik: prof. dr. Franc Solina

Copyright © 2024 Založba UL FRI. All rights reserved.

# Predgovor

Knjige o numerični matematiki se pogosto posvečajo predvsem matematičnim vprašanjem. Pričajoča knjiga poskuša nasloviti bolj praktične vidike numerične matematike, zato so primeri, če je le mogoče, povezani s problemom praktične narave s področja fizike, matematičnega modeliranja ali računalništva. Za podrobnejši matematični opis uporabljenih metod in izpeljav bralcu priporočam učbenika Osnove numerične matematike Bojana Orla [1] in Razširjen uvod v numerične metode Bora Plestenjaka [2].

Pričajoča knjiga je prvenstveno namenjena študentom Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani kot gradivo za izvedbo laboratorijskih vaj pri predmetu Numerična matematika. Kljub temu je primerna za vse, ki bi želeli bolje spoznati algoritme numerične matematike, uporabo numeričnih metod ali se naučiti uporabljati programski jezik [Julia](#). Pri sem se od bralca pričakuje osnovno znanje programiranja v kakšnem drugem programskem jeziku.

V knjigi so naloge razdeljene na vaje in na domače naloge. Vaje so zasnovane za samostojno delo z računalnikom, pri čemer lahko bralec naloge rešuje z različno mero samostojnosti. Vsaka vaja se začne z opisom naloge in jasnimi navodili, kaj je njen cilj ozziroma končni rezultat. Sledijo podrobnejša navodila, kako se naloge lotiti, na koncu pa je rešitev z razlago posameznih korakov. Rešitev vključuje matematične izpeljave, programsko kodo in rezultate, ki jih dobimo, če programsko kodo uporabimo.

Domače naloge rešuje bralec povsem samostojno, zato so naloge brez rešitev. Odločitev, da rešitve niso vključene, je namerna, saj bralec lahko verodostojno preveri svoje znanje le, če rešuje tudi naloge, za katere nima dostopa do rešitev.

Vsekakor bralcu svetujem, da vso kodo napiše in preskusí sam. Še bolje je, če kodo razširi, jo spreminja in se z njo igra. Koda, ki je navedena v tej knjigi, je najosnovnejša različica kode, ki reši določen problem in še ustrezza minimalnim standardom pisanja kvalitetne kode. Pogosto je izpuščeno preverjanje ali implementacija robnih primerov, včasih tudi obravnava pričakovanih napak. Da je bralcu lažje razumeti, kaj koda počne, sem dal prednost berljivosti pred kompletnostjo.

Na tem mestu bi se rad zahvalil Bojanu Orlu, Emilu Žagarju, Petru Kinku in Aljažu Zalarju, s katerimi sem sodeloval ali še sodelujem pri numeričnih predmetih na FRI. Veliko idej za naloge, ki so v tej knjigi, prihaja prav od njih. Prav tako bi se zahvalil članom Laboratorija za matematične metode v računalništvu in informatiki, še posebej Neži Mramor-Kosta in Damirju Franetiču, ki so tako ali drugače prispevali k nastanku te knjige. Moja draga žena Mojca Vilfan je opravila delo urednika, za kar sem ji izjemno hvaležen. Na koncu bi se rad zahvalil študentom, ki so obiskovali numerične predmete. Čeprav sem jih jaz učil, so bili oni tisti, ki so me naučili marsikaj novega.

avtor Martin Vuk

# Kazalo

1 Uvod v programski jezik Julia .....	7
1.1 Namestitev in prvi koraki .....	7
1.2 Avtomatsko posodabljanje kode .....	14
1.3 Priprava korenske mape .....	15
1.4 Vodenje različic s programom Git .....	16
1.5 Priprava paketa za vajo .....	16
1.6 Koda .....	17
1.7 Testi .....	18
1.8 Dokumentacija .....	20
1.9 Zaključek .....	24
2 Računanje kvadratnega korena .....	25
2.1 Naloga .....	25
2.2 Izbira algoritma .....	25
2.3 Določitev števila korakov .....	27
2.4 Izbira začetnega približka .....	29
2.5 Zaključek .....	32
3 Tridiagonalni sistemi .....	34
3.1 Naloga .....	34
3.2 Tridiagonalne matrike .....	34
3.3 Reševanje tridiagonalnega sistema .....	36
3.4 Slučajni sprehod .....	36
3.5 Pričakovano število korakov .....	38
3.6 Rešitve .....	42
4 Minimalne ploskve .....	46
4.1 Naloga .....	46
4.2 Matematično ozadje .....	47
4.3 Diskretizacija in linearni sistem enačb .....	47
4.4 Matrika sistema linearnih enačb .....	49
4.5 Izpeljava sistema s Kroneckerjevim produktom .....	50
4.6 Numerična rešitev z LU razcepom .....	51
4.7 Napolnitev matrike ob eliminaciji .....	53
4.8 Iteracijske metode .....	54
4.9 Rešitve .....	57
5 Interpolacija z implicitnimi funkcijami .....	61
5.1 Naloga .....	61
5.2 Interpolacija z radialnimi baznimi funkcijami .....	61
5.3 Program .....	63
5.4 Rešitve .....	65
6 Fizikalna metoda za vložitev grafov .....	67
6.1 Naloga .....	67
6.2 Ravnovesje sil .....	67
6.3 Rešitev v Juliji .....	69
6.4 Krožna lestev .....	69
6.5 Dvodimenzionalna mreža .....	70
6.6 Rešitve .....	72
7 Invariantna porazdelitev Markovske verige .....	77

7.1 Naloga .....	77
7.2 Limitna porazdelitev Markovske verige .....	78
7.3 Potenčna metoda .....	78
7.4 Razvrščanje spletnih strani .....	78
7.5 Skakanje konja po šahovnici .....	80
7.6 Rešitve .....	82
8 Spektralno razvrščanje v gruče .....	85
8.1 Naloga .....	85
8.2 Podobnostni graf in Laplaceova matrika .....	85
8.3 Algoritem .....	86
8.4 Primer .....	86
8.5 Inverzna potenčna metoda .....	88
8.6 Inverzna iteracija s QR razcepom .....	89
8.7 Premik .....	90
8.8 Rešitve .....	91
8.9 Testi .....	93
9 Konvergenčna območja nelinearnih enačb .....	94
9.1 Naloga .....	94
9.2 Newtonova metoda za sisteme enačb .....	94
9.3 Konvergenčno območje .....	96
9.4 Rešitve .....	97
10 Nelinearne enačbe v geometriji .....	100
10.1 Naloga .....	100
10.2 Presečišča parametrično podanih krivulj .....	100
10.3 Minimalna razdalja med dvema krivuljama .....	103
10.4 Rešitve .....	109
11 Aproksimacija z linearnim modelom .....	111
11.1 Naloga .....	111
11.2 Linearni model .....	111
11.3 Opis sprememb koncentracije CO <sub>2</sub> .....	112
11.4 Normalni sistem .....	114
11.5 QR razcep .....	115
11.6 Kaj pa CO <sub>2</sub> ? .....	116
12 Interpolacija z zlepki .....	118
12.1 Naloga .....	118
12.2 Hermitov kubični zlepek .....	118
12.3 Ocena za napako .....	121
12.4 Newtonov interpolacijski polinom .....	123
12.5 Rungejev pojav .....	124
12.6 Rešitve .....	124
12.7 Testi .....	127
13 Porazdelitvena funkcija normalne porazdelitve .....	129
13.1 Naloga .....	129
13.2 Razdelitev definicijskega območja .....	129
13.3 Izračun na $[-c, \infty)$ .....	130
13.4 Izračun na $(-\infty, -c]$ .....	130
13.5 Adaptivna metode .....	130
13.6 Aproksimacija s polinomi Čebiševa .....	131
13.7 Čebiševa aproksimacija funkcije $\Phi$ za majhne $x$ .....	132

13.8 Izračun funkcije $\Phi(x)$ na $[c, \infty)$ .....	133
14 Povprečna razdalja med dvema točkama na kvadratu .....	134
14.1 Naloga .....	134
14.2 Dvojni integral in integral integrala .....	134
14.3 Metoda Monte Carlo .....	136
14.4 Povprečna razdalja med točkama na kvadratu $[0, 1]^2$ .....	136
14.5 Rešitve .....	140
14.6 Testi .....	143
15 Avtomatsko odvajanje z dualnimi števili .....	145
15.1 Naloga .....	145
15.2 Ideja avtomskega odvoda .....	145
15.3 Dualna števila .....	147
15.4 Keplerjeva enačba .....	149
15.5 Računajne gradientov .....	151
15.6 Gradient Ackleyeve funkcije .....	151
15.7 Rešitve .....	151
16 Začetni problem za NDE .....	154
16.1 Naloga .....	154
16.2 Reševanje enačbe z eno spremenljivko .....	154
16.3 Eulerjeva metoda .....	156
16.4 Ogrodje za reševanje NDE .....	157
16.5 Metode Runge - Kutta .....	159
16.6 Hermitova interpolacija .....	160
16.7 Poševni met z zračnim uporom .....	161
16.8 Čas in dolžina meta .....	164
16.9 Rešitve .....	167
17 Domače naloge .....	172
17.1 Navodila za pripravo domačih nalog .....	172
17.2 1. domača naloga .....	176
17.3 2. domača naloga .....	182
17.4 3. domača naloga .....	186
Literatura .....	189

# 1 Uvod v programski jezik Julia

V knjigi bomo uporabili programski jezik **Julia** [3]. Zavoljo učinkovitega izvajanja, uporabe **dinamičnih tipov** in **funkcij, specializiranih glede na signaturo**, ter dobre podpore za interaktivno uporabo, je Julia zelo primerna za programiranje numeričnih metod in ilustracijo njihove uporabe. V nadaljevanju sledijo kratka navodila, kako začeti z Julio.

Cilji tega poglavja so:

- naučiti se uporabljati Julio v interaktivni ukazni zanki,
- pripraviti okolje za delo v programskejem jeziku Julia,
- ustvariti prvi paket in
- ustvariti prvo poročilo v formatu PDF.

Tekom te vaje bomo pripravili svoj prvi paket v Juliji, ki bo vseboval parametrično enačbo **Geronove lemniskate**, in napisali teste, ki bodo preverili pravilnost funkcij v paketu. Nato bomo napisali skripto, ki uporabi funkcije iz našega paketa in nariše sliko Geronove lemniskate. Na koncu bomo pripravili lično poročilo v formatu PDF.

## 1.1 Namestitev in prvi koraki

Namestite programski jezik Julia, tako da sledite **navodilom**, in v terminalu poženite ukaz **julia**. Ukaz odpre interaktivno ukazno zanko (angl. *Read Eval Print Loop* ali s kratico REPL) in v terminalu se pojavi ukazni pozivnik **julia>**. Za ukaznim pozivnikom lahko napišemo posamezne ukaze, ki jih nato Julia prevede, izvede in izpiše rezultate. Poskusimo najprej s preprostimi izrazi:

```
julia> 1 + 1
2

julia> sin(pi)
0.0

julia> x = 1; 2x + x^2
3

julia> # vse, kar je za znakom #, je komentar, ki se ne izvede
```

### 1.1.1 Funkcije

Funkcije, ki so v programskejem jeziku Julia osnovne enote kode, definiramo na več načinov. Kratke enovrstične funkcije definiramo z izrazom **ime(x) = ....**

```
julia> f(x) = x^2 + sin(x)
f (generic function with 1 method)

julia> f(pi/2)
3.4674011002723395
```

Funkcije z več argumenti definiramo podobno:

```
julia> g(x, y) = x + y^2
g (generic function with 1 method)

julia> g(1, 2)
5
```

Za funkcije, ki zahtevajo več kode, uporabimo ključno besedo `function`:

```
julia> function h(x, y)
    z = x + y
    return z^2
end
h (generic function with 1 method)

julia> h(3, 4)
49
```

Funkcije lahko uporabljammo kot vsako drugo spremenljivko. Lahko jih podamo kot argumente drugim funkcijam in jih združujemo v podatkovne strukture, kot so seznamy, vektorji ali matrike. Funkcije lahko definiramo tudi kot anonimne funkcije. To so funkcije, ki jih vpeljemo brez imena in jih kasneje ne moremo poklicati po imenu.

```
julia> (x, y) -> sin(x) + y
#1 (generic function with 1 method)
```

Anonimne funkcije uporabljammo predvsem kot argumente v drugih funkcijah. Funkcija `map(f, v)` na primer zahteva za prvi argument funkcijo `f`, ki jo nato aplicira na vsak element vektorja `v`:

```
julia> map(x -> x^2, [1, 2, 3])
3-element Vector{Int64}:
 1
 4
 9
```

Vsaka funkcija v programskejem jeziku Julia ima lahko več različnih definicij, glede na kombinacijo tipov argumentov, ki jih podamo. Posamezno definicijo funkcije imenujemo `metoda`. Ob klicu funkcije Julia izbere najprimernejšo metodo.

```
julia> k(x::Number) = x^2
k (generic function with 1 method)

julia> k(x::Vector) = x[1]^2 - x[2]^2
k (generic function with 2 methods)

julia> k(2)
4

julia> k([1, 2, 3])
-3
```

## 1.1.2 Vektorji in matrike

Vektorje vnesemo z oglatimi oklepaji []:

```
julia> v = [1, 2, 3]
3-element Vector{Int64}:
 1
 2
 3

julia> v[1] # vrne prvo komponento vektorja
1

julia> v[2:end] # vrne od 2. do zadnje komponente vektorja
2-element Vector{Int64}:
 2
 3

julia> sin.(v) # funkcijo uporabimo na komponentah vektorja, če imenu dodamo .
3-element Vector{Float64}:
 0.8414709848078965
 0.9092974268256817
 0.1411200080598672
```

Matrike vnesemo tako, da elemente v vrstici ločimo s presledki, vrstice pa s podpičji:

```
julia> M = [1 2 3; 4 5 6]
2×3 Matrix{Int64}:
 1  2  3
 4  5  6
```

Za razpone indeksov uporabimo :, s ključno besedo end označimo zadnji indeks. Julia avtomačno določi razpon indeksov v matriki:

```
julia> M[1, :] # prva vrstica
3-element Vector{Int64}:
 1
 2
 3

julia> M[2:end, 1:end-1]
1×2 Matrix{Int64}:
 4  5
```

Osnovne operacije delujejo tudi na vektorjih in matrikah. Pri tem moramo vedeti, da gre za matrične operacije. Tako je na primer \* operacija množenja matrik ali matrike z vektorjem in ne morda množenja po komponentah.

```
julia> [1 2; 3 4] * [6, 5] # množenje matrike z vektorjem
2-element Vector{Int64}:
 16
 38
```

Če želimo operacije izvajati po komponentah, moramo pred operator dodati piko, na kar nas Julia opozori z napako:

```
julia> [1, 2] + 1 # seštevanje vektorja in števila ni definirano  
ERROR: MethodError: no method matching +(::Vector{Int64}, ::Int64)  
For element-wise addition, use broadcasting with dot syntax: array .+ scalar  
  
julia> [1, 2] .+ 1  
2-element Vector{Int64}:  
 2  
 3
```

Posebej uporaben je operator \, ki poišče rešitev sistema linearnih enačb. Izraz  $A \backslash b$  vrne rešitev matričnega sistema  $Ax = b$ :

```
julia> A = [1 2; 3 4]; # podpičje prepreči izpis rezultata  
  
julia> x = A \ [5, 6] # reši enačbo  $A * x = [5, 6]$   
2-element Vector{Float64}:  
 -3.9999999999999987  
 4.49999999999999
```

Izračun se izvede v aritmetiki s plavajočo vejico, zato pride do zaokrožitvenih napak in rezultat ni povsem točen. Naredimo še preizkus:

```
julia> A * x  
2-element Vector{Float64}:  
 5.0  
 6.0
```

Operator \ deluje za veliko različnih primerov. Med drugim ga lahko uporabimo tudi za iskanje rešitve pre-določenega sistema po metodi najmanjših kvadratov:

```
julia> [1 2; 3 1; 2 2] \ [1, 2, 3] # rešitev za predoločen sistem  
2-element Vector{Float64}:  
 0.599999999999999  
 0.5111111111111114
```

### 1.1.3 Zanke in kontrolne strukture

Za zanko z znanim številom korakov uporabimo ukaz **for**:

```
julia> for i=1:3  
         println("Trenutni števec je $i"  
       end  
Trenutni števec je 1  
Trenutni števec je 2  
Trenutni števec je 3
```

Julija podpira tudi sintakso z ukazom **for i in vektor** podobno kot Python. Namesto razpona 1:3, ki je tipa [LinRange](#) lahko for zanko izvedemo tudi po vektorju:

```
julia> for i in [2, 3, 1]
        println("Trenutni števec je $i"
      end
Trenutni števec je 2
Trenutni števec je 3
Trenutni števec je 1
```

Julija omogoča še vrsto drugih konstruktov, ki so v bistvu zanke. Poglejmo si, kako lahko na tri različne načine, kako iz danega vektorja  $v = [1, 2, 3]$  sestavimo vektor funkcijskih vrednosti  $[f(1), f(2), f(3)]$  za dano funkcijo  $f$ .

```
julia> v = [1, 2, 3]
julia> f(x) = x^2
julia> [f(xi) for xi in x] # podobno kot v Pythonu
3-element Vector{Int64}:
 1
 4
 9

julia> f.(v) # operator . je alias za funkcijo broadcast, ki funkcijo aplicira na komponente
3-element Vector{Int64}:
 1
 4
 9

julia> map(f, v)
3-element Vector{Int64}:
 1
 4
 9
```

Zanko lahko izvedemo tudi z ukazom `while`, ki deluje podobno kot v drugih programskeh jezikih. Podobno kot v drugih programskeh jezikih deluje tudi `if` stavek.

#### 1.1.4 Podatkovni tipi

**Podatkovne tipe** definiramo z ukazom `struct`. Ustvarimo tip, ki predstavlja točko z dvema koordinatama:

```
julia> struct Tocka
    x
    y
  end
```

Ko definiramo nov tip, se avtomatično ustvari tudi funkcija z istim imenom, s katero lahko ustvarimo vrednost novo definiranega tipa. Vrednost tipa `Tocka` ustvarimo s funkcijo `Tocka(x, y)`:

```

julia> T = Tocka(1, 2) # ustvari vrednost tipa Tocka
Tocka(1, 2)

julia> T.x
1

julia> T.y
2

```

Julia omogoča različne definicije iste funkcije za različne podatkovne tipe. Za določitev tipa argumenta funkcije uporabimo operator `::`. Za primer definirajmo funkcijo, ki izračuna razdaljo med dvema točkama:

```

julia> razdalja(T1::Tocka, T2::Tocka) = sqrt((T2.x - T1.x)^2 + (T2.y - T1.y)^2)
razdalja (generic function with 1 method)

julia> razdalja(Tocka(1, 2), Tocka(2, 1))
1.4142135623730951

```

### 1.1.5 Moduli

Moduli pomagajo organizirati funkcije v enote in omogočajo uporabo istega imena za različne funkcije in tipe. Module definiramo z `module ImeModula ... end`:

```

julia> module KrNeki
    kaj(x) = x + sin(x)
    čaj(x) = cos(x) - x
    export kaj
end
Main.KrNeki

```

Če želimo funkcije, ki so definirane v modulu `ImeModula`, uporabiti izven modula, moramo modul naložiti z `using ImeModula`. Funkcije, ki so izvozene z ukazom `export ime_funkcije` lahko kličemo kar po imenu, ostalim funkcijam pa moramo dodati ime modula kot predpono. Modulom, ki niso del paketa in so definirani lokalno, moramo dodati piko, ko jih naložimo:

```

julia> using .KrNeki

julia> kaj(1)
1.8414709848078965

julia> KrNeki.čaj(1)
-0.45969769413186023

```

Modul lahko naložimo tudi z ukazom `import ImeModula`. V tem primeru moramo vsem funkcijam iz modula dodati ime modula in piko kot predpono.

### 1.1.6 Paketi

Nabor funkcij, ki so na voljo v Juliji, je omejen, zato pogosto uporabimo knjižnice, ki vsebujejo dodatne funkcije. Knjižnica funkcij v Juliji se imenuje `paket`. Funkcije v paketu so združene v modul, ki ima isto ime kot paket.

Julia ima vgrajen upravljalnik s paketi, ki omogoča dostop do paketov, ki so del Julije, kot tudi tistih, ki jih prispevajo uporabniki. Poglejmo si primer, kako uporabiti ukaz `norm`, ki izračuna različne norme vektorjev in matrik. Ukaz `norm` ni del osnovnega nabora funkcij, ampak je del modula `LinearAlgebra`, ki je že vključen v program Julia. Če želimo uporabiti `norm`, moramo najprej uvoziti funkcije iz modula `LinearAlgebra` z ukazom `using LinearAlgebra`:

```
julia> norm([1, 2, 3]
ERROR: UndefVarError: `norm` not defined

julia> using LinearAlgebra
julia> norm([1, 2, 3])
3.7416573867739413
```

Če želimo uporabiti pakete, ki niso del osnovnega jezika Julia, jih moramo prenesti z interneta. Za to uporabimo modul `Pkg`. Paketom je namenjen poseben paketni način vnosa v ukazni zanki. Do paketnega načina pridemo, če za pozivnik vnesemo znak `[`.

#### Različni načini ukazne zanke

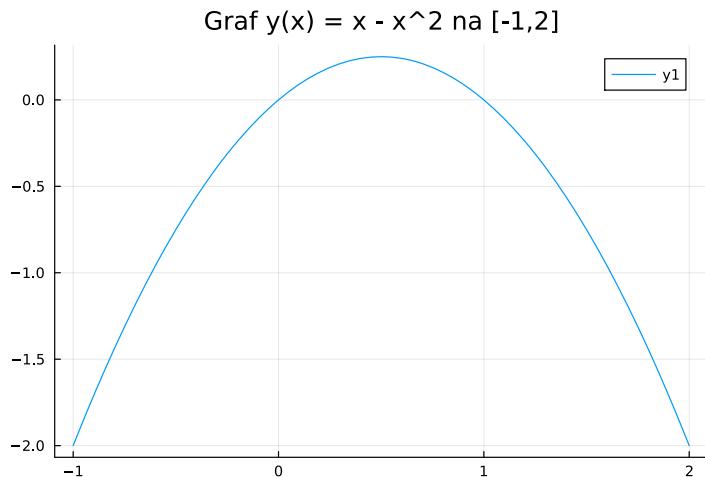
Julia ukazna zanka (REPL) pozna več načinov, ki so namenjeni različnim opravilom.

- Osnovni način s pozivom `julia>` je namenjen vnosu kode v Juliji.
- Paketni način s pozivom `pkg>` je namenjen upravljanju s paketi. V paketni način pridemo, če vnesemo znak `[`.
- Način za pomoč s pozivom `help?>` je namenjen pomoči. V način za pomoč pridemo z znakom `?`.
- Lupinski način s pozivom `shell>` je namenjen izvajanju ukazov v sistemski lupini. V lupinski način vstopimo z znakom `;`.
- Iz posebnih načinov pridemo nazaj v osnovni način s pritiskom na vračalko(`✉`).

Za primer si oglejmo, kako namestiti knjižnico za ustvarjanje slik in grafov `Plots.jl`. Najprej aktiviramo paketni način z vnosom znaka `[` za pozivnikom. Nato paket dodamo z ukazom `add`.

```
(@v1.10) pkg> add Plots
...
julia> using Plots # naložimo modul s funkcijami iz paketa
julia> plot(x -> x - x^2, -1, 2, title="Graf y(x) = x - x^2 na [-1,2]")

```



## 1.1.7 Datoteke s kodo

Kodo lahko zapišemo tudi v datoteke. Vnašanje ukazov v interaktivni zanki je uporabno za preproste ukaze, na primer namesto kalkulatorja, za resnejše delo pa je bolje kodo shraniti v datoteke. Praviloma imajo datoteke s kodo v jeziku Julia končnico `.jl`.

Napišimo preprost program. Ukaze, ki smo jih vnesli doslej, shranimo v datoteko z imenom `0luvod.jl`. Ukaze iz datoteke poženemo z ukazom `include` v ukazni zanki:

```
julia> include("0luvod.jl")
```

ali pa v lupini operacijskega sistema:

```
$ julia 0luvod.jl
```

### Urejevalniki in programska okolja za Julio

Za lažje delo z datotekami s kodo potrebujemo dober urejevalnik besedila, ki je namenjen programiranju. Če še nimate priljubljenega urejevalnika, priporočam [VS Code](#) in [razširitev za Julio](#).

Če odprete datoteko s kodo v urejevalniku VS Code, lahko s kombinacijo tipk `Ctrl + Enter` posamezno vrstico kode pošljemo v ukazno zanko za Julio, da se izvede. Na ta način združimo prednosti interaktivnega dela in zapisovanja kode v datoteke `.jl`.

Priporočam, da večino kode napišete v datoteke. V nadaljevanju bomo spoznali, kako organizirati datoteke v projekte in pakete tako, da lahko kodo uporabimo na več mestih.

## 1.2 Avtomatsko posodabljanje kode

Ko uporabimo kodo iz datoteke v interaktivni zanki, je treba ob vsaki spremembi datoteko ponovno naložiti z ukazom `include`. Paket [Revise.jl](#) poskrbi za to, da se nalaganje zgodi avtomatično vsakič, ko se datoteke spremenijo. Zato najprej namestimo paket Revise in poskrbimo, da se zažene ob vsakem zagonu interaktivne zanke.

Naslednji ukazi namestijo paket Revise, ustvarijo mapo `$HOME/.julia/config` in datoteko `startup.jl`, ki naloži paket Revise in se izvede ob vsakem zagonu programa julia:

```
julia> # pritisnemo ], da pridemo v paketni način
(@v1.10) pkg> add Revise
julia> startup = """
try
    using Revise
catch e
    @warn "Error initializing Revise" exception=(e, catch_backtrace())
end
"""
...
julia> path = homedir() * "./.julia/config"
julia> mkdir(path)
julia> write(path * "/startup.jl", startup) # zapišemo startup.jl
```

Okolje za delo z Julio je pripravljeno.

### 1.3 Priprava korenske mape

Programe, ki jih bomo napisali v nadaljevanju, bomo hranili v mapi `nummat`. Ustvarimo jo z ukazom:

```
$ mkdir nummat
```

Korenska mapa bo služila kot [projektno okolje](#), v katerem bodo zabeleženi vsi paketi, ki jih bomo potrebovali.

```
$ cd nummat
$ julia

julia> # s pritiskom na ] vključimo paketni način
(@v1.10) pkg> activate . # pripravimo projektno okolje v korenski mapi
(nummat) pkg>
```

Zgornji ukaz ustvari datoteko `Project.toml` in pripravi novo projektno okolje v mapi `nummat`.

#### Projektno okolje v Juliji

Projektno okolje je mapa, ki vsebuje datoteko `Project.toml` z informacijami o paketih in zahtevanih različicah paketov. Projektno okolje aktiviramo z ukazom `Pkg.activate("pot/do/mape/z/okoljem")` oziroma v paketnem načinu z:

```
(@v1.10) pkg> activate pot/do/mape/z/okoljem
```

Uporaba projektnega okolja delno rešuje problem [ponovljivosti](#), ki ga najlepše ilustriramo z izjavo „Na mojem računalniku pa koda dela!“. Projektno okolje namreč vsebuje tudi datoteko `Manifest.toml`, ki hrani različice in kontrolne vsote za pakete iz `Project.toml` in vse njihove odvisnosti. Ta informacija omogoča, da Julia naloži vedno iste različice vseh odvisnosti, kot v času, ko je bila datoteka `Manifest.toml` zadnjič posodobljena.

Projektna okolja v Juliji so podobna [virtualnim okoljem v Pythonu](#).

Projektnemu okolju dodamo pakete, ki jih bomo rabili v nadaljevanju. Zaenkrat je to le paket `Plots.jl`, ki ga uporabljam za risanje grafov:

```
(nummat) pkg> add Plots
```

Datoteka `Project.toml` vsebuje le ime paketa `Plots` in identifikacijski niz:

```
[deps]
Plots = "91a5bcdd-55d7-5caf-9e0b-520d859cae80"
```

Točna verzija paketa `Plots` in vsi paketi, ki jih potrebuje, so zabeleženi v datoteki `Manifest.toml`.

## 1.4 Vodenje različic s programom Git

Za vodenje različic priporočam uporabo programa [Git](#). V nadaljevanju bomo opisali, kako v korenški mapi `nummat` pripraviti Git repozitorij in vpisati datoteke, ki smo jih do sedaj ustvarili.

### Sistem za vodenje različic Git

[Git](#) je sistem za vodenje različic, ki je postal *de facto* standard v razvoju programske opreme in tudi drugod, kjer se dela z besedilnimi datotekami. Priporočam, da si bralec ustvari svoj Git repozitorij, kjer si uredi kodo in zapiske, ki jo bo napisal pri spremeljanju te knjige.

Git repozitorij lahko hranimo zgolj lokalno na lastnem računalniku, lahko pa ga repliciramo na lastnem strežniku ali na enem od javnih spletnih skladišč programske kode, na primer [Github](#) ali [Gitlab](#).

Z naslednjim ukazom v mapi `nummat` ustvarimo repozitorij za `git` in registriramo novo ustvarjene datoteke.

```
$ git init .
$ git add .
$ git commit -m "Začetni vpis"
```

Z ukazoma `git status` in `git diff` lahko pregledamo, kaj se je spremenilo od zadnjega vpisa. Ko smo zadovoljni s spremembami, jih zabeležimo z ukazoma `git add` in `git commit`. Priporočamo redno uporabo ukaza `git commit`. Pogosti vpisi namreč precej olajšajo nadzor nad spremembami kode in spodbujajo k razdelitvi dela na majhne zaključene probleme, ki so lažje obvladljivi.

## 1.5 Priprava paketa za vajo

Ob začetku vsake vaje bomo v korenški mapi (`nummat`) najprej ustvarili mapo oziroma [paket](#), v katerem bo shranjena koda za določeno vajo. S ponavljanjem postopka priprave paketa za vsako vajo posebej se bomo naučili, kako hitro začeti s projektom. Obenem bomo optimizirali potek dela in odpravili ozka grla v postopkih priprave projekta. Ponavljanje vedno istih postopkov nas prisili, da postopke kar se da poenostavimo in ponavljača se opravila avtomatiziramo. Na dolgi rok se tako lahko bolj posvečamo dejanskemu reševanju problemov.

Za vajo bomo ustvarili paket `Vaja01`, s katerim bomo narisali [Geronovo lemniskato](#).

V mapi `nummat` ustvarimo paket `Vaja01`, v katerega bomo shranili kodo. Nov paket ustvarimo v paketenem načinu z ukazom `generate`:

```
$ cd nummat
$ julia

julia> # pritisnemo ] za vstop v paketni način
(@v1.10) pkg> generate Vaja01
```

Ukaz `generate` ustvari mapo `Vaja01` z osnovno strukturo [paketa v Juliji](#):

```
$ tree Vaja01
Vaja01
├── Project.toml
└── src
    └── Vaja01.jl

1 directory, 2 files
```

Paket `Vaja01` nato dodamo v projektno okolje v korenski mapi `nummat`, da bomo lahko kodo iz paketa uporabili v programih in ukazni zanki:

```
(@v1.10) pkg> activate .
(nummat) pkg> develop ./Vaja01 # paket dodamo projektnemu okolju
```

#### Za obsežnejši projekti uporabite šablone

Za obsežnejši projekt ali projekt, ki ga želite objaviti, je bolje uporabiti že pripravljene šablone [PkgTemplates](#) ali [PkgSkeleton](#). Zavoljo enostavnosti bomo v sklopu te knjige projekte ustvarjali s `Pkg.generate`.

Osnovna struktura paketa je pripravljena. Paketu bomo v nadaljevanju dodali še:

- kodo (Poglavlje 1.6),
- teste (Poglavlje 1.7) in
- dokumentacijo (Poglavlje 1.8).

## 1.6 Koda

Ko je mapa s paketom `Vaja01` pripravljena, lahko začnemo. Napisali bomo funkcije, ki izračunajo koordinate [Geronove lemniskate](#):

$$x(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad y(t) = 2 \frac{t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}. \quad (1.1)$$

V urejevalniku odpremo datoteko `Vaja01/src/Vaja01.jl` in vanjo shranimo definiciji:

```
module Vaja01

"""Izračunaj `x` kordinato Geronove lemniskate."""
lemniskata_x(t) = (t^2 - 1) / (t^2 + 1)
"""Izračunaj `y` kordinato Geronove lemniskate."""
lemniskata_y(t) = 2t * (t^2 - 1) / (t^2 + 1)^2

# izvozimo imena funkcij, da so dostopna brez predpone `Vaja01`
export lemniskata_x, lemniskata_y
end # module Vaja01
```

Program 1: Definicije funkcij v paketu `Vaja01`

Funkcije iz datoteke `Vaja01/src/Vaja01.jl` lahko uvozimo z ukazom `using Vaja01`, če smo paket `Vaja01` dodali v projektno okolje (`Project.toml`). V mapo `src` sodijo splošno uporabne funkcije, ki jih želimo uporabiti v drugih programih. V interaktivni zanki lahko sedaj pokličemo novo definirani funkciji:

```
julia> using Vaja01
julia> lemniskata_x(1.2)
0.180327868852459
```

V datoteko `Vaja01/doc/01uvod.jl` bomo zapisali preprost program, ki uporabi kodo iz paketa `Vaja01` in nariše lemniskato:

```
using Vaja01
# Krivuljo narišemo tako, da koordinati tabeliramo za veliko število parametrov.
t = range(-5, 5, 300) # generiramo zaporedje 300 vrednosti na [-5, 5]
x = lemniskata_x.(t) # funkcijo apliciramo na elemente zaporedja
y = lemniskata_y.(t) # tako da imenu funkcije dodamo .
# Za risanje grafov uporabimo paket `Plots`.
using Plots
plot(x, y, label=false, title="Geronova lemniskata")
```

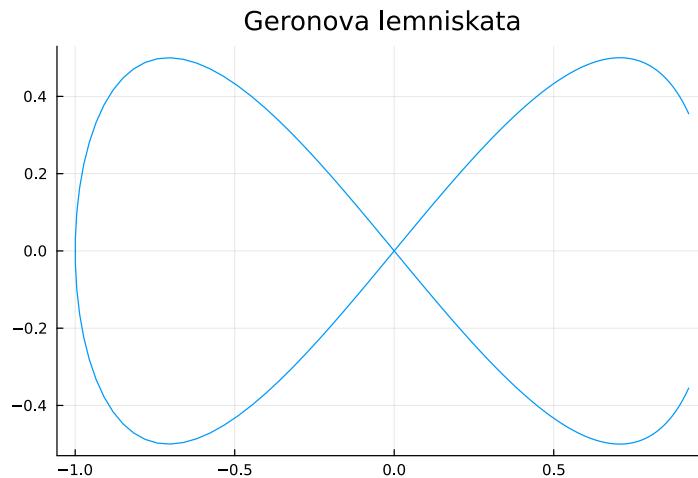
Program `01uvod.jl` poženemo z ukazom:

```
julia> include("Vaja01/doc/01uvod.jl")
```

#### Poganjanje ukaz za ukazom v VS Code

Če uporabljate urejevalnik [VS Code](#) in [razširitev za Julio](#), lahko ukaze iz programa poganjate vrstico za vrstico kar iz urejevalnika. Če pritisnete kombinacijo tipk `Shift + Enter`, se bo izvedla vrstica, v kateri je trenutno kazalka.

Rezultat je slika lemniskate.



Slika 2: Geronova lemniskata

## 1.7 Testi

Naslednji korak je, da dodamo avtomatske teste, s katerimi preizkusimo pravilnost kode, ki smo je napisali v prejšnjem poglavju. Avtomatski test je preprost program, ki pokliče določeno funkcijo in preveri rezultat.

### Avtomatsko testiranje programov

Pomembno je, da pravilnost programov preverimo. Najlažje to naredimo „na roke“, tako da program poženemo in preverimo rezultat. Testiranje „na roke“ ima veliko pomankljivosti. Zahteva veliko časa, je lahko nekonsistentno in je dovezetno za človeške napake.

Alternativa ročnemu testiranju programov so avtomatski testi. To so preprosti programi, ki izvedejo testirani program in rezultate preverijo. Avtomatski testi so pomemben del [agilnega razvoja programske opreme](#) in omogočajo automatizacijo procesov razvoja programske opreme, ki se imenuje [nenehna integracija](#).

Uporabili bomo paket `Test`, ki olajša pisanje testov. Vstopna točka za teste je datoteka `test/runtests.jl`. Uporabili bomo makroje `@test` in `@testset` iz paketa `Test`.

V datoteko `test/runtests.jl` dodamo teste za obe koordinatni funkciji, ki primerjajo izračunane vrednosti s pravimi vrednostmi, ki smo jih izračunali „na roke“:

```
using Vaja01, Test

@testset "Koordinata x" begin
    @test lemniskata_x(1.0) ≈ 0.0
    @test lemniskata_x(2.0) ≈ 3 / 5
end

@testset "Koordinata y" begin
    @test lemniskata_y(1.0) ≈ 0.0
    @test lemniskata_y(2.0) ≈ 12 / 25
end
```

Program 3: Rezultat funkcij primerjamo s pravilno vrednostjo

### Primerjava števil s plavajočo vejico

Pri računanju s števili s plavajočo vejico se izogibajmo primerjanju števil z operatorjem `==`, ki števili primerja bit po bit. Pri izračunih, v katerih nastopajo števila s plavajočo vejico, pride do zaokrožitvenih napak. Zato se različni načini izračuna za isto število praviloma razlikujejo na zadnjih decimalkah. Na primer izraz `asin(sin(pi/4)) - pi/4` ne vrne točne ničle ampak vrednost `-1.1102230246251565e-16`, ki pa je zelo majhno število. Za približno primerjavo dveh vrednosti `a` in `b` zato uporabimo izraz

$$|a - b| < \varepsilon, \quad (1.2)$$

kjer je  $\varepsilon$  večji od pričakovane zaokrožitvene napake. V Juliji lahko za približno primerjavo števil in vektorjev uporabimo operator `≈`, ki je alias za funkcijo `isapprox`.

Preden lahko poženemo teste, moramo ustvariti testno okolje. Sledimo [priporočilom za testiranje paketov](#). V mapi `Vaja01/test` ustvarimo novo okolje in dodamo paket `Test`.

```
(@v1.10) pkg> activate Vaja01/test
(test) pkg> add Test
(test) pkg> activate .
```

Teste poženemo tako, da v paketnem načinu poženemo ukaz `test Vaja01`.

```
(nummat) pkg> test Vaja01
Testing Vaja01
    Testing Running tests
    ...
    ...
Test Summary: | Pass  Total  Time
Koordinata x |    2      2  0.1s
Test Summary: | Pass  Total  Time
Koordinata y |    2      2  0.0s
    Testing Vaja01 tests passed
```

## 1.8 Dokumentacija

Dokumentacija programske kode je sestavljena iz različnih besedil in drugih virov, npr. videov, ki so namenjeni uporabnikom in razvijalcem programa ali knjižnice. Dokumentacija vključuje komentarje v kodi, navodila za namestitev in uporabo programa ter druge vire z razlagami ozadja, teorije in drugih zadev, povezanih s projektom. Dobra dokumentacija lahko veliko pripomore k uspehu določenega programa. To še posebej velja za knjižnice.

Slabo dokumentirane kode ne želi nihče uporabljati. Tudi če vemo, da kode ne bo uporabljal nihče drug razen nas samih, bodimo prijazni do samega sebe v prihodnosti in pišimo dobro dokumentacijo.

V tej knjigi bomo pisali tri vrste dokumentacije:

- dokumentacijo za posamezne funkcije v sami kodi,
- navodila za uporabnika v datoteki README.md,
- poročilo v formatu PDF.

### Zakaj format PDF

Izbira formata PDF je mogoče presenetljiva za pisanje dokumentacije programske kode. V praksi so precej uporabnejše HTML strani. Dokumentacija v obliki HTML strani, ki se generira avtomatično v procesu [nenehne integracije](#), je postala *de facto* standard. V kontekstu popravljanja domačih nalog in poročil za vaje pa ima format PDF še vedno prednosti, saj ga je lažje pregledovati in popravljati.

### 1.8.1 Dokumentacija funkcij in tipov

Funkcije in podatkovne tipe v Juliji dokumentiramo tako, da pred definicijo dodamo niz z opisom funkcije, kot smo to naredili v programu Program 1. Več o tem si lahko preberete [v poglavju o dokumentaciji priročnika za Julijo](#).

### 1.8.2 README dokument

Dokument README (preberi me) je namenjen najbolj osnovnim informacijam o paketu. Dokument je vstopna točka za dokumentacijo in navadno vsebuje:

- kratek opis projekta,
- povezavo na dokumentacijo,
- navodila za osnovno uporabo in
- navodila za namestitev.

## # Vzorčni projekt za vajo

Avtor: Martin Vuk <[martin.vuk@fri.uni-lj.si](mailto:martin.vuk@fri.uni-lj.si)>

Preprost paket, ki definira koordinatne funkcije [Geronove lemniskate]([https://sl.wikipedia.org/wiki/Geronova\\_lemniskata](https://sl.wikipedia.org/wiki/Geronova_lemniskata)). Primer uporabe je opisan v programu [01uvod.jl]([doc/01uvod.jl](#)), ki ga poženemo z ukazom

```
```jl
include("Vaja01/doc/01uvod.jl")
```
v interaktivni zanki Julije.
```

### ## Testi

Teste poženemo z ukazom:

```
```
julia --project=Vaja01 -e "import Pkg; Pkg.test()"
```
```

### ## Poročilo PDF

Poročilo pripravimo z ukazom:

```
```
julia --project=@. Vaja01/doc/makedocs.jl
```
```

Program 4: README.md vsebuje osnove informacije o projektu

### 1.8.3 PDF poročilo

V nadaljevanju bomo opisali, kako poročilo pripraviti s paketom [Weave.jl](#). Paket Weave.jl omogoča mešanje besedila in programske kode v enem dokumentu: [literarnemu programu](#), kot ga je opisal D. E. Knuth ([4]). Za pisanje besedila bomo uporabili format [Markdown](#), ki ga bomo dodali kot komentarje v kodi.

Za generiranje PDF dokumentov je potrebno namestiti [TeX/LaTeX](#). Priporočam namestitev [TinyTeX](#) ali [TeX Live](#), ki pa zasede več prostora na disku. Po [namestitvi](#) programa TinyTeX moramo dodati še nekaj LaTeX paketov, ki jih potrebuje paket Weave. V terminalu izvedemo naslednji ukaz

```
$ tlmgr install microtype upquote minted
```

Poročilo pripravimo v obliki literarnega programa. Uporabili bom kar datoteko `Vaja01/doc/01uvod.jl`, s katero smo pripravili sliko. V datoteko dodamo besedilo v obliki komentarjev. Če želimo, da se komentarji uporabijo kot besedilo v formatu [Markdown](#), uporabimo `#'`. Koda in navadni komentarji se v poročilu izpišejo nespremenjeni.

```

#' # Geronova lemniskata
#' Komentarji, ki se začnejo z `#`' se uporabijo kot Markdown in
#' v PDF dokumentu nastopajo kot besedilo.
using Vaja01
# Krivuljo narišemo tako, da koordinati tabeliramo za veliko število parametrov.
t = range(-5, 5, 300) # generiramo zaporedje 300 vrednosti na [-5, 5]
x = lemniskata_x.(t) # funkcijo apliciramo na elemente zaporedja
y = lemniskata_y.(t) # tako da imenu funkcije dodamo .
# Za risanje grafov uporabimo paket `Plots`.
using Plots
plot(x, y, label=false, title="Geronova lemniskata")
#' Zadnji rezultat pred besedilom označenim z `#`' se vstavi v dokument.
#' Če je rezultat graf, se v dokument vstavi slika z grafom.

```

Program 5: Vrstice, ki se začnejo z znakoma '#', so v formatu Markdown

Poročilo pripravimo z ukazom `Weave.weave`. Ustvarimo program `Vaja01/doc/makedocs.jl`, ki pripravi pdf dokument:

```

using Weave
# Poročilo generiramo z ukazom `Weave.weave`
Weave.weave("Vaja01/doc/01uvod.jl",
doctype="minted2pdf", out_path="Vaja01/pdf")

```

Program 6: Program za pripravo PDF dokumenta

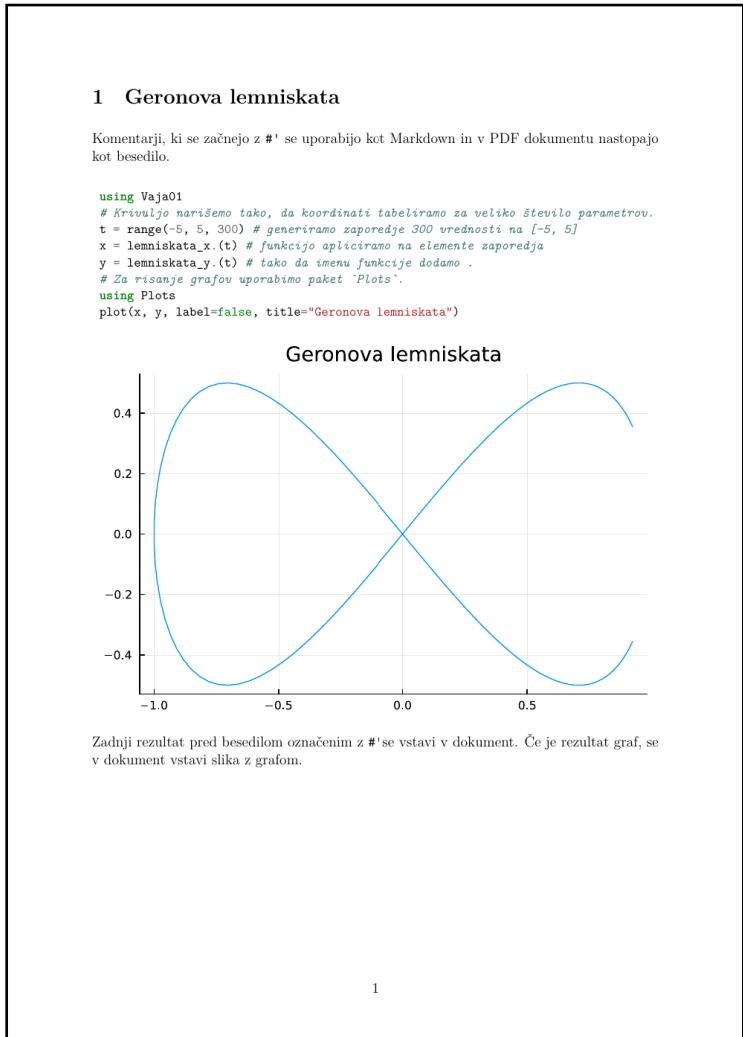
Program poženemo z ukazom `include("Vaja01/doc/makedocs.jl")` v Juliji. Preden poženemo program `makedocs.jl`, moramo projektnemu okolju `nummat` dodati paket `Weave.jl`.

```

(nummat) pkg> add Weave
julia> include("Vaja01/doc/makedocs.jl")

```

Poročilo se shrani v datoteko `Vaja01/pdf/01uvod.pdf`.



1

Slika 3: Poročilo v PDF formatu

#### Alternativni paketi za pripravo PDF dokumentov

Poleg paketa Weave.jl je na voljo še nekaj programov, ki so primerni za pripravo PDF dokumentov s programi v Juliji:

- [IJulia](#),
- [Literate.jl](#) in
- [Quadro](#).

Če potrebujemo več nadzora pri pripravi PDF dokumenta, priporočam uporabo naslednjih programov:

- [TeX/LaTeX](#),
- [pandoc](#),
- [AsciiDoctor](#),
- [Typst](#).

### Povezave na temo pisanja dokumentacije

- Pisanje dokumentacije v jeziku Julia.
- Priporočila za stil za programski jezik Julia.
- Documenter.jl je najbolj razširjen paket za pripravo dokumentacije v Julii.
- Diátaxis je sistematičen pristop k pisanju dokumentacije.
- Dokumentacija kot koda je ime za način dela, pri katerem z dokumentacijo ravnamo na enak način kot s kodo.

## 1.9 Zaključek

Ustvarili smo svoj prvi paket, ki vsebuje kodo, avtomatske teste in dokumentacijo. Mapa Vaja01 bi morala imeti naslednjo strukturo:

```
$ tree Vaja01
Vaja01
├── Manifest.toml
├── Project.toml
├── README.md
└── doc
    ├── 01uvod.jl
    └── makedocs.jl
└── src
    └── Vaja01.jl
└── test
    ├── Manifest.toml
    ├── Project.toml
    └── runtests.jl
```

Preden nadaljujete, ponovno preverite, če vse deluje tako, kot bi moralo. V Juliji aktivirajte projektno okolje:

```
julia> # pritisnite ] za vstop v paketni način
(@v1.10) pkg> activate .
```

Nato najprej poženemo teste:

```
(nummat) pkg> test Vaja01
...
Testing Vaja01 tests passed
```

Na koncu pa poženemo še program 01uvod.jl:

```
julia> include("Vaja01/doc/01uvod.jl")
```

in pripravimo poročilo:

```
julia> include("Vaja01/doc/makedocs.jl")
```

Priporočam, da si pred branjem naslednjih poglavij vzamete čas in poskrbite, da se zgornji ukazi izvedejo brez napak.

## 2 Računanje kvadratnega korena

Računalniški procesorji navadno implementirajo le osnovne številske operacije: seštevanje, množenje in deljenje. Za računanje drugih matematičnih funkcij mora nekdo napisati program. Večina programskih jezikov vsebuje implementacijo elementarnih funkcij v standardni knjižnici. V tej vaji si bomo ogledali, kako implementirati korenko funkcijo.

### Implementacija elementarnih funkcij v Juliji

Lokacijo metod, ki računajo določeno funkcijo, lahko dobite z ukazoma `methods` in `@which`. Tako bo ukaz `methods(sqrt)` izpisal implementacije kvadratnega korena za vse podatkovne tipe, ki jih Julia podpira. Ukaz `@which(sqrt(2.0))` pa razkrije metodo, ki računa koren za vrednost `2.0`, to je za števila s plavajočo vejico.

### 2.1 Naloga

Napiši funkcijo `y = koren(x)`, ki bo izračunala približek za kvadratni koren števila `x`. Poskrbi, da bo rezultat pravilen na 10 decimalnih mest in da bo časovna zahtevnost neodvisna od argumenta `x`.

- Zapiši enačbo, ki ji zadošča kvadratni koren.
- Uporabi [Newtonovo metodo](#) in izpelji [Heronovo rekurzivno formulo](#) za računanje kvadratnega korena.
- Kako je konvergenca odvisna od vrednosti `x`?
- Nariši graf potrebnega števila korakov v odvisnosti od argumenta `x`.
- Uporabi lastnosti [zapisa s plavajočo vejico](#) in izpelji formulo za približno vrednost korena, ki uporabi eksponent (funkcija `exponent` v Juliji).
- Implementiraj funkcijo `koren(x)`, tako da je časovna zahtevnost neodvisna od argumenta `x`. Grafično preveri, ali funkcija dosega zahtevano natančnost za poljubne vrednosti argumenta `x`.

Preden se lotimo reševanja, ustvarimo projekt za trenutno vajo in ga dodamo v delovno okolje.

```
(nummat) pkg> generate Vaja02
(nummat) pkg> develop Vaja02/
```

Tako bomo imeli v delovnem okolju dostop do vseh funkcij, ki jih bomo definirali v paketu `Vaja02`.

### 2.2 Izbira algoritma

Z računanjem kvadratnega korena so se ukvarjali že pred 3500 leti v Babilonu. O tem si lahko več preberete v [članku v reviji Presek](#). Če želimo poiskati algoritmom za računanje kvadratnega korena, se moramo najprej vprašati, kaj sploh je kvadratni koren. Kvadratni koren števila  $x$  je definiran kot pozitivna vrednost  $y$ , katere kvadrat je enak  $x$ . Število  $y$  je torej pozitivna rešitev enačbe

$$y^2 = x. \quad (2.1)$$

Da bi poiskali vrednost  $\sqrt{x}$ , moramo rešiti [nelinearno enačbo \(2.1\)](#). Za numerično reševanje nelinearnih enačb obstaja cela vrsta metod. Ena najpopularnejših metod je [Newtonova ali tangentna metoda](#), ki jo bomo uporabili tudi mi. Pri Newtonovi metodi rešitev enačbe

$$f(x) = 0 \quad (2.2)$$

poiščemo z rekurzivnim zaporedjem približkov

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.3)$$

Če zaporedje (2.3) konvergira, potem konvergira k rešitvi enačbe  $f(x) = 0$ .

Enačbo (2.1) najprej preoblikujemo v obliko, ki je primerna za reševanje z Newtonovo metodo. Prema-knemo vse člene na eno stran, da je na drugi strani nič

$$y^2 - x = 0. \quad (2.4)$$

V formulo za Newtonovo metodo vstavimo funkcijo  $f(y) = y^2 - x$  in odvod  $f'(y) = \frac{df}{dy} = 2y$ , da dobimo formulo:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - \frac{y_n^2 - x}{2y_n} = \frac{2y_n^2 - y_n^2 + x}{2y_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{y_n^2 + x}{y_n} \right) \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( y_n + \frac{x}{y_n} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Rekurzivno formulo (2.5) imenujemo **Haronov obrazec**. Zgornja formula določa zaporedje, ki vedno konvergira bodisi k  $\sqrt{x}$  ali  $-\sqrt{x}$ , odvisno od izbire začetnega približka. Poleg tega, da zaporedje hitro konvergira k limiti, je program izjemno preprost. Poglejmo, kako izračunamo  $\sqrt{2}$ :

```
julia> x = 1.5
      for n = 1:5
          x = (x + 2 / x) / 2
          println(x)
      end

1.4166666666666665
1.4142156862745097
1.4142135623746899
1.414213562373095
1.414213562373095
```

Vidimo, da se približki začnejo ponavljati že po 4. koraku. To pomeni, da se zaporedje ne bo več spreminjalo in smo dosegli najboljši približek, kot ga lahko predstavimo s 64 bitnimi števili s plavajočo vejico.

Napišimo zgornji program še kot funkcijo. Da lažje spremljamo, kaj se dogaja med izvajanjem kode, uporabimo makro @info iz modula **Logging**, ki je del standardne knjižnice.

```

using Logging
"""

y = koren_heron(x, x0, n)

Izračuna približek za koren števila `x` z `n` koraki Heronovega obrazca z začetnim
približkom `x0`.

"""

function koren_heron(x, x0, n)
    y = x0
    for i = 1:n
        y = (y + x / y) / 2
        @info "Približek na koraku $i je $y"
    end
    return y
end

```

Program 7: Funkcija, ki računa kvadratni koren s Heronovim obrazcem.

Preskusimo funkcijo `koren_heron` na številu 3.

```

x = koren_heron(3, 1.7, 5)
println("Koren 3 je $(x).")

[ Info: Približek na koraku 1 je 1.7323529411764707
[ Info: Približek na koraku 2 je 1.7320508339159093
[ Info: Približek na koraku 3 je 1.7320508075688776
[ Info: Približek na koraku 4 je 1.7320508075688772
[ Info: Približek na koraku 5 je 1.7320508075688772
Koren 3 je 1.7320508075688772.

```

#### *Metoda navadne iteracije in tangentna metoda*

Metoda računanja kvadratnega korena s Heronovim obrazcem je poseben primer [tangentne metode](#), ki je poseben primer [metode fiksne točke](#). Obe metodi sta si bomo podrobnejše ogledali kasneje.

## 2.3 Določitev števila korakov

Funkcija `koren_heron(x, x0, n)` ni uporabna za splošno rabo, saj mora uporabnik poznati tako začetni približek kot tudi število korakov, ki so potrebni, da dosežemo želeno natančnost. Da bi bila funkcija zares uporabna, bi morala sama izbrati začetni približek in število potrebnih korakov. Najprej se bomo naučili poiskati dovolj veliko število korakov, da dosežemo želeno natančnost.

### Relativna in absolutna napaka

Kako vemo, kdaj smo dosegli želeno natančnost? Navadno nekako ocenimo napako približka in jo primerjamo z želeno natančnostjo. To lahko storimo na dva načina, tako da:

- preverimo, ali je absolutna napaka manjša od **absolutne tolerance** ali
- preverimo, ali je relativna napaka manjša od **relativne tolerance**.

Julia za namen primerjave dveh števil ponuja funkcijo `isapprox`, ki pove ali sta dve vrednosti približno enaki. Funkcija `isapprox` omogoča relativno in absolutno primerjavo vrednosti. Primerjava števil z relativno toleranco  $\delta$  se prevede na neenačbo

$$|a - b| < \delta(\max(|a|, |b|)). \quad (2.6)$$

Ko uporabljam relativno primerjavo, moramo biti previdni, če primerjamo vrednosti s številom 0. Če je namreč eno od števil, ki ju primerjamo, enako 0 in  $\delta < 1$ , potem neenačba (2.6) nikoli ni izpolnjena.

**Število 0 nikoli ni približno enako nobenemu neničelnemu številu, če ju primerjamo z relativno toleranco.**

### Število pravilnih decimalnih mest

Ko govorimo o številu pravilnih decimalnih mest, imamo navadno v mislih število signifikantnih mest v zapisu s plavajočo vejico. V tem primeru moramo poskrbeti, da je relativna napaka dovolj majhna. Če želimo, da bo 10 signifikantnih mest pravilnih, mora biti relativna napaka manjša od  $5 \cdot 10^{-11}$ . Naslednja števila so vsa podana s 5 signifikantnimi mesti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{70} &\approx 0.014285, & \frac{1}{7} &\approx 0.14285 \\ \frac{10}{7} &\approx 1.4285, & \frac{10^{10}}{7} &\approx 1428500000. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pri iskanju kvadratnega korena lahko napako ocenimo tako, da primerjamo kvadrat približka z danim argumentom. Pri tem je treba raziskati, kako sta povezani relativni napaki približka za koren in njegova kvadrata. Naj bo  $y$  točna vrednost kvadratnega korena  $\sqrt{x}$ . Če je  $\hat{y}$  približek z relativno napako  $\delta$ , potem je  $\hat{y} = y(1 + \delta)$ . Poglejmo, kako je relativna napaka  $\delta$  povezana z relativno napako kvadrata  $\hat{y}^2$ .

$$\varepsilon = \frac{\hat{y}^2 - x}{x} = \frac{(y(1 + \delta))^2 - x}{x} = \frac{x(1 + \delta)^2 - x}{x} = (1 + \delta)^2 - 1 = 2\delta + \delta^2. \quad (2.8)$$

Pri tem smo upoštevali, da je  $\hat{y}^2 = x$ . Relativna napaka kvadrata je enaka  $\varepsilon = 2\delta + \delta^2$ . Ker je  $\delta^2 \ll \delta$ , dobimo dovolj natančno oceno, če  $\delta^2$  zanemarimo

$$\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta^2) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.9)$$

Od tod dobimo pogoj, kdaj je približek dovolj natančen. Če je

$$|\hat{y}^2 - x| < 2\delta \cdot x \quad (2.10)$$

potem velja začetna zahteva:

$$|\hat{y} - \sqrt{x}| < \delta \cdot \sqrt{x}. \quad (2.11)$$

### Ocene za napako ni vedno lahko poiskati

V primeru računanja kvadratnega korena je bila analiza napak relativno enostavna in smo lahko dobili točno oceno za relativno napako metode. Večinoma ni tako. Točne ocene za napako ni vedno lahko ali sploh mogoče poiskati. Zato pogosto v praksi napako ocenimo na podlagi različnih indicev brez zagotovila, da je ocena točna.

Pri iterativnih metodah konstruiramo zaporedje približkov  $x_n$ , ki konvergira k iskanemu številu. Razlika med dvema zaporednima približkoma  $|x_{n+1} - x_n|$  je pogosto dovolj dobra ocena za napako iterativne metode. Toda zgolj dejstvo, da je razlika med zaporednima približkoma majhna, še ne zagotavlja, da je razlika do limite prav tako majhna. Če poznamo oceno za hitrost konvergence (ozziroma odvod iteracijske funkcije), lahko izpeljemo zvezo med razliko dveh sosednjih približkov in napako metode. Vendar se v praksi pogosto zanašamo, da sta razlika sosednjih približkov in napaka sorazmerni. Problem nastane, če je konvergenca počasna.

Uporabimo pogoj (2.11) in napišemo funkcijo, ki sama določi število korakov iteracije:

```
'''  
y = koren(x, y0)
```

Izračunaj vrednost kvadratnega korena števila `x` s Heronovim obrazcem z začetnim približkom `y0`.

```
'''  
  
function koren(x, y0)  
    if x == 0.0  
        # Vrednost 0 obravnavamo posebej, saj je relativna primerjava z 0  
        # problematična  
        return 0.0  
    end  
    delta = 5e-11 # zahtevana relativna natančnost rezultata  
    maxit = 10 # 10 korakov je dovolj, če je začetni približek dober  
    for i = 1:maxit  
        y = (y0 + x / y0) / 2  
        if abs(x - y^2) <= 2 * delta * abs(x)  
            @info "Število korakov $i"  
            return y  
        end  
        y0 = y  
    end  
    throw("Iteracija ne konvergira!")  
end
```

Program 8: Metoda `koren(x, y0)`, ki avtomatsko določi število korakov iteracije

## 2.4 Izbira začetnega približka

Kako bi učinkovito izbrali dober začetni približek? Dokazati je mogoče, da rekurzivno zaporedje (2.5) konvergira ne glede na izbran začetni približek. Problem je, da je število korakov iteracije večje, dlje kot je začetni približek oddaljen od rešitve. Če želimo, da bo časovna zahtevnost funkcije neodvisna od argumenta, moramo poskrbeti, da za poljubni argument uporabimo dovolj dober začetni približek. Poskusimo lahko za začetni približek uporabiti kar samo število  $x$ . Malce boljši približek dobimo s Taylorjevem razvojem korenske funkcije okrog števila 1

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + \dots \approx \frac{1}{2} + \frac{x}{2}. \quad (2.12)$$

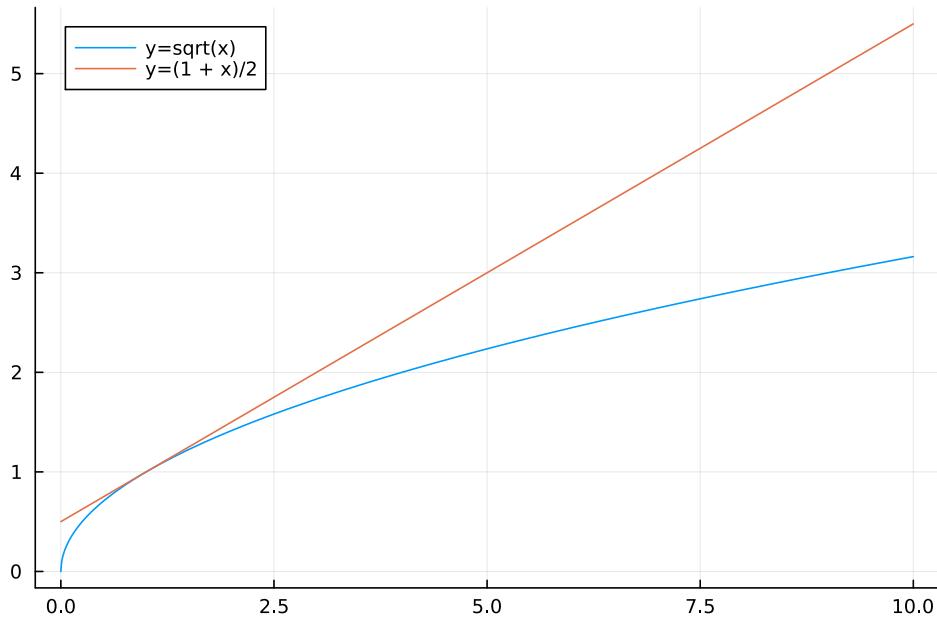
Opazimo, da za večja števila, iteracija potrebuje več korakov:

```
julia> tangenta(x) = 0.5 + x / 2
y = koren(10, tangenta(10))
y = koren(200, tangenta(200))

[ Info: Število korakov 5
[ Info: Število korakov 7
14.142135623730955
```

Začetni približek  $\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$  dobro deluje za števila blizu 1. Če isto formulo za začetni približek uporabimo na večjih številih, dobimo večjo relativno napako oziroma potrebujemo več korakov zanke, da pridemo do enake natančnosti. Na isti graf narišimo korensko funkcijo in tangento  $\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ :

```
using Plots
plot(sqrt, 0, 10, label="y=sqrt(x)")
plot!(x -> 0.5 + x / 2, 0, 10, label="y=(1 + x)/2")
```



Slika 4: Korenska funkcija in tangenta v  $\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$

Za boljši približek, si pomagamo z načinom predstavitev števil v računalniku. Realna števila predstavimo s števili s plavajočo vejico. Število je zapisano v obliki

$$x = m2^e, \quad (2.13)$$

kjer je  $1 \leq m < 2$  mantisa,  $e$  pa eksponent. Za 64 bitna števila s plavajočo vejico se za zapis mantise uporabi 53 bitov (52 bitov za decimalke, en bit pa za predznak), 11 bitov pa za eksponent (glej [IEE 754 standard](#)). Koren števila  $x$  potem izračunamo kot

$$\sqrt{x} = \sqrt{m} \cdot 2^{\frac{e}{2}}. \quad (2.14)$$

Koren mantise, ki leži na  $[1, 2)$ , približno ocenimo s tangento v  $x = 1$

$$\sqrt{m} = \frac{1}{2} + \frac{m}{2}. \quad (2.15)$$

Če eksponent delimo z 2 in upoštevamo ostanek  $e = 2d + o$ , vrednost  $\sqrt{2^e}$  zapišemo kot

$$\sqrt{2^e} \approx 2^d \cdot \begin{cases} 1; & o = 0 \\ \sqrt{2}; & o = 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Formula za približek je enaka:

$$\sqrt{x} \approx \left( \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \right) \cdot 2^d \cdot \begin{cases} 1; & o = 0 \\ \sqrt{2}; & o = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Potenco števila  $2^n$  lahko izračunamo s premikom binarnega zapisa števila 1 v levo za  $n$  mest. V Juliji za levi premik uporabimo operator `<<`, s funkcijama exponent in significand pa dobimo eksponent in mantiso števila s plavajočo vejico. Tako lahko zapišemo naslednjo funkcijo za začetni približek:

```
"""
y0 = zacetni(x)

Izračunaj začetni približek za kvadratni koren števila `x` z uporabo
eksponenta za števila s plavajočo vejico.

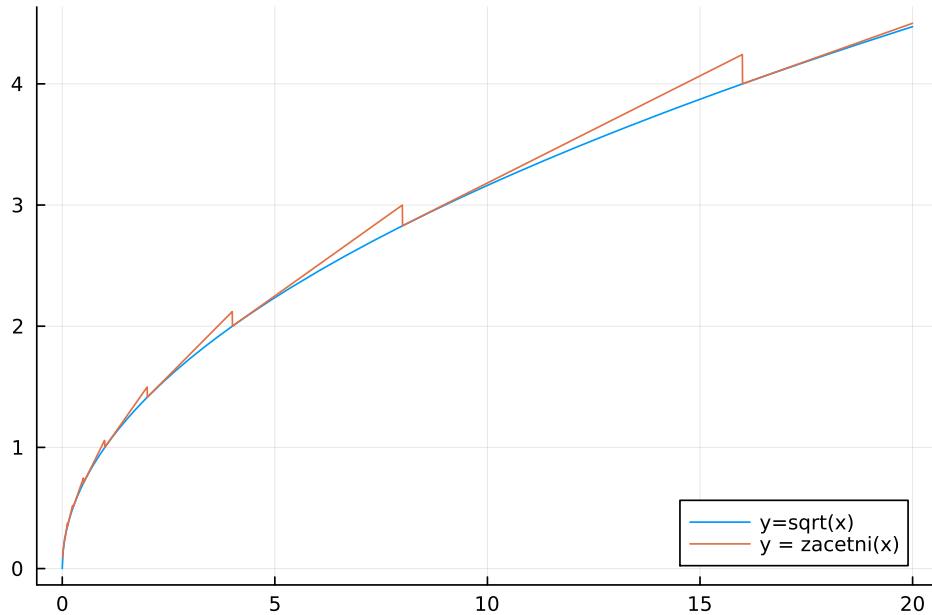
"""

function zacetni(x)
    d, ost = divrem(abs(exponent(x)), 2)
    m = significand(x) # mantisa
    koren2ost = (ost == 0) ? 1 : 1.4142135623730951 # koren(2^ost)
    koren2e = (1 << d) * koren2ost # koren(2^e)
    if x > 1
        return (0.5 + m / 2) * koren2e
    else
        return (0.5 + m / 2) / koren2e
    end
end
```

Program 9: Funkcija `zacetni(x)`, ki izračuna začetni približek

Primerjajmo izboljšano verzijo začetnega približka s pravo korensko funkcijo.

```
plot(sqrt, 0, 20, label="y=sqrt(x)")
plot!(Vaja02.zacetni, 0, 20, label="y = zacetni(x)")
```



Slika 5: Korenska funkcija in izboljšani začetni približek

## 2.5 Zaključek

Ko smo enkrat izbrali dober začetni približek, tudi Newtonova iteracija hitreje konvergira, ne glede na velikost argumenta. Tako lahko definiramo metodo `koren(x)` brez dodatnega argumenta.

```
''''
y = koren(x)
```

Izračunaj vrednost kvadratnega korena danega števila `x`.

```
''''
koren(x) = koren(x, zacetni(x))
```

Program 10: Funkcija `koren(x)`

### Julia omogoča več definicij iste funkcije

Julia uporablja posebno vrsto **polimorfizma** imenovano **večlična razdelitev** (angl. multiple dispatch). Za razliko od polmorfizma v objektno orientiranih jezikih, kjer se metoda izbere ne le na podlagi razreda objekta, ki to metodo kliče, se v Juliji metodo izbere na podlagi tipov vseh vhodnih argumentov. Ta lastnost omogoča pisanje generične kode, ki deluje za zelo različne vhodne argumente.

Večlična razdelitev omogoča, da za isto funkcijo definiramo več različic, ki se uporabijo glede na to, katere argumente podamo funkciji. Tako smo definirali dve metodi za funkcijo `koren`. Prva metoda sprejme 2 argumenta, druga pa en argument. Ko pokličemo `koren(2.0, 1.0)`, se izvede različica Program 8, ko pa pokličemo `koren(2.0)`, se izvede Program 10.

Metode, ki so definirane za neko funkcijo `fun`, lahko vidimo z ukazom `methods(fun)`. Metodo, ki se uporabi za določen klic funkcije, lahko poiščemo z makrojem `@which`, npr. `@which koren(2.0, 1.0)`.

Opazimo, da se število korakov ne spreminja več z naraščanjem argumenta, kar pomeni, da je časovna zahtevnost funkcije `koren(x)` neodvisna od izbire argumenta.

```
julia> koren(10.0), koren(200.0), koren(2e10)
[ Info: Število korakov 3
[ Info: Število korakov 3
[ Info: Število korakov 2
(3.162277660168379, 14.142135623730965, 141421.35623853415)
```

### Hitro računanje obratne vrednosti kvadratnega korena

Pri razvoju računalniških iger, ki poskušajo verno prikazati 3-dimenzionalni svet na zaslonu, se veliko uporablja normiranje vektorjev. Pri normirjanju je treba komponente vektorja deliti z normo vektorja, ki je enaka korenu vsote kvadratov komponent. Kot smo spoznali pri računanju kvadratnega korena s Heronovim obrazcem, je posebej problematično poiskati ustrezni začetni približek, ki je dovolj blizu pravi rešitvi. Tega problema so se zavedali tudi inženirji igre Quake, ki so razvili posebej zvit, skoraj magičen način za izračun funkcije  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ . Metoda uporabi posebno vrednost `0x5f3759df`, da pride do dobrega začetnega približka, nato pa še en korak [Newtonove metode](#). Več o [računanju obratne vrednosti kvadratnega korena](#).

### Kaj smo se naučili?

- Tudi za izračun preprostih funkcij potrebujemo numeričen algoritem.
- Pri iterativnih metodah je pomembna izbira dobraga začetnega približka.
- Numerični algoritmi so pogosto preprosti, vendar moramo paziti, da je napaka omejena.

## 3 Tridiagonalni sistemi

### 3.1 Naloge

- Ustvari podatkovni tip za tridiagonalno matriko ter implementiraj operacije množenja  $*$  z vektorjem in reševanja sistema  $Ax = b$  z operatorjem \.
- Za slučajni sprehod v eni dimenziji izračunaj povprečno število korakov, ki jih potrebujemo, da se od izhodišča oddaljimo za  $k$  korakov.
  - ▶ Zapiši fundamentalno matriko za [Markovsko verigo](#), ki modelira slučajni sprehod, ki se lahko odalji od izhodišča le za  $k$  korakov.
  - ▶ Reši sistem s fundamentalno matriko in vektorjem enic.
  - ▶ Povprečno število korakov oceni še z vzorčenjem velikega števila simulacij slučajnega sprehoda.

Primerjaj oceno z rešitvijo sistema.

### 3.2 Tridiagonalne matrike

Matrika je *tridiagonalna*, če ima neničelne elemente le na glavni diagonali in na dveh najbližjih diagonalah. Primer  $5 \times 5$  tridiagonalne matrike:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Elementi tridiagonalne matrike, za katere se indeksa razlikujeta za več kot 1, so vsi enaki 0:

$$|i - j| > 1 \Rightarrow a_{ij} = 0. \quad (3.2)$$

Z implementacijo posebnega podatkovnega tipa za tridiagonalno matriko lahko prihranimo tako na prostoru kot tudi pri časovni zahtevnosti algoritmov, saj jih lahko prilagodimo posebnim lastnostim tridiagonalnih matrik.

Preden se lotimo naloge, ustvarimo nov paket `Vaja03`, kamor bomo postavili kodo:

```
(nummat) pkg> generate Vaja03
(nummat) pkg> develop Vaja03/
```

Podatkovni tip za tridiagonalne matrike imenujemo `Tridiag` in vsebuje tri polja z elementi na posameznih diagonalah. Definicijo postavimo v `Vaja03/src/Vaja03.jl`:

```

"""
Tridiag(sd, d, zd)

Sestavi tridiagonalno matriko iz prve poddiagonale `sd`, glavne diagonale `d`
in prve naddiagonale `zd`. Rezultat je tipa `Tridiag`, ki hrani le neničelne
elemente matrike in omogoča učinkovito reševanje tridiagonalnega sistema
linearnih enačb. Dolžina vektorjev `sd` in `zd` mora biti za ena manj od dolžine
vektorja `d`.
"""

struct Tridiag
    sd::Vector # spodnja poddiagonala
    d::Vector # glavna diagonala
    zd::Vector # zgornja naddiagonala
    function Tridiag(sd, d, zd)
        if (length(sd) != length(d) - 1) || (length(zd) != length(d) - 1)
            error("Napačne dimenzijs diagonali.")
        end
        new(sd, d, zd)
    end
end
export Tridiag

```

Zgornja definicija omogoča, da ustvarimo nove objekte tipa `Tridiag`

```
julia> using Vaja03
julia> Tridiag([3, 6, 5, 2], [1, 4, 7, 4, 1], [2, 5, 6, 3])
```

#### Preverjanje skladnosti polj v objektu

V zgornji definiciji `Tridiag` smo poleg deklaracije polj dodali tudi **notranji konstruktor** v obliki funkcije `Tridiag`. Vemo, da mora biti dolžina vektorjev `sd` in `zd` za ena manjša od dolžine vektorja `d`. Zato je pogoj najbolje preveriti, ko ustvarimo objekt in se nam s tem v nadaljevanju ni več treba ukvarjati. Z notranjim konstruktorjem lahko te pogoje uveljavimo ob nastanku objekta in preprečimo ustvarjanje objektov z nekonsistentnimi podatki.

Želimo, da se matrike tipa `Tridiag` obnašajo podobno kot generične matrike vgrajenega tipa `Matrix`. Zato funkcijam, ki delajo z matrikami, dodamo specifične metode za podatkovni tip `Tridiag`. Argumentu funkcije lahko dodamo informacijo o tipu, tako da dodamo `::Tip` in na ta način definiramo specifično metodo, ki deluje le za dan podatkovni tip. Če želimo, da metoda deluje za argumente tipa `Tridiag`, argumentu dodamo `::Tridiag`. Več informacij o **tipih** in **vmesnikih**.

Implementirajmo naslednje metode specifične za tip `Tridiag`:

- `size(T::Tridiag)` vrne dimenzije matrike (Program 14),
- `getindex(T::Tridiag, i, j)` vrne element `T[i, j]` (Program 15),
- `setindex!(T::Tridiag, x, i, j)` nastavi element `T[i, j]` (Program 16) in
- `*(T::Tridiag, x::Vector)` izračuna produkt matrike `T` z vektorjem `x` (Program 17).

Za tridiagonalne matrike je časovna zahtevnost množenja matrike z vektorjem bistveno manjša kot v splošnem ( $\mathcal{O}(n)$  namesto  $\mathcal{O}(n^2)$ ).

Preden nadaljujemo, preverimo, ali so funkcije pravilno implementirane. Napišemo avtomatske teste, ki jih lahko kadarkoli poženemo. V projektu `Vaja03` ustvarimo datoteko `Vaja03/test/runtests.jl` in vanjo zapišemo kodo, ki preveri pravilnost zgoraj definiranih funkcij.

```

using Vaja03
using Test

@testset "Velikost" begin
    T = Tridiag([1, 2], [3, 4, 5], [6, 7])
    @test size(T) == (3, 3)
end

```

V paket `Vaja03` moramo dodati še paket `Test`:

```
(nummat) pkg> activate Vaja03
(Vaja03) pkg> add Test
```

Teste poženemo v paketnem načinu z ukazom `test Vaja03`:

```
(Vaja03) pkg> activate .
(nummat) pkg> test Vaja03
...
      Testing Running tests...
Test Summary: | Pass  Total  Time
Velikost     |    1      1  0.0s
```

Podobno definiramo teste še za druge funkcije. Primeri testov so v poglavju Poglavlje 3.6.1.

### 3.3 Reševanje tridiagonalnega sistema

Poiskali bomo rešitev sistema linearnih enačb  $Tx = b$ , kjer je matrika sistema  $T$  tridiagonalna. Sistem lahko rešimo z Gaussovo eliminacijo in obratnim vstavljanjem (glej učbenik [1]). Ker je v tridiagonalni matriki bistveno manj elementov, se število potrebnih operacij tako za Gaussovo eliminacijo kot za obratno vstavljanje bistveno zmanjša. Dodatno predpostavimo, da je matrika  $T$  takšna, da med eliminacijo ni treba delati delnega pivotiranja. V nasprotnem primeru se tridiagonalna oblika matrike med Gaussovo eliminacijo podre in se algoritem nekoliko zakomplcira. Za diagonalno dominantne matrike po stolpcih pri Gaussovi eliminaciji pivotiranje ni potrebno.

Časovna zahtevnost Gaussove eliminacije brez pivotiranja je za tridiagonalni sistem  $Tx = b$  linearna  $\mathcal{O}(n)$  namesto kubična  $\mathcal{O}(n^3)$ . Za obratno vstavljanje pa se časovna zahtevnost s kvadratne  $\mathcal{O}(n^2)$  zmanjša na linearno  $\mathcal{O}(n)$ .

Priredimo splošna algoritma Gaussove eliminacije in obratnega vstavljanja, da bosta upoštevala lastnosti tridiagonalnih matrik. Napišimo funkcijo \:

```
function \(T::Tridiagonal, b::Vector)
```

ki poišče rešitev sistema  $Tx = b$  (rešitev je Program 18). V datoteko `Vaja03/test/runtests.jl` dajte test, ki na primeru preveri pravilnost funkcije \.

### 3.4 Slučajni sprehod

Metodo za reševanje tridiagonalnega sistema bomo uporabili na primeru **slučajnega sprehoda** v eni dimenziji. Slučajni sprehod je vrsta **stohastičnega procesa**, ki ga lahko opišemo z **Markovsko verigo**

z množico stanj, ki je enako množici celih števil  $\mathbb{Z}$ . Če se na nekem koraku slučajni sprehod nahaja v stanju  $n$ , se lahko v naslednjem koraku z verjetnostjo  $p \in [0, 1]$  premakne v stanje  $n - 1$  ali z verjetnostjo  $q = 1 - p$  v stanje  $n + 1$ . Prehodne verjetnosti slučajnega sprehoda so enake:

$$\begin{aligned} P(X_{i+1} = n + 1 \mid X_i = n) &= q \\ P(X_{i+1} = n - 1 \mid X_i = n) &= p. \end{aligned} \tag{3.3}$$

### Definicija Markovske verige

Markovska veriga je zaporedje slučajnih spremenljivk

$$X_1, X_2, X_3, \dots \tag{3.4}$$

z vrednostmi v množici stanj ( $\mathbb{Z}$  za slučajni sprehod), za katere velja Markovska lastnost

$$P(X_{i+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots X_i = x_i) = P(X_{i+1} = x \mid X_i = x_i). \tag{3.5}$$

Ta pove, da je verjetnost za prehod v naslednje stanje odvisna le od prejšnjega stanja in ne od starejše zgodovine stanj. V Markovski verigi tako zgodovina, kako je proces prišel v neko stanje, ne odloča o naslednjem stanju, odloča le stanje, v katerem se proces trenutno nahaja.

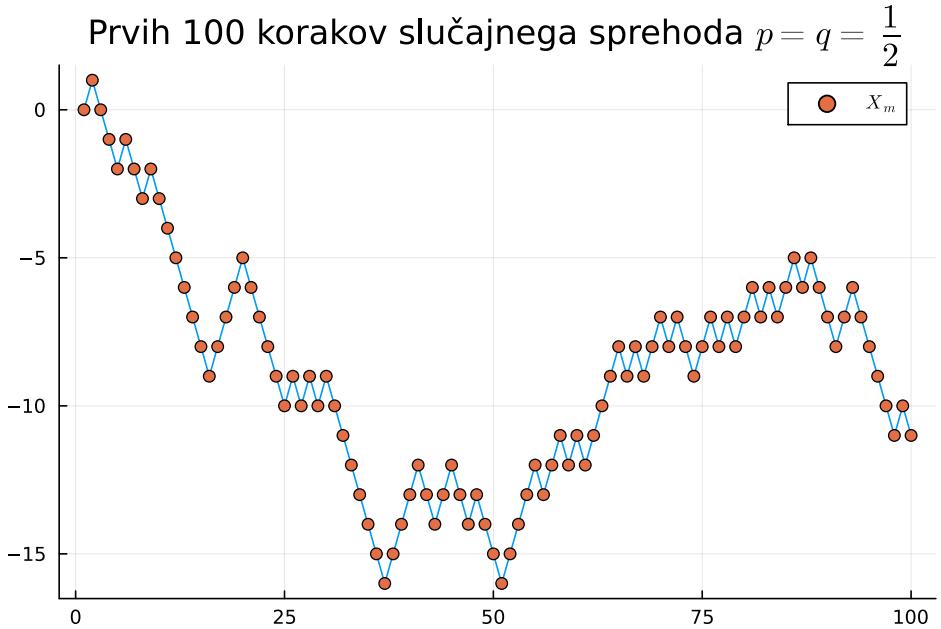
Verjetnosti  $P(X_{i+1} = x \mid X_i = x_i)$  imenujemo *prehodne verjetnosti* Markovske verige. V nadaljevanju bomo privzeli, da so prehodne verjetnosti enake za vse korake  $k$ :

$$P(X_{k+1} = x \mid X_k = y) = P(X_2 = x \mid X_1 = y). \tag{3.6}$$

Simulirajmo prvih 100 korakov slučajnega sprehoda

```
""" Simuliraj `n` korakov slučajnega sprehoda s prehodno verjetnostima `p`
    in `1-p`."""
function sprehod(p, n)
    x = zeros(n)
    for i = 1:n-1
        x[i+1] = rand() < p ? x[i] + 1 : x[i] - 1
    end
    return x
end

using Plots
x = sprehod(0.5, 100)
plot(x, label=false)
scatter!(x, title="Prvih 100 korakov slučajnega sprehoda \$p=q=\frac{1}{2}\$", label="\$X_m\$")
```



Slika 6: Simulacija slučajnega sprehoda

#### Prehodna matrika Markovske verige

Za Markovsko verigo s končno množico stanj  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , lahko prehodne verjetnosti zložimo v matriko. Brez škode lahko stanja  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  nadomestimo z naravnimi števili  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Matriko  $P$ , katere elementi so prehodne verjetnosti prehodov med stanji Markovske verige

$$p_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i), \quad (3.7)$$

imenujemo **prehodna matrika** Markovske verige. Za prehodno matriko velja, da vsi elementi ležijo na  $[0, 1]$  in da je vsota elementov po vrsticah enaka 1

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1. \quad (3.8)$$

Posledično je vektor samih enic  $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$  lastni vektor matrike  $P$  za lastno vrednost 1:

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}. \quad (3.9)$$

Prehodna matrika povsem opiše porazdelitev Markovske verige. Potence prehodne matrike  $P^m$  na primer določajo prehodne verjetnosti po  $m$  korakih:

$$P(X_m = j | X_1 = i). \quad (3.10)$$

### 3.5 Pričakovano število korakov

Poiskati želimo pričakovano število korakov, ko se slučajni sprehod prvič pojavi v stanju  $k$  ali  $-k$ . Zato bomo privzeli, da se sprehod v stanjih  $-k$  in  $k$  ustavi in se ne premakne več.

Stanje, iz katerega se veriga ne premakne več, imenujemo *absorbirajoče stanje*. Za absorbirajoče stanje  $k$  je diagonalni element prehodne matrike enak 1, vsi ostali elementi v vrstici pa 0:

$$\begin{aligned} p_{kk} &= P(X_{i+1} = k | X_i = k) = 1 \\ p_{kl} &= P(X_{i+1} = l | X_i = k) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Stanje, ki ni absorbirajoče, imenujemo *prehodno stanje*. Markovske verige, ki vsebujejo vsaj eno absorbirajoče stanje, imenujemo **absorbirajoča Markovska veriga**.

Predpostavimo lahko, da je začetno stanje enako 0. Iščemo pričakovano število korakov, ko se slučajni sprehod prvič pojavi v stanju  $k$  ali  $-k$ . Zanemarimo stanja, ki so več kot  $k$  oddaljena od izhodišča in stanji  $k$  in  $-k$  spremenimo v absorbirajoči stanji. Obravnavamo torej absorbirajočo verigo z  $2k + 1$  stanji, pri kateri sta stanji  $-k$  in  $k$  absorbirajoči, ostala stanja pa ne. Iščemo pričakovano število korakov, da iz začetnega stanja pridemo v eno od absorbirajočih stanj.

Za izračun iskane pričakovane vrednosti uporabimo **kanonično obliko prehodne matrike**.

### Kanonična oblika prehodne matrike

Če ima Markovska veriga absorbirajoča stanja, lahko prehodno matriko zapišemo v bločni obliki

$$P = \begin{pmatrix} Q & T \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

kjer vrstice  $[Q, T]$  ustrezajo prehodnim, vrstice  $[0, I]$  pa absorbirajočim stanjem. Matrika  $Q$  opisuje prehodne verjetnosti za sprehod med prehodnimi stanji, matrika  $Q^m$  pa prehodne verjetnosti po  $m$  korakih, če se sprehajamo le po prehodnih stanjih.

Vsoto vseh potenc matrike  $Q$

$$N = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m = (I - Q)^{-1} \quad (3.13)$$

imenujemo *fundamentalna matrika* absorbirajoče markovske verige. Element  $n_{ij}$  predstavlja pričakovano število obiskov stanja  $j$ , če začnemo v stanju  $i$ .

Pričakovano število korakov, da dosežemo absorbirajoče stanje iz začetnega stanja  $i$ , je  $i$ -ta komponenta produkta matrike  $N$  z vektorjem samih enic:

$$\mathbf{m} = N\mathbf{1} = (I - Q)^{-1}\mathbf{1}. \quad (3.14)$$

Če želimo poiskati pričakovano število korakov  $\mathbf{m}$ , moramo rešiti sistem linearnih enačb:

$$(I - Q)\mathbf{m} = \mathbf{1}. \quad (3.15)$$

Če nas zanima, kdaj bo sprehod prvič za  $k$  oddaljen od izhodišča, lahko začnemo v 0 in stanji  $k$  in  $-k$  proglasimo za absorpcijska stanja. Prehodna matrika, ki jo dobimo, je tridiagonalna z 0 na diagonali. Matrika  $I - Q$  je prav tako tridiagonalna z 1 na diagonali in z negativnimi verjetnostmi  $-p$  na prvi poddiagonali in  $-q = p - 1$  na prvi naddiagonali:

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -q & 0 & \dots & 0 \\ -p & 1 & -q & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -p & 1 & -q \\ 0 & \dots & 0 & -p & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Matrika  $I - Q$  je tridiagonalna in po stolpcih diagonalno dominantna, zato lahko uporabimo Gaussovo eliminacijo brez pivotiranja. Najprej napišemo funkcijo, ki zgradi matriko  $I - Q$ :

```

using Vaja03
"""
N = matrika_sprehod(k, p)

Sestavi fundamentalno matriko za slučajni sprehod, ki se konča, ko se prvič
za `k` korakov oddalji od izhodišča.
"""

matrika_sprehod(k, p) = Tridiag(-p * ones(2k - 2), ones(2k - 1), -(1 - p) * ones(2k
- 2))

```

Program 11: Sestavi tridiagonalno matriko  $I - Q$  za slučajni sprehod, ki se konča, ko se prvič oddalji za  $k$  korakov od izhodišča

Pričakovano število korakov izračunamo kot rešitev sistema  $(I - Q)\mathbf{k} = \mathbf{1}$ . Uporabimo operator \ za tridiagonalno matriko:

```

"""
Em = koraki(k, p)

Izračunaj pričakovano število korakov `Em`, ki jih potrebuje slučajni sprehod,
da doseže stanje `0` ali `2k`. Komponente vektorja `Em` vsebujejo pričakovano
število korakov, da sprehod pride v stanje `0` ali `2k`, če začne v stanju med
`1` in `2k - 1`.

koraki(k, p) = matrika_sprehod(k, p) \ ones(2k - 1)

```

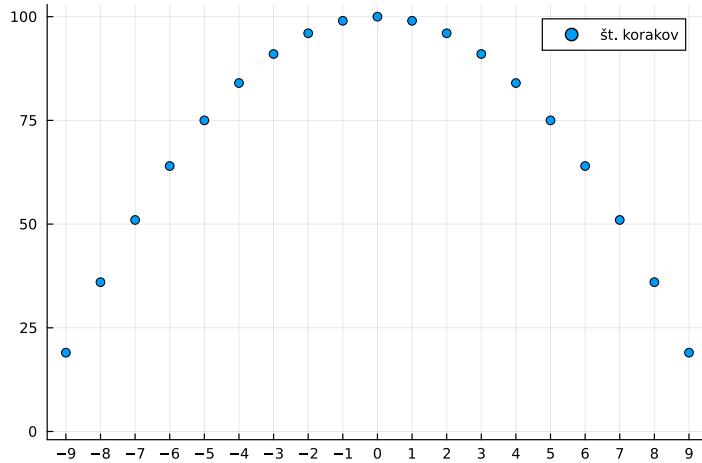
Program 12: Izračunaj vektor pričakovanih števil korakov, ki jih potrebuje slučajni sprehod, da se iz začetnega stanja med 1 in  $2k - 1$  premakne v stanje 0 ali  $2k$ .

V matriki  $Q$  so stanja označena z indeksi matrike od 1 do  $2k - 1$ . Zato stanja premaknemo za  $-k$ , dobimo stanja  $-k, -k + 1, \dots, 0, \dots, k$ . Komponente vektorja  $\mathbf{k}$  tako predstavljajo pričakovano število korakov, ki jih slučajni sprehod potrebuje, da prvič doseže stanji  $-k$  ali  $k$ , če začnemo v stanju  $i \in \{-k + 1, -k + 2, \dots, 0, 1, \dots, k - 1\}$ .

```

Em = koraki(10, 0.5)
scatter(-9:9, Em, label="št. korakov", xticks=-9:9)

```



Slika 7: Pričakovano število korakov, ko slučajni sprehod prvič doseže stanji  $-10$  ali  $10$ , v odvisnosti od začetnega stanja  $i \in \{-9, -8, \dots, -1, 0, 1, \dots, 8, 9\}$ .

Za konec se prepričajmo še s [simulacijo Monte Carlo](#), da so rešitve, ki jih dobimo kot rešitev sistema, res prave. Slučajni sprehod simuliramo z generatorjem naključnih števil in izračunamo [vzorčno povprečje](#) za število korakov  $m$ .

```

using Random

"""
x1 = naslednje_stanje(p, x0)

Simuliraj naslednje stanje slučajnega sprehoda z naključnim generatorjem števil.

naslednje_stanje(p, x0) = x0 + (rand() < p ? -1 : 1)

"""

st_korakov = simuliraj_sprehod(k, p)

Simuliraj slučajni sprehod s prehodnima verjetnostima `p` in `1-p`.
Vrni število korakov, ki jih slučajni sprehod potrebuje, da se prvič
oddalji za `k` korakov od izhodišča.

"""

function simuliraj_sprehod(k, p, x0=0)
    koraki = 0
    while (abs(x0) < k)
        x0 = naslednje_stanje(p, x0)
        koraki += 1
    end
    koraki
end

```

Program 13: Simulacija z generatorjem naključnih števil. Vzorčno povprečje da oceno za pričakovano število korakov.

Za  $k = 10$  je pričakovano število korakov enako 100. Poglejmo, kako se rezultat ujema z vzorčnim povprečjem po velikem številu sprehodov.

```

Random.seed!(691)
n = 100_000
k, p = 10, 0.5
kp = sum([simuliraj_korake(k, p) for _ in 1:n]) / n
println("Vzorčno povprečje za vzorec velikosti $n je $kp.")

```

Vzorčno povprečje za vzorec velikosti 100000 je 100.09526

#### Kaj smo se naučili?

- Z upoštevanjem lastnosti linearnih sistemov lahko prihranimo veliko prostora in časa.
- Linearni sistemi se pogosto pojavijo, ko rešujemo matematične probleme, čeprav na prvi pogled nimajo nobene zveze z linearno algebro.

## 3.6 Rešitve

```

# Vgrajene funkcije moramo naložiti, če jim želimo dodati nove metode.
import Base: size, getindex, setindex!, *, \
"""
size(T::Tridiag)

Vrni dimenzije tridiagonalne matrike `T`.
"""
size(T::Tridiag) = (length(T.d), length(T.d))

```

Program 14: Metoda `size` vrne dimenzije matrike

```

"""
elt = getindex(T, i, j)

Vrni element v `i`-ti vrstici in `j`-tem stolpcu tridiagonalne matrike `T`.
Ta funkcija se pokliče, ko dostopamo do elementov matrike z izrazom `T[i, j]`.
"""
function getindex(T::Tridiag, i, j)
    n, _m = size(T)
    if (i < 1) || (i > n) || (j < 1) || (j > n)
        throw(BoundsError(T, (i, j)))
    end
    if i == j - 1
        return T.zd[i]
    elseif i == j
        return T.d[i]
    elseif i == j + 1
        return T.sd[j]
    else
        return zero(T.d[1])
    end
end

```

Program 15: Metoda `getindex` se pokliče, ko uporabimo izraz `T[i, j]`

```

"""
setindex!(T, x, i, j)

Nastavi element `T[i, j]` na vrednost `x`. Ta funkcija se pokliče, ko uporabimo
zapis `T[i, j] = x`.

"""
function setindex!(T::Tridiag, x, i, j)
    n, _m = size(T)
    if (i < 1) || (i > n) || (j < 1) || (j > n)
        throw(BoundsError(T, (i, j)))
    end
    if i == j - 1
        T.zd[i] = x
    elseif i == j
        T.d[i] = x
    elseif i == j + 1
        T.sd[j] = x
    else
        error("Elementa [\$i, \$j] ni mogoče spremeniti.")
    end
end

```

Program 16: Metoda `setindex!` se pokliče, ko uporabimo izraz  $T[i, j]=x$

```

"""
y = T*x

Izračunaj produkt tridiagonalne matrike `T` z vektorjem `x`.

"""
function *(T::Tridiag, x::Vector)
    n = length(T.d)
    if (n != length(x))
        error("Dimenzije se ne ujemajo!")
    end
    y = zero(x)
    y[1] = T[1, 1] * x[1] + T[1, 2] * x[2]
    for i = 2:n-1
        y[i] = T[i, i-1] * x[i-1] + T[i, i] * x[i] + T[i, i+1] * x[i+1]
    end
    y[n] = T[n, n-1] * x[n-1] + T[n, n] * x[n]
    return y
end

```

Program 17: Množenje tridiagonalne matrike z vektorjem

```

"""
x = T\b

Izračunaj rešitev sistema `Tx = b`, kjer je `T` tridiagonalna matrika in `b`
vektor desnih strani.

"""

function \(T::Tridiag, b::Vector)
n, _ = size(T)
# ob eliminaciji se spremeni le glavna diagonala
T = Tridiag(T.sd, copy(T.d), T.zd)
b = copy(b)
# eliminacija
for i = 2:n
    l = T[i, i-1] / T[i-1, i-1]
    T[i, i] = T[i, i] - l * T[i-1, i]
    b[i] = b[i] - l * b[i-1]
end
# obratno vstavljanje
b[n] = b[n] / T[n, n]
for i = (n-1):-1:1
    b[i] = (b[i] - T[i, i+1] * b[i+1]) / T[i, i]
end
return b
end

```

Program 18: Reševanje tridiagonalnega sistema linearnih enačb

### 3.6.1 Testi

```

@testset "Dostop do elementov" begin
    T = Tridiag([1, 2], [3, 4, 5], [6, 7])
    # diagonalna
    @test T[1, 1] == 3
    @test T[2, 2] == 4
    @test T[3, 3] == 5
    # spodaj
    @test T[2, 1] == 1
    @test T[3, 2] == 2
    @test T[3, 1] == 0
    # zgoraj
    @test T[1, 2] == 6
    @test T[2, 3] == 7
    @test T[1, 3] == 0
    # izven obsega
    @test_throws BoundsError T[1, 4]
end

```

Program 19: Testi za funkcijo getindex

```

@testset "Nastavljanje elementov" begin
    T = Tridiag([1, 1], [1, 1, 1], [1, 1])
    T[2, 2] = 2
    T[2, 3] = 3
    T[2, 1] = 4
    @test T[1, 1] == 1
    @test T[2, 2] == 2
    @test T[2, 3] == 3
    @test T[2, 1] == 4
    # izven obsega
    @test_throwsErrorException T[1, 3] = 2
end

```

Program 20: Testi za funkcijo setindex!

```

@testset "Množenje z vektorjem" begin
    T = Tridiag([1, 2], [3, 4, 5], [6, 7])
    A = [3 6 0; 1 4 7; 0 2 5]
    x = [1, 2, 3]
    @test T * x == A * x
end

```

Program 21: Testi za množenje

```
@testset "Reševanje sistema" begin
```

Program 22: Testi za operator \ (reševanje tridiagonalnega sistema)

## 4 Minimalne ploskve

### 4.1 Naloga

Žično zanko s pravokotnim tlorisom potopimo v milnico, tako da se nanjo napne milna opna. Naša naloga bo poiskati obliko milne opne. Malo brskanja po fizikalnih knjigah in internetu hitro razkrije, da ploskve, ki tako nastanejo, sodijo med **minimalne ploskve**, ki so burile domišljijo mnogih matematikov in nematematikov. Minimalne ploskve so navdihovale tudi umetnike in arhitekte. Eden najbolj znanih primerov uporabe minimalnih ploskev v arhitekturi je streha münchenskega olimpijskega stadiona, ki jo je zasnoval **Frei Otto** s sodelavci. Frei Otto je eksperimentiral z milnimi mehurčki in elastičnimi tkaninami, s katerimi je ustvarjal nove oblike.



Slika 8: Streha olimpijskega stadiona v Münchenu (vir [wikipedia](#))

Namen te vaje je primerjava eksplisitnih in iterativnih metod za reševanje linearnih sistemov enačb. Prav tako se bomo naučili, kako zgradimo matriko sistema in desne strani enačb za spremenljivke, ki niso podane z vektorjem, temveč kot elementi matrike. V okviru te vaje zato opravi naslednje naloge:

- Izpelji matematični model za minimalne ploskve s pravokotnim tlorisom.
- Zapiši problem iskanja minimalne ploskve kot **robni problem za Laplaceovo enačbo** na pravokotniku.
- Robni problem diskretiziraj in zapiši v obliki sistema linearnih enačb.
- Reši sistem linearnih enačb z LU razcepom. Uporabi knjižnico **SparseArrays** za varčno hranjenje matrike sistema.
- Preveri, kako se število neničelnih elementov poveča pri LU razcepu razpršene matrike.
- Uporabi iterativne metode (Jacobijeva, Gauss-Seidlova in SOR iteracija) na elementih matrike višinskih vrednosti ploskevin reši sistem enačb brez eksplisitne uporabe matrike sistema.
- Nariši primer minimalne ploskve.

- Animiraj konvergenco iterativnih metod.

## 4.2 Matematično ozadje

Ploskev v trirazsežnem prostoru lahko predstavimo eksplisitno s funkcijo dveh spremenljivk  $z = u(x, y)$ , ki predstavlja višino ploskve nad točko  $(x, y)$ . Naša naloga je poiskati približek za funkcijo  $u(x, y)$  na danem pravokotnem območju, ki opisuje obliko milne opne napete na žični zanki s pravokotnim tlorisom.

Funkcija  $u(x, y)$ , ki opisuje milno opno, zadošča matematična enačbi:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y), \quad (4.1)$$

znani pod imenom [Poissonova enačba](#). Diferencialni operator

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

imenujemo [Laplaceov operator](#).

Funkcija  $\rho(x, y)$  je sorazmerna tlačni razliki med zgornjo in spodnjo površino milne opne in je posledica teže milnice. Če tlačno razliko zanemarimo, dobimo [Laplaceovo enačbo](#):

$$\Delta u(x, y) = 0. \quad (4.3)$$

Enačbo, ki vsebuje parcialne odvode, imenujemo [parcialna diferencialna enačba](#) ali s kratico PDE. Rešitev PDE je funkcija več spremenljivk, ki zadošča dani enačbi. Vrednosti  $u(x, y)$  na robu območja so določene z obliko zanke, medtem ko za vrednosti v notranjosti velja enačba (4.3). Problem za diferencialno enačbo, pri katerem so podane vrednosti na robu, imenujemo [robni problem](#). Ker je oblika milnice določena na robu, lahko iskanje oblike milnice prevedemo na robni problem za Laplaceovo PDE na območju, omejenem s tlorisom žične zanke.

V nadaljevanju predpostavimo, da je območje pravokotnik  $[a, b] \times [c, d]$ . Poleg Laplaceove enačbe (4.3) veljajo za vrednosti funkcije  $u(x, y)$  tudi [robni pogoji](#):

$$\begin{aligned} u(x, c) &= f_s(x), \\ u(x, d) &= f_z(x), \\ u(a, y) &= f_l(y) \text{ in} \\ u(b, y) &= f_d(y), \end{aligned} \quad (4.4)$$

kjer so  $f_s, f_z, f_l$  in  $f_d$  dane funkcije. Rešitev robnega problema je tako odvisna od izbire območja, kot tudi od robnih pogojev.

## 4.3 Diskretizacija in linearni sistem enačb

Problema se bomo lotili numerično, zato bomo vrednosti  $u(x, y)$  poiskali le v končno mnogo točkah: problem bomo [diskretizirali](#). Za diskretizacijo je najpreprosteje uporabiti enakomerno razporejeno pravokotno mrežo točk na pravokotniku. Točke na mreži imenujemo [vozlišča](#). Zaradi enostavnosti se omejimo na mreže z enakim razmikom v obeh koordinatnih smereh. Interval  $[a, b]$  razdelimo na  $n + 1$  delov, interval  $[c, d]$  pa na  $m + 1$  delov. Dobimo zaporedje koordinat, ki definirajo pravokotno mrežo točk  $(x_j, y_i)$ :

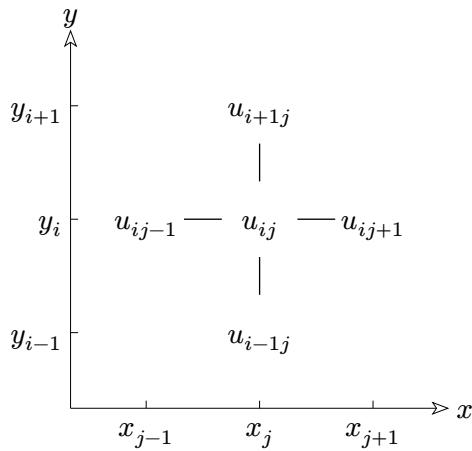
$$\begin{aligned} a = x_0, x_1 \dots x_{n+1} &= b \text{ in} \\ c = y_0, y_1 \dots y_{m+1} &= d. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Namesto funkcije  $u : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  tako iščemo le vrednosti

$$u_{ij} = u(x_j, y_i), \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m. \tag{4.6}$$

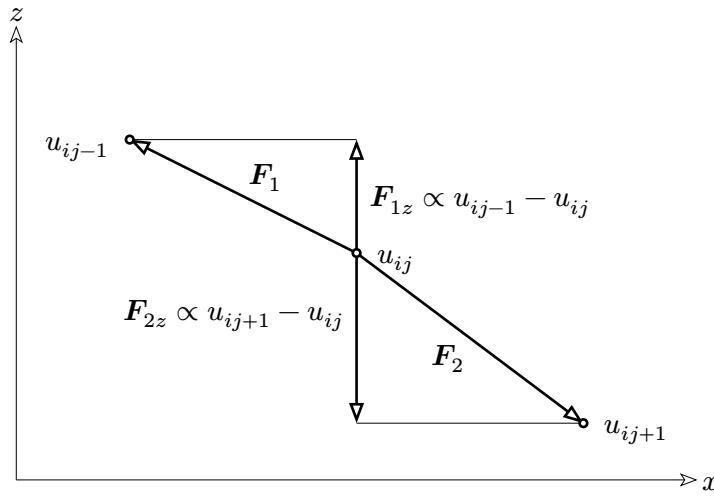
Elemente matrike  $u_{ji}$  določimo tako, da je v limiti, ko gre razmik med vozlišči proti 0, izpolnjena Laplaceova enačba (4.3).

Laplaceovo enačbo lahko diskretiziramo s **končnimi diferencami**. Lahko pa dobimo navdih pri arhitektu Ottu, ki je minimalne ploskve raziskoval z **elastičnimi tkaninami**. Ploskev si predstavljamo kot elastično tkanino, ki je fina kvadratna mreža iz elastičnih nitk. Vsako vozlišče v mreži je povezano s štirimi sosednjimi vozlišči.



Slika 9: Sosedne vrednosti vozlišča

Vozlišče bo v ravnovesju, ko bo vsota vseh sil nanj enaka 0.



Slika 10: Vektorske komponente sil, ki delujejo na vozlišče  $(x_j, y_i)$  iz sosednjih vozlišč  $(x_{j-1}, y_i)$  in  $(x_{j+1}, y_i)$ .

Predpostavimo, da so vozlišča povezana z idealnimi vzmetmi in je sila sorazmerna z vektorjem med položaji vozlišč. Če zapišemo enačbo za komponente sile v smeri  $z$ , dobimo za točko  $(x_j, y_i, u_{ij})$  enačbo:

$$\begin{aligned}(u_{i-1j} - u_{ij}) + (u_{ij-1} - u_{ij}) + (u_{i+1j} - u_{ij}) + (u_{ij+1} - u_{ij}) &= 0 \\ u_{i-1j} + u_{ij-1} - 4u_{ij} + u_{i+1j} + u_{ij+1} &= 0.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Za vsako vrednost  $u_{ij}$  dobimo eno enačbo. Tako dobimo sistem  $n \cdot m$  linearnih enačb za  $n \cdot m$  neznank. Ker so vrednosti na robu določene z robnimi pogoji, moramo elemente  $u_{0j}, u_{m+1j}, u_{i0}$  in  $u_{in+1}$  prestaviti na desno stran in jih upoštevati kot konstante.

#### 4.4 Matrika sistema linearnih enačb

Sisteme linearnih enačb navadno zapišemo v matrični obliki:

$$Ax = b,\tag{4.8}$$

kjer je  $A$  kvadratna matrika,  $x$  in  $b$  pa vektorja. V našem primeru je to nekoliko bolj zapleteno, saj so spremenljivke  $u_{ij}$  elementi matrike. Zato jih moramo najprej razvrstiti v vektor  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots]^T$ . Najpogosteje elemente  $u_{ij}$  razvrstimo v vektor  $\mathbf{x}$  po stolpcih, tako da je:

$$\mathbf{x} = [u_{11}, u_{21} \dots u_{m1}, u_{12}, u_{22} \dots u_{1m} \dots u_{m-1n}, u_{mn}]^T.\tag{4.9}$$

Iz enačb (4.7) lahko potem razberemo matriko A. Za  $n = m = 3$  dobimo  $9 \times 9$  matriko

$$A^{9,9} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},\tag{4.10}$$

ki je sestavljena iz  $3 \times 3$  blokov

$$L^{3,3} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad I^{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{4.11}$$

Vektor desnih strani prav tako razberemo iz enačbe (4.7). Za  $n = m = 3$  dobimo vektor:

$$\mathbf{b} = -[u_{01} + u_{10}, u_{20}, u_{30} + u_{41}, u_{02}, 0, u_{42}, u_{03} + u_{14}, u_{24}, u_{34} + u_{43}]^T.\tag{4.12}$$

V splošnem je formulo za vektor desnih strani lažje sprogramirati, zato bomo zapis izpustili.

### Razvrstitev po stolpcih in operator vec

Eden od načinov, kako lahko elemente matrike razvrstimo v vektor, je tako, da stolpce matrike enega za drugim postavimo v vektor. Indeks v vektorju  $k$  lahko izrazimo z indeksi  $i, j$  v matriki s formulo

$$k = i + (j - 1)m. \quad (4.13)$$

Ta način preoblikovanja matrike v vektor označimo s posebnim operatorjem vec:

$$\begin{aligned} \text{vec} : \mathbb{R}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n} \\ \text{vec}(A)_{i+(j-1)m} &= a_{ij}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

## 4.5 Izpeljava sistema s Kroneckerjevim produkтом

Množenje matrike  $A$  z vektorjem  $x = \text{vec}(U)$  lahko zapišemo kot:

$$A \text{vec}(U) = \text{vec}(LU + UL), \quad (4.15)$$

kjer je  $L$  matrika Laplaceovega operatorja v eni dimenziji, ki ima  $-2$  na diagonali in  $1$  na spodnji in zgornji obdiagonali:

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Res! Moženje matrike  $U$  z matriko  $L$  z leve je ekvivalentno množenju stolpcev matrike  $U$  z matriko  $L$ , medtem ko je množenje z matriko  $L$  z desne ekvivalentno množenju vrstic matrike  $U$  z matriko  $L$ . Prispevek množenja z leve predstavlja vsoto sil sosednjih vozlišč v smeri  $y$ , medtem ko množenje z desne predstavlja vsoto sil sosednjih vozlišč v smeri  $x$ . Element produkta  $LU + UL$  na mestu  $(i, j)$  je enak:

$$\begin{aligned} (LU + UL)_{ij} &= \sum_{k=1}^m l_{ik} u_{kj} + \sum_{k=1}^n u_{ik} l_{kj} \\ &= u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j} + u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

kar je enako desni strani enačbe (4.7).

Operacijo množenja matrike  $U : U \mapsto LU + UL$  lahko predstavimo s **Kroneckerjevim produkтом**  $\otimes$ , saj velja  $\text{vec}(AXB) = A \otimes B \cdot \text{vec}(X)$ . Tako velja:

$$\begin{aligned} A \text{vec}(U) &= \text{vec}(LU + UL) = \text{vec}(LUI + IUL) = \text{vec}(LUI) + \text{vec}(IUL) \\ &= (L \otimes I) \text{vec}(U) + (I \otimes L) \text{vec}(U) \end{aligned} \quad (4.18)$$

in

$$A^{N,N} = L^{m,m} \otimes I^{n,n} + I^{m,m} \otimes L^{n,n}. \quad (4.19)$$

### Kroneckerjev produkt in operator vec v Juliji

Programski jezik Julia ima vgrajene funkcije `vec` in `kron` za preoblikovanje matrik v vektorje in računanje Kroneckerjevega produkta. Z ukazom `reshape` pa lahko iz vektorja znova zgradimo matriko.

## 4.6 Numerična rešitev z LU razcepom

Preden se lotimo programiranja, ustvarimo nov paket za to vajo:

```
(nummat) pkg> generate Vaja04
(nummat) pkg> develop Vaja04/
```

Nato dodamo pakete, ki jih bomo potrebovali:

```
(nummat) pkg> activate Vaja04
(Vaja04) pkg> add SparseArrays
```

Kodo bomo organizirali tako, da bomo najprej ustvarili podatkovni tip, ki opiše robni problem za PDE na pravokotniku:

```
"""
rp = RobniProblemPravokotnik(op, ((a, b), (c, d)), [fs, fz, fl, fd])

Ustvari objekt tipa `RobniProblemPravokotnik`, ki hrani podatke za robni problem
za diferencialni operator `op` na pravokotniku `[a, b] x [c, d]` z robnimi
pogoji, podanimi s funkcijami `fs`, `fz`, `fl`, `fd`. Funkcija `fs` določa robni
pogoj na spodnjem robu `y = c`, funkcija `fz` robni pogoj na zgornjem robu `y = d`,
funkcija `fl` na levem robu `x = a` in funkcija `fd` robni pogoj na desnem robu
`x = b`.

"""
struct RobniProblemPravokotnik
    op # abstraktni podatkovni tip, ki opiše diferencialni operator
    meje # meje pravokotnika [a, b] x [c, d] v obliki [(a, b), (c, d)]
    rp # funkcije na robu [fs, fz, fl, fd], f(a, y) = fl(y), f(x, c) = fs(x) ...
end
```

Definiramo še abstraktni tip brez polj, ki predstavlja Laplaceov diferencialni operator (4.2) in ga bomo lahko dodali v polje za operator v `RobniProblemPravokotnik`:

```
"""
L = Laplace()

Ustvari abstraktni objekt tipa `Laplace`, ki predstavlja Laplaceov diferencialni
operator.

"""
struct Laplace end
```

### Abstraktni podatkovni tipi

Programski jezik Julija ne pozna razredov. Uporaba [abstraktnih podatkovnih tipov](#), kot je `Laplace`, omogoča [polimorfizem](#). Na ta način lahko kodo organiziramo tako, da odraža abstraktne matematične pojme, kot je v našem primeru robni problem za PDE.

Robni problem za Laplaceovo enačbo na pravokotniku  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  z robnimi pogoji:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, \pi) = \sin(x) \text{ in} \\ u(0, y) &= u(\pi, y) = \sin(y) \end{aligned} \tag{4.20}$$

lahko predstavimo z objektom:

```
rp = RobniProblemPravokotnik(  
    Laplace(),           # operator  
    ((0, pi), (0, pi)), # pravokotnik  
    (sin, sin, sin, sin) # funkcije na robu  
)
```

Zaenkrat si s tem objektom še ne moremo nič pomagati. Zato napišemo funkcije, ki bodo poiskale rešitev za dan robni problem. Kot smo videli v poglavju 4.3, lahko približek za rešitev robnega problema poiščemo kot rešitev linearnega sistema enačb (4.7). Najprej napišemo funkcijo, ki generira matriko sistema:

```
function matrika(_::Laplace, n, m)
```

za dane dimenzijs notranje mreže  $n \times m$  (za rešitev glej Program 24). Nato na robu mreže izračunamo robne pogoje in sestavimo vektor desnih strani sistema (4.7). Ker je preslikovanje dvojnega indeksa v enojni in nazaj precej sitno, bomo večino operacij naredili na matriki vrednosti  $U = [u_{ij}]$  dimenzij  $(m + 2) \times (n + 2)$ , ki vsebuje tudi vrednosti na robu. Napisali bomo funkcijo

```
U0, x, y = diskretiziraj(rp::RobniProblemPravokotnik, h),
```

ki poišče pravokotno mrežo z razmikom med vozlišči približno  $h$  in izračuna vrednosti na robu. Rezultati funkcije `diskretiziraj` so matrika  $U0$ , vektor  $x$  in vektor  $y$ . Rezultat  $U0$  je matrika, ki ima notranje elemente enake 0, robni elementi pa so določeni z robnimi pogoji. Vektorja  $x$  in  $y$  pa vsebujeta delilne točke na intervalih  $[a, b]$  in  $[c, d]$ .

Iz matrike  $U0$  lahko sedaj dokaj preprosto sestavimo desne strani enačb. Notranje indekse zaporedoma zamaknemo v levo, desno, gor in dol in seštejemo ustrezne podmatrike. Rezultat nato spremenimo v vektor s funkcijo `vec` (za rešitev glej Program 25).

Ko imamo pripravljeno matriko in desne strani, vse skupaj zložimo v funkcijo:

```
U, x, y = resi(rp::RobniProblemPravokotnik, h),
```

ki za dani robni problem  $rp$  in razmik med vozlišči  $h$  sestavi matriko sistema, izračuna desne strani na podlagi robnih pogojev in reši sistem. Rezultat nato vrne v obliki matrike vrednosti  $U$  in vektorjev delilnih točk  $x$  in  $y$  (za rešitev glej Program 26).

Napisane programe uporabimo za rešitev robnega problema za pravokotnik  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  z robnimi pogoji

$$\begin{aligned}
 u(0, y) &= 0 \\
 u(\pi, y) &= 0 \\
 u(x, 0) &= \sin(x) \\
 u(x, \pi) &= \sin(x).
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

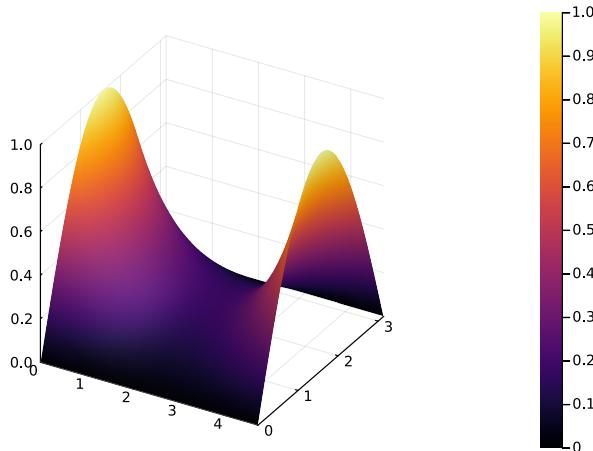
Definiramo robni problem in uporabimo funkcijo `resi`. Ploskev narišemo s funkcijo `surface`.

```

rp = RobniProblemPravokotnik(
    Laplace(),           # operator
    ((0, 3pi/2), (0, pi)), # pravokotnik
    (x -> 0, x -> 0, sin, sin) # funkcije na robu
)

U, x, y = resi(rp, 0.1)
using Plots
surface(x, y, U)

```



Slika 11: Rešitev robnega problema za Laplaceovo enačbo

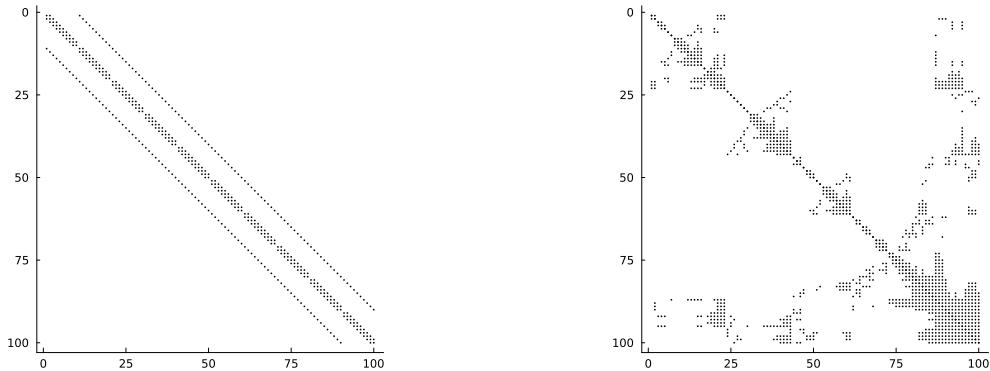
## 4.7 Napolnitev matrike ob eliminaciji

Matrika Laplaceovega operatorja ima veliko ničelnih elementov. Takim matrikam pravimo [razpršene ali redke matrike](#). Razpršenost matrike lahko izkoristimo za prihranek prostora in časa, kot smo že videli pri tridiagonalnih matrikah (Poglavlje 3). Vendar se pri LU razcepu, ki ga uporablja operator `\` za rešitev sistema, delež neničelnih elementov matrike pogosto poveča. Poglejmo, kako se odreže matrika za Laplaceov operator.

```

using LinearAlgebra
A = Vaja04.matrika(Laplace(), 10, 10)
p1 = spy(A .!= 0, legend=false) # na grafu prikažemo neničelne elemente
F = lu(A)
p2 = spy(F.L .!= 0, legend=false) # neničelni elementi za faktor L
spy!(p2, F.U .!= 0, legend=false) # in za faktor U

```



Slika 12: Neničelni elementi matrike za Laplaceov operator (levo) in njenega LU razcepa (desno). Število ničelnih elementov se pri LU razcepnu poveča. Kljub temu sta L in U v razcepnu še vedno precej redki matriki.

#### Podatkovni tipi za matrične razcepe v Juliji

V knjižnici [LinearAlgebra](#) so implementacije standardnih matričnih razcepov, kot so LU razcep, razcep Choleskega, QR razcep in drugi. Rezultat, ki ga Julia vrne, ko naredimo matrični razcep je poseben podatkovni tip. Tako metoda `lu` vrne rezultat tipa `LU`. Podatkovni tip `LU` je poseben tip, ki hrani rezultate LU razcepa na učinkovit način. Poleg tega so za tip `LU` definirane posebne metode za generične funkcije kot na primer `\`, ki uporabi matrični razcep za učinkovito reševanje linearnega sistema. Poglejmo si, kako LU razcep uporabimo za rešitev sistema enačb:

```
A = [1 2; 3 4] # matrika sistema A x = b
b = [1, 1] # desne strani
F = lu(A) # funkcija lu vrne poseben podatkovni tip,
x = F \ b # ki ga lahko uporabimo za rešitev sistema
```

Funkcija `factorize` vrne najbolj primeren razcep za dano matriko. Na primer za simetrično pozitivno definitno matriko, funkcija `facotrize` vrne razcep Choleskega.

## 4.8 Iteracijske metode

V prejšnjih podpoglavljih smo poiskali približno obliko minimalne ploskve, tako da smo linearni sistem (4.7) rešili z LU razcepom. Največ težav smo imeli z zapisom matrike sistema in desnih strani. Poleg tega je matrika sistema redka, ko izvedemo LU razcep pa se matrika deloma napolni. Pri razpršenih matrikah tako pogosto uporabimo [iterativne metode](#) za reševanje sistemov enačb, pri katerih se matrika ne spreminja in zato prihranimo veliko na prostorski in časovni zahtevnosti.

Ideja iteracijskih metod je preprosta. Enačbe preuredimo tako, da ostane na eni strani le en element s koeficientom 1. Tako dobimo iteracijsko formulo za zaporedje približkov  $u_{ij}^{(k)}$ . Če zaporedje konvergira, je limita ena od rešitev rekurzivne enačbe. V primeru linearnih sistemov je rešitev enolična.

V našem primeru enačb za minimalne ploskve (4.7), izpostavimo element  $u_{ij}$  in dobimo rekurzivne enačbe:

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left( u_{ij-1}^{(k)} + u_{i-1j}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k)} + u_{ij+1}^{(k)} \right), \quad (4.22)$$

ki ustrezajo [Jacobijevi iteraciji](#). Približek za rešitev dobimo tako, da zaporedoma uporabimo rekurzivno formulo (4.22).

### Pogoji konvergencije

Rekli boste, da je preveč enostavno enačbe le prurediti in se potem rešitev kar sama pojavi, če le dovolj dolgo računamo. Gotovo se nekje skriva kak „hakelc“. Res je! Težave se pojavijo, če zaporedje približkov **ne konvergira dovolj hitro** ali pa sploh ne. Jacobijeva, Gauss-Seidlova in SOR iteracija **ne konvergirajo vedno**, zagotovo pa konvergirajo, če je matrika **diagonalno dominantna po vrsticah**.

Konvergenco Jacobijeve iteracije lahko izboljšamo, če namesto vrednosti  $u_{i-1,j}^{(k)}$  in  $u_{i,j-1}^{(k)}$  uporabimo nove vrednosti  $u_{i-1,j}^{(k+1)}$  in  $u_{i,j-1}^{(k+1)}$ , ki so bile že izračunane (elemente  $u_{i,j}^{(k+1)}$  računamo po leksikografskem vrstnem redu). Če nove vrednosti upobimo v iteracijski formuli, dobimo **Gauss-Seidlovo iteracijo**:

$$u_{i,j}^{(k+1)}\{GS\} = \frac{1}{4}\left(u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}\right). \quad (4.23)$$

Konvergenco še izboljšamo, če približek  $u_{i,j}^{(k+1)}$ , ki ga dobimo z Gauss-Seidlovo metodo, malce „pokvarimo“ s približkom na prejšnjem koraku  $u_{i,j}^{(k)}$ . Tako dobimo **metodo SOR**:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(k+1)}\{GS\} &= \frac{1}{4}\left(u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}\right) \\ u_{i,j}^{(k+1)}\{SOR\} &= \omega u_{i,j}^{(k+1)}\{GS\} + (1 - \omega)u_{i,j}^{(k)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Parameter  $\omega$  je lahko poljubno število na intervalu  $(0, 2)$ . Pri  $\omega = 1$  dobimo Gauss-Seidlovo iteracijo.

Prednost iteracijskih metod je, da jih je zelo enostavno implementirati. Za Laplaceovo enačbo je en korak Gauss-Seidlove iteracije podan s preprosto zanko.

```
"""
U = korak_gs(U0)

Izvedi en korak Gauss-Seidlove iteracije za Laplaceovo enačbo. Matrika `U0`
vsebuje približke za vrednosti funkcije na mreži.

"""
function korak_gs(U0)
    U = copy(U0)
    m, n = size(U)
    # spremenimo le notranje vrednosti
    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1
            # Gauss Seidel
            U[i, j] = (U[i+1, j] + U[i, j+1] + U[i-1, j] + U[i, j-1]) / 4
        end
    end
    return U
end
```

Program 23: Poišči naslednji približek Gauss-Seidlove iteracije za diskretizacijo Laplaceove enačbe.

Napišite še funkciji `korak_jacobi(U0)` in `korak_sor(U0, omega)`, ki izračunata naslednji približek za Jacobijovo in SOR iteracijo za sistem za Laplaceovo enačbo. Nato napišite še funkcijo

```
x, k = iteracija(korak, x0),
```

ki izračuna zaporedje približkov za poljubno iteracijsko metodo, dokler se rezultat ne spreminja več znotraj določene tolerance. Argument korak je funkcija, ki iz danega približka izračuna naslednjega, argument  $x_0$  pa začetni približek iteracije.

Rešitve so na koncu poglavja v programih Program 27, Program 28 in Program 29.

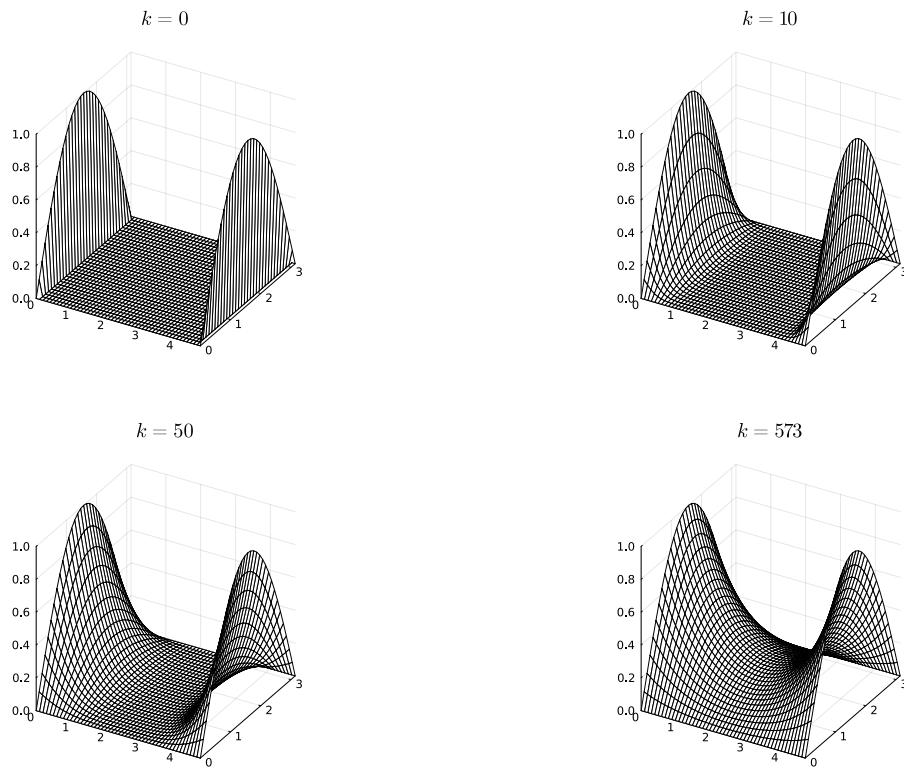
#### 4.8.1 Konvergenca

Poglejmo si, kako zaporedje približkov Gauss-Seidlove iteracije konvergira k rešitvi.

```
U0, x, y = Vaja04.diskretiziraj(rp, 0.1)
wireframe(x, y, U0, legend=false, title="\$ k=0 \$")

U = U0
for i = 1:10
    U = Vaja04.korak_gs(U)
end
wireframe(x, y, U, legend=false, title="\$k=10\$")

U, it = Vaja04.iteracija(Vaja04.korak_gs, U0; atol=1e-3)
wireframe(x, y, U, legend=false, title="\$k=\$it\$")
```



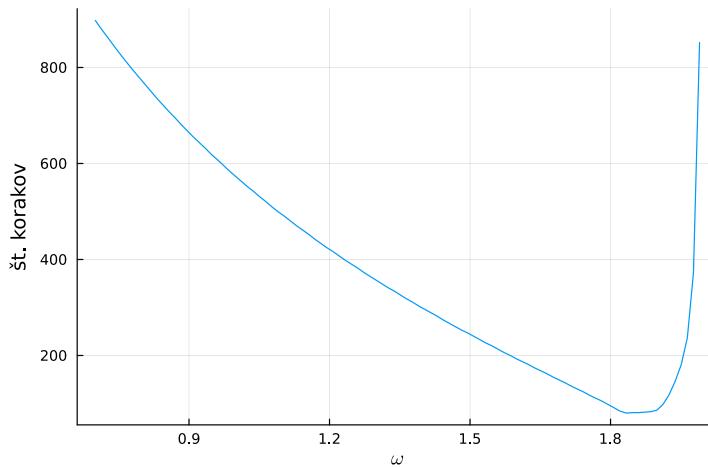
Slika 13: Približki Gauss-Seidlove iteracije za  $k = 0, 10, 50$  in končni približek.

Za metodo SOR je hitrost konvergencije odvisna od izbire parametra  $\omega$ . Odvisnost od parametra  $\omega$  je različna za različne matrike in začetne približke. Oglejmo si odvisnost za primer sistema, ki ga dobimo z diskretizacijo Laplaceove enačbe.

```

ω = range(0.7, 1.99, 100)
koraki = Vector{Float64}()
for ω_i in ω
    _, k = Vaja04.iteracija(U -> Vaja04.korak_sor(U, ω_i), U0; atol=1e-3)
    push!(koraki, k)
end
plot(ω, koraki, label=false, ylabel="št. korakov", xlabel="\$\\omega\$")

```



Slika 14: Odvisnost potrebnega število korakov SOR iteracije od parametra  $\omega$

#### Kaj smo se naučili?

- Kako rešiti sistem linearnih enačb s spremenljivkami, ki so postavljene v matriko.
- Diskretizacija diferencialnih enačb privede do linearneih sistemov.
- Iterativne metode so posebej uporabne za reševanje linearnih sistemov velikih dimenzij z redkimi matrikami.

## 4.9 Rešitve

```

using SparseArrays

laplace(n) = spdiagm(1 => ones(n - 1), 0 => -2 * ones(n), -1 => ones(n - 1))
enota(n) = spdiagm(0 => ones(n))

"""
A = matrika(Laplace(), n, m)

```

Ustvari matriko za diskretizacijo Laplaceovega operatorja v dveh dimenzijah na pravokotni mreži dimenzije `n` krat `m`. Parameter `m` je število delilnih točk v y smeri, `n` pa v x smeri.

```

function matrika(_::Laplace, m, n)
    return kron(laplace(n), enota(m)) + kron(enota(n), laplace(m))
end

```

Program 24: Generiraj matriko za diskretizacijo Laplaceovega operatorja.

```

"""
U0, x, y = diskretiziraj(rp::RobniProblemPravokotnik, h)

Diskretiziraj robni problem na pravokotniku `rp` s korakom `h`.
"""

function diskretiziraj(rp::RobniProblemPravokotnik, h)
    (a, b), (c, d) = rp.meje
    m = Integer(floor((d - c) / h))
    n = Integer(floor((b - a) / h))
    U0 = zeros(m + 2, n + 2)
    fs, fz, fl, fd = rp.rp
    x = range(a, b, n + 2)
    y = range(c, d, m + 2)
    U0[:, 1] = fl.(y)
    U0[:, end] = fd.(y)
    U0[1, :] = fs.(x)
    U0[end, :] = fz.(x)
    return U0, x, y
end

function desne_strani(U0)
    return -vec(U0[2:end-1, 1:end-2] + U0[2:end-1, 3:end] +
                U0[1:end-2, 2:end-1] + U0[3:end, 2:end-1])
end

```

Program 25: Izračunaj robne pogoje in desne strani sistema za diskretizacijo Laplaceove enačbe.

```

"""
U, x, y = resi(rp, h, metoda)

Poišči rešitev robnega problema na pravokotniku na pravokotni mreži z razmikom
`h` med posameznimi vozlišči v obeh dimenzijah.
"""

function resi(rp::RobniProblemPravokotnik, h)
    U, x, y = diskretiziraj(rp, h)
    n = length(x) - 2
    m = length(y) - 2
    A = matrika(rp.op, m, n)
    d = desne_strani(U)
    res = A \ d # reši sistem
    U[2:end-1, 2:end-1] = reshape(res, m, n) # preoblikuj rešitev v matriko
    return U, x, y
end

```

Program 26: Poišči približno rešitev robnega problema za Laplaceovo enačbo.

```

"""
U = korak_jacobi(U0)

Izvedi en korak Jacobijeve iteracije za Laplaceovo enačbo. Matrika `U0` vsebuje
približke za vrednosti funkcije na mreži, funkcija vrne naslednji približek.
"""

function korak_jacobi(U0)
    U = copy(U0)
    m, n = size(U)
    # spremenimo le notranje vrednosti
    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1
            # Jacobi
            U[i, j] = (U0[i+1, j] + U0[i, j+1] + U0[i-1, j] + U0[i, j-1]) / 4
        end
    end
    return U
end

```

Program 27: Poišči naslednji približek Jacobijeve iteracije za diskretizacijo Laplaceove enačbe.

```

"""
U = korak_sor(U0, ω)

Izvedi en korak SOR iteracije za Laplaceovo enačbo. Matrika `U0` vsebuje
približke za vrednosti funkcije na mreži, funkcija vrne naslednji približek.
"""

function korak_sor(U0, ω)
    U = copy(U0)
    m, n = size(U)
    # spremenimo le notranje vrednosti
    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1
            U[i, j] = (U[i+1, j] + U[i, j+1] + U[i-1, j] + U[i, j-1]) / 4
            U[i, j] = (1 - ω) * U0[i, j] + ω * U[i, j] # SOR popravek
        end
    end
    return U
end

```

Program 28: Poišči naslednji približek SOR iteracije za diskretizacijo Laplaceove enačbe.

```

"""
x, it = iteracija(korak, x0; maxit=maxit, atol=atol)

Poišči približek za limito rekurzivnega zaporedja podanega rekurzivno s
funkcijo `korak` in začentim členom `x0`.

"""
function iteracija(korak, x0; maxit=1000, atol=1e-8)
    for i = 1:maxit
        x = korak(x0)
        if isapprox(x, x0, atol=atol)
            return x, i
        end
        x0 = x
    end
    throw("Iteracija ne konvergira po $maxit korakih!")
end

```

Program 29: Poišči približek za limito rekurzivnega zaporedja.

## 5 Interpolacija z implicitnimi funkcijami

Krivulje v ravnini in ploskve v prostoru lahko opišemo na različne načine:

|              | krivulje v $\mathbb{R}^2$ | ploskve v $\mathbb{R}^3$                  |
|--------------|---------------------------|---|
| eksplicitno  | $y = f(x)$                | $z = f(x, y)$                             |
| parametrično | $(x, y) = (x(t), y(t))$   | $(x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ |
| implicitno   | $F(x, y) = 0$             | $F(x, y, z) = 0$                          |

Tabela 1: Različni načini predstavitev krivulj v  $\mathbb{R}^2$  in ploskev v  $\mathbb{R}^3$

Implicitne enačbe oblike  $F(x_1, x_2, \dots) = 0$  so zelo dober način za opis krivulj in ploskev. Hitri algoritmi za izračun nivojskih krivulj in ploskev kot sta **korakajoči kvadrati** in **korakajoče kocke** omogočajo učinkovito generiranje poligonske mreže za implicitno podane krivulje in ploskev. Predstavitev s **predznačeno funkcijo razdalje** pa je osnova za mnoge grafične programe, ki delajo s ploskvami v 3D prostoru.

V tej vaji bomo spoznali, kako poiskati implicitno krivuljo ali ploskev, ki dobro opiše dani oblak točk v ravnini ali prostoru. Funkcijo  $F$  v implicitni enačbi  $F(x, y) = 0$  bomo poiskali kot linearne kombinacije **radialnih baznih funkcij (RBF)** ([5], [6], [7]).

### 5.1 Naloga

- Definiraj podatkovni tip za linearne kombinacije radialnih baznih funkcij (RBF) v  $\mathbb{R}^d$ . Podatkovni tip naj vsebuje središča RBF  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ , funkcijo oblike  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in koeficiente  $w_i \in \mathbb{R}$  v linearnej kombinaciji:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|). \quad (5.1)$$

- Napiši sistem za koeficiente  $w_i$  v linearnej kombinaciji RBF, če so podane vrednosti  $f_i = F(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}$  v središčih RBF. Napiši funkcijo, ki za dane vrednosti  $f_i$ , funkcijo  $\varphi$  in središča  $\mathbf{x}_i$  poišče koeficiente  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Katero metodo za reševanja sistema lahko uporabimo?
- Napiši funkcijo **vrednost**, ki izračuna vrednost funkcije  $F(\mathbf{x})$  v dani točki  $\mathbf{x}$ .
- Uporabi napisane metode in interpoliraj oblak točk v ravnini z implicitno podano krivuljo. Oblak točk ustvari na krivulji, podani s parametrično enačbo:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= 8 \cos(\varphi) - \cos(4\varphi) \\ y(\varphi) &= 8 \sin(\varphi) - \sin(4\varphi). \end{aligned} \quad (5.2)$$

### 5.2 Interpolacija z radialnimi baznimi funkcijami

V ravnini<sup>1</sup> je podan oblak točk  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^2$ . Iščemo krivuljo, ki dobro opiše dane točke. Če zahtevamo, da vse točke ležijo na krivulji, problemu rečemo *interpolacija*, če pa dovolimo, da je krivulja zgolj blizu danih točk in ne nujno vsebuje vseh točk, problem imenujemo *aproximacija*. Krivuljo bomo

<sup>1</sup>Postopek, ki ga bomo opisali, deluje ravno tako dobro tudi za točke v prostoru. Vendar se bomo zavoljo enostavnosti omejili na točke v ravnini.

poiskali v implicitni obliki kot nivojsko krivuljo funkcije dveh spremenljivk. Za izbrano vrednost  $c \in \mathbb{R}$  isčemo funkcijo  $f(x, y)$ , za katero velja:

$$f(x_i, y_i) = c \quad (5.3)$$

za vse točke  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$  v danem oblaku točk. Problem bomo rešili malce bolj splošno. Denimo, da imamo za vsako dano točko v oblaku  $\mathbf{x}_i$ , podano tudi vrednost funkcije  $f_i$ . Isčemo zvezno funkcijo  $f(x, y)$ , tako da so izpolnjene enačbe:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= f_1 \\ &\vdots \\ f(x_n, y_n) &= f_n. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Zveznih funkcij, ki zadoščajo enačbam (5.4), je neskončno. Zato se moramo omejiti na podmnožico funkcij, ki je dovolj raznolika, da je sistem rešljiv, hkrati pa dovolj majhna, da je rešitev ena sama. V tej vaji, se bomo omejili na  $n$ -parametrično družino funkcij oblike:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = F(\mathbf{x}, w_1, w_2, \dots, w_n) = \sum_i w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|). \quad (5.5)$$

Funkcije  $\varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|)$  sestavljajo bazo za množico funkcij oblike (5.1).

Radialne bazne funkcije (RBF) so funkcije, katerih vrednosti so odvisne od razdalje do izhodiščne točke:

$$r(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|). \quad (5.6)$$

Uporabljajo se za interpolacijo ali aproksimacijo podatkov s funkcijo oblike:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_i w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|), \quad (5.7)$$

npr. za rekonstrukcijo 2D in 3D oblik v računalniški grafiki. Funkcija  $\varphi$  je navadno pozitivna soda funkcija zvončaste oblike in jo imenujemo funkcija oblike.

Problem (5.4) se prevede na iskanje vrednosti koeficientov  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^T$ , tako da je izpolnjen sistem enačb:

$$\begin{aligned} F(x_1, w_1, w_2, \dots, w_n) &= f_1 \\ &\vdots \\ F(x_n, w_1, w_2, \dots, w_n) &= f_n. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Enačbe (5.8) so linearne za koeficiente  $w_1, \dots, w_n$ :

$$\begin{aligned} w_1 \varphi_1(\mathbf{x}_1) + w_2 \varphi_2(\mathbf{x}_1) + \dots + w_n \varphi_n(\mathbf{x}_1) &= f_1 \\ &\vdots \\ w_1 \varphi_1(\mathbf{x}_n) + w_2 \varphi_2(\mathbf{x}_n) + \dots + w_n \varphi_n(\mathbf{x}_n) &= f_n. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Vektor desnih strani sistema (5.9) je kar vektor funkcijskih vrednosti  $[f_1, f_2, \dots, f_n]$ , matrika sistema pa je enaka:

$$\begin{pmatrix} \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n\|) \\ \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_n\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \varphi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n\|) \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Ker je

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \varphi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) = \varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = \varphi_j(\mathbf{x}_i), \quad (5.11)$$

je matrika sistema (5.10) simetrična. V literaturi [5] se pojavijo naslednje izbire za funkcijo oblike  $\varphi$ :

- poliharmonični zlepek (pločevina):  $\varphi(r) = r^2 \log(r)$  za 2D in  $\varphi(r) = r^3$  za 3D [6]
- Gaussova funkcija:  $\varphi(r) = \exp(-r^2/\sigma^2)$
- racionalni približek za Gaussovo funkcijo:

$$\varphi(r) = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{\sigma}\right)^{2p}}. \quad (5.12)$$

Če izberemo primo funkcijo oblike, lahko dosežemo, da je matrika sistema (5.10) pozitivno definitsna. V tem primeru lahko za reševanje sistema uporabimo razcep Choleskega (poglavje 2.6 v [1]). Za funkcijo oblike bomo izbrali Gaussovo funkcijo

$$\varphi(r) = \exp(-t^2/\sigma^2), \quad (5.13)$$

za katero je matrika sistema (5.9) pozitivno definitna, če so točke  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  različne [8].

### 5.3 Program

Najprej definiramo podatkovni tip, ki opisuje linearno kombinacijo RBF (5.1).

```
"""
RBF(tocke, utezi, phi)

Podatkovni tip za linearno kombinacijo *radialnih baznih funkcij* oblike
`phi(norm(x - tocke[i])^2)`.

"""

struct RBF
    tocke
    utezi
    phi
end
```

Za podatkovni tip napišimo funkcijo `vrednost(x, rbf::RBF)`, ki izračuna vrednost linearne kombinacije (5.1) v dani točki  $x$  (rešitev Program 30). Za primer ustvarimo mešanico dveh Gaussovih RBF v točkah  $(1, 0)$  in  $(2, 1)$  in izračunamo vrednost v točki  $(1.5, 1.5)$ :

```
using Vaja05
""" Ustvari Gaussovo funkcijo z danim `sigma`.
gauss(sigma) = r -> exp(-r^2 / sigma^2)

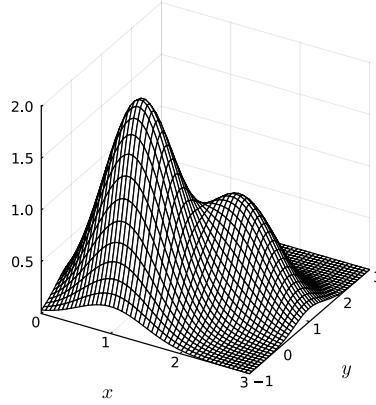
tocke = [[1, 0], [2, 1]]
utezi = [2, 1]
rbf = RBF(tocke, utezi, gauss(0.7))
# za izračun vrednosti v dani točki lahko uporabimo `vrednost([1.5, 1.5], rbf)`,
# lahko pa objekt tipa RBF kličemo direktno kot funkcijo
z = rbf([1.5, 1.5])
0.3726164224242583
```

Narišimo še graf funkcije dveh spremenljivk, podane z linearno kombinacijo RBF.

```

using Plots
x = range(0, 3, 50)
y = range(-1, 3, 50)
wireframe(x, y, (x, y) -> rbf([x, y]), xlabel="\$x\$$", ylabel="\$y\$$")

```



Slika 15: Linearna kombinacija dveh RBF v središčema v točkah  $(1, 0)$  in  $(2, 1)$  s funkcijo oblike  $\varphi(r) = \exp(-r^2/0.7^2)$

Rešimo sedaj problem interpolacije. Zapišimo funkcijo `interpoliraj(tocke, vrednosti, phi)`, ki poišče koeficiente v linearni kombinaciji (5.1) in vrne objekt tipa RBF, ki dane podatke interpolira (rešitev Program 31). Funkcijo preskusimo na točkah, ki jih generiramo na parametrično podani krivulji (5.2). Sledimo [6] in točkam na krivulji dodamo točke znotraj krivulje, v smeri normal, ki poskrbijo, da ne dobimo trivialne rešitve.

```

fi = range(0, 2π, 21)
tocke = [[8cos(t) - cos(4t), 8sin(t) - sin(4t)] for t in fi[1:end-1]]
tocke_noter = tocke .* 0.9 # točke v smeri normal določimo približno
scatter(Tuple.(tocke), label="točke na krivulji")
scatter!(Tuple.(tocke_noter), label="točke v notranjosti")

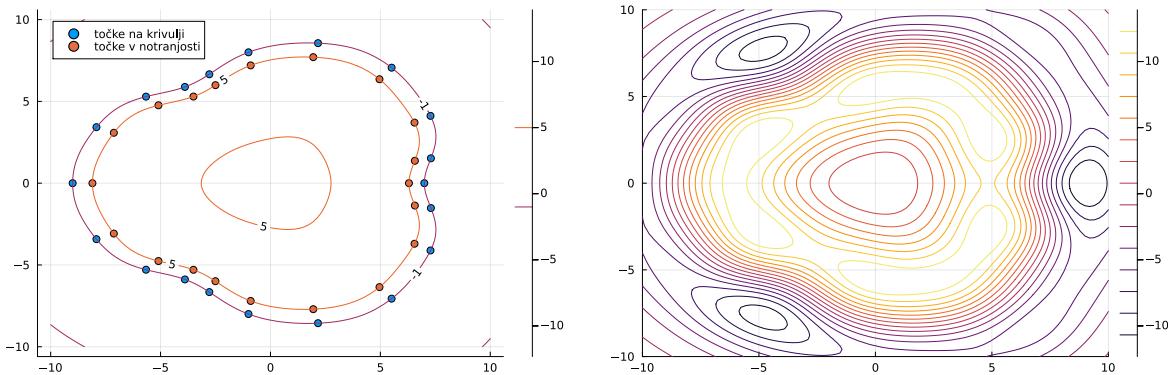
```

Vrednosti funkcije  $f_i$  za točke na krivulji izberemo tako, da so enake in se razlikujejo od vrednosti v notranjosti.

```

vse_tocke = vcat(tocke, tocke_noter)
c1, c2 = -1, 5
vrednosti = vcat(
    c1 * ones(length(tocke)), c2 * ones(length(tocke)))
rbf = interpoliraj(vse_tocke, vrednosti, gauss(3))
x = range(-10, 10, 100)
y = range(-10, 10, 100)
contour!(x, y, (x, y) -> rbf([x, y]), levels=[c1, c2], clabels=true)

```



Slika 16: Nivojske krivulje funkcije podane z linearno kombinacijo RBF, ki interpolirajo dane točke. Iskana krivulja, ki interpolira dane točke, je nivojska krivulja za vrednost  $-1$ .

#### Kaj smo se naučili?

- Implicitna oblika krivulj in ploskev je lahko zelo uporabna.
- Pri interpolaciji potrebujemo toliko parametrov, kot je na voljo podatkov.

## 5.4 Rešitve

```
using LinearAlgebra
"""
y = vrednost(x, rbf::RBF)

Izračunaj vrednost linearne kombinacije radialnih baznih funkcij podane z
`rbf` v točki `x`.

function vrednost(x, rbf::RBF)
    vsota = zero(x[1])
    n = length(rbf.tocke)
    for i = 1:n
        norma = norm(rbf.tocke[i] - x) # norma razlike
        vsota += rbf.utezi[i] * rbf.phi(norma) # utežena vsota
    end
    vsota
end
"""
rbf::RBF(x)
```

Izračunaj vrednost linearne kombinacije radialnih baznih funkcij `rbf` v dani točki `x`.

```
"""
(rbf::RBF)(x) = vrednost(x, rbf)
```

Program 30: Izračunaj vrednost linearne kombinacije RBF v dani točki

```

"""
A = matrika(tocke, phi)

Poišči matriko sistema enačb za interpolacijo točk, podanih v seznamu `tocke`,
z linearno kombinacijo radialnih baznih funkcij s funkcijo oblike
`phi`.

"""
function matrika(tocke, phi)
n = length(tocke)
A = zeros(n, n)
for i = 1:n, j = i:n
    A[i, j] = phi(norm(tocke[i] - tocke[j]))
    A[j, i] = A[i, j]
end
return A
end

"""
rbf = interpoliraj(tocke, vrednosti, phi)

Interpoliraj `vrednosti` v danih točkah iz seznama `tocke` z linearno
kombinacijo radialnih baznih funkcij s funkcijo oblike `phi`.

"""
function interpoliraj(tocke, vrednosti, phi)
A = matrika(tocke, phi)
F = chol(cholesky!(A)) # da prihranimo prostor, razcep naredimo kar v matriko A
utezi = F \ vrednosti
return RBF(tocke, utezi, phi)
end

```

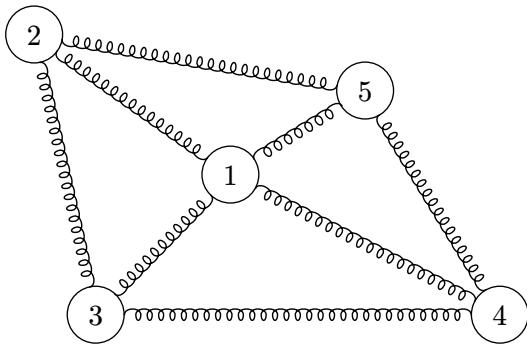
Program 31: Interpoliraj vrednosti funkcij z linearno kombinacijo RBF

## 6 Fizikalna metoda za vložitev grafov

Naj bo  $G$  neusmerjen povezan graf z množico vozlišč  $V(G)$  in povezav  $E(G) \subset V(G)^2$ . Brez škode predpostavimo, da so vozlišča grafa  $G$  kar zaporedna naravna števila  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ . Vložitev grafa  $G$  v  $\mathbb{R}^d$  je preslikava  $V(G) \rightarrow \mathbb{R}^d$ , ki je podana z zaporedjem koordinat. Vložitev v  $\mathbb{R}^3$  je podana z zaporedjem točk v  $\mathbb{R}^3$

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n). \quad (6.1)$$

Za dani graf  $G$  želimo poiskati vložitev v  $\mathbb{R}^3$  (ali  $\mathbb{R}^2$ ). Pri fizikalni metodi grafu  $G$  priredimo fizikalni sistem in uporabimo fizikalne zakone za določanje položajev vozlišč. V tej vaji bomo grafu priredili sistem harmoničnih vzmeti, pri katerem na vsako vozlišče delujejo sosednja vozlišča s silo, ki je sorazmerna razdalji med vozlišči.



Slika 17: Sistem vzmeti za dani graf

### 6.1 Naloga

- Izpeli sistem enačb za koordinate vozlišč grafa, tako da so vozlišča v ravnotesju.
- Pokaži, da je matrika sistema diagonalno dominantna in negativno definitna.
- Napiši funkcijo, ki za dani graf in koordinate fiksiranih vozlišč poišče koordinate vseh vozlišč, tako da reši sistem enačb z metodo konjugiranih gradientov.
- V ravnini nariši [graf krožno lestev](#), tako da polovico vozlišč razporediš enakomerno po enotski krožnici.
- V ravnini nariši pravokotno mrežo. Fiksiraj vogale, nato točke na robu enakomerno razporedi po krožnici.

### 6.2 Ravnotesje sil

Harmonična vzmet je idealna vzmet dolžine 0, za katero sila ni sorazmerna sprememb dolžine, pač pa dolžini vzmeti. Sila harmonične vzmeti, ki je vpeta med točki  $(x_1, y_1, z_1)$  in  $(x_2, y_2, z_2)$  in deluje na prvo krajišče, je enaka

$$\vec{F}_{21} = k \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

kjer je  $k$  koeficient vzmeti.

Koordinate vozlišč določimo tako, da poiščemo koordinate, pri katerih je sistem v ravnovesju. To pomeni, da so v vsakem vozlišču  $j$  v ravnovesju sile, s katerimi sosednja vozlišča delujejo na dano vozlišče:

$$\sum_{i \in N(j)} \vec{F}_{ij} = 0, \quad (6.3)$$

kjer je  $N(j) = \{i; (i, j) \in E(G)\}$  množica sosednjih točk v grafu za točko  $j$  in  $\vec{F}_{ij}$  sila, s katero vozlišče  $i$  deluje na vozlišče  $j$ . Iz enačbe (6.3) lahko izpeljemo sistem enačb za koordinate  $x_j, y_j$  in  $z_j$ . Iz vektorske enačbe za vozlišče  $j$ :

$$\sum_{i \in N(j)} \vec{F}_{ij} = \sum_{i \in N(j)} k \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \end{pmatrix} = 0, \quad (6.4)$$

dobimo 3 enačbe za posamezne koordinate:

$$\begin{aligned} -\text{st}(j)x_j + x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_{\text{st}(i)}} &= 0 \\ -\text{st}(j)y_j + y_{i_1} + y_{i_2} + \dots + y_{i_{\text{st}(i)}} &= 0 \\ -\text{st}(j)z_j + z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_{\text{st}(i)}} &= 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

kjer je  $\text{st}(j) = |N(j)|$  stopnja vozlišča  $j$  in  $i_1, i_2 \dots i_{\text{st}(j)} \in N(j)$ . Ker so koordinate  $x, y$  in  $z$  med seboj neodvisne, dobimo za vsako koordinato en sistem enačb. Za koordinato  $x$  dobimo naslednji sistem:

$$\begin{aligned} -\text{st}(1)x_1 + \sum_{i \in N(1)} x_i &= 0 \\ -\text{st}(2)x_2 + \sum_{i \in N(2)} x_i &= 0 \\ &\vdots \\ -\text{st}(n)x_n + \sum_{i \in N(n)} x_i &= 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Enačbe (6.6) so homogene, kar pomeni, da ima sistem le ničelno rešitev. Če želimo netrivialno rešitev, moramo nekatera vozlišča v grafu pritrdati in jim predpisati koordinate. Brez škode lahko predpostavimo, da so vozlišča, ki jih pritrdimo, na koncu. Označimo z  $F = \{m+1, \dots, n\} \subset V(G)$  množico vozlišč, ki imajo določene koordinate. Koordinate za vozlišča iz  $F$  niso več spremenljivke, ampak jih moramo prestaviti na drugo stran enačbe. Sistem enačb (6.6) postane nehomogen sistem:

$$\begin{aligned} -\text{st}(1)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= -a_{1m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 - \text{st}(2)x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= -a_{2m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 + \dots - \text{st}(m)x_m &= -a_{mm+1}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n \end{aligned} \quad (6.7)$$

kjer je vrednost  $a_{ij}$  enaka 1, če sta  $i$  in  $j$  sosedna, in 0 sicer

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E(G) \\ 0 & (i, j) \notin E(G) \end{cases}. \quad (6.8)$$

Matrika sistema (6.7) je odvisna le od povezav v grafu in izbire točk, ki niso pritrjene, medtem ko so desne stani odvisne od koordinat pritrjenih točk:

$$A = \begin{pmatrix} -\text{st}(1) & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & -\text{st}(2) & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & -\text{st}(m) \end{pmatrix} \text{ in } \mathbf{b} = - \begin{pmatrix} \sum_{i=m+1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=m+1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=m+1}^n a_{ni}x_i \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Sistema za  $y$  in  $z$  imata iste koeficiente, kot sistem (6.6), razlikujeta se le v desnih straneh, ki so odvisne od koordinat pritrjenih točk.

Kakšne posebnosti ima matrika sistema (6.9)? Matrika je simetrična in diagonalno dominantna. Res! Velja namreč  $\text{st}(i) = |N(i)|$  in zato:

$$|a_{ii}| = |N(i)| \geq |N(i) \cap F^C| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|. \quad (6.10)$$

Za sosedne fiksni vozlišč je neenakost stroga. Ker so vsi elementi na diagonali negativni, je matrika  $A$  negativno definitna. Za večino grafov, za katere uporabimo zgornji postopek, bo matrika sistema  $A$  redka. Zato lahko za reševanje sistema  $-Ax = -b$  uporabimo **metodo konjugiranih gradientov**. Metoda konjugiranih gradientov in druge iterativne metode so zelo primerne za redke matrike. Za razliko od eliminacijskih metod, iterativne metode ne izvedejo sprememb na matriki, ki bi dodale neničelne elemente.

## 6.3 Rešitev v Juliji

Za predstavitev grafa bomo uporabili paket **Graphs.jl**, ki definira podatkovne tipe in vmesnike za lažje delo z grafi.

Napišimo naslednje funkcije:

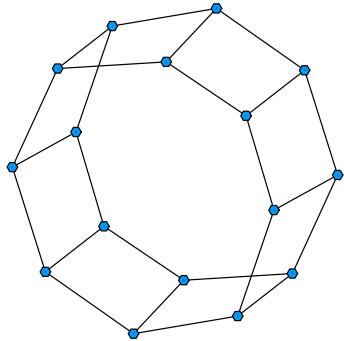
- **krozna\_lestev(n)**, ki ustvari graf krožne lestve z  $2n$  vozlišči (rešitev Program 32).
- **matrika(G::AbstractGraph, sprem)**, ki vrne matriko sistema (6.9) za dani graf  $G$  in seznam vozlišč, ki niso pritrjena sprem (rešitev Program 33),
- **desne\_strani(G::AbstractGraph, sprem, koordinate)**, ki vrne vektor desnih strani za sistem (6.7) (rešitev Program 34),
- **cg(A, b; atol=1e-8)**, ki poišče rešitev sistema  $Ax = b$  z metodo konjugiranih gradientov (rešitev Program 35) in
- **vlozi!(G::AbstractGraph, fix, tocke)**, ki poišče vložitev grafa  $G$  v  $\mathbb{R}^d$  s fizikalno metodo. Argument **fix** naj bo seznam fiksni vozlišč, argument **tocke** pa matrika s koordinatami točk. Metoda naj ne vrne ničesar, ampak naj vložitev zapiše kar v matriko **tocke** (rešitev Program 36).

## 6.4 Krožna lestev

Uporabimo napisano kodo za primer grafa krožna lestev. Graf je sestavljen iz dveh ciklov enake dolžine  $n$ , ki sta med seboj povezana z  $n$  povezavami. Za grafično predstavitev grafov bomo uporabili paket **GraphRecipes.jl**.

```
using Vaja06
G = krozna_lestev(8)

using GraphRecipes, Plots
graphplot(G, curves=false)
```

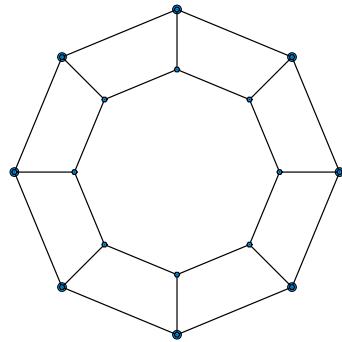


Slika 18: Graf krožna lestev s 16 vozlišči

Poščimo drugačno vložitev s fizikalno metodo, tako da vozlišča enega cikla enakomerno razporedimo po krožnici.

```
t = range(0, 2pi, 9)[1:end-1]
x = cos.(t)
y = sin.(t)
tocke = hcat(hcat(x, y)', zeros(2, 8))
# funkcija hcat zloži vektorje po stolpcih v matriko
fix = 1:8

vlozi!(G, fix, tocke)
graphplot!(G, x=tocke[1, :], y=tocke[2, :], curves=false)
```



Slika 19: Graf krožna lestev s 16 vozlišči vložen s fizikalno metodo. Zunanja vozlišča so fiksna, notranja pa postavljenatako, da so sile vzmeti na povezavah v ravovesju.

## 6.5 Dvodimenzionalna mreža

Preizkusimo algoritem na dvodimenzionalni mreži. Dvodimenzionalna mreža je graf, ki ga dobimo, če v ravnini pravokotnik razdelimo v pravokotno mrežo. Najprej pritrdimo štiri točke druge stopnje, ki ustrezajo ogliščem pravokotnika.

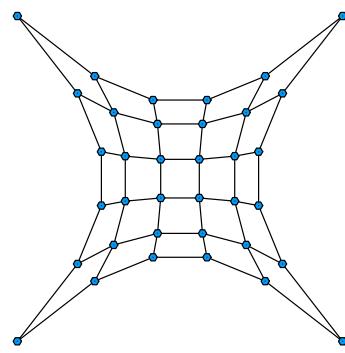
```

m, n = 6, 6
G = grid((m, n), periodic=false)

# vogali imajo stopnjo 2
vogali = filter(v -> degree(G, v) <= 2, vertices(G))
tocke = zeros(2, n * m)
tocke[:, vogali] = [0 0 1 1; 0 1 0 1]

vlozi!(G, vogali, tocke)
graphplot(G, x=tocke[1, :], y=tocke[2, :], curves=false)

```



Slika 20: Dvodimenzionalna mreža, vložena s fizikalno metodo. Pritrjeni so le vogali.

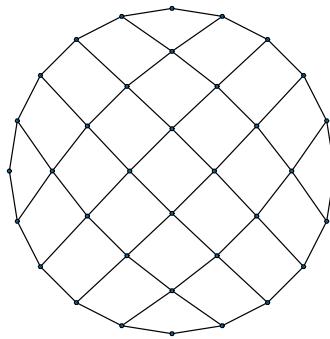
Sedaj pritrdimo cel rob in ga enakomerno razporedimo po krožnici.

```

m, n = 6, 6
G = grid((m, n), periodic=false)
rob = filter(v -> degree(G, v) <= 3, vertices(G))
urejen_rob = [rob[1]]

# uredi točke na robu v cikel
for i = 1:length(rob)-1
    sosedji = neighbors(G, urejen_rob[end])
    sosedji = intersect(sosedji, rob)
    sosedji = setdiff(sosedji, urejen_rob)
    push!(urejen_rob, sosedji[1])
end
t = range(0, 2pi, length(rob) + 1)[1:end-1]
tocke = zeros(2, n * m)
tocke[:, urejen_rob] = hcat(cos.(t), sin.(t))'
vlozi!(G, urejen_rob, tocke)
graphplot(G, x=tocke[1, :], y=tocke[2, :], curves=false)

```



Slika 21: Dvodimenzionalna mreža vložena s fizikalno metodo. Rob mreže je enakomerno razporejen po krožnici.

#### Kaj smo se naučili?

- Kako zapisati linearni sistem za spremenljivke, ki ustreza vozliščem grafa.
- Spoznali smo še eno iterativno metodo, ki deluje za pozitivno definitne matrike.

## 6.6 Rešitve

```
using Graphs
"""
G = krozna_lestev(n)

Ustvari graf krožna lestev z `2n` točkami.

function krozna_lestev(n)
    G = SimpleGraph(2 * n)
    # prvi cikel
    for i = 1:n-1
        add_edge!(G, i, i + 1)
    end
    add_edge!(G, 1, n)
    # drugi cikel
    for i = n+1:2n-1
        add_edge!(G, i, i + 1)
    end
    add_edge!(G, n + 1, 2n)
    # povezave med obema cikloma
    for i = 1:n
        add_edge!(G, i, i + n)
    end
    return G
end
```

Program 32: Ustvari graf krožna lestev

```

using SparseArrays

"""
A = matrika(G::AbstractGraph, sprem)

Poišči matriko linearnega sistema za vložitev grafa `G` s fizikalno metodo.
Argument `sprem` je vektor vozlišč grafa, ki nimajo določenih koordinat.
Indeksi v matriki `A` ustrezajo vozliščem v istem vrstnem redu,
kot nastopajo v argumentu `sprem`.
"""

function matrika(G::AbstractGraph, sprem)
    # preslikava med vozlišči in indeksi v matriki
    v_to_i = Dict([sprem[i] => i for i in eachindex(sprem)])
    m = length(sprem)
    A = spzeros(m, m)
    for i = 1:m
        vertex = sprem[i]
        sosedi = neighbors(G, vertex)
        for vertex2 in sosedi
            if haskey(v_to_i, vertex2)
                j = v_to_i[vertex2]
                A[i, j] = 1
            end
        end
        A[i, i] = -length(sosedi)
    end
    return A
end

```

Program 33: Ustvari matriko sistema za ravnoesje sil v grafu

```

"""
    b = desne_strani(G::AbstractGraph, sprem, koordinate)

Poišči desne strani linearnega sistema za eno koordinato vložitve grafa `G`
s fizikalno metodo. Argument `sprem` je vektor vozlišč grafa, ki nimajo
določenih koordinat. Argument `koordinate` vsebuje eno koordinato za vsa
vozlišča grafa. Metoda uporabi le koordinato vozlišč, ki so pritrjena.
Indeksi v vektorju `b` ustrezajo vozliščem v istem vrstnem redu,
kot nastopajo v argumentu `sprem`.

"""

function desne_strani(G::AbstractGraph, sprem, koordinate)
    set = Set(sprem)
    m = length(sprem)
    b = zeros(m)
    for i = 1:m
        v = sprem[i]
        for v2 in neighbors(G, v)
            if !(v2 in set) # dodamo le točke, ki so fiksirane
                b[i] -= koordinate[v2]
            end
        end
    end
    return b
end

```

Program 34: Izračunaj desne strani sistema za ravnovesje sil v grafu na podlagi koordinat pritrjenih  
vozlišč

```

using Logging
"""

x = cg(A, b; atol=1e-10)

Metoda konjugiranih gradientov za reševanje sistema enačb `Ax = b`
s pozitivno definitno matriko `A`. Argument `A` ni nujno matrika, lahko je
tudi drugega tipa, če ima implementirano množenje z vektorjem `b`.

Metoda ne preverja, ali je argument `A` pozitivno definiten.

"""

function cg(A, b; atol=1e-8)
    # za začetni približek vzamemo kar desne strani
    x = copy(b)
    r = b - A * b
    p = r
    res0 = sum(r .* r)
    for i = 1:length(b)
        Ap = A * p
        alpha = res0 / sum(p .* Ap)
        x = x + alpha * p
        r = r - alpha * Ap
        res1 = sum(r .* r)
        if sqrt(res1) < atol
            @info "Metoda KG konvergira po $i korakih."
            break
        end
        p = r + (res1 / res0) * p
        res0 = res1
    end
    return x
end

```

Program 35: Metoda konjugiranih gradientov za reševanje sistema  $Ax = b$  za pozitivno definitno matriko  $A$

```
"""
vlozi!(G::AbstractGraph, fix, tocke)
```

Pošči vložitev grafa `G` v prostor s fizikalno metodo. Argument `fix` vsebuje vektor vozlišč grafa, ki imajo določene koordinate. Argument `tocke` je začetna vložitev grafa. Koordinate vozlišč, ki niso pritrjena, bodo nadomeščene z novimi koordinatami.

Metoda ne vrne ničesar, ampak zapiše izračunane koordinate v matriko `tocke`.

```
"""
function vlozi!(G::AbstractGraph, fix, tocke)
    sprem = setdiff(vertices(G), fix)
    dim, _ = size(tocke)
    A = matrika(G, sprem)
    for k = 1:dim
        b = desne_strani(G, sprem, tocke[k, :])
        x = cg(-A, -b) # matrika A je negativno definitna
        tocke[k, sprem] = x
    end
end
```

Program 36: Pošči koordinate vložitve grafa v  $\mathbb{R}^d$  s fizikalno metodo

## 7 Invariantna porazdelitev Markovske verige

Z [Markovskimi verigami](#) smo se že srečali v poglavju o tridiagonalnih sistemih (Poglavlje 3). Spomnimo se, da je Markovska veriga zaporedje slučajnih spremenljivk  $X_k$ , ki opisujejo slučajni prehod po množici stanj. Stanja Markovske verige bomo označili kar z zaporednimi naravnimi števili  $1, 2, \dots n$ . Na vsakem koraku je Markovska veriga v določenem stanju  $X_k \in \{1, 2, \dots n\}$ . Porazdelitev na naslednjem koraku  $X_{k+1}$  je odvisna zgolj od poradelitve na prejšnjem koraku  $X_k$  in prehodnih verjetnosti za prehod iz stanja  $i$  v stanje  $j$ :

$$p_{ij} = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i). \quad (7.1)$$

Matrika  $\mathcal{P} = [p_{ij}]$ , katere elementi so prehodne verjetnosti za prehod iz stanja  $i$  v stanje  $j$ , imenujemo *prehodna matrika Markovske verige*.

Naj bo  $X_k$  Markovska veriga z  $n$  stanji in naj bo  $\mathbf{p}^{(k)} = [p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}]$  porazdelitev po stanjih na  $k$ -tem koraku ( $p_i^{(k)} = P(X_k = i)$ ).

Porazdelitev  $\mathbf{p}^k$  Markovske verige je *invariantna*, če je za vse  $k$  enaka:

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k. \quad (7.2)$$

Porazdelitev na naslednjem koraku  $X_{k+1}$  dobimo tako, da seštejemo verjetnosti po vseh možnih stanjih na prejšnjem koraku, pomnožene s pogojnimi verjetnostmi, da iz enega stanja preidemo v drugega:

$$\begin{aligned} p_i^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^n P(X_{k+1} = i \mid X_k = j) P(X_k = j) = \sum_{j=1}^n p_{ji} p_j^{(k)} \\ \mathbf{p}^{(k+1)} &= \mathcal{P}^T \mathbf{p}^{(k)}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Od tod sledi, da je porazdelitev  $\mathbf{p}$  *invariantna porazdelitev* Markovske verige s prehodno matriko  $\mathcal{P}$ , če velja:

$$\mathbf{p} = \mathcal{P}^T \mathbf{p}. \quad (7.4)$$

Povedano drugače: invariantna porazdelitev za Markovsko verigo s prehodno matriko  $\mathcal{P}$  je lastni vektor matrike  $\mathcal{P}$  z lastno vrednostjo 1.

### 7.1 Naloga

- Implementiraj potenčno metodo za iskanje največje lastne vrednosti in lastnega vektorja dane matrike.
- Uporabi potenčno metodo in poišči invariantno porazdelitev Markovske verige z dano prehodno matriko  $\mathcal{P}$ . Poišči invariantne porazdelitve za naslednja primera:
  - ▶ veriga, ki opisuje skakanje konja (skakača) po šahovnici,
  - ▶ veriga, ki opisuje brskanje po mini spletu s 5-10 stranmi (podobno spletni iskalniki [razvrščajo strani po relevantnosti](#)).

## 7.2 Limitna porazdelitev Markovske verige

Porazdelitev  $\mathbf{p}$  je *limitna porazdelitev* Markovske verige, če porazdelitve na posameznih korakih  $\mathbf{p}^k$  konvergirajo k  $\mathbf{p}$ . Limitna porazdelitev je vedno invariantna in potemtakem lastni vektor  $\mathcal{P}^T$  z lastno vrednostjo 1:

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}^T \mathbf{p}^{(k)} = \mathcal{P}^T \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(k)} = \mathcal{P}^T \mathbf{p}^\infty. \quad (7.5)$$

Ker so vsote elementov po vrsticah za prehodno matriko  $\mathcal{P}$  enake 1, je 1 lastna vrednost matrike  $\mathcal{P}$  in zato tudi lastna vrednost matrike  $\mathcal{P}^T$ . Posledično limitna porazdelitev  $\mathbf{p}^\infty$  vedno obstaja, ni pa nujno enolična.

Da se pokazati, da je 1 po absolutni vrednosti največja lastna vrednost matrike  $\mathcal{P}$  in  $\mathcal{P}^T$ , zato lahko invariantno porazdelitev poiščemo s [potenčno metodo](#).

## 7.3 Potenčna metoda

S potenčno metodo poiščemo lastni vektor matrike  $A$  s po absolutni vrednosti največjo lastno vrednostjo. Izberemo neničelen začetni vektor  $\mathbf{p}^{(0)} \neq 0$  in sestavimo zaporedje približkov:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{A\mathbf{x}^{(k)}}{\|A\mathbf{x}^{(k)}\|}. \quad (7.6)$$

Zaporedje  $\mathbf{x}^k$  konvergira k lastnemu vektorju matrike  $A$  z lastno vrednostjo, ki je po absolutni vrednosti največja. Če je takih lastnih vrednosti več (npr. 1 in  $-1$ ), se lahko zgodi, da potenčna metoda ne konvergira. Za normo, s katero delimo produkt  $A\mathbf{x}^{(k)}$ , lahko izberemo katerokoli vektorsko normo. Navadno je to neskončna norma  $\|\cdot\|_\infty$ , saj jo lahko najhitreje izračunamo.

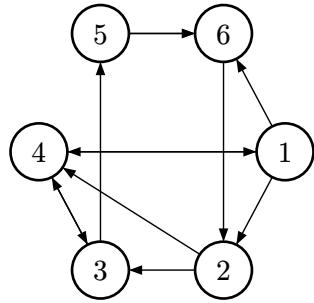
Napišimo program `x, it = potencna(A, x0)`, ki poišče lastni vektor za po absolutni vrednosti največjo lastno vrednost matrike  $A$  (Program 37).

## 7.4 Razvrščanje spletnih strani

Spletni iskalniki želijo uporabniku prikazati čim relevantnejše rezultate. Zato morajo ugotoviti, katere spletne strani so pomembnejše od drugih. Brskanje po spletu lahko modeliramo z Markovsko verigo, kjer na vsakem koraku obiščemo eno spletno stran. Na vsaki spletne strani, ki jo obiščemo, naključno izberemo povezavo, ki nas vodi do naslednje strani. Če spletne strani nima povezav, se lahko vrnemo nazaj na prejšnjo stran ali pa naključno izberemo novo stran. Limitna porazdelitev pove, kolikšen delež vseh obiskov pripada posamezni spletne strani, če se naključno sprehajamo po spletu. Večji delež obiskov ima spletne strane, pomembnejša je.

Limitno porazdelitev Markovske verige s prehodno matriko  $\mathcal{P}$  poiščemo s potenčno metodo, kot lastni vektor matrike  $\mathcal{P}^T$  za lastno vrednost 1.

Približno tako deluje algoritom za razvrščanje spletnih strani po pomembnosti [Page Rank](#), ki sta ga prva opisala in uporabila ustanovitelja podjetja Google Larry Page in Sergey Brin.



Slika 22: Mini splet s 6 stranmi

Prehodna matrika verige je

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Poščimo invariantno porazdelitev s potenčno metodo:

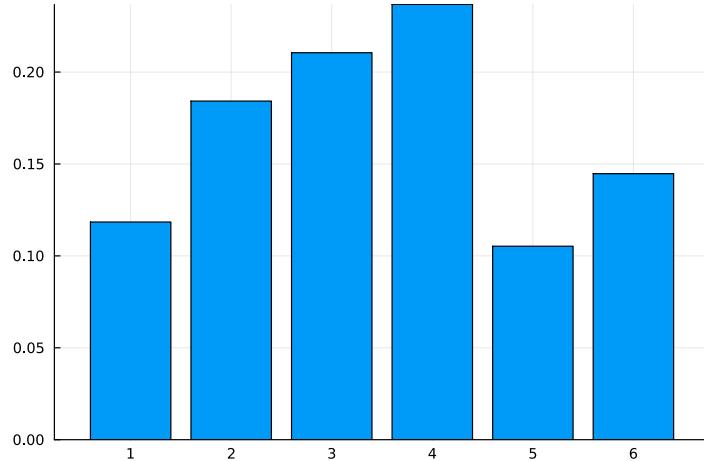
```
P = [
0 1/3 0 1/3 0 1/3;
0 0 1/2 1/2 0 0;
0 0 0 1/2 1/2 0;
1/2 0 1/2 0 0 0;
0 0 0 0 0 1;
0 1 0 0 0 0
]
x, it = potencna(P', rand(6))
```

Preverimo, ali je dobljeni vektor res lastni vektor za lastno vrednost 1, tako da izračunamo razliko  $\mathcal{P}^T x - x$  in preverimo, da je razlika blizu 0:

```
delta = P' * x - x
6-element Vector{Float64}:
-1.761793266830125e-9
8.700961284802133e-9
-5.06670871924797e-9
-4.618036397729952e-9
-2.595118120396478e-9
5.3406952194023916e-9
```

Invariantno porazdelitev predstavimo s stolpčnim diagramom:

```
x = x / sum(x)
using Plots
bar(x, label=false)
```

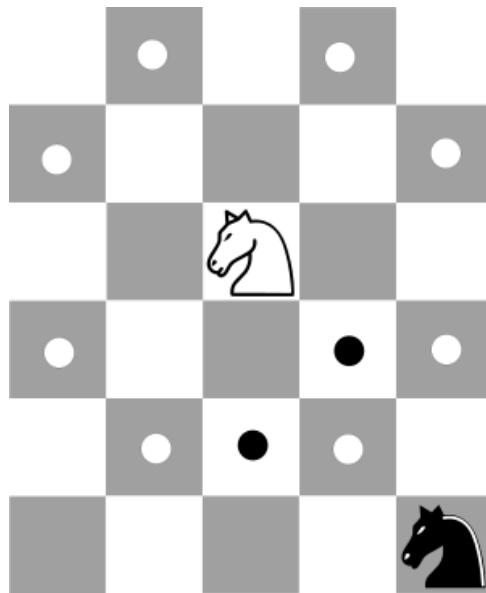


Slika 23: Delež obiskov posamezne strani v limitni porazdelitvi

Iz diagrama vidimo, da je najpogosteje obiskana spletna stran 4, najredkeje pa spletna stran 5.

## 7.5 Skakanje konja po šahovnici

Tudi naključno skakanje konja po šahovnici lahko opišemo z Markovsko verigo. Stanja Markovske verige so polja na šahovnici, prehodne verjetnosti pa določimo tako, da konj v naslednji potezi naključno skoči na eno od polj, ki so mu dostopna. Predpostavimo, da so vsa dostopna polja enako verjetna.



Slika 24: Možne poteze, ki jih lahko naredita beli in črn konj na  $5 \times 5$  šahovnici

Stanja označimo s pari indeksov  $(i, j)$ , ki označujejo posamezno polje. Invariantna porazdelitev je podana z matriko, katere elementi  $p_{ij}$  so enaki verjetnosti, da je konj na polju  $(i, j)$ . Ponovno se srečamo s problemom iz prejšnjega poglavja (Poglavlje 4), kako elemente matrike postaviti v vektor. Elemente matrike zložimo v vektor po stolpcih. Preslikava med indeksi  $i, j$  v matriki in indeksom  $k$  v vektorju je podana s formulami

$$\begin{aligned}
 k &= i + (j - 1)m \\
 j &= \lfloor (k - 1)/m \rfloor \\
 i &= ((k - 1) \bmod m) + 1.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Za lažje delo napišimo funkciji

- `k = ij_v_k(i, j, m)` in
- `i, j = k_v_ij(k, m)`,

ki izračunata preslikavo med indeksi  $i, j$  v matriki in indeksom  $k$  v vektorju (Program 38).

Nato definirajmo:

- podatkovno strukturo `Konj(m, n)`, ki predstavlja Markovsko verigo za konja na  $m \times n$  šahovnici (Program 39) in
- funkcijo `prehodna_matrika(k::Konj)`, ki vrne prehodno matriko za Markovsko verigo za konja (Program 40).

Invariantno porazdelitev poskusimo poiskati s potenčno metodo:

```
P = prehodna_matrika(Konj(8, 8))

x, it = potencna(P', rand(64))
```

Potenčna metoda ne konvergira, saj ima matrika  $\mathcal{P}^T$  dve dominantni lastni vrednosti 1 in  $-1$ . Skoraj vsi začetni približki vsebujejo tako komponento v smeri lastnega vektorja za 1 kot tudi komponento v smeri lastnega vektorja za  $-1$ . Zaporedje približkov v limiti začne preskakovati med dvema vrednostima:

$$\frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{-1}}{\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{-1}\|} \text{ in } \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{-1}}{\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{-1}\|}, \quad (7.9)$$

kjer je  $\mathbf{v}_1$  lastni vektor za 1 in  $\mathbf{v}_{-1}$  lastni vektor za  $-1$ .

```
# funkcija `eigen` iz modula LinearAlgebra izračuna lastni razcep matrike
lambda, v = eigen(Matrix(P'))
# lambda ima tudi imaginarne komponente, ki pa so zanemarljivo majhne
lambda = real.(lambda)
println("Največja in najmanjša lastna vrednost matrike P':")
println("\$(maximum(lambda)), \$(minimum(lambda))")

Največja in najmanjša lastna vrednost matrike P':
1.000000000000018, -1.0000000000000018
```

Težavo rešimo s preprostim premikom. Če matriki prištejemo večkratnik identitete, se lastni vektorji ne spremenijo, le lastne vrednosti se premaknejo. Če so  $(\lambda_1, \mathbf{v}_1), (\lambda_2, \mathbf{v}_2), \dots$  lastni pari matrike  $A$ , so:

$$(\lambda_1 + \delta, \mathbf{v}_1), (\lambda_2 + \delta, \mathbf{v}_2) \dots \quad (7.10)$$

lastni pari matrike

$$A + \delta I. \quad (7.11)$$

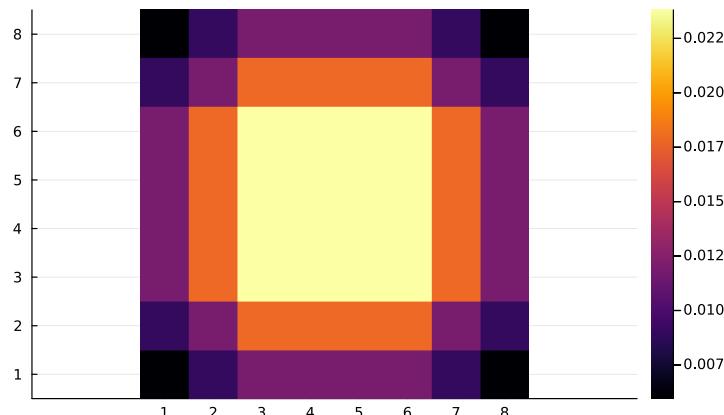
S premikom  $\mathcal{P}^T + I$  dosežemo, da se lastne vrednosti premaknejo za 1 v pozitivni smeri in se lastna vrednost  $-1$  premakne v 0, lastna vrednost 1 pa v 2. Tako lastna vrednost 2 postane edina dominanta lastna vrednost. Za matriko  $\mathcal{P}^T + I$  potenčna metoda konvergira k lastnemu vektorju za lastno vrednost 2, ki je hkrati lastni vektor matrike  $\mathcal{P}^T$  za lastno vrednost 1.

```

x, it = potencna(P' + I, rand(64))
x = x / sum(x) # vrednosti normiramo, da je vsota enaka 1
porazdelitev = reshape(x, 8, 8)

using Plots
heatmap(porazdelitev, aspect_ratio=1, xticks=1:8, yticks=1:8)

```



Slika 25: Limitna porazdelitev za konja na standardni  $8 \times 8$  šahovnici. Svetlejša polja so pogosteje obiskana. Limitna porazdelitev je ena sama in ni odvisna od porazdelitve na začetku.

#### Kaj smo se naučili?

- Tudi pri iskanju lastnih vektorjev in vrednosti se iterativne metode dobro obnesejo.
- Potenčna metoda se obnese tudi pri matrikah zelo velikih dimenzij.
- Problem lastnih vrednosti se pojavi pri študiju Markovskih verig.

## 7.6 Rešitve

```

using LinearAlgebra

"""
    x, it = potencna(A)

Poišči lastni vektor matrike `A` za največjo lastno vrednost s potenčno metodo.

"""
function potencna(A, x0; atol=1e-8, maxit=1000)
    for i = 1:maxit
        x = A * x0
        x = x / norm(x, Inf)
        if norm(x - x0, Inf) < atol
            return x, i
        end
        x0 = x
    end
    throw("Potenčna metoda ne konvergira po $maxit korakih!")
end

```

Program 37: Potenčna metoda poišče lastni vektor za po absolutni vrednosti največjo lastno vrednost dane matrike.

```

ij_v_k(i, j, n) = i + (j - 1) * n

function k_v_ij(k, m)
    j, i = divrem(k - 1, m)
    return (i + 1, j + 1)
end

```

Program 38: Preslikave med indeksi v matriki in indeksi v vektorju, ki je sestavljen iz stolpcev matrike

```

"""
Konj(m, n)

Podatkovna struktura, ki označuje Markovsko verigo za konja na šahovnici
dimenzije `m` x `n`.

"""
struct Konj
    m
    n
end

```

Program 39: Podatkovni tip, ki predstavlja Markovsko verigo za konja na šahovnici

```

using SparseArrays
"""

P = prehodna_matrika(k::Konj)

Poišči prehodno matriko za Markovsko verigo, ki opisuje skanje figure konja po
šahovnici.
"""

function prehodna_matrika(konj::Konj)
    m = konj.m
    n = konj.n
    N = m * n
    P = spzeros(N, N)
    skoki = [(1, 2), (2, 1), (-1, 2), (-2, 1),
              (1, -2), (2, -1), (-1, -2), (-2, -1)]
    for k = 1:N
        i0, j0 = k_v_ij(k, m)
        for skok in skoki
            i = i0 + skok[1]
            j = j0 + skok[2]
            if i >= 1 && i <= m && j >= 1 && j <= n
                k1 = ij_v_k(i, j, m)
                P[k, k1] = 1
            end
        end
        P[k, :] /= sum(P[k, :]) # normiramo vrstico, da je vsota enaka 1
    end
    return P
end

```

Program 40: Funkcija, ki ustvari prehodno matriko za Markovsko verigo za konja na šahovnici

## 8 Spektralno razvrščanje v gruče

Razvrščanje v gruče ali gručenje je postopek pri katerem množico objektov razdelimo v nekaj skupin ali gruč, v katerih so objekti, ki so si v nekem smislu podobni. Ogledali si bomo metodo, ki s spektralno analizo Laplaceove matrike podobnostnega grafa podatke preslika v prostor, v katerem jih nato preprosteje razvrstimo z algoritmi gručenja. Sledili bomo postopku imenovanemu spektralno gručenje, kot je opisan v [9].

### 8.1 Naloga

- Napiši funkcijo, ki zgradi podobnostni graf za podatke, podane kot oblak točk v  $\mathbb{R}^d$ . V podobnostnem grafu je vsaka točka v oblaku vozlišče, povezani pa so vsi pari točk  $i$  in  $j$ , ki so za manj kot  $\varepsilon$  oddaljeni za primerno izbrani  $\varepsilon$ .
- Napiši funkcijo, ki za dano simetrično matriko poišče  $k$  po absolutni vrednosti najmanjših lastnih vrednosti in pripradajoče lastne vektorje. Uporabi inverzno iteracijo za  $k$  vektorjev in na vsakem koraku s QR razcepom poskrbi, da so paroma ortogonalni. Faktor  $Q$  v QR razcepnu konvergira k lastnim vektorjem, diagonalna faktorja  $R$  pa h  $k$  po absolutni vrednosti najmanjšim lastnim vrednostim matrike.
- Funkcijo za iskanje lastnih vektorjev uporabi na Laplaceovi matriki podobnostnega grafa podatkov. Za primer podatkov naključno generiraj mešanico treh različnih Gaussovih porazdelitev. Komponente lastnih vektorjev uporabi kot nove koordinate in podatke predstavi v novih koordinatah.

### 8.2 Podobnostni graf in Laplaceova matrika

Podatke (množico točk v  $\mathbb{R}^d$ ) želimo razvrstiti v več gruč. Osnova za spektralno gručenje je *podobnostni uteženi graf*, ki povezuje točke, ki so si v nekem smislu blizu. Podobnostni graf lahko ustvarimo na več načinov:

- **$\varepsilon$  okolice:** s točko  $x_k$  povežemo vse točke, ki ležijo v  $\varepsilon$  okolini te točke
- **$k$  najbližji sosedji:**  $x_k$  povežemo z  $x_i$ , če je  $x_i$  med  $k$  najbližjimi točkami. Tako dobimo usmerjen graf, zato ponavadi upoštevamo povezavo v obe smeri.
- **poln utežen graf:** povežemo vse točke, vendar povezave utežimo glede na razdaljo. Pogosto uporabljeni utež je nam znana [radialna bazna funkcija](#):

$$w(x_i, x_k) = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_k\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (8.1)$$

pri kateri s parametrom  $\sigma$  določamo velikost okolic.

Uteženemu grafu podobnosti z matriko uteži

$$W = [w_{ij}] \quad (8.2)$$

priredimo [Laplaceovo matriko](#)

$$L = D - W, \quad (8.3)$$

kjer je  $D = [d_{ij}]$  diagonalna matrika z elementi  $d_{ii} = \sum_{j \neq i} w_{ij}$ . Če graf ni utežen, namesto matrike uteži uporabimo [matriko sosednosti](#). Laplaceova matrika  $L$  je simetrična, nenegativno definitna in ima vedno eno lastno vrednost enako 0 za lastni vektor iz samih enic. Laplaceova matrika je pomembna v

spektralni teoriji grafov, ki preučuje lastnosti grafov s pomočjo analize lastnih vrednosti in vektorjev matrik. Knjižnica [Laplacians.jl](#) je namenjena spektralni teoriji grafov.

### 8.3 Algoritem

Velja izrek, da ima Laplaceova matrika natanko toliko lastnih vektorjev za lastno vrednost 0, kot ima graf komponent za povezanost. Na prvi pogled se zdi, da bi lahko bile gruče kar komponente grafa, a se izkaže, da to ni najbolje. Namesto tega bomo gruče poiskali s standardnimi metodami gručenja v drugem koordinatnem sistemu, ki ga določajo lastni podprostori Laplaceove matrike podobnognega grafa. Postopek je sledeči:

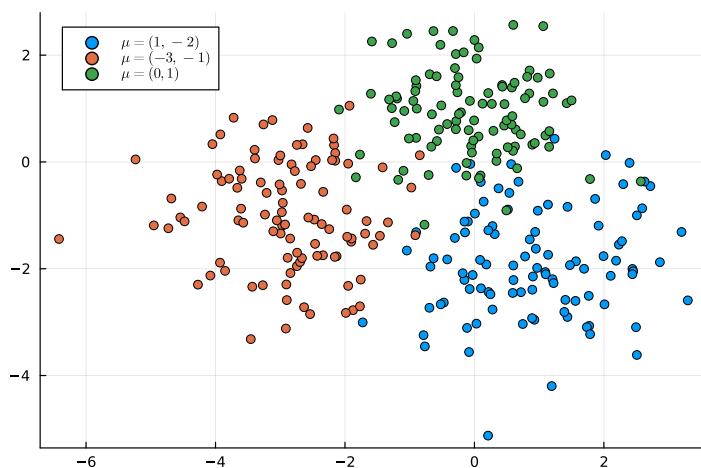
- Poiščemo  $k$  najmanjših lastnih vrednosti za Laplaceovo matriko in izračunamo njihove lastne vektorje.
- Označimo matriko lastnih vektorjev  $Q = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ . Stolpci  $Q^T$  ustrezajo koordinatam točk v novem prostoru.
- Za stolpce matrike  $Q^T$  izvedemo izbran algoritem gručenja (npr. algoritem  $k$  povprečij).

V tej vaji bomo postopek gručenja izpustili. Ogledali si bomo grafično, kako je videti oblak točk v novem koordinatnem sistemu.

### 8.4 Primer

Algoritem preverimo na mešanici treh Gaussovih porazdelitev.

```
using Plots
using Random
m = 100;
Random.seed!(12)
x = [1 .+ randn(m, 1); -3 .+ randn(m, 1); randn(m, 1)];
y = [-2 .+ randn(m, 1); -1 .+ randn(m, 1); 1 .+ randn(m, 1)];
scatter(x[1:100], y[1:100], label="\$\mu = (1, -2)\$")
scatter!(x[101:200], y[101:200], label="\$\mu = (-3, -1)\$")
scatter!(x[201:300], y[201:300], label="\$\mu = (0, 1)\$")
```



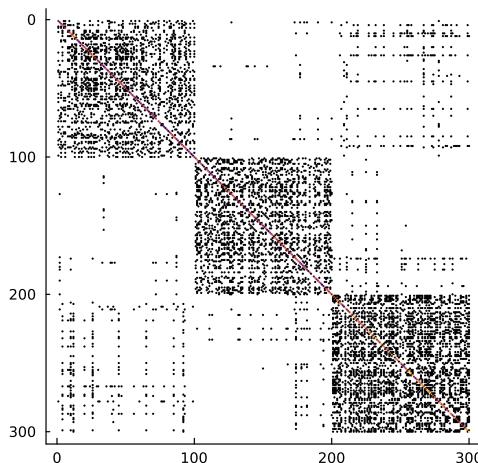
Slika 26: Mešanica treh različnih Gaussovih porazdelitev v ravnini

Izračunamo graf sosednosti z metodo  $\varepsilon$  okolic in poiščemo Laplaceovo matriko dobljenega grafa.

```

using Vaja08
using SparseArrays
tocke = hcat(x, y)'
r = 1.0
G = graf_eps(tocke, r)
L = laplace(G)
spy(L, legend=false)

```



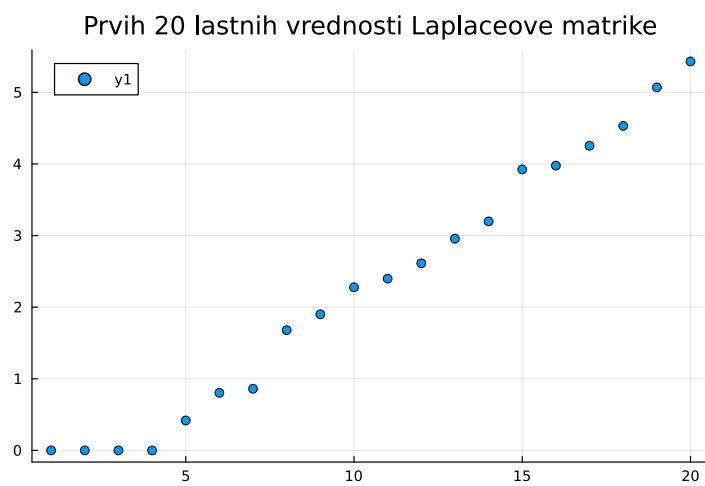
Slika 27: Neničelni elementi Laplaceove matrike

Izračunamo lastne vrednosti Laplaceove matrike dobljenega grafa:

```

using LinearAlgebra
razcep = eigen(Matrix(L))
scatter(razcep.values[1:20], title="Prvih 20 lastnih vrednosti Laplaceove matrike")

```



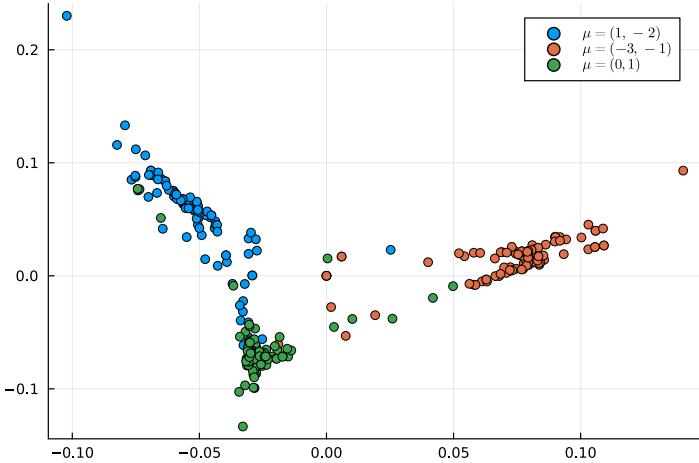
Slika 28: Lastne vrednosti Laplaceove matrike

Vidimo, da sta peta in šesta lastna vrednost najmanjši vrednosti, ki sta različni od 0. Komponente lastnih vektorjev za peto in šesto lastno vrednost uporabimo za nove koordinate.

```

xnov = razcep.vectors[:, 5]
ynov = razcep.vectors[:, 6]
scatter(xnov[1:100], ynov[1:100], label="$\mu=(1, -2)$")
scatter!(xnov[101:200], ynov[101:200], label="$\mu=(-3, -1)$")
scatter!(xnov[201:300], ynov[201:300], label="$\mu=(0, 1)$")

```



Slika 29: Vložitev točk v nov prostor, določen z lastnima vektorjem Laplaceove matrike. Slika ilustrira, kako lahko s preslikavo v drug prostor gruče postanejo bolj očitne.

Seveda se pri samem algoritmu gručenja ni treba omejiti le na dva lastna vektorja in iskati katere kombinacije komponent najbolj ločijo gruče. Preprosto siziberemo lastne vektorje za  $k$  najmanjših nečelnih lastnih vrednosti in algoritem gručenja avtomatsko bolj upošteva dimenzije, v katerih so gruče najbolj razčlenjene.

## 8.5 Inverzna potenčna metoda

Ker nas zanima le nekaj najmanjših lastnih vrednosti, lahko za izračun uporabimo [inverzno potenčno metodo](#). Pri inverzni potenčni metodi zgradimo zaporedje približkov z rekurzivno formulo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{A^{-1}\mathbf{x}^{(k)}}{\|A^{-1}\mathbf{x}^{(k)}\|}. \quad (8.4)$$

Zaporedje približkov  $\mathbf{x}^{(k)}$  konvergira k lastnemu vektorju za najmanjšo lastno vrednost matrike  $A$  za skoraj vse izbire začetnega približka  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

*Namesto inverza uporabite LU razcep ali drugo metodo za reševanje linearnega sistema*

V inverzni iteraciji moramo večkrat zaporedoma izračunati vrednost

$$A^{-1} \mathbf{x}^{(k)}. \quad (8.5)$$

Za izračun te vrednosti pa v resnici ne potrebujemo inverzne matrike  $A^{-1}$ . Računanje inverzne matrike je namreč časovno zelo zahtevna operacija, zato se ji, razen v nizkih dimenzijah, če je le mogoče, izognemo. Produkt  $\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$  je rešitev linearnega sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  in metode za reševanje sistema so bolj učinkovite kot računanje inverza  $A^{-1}$ .

Inverz  $A^{-1}$  matrike  $A$  lahko nadomestimo tudi z razcepom matrike  $A$ . Če na primer uporabimo LU razcep  $A = LU$ , lahko  $A^{-1} \mathbf{b}$  izračunamo tako, da rešimo sistem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  oziroma  $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$  v dveh korakih

$$\begin{aligned} L\mathbf{y} &= \mathbf{b} \text{ in} \\ U\mathbf{x} &= \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

ki sta časovno toliko zahtevna, kot je množenje z matriko  $A^{-1}$ . Programski jezik julia ima za ta namen prav posebno metodo `factorize`, ki za različne vrste matrik izračuna najbolj primeren razcep. Rezultat metode `factorize` je vrednost posebnega tipa, za katero lahko uporabimo operator `\`, da učinkovito izračunamo rešitev sistema:

```
julia> F = factorize(A)
julia> x = F\b # ekvivalentno A\b, a učinkovitejše
```

Napišimo funkcijo `inviter(resi, x0)`, ki poišče lastni par za najmanjšo lastno vrednost matrike (rešitev je Program 41). Matrika ni podana eksplicitno, ampak je podana le funkcija `resi`, ki reši sistem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  za dani vektor  $\mathbf{b}$ .

## 8.6 Inverzna iteracija s QR razcepom

Laplaceova matrika je simetrična, zato so lastni vektorji ortogonalni. Lastne vektorje lahko poiščemo tako, da iteracijo izvajamo na več vektorjih hkrati in nato na dobljeni bazi izvedemo ortogonalizacijo s QR razcepom. Tako dobljeno zaporedje lastnih vektorjev konvergira k lastnim vektorjem za po absolutni vrednosti najmanjše lastne vrednosti. Priredimo sedaj funkcijo `inviter`, da za začetni približek sprejme  $k \times n$  matriko in izvede inverzno iteracijo s QR razcepom. Napišimo funkcijo `inviterqr(resi, X0)`, ki poišče lastne vektorje za prvih nekaj najmanjših lastnih vrednosti (rešitev je Program 42). Število lastnih vektorjev, ki jih metoda poišče, naj bo določeno z dimenzijami začetnega približka  $X0$ .

Laplaceova matrika grafa je pogosto redka. Zato se splača uporabiti eno izmed iterativnih metod. Poleg tega je Laplaceova matrika simetrična in pozitivno semidefinitna. Zato za rešitev sistema uporabimo metodo [konjugiranih gradientov](#). Težava je, ker ima Laplaceova matrika grafa tudi lastno vrednost 0, zato metoda konjugiranih gradientov ne konvergira, če jo uporabimo na Laplaceovi matriki. To lahko rešimo s preprostim premikom Laplaceove matrike za  $\varepsilon I$ .

## 8.7 Premik

Inverzna iteracija (8.4) konvergira k lastnemu vektorju za najmanjšo lastno vrednost. Lastne vektorje za katero drugo lastno vrednost, poiščemo preprosto s premikom. Naj ima matrika  $A$  lastne vrednosti  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ , potem ima matrika

$$A - \delta I \quad (8.7)$$

lastne vrednosti  $\lambda_1 - \delta, \lambda_2 - \delta \dots \lambda_n - \delta$ . Če izberemo  $\delta$  dovolj blizu  $\lambda_k$  lahko poskrbimo, da je  $\lambda_k - \delta$  najmanjša lastna vrednost matrike  $A - \delta I$ . Tako lahko z inverzno iteracijo za matriko  $A - \delta I$  poiščemo lastni vektor za poljubno lastno vrednost.

Podobno lahko premaknemo Laplaceovo matriko, da postane strogo pozitivno definitna. Potem lahko za reševanje sistema uporabimo metodo konjugiranih gradientov. Namesto da računamo lastne vrednosti in vektorje matrike  $L$ , iščemo lastne vrednosti in vektorje malce premaknjene matrike  $L + \varepsilon I$ , ki ima enake lastne vektorje kot  $L$ .

```
A = L + 0.1 * I # premik, da dobimo pozitivno definitno matriko
n = size(L, 1)
# poiščemo prvih 10 lastnih vektorjev
X, lambda = inviterqr(B -> Vaja08.cgmat(A, B), ones(n, 10), 1000)
```

```
[ Info: Metoda KG konvergira po 4 korakih.
[ Info: Metoda KG konvergira po 8 korakih.
[ Info: Metoda KG konvergira po 9 korakih.
Inverzna iteracija s QR razcepom se je končala po 205 korakih.
([-0.05773502691368182      -0.005802588523008474      ...      -0.005040782182521457
 -0.009367575049040844;      -0.057735026915228076      -0.0058025885339489935      ...
 -0.0350631801228755      -0.022053224269263837;      ...      ;      -0.05773502691797562
 -0.005802588530438843      ...      0.005847112228594752      -0.0012243787826357164;
 -0.05773502691890123      -0.005802588531702566      ...      0.009046192382646001
 0.0025458880730825474],      [0.10000000000000134,      0.09999999999999998,
 0.5179003965208074,      0.903836883326621,      0.9609470847648324,      1.7793419216657385,
 0.10000000000000002,      2.001222553034165,      2.378682969684288,      2.4982258638596693])
```

Vidimo, da metoda konjugiranih gradientov zelo hitro konvergira za naš primer. Z inverzno iteracijo s QR razcepom smo učinkovito poiskali lastne vektorje Laplaceove matrike za najmanše lastne vrednosti. Ti lastni vektorji pa izboljšajo proces gručenja.

### Velike količine podatkov zahtevajo učinkovite algoritme

V našem primeru je bila količina podatkov majhna. Vendar bi z inverzno iteracijo s QR razcepom in metodo konjugiranih gradientov lahko obdelali tudi bistveno večje količine podatkov, pri katerih bi splošne metode, kot na primer QR iteracija za iskanje lastnih parov ali LU razcep za reševanje sistema, odpovedale.

Z naraščanjem količine podatkov je nujno izbrati učinkovite metode. V praksi se količine podatkov merijo v miljonih in miljardah. Metode s kvadratno ali višjo časovno ali prostorsko zahtevnostjo so pri tako velikih količinah podatkov neuporabne. V tem primeru je mogoče izvesti spektralno gručenje le, če uporabimo učinkovite metode kot sta *inverzna iteracija s QR razcepom* in *metoda konjugiranih gradientov*.

## 8.8 Rešitve

```
"""
v, lambda = inviter(resi, x0)

Poišči lastno vrednost `lambda` in lastni vektor `v` za matriko z inverzno iteracijo.
Argument `resi` je funkcija, ki za dani vektor `b` poišče rešitev sistema `Ax=b`.
Argument `x0` je začetni približek.

# Primer

```jl
A = [3 1 1; 1 1 3; 1 3 4]
F = lu(A)
resi(b) = F \ b
v, lambda = inviter(resi, [1., 1., 1.])
```

"""

function inviter(resi, x0, maxit=100, tol=1e-10)
    # poiščemo po absolutni največji element v x0
    ls, index = findmax(abs, x0)
    ls = x0[index]
    x = x0 / ls # normiramo, da je največji element enak 1
    for i = 1:maxit
        x = resi(x) # poišči rešitev sistema Ay = x
        ln, index = findmax(abs, x)
        ln = x[index]
        x = x / ln # x normiramo, da je največji element enak 1
        if abs(ln - ls) < tol
            println("Inverzna potenčna metoda se je končala po $i korakih.")
            return x, 1 / ln
        end
        ls = ln
    end
    throw("Inverzna potenčna metoda ne konvergira v $maxit korakih.")
end
```

Program 41: Inverzna iteracija

```

"""
x, lambda = inviterqr(resi, x0)

Poišči nekaj najmanjših lastnih vrednosti in lastnih vektorjev z inverzno iteracijo
s QR razcepom.

Argument `resi` je funkcija, ki za dani vektor `b` poišče rešitev sistema `Ax=b`.

Argument `x0` je matrika začetnih približkov. Toliko, kot je stolpcev v matriki
`x0`, toliko lastnih parov vrne funkcija.

"""

function inviterqr(resi, x0, maxit=100, tol=1e-10)
    _, m = size(x0)
    x = x0
    ls = Inf * ones(m)
    for i = 1:maxit
        x = resi(x) # poišči rešitev sistema Ay = x
        Q, R = qr(x)
        x = Matrix(Q)
        ln = diag(R) # lastne vrednosti A^(-1) so na diagonali R
        if norm(ln - ls, Inf) < tol
            println("Inverzna iteracija s QR razcepom se je končala po $i korakih.")
            return x, 1 ./ ln
        end
        ls = ln
    end
    throw("Inverzna iteracija s QR razcepom ne konvergira v $maxit korakih.")
end

```

Program 42: Inverzna iteracija s QR razcepom

```

"""
A = graf_eps(oblak, epsilon)

Poišči podobnostni graf ε okolic za dani oblak točk.
Argument `oblak` je `k x n` matrika, katere stolpci so koordinate točk v oblaku.
Funkcija vrne matriko sosednosti A za podobnostni graf.

"""

function graf_eps(oblak, epsilon)
    _, n = size(oblak)
    A = spzeros(n, n)
    for i = 1:n
        for j = i+1:n
            if norm(oblak[:, i] - oblak[:, j]) < epsilon
                A[i, j] = 1
                A[j, i] = 1
            end
        end
    end
    return A
end

```

Program 43: Graf podobnosti z  $\epsilon$  okolicami

```

"""
L = laplace(A)

Poišči Laplaceovo matriko za dani graf, podan z matriko sosednosti `A`.
Laplaceova matrika grafa ima na diagonali stopnje točk, izven diagonale
pa vrednosti -1 ali 0, odvisno, ali sta indeksa povezana v grafu ali ne.
"""

laplace(A) = spdiagm(vec(sum(A, dims=2))) - A

```

Program 44: Laplaceova matrika grafa

## 8.9 Testi

```

@testset "Inverzna iteracija" begin
    Q = [2 2 1; 1 -2 2; -2 1 2]
    A = Q * diagm([2.0, 3.0, 4.0]) / Q
    F = factorize(A)
    v, lambda = inviter(b -> F \ b, [1, 1, 1])
    @test isapprox(lambda, 2)
    cosinus = dot(v, Q[:, 1]) / norm(v) / norm(Q[:, 1])
    @test isapprox(abs(cosinus), 1)
end

```

Program 45: Test za inverzno iteracijo

```

@testset "Inverzna iteracija QR" begin
    Q = [2 2 1; 1 -2 2; -2 1 2]
    A = Q * diagm([2.0, 3.0, 4.0]) / Q
    F = factorize(A)
    v, lambda = inviterqr(b -> F \ b, [1 1; 1 1; 1 1])
    @test isapprox(lambda, [2, 3])
    cosinus = dot(v[:, 1], Q[:, 1]) / norm(v[:, 1]) / norm(Q[:, 1])
    @test isapprox(abs(cosinus), 1)
end

```

Program 46: Test za inverzno iteracijo s QR razcepom

```

@testset "Graf sosednosti" begin
    oblak = [1 2 3; 1 2 3]
    A = graf_eps(oblak, 2)
    @test isapprox(A, [0 1 0; 1 0 1; 0 1 0])
end

```

Program 47: Test za matriko sosednosti z  $\varepsilon$  okolicami

## 9 Konvergenčna območja nelinearnih enačb

Za razliko od sistemov linearnih enačb, ki imajo preproste množice rešitev, so množice rešitev za sisteme nelinearnih enačb zapletene in nepredvidljive. Zato tudi reševanje nelinearnih sistemov z numeričnimi metodami ni tako preprosto kot pri linearnih sistemih. Numerične metode lahko konvergenco k določeni rešitvi zagotovijo le ob dodatnih predpostavkah, ki jih je težko v naprej izpolniti. V tej vaji si bomo na preprostem primeru ogledali, kako se obnaša Newtonova metoda, ko izbiramo različne začetne približke.

### 9.1 Naloga

- Implementiraj Newtonovo metodo za reševanje sistemov nelinearnih enačb.
- Poisci rešitev dveh nelinearnih enačb z dvema neznankama:

$$\begin{aligned}x^3 - 3xy^2 &= 1 \\ 3x^2y - y^3 &= 0.\end{aligned}\tag{9.1}$$

- Sistem nelinearnih enačb ima navadno več rešitev. Grafično predstavi, h kateri rešitvi konvergira Newtonova metoda v odvisnosti od začetnega približka. Začetne približke izberi na pravokotni mreži. Vozliščem v mreži priredi različne barve, glede na to, h kateri rešitvi konvergira Newtonova metoda. Ves postopek zapiši v funkcijo `konvergencno_obmocje`.

### 9.2 Newtonova metoda za sisteme enačb

Išečmo rešitev sistem  $n$  nelinearnih enačb z  $n$  neznankami:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\end{aligned}\tag{9.2}$$

kjer so  $f_1, f_2, \dots, f_n$  nelinearne funkcije več spremenljivk. Sistem (9.2) lahko zapišemo v vektorski obliki:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\tag{9.3}$$

kjer sta  $\mathbf{0} = [0, 0, \dots]^T$  in  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots]^T \in \mathbb{R}^n$   $n$ -dimenzionalna vektorja,  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  pa vektorska funkcija z vektorskimi argumentom. Komponente vektorske funkcije  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  so leve strani nelinearnih enačb (9.2):

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.\tag{9.4}$$

Denimo, da je  $\mathbf{x}^{(k)}$  približek za rešitev enačbe (9.3). Funkcijo  $\mathbf{F}$  lahko, podobno kot funkcijo ene spremenljivke, v točki  $\mathbf{x}^{(k)}$  aproksimiramo z linearno funkcijo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{JF}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + \mathcal{O}\left((\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)})^2\right),\tag{9.5}$$

kjer je  $\mathbf{JF}(\mathbf{x})$  Jacobijeva matrika parcialnih odvodov komponent  $f_i(x_1, x_2, \dots)$  po koordinatah  $x_j$

$$\text{JF}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Naslednji približek  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  v Newtonovi iteraciji dobimo kot rešitev linearnega sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) &= \mathbf{0} \\ \text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x}^{(k+1)} &= \text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Formulo za naslednji približek  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  lahko formalno zapišemo kot:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (9.8)$$

pri čemer formule ne smemo jemati dobesedno, saj inverzne matrike  $\text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}$  dejansko ne izračunamo. Izraz  $\text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$  poiščemo tako, da rešimo sistem  $\text{JF}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$  (npr. z LU razcepom ali s kakšno drugo metodo za reševanje linearnih sistemov).

Napišimo funkcijo `newton(f, jf, x0)`, ki poišče rešitev sistema nelinearnih enačb z Newtonovo metodo (Program 48).

Poglejmo si, kako uporabimo Newtonovo metodo za enačbe (9.1). Spremenljivke  $x, y$  postavimo v vektor  $\mathbf{x} = [x, y]$  in za lažje pisanje programa vpeljemo komponente  $x_1 = x$  in  $x_2 = y$ . Sistem enačb (9.1) preuredimo tako, da je na desni strani 0:

$$\begin{aligned} x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 &= 0 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Funkcija levih strani  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  je enaka

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{pmatrix}, \quad (9.10)$$

Jacobijeva matrika  $\text{JF}(\mathbf{x})$  pa

$$\text{JF}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3x_2^2 & -6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

```
f(x) = [x[1]^3 - 3x[1] * x[2]^2 - 1, 3x[1]^2 * x[2] - x[2]^3]
function jf(x)
    a = 3x[1]^2 - 3x[2]^2
    b = 6x[1] * x[2]
    jf = [a -b; b a]
end
```

### Avtomatsko odvajanje

V našem primeru smo Jacobijevo matriko izračunali na roke, saj je bila funkcija desnih strani preprosta. Če je funkcija  $F$  bolj kompleksna ali je ne poznamo v naprej, lahko Jacobijevo matriko odvodov učinkovito izračunamo z [avtomatskim odvajanjem](#). V Juliji uporabimo funkcijo `jacobian` iz paketa `ForwardDiff`.

Sistem (9.1) izhaja iz kompleksne enačbe  $z^3 = 1$  in ima tako 3 rešitve:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, y_1 = 0 \quad (z_1 = 1), \\x_2 &= -\frac{1}{2}, y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left( z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \text{ in} \\x_3 &= -\frac{1}{2}, y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left( z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).\end{aligned}\tag{9.12}$$

Za različne začetne približke Newtonova metoda konvergira k različnim rešitvam:

```
julia> x1, it1 = newton(f, jf, [2, 0])
([1.0, 0.0], 7)

julia> x2, it2 = newton(f, jf, [-1, 1.0])
([-0.4999999999999994, 0.8660254037844386], 6)

julia> x2, it2 = newton(f, jf, [-1, 1.0])
([-0.4999999999999994, 0.8660254037844386], 6)
```

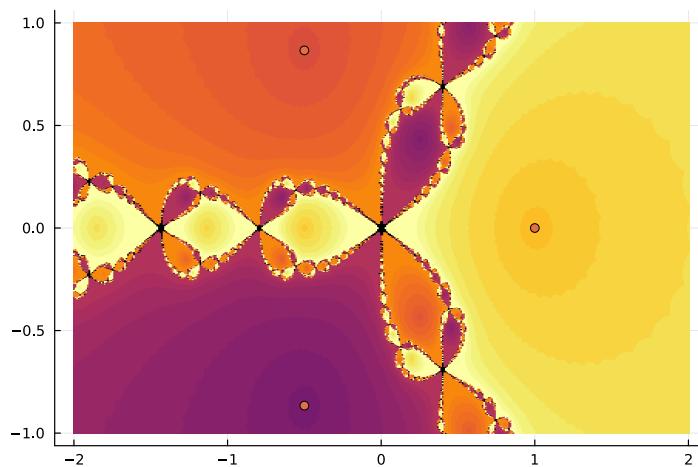
## 9.3 Konvergenčno območje

Newtonova metoda je občutljiva glede izbire začetnega približka. Če je začetni približek dovolj blizu neke rešitve, Newtonova metoda konvergira k tisti rešitvi. Če pa je približek med ničlami, postane obnašanje Newtonove metode precej nepredvidljivo.

Napišimo funkcijo `konvergenca(obmocje, metoda, nx, ny)`, ki za dano območje izračuna dele območja, na katerem Newtonova metoda (Program 50) konvergira k določeni ničli. Za lažje delo s pravokotnimi območji, si bomo pripravili nekaj pomožnih tipov in funkcij (Program 49).

Program `konvergencno_obmocje` uporabimo na našem primeru (9.1):

```
using Plots
maxit = 20
obmocje = Box2d(Interval(-2, 2), Interval(-1, 1))
metoda(x0) = newton(f, jf, x0; atol=1e-4, maxit=maxit)
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(obmocje, metoda, 800, 400; atol=1e-3)
heatmap(x, y, Z + 0.8 * min.(koraki / 10, 1), legend=false)
scatter!(Tuple.(nicle), label="rešitve")
```



Slika 30: Newtonova metoda konvergira k različnim rešitvam odvisno od začetnega približka

## 9.4 Rešitve

```

using LinearAlgebra
"""

x, it = newton(f, jf, x0)

Poišči rešitev nelinearnega sistema enačb `f(x) = 0` z Newtonovo metodo.
Argument `jf` je funkcija, ki vrne Jacobijovo matriko funkcije`f`.
Argument `x0`je začetni približek za Newtonovo metodo.
"""

function newton(f, jf, x0; maxit=100, atol=1e-8)
    for i = 1:maxit
        x = x0 - jf(x0) \ f(x0)
        if norm(x - x0, Inf) < atol
            return x, i
        end
        x0 = x
    end
    throw("Metoda ne konvergira po $maxit korakih!")
end

```

Program 48: Newtonova metoda za sisteme enačb

```

"Podatkovna struktura za interval"
struct Interval
    min
    max
end

"Ali interval `I` vsebuje točko `x`?"
vsebuje(x, I::Interval) = x >= I.min && x <= I.max

"""
Podatkovna struktura za pravokotnik vzporeden s koordinatnimi osmi (škatla).
Pravokotnik je podan kot produkt dveh intervalov za spremenljivki `x` in `y`.
"""

struct Box2d
    int_x
    int_y
end

"Ali škatla `b` vsebuje dano točko `x`?"
vsebuje(x, b::Box2d) = vsebuje(x[1], b.int_x) && vsebuje(x[2], b.int_y)

"""
x = diskretiziraj(I, n)

Razdeli interval `I` na `n` enakih podintervalov. Vrni seznam krajišč
podintervalov.
"""

diskretiziraj(I::Interval, n) = range(I.min, I.max, n)

"""
x = diskretiziraj(b, m, n)

Razdeli škatlo `b` na manjše škatle. Vrni seznama krajišč
podintervalov v smereh `x` in `y`.
"""

diskretiziraj(b::Box2d, m, n) =
    diskretiziraj(b.int_x, m), diskretiziraj(b.int_y, n))

```

Program 49: Pomožne funkcije za delo s pravokotnimi območji

```

"""
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(obmocje, metoda, n=50, m=50; maxit=50,
tol=1e-3)

```

Izračunaj, h katerim vrednostim konvergira metoda `metoda`, če uporabimo različne začetne približke na pravokotniku `[a, b]x[c, d]`, podanim z argumentom `obmocje`.

Funkcija vrne:

- seznam krajišč podintervalov v x smeri,
- seznam krajišč podintervalov v y smeri,
- matriko z indeksi ničle, h kateri metoda konvergira,
- seznam ničel na izbranem območju,
- matriko s številom korakov, ki jih metoda potrebuje, da najde ničlo.

# Primer

Konvergenčno območje za Newtonovo metodo za reševajne kompleksne enačbe `` $z^3=(x + i y)^3 = 1$ ``

```

```jl
F((x, y)) = [x^3-3x*y^2; 3x^2*y-y^3];
JF((x, y)) = [3x^2-3y^2 -6x*y; 6x*y 3x^2-3y^2]
metoda(x0) = newton(F, JF, x0; maxit=10; tol=1e-3);
obmocje = Box2d(Interval(-2, 2), (-1, 1))
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(obmocje, metoda; n=5, m=5)
```
"""

function konvergenca(obmocje::Box2d, metoda, m=50, n=50; atol=1e-3)
    Z = zeros(m, n)
    koraki = zeros(m, n)
    x, y = diskretiziraj(obmocje, n, m)
    nicle = []
    for i = 1:n, j = 1:m
        z = [x[i], y[j]]
        it = 0
        try
            z, it = metoda(z)
        catch
            continue
        end
        k = findfirst([norm(z - z0, Inf) < 2atol for z0 in nicle])
        if isnothing(k)
            if vsebuje(z, obmocje)
                push!(nicle, z)
                k = length(nicle)
            else
                continue
            end
        end
        Z[j, i] = k # vrednost elementa je enka indeksu ničle
        koraki[j, i] = it # število korakov metode
    end
    return x, y, Z, nicle, koraki
end

```

Program 50: Funkcija, ki razišče konvergenco izbrane metode na danem pravokotniku

# 10 Nelinearne enačbe v geometriji

Ko obravnavamo geometrijske objekte, ki so ukrivljeni (na primer krožnice, krivulje, ukrivljene ploskve), lahko probleme pogosto prevedemo na reševanje sistema nelinearnih enačb. Ogledali si bomo dva primera, kjer problem rešimo na ta način: iskanje samopresečišča krivulje in minimalne razdalje med dvema krivuljama.

## 10.1 Naloga

- Napiši funkcijo, ki poišče eno od samopresečišč [Lissajousove krivulje](#)

$$(x(t), y(t)) = (a \sin(nt), b \cos(mt)) \quad (10.1)$$

za parametre  $a = b = 1$ ,  $n = 3$  in  $m = 2$ .

- Poišči najmanjšo razdaljo med dvema parametrično podanimi krivuljama:

$$\begin{aligned} (x_1(t), y_1(t)) &= \left( 2 \cos(t) + \frac{1}{3}, \sin(t) + \frac{1}{4} \right) \\ (x_2(s), y_2(s)) &= \left( \frac{1}{3} \cos(s) - \frac{1}{2} \sin(s), \frac{1}{3} \cos(s) + \frac{1}{2} \sin(s) \right). \end{aligned} \quad (10.2)$$

- Zapiši razdaljo med točko na prvi krivulji in točko na drugi krivulji kot funkcijo  $d(t, s)$  parametrov  $t$  in  $s$ .
- Z [gradientnim spustom](#) poišči minimum funkcije  $d(t, s)$  oziroma  $d^2(t, s)$ .
- Minimum funkcije  $d^2(t, s)$  poišči še z Newtonovo metodo kot rešitev vektorske enačbe

$$\nabla d^2(t, s) = 0. \quad (10.3)$$

- Grafično predstavi zaporedja približkov za gradientno in Newtonovo metodo.
- Primerjaj konvergenčna območja za gradientno in Newtonovo metodo (glej Poglavlje 9).

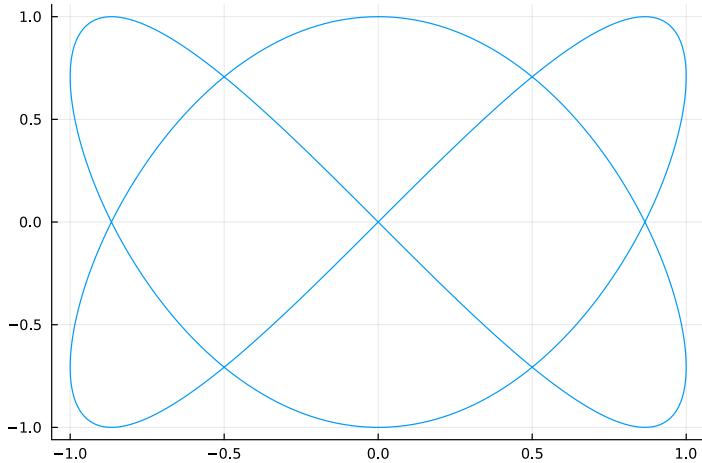
## 10.2 Presečišča parametrično podanih krivulj

Poишčimo samopresečišča [Lissajousove krivulje](#)

$$\begin{aligned} x(t) &= a \sin(nt) \\ y(t) &= b \cos(mt) \end{aligned} \quad (10.4)$$

za parametre  $a = b = 1$ ,  $n = 2$  in  $m = 3$ . Za lažjo predstavo najprej narišemo krivuljo.

```
using Plots
l(t) = [sin(2t), cos(3t)]
t = range(0, 2pi, 500)
# Funkcija plot drugače interpretira vektor vektorjev, kot vektor parov (Tuple).
# Zato vektorje koordinat spremenimo v pare koordinat (Tuple).
plot(Tuple.(l.(t)), label=nothing)
```



Slika 31: Lissajousova krivulja za  $a = b = 1$ ,  $n = 2$  in  $m = 3$

Iščemo parametra  $t$  in  $s$ , ki sta različna  $t \neq s$  in za katera velja

$$\begin{aligned} x(t) &= x(s) \\ y(t) &= y(s). \end{aligned} \tag{10.5}$$

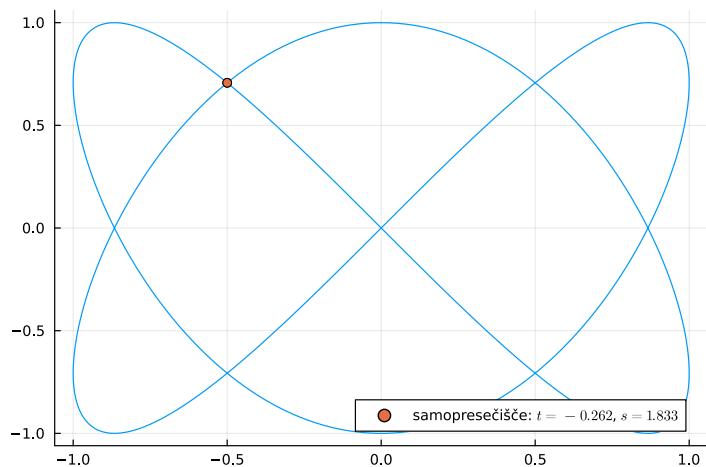
Dobili smo torej sistem dveh nelinearnih enačb z dvema neznankama. Rešitve sistema (10.5) poiščemo z Newtonovo metodo, ki smo jo spoznali v prejšnjem poglavju (Poglavlje 9). Newtonova metoda zahteva, da sistem enačb prevedemo v vektorsko enačbo  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Funkcija, katere ničlo iščemo, je:

$$F\left(\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x(t) - x(s) \\ y(t) - y(s) \end{bmatrix}, \tag{10.6}$$

njena Jacobijeva matrika pa:

$$JF\left(\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) & -\dot{x}(s) \\ \dot{y}(t) & -\dot{y}(s) \end{pmatrix}. \tag{10.7}$$

```
using Vaja09: newton
using Printf
f(ts) = l(ts[1]) - l(ts[2])
dl(t) = [2cos(2t), -3sin(3t)]
df(ts) = hcat(dl(ts[1]), -dl(ts[2]))
ts, it = newton(f, df, [0.0, pi / 2])
scatter!(Tuple.(l.(ts)),
    label=@sprintf "samopresečišče: \$t=% .3f \$, \$s=% .3f \$" ts...)
```



Slika 32: Krivulja doseže izbrano samopresečišče pri dveh različnih vrednostih parametra  $t$ .

Napišimo funkcijo, `samopres(k, dk, ts0)`, ki poišče eno od samopresečišč krivulje z Newtonovo metodo (rešitev Program 51).

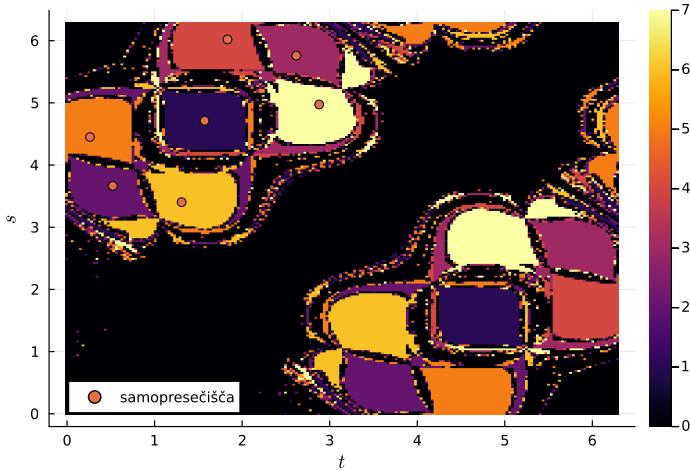
Nato uporabimo Program 50 in poiščemo vsa samopresečišča ter določimo konvergenčna območja. Ker sta funkciji sin in cos, ki nastopata v definiciji krivulje, periodični s periodo  $2\pi$ , vrednosti parametrov  $t$  in  $s$  računamo po modulu  $2\pi$ .

```

using Vaja10: samopres
mod2pi(x) = rem(x, 2pi)
""" Poišči samopresečišče Lissajousove krivulje. Upoštevaj periodičnost."""
function splissajous(ts0)
    ts, it = samopres(l, dl, ts0)
    ts = mod2pi.(ts)
    if abs(ts[1] - ts[2]) < 1e-12
        throw("Isti vrednosti parametra ne pomenita samopresečišča.")
    end
    return sort(ts), it
end

using Vaja09: konvergenca, Box2d, Interval
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(Box2d(Interval(0, 2pi), Interval(0, 2pi)),
                                         splissajous, 200, 200)
heatmap(x, y, Z, xlabel="\$t\$", ylabel="\$s\$")
scatter!(Tuple.(nicle), label="samopresečišča", legend=:bottomleft)

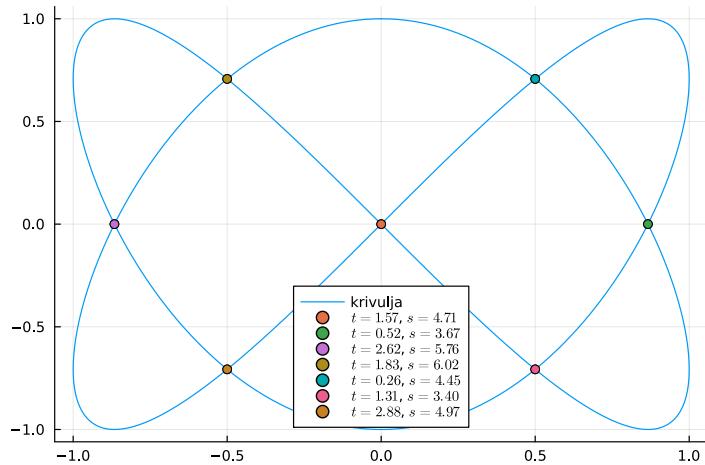
```



Slika 33: Območje konvergencije za samopresečšča Lissajousove krivulje

Narišimo sedaj še krivuljo in na njej označimo sva samopresečšča.

```
p = plot(Tuple.(l.(t)), label="krivulja", legend=:bottom) # narišemo zopet krivuljo
for ts in nicle
    scatter!(p, Tuple.(l.(ts)), label=@sprintf "\$t=% .2f\$, \$s=% .2f\$" ts...)
end
display(p)
```



### 10.3 Minimalna razdalja med dvema krivuljama

Naj bosta  $K_1$  in  $K_2$  parametrično podani krivulji:

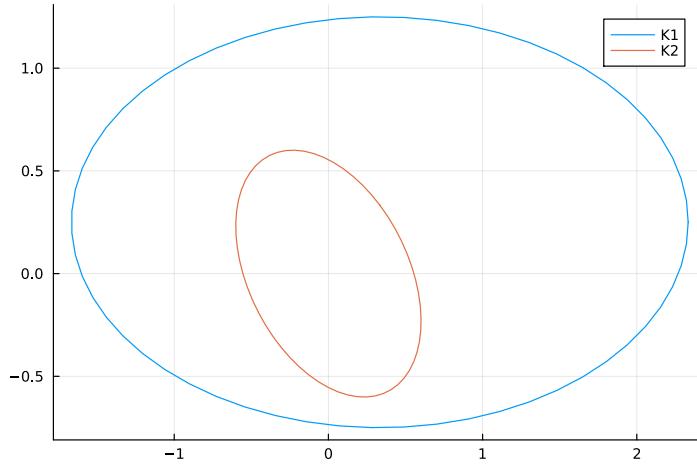
$$\begin{aligned} K_1 : \mathbf{k}_1(t) &= (x_1(t), y_1(t)); \quad t \in \mathbb{R} \\ K_2 : \mathbf{k}_2(s) &= (x_2(s), y_2(s)); \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Narišimo obe krivulji na istem grafu.

```

using Plots
k1(t) = [2 * cos(t) + 1 / 3, sin(t) + 0.25]
k2(s) = [cos(s) / 3 - sin(s) / 2, cos(s) / 3 + sin(s) / 2]
t = range(0, 2pi, 60);
plot(Tuple.(k1.(t)), label="K1")
plot!(Tuple.(k2.(t)), label="K2")

```



Slika 35: Krivulji v ravnini

Razdaljo med krivuljama lahko definiramo na različne načine. Izberemo definicijo, ki razdaljo med krivuljami definira kot najmanjšo razdaljo med točko na eni krivulji in točko na drugi krivulji:

$$d_m(K_1, K_2) = \min_{T_1 \in K_1, T_2 \in K_2} d(T_1, T_2). \quad (10.9)$$

#### Hausdorffova razdalja

Alternativna definicije razdalje med dvema množicama je *Hausdorffova razdalja*. Hausdorffova razdalja pove, koliko je lahko točka na eni krivulji največ oddaljena od druge krivulje in je definirana kot

$$d_h(K_1, K_2) = \max \left( \max_{T_1 \in K_1} \min_{T_2 \in K_2} d(T_1, T_2), \max_{T_2 \in K_2} \min_{T_1 \in K_1} d(T_1, T_2) \right). \quad (10.10)$$

Če sta množici blizu v Hausdorffovi razdalji, je vsaka točka ene množice blizu druge množici. Medtem ko je minimalna razdalja med dvema krivuljama vedno končna, pa je lahko Hausdorffova razdalja tudi neskončna (na primer, če je ena krivulja omejena, druga pa neomejena).

Iščemo točko  $k_1(t)$  na krivulji  $k_1$  in točko  $k_2(s)$  na krivulji  $k_2$ , ki sta najbližji med vsemi pari točk. Iščemo vrednosti parametrov  $t$  in  $s$ , pri katerih funkcija razdalje

$$d(t, s) = \sqrt{(x_1(t) - x_2(s))^2 + (y_1(t) - y_2(s))^2} \quad (10.11)$$

doseže minimum. Ker je koren naraščajoča funkcija, imata  $d(t, s)$  in  $d^2(t, s)$  minimum v isti točki. Zato namesto minima funkcije  $d(t, s)$  poiščemo minimum funkcije

$$D(t, s) = d^2(t, s) = (x_1(t) - x_2(s))^2 + (y_1(t) - y_2(s))^2. \quad (10.12)$$

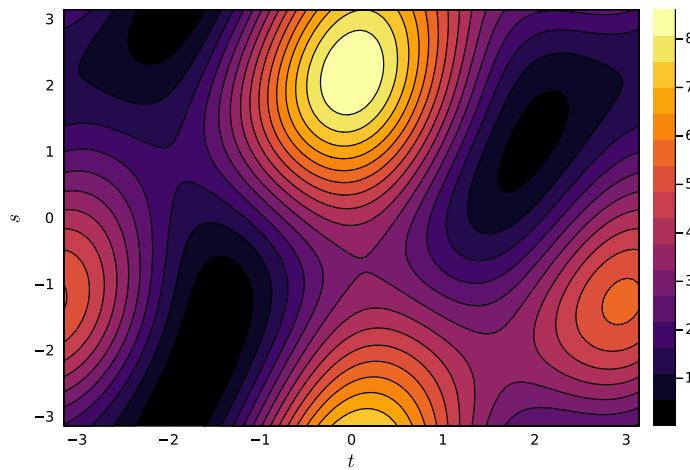
Funkcijo  $D(t, s)$  na kvadratu  $[-\pi, \pi]^2$  grafično predstavimo z nivojnicami in barvami.

```

using Vaja10: razdalja2
d2 = razdalja2(k1, k2)

t = range(-pi, pi, 100)
s = t
contourf(t, s, d2, xlabel="\$t\$$", ylabel="\$s\$$")

```



Slika 36: Razdalja med točkama na krivuljah  $k_1$  in  $k_2$  v odvisnosti od parametrov na krivulji

### 10.3.1 Gradientni spust

Metoda gradientnega spusta je sila enostavna. Predstavljamo si, da je gosta meglja in da smo na pobočju gore. Želimo čim prej priti v dno doline. Na vsakem koraku izberemo smer, v kateri je pobočje najstrmejše in se premaknemo v tej smeri. Na ta način bomo najhitreje izgubili višino. Vendar ni nujno, da bomo na ta način prišli v dno doline, saj lahko prej pristanemo v kakšni kotanji ali vrtači na pobočju gore. V vsakem primeru bomo prišli nekam na dno, od koder bo šlo le še navzgor.

V jeziku funkcij iščemo minimum funkcije več spremenljivk  $f(\mathbf{x})$ . Na vsakem koraku izberemo smer, v kateri funkcija najhitreje pada, in se premaknemo za določen korak v tej smeri. To je ravno v nasprotni smeri gradienata funkcije. Če koraki niso preveliki, bomo prej ali slej pristali v lokalnemu minimumu funkcije  $f(\mathbf{x})$ . Računamo naslednje zaporedje približkov:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - h_n \nabla f(\mathbf{x}^{(n)}), \quad (10.13)$$

kjer je  $\nabla f(\mathbf{x}^{(n)})$  vrednost gradienata v točki  $\mathbf{x}^{(n)}$ , vrednost  $h_n$  pa je parameter, ki poskrbi, da zaporedje približkov ne skače preveč po domeni in se lahko na vsakem koraku spremeni. Napišimo funkcijo `spust(gradf, x0, h)`, ki poišče lokalni minimum funkcije z metodo gradientnega spusta (rešitev Program 53).

Gradient funkcije  $D(t, s)$  bi lahko izračunali na roke, vendar je to zamudno in se pri tem lahko hitro zmotimo. Uporabili bomo knjižnico za [avtomatsko odvajanje ForwardDiff.jl](#), ki učinkovito izračuna vrednosti parcialnih odvodov funkcije v posameznih točkah. Knjižnica `ForwardDiff` zna odvajati le funkcije vektorske spremenljivke, zato funkcijo dveh spremenljivk `d2(t, s)` sprememimo v funkcijo vektorske spremenljivke `ts -> d2(ts...)`. Operator `...` elemente vektorja razporedi kot argumente funkcije.

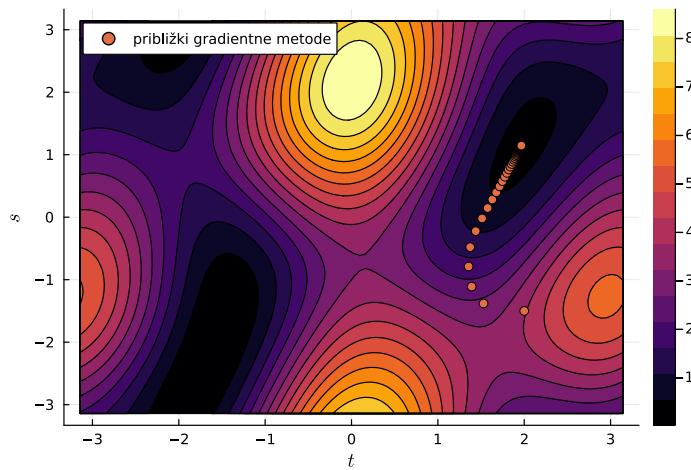
```

using ForwardDiff
gradd2(ts) = ForwardDiff.gradient(ts -> d2(ts...), ts)

"Izračunaj zaporedje približkov gradientne metode."
function priblizki(grad, x0, h, n)
    p = [x0]
    for i = 1:n
        x = x0 - h * grad(x0)
        push!(p, x)
        x0 = x
    end
    return p
end

pribl = priblizki(gradd2, [2.0, -1.5], 0.2, 40)
scatter!(Tuple.(pribl), label="približki gradientne metode")

```



Slika 37: Zaporedje približkov gradientnega spusta

Iz slike je razvidno, da gradientni spust konvergira k lokalnemu minimumu, vendar postane konvergenca počasna, ko se približamo minimumu. Konvergenco lahko pohitrimo s primerno izbiro parametra  $h_n$ , na primer z metodo [minimiziranja v dani smeri](#).

### 10.3.2 Newtonova metoda

Fermatov izrek pravi, da je v lokalnem ekstremu vrednost odvoda vedno enaka 0. Isti izrek velja tudi za funkcije več spremenljivk, le da je v tem primeru gradient funkcije enak 0.

Ta Fermatov izrek morda ni tako razvpit kot njegov zadnji, je pa zato uporabnejši. Potreben pogoj za nastop lokalnega ekstrema je tako vektorska enačba

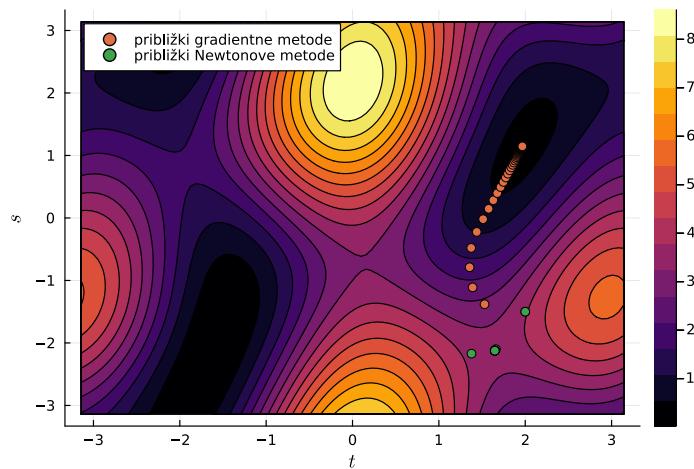
$$\nabla D(t, s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial D(t, s)}{\partial t} \\ \frac{\partial D(t, s)}{\partial s} \end{pmatrix} = 0. \quad (10.14)$$

Rešitev enačbe (10.14) lahko poiščemo z Newtonovo metodo.

```

jacd2(x0) = ForwardDiff.jacobian(gradd2, x0)
korak_newton(f, Jf, x0) = x0 - Jf(x0) \ f(x0)
x0 = [2.0, -1.5]
pribl_newton = [x0]
for i = 1:10
    x0 = korak_newton(gradd2, jacd2, x0)
    push!(pribl_newton, x0)
end
scatter!(Tuple.(pribl_newton), label="približki Newtonove metode")

```



Slika 38: Zaporedje približkov gradientnega spusta in Newtonove metode z istim začetnim približkom

Za razliko od gradientnega spusta, Newtonova metoda ne konvergira nujno k lokalnemu minimumu, ampak k eni od stacionarnih točk funkcije  $D(t, s)$ , med katerimi so tudi sedla in maksimumi. Zato je Newtonova metoda precej občutljivejša na izbiro začetnega približka kot gradientni spust.

Poglejmo si točki na krivuljah, ki ustreza parametrom najdenima z gradientnim spustom:

```

using Vaja10: spust
t = range(0, 2pi, 100)
plot(Tuple.(k1.(t)), label="\$k_1(t)\$")
plot!(Tuple.(k2.(t)), label="\$k_2(s)\$")
ts, it = spust(gradd2, [2, -1.5], 0.2)
scatter!(Tuple(k1(ts[1])), label="\$k_1(t_0)\$")
scatter!(Tuple(k2(ts[2])), label="\$k_2(s_0)\$")

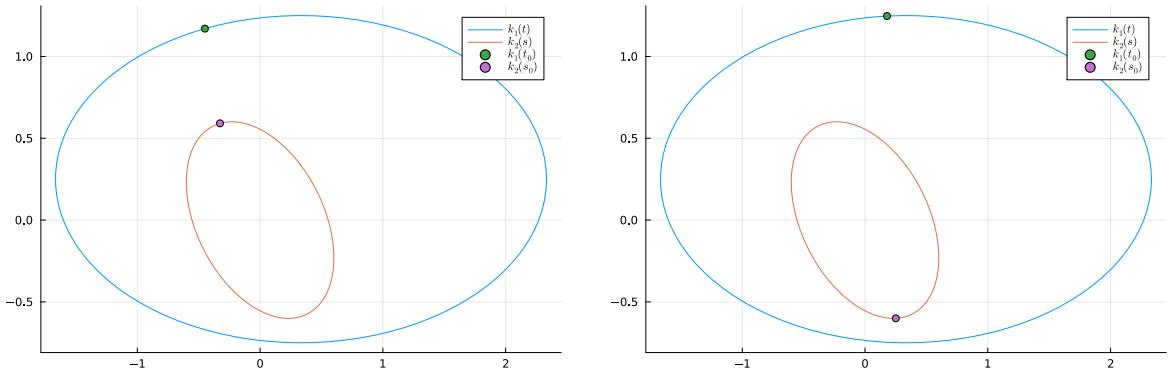
```

in Newtonovo metodo:

```

using Vaja09: newton
t = range(0, 2pi, 100)
plot(Tuple.(k1.(t)), label="\$k_1(t)\$")
plot!(Tuple.(k2.(t)), label="\$k_2(s)\$")
ts, it = newton(gradd2, jacd2, [2, -1.5])
scatter!(Tuple(k1(ts[1])), label="\$k_1(t_0)\$")
scatter!(Tuple(k2(ts[2])), label="\$k_2(s_0)\$")

```



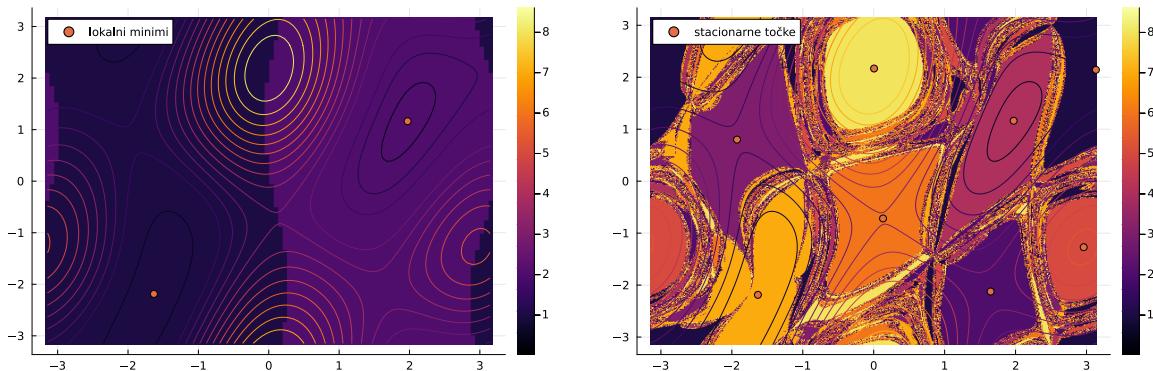
Slika 39: Levo: točki na krivuljama, h katerima konvergira gradientna metoda sta lokalni minimum, ki pa ni globalni. Desno: Newtonova metoda konvergira k sedlu. Točka na  $k_1$  je lokalni minimum, točka na  $k_2$  pa lokalni maksimum.

Za konec si oglejmo še konvergenčna območja za gradientni spust:

```
using Vaja09: konvergenca
using Vaja10: spust
function spustd2(x0)
    ts, it = spust(gradd2, x0, 0.2; maxit=1000)
    ts = map(t -> mod(t + pi, 2pi) - pi, ts)
    return ts, it
end
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(
    Box2d(Interval(-pi, pi), Interval(-pi, pi)), spustd2, 100, 100;
    atol=1e-2)
heatmap(x, y, Z)
scatter!(Tuple.(nicle), label="lokalni minimi")
contour!(x, y, d2)
```

in Newtonovo metodo:

```
function newtond2(x0)
    ts, it = newton(gradd2, jacd2, x0; atol=1e-5)
    ts = map(t -> mod(t + pi, 2pi) - pi, ts)
    return ts, it
end
x, y, Z, nicle, koraki = konvergenca(
    Box2d(Interval(-pi, pi), Interval(-pi, pi)), newtond2, 500, 500;
    atol=1e-2)
heatmap(x, y, Z)
scatter!(Tuple.(nicle), label="stacionarne točke")
contour!(x, y, d2)
```



Slika 40: Območja konvergencije za gradientni spust (levo) in Newtonovo metodo (desno)

Problem iskanja minimuma funkcije, ki smo ga reševali, spada med optimizacijske probleme. Študij optimizacijskih problemov je obsežno raziskovalno področje. Več o tem si lahko preberete v knjigi [10].

## 10.4 Rešitve

```
#####
ts, it = samopres(k, dk, ts0)

Poišči samopresečišče krivulje `k` s smernim odvodom `dk` z Newtonovo metodo z
začetnim približkom `ts0`. Začetni približek `ts0` in rezultat `ts` sta
dvodimensionalna vektorja z dvema različnima parametroma.

# Primer
```jl
k(t) = [t^2, t^3-t]
dk(t) = [2t, 3t^2-1]
ts, it = samopres(k, dk, [-0.5, 0.5])
```
#####

function samopres(k, dk, ts0)
  f(ts) = k(ts[1]) - k(ts[2])
  df(ts) = hcat(dk(ts[1]), -dk(ts[2]))
  ts, it = newton(f, df, ts0)
  ts = sort(ts)
  if abs(ts[1] - ts[2]) < 1e-12
    throw("Ista parametra ne pomenita samopresečišča.")
  end
  return ts, it
end
```

Program 51: Funkcija poišče samopresečišče krivulje z Newtonovo metodo.

```

using LinearAlgebra

"""
d2 = razdalja2(k1, k2)

Vrni funkcijo kvadrata razdalje `d2(t, s)` med točkama na krivuljah
`k1` in `k2`. Rezultat `d2` je funkcija spremenljivk `t` in `s`, kjer sta
`t` parameter na krivulji `k1` in `s` parameter na krivulji `k2`.
# Primer
```jl
k1(t) = [t, t^2 - 2]
k2(s) = [cos(s), sin(s)]
d2 = razdalja(k1, k2)
d2(1, pi)
```
"""

function razdalja2(k1, k2)
    function d2(t, s)
        delta = k1(t) - k2(s)
        return dot(delta, delta)
    end
    return d2
end

```

Program 52: Funkcija kvadrata razdalje med dvema krivuljama

```

"""
x0, it = spust(gradf, x0, h)

Poišči lokalni minimum za funkcijo, podano z gradientom `gradf`, z metodo
najhitrejšega spusta. Argument `x0` je začetni približek, `h` skalar s
katerim pomnožimo gradient.
"""

function spust(gradf, x0, h; maxit=500, atol=1e-8)
    for i = 1:maxit
        x = x0 - h * gradf(x0)
        if norm(x0 - x) < atol
            return x, i
        end
        x0 = x
    end
    throw("Gradientni spust ne konvergira po $maxit korakih!")
end

```

Program 53: Gradientni spust

# 11 Aproksimacija z linearnim modelom

V znanosti pogosto želimo opisati odvisnost ene količine od druge. Matematičnemu opisu povezave med dvema ali več spremenljivkami pravimo **matematični model**. Primer modela je Hookov zakon za vzem, ki pravi, da je sila  $F$  sorazmerna z raztezkom  $x$ :

$$F = kx. \quad (11.1)$$

Model povezuje dve količini: silo  $F$  in raztezek  $x$ . Poleg tega Hookov zakon vpelje še koeficient vzemti  $k$ . Koeficientu  $k$  pravimo **parameter modela** in ga lahko določimo za vsako vzem posebej z meritvami sile in raztezka.

V tej vaji bomo poiskali podatke o koncentraciji  $\text{CO}_2$  v zadnjih desetletjih opisali z linearnim modelom.

## 11.1 Naloga

- Podatke o koncentraciji  $\text{CO}_2$  v ozračju aproksimiraj s kombinacijo kvadratnega polinoma in sinusoide nihanja s periodo 1 leto.
- Parametre modela poišči z normalnim sistemom in QR razcepom.
- Model uporabi za napoved obnašanja koncentracije  $\text{CO}_2$  za naslednjih 20 let.

## 11.2 Linearni model

Najpreporočeni matematični model je **linearni model**, pri katerem odvisno količino  $y$  zapišemo kot linearno kombinacijo baznih funkcij  $\varphi_j(x)$  neodvisne spremenljivke  $x$ :

$$y(x, p) = p_1\varphi_1(x) + p_2\varphi_2(x) + \dots + p_k\varphi_k(x). \quad (11.2)$$

Koeficientom  $p_j$  pravimo parametri modela in jih določimo na podlagi meritov. Znanstveniki iščejo model, pri katerem imajo parametri  $p_i$  preprosto interpretacijo in pomagajo pri razumevanju pojava, ki ga opisujejo. Bazne funkcije so zato pogosto elementarne funkcije iz katerih je jasno razvidna narava odvisnosti.

### 11.2.1 Metoda najmanjših kvadratov

Koeficiente modela, ki najbolje opisujejo izmerjene podatke, lahko poiščemo z **metodo najmanjših kvadratov**. Najprej napišemo pogoje, ki bi jim zadoščali parametri, če bi izmerjeni podatki povsem sledili modelu. Za vsako meritev  $y_i = y(x_i)$  bi bila vrednost odvisne količine  $y_i$  natanko enaka vrednosti, ki jo predvidi model  $M(p, x_i)$ . To predpostavko zapišemo s sistemom enačb:

$$\begin{aligned} y_1 &= M(p, x_1) = p_1\varphi_1(x_1) + \dots + p_k\varphi_k(x_1) \\ y_2 &= M(p, x_2) = p_1\varphi_1(x_2) + \dots + p_k\varphi_k(x_2) \\ &\vdots \\ y_n &= M(p, x_n) = p_1\varphi_1(x_n) + \dots + p_k\varphi_k(x_n). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Neznane v zgornjem sistemu so parametri  $p_j$  in za **linearni model** so enačbe linearne. To je tudi ena glavnih prednosti linearnega modela. Meritve redko povsem sledijo modelu, zato sistem (11.3) v splošnem ni rešljiv, saj je meritev običajno več kot je parametrov sistema. Sistem (11.3) je **predoločen**. Lahko pa poiščemo vrednosti parametrov  $p_j$ , pri katerih bo razlika med meritvami in modelom kar

se da majhna. Izkaže se, da je najboljša mera za odstopanje modela od podatkov kar vsota kvadratov razlik med meritvami in napovedjo modela:

$$(y_1 - M(p, x_1))^2 + \dots + (y_n - M(p, x_n))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - M(p, x_i))^2. \quad (11.4)$$

Sistem (11.3) lahko zapišemo v matrični obliki

$$A\mathbf{p} = \mathbf{y}, \quad (11.5)$$

kjer so stolpci matrike sistema  $A$  enaki vrednostim baznih funkcij:

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_k(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_k(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_k(x_n) \end{pmatrix}, \quad (11.6)$$

stolpec desnih strani pa je enak meritvam:

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T. \quad (11.7)$$

Pogoj najmanjših kvadratov razlik (11.4) za optimalne vrednosti parametrov  $\mathbf{p}_{opt}$  potem zapišemo s kvadratno vektorsko normo

$$\mathbf{p}_{opt} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{p}} \|A\mathbf{p} - \mathbf{y}\|_2^2. \quad (11.8)$$

#### Statistična interpretacija metode najmanjših kvadratov

Če linearni model obravnavamo kot [statistični model](#), so vrednosti parametrov, ki jih dobimo z metodo najmanjših kvadratov, v določenem smislu najboljša cenilka za parametre modela. Bolj natančno: [Gauss-Markov izrek](#) pravi, da je cenilka za parametre linearnega modela z najmanjšo varianco ravno vrednosti parametrov, ki jih dobimo z metodo najmanjših kvadratov. Ob predpostavki, da so napake meritev nekorelirane slučajne spremenljivke z enakimi variancami in pričakovano vrednostjo 0.

### 11.3 Opis sprememb koncentracije CO<sub>2</sub>

Na observatoriju [Mauna Loa](#) na Havajih že vrso let spremljajo koncentracijo CO<sub>2</sub> v ozračju in podatke objavlja na svoji spletni strani v različnih oblikah. Oglejmo si tedenska povprečja koncentracije od začetka meritev leta 1974:

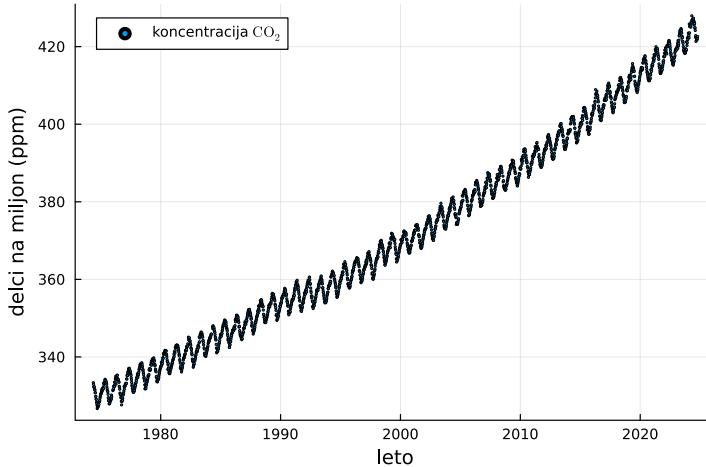
```
using FTPClient
url = "ftp://aftp.cmdl.noaa.gov/products/trends/co2/co2_weekly_mlo.txt"
io = download(url)
data = readlines(io)
```

Nato iz datoteke odstranimo komentarje in izluščimo podatke.

```

filter!(l -> l[1] != '#', data)
data = strip.(data)
data = [split(line, r"\s+") for line in data]
data = [[parse(Float64, x) for x in line] for line in data]
filter!(l -> l[5] > 0, data)
t = [l[4] for l in data]
co2 = [l[5] for l in data]
using Plots
scatter(t, co2, xlabel="leto",
        ylabel="delci na miljon (ppm)",
        label="koncentracija \${CO}_2\$, markersize=1)

```



Slika 41: Koncentracija atmosferskega CO<sub>2</sub> v zadnjih desetletjih

Časovni potek koncentracije CO<sub>2</sub> matematično opišemo kot funkcijo koncentracije v odvisnosti od časa:

$$y = \text{CO}_2(t). \quad (11.9)$$

Model, ki dobro opisuje spremembe CO<sub>2</sub>, lahko sestavimo iz kvadratne funkcije, ki opisuje naraščanje letnih povprečij, in periodičnega dela, ki opisuje nihanja med letom:

$$\text{CO}_2(\mathbf{p}, t) = p_1 + p_2 t + p_3 t^2 + p_4 \sin(2\pi t) + p_5 \cos(2\pi t), \quad (11.10)$$

pri čemer je čas  $t$  podan v letih. Predoločeni sistem (11.3), ki ga dobimo za naš model, ima  $n \times 5$  matriko sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \sin(2\pi t_1) & \cos(2\pi t_1) \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \sin(2\pi t_2) & \cos(2\pi t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \sin(2\pi t_n) & \cos(2\pi t_n) \end{pmatrix}, \quad (11.11)$$

desne strani pa so vrednosti koncentracij CO<sub>2</sub>.

Po metodi najmanjših kvadratov iščemo vrednosti parametrov  $\mathbf{p}$  modela  $\text{CO}_2(\mathbf{p}, t)$ , pri katerih je vsota kvadratov razlik med napovedjo modela in izmerjenimi vrednostmi najmanjša. Zapišimo vsoto kvadratov kot evklidsko normo razlike med vektorjem napovedi modela  $A\mathbf{p}$  in vektorjem izmerjenih vrednosti  $\mathbf{y}$ . Iščemo torej vektor parametrov  $\mathbf{p}$ , pri katerem je:

$$\|Ap - y\|_2^2 \quad (11.12)$$

najmanjša.

## 11.4 Normalni sistem

Vektor parametrov modela  $p$  izberemo tako, da je napoved modela  $Ap$  enaka pravokotni projekciji  $y$  na stolpčni prostor matrike  $A$ . Tako lahko izpeljemo *normalni sistem* za dani predoločen sistem  $Ap = y$ :

$$\begin{aligned} Ap - y &\perp C(A) \\ Ap - y &\in N(A^T) \\ A^T(Ap - y) &= 0 \\ A^TAp &= A^Ty. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Normalni sistem  $A^TAp = A^Ty$  je kvadraten in ima enolično rešitev, če je matrika  $A$  polnega ranga.

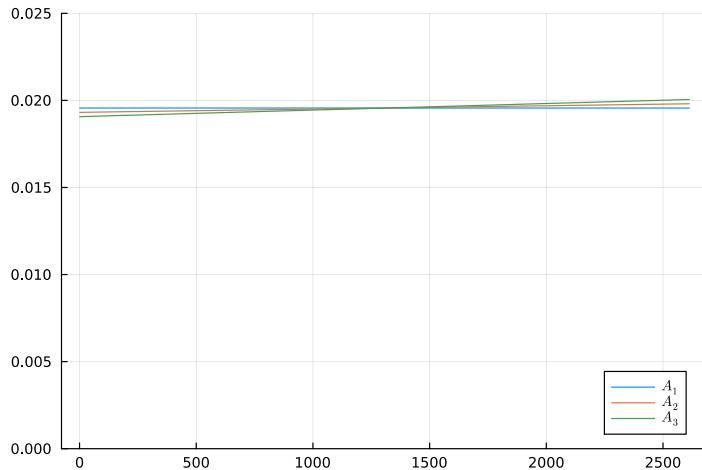
```
using LinearAlgebra
A = hcat(ones(size(t)), t, t .^ 2, cos.(2pi * t), sin.(2pi * t))
N = A' * A
b = A' * co2
p = N \ b
```

Problem normalnega sistema (11.13) je, da je zelo občutljiv. Število občutljivosti matrike sistema pove, ali je matrika slabo pogojena. in je posledično sistem občutljiv. Izračunamo ga z ukazom cond:

```
julia> cond(A), cond(N)
(8.448575836430208e10, 4.180774966930753e21)
```

Iz rezultata vidimo, da je že sama matrika  $A$  slabo pogojena, matrika  $N$  pa še toliko bolj. Razlog je v izbiri baznih funkcij. Če narišemo normirane stolpce  $A$  kot funkcije, vidimo, da so zelo podobni.

```
plot(A[:, 1] / norm(A[:, 1]), ylims=[0, 0.025], label="\$A_1\$")
plot!(A[:, 2] / norm(A[:, 2]), label="\$A_2\$")
plot!(A[:, 3] / norm(A[:, 3]), label="\$A_3\$")
```



Slika 42: Normirani prvi trije bazni vektorji (stolpci matrike  $A$ )

Občutljivost je deloma posledica dejstva, da čas merimo v letih od začetka našega štetja. Vrednosti 1975 in 2020 sta relativno blizu in tako ima vektor vrednosti  $t_i$  skoraj enako smer kot vektor enic. Občutljivost matrike  $A$  lahko precej zmanjšamo, če časovno skalo premaknemo, da je ničla bliže dejanskim podatkom. Namesto  $t$  uporabimo spremenljivko  $t - \tau$ , kjer je  $\tau$  premik časovne skale. Najboljša izbira za  $\tau$  je na sredini podatkov:

```
julia> τ = sum(t) / length(t)
julia> A = hcat(ones(size(t)), t .- τ, (t .- τ) .^ 2, cos.(2pi * t), sin.(2pi * t))
julia> cond(A), cond(A'A)
(425.05456570474456, 180671.3838264739)
```

Matrika  $A$  je sedaj precej dlje od singularne matrike in posledično je tudi normalni sistem manj občutljiv.

#### Prednosti normalnega sistema

Čeprav je normalni sistem zelo občutljiv, se v praksi izkaže, da napaka vendarle ni tako velika. Ima pa normalni sistem nekatere prednosti pred QR razcepom.

Dimenzijske normalnega sistema so dane s številom parametrov in so bistveno manjše od dimenzijske matrike predoločenega sistema  $A$ . Zato je prostor, ki ga potrebujemo za normalni sistem, bistveno manjši od prostora, ki ga potrebujemo za QR razcep.

Druga prednost normalnega sistema je možnost posodobitve, če dobimo nove podatke. To je uporabno, če na primer podatke dobivamo v toku. Normalni sistem lahko posodobimo vsakič, ko dobimo nov podatek, ne da bi bilo treba hraniti prejšnje podatke.

## 11.5 QR razcep

Normalni sistem se redko uporablja v praksi. Standardni postopek za iskanje rešitve predoločenega sistema z metodo najmanjših kvadratov je s QR razcepom. Pri QR razcepju  $QR = A$  so stolpci matrike  $Q$  ortonormirana baza stolpčnega prostora matrike  $A$ , matrika  $R$  pa vsebuje koeficiente v razvoju stolpcov matrike  $A$  po ortonormirani bazi, določeni s  $Q$ . Projekcijo na stolpčni prostor ortogonalne matrike še lažje izračunamo, saj lahko koeficiente izračunamo s skalarnim produktom s stolpci  $Q$ . Če predoločeni sistem  $Ap = y$  pomnožimo z desne s  $Q^T$  in upoštevamo, da je  $Q^T Q = I$ , dobimo zopet kvadratni sistem za vektor parametrov  $p$ :

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{p} &= \mathbf{y} \\
 QR\mathbf{p} &= \mathbf{y} \\
 Q^TQR\mathbf{p} &= Q^T\mathbf{y} \\
 R\mathbf{p} &= Q^T\mathbf{y}.
 \end{aligned} \tag{11.14}$$

Matrika  $R$  je zgornje trikotna, tako da lahko sistem rešimo z obratnim vstavljanjem. V Juliji uporabimo funkcijo `qr`, ki vrne posebni podatkovni tip, posebej namenjen QR razcep matrike:

```

julia> F = qr(A)
julia> p_qr = F \ co2 # ekvivalentno R\Q'*b
julia> p_norm = (A' * A) \ (A' * co2) # rešitev z normalnim sistemom
julia> razlika = norm(p_norm - p_qr)
6.822543246114055e-13

```

Razlika med rešitvijo s QR razcepom in normalnim sistemom je zanemarljiva. Vendar se QR uporablja, ker je numerično stabilnejši v primerjavi z normalnim sistemom. Tudi vgrajen operator `\` v Juliji in Matlabu uporabi QR razcep, če je sistem predoločen.

## 11.6 Kaj pa CO<sub>2</sub>?

Koncentracija CO<sub>2</sub> se v ozračju vztrajno povečuje. Poglejmo, kaj nam o tem povedo parametri modela, ki smo jih izračunali na podlagi izmerjenih podatkov.

```

julia> p_qr
5-element Vector{Float64}:
368.81376214677266
1.8515079712064941
0.01411695002100984
-0.8053801587031669
2.852551492543684

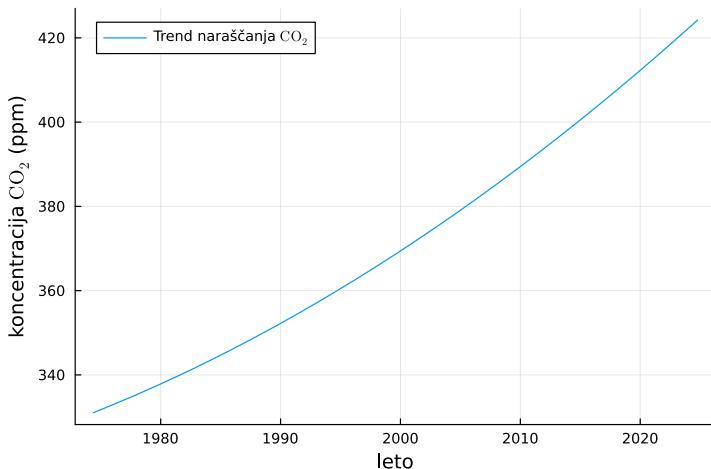
```

Koeficient  $p_1$  pove povprečno koncentracijo na sredini merilnega obdobja,  $p_2$  in  $p_3$  pa sta koeficienta pri linearinem in kvadratnem členu. Amplituda letnih nihanj je enaka velikosti vektorja  $[p_4, p_5]$ . Kot je razvidno iz parametrov modela, je naraščanje kvadratično in ne linearino. Ne le, da se vsako leto poveča koncentracija, vsako leto se poveča za večjo vrednost. Če odmislimo nihanja zaradi letnih časov, dobimo trend naraščanja:

```

model_trend(t) = p_qr[1:3]' * [1, t - τ, (t - τ)^2]
plot(model_trend, t[1], t[end], label="Trend naraščanja \$\mathrm{CO}_2\$",
      xlabel="leto", ylabel="koncentracija \$\mathrm{CO}_2\$ (ppm)")

```



Slika 43: Rezultati modela brez letnih nihanj

Lahko poskusimo tudi napovedati prihodnost:

```
julia> model(t) = p_qr' * [1, t - τ, (t - τ)^2, cos(2pi * t), sin(2pi * t)]
julia> napoved = model.([2030, 2040, 2050])
3-element Vector{Float64}:
 437.1444876692537
 465.63393287633704
 496.9467680876224
```

Naš model napoveduje, da bo leta 2050 koncentracija CO<sub>2</sub> znašala skoraj 500 ppm.

#### Kaj smo se naučili?

- Linearni model je funkcija, pri kateri *parametri* nastopajo *linearno*.
- Parametre modela poiščemo z *metodo najmanjših kvadratov*.
- Za iskanje parametrov po metodi najmanjših kvadratov je numerično najprimernejši *QR razcep*, če smo v stiski s prostorom, pa lahko uporabimo *normalni sistem*.
- Premik neodvisne spremenljivke lahko bistveno izboljša numerično stabilnost.
- Koncentracija CO<sub>2</sub> prav zares narašča.

## 12 Interpolacija z zlepki

Pri interpolaciji iščemo *interpolacijsko funkcijo*, ki se v danih točkah ujema z danimi vrednostmi. Najbolj znana je interpolacija s polinomi. Če je danih točk veliko, je pogosto bolje namesto ene interpolacijske funkcije z veliko parametri interval razdeliti na več podintervalov in na vsakem uporabiti različne interpolacijske funkcije z malo parametri. Funkcijam, ki so definirana z različnimi predpisi na različnih intervalih, pravimo zlepki.

### 12.1 Naloga

- Podatke iz Tabele 2 interpoliraj s [Hermitovim kubičnim zlepkom](#).

| $x$     | $x_1$  | $x_2$  | $\dots$ | $x_n$  |
|---------|--------|--------|---------|--------|
| $f(x)$  | $y_1$  | $y_2$  | $\dots$ | $y_n$  |
| $f'(x)$ | $dy_1$ | $dy_2$ | $\dots$ | $dy_n$ |

Tabela 2: Podatki, ki jih potrebujemo za Hermitov kubični zlepek

- Uporabi Hermitovo bazo kubičnih polinomov, ki zadoščajo pogojem iz Tabele 3 in jih z linearno preslikavo preslikaj z intervala  $[0, 1]$  na interval  $[x_i, x_{i+1}]$ .

|          | $p(0)$ | $p(1)$ | $p'(0)$ | $p'(1)$ |
|----------|--------|--------|---------|---------|
| $h_{00}$ | 1      | 0      | 0       | 0       |
| $h_{01}$ | 0      | 1      | 0       | 0       |
| $h_{10}$ | 0      | 0      | 1       | 0       |
| $h_{11}$ | 0      | 0      | 0       | 1       |

Tabela 3: Vrednosti baznih polinomov  $h_{ij}(t)$  in njihovih odvodov v točkah  $t = 0$  in  $t = 1$ .

- Definirajte podatkovni tip [HermitovZlepek](#) za Hermitov kubični zlepek, ki vsebuje podatke iz Tabele 2.
- Napišite funkcijo [vrednost\(zlepek, x\)](#), ki izračuna vrednost Hermitovega kubičnega zlepka za dano vrednost argumenta  $x$ . Omogočite, da se vrednosti tipa [HermitovZlepek](#) [kliče kot funkcije](#).
- S Hermitovim zlepkom interpolirajte funkcijo  $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$  na intervalu  $[0, 6]$  v 10 točkah. Napako ocenite s formulo za napako polinomske interpolacije

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \quad (12.1)$$

in oceno primerjajte z dejansko napako. Upoštevajte, da je pri Hermitovi interpolaciji  $x_1 = x_2$  in  $x_3 = x_4$ . Narišite graf napake.

- Z oceno za napako (12.1) določite število interpolacijskih točk, pri katerem bo napaka Hermitovega zlepka manjša od  $10^{-7}$ .
- Funkcijo  $f(x)$  interpolirajte tudi z Newtonovim polinomom in primerjajte napako z napako Hermitovega zlepka.

### 12.2 Hermitov kubični zlepek

Hermitov kubični zlepek, ki interpolira podatke iz Tabele 2, je sestavljen iz kubičnih polinomov  $p_k(x)$  na intervalih  $[x_k, x_{k+1}]$ . Kubični polinom je podan s štirimi parametri, ravno toliko kot je podatkov

v krajiščih intervala  $[x_k, x_{k+1}]$ . Zato lahko vsak polinom  $p_k(x)$  določimo le na podlagi podatkov v točkah  $x_k$  in  $x_{k+1}$ . Polinom  $p_k(x)$  poiščemo tako, da interval  $[x_k, x_{k+1}]$  preslikamo z linearno preslikavo na  $[0, 1]$  in uporabimo Lagrangeovo bazo  $h_{00}(t)$ ,  $h_{01}(t)$ ,  $h_{10}(t)$  in  $h_{11}(t)$  za podatke iz tabele 3. Polinome poiščemo v standardni bazi

$$h_{ij}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \quad (12.2)$$

Če izračunamo še odvod  $h'_{ij}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$ , dobimo naslednji sistem enačb za koeficiente baznega polinoma  $h_{00}(t)$ :

$$\begin{aligned} h_{00}(0) &= a_0 = 1 \\ h'_{00}(0) &= a_1 = 0 \\ h_{00}(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ h'_{00}(1) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Za ostale polinome dobimo podobne sisteme, ki imajo isto matriko sistema, razlikujejo pa se v desnih straneh. Če desne strani postavimo v matriko, dobimo ravno identično matriko. Inverzna matrika sistema (12.3) ima v stolpcih ravno koeficiente baznih polinomov  $h_{ij}(t)$ . Inverz izračunamo z Julijo.

```
A = [1 0 0 0; 1 1 1 1; 0 1 0 0; 0 1 2 3]
inv(A)
```

```
4×4 Matrix{Float64}:
 1.0 -0.0  0.0 -0.0
 0.0  0.0  1.0 -0.0
 -3.0 3.0 -2.0 -1.0
 2.0 -2.0  1.0  1.0
```

Bazni polinomi so enaki

$$\begin{aligned} h_{00}(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ h_{01}(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\ h_{10}(t) &= t - 2t^2 + t^3 \\ h_{11}(t) &= -t^2 + t^3. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Sedaj moramo še določiti preslikavo z intervala  $[x_k, x_{k+1}]$  na  $[0, 1]$ . Naj bo  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  in  $t \in [0, 1]$ . Potem je preslikava med  $x$  in  $t$  enaka:

$$t(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad (12.5)$$

medtem ko je

$$x(t) = x_k + t(x_{k+1} - x_k) \quad (12.6)$$

preslikava med  $t$  in  $x$ . Želimo uporabiti bazo  $h_{ij}(t)$  in tako interpoliramo polinoma  $p_k(x(t))$  na intervalu  $[0, 1]$ . Vidimo, da je

$$\begin{aligned}
p_k(x(0)) &= p_k(x_k) = y_k, \\
\frac{d}{dt}p_k(x(0)) &= p'_k(x_k)x'(0) = p'_k(x_k)(x_{k+1} - x_k) = dy_k(x_{k+1} - x_k), \\
p_k(x(1)) &= p_k(x_{k+1}) = y_{k+1}, \\
\frac{d}{dt}p_k(x(1)) &= p'_k(x_k)x'(1) = p'_k(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = dy_{k+1}(x_{k+1} - x_k)
\end{aligned} \tag{12.7}$$

in

$$p_k(x) = y_k h_{00}(t) + y_{k+1} h_{01}(t) + (x_{k+1} - x_k)(dy_k h_{10}(t) + dy_{k+1} h_{11}(t)), \tag{12.8}$$

kjer  $t$  izračunamo kot  $t(x)$  iz (12.5). Sedaj napišemo naslednje funkcije in tipe:

- funkcijo `hermiteint(x, xint, y, dy)`, ki izračuna vrednost Hermitovega polinoma v  $x$  (Program 60),
- podatkovni tip `HermitovZlepek` in funkcijo `vrednost(x, Z::HermitovZlepek)`, ki izračuna vrednost Hermitovega zlepka  $z$  v dani točki  $x$  (Program 61).

#### Vrednosti kot funkcije

Na primeru Hermitovega zlepka lahko ilustriramo, kako v Juliji ustvarimo vrednosti, ki se obnašajo kot funkcije. Tako lahko zapis v programskemu jeziku približamo matematičnemu zapisu. Za Hermitov zlepek smo definirali tip `HermitovZlepek` in funkcijo `vrednost`, s katero lahko izračunamo vrednost Hermitovega zlepka v dani točki. Vrednost tipa `HermitovZlepek` hrani interpolacijske podatke in hkrati predstavlja zlepek kot funkcijo. V Juliji lahko definiramo, da se vrednosti tipa `HermitovZlepek` **obnašajo kot funkcije**:

```
(z::HermitovZlepek)(x) = vrednost(z, x)
```

Vrednosti zlepka v dani točki izračunamo tako, kot bi to naredili v matematičnem zapisu:

```
z = HermitovZlepek([0, 1, 2], [1, 2, 3], [2, 1, 2])
z(1.23)
```

Napisane funkcije preiskusimo tako, da funkcijo  $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$  interpoliramo v 10 ekvidistančnih točkah na intervalu  $[0, 6]$ :

```

f(x) = cos(2x) + sin(3x)
df(x) = -2sin(2x) + 3cos(3x)
x = range(0, 6, 10)
y = f.(x)
dy = df.(x)

z = HermitovZlepek(x, y, dy)

```

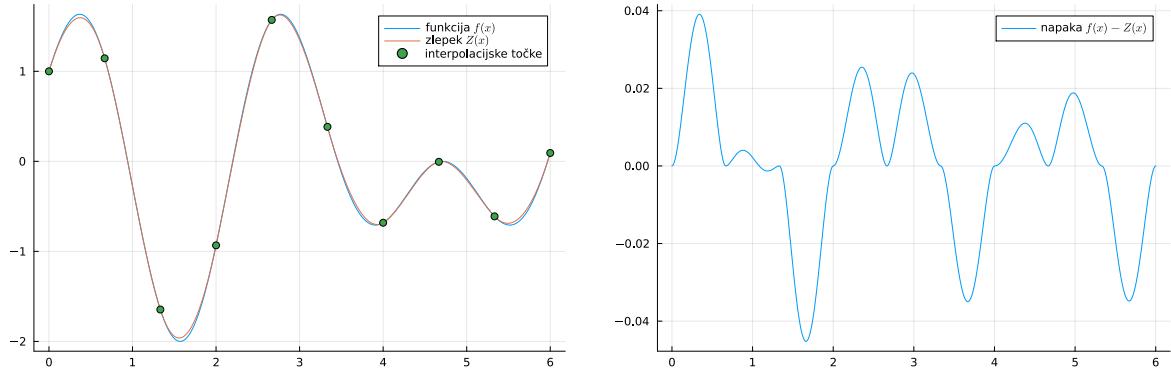
Na eno sliko naričemo graf funkcije in zlepka, na drugo pa napako interpolacije (razliko med funkcijo in zlepkom):

```

using Plots
plot(f, 0, 6, label="funkcija  $f(x)$ ", legend=:topright)
plot!(x -> z(x), 0, 6, label="zlepak  $Z(x)$ ")
scatter!(x, y, label="interpolacijske točke")

plot(x -> f(x) - z(x), 0, 6, label="napaka  $f(x) - Z(x)$ ")

```



Slika 44: Levo: Graf funkcije  $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$  in Hermitovega zlepka, ki interpolira funkcijo  $f(x)$  na 10 točkah (levo). Graf napake interpolacije (desno). Zlepak interpolira tudi vrednosti odvodov, zato ima napaka v interpolacijskih točkah stacionarne točke.

### 12.3 Ocena za napako

Oceno za napako interpolacije lahko za Hermitov polinom izračunamo analitično. Napako polinomske interpolacije v splošnem zapišemo kot:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=1}^n (x - x_i), \quad (12.9)$$

kjer je  $\xi$  neznana vrednost znotraj interpolacijskega območja, ki je odvisna od vrednosti  $x$ . Ker imamo poleg vrednosti na voljo tudi odvode, interpolacijski točki štejemo dvojno. Tako dobimo naslednjo formulo za napako:

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_1)^2 (x - x_2)^2. \quad (12.10)$$

Poишčimo še oceno za največjo vrednost napake. Vrednosti  $f^{(4)}(\xi)$  ne poznamo in jo lahko zgolj ocenimo. Poleg tega moramo poiskati po absolutni vrednosti največjo vrednost polinoma  $p(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2$  na intervalu  $[x_1, x_2]$ . V krajiščih intervala je vrednost polinoma  $p(x)$  enaka nič, zato je maksimum dosežen v notranjosti in je dosežen v stacionarni točki. Poишčimo torej stacionarno točko  $p(x)$ , ki leži znotraj intervala  $[x_1, x_2]$ . Odvod je enak

$$\begin{aligned} p'(x) &= 2(x - x_1)(x - x_2)^2 + 2(x - x_1)^2(x - x_2) \\ &= 2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_2 + x - x_1) = 4(x - x_1)(x - x_2) \left( x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (12.11)$$

Polinom  $p(x)$  ima tri stacionarne točke: dve v krajiščih intervala in eno v njegovem središču  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ . Vrednost polinoma v središču je tudi največja vrednost, dosežena na  $[x_1, x_2]$ :

$$p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right)^2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^4. \quad (12.12)$$

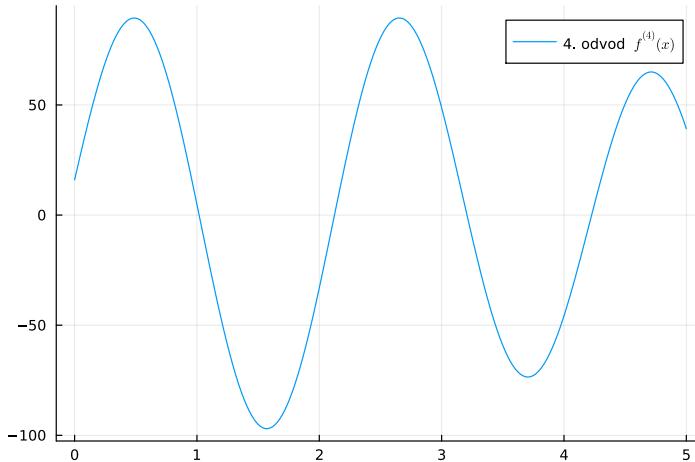
Največjo napako lahko ocenimo z

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \frac{(x_2 - x_1)^4}{4} = \frac{1}{96} f^{(4)}(\xi)(x_2 - x_1)^4. \quad (12.13)$$

Če želimo uporabiti oceno (12.13), moramo poznati oceno za četrти odvod funkcije. Za približno oceno uporabimo avtomatsko odvajanje in narišemo graf četrtega odvoda:

```
using ForwardDiff
ddf(x) = ForwardDiff.derivative(df, x)
d3f(x) = ForwardDiff.derivative(ddf, x)
d4f(x) = ForwardDiff.derivative(d3f, x)

plot(d4f, 0, 5, label="4. odvod $f^{(4)}(x)", legend=:topright)
```



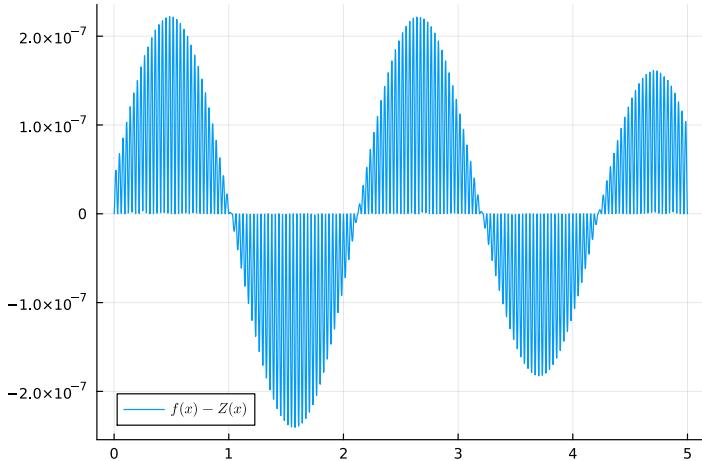
Slika 45: Četrtri odvod funkcije  $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$  na intervalu  $[0, 6]$

Ocena za napako omogoča, da vnaprej izberemo interpolacijske točke, za katere bo napaka manjša od predpisane. Če želimo, da je napaka manjša od  $\varepsilon$ , potem mora biti širina intervala manjša od:

$$|x_2 - x_1| \leq \sqrt[4]{\frac{96}{f^{(4)}(\xi)}} \varepsilon. \quad (12.14)$$

Peverimo še numerično, ali izračunana formula deluje:

```
eps = 1e-6
d4fmax = 100
h = (96 * eps / d4fmax)^0.25
n = Integer(ceil((5 - 0) / h))
x = range(0, 5, n + 1)
Z = HermitovZlepek(x, f.(x), df.(x))
plot(x .-> f(x) - Z(x), 0, 5, label="$f(x) - Z(x)$")
```



Slika 46: Napaka interpolacije, pri čemer smo število interpolacijskih točk izbrali tako, da je napaka manjša od  $10^{-6}$

#### Teoretične ocene za napako niso vedno uporabne

Za določitev napake smo uporabili oceno (12.13). Pri tem smo meje za četrti odvod, ki nastopa v oceni, določili kar z grafa. V praksi teoretične ocene, kakršna je (12.1), ni mogoče vedno uporabiti, saj je nepraktično določiti meje za višje odvode. Pogosto zato uporabimo manj eksaktne načine, da dobimo vsaj neko informacijo o napaki, četudi ni povsem zanesljiva.

## 12.4 Newtonov interpolacijski polinom

Naj bodo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vrednosti neodvisne spremenljivke in  $y_1, y_2, \dots, y_n$  vrednosti neznane funkcije. Interpolacijski polinom, ki interpolira podatke  $x_i, y_i$ , je polinom  $p(x)$ , za katerega velja:

$$\begin{aligned} p(x_1) &= y_1 \\ p(x_2) &= y_2 \\ &\vdots \\ p(x_n) &= y_n. \end{aligned} \tag{12.15}$$

Newtonov interpolacijski polinom je interpolacijski polinom, zapisan v obliki:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k). \tag{12.16}$$

Pri tem smo uporabili Newtonovo bazo polinomov za dane interpolacijske točke:

$$1, x - x_1, (x - x_1)(x - x_2), \dots, \prod_{k=1}^{n-2} (x - x_k) \text{ in } \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k), \tag{12.17}$$

saj je koeficiente  $a_i$  lažje izračunati, kot če bi bil polinom zapisan v standardni bazi. Poleg tega je računanje vrednosti polinoma v standardni bazi lahko numerično nestabilno, če so vrednosti  $x_i$  relativno blizu. Koeficiente  $a_i$  lahko poiščemo bodisi tako, da rešimo spodnje trikotni sistem, ki ga dobimo iz enačb (12.15), ali pa z [deljenimi diferencami](#). Definirali bomo naslednje tipe in funkcije:

- podatkovno strukturo za Newtonov interpolacijski polinom `NewtonovPolinom` (Program 57),
- funkcijo `vrednost(p, x)`, ki izračuna vrednost Newtonovega polinoma v dani točki (Program 58),

- funkcijo interpoliraj (NewtonovPolinom,  $x$ ,  $y$ ), ki poišče koeficiente polinoma za dane interpolacijske podatke (Program 59).

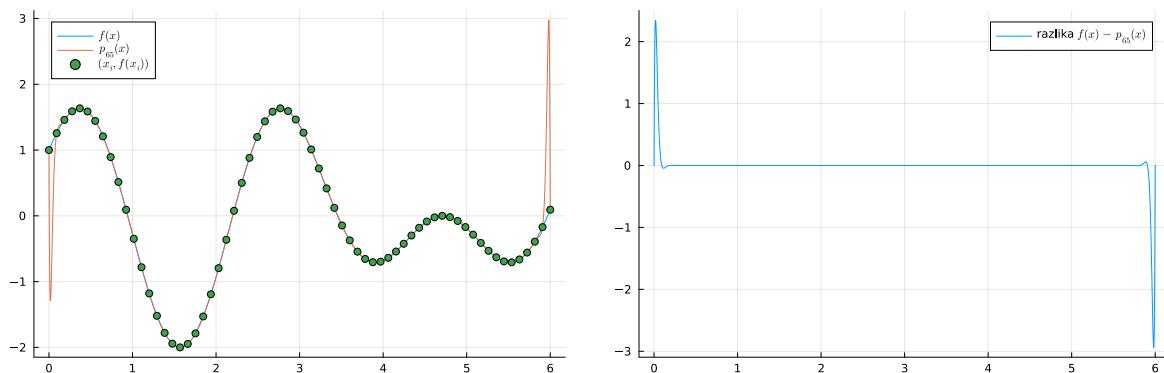
## 12.5 Rungejev pojav

Pri nizkih stopnjah polinomov se z večanjem števila interpolacijskih točk napaka interpolacije zmanjšuje. A le do neke mere! Če stopnjo polinoma preveč povečamo, začne napaka naraščati.

```
f(x) = cos(2x) + sin(3x)
n = 65
x = range(0, 6, n + 1)
p_newton = interpoliraj(NewtonovPolinom, x, f.(x))

plot(f, 0, 6, label="$f(x)$")
plot!(x -> p_newton(x), 0, 6, label="$p_{65}(x)$")
scatter!(x, f.(x), label="$\$(x_i, f(x_i))\$")

plot(x -> f(x) - p_newton(x), 0, 6, label="razlika $\$f(x)-p_{65}(x)\$")
```



Slika 47: Interpolacija s polinomi visokih stopenj na ekvidistančnih točkah na robu območja močno niha. Levo: Interpolacija funkcije  $f(x) = \cos(2x) + \sin(3x)$  s polinomom stopnje 65. Desno: Razlika med funkcijo in interpolacijskim polinomom.

Opazimo, da se napaka na robu znatno poveča. Povečanje je posledica velikih oscilacij, ki se pojavijo na robu, če interpoliramo s polinomom visoke stopnje na ekvidistančnih točkah. To je znan pojav pod imenom [Rungejev pojav](#). Problemu se izognemo, če namesto ekvidistančnih točk uporabimo [Čebiševe točke](#).

### Kaj smo se naučili?

- Metodo deljenih diferenc in Newtonov polinom lahko uporabimo tudi, če so poleg vrednosti podani tudi odvodi.
- Zaradi Rungejevega pojava interpolacija s polinomi visokih stopenj na ekvidistančnih točkah ni najboljša izbira. Interpolacija na Čebiševih točkah deluje tudi za visoke stopnje polinoma.
- Zlepki so enostavni za uporabo, učinkoviti (malo operacij za izračun) in imajo v določenih primerih boljše lastnosti od polinomov visokih stopenj.

## 12.6 Rešitve

```

# bazne funkcije na [0, 1]
h00(t) = 1 + t^2 * (-3 + 2 * t)
h01(t) = t^2 * (3 - 2 * t)
h10(t) = t * (1 + t * (-2 + t))
h11(t) = t^2 * (-1 + t)

"""
hermiteint(x, xint, y, dy)

Izračunaj vrednost Hermitovega kubičnega polinoma p v točki `x`, ki interpolira
podatke `p(xint[1]) == y[1]`, `p(xint[2]) == y[2]` in
`p'(xint[1]) == dy[1]`, `p'(xint[2]) == dy[2]`.

"""
function hermiteint(x, xint, y, dy)
    dx = xint[2] - xint[1]
    t = (x - xint[1]) / dx
    return y[1] * h00(t) + y[2] * h01(t) + dx * (dy[1] * h10(t) + dy[2] * h11(t))
end

```

Program 54: Interpoliraj podatke iz tabele 2 s Hermitovim kubičnim polinomom

```

"""
Podatkovna struktura, ki hrani podatke za Hermitov kubični zlepak
v interpolacijskih točkah `x` z danimi vrednostmi `y` in vrednostmi
odvoda `dy`.

"""
struct HermitovZlepak
    x
    y
    dy
end

```

Program 55: Podatkovni tip za Hermitov kubični zlepak

```

"""
y = vrednost(x, Z)

Izračunaj vrednost Hermitovega kubičnega zlepka `Z` v dani točki `x`.

"""
function vrednost(x, Z::HermitovZlepak)
    i = searchsortedfirst(Z.x, x)
    if (x == first(Z.x))
        return first(Z.y)
    end
    if (i > lastindex(Z.x)) || (i == firstindex(Z.x))
        throw(BoundsError(Z, x))
    end
    return hermiteint(x, Z.x[i-1:i], Z.y[i-1:i], Z.dy[i-1:i])
end

(Z::HermitovZlepak)(x) = vrednost(x, Z)

```

Program 56: Izračunaj vrednost Hermitovega kubičnega zlepka

```

"""
NewtonovPolinom(a, x)

Vrni [Newtonov interpolacijski polinom](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_
polynomial)
oblike `a[1]+a[2](x-x[1])+a[3](x-x[1])(x-x[2])...`
s koeficienti `a` in vozlišči `x`.

# Primer

Poglejmo polinom ``1+x+x(x-1)``, ki je definiran s koeficienti `[1, 1, 1]` in z
vozlišči
``x_0 = 0`` in ``x_1 = 1``

```jldoctest
julia> p = NewtonovPolinom([1, 1, 1], [0, 1])
NewtonovPolinom([1, 1, 1], [0, 1])
```

"""
struct NewtonovPolinom
    a # koeficienti
    x # vozlišča
end

```

Program 57: Podatkovni tip za polinom v Newtonovi obliki

```

"""
vrednost(p::NewtonovPolinom, x)

Izračunaj vrednot Newtonovega polinoma `p` v `x` s Hornerjevo metodo.

# Primer

```jldoctest
julia> p = NewtonovPolinom([0, 0, 1], [0, 1]);

julia> vrednost(p, 2)
2
```

"""
function vrednost(p::NewtonovPolinom, x)
    n = length(p.x)
    v = p.a[n+1]
    for i = n:-1:1
        v = p.a[i] + (x - p.x[i]) * v
    end
    return v
end

(p::NewtonovPolinom)(x) = vrednost(p, x)

```

Program 58: Izračunaj vrednost Newtonovega polinoma

```

using LinearAlgebra
"""
    p = interpoliraj(NewtonovPolinom, x, f)

Izračunaj koeficiente Newtonovega interpolacijskega polinoma, ki interpolira
podatke `y(x[k])=f[k]`. Če se katere vrednosti `x` ponovijo,
metoda predvideva, da so v `f` poleg vrednosti podani tudi odvodi.

# Primer

Polinom ``x^2-1`` interpolira podatke `x=[0,1,2]` in `y=[-1, 0, 3]` lahko v
Newtonovi obliki zapišemo kot ``1 + x + x(x-1)``

```jldoctest
julia> p = interpoliraj(NewtonovPolinom, [0, 1, 2], [-1, 0, 3])
NewtonovPolinom([-1.0, 1.0, 1.0], [0, 1])
```

Če imamo več istih vrednosti abscise `x`, moramo v `f` podati vrednosti funkcije
in odvodov. Na primer polinom ``p(x) = x^4 = x + 3x(x-1) + 3x(x-1)^2 + x(x-1)^3```
ima v ``x=1`` vrednosti ``p(1)=1, p'(1)=4, p''(1)=12``

```jldoctest
julia> p = interpoliraj(NewtonovPolinom, [0,1,1,1,2], [0,1,4,12,16])
NewtonovPolinom([0.0, 1.0, 3.0, 3.0, 1.0], [0, 1, 1, 1])

julia> x = (1,2,3,4,5); p.(x) .- x.^4
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
```
"""

function interpoliraj(P::Type{<:NewtonovPolinom}, x, f)
    n = length(x) - 1
    m = length(f) - 1
    @assert n == m
    a = zeros(n + 1, n + 1)
    a[:, 1] = f;
    fakulteta = 1
    for j = 2:n + 1
        fakulteta *= j - 1
        for i = j:n + 1
            if x[i] != x[i-j+1]
                a[i,j] = (a[i,j-1] - a[i-1,j-1])/(x[i] - x[i-j+1]);
            else
                a[i,j] = a[i,j-1]/fakulteta
                a[i,j-1] = a[i-1,j-1]
            end
        end
    end
    return NewtonovPolinom(diag(a), x[1:end-1])
end

```

Program 59: Izračun koeficientov Newtonovega polinoma z deljenimi diferencami

## 12.7 Testi

```

@testset "Hermitov polinom" begin
    # kubični polinom se bo vedno ujemal s Hermitovim polinomom
    p3(x) = x^3 - x
    dp3(x) = 3x^2 - 1
    xint = [0, 2]
    h(x) = hermiteint(x, xint, p3.(xint), dp3.(xint))
    @test isapprox(p3(0), h(0))
    @test isapprox(p3(0.5), h(0.5))
    @test isapprox(p3(1.5), h(1.5))
end

```

Program 60: Test za izračun Hermitovega kubičnega polinoma

```

@testset "Hermitov zlepek" begin
    p3(x) = x^3 - 2x^2 + 1
    dp3(x) = 3x^2 - 4x
    x = [-1, 0.5, 3.5, 4]
    z = HermitovZlepek(x, p3.(x), dp3.(x))
    @test_throws BoundsError z(-2)
    for xi in x
        @test isapprox(z(xi), p3(xi))
    end
    @test isapprox(z(-0.2), p3(-0.2))
    @test isapprox(z(1.1), p3(1.1))
    @test isapprox(z(3.7), p3(3.7))
    @test_throws BoundsError z(5.1)
end

```

Program 61: Test za izračun vrednosti zlepka

```

@testset "Vrednost Newtonovega polinoma" begin
    p = NewtonovPolinom([1, 1, 2], [0, 1])
    f(x) = 1 + x*(1 + 2*(x - 1))
    @test isapprox(p(1), f(1))
    @test isapprox(p(2.5), f(2.5))
    @test isapprox(p(pi), f(pi))
end

```

Program 62: Test za izračun vrednosti Newtonovega polinoma

```

@testset "Interpolacija z Newtonovim polinomom" begin
    f(x) = 1 + (x-2)*(2.5 + (x-1)*3.5)
    p = interpoliraj(NewtonovPolinom, [2, 1, 0], f.([2, 1, 0]))
    @test isapprox(p.a, [1, 2.5, 3.5])
    @test isapprox(p.x, [2, 1])
end

```

Program 63: Test za izračun koeficientov Newtonovega interpolacijskega polinoma

## 13 Porazdelitvena funkcija normalne porazdelitve

### 13.1 Naloga

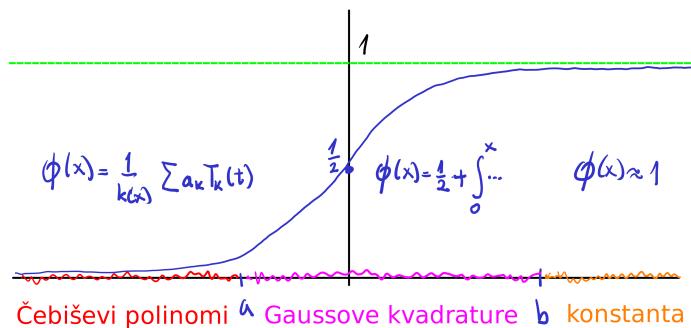
- Implementirajte porazdelitveno funkcijo standardne normalne porazdelitve

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (13.1)$$

- Poskrbite, da je relativna napaka manjša od  $0.5 \cdot 10^{-11}$ . Definicijsko območje razdelite na več delov in na vsakem delu uporabi primerno metodo, da zagotovite zahtevano relativno natančnost.
- Interval  $(-\infty, -1]$  transformiraj s funkcijo  $\frac{1}{x}$  na interval  $[-1, 0]$  in uporabi aproksimacijo s Čebiševimi polinomi.
  - Namesto funkcije  $\Phi(x)$  aproksimiraj funkcijo  $xe^{x^2}\Phi(x)$ .
  - Vrednosti funkcije  $\Phi(x)$  v Čebiševih točkah izračunajte z adaptivno metodo s parom Gauss-Legendrovih kvadratur
- Na intervalu  $[-1, 0]$  za primerno izbran  $a$  uporabite [Gauss-Legendrove kvadrature](#).
- Na intervalu  $[0, \infty)$  uporabite lastnost  $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ .

### 13.2 Razdelitev definicijskega območja

Pri implementaciji neke funkcije sta pomembni dve stvari. Da je na celiem defnicijskem območju relativna napaka omejena in da je časnovna zahtevnost izračuna omejena s konstanto, ki ni odvisna od argumenta funkcije. Za funkcijo kot je porazdelitvena funkcija normalne spremenljivke je oba pogoja zelo težko doseči z enim algoritmom. Zato je definicijsko območje bolje razdeliti na več delov in na vsakem delu izbrati numerično metodo, ki je najbolj primerna in zadosti omenjenima pogojem.



Slika 48: Razdelitev intervala  $(-\infty, \infty)$  na tri dele, na katerih uporabimo različne metode

### 13.3 Izračun na $[-c, \infty)$

Izračunamo  $\Phi(-c)$  in  $\Phi(x) = \Phi(-c) + \int_{-c}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ . Integral izračunamo z Gauss-Legendrovimi kvadraturami s fiksni številom vozlišč, tako da je absolutna napaka enakomerno omejena. Na  $[b, \infty)$  za dovolj velik  $b$  je vrednost enaka 1.

### 13.4 Izračun na $(-\infty, -c]$

Sledili bomo ideji iz [11]. Izračunali bomo komplementarno funkcijo napake

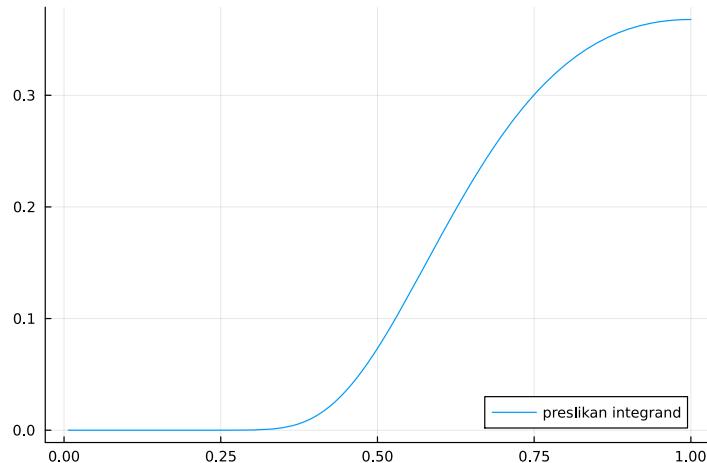
$$\operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \quad (13.2)$$

za  $x \in [0, \infty)$ . Funkcija  $\Phi(x)$  lahko za negativne vrednosti  $x$  izrazimo s funkcijo  $\operatorname{erfc}$  kot

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (13.3)$$

Vrednosti integrala  $\operatorname{erfc}(x)$  potrebujemo na intervalu  $[c, \infty)$ . Da se izognemo neskončnim mejam, integral s transformacijo  $t = \frac{1}{x}$  iz intervala  $[c, \infty)$  prestavimo na končen interval  $[0, \frac{1}{c}]$ . V [11] za transformacijo izberejo linearno ulomljeno preslikavo  $t = \frac{x-k}{x+k}$ , kjer  $k$  določijo tako, da je konvergenca dobljene Čebiševe vrste čim hitrejša. Mi si bomo stvari poenostavili in izbrali preprostejšo transformacijo. Vpeljimo novo spremenljivko  $u = \frac{1}{t}$  v integral (13.2). Izračunamo diferencial  $dt = -\frac{1}{u^2} du$  in integral  $I(t) = \operatorname{erfc}(x(t))$  zapišemo kot

$$I(t) = - \int_t^0 \frac{\exp(-\frac{1}{u^2})}{u^2} du = \int_0^t \frac{\exp(-\frac{1}{u^2})}{u^2} du. \quad (13.4)$$



Slika 49: Integrant  $\frac{1}{u^2} \exp\left(-\frac{1}{2u^2}\right)$ , če integral  $\int_x^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$  preslikamo s preslikavo  $t = \frac{1}{x}$

Funkcija  $\frac{1}{u^2} \exp\left(-\frac{1}{u^2}\right)$  ni podobna polinomom, saj pri nič zelo hitro konvergira k 0. Zato metode višokega reda ne bodo dale dobrih rezultatov in bomo raje uporabili adaptivno kvadraturo.

### 13.5 Adaptivna metode

## 13.6 Aproksimacija s polinomi Čebiševa

Weierstrassov izrek pravi, da lahko poljubno zvezno funkcijo na končnem intervalu enakomerno na vsem intervalu aproksimiramo s polinomi. Polinom dane stopnje, ki neko funkcijo najbolje aproksimira je težko poiskati. Z razvojem funkcije po ortogonalnih polinomih Čebiševa, pa se optimalni aproksimaciji zelo približamo. Naj bo  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija. Potem lahko  $f$  zapišemo z neskončno Furierovo vrsto

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{n(t)}, \quad (13.5)$$

kjer so  $T_n$  polinomi Čebiševa,  $a_n$  pa koeficienti. Koeficienti  $a_n$  so dani z integralom

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Polinomi Čebiševa so definirani z relacijo

$$T_n(\cos(\varphi)) = \cos(n\varphi) \quad (13.7)$$

in zadoščajo dvočlenski rekurzivni enačbi

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (13.8)$$

Prvih nekaj polinomov  $T_n(x)$  je enakih:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x \end{aligned} \quad (13.9)$$

Namesto cele vrste (13.5), lahko obdržimo le prvih nekaj členov in funkcijo aproksimiramo s končno vsoto

$$f(x) \approx C_{N(x)} = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x), \quad (13.10)$$

koeficiente  $a_n$  pa bomo poiskali numerično z Gauss-Čebiševimi kvadraturami [12].

Vozlišča za Gauss-Čebiševa kvadraturo v  $n$  vozliščih so v [Čebiševih vozliščih](#)

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (13.11)$$

uteži pa so vse enake  $w_k = \frac{\pi}{n}$ . Za vrsto  $C_{N(x)}$  uporabimo kvadraturne formule z  $N + 1$  vozlišči. Za koeficiente tako na intervalu  $[-1, 1]$  dobimo približne formule

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f(x_k) \\
a_1 &= \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N T_1(x_k) f(x_k) \\
a_2 &= \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N T_2(x_k) f(x_k) \\
&\vdots \\
a_N &= \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N T_N(x_k) f(x_k).
\end{aligned} \tag{13.12}$$

### Koeficiente Čebiševe vrste natančneje in hitreje računamo s FFT

Na vajah bomo koeficiente an računali približno z Gauss-Čebiševimi kvadraturnimi formulami. V praksi je mogoče koeficiente  $a_n$  izračunati bolj natančno in hitreje ( $\mathcal{O}(n \log(n))$  namesto  $\mathcal{O}(n^2)$ ) z diskretno Fourierovo kosinusno transformacijo funkcijskih vrednosti v Čebiševih interpolacijskih točkah [13].

Če želimo aproksimirati funkcijo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , moramo argument preslikati na interval  $[-1, 1]$  z linearno preslikavo. V splošnem sta linearni preslikavi med  $x \in [a, b]$  in  $t \in [c, d]$  podani kot:

$$\begin{aligned}
t(x) &= \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \\
x(t) &= \frac{b-a}{d-c}(t-c) + b.
\end{aligned} \tag{13.13}$$

Namesto  $f(x)$  aproksimiramo funkcijo  $\tilde{f}(t) = f(x(t))$  na intervalu  $[-1, 1]$ .

Napako aproksimacije lahko ocenimo z velikostjo koeficientov  $a_n$ . Ker je

$$|T_{n(x)}| \leq 1, \quad x \in [-1, 1], \tag{13.14}$$

je napaka  $f(x) - C_{N(x)}$  omejena s  $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$

$$|f(x) - C_{N(x)}| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n T_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \tag{13.15}$$

Kako vemo, kdaj je členov vrste dovolj, da je dosežena zahtevana natančnost. Izberemo  $N$  tako, da je nekaj zaporednih členov  $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}$  manjših od Ker neskončne vrste  $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$  ne moremo sešteeti, za približno oceno napake vzamemo kar zadnji koeficient  $a_N$  v končni vsoti  $C_{N(x)}$ .

## 13.7 Čebiševa aproksimacija funkcije $\Phi$ za majhne $x$

Za majhne  $x$  se vrednost  $\Phi$  približuje 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0. \tag{13.16}$$

Zato ni dovolj, da omejimo absolutno napako, ampak moramo poskrbeti, da je tudi relativna napaka dovolj majhna. Formula

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \tag{13.17}$$

ni uporabna, saj pri odštevanju dveh skoraj enakih vrednosti relativna napaka nekontrolirano naraste. Zato definicijsko območje razdelimo na dva intervala  $(-\infty, c]$  in  $[c, \infty)$ . Na intervalu  $[c, \infty)$  je vrednost  $\Phi$  navzdol omejena z  $\Phi(c)$  in je relativna napaka največ  $\frac{1}{\Phi(c)}$  kratnik absolutne napake. Zato je na  $[c, \infty)$  dovolj, če poskrbimo, da je absolutna napaka majhna.

Pri aproksimaciji s polinomi Čebiševa imamo kontrolo le nad absolutno napako. Če blizu ničle funkcije pa majhna absolutna napaka ne pomeni nujno tudi majhne relativne napake. Težavo lahko rešimo tako, da funkcijo  $\Phi(x)$  pomnožimo s faktorjem  $k(x)$  tako, da je limita

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)\Phi(x) = 1. \quad (13.18)$$

Namesto funkcije  $\Phi(x)$  aproksimiramo funkcijo  $g(x) = k(x)\Phi(x)$ , ki je navzdol omejena z neničelno vrednostjo na  $(-\infty, c]$ . Za funkcijo  $g(x)$  lahko poskrbimo, da je absolutna napaka enakomerno omejena na  $(-\infty, c]$ . Vrednost funkcije  $\Phi(x)$  nato izračunamo tako, da izračunamo kvocient

$$\Phi(x) = \frac{g(x)}{k(x)}, \quad (13.19)$$

kar pa ne povzroči bistvenega povečanja relativne napake, saj je deljenje za razliko od odštevanja ne povzroči [katastrofalnega krajšanja](#).

Če je  $c < 0$ , lahko za dodatni faktor izberemo  $k(x) = \Phi(x)$ . Izračun vrednosti za majhne vrednosti  $x$  lahko izračunamo z Gauss-Laguerreovimi kvadraturami [12]

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx \approx \sum_{k=1}^N w_k f(x_k)m, \quad (13.20)$$

kjer so  $x_k$  ničle Laguerrovega polinoma stopnje  $N - 1$ ,  $w_i$  pa primerno izbrane uteži. Vrednost  $\Phi(x)$  za majhne vrednosti  $x$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (13.21)$$

lahko z uvedbo nove spremenljivke  $u = x - t$ , ki preslika interval  $(-\infty, x)$  v interval  $(0, \infty)$ , prevedemo na integral

$$\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^\infty e^{-\frac{(u-x)^2}{2}} du = \int_0^\infty e^{-\frac{(u-x)^2}{2}+u} e^{-u} du \quad (13.22)$$

in uporabimo Gauss-Laguerove kvadrature (13.20) za funkcijo  $f(u) = e^{-\frac{(u-x)^2}{2}+u}$ .

### 13.8 Izračun funkcije $\Phi(x)$ na $[c, \infty)$

## 14 Povprečna razdalja med dvema točkama na kvadratu

V poglavju o enojnih integralih smo spoznali, da je večina kvadraturnih formul preprosta utežena vsota

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum w_k f(x_k), \quad (14.1)$$

kjer so uteži  $w_k$  in vozlišča  $x_k$  primerno izbrana, da se formula čim bolj približa pravi vrednosti.

Izračun večkratnih integralov je zapletnejši, a v principu enak. Kvadrature so tudi za večkratne integrale večinoma navadne utežene vsote vrednosti v izbranih točkah na integracijskem območju. V tej vaji si bomo ogledali produktne kvadrature za večkratne integrale.

### 14.1 Naloga

- Izpeljite algoritem, ki izračuna integral na več dimenzionalnem kvadru kot večkratni integral tako, da za vsako dimenzijo uporabite isto kvadraturno formulo za enkratni integral.
- Pri implementaciji pazite, da ne delate nepotrebnih dodelitev pomnilnika.
- Uporabite algoritem za izračun povprečne razdalje med dvema točkama na enotskem kvadratu  $[0, 1]^2$  in enotski kocki  $[0, 1]^3$ .
- Za sestavljeno Simpsonovo formulo in Gauss-Legendrove kvadrature ugotovite, kako napaka pada s številom izračunov funkcije, ki jo integriramo. Primerjajte rezultate s preprosto Monte-Carlo metodo (računanje vzorčnega povprečja za enostaven slučajni vzorec).

### 14.2 Dvojni integral in integral integrala

Oglejmo si najenostavnnejši primer integrala funkcije na kvadratu  $[a, b]^2$ . Dvojni integral lahko zapišemo kot dva gnezdena enojna integrala<sup>2</sup>

$$\int \int_{[a,b]^2} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_a^b f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (14.2)$$

Kvadrature za večkratni integral je najenostavnejše izpeljati, če za vsakega od gnezdenih enojnih integralov uporabimo isto kvadraturno formulo:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad (14.3)$$

z danimi utežmi  $w_1, w_2, \dots, w_n$  in vozlišči  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Če za zunanji integral uporabimo kvadrature (14.3), dobimo:

$$\int \int_{[a,b]^2} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_a^b f(x, y) dy \right) dx = \sum w_i F_y(x_i), \quad (14.4)$$

kjer smo z  $F_y(x)$  označili integral po  $y$ . Za izračun vrednosti  $F_y(x_i)$  ponovno uporabimo kvadrature (14.3):

---

<sup>2</sup>Več o tem, kdaj je mogoče večkratni integral zamenjati z gnezdenimi enojnimi integrali, pove [Fubinijev izrek](#).

$$F_y(x_i) = \int_a^b f(x_i, y) dy \approx \sum w_j f(x_i, y_j). \quad (14.5)$$

Dvojni integral približno izračunamo kot dvojno vsoto:

$$\int_a^b \int_a^b f(x, y) dx dy \approx \sum_{i,j} w_i w_j f(x_i, y_j). \quad (14.6)$$

Formulo (14.6) pospolimo za integrale v več dimenzijah:

$$\int_{[a,b]^d} f(x_1, x_2 \dots x_d) dx_1 dx_2 \dots dx_d \approx \sum_{i_1, i_2 \dots i_d} \prod_{j=1}^d w_{i_j} f(x_{i_1}, x_{i_2} \dots x_{i_d}), \quad (14.7)$$

kjer seštevamo po vseh možnih multi indeksih  $(i_1, i_2 \dots i_d) \in \{1, 2 \dots n\}^d$ . S preprosto linearo preslikavo formulo (14.7) razširimo na poljuben  $d$ -dimenzionalen kvader  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \dots [a_d, b_d]$ :

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2 \dots x_d) dx_1 dx_2 \dots dx_d \approx \\ & \prod_{i=1}^d \left( \frac{b_i - a_i}{b - a} \right) \sum_{i_1, i_2 \dots i_d} \prod_{j=1}^d w_{i_j} f(t_{1i_1}, t_{1i_2} \dots t_{di_d}), \end{aligned} \quad (14.8)$$

kjer je  $t_{ij}$  vozlišče  $x_j$  preslikano na interval  $[a_i, b_i]$ . Kvadraturnim formulam (14.6), (14.7) in (14.8) pravimo *produktne formule*.

#### Produktne formule trpijo za prekletstvom dimenzionalnosti

Število vozlišč, ki jih dobimo v produktne formule, narašča eksponentno z dimenzijo prostora. Zato produktne kvadrature postanejo hitro (že v dimenzijah nad 6 ali 7) časovno tako zahtevne, da celo počasneje konvergirajo kot metoda Monte Carlo (Poglavlje 14.3). Pojav imenujemo **prekletstvo dimenzionalnosti** in se pojavi tudi pri drugih problemih, ko dimenzija prostora narašča.

Z dimenzijo narašča delež volumna, ki je „na robu“. Oglejmo si  $d$ -dimenzionalno enotsko kocko  $[-1, 1]^d$ . Če interval  $[-1, 1]$  razdelimo na točke v notranjosti  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  in točke na robu  $[-1, 1] - [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , sta v eni dimenziji oba dela enako dolga. V višjih dimenzijah pa delež točk v kocki, ki so na robu, v primerjavi s točkami v notranjosti narašča. Delež točk v notranjosti lahko preprosto izračunamo:

$$P\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d\right) = \frac{1}{2^d} \quad (14.9)$$

in vidimo, da pada eksponentno z dimenzijo  $d$ . Zato je smiselno na robu uporabiti gostejšo mrežo kot v notranjosti. Tako je Sergey A. Smolyak razvil **razpršene mreže**, ki vsaj delno omilijo prekletstvo dimenzionalnosti.

Definirajmo naslednje tipe in funkcije:

- podatkovni tip `VeckratniIntegral(fun, box)`, ki opiše večkratni integral na kvadru  $\prod[a_i, b_i]$  (Program 64),
- metodo `integriraj(I::VeckratniIntegral, kvad::Kvadratura)` za funkcijo `integriraj`, ki izračuna večkratni integral s kvadraturno formulo (14.8) (Program 65, Program 66, Program 67).

### 14.3 Metoda Monte Carlo

Naj bo

$$X \sim U([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \dots [a_d, b_d]) \quad (14.10)$$

enakomerno porazdeljena slučajna spremenljivka na  $B_d = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \dots [a_d, b_d]$ . Potem je pričakovana vrednost funkcije  $f(X)$  enaka večkratnemu integralu:

$$E(f(X)) = \frac{1}{V(B_d)} \int_{B_d} f(x) dx. \quad (14.11)$$

Po [centralnem limitnem izreku](#) je vzorčno povprečje za enostaven vzorec  $x_1, x_2 \dots x_n$  porazdeljeno približno normalno:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) \dots f(x_n)) \sim N(\mu, \sigma) \quad (14.12)$$

s parametri  $\mu = E(f(X))$  in  $\sigma = \frac{\sigma(f(X))}{\sqrt{n}}$ . Razpršenost porazdelitve pada s  $\sqrt{n}$ , zato je vzorčno povprečje za velike vzorce blizu vrednosti integrala (14.11). Približno vrednost integrala (14.11) lahko ocenimo z vzorčnim povprečjem za dovolj velik vzorec:

$$\int_{B_d} f(x) dx \approx \overline{f(x)} \cdot V(B_d). \quad (14.13)$$

Metoda Monte Carlo ne konvergira zelo hitro<sup>3</sup>, ima pa prednost, da ne trpi za prekletstvom dimenzionalnosti. Zato se jo najpogosteje uporablja za računanje integralov v višjih dimenzijah.

Definirajmo naslednji tip in metodo:

- podatkovni tip `MonteCarlo(rng, n)` za parametre metode Monte Carlo in
- novo metodo `integriraj(integral::VeckrantiIntegral, mc::MonteCarlo)` za funkcijo `integriraj`, ki dani integral izračuna z metodo Monte Carlo (Program 69).

### 14.4 Povprečna razdalja med točkama na kvadratu $[0, 1]^2$

Povprečna razdaljo med dvema točkama na kvadratu  $[0, 1]^2$  izračunamo s štirikratnem integralom:

$$\bar{d} = \int_{[0,1]^4} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2. \quad (14.14)$$

Za izračun integrala bomo uporabili produktno kvadraturo s sestavljenim Simpsonovo formulo in metodo Monte Carlo.

Najprej definiramo funkcijo razdalje:

---

<sup>3</sup>Napaka pada s  $\sqrt{n}$ , kjer je  $n$  število izračunov funkcijске vrednosti.

```

"""
Izračunaj razdaljo med dvema točkama podanimi v enem vektorju `x`.
Koordinate prve točke so podane v prvi polovici, koordinate druge točke pa v
drugi polovici komponent vektorja `x`.
"""

function razdalja(x)
    d = div(length(x), 2)
    return norm(x[1:d] - x[d+1:2d])
end

```

Nato pa še funkcijo, ki izračuna povprečno razdaljo:

```

"""Izračunaj povprečno razdaljo med dvema točkama na danem pravokotniku."""
function povprecna_razdalja(
    box::Vector{Interval{Float64}}, kvadratura)
    integral = VeckratniIntegral{Float64,Float64}(razdalja, vcat(box, box))
    I = integriraj(integral, kvadratura)
    return I / volumen(box)^2
end

```

Za izračun uporabimo sestavljenou Simpsonovo formulo:

```

kvadrat = [Interval(0.0, 1.0), Interval(0.0, 1.0)]
integral = VeckratniIntegral{Float64,Float64}(razdalja, vcat(kvadrat, kvadrat))
n = 15
d0 = integriraj(integral, simpson(0.0, 1.0, n))

```

0.5213916369440644

Napako ocenimo tako, da izračun ponovimo z natančnejšo kvadraturno formulo. Na primer tako, da podvojimo število vozlišč v osnovni kvadraturi:

```

n = 30
d1 = integriraj(integral, simpson(0.0, 1.0, n))
napaka = d0 - d1

```

-1.2083201086476869e-5

Isti rezultat izračunajmo še z metodo Monte Carlo. Približek, ki ga dobimo z metodo Monte Carlo je odvisen od naključnega vzorca. Zato dobimo različne približke, če metodo večkrat ponovimo.

```

using Random
rng = Xoshiro(4526) # ustvarimo nov pseudo random generator
mc = MonteCarlo(rng, 16^4) # uporabimo isto število izračunov kot prvič
dmc = [
    integriraj(integral, mc) for i in 1:5] # vsaka ponovitev vrne nekaj drugega

5-element Vector{Float64}:
0.5201770605788114
0.5217087179128533
0.5212543535233094
0.5221131942172096
0.5208611243179776

```

Poglejmo si, kako napaka pada, če povečamo število podintervalov v sestavljeni Simpsonovi formuli.

```

using Plots
nsim = 3:20
napakesim = [povprecna_razdalja(kvadrat, simpson(0.0, 1.0, i)) - d1 for i in nsim]
scatter((2 * nsim .+ 1) .^ 4, abs.(napakesim), yscale=:log10, xscale=:log10,
label="napaka Simpson")

```

Iz rezultatov lahko ocenimo red metode. Zapišemo predoločeni sistem za logaritem absolutne vrednosti napake v odvisnosti od logaritma števila funkcijskih izračunov:

$$\begin{aligned}\delta(n) &= n^{-r} \\ \log(\delta(n)) &= -r \log(n).\end{aligned}\tag{14.15}$$

Tako dobimo  $k \times 1$  predoločen sistem za parameter  $r$ :

$$\begin{pmatrix} \log(n_1) \\ \log(n_2) \\ \vdots \\ \log(n_k) \end{pmatrix} \cdot (r) = -\begin{pmatrix} \log(|\delta_1|) \\ \log(|\delta_2|) \\ \vdots \\ \log(|\delta_k|) \end{pmatrix},\tag{14.16}$$

kjer so  $\delta_i$  izračunane napake za  $n_i$  funkcijskih izračunov. Sistem rešimo po metodi najmanjših kvadratov z operatorjem \:

```

k = reshape(4 * log.((2 * nsim .+ 1)), length(nsim), 1) \ log.(abs.(napakesim))

1-element Vector{Float64}:
-0.8252312869463272

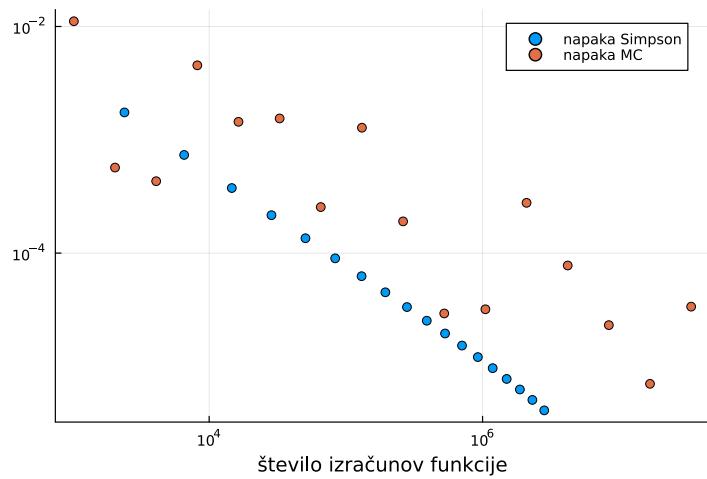
```

Vidimo, da je red produktne Simpsonove formule malo manj kot 1. Za vsako novo točno decimalko moramo število funkcijskih izračunov povečati za faktor  $10^{\frac{1}{r}}$ , kar je malo več kot 10. Poglejmo, kakšen je red metode Monte Carlo.

```

using Random
rng = Xoshiro(526)
nmc = 2 .^ (10:25)
napakamc = [povprecna_razdalja(kvadrat, MonteCarlo(rng, i)) - d1 for i in nmc]
scatter!(nmc, abs.(napakamc), yscale=:log10, xscale=:log10,
label="napaka MC", xlabel="število izračunov funkcije")

```



Slika 50: Napaka Simpsonove produktne kvadrature in metode Monte Carlo v odvisnosti od števila funkcijskih izračunov

Vidimo, da je napaka pri metodi Monte Carlo nepredvidljiva. To je posledica neprevidljivosti vzorčenja. Kljub temu je trend jasen. Podobno kot prej lahko ocenimo red metode Monte Carlo. Centralni limitni izrek pove, da bi moral biti red približno  $\frac{1}{2}$ .

```

k = reshape(log.(nmc), length(nmc), 1) \ log.(abs.(napakamc))

1-element Vector{Float64}:
-0.6613614335692505

```

Izračunan red je nekoliko večji, a to je zgolj posledica variabilnosti, ki ga prinaša vzorčenje.

#### Kaj smo se naučili?

- Večkratni integral lahko izračunamo s produktnimi kvadraturami.
- Produktne kvadrature trpijo za prekletstvom dimenzionalnosti.
- Metoda Monte Carlo je enostavna in ne trpi za prekletstvom dimenzionalnosti, a konvergira počasi.

## 14.5 Rešitve

```
"""Podatkovni tip za večkratni integral."""
struct VeckratniIntegral{T,TIntegral}
    fun # funkcija, ki jo integriramo
    box::Vector{Interval{T}}
end

"""Vrni dimenzijo večkratnega integrala."""
dim(i::VeckratniIntegral) = length(i.box)
```

Program 64: Podakovni tip, ki opiše večkratni integral

```
import Vaja13: preslikaj, dolzina
"""

kvad2 = preslikaj(kvad1::Kvadratura{T}, interval::Interval{T})

Preslikaj kvadraturo `kvad1` na drug `interval`.

"""
function preslikaj(kvad::Kvadratura{T}, interval::Interval{T}) where {T}
    x = map(x -> preslikaj(x, kvad.interval, interval), kvad.x)
    u = dolzina(interval) / dolzina(kvad.interval) * kvad.u
    return Kvadratura(x, u, interval)
end
```

Program 65: Preslikaj kvadraturo na drug interval

```

"""
I = integriraj(int::VeckratniIntegral{T, TI}, kvad::Kvadratura{T})

Integriraj veckratni `int` s produktno kvadraturo, ki je podana kot produkt
enodimenzionalne kvadrature `kvad`.

# Primer
```jldoctest
int = VeckratniIntegral{Float64, Float64}(
    x -> x[1] - x[2], [Interval(0., 2.), Interval(-1., 2.)]);
kvad = Kvadratura([0.5], [1.0], Interval(0.0, 1.0)); # sredinsko pravilo
integriraj(int, kvad)

# output
3.0
```
"""

function integriraj(
    int::VeckratniIntegral{T,TI}, kvad::Kvadratura{T}) where {T,TI}
    # kvadrature preslikamo pred glavno zanko
    kvadrature = [preslikaj(kvad, interval) for interval in int.box]
    d = dim(int)
    index = ones(Int, d)
    n = length(kvad.x)
    x = zeros(T, d) # alociramo vektorja vozlišč in uteži pred zanko
    w = zeros(T, d)
    I = zero(TI)
    for _ in 1:n^d
        for j in eachindex(x)
            kvad = kvadrature[j]
            x[j] = kvad.x[index[j]]
            w[j] = kvad.u[index[j]]
        end
        z::TI = int.fun(x)
        I += z * prod(w)
        naslednji!(index, n)
    end
    return I
end

```

Program 66: Izračunaj večkratni integral s produktno kvadraturo

```

"""
naslednji!(index, n)

Izračunanj naslednji multi index v zaporedju vseh multi indeksov
```\{1, 2, ... n\}``` in ga zapiši v vektor `index`.

"""

function naslednji!(index, n)
    d = length(index)
    for i = 1:d
        if index[i] < n
            index[i] += 1
            return
        else
            index[i] = 1
        end
    end
end

```

Program 67: Izračunaj naslednji multiindeks  $(i_1, i_2 \dots i_d) \in \{1, 2 \dots n\}^d$

```

"""Poišči vozlišča in uteži za sestavljeni Simpsonovo pravilo na intervalu
`[a, b]` z delitvijo na `n` podintervalov."""
simpson(a, b, n) = Kvadratura(collect(LinRange(a, b, 2n + 1)),
    (b - a) / (6 * n) * vcat([1.0], repeat([4, 2], n - 1), [4, 1]), Interval(a, b))

```

Program 68: Izračunaj vozlišča in uteži za sestavljeni Simpsonovo pravilo

```

"""Izračunaj volumen večrazsežne škatle `box`."""
volumen(box::Vector{Interval{T}}) where {T} = prod(dolzina.(box))

"""Podatkovna struktura za parametre metode Monte Carlo."""
struct MonteCarlo
    rng
    n::Int # število vzorcev
end

"""
I = integriraj(int::::VeckratniIntegral{T, TI}, mc::MonteCarlo)

Izračunaj približek za večkratni integral `int` z metodo Monte Carlo s parametri
`mc`.
"""

function integriraj(int::VeckratniIntegral{T, TI}, mc::MonteCarlo) where {T, TI}
    I = zero(TI)
    x = zeros(T, dim(int))
    for _ in 1:mc.n
        for i in eachindex(x)
            x[i] = preslikaj(rand(mc.rng), int.box[i], Interval(0.0, 1.0))
        end
        z::TI = int.fun(x)
        I += z
    end
    return volumen(int.box) * I / mc.n
end

```

Program 69: Izračunaj večkratni integral z metodo Monte Carlo

## 14.6 Testi

```

@testset "Naslednji index" begin
    index = [1, 1, 1]
    Vaja14.naslednji!(index, 3)
    @test index == [2, 1, 1]
    index = [3, 1, 1]
    Vaja14.naslednji!(index, 3)
    @test index == [1, 2, 1]
    index = [3, 3, 3]
    Vaja14.naslednji!(index, 3)
    @test index == [1, 1, 1]
end

```

Program 70: Test izračuna naslednjega multiindeksa

```

@testset "Simpsonovo sestavljeni pravilo" begin
    k = Vaja14.simpson(1.0, 3.0, 2)
    @test (k.interval.min, k.interval.max) == (1.0, 3.0)
    @test k.x == [1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0]
    @test isapprox(k.u, [1, 4, 2, 4, 1] * 1 / 6)
end

```

Program 71: Test izračuna sestavljenega Simpsonovega pravila

```

@testset "Preslikaj kvadraturo" begin
    k = Kvadratura([1.0, 2.0, 3.0], [1.0, 2.0, 1.0], Interval(0.0, 4.0))
    k1 = Vaja14.preslikaj(k, Interval(-1.0, 1.0))
    @test k1.x ≈ [-0.5, 0, 0.5]
    @test k1.u ≈ [0.5, 1, 0.5]
end

```

Program 72: Test preslikave kvadrature na nov interval

```

@testset "Integriraj večkratni integral" begin
    kvad = Kvadratura([0.0, 1.0], [0.5, 0.5], Interval(0.0, 1.0)) # trapezna
    int = VeckratniIntegral{Float64,Float64}(x -> x[1] - x[2],
        [Interval(0.0, 2.0), Interval(-1.0, 2.0)])
    @test integriraj(int, kvad) ≈ 3.0
end

```

Program 73: Test izračuna integrala s produktno kvadraturo

# 15 Avtomatsko odvajanje z dualnimi števili

V grobem poznamo tri načine, kako lahko izračunamo odvod funkcije z računalnikom:

- simbolično odvajanje,
- numerično odvajanje s končnimi diferencami in
- avtomatsko odvajanje programske kode z uporabo verižnega pravila.

Pri praktični uporabi v programiranju ima simbolično odvajanje težave pri odvajanju kompleksnih programov, saj mora program prevesti v en sam matematični izraz. Ti izrazi lahko za programe, ki vsebujejo zanke ali rekurzijo, hitro postanejo neobvladljivi. Pri numeričnem odvajanju imamo težave z zaokrožitvenimi napakami. Tako simbolično kot tudi numerično odvajanje je počasno pri računanju gradientov funkcij več spremenljivk. Avtomatsko odvajanje ne trpi za omenjenimi težavami.

V tej vaji bomo v Juliji implementirali avtomatsko odvajanje z [dualnimi števili](#).

## 15.1 Naloga

- Definiraj podatkovni tip za dualna števila.
- Za podatkovni tip dualnega števila definiraj osnovne operacije in elementarne funkcije, kot so sin, cos in exp.
- Uporabi dualna števila in izračunaj hitrost nebesnega telesa, ki se giblje po Keplerjevi orbiti. Keplerjevo orbito izrazimo z rešitvijo [Keplerjeve enačbe](#), ki jo lahko rešiš z Newtonovo metodo.
- Pospoliš dualna števila, da je komponenta pri  $\varepsilon$  lahko vektor. Uporabi pospolena dualna števila za izračun gradienta funkcije več spremenljivk.
- Uporabi funkcijo za računanje gradienta in izračunaj gradient [Ackleyeve funkcije](#):

$$f(\mathbf{x}) = -a \exp\left(-b \sqrt{\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos(cx_i)\right) + a + \exp(1), \quad (15.1)$$

ki se uporablja za testiranje optimizacijskih algoritmov.

## 15.2 Ideja avtomatskega odvoda

Računalniški program ni nič drugega kot zaporedje osnovnih operacij, ki jih zaporedoma opravimo na vhodnih podatkih. Matematično lahko vsak korak programa zapišemo kot preslikavo  $k_i$ , ki stare vrednosti spremenljivk pred izvedbo koraka preslika v nove vrednosti po izvedbi koraka. Program si lahko predstavljamo kot kompozitum posameznih korakov

$$P = k_n \circ k_{n-1} \dots k_2 \circ k_1. \quad (15.2)$$

Pri avtomatskem odvajanju želimo program za računanje vrednosti neke funkcije spremeniti v program, ki poleg vrednosti funkcije računa tudi vrednost odvoda pri istih argumentih. Matematično lahko program ali funkcijo obravnavamo kot preslikavo med vhodnimi argumenti in izhodnimi vrednostmi:

$$P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (15.3)$$

Vsek korak programa je prav tako preslikava  $k_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ . Če uporabimo verižno pravilo, je odvod programa  $P$  z danimi argumenti  $\mathbf{x}$  enak produktu:

$$DP(\mathbf{x}) = Dk_n(\mathbf{x}_{n-1}) \cdot Dk_{n-1}(\mathbf{x}_{n-2}) \cdots Dk_1(\mathbf{x}_0), \quad (15.4)$$

kjer je  $x_i = k_i(k_{i-1} \dots k_2(k_1(x)) \dots)$  stanje lokalnih spremenljivk po tem, ko se je izvedel  $i$ -ti korak.  
Oglejmo si preprost primer funkcije, ki z Newtonovo metodo izračuna kvadratni koren.

```
"""
y = koren(x)

Izračunaj vrednost korenske funkcije za argument `x`.

function koren(x)
    y = 1 + (x - 1) / 2
    for i = 1:5
        y = (y + x / y) / 2
    end
    return y
end
```

V programu moramo odvajati vsako vrstico kode posebej. Poglejmo prvo vrstico funkcije `koren`

```
y = 1 + (x-1)/2
```

Nova lokalna spremenljivka  $y$  je funkcija  $x$  in njen odvod je

$$y'(x) = \left(1 + \frac{x-1}{2}\right)' = \frac{1}{2}. \quad (15.5)$$

V zanki nato ponavljamo

```
y = (y - x/y)/2
```

Označimo z  $y_i$  vrednost spremenlivke  $y$  na  $i$ -tem koraku zanke. Vrednost  $y_i$  je odvisna od vrednosti  $x$ , za njen izračun potrebujemo tudi vrednost  $y$  na prejšnjem koraku  $y_{i-1}(x)$ . Vrstico programa lahko zapišemo kot rekurzivno enačbo

$$y_i(x) = \frac{1}{2} \left( y_{i-1}(x) - \frac{x}{y_{i-1}(x)} \right). \quad (15.6)$$

Če rekurzivno enačbo odvajamo, dobimo

$$y'_i(x) = \frac{1}{2} \left( y'_{i-1}(x) - \frac{1}{y_{i-1}(x)} - \frac{x y'_{i-1}(x)}{y_{i-1}(x)^2} \right). \quad (15.7)$$

Program `koren` dopolnimo, da hkrati računa vrednosti funkcije in vrednosti odvoda. To storimo tako, da na vsakem koraku posodobimo vrednosti odvodov spremenljivk, ki jih na tem koraku posodobimo.

```

"""
y, dy = dkoren(x)

Izračunaj vrednost korenske funkcije in njenega odvoda za argument `x`.

function dkoren(x)
    y = 1 + (x - 1) / 2
    dy = 1 / 2
    for i = 1:5
        y = (y + x / y) / 2
        dy = (dy + 1 / y - x / y^2 * dy) / 2
    end
    return y, dy
end

```

Preverimo, če naša funkcija deluje. Odvod korenske funkcije je enak  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

```

julia> y, dy = dkoren(2)
(1.414213562373095, 0.35355339059327373)

julia> napaka = dy - 1 / (2sqrt(2))
0.0

```

### 15.3 Dualna števila

**Dualna števila** so števila oblike  $a + b\varepsilon$ , kjer sta  $a, b \in \mathbb{R}$ , medtem ko je dualna enota  $\varepsilon$  neničelno število katerega kvadrat je nič  $\varepsilon \neq 0$  in  $\varepsilon^2 = 0$ . Podobno kot dobimo kompleksna števila, če realna števila razširimo z imaginarno enoto  $i = \sqrt{-1}$ , dobimo dualna števila, če realna števila razširimo z dualno enoto  $\varepsilon$ .

Z dualnimi števili računamo kot z navadnimi binomi, pri čemer upoštevamo, da je  $\varepsilon^2 = 0$ . Pri vsoti dveh dualnih števil se realna in dualna komponenta seštejeta:

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (a + b) + (c + d)\varepsilon. \quad (15.8)$$

Pri izpeljavi pravila za produkt moramo upoštevati lastnost  $\varepsilon^2 = 0$  in da da je produkt komutativen:

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + ad\varepsilon + bc\varepsilon + bd\varepsilon^2 = ac + (ad + bc)\varepsilon. \quad (15.9)$$

Pravilo za deljenje oziroma inverz dobimo tako, da število pomnožimo z ulomkom  $1 = \frac{a-b\varepsilon}{a-b\varepsilon}$

$$\frac{1}{a+b\varepsilon} = \frac{a-b\varepsilon}{(a+b\varepsilon)(a-b\varepsilon)} = \frac{a-b\varepsilon}{a^2+b^2\varepsilon^2} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\varepsilon. \quad (15.10)$$

Pri izpeljavi pravila za potenciranje, si pomagamo z razvojem v binomsko vrsto

$$(a + b\varepsilon)^n = a^n + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b\varepsilon + \binom{n}{n-2} a^{n-2} b^2 \varepsilon^2 + \dots = a^n + n a^{n-1} b\varepsilon. \quad (15.11)$$

Za racionalne potence lahko uporabimo binomsko vrsto, če pa  $\varepsilon$  nastopa v eksponentu, pa uporabimo vrsto za  $e^x$ .

Dualna števila lahko uporabimo za računanje odvodov. Z dualnimi števili se namreč računa podobno kot z diferenciali, oziroma linearnim delom Taylorjeve vrste. Linearni del Taylorjeve vrste imenujemo

tudi **1-tok**. Množica 1-tokov v neki točki predstavlja vse možne tangente na vse možne funkcije, ki gredo skozi to točko. V točki  $x_0$  lahko 1-tok funkcije  $f$  zapišemo kot

$$f(x_0) + f'(x_0)dx, \quad (15.12)$$

kjer je  $dx = x - x_0$  diferencial neodvisne spremenljivke. Poglejmo si primer 1-toka za produkt dveh funkcij  $f$  in  $g$ :

$$\begin{aligned} & (f(x_0) + f'(x_0)dx)(g(x_0) + g'(x_0)dx) = \\ & f(x_0)g(x_0) + (f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0))dx + \mathcal{O}(dx^2). \end{aligned} \quad (15.13)$$

Vse potence  $dx^k$  za  $k \geq 2$  potisnemo v ostanek  $\mathcal{O}(dx^2)$  in v limiti zanemarimo. Pravila računanja 1-tokov in dualnih števil so povsem enaka. Pri računanju z differenciali ravno tako upoštevamo, da je  $dx^2 \approx 0$  in vse potence  $dx^k$  za  $k \geq 2$  zanemarimo. Vrednosti odvoda v neki točki lahko izračunamo z dualnimi števili. Če poznamo vrednost funkcije in vrednost odvoda funkcije v neki točki, lahko z dualnimi števili izračunamo izračunamo vrednosti odvodov različnih operacij. 1-tokove lahko predstavimo z dualnimi števili. Če sta  $f$  in  $g$  funkciji, potem dualni števili

$$f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon \quad \text{in} \quad g(x_0) + g'(x_0)\varepsilon \quad (15.14)$$

predstavljata 1-tokova za funkciji  $f$  in  $g$  v točki  $x_0$ . Če dualni števili vstavimo v nek izraz npr.  $x^2y$ , dobimo 1-tok funkcije  $f(x)^2g(x)$  in s tem tudi vrednost odvoda v točki  $x_0$ .

Za primer izračunajmo odvod  $f(x)^2g(x)$  v točki  $x_0 = 1$  za funkciji  $f(x) = x^2$  in  $g(x) = 2 - x$ . Dualno število za 1-tok za  $f$  je

$$f(1) + f'(1)\varepsilon = 1 + 2\varepsilon, \quad (15.15)$$

dualno število za 1-tok za  $g$  pa je

$$g(1) + g'(1)\varepsilon = 1 - \varepsilon. \quad (15.16)$$

Vstavimo zdaj dualni števili v izraz  $x^2y$  in upoštevamo  $\varepsilon^2 = 0$ :

$$\begin{aligned} (1 + 2\varepsilon)^2(1 - \varepsilon) &= (1 + 4\varepsilon + 4\varepsilon^2)(1 - \varepsilon) = (1 + 4\varepsilon)(1 - \varepsilon) = \\ & 1 + 4\varepsilon - \varepsilon - 4\varepsilon^2 = 1 + 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (15.17)$$

Od tod lahko razberemo, da je 1-tok za  $(f^2g)$  v točki 1 enak

$$(f^2g)(1) + (f^2g)'(1)\varepsilon = 1 + 3\varepsilon \quad (15.18)$$

in odvod  $(f^2g)'(1) = 3$ .

Definirajmo podatkovni tip `DualNumber`, ki predstavlja dualno število, nato pa še osnovne računske operacije za ta tip in elementarne funkcije `sin`, `cos`, `exp` in `log`.

```

"""
DualNumber(x, dx)

Predstavlja skalarno spremenljivko x in njen diferencial dx.

"""
struct DualNumber <: Number
    x::Float64
    dx::Float64
end

import Base: show, promote_rule, convert
show(io::IO, a::DualNumber) = print(io, a.x, " + ", a.dx, "ε")

ε = DualNumber(0, 1)
convert(::Type{DualNumber}, x::Real) = DualNumber(x, zero(x))
promote_rule(::Type{DualNumber}, ::Type{<:Number}) = DualNumber

```

## 15.4 Keplerjeva enačba

Keplerjeva enačba

$$M = E - e \sin(E) \quad (15.19)$$

določa ekscentrično anomalijo za telo, ki se giblje po Keplerjevi orbiti v odvisnosti od ekscentričnosti orbite  $e$  in povprečne anomalije  $M$ .

Keplerjevo orbito lahko izračunamo, če poznamo  $E(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= a(\cos(E(t)) - e) \\ y(t) &= b \sin(E(t)), \end{aligned} \quad (15.20)$$

kjer so  $a$  in  $b$  polosi elipse. Elipsa je premaknjena tako, da je en od fokusov v točki  $(0, 0)$ . Ekscentričnost  $e$  je odvisna od razmerja polosi

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0, 1]. \quad (15.21)$$

Vrednost  $E(t)$  izračunamo iz Keplerjeve enačbe, saj velja

2. Keplerjev zakon, ki pravi, da se povprečna anomalija  $M(t)$  spreminja enakomerno:

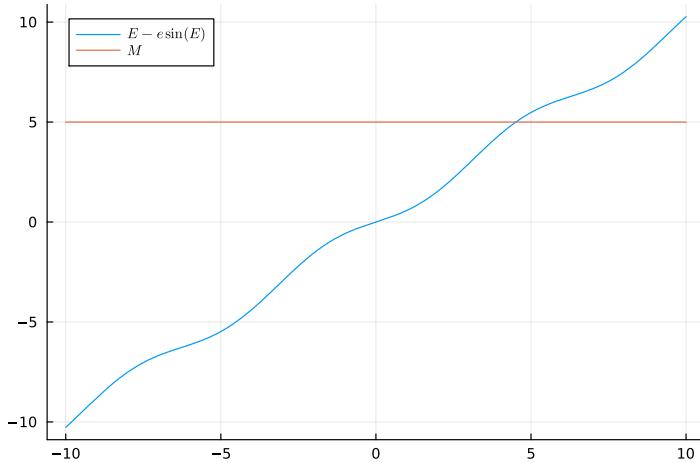
$$M(t) = n(t - t_0). \quad (15.22)$$

Keplerjeva enačba ima eno samo rešitev. Res, funkcija  $f(E) = E - e \sin(E)$  je naraščajoča in surjektivna na  $(-\infty, \infty)$ , saj je odvod  $f'(E) = 1 - e \cos(E) \geq 0$  vedno nenegativnen. Keplerjevo enačbo (15.19) predstavimo grafično:

```

using Plots
e = 0.5
plot(E -> E - e * sin(E), -10, 10, label="\$E - e\$\sin(E)\$")
M = 5
plot!(x -> M, -10, 10, label="\$M\$")

```

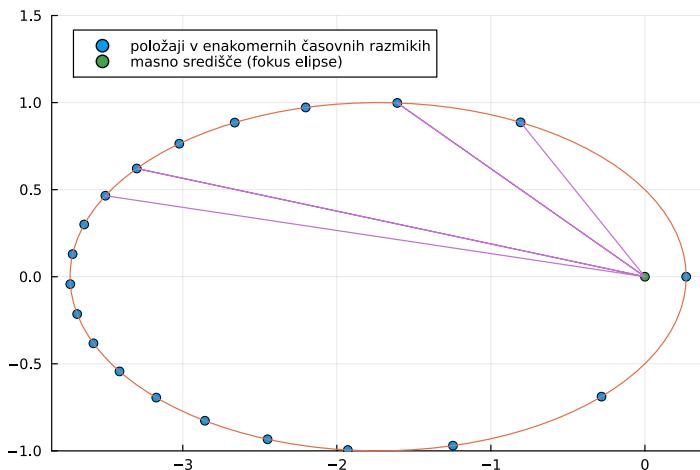


Slika 51: Leva in desna stran Keplerjeve enačbe za  $M = 5$  in  $e = 0.5$

Vidimo, da je rešitev Keplerjeve enačbe blizu vrednosti  $M$ , in vrednost  $M$  lahko izberemo za začetni približek. Rešitev tako lahko hitro poiščemo z Newtonovo metodo za funkcijo:

$$g(E) = M - E + e \sin(E). \quad (15.23)$$

Napišimo funkcijo `keplerE(M, e)`, ki izračuna vrednost ekscentrične anomalije za dane vrednosti ekscentričnosti  $e$  in povprečne anomalije  $M$ . Nato napišimo funkcijo `orbita(t, a, b, n)`, ki izračuna položaj orbite v času  $t$ , če je v času  $t = 0$  telo najbližje masnemu središču.



Slika 52: Položaji telesa na orbiti v enakomernih časovnih razmikih. Drugi Keplerjev zakon pravi, da zveznica med telesom in masnim središčem, v enakem času pokrije enako ploščino.

Hitrost telesa v določenem trenutku lahko izračunamo z avtomatskim odvodom. Najprej definiramo dualno število  $t + \varepsilon$  za vrednost  $t$  v kateri bi radi izračunali hitrost. Nato v funkcijo `orbita` vstavimo  $t + \varepsilon$  in dobimo koordinate podane z dualnimi števili.

```
julia> t0 = t[5] + ε
1.431578947368421 + 1.0ε

julia> o0 = orbita(t0, a, b, n)
(- 2.6629236468300297      +      - 1.1354638659453598ε,
 - 0.29855236219660986ε)
```

Dualni del koordinat je enak vektorju hitrosti:

```
julia> o0 = orbita(t0, a, b, n)
(-1.1354638659453598, -0.29855236219660986)
```

## 15.5 Računajne gradientov

## 15.6 Gradient Ackleyeve funkcije

Kot primer

## 15.7 Rešitve

```
import Base: +, -, *, /, ^
*(a::DualNumber, b::DualNumber) = DualNumber(a.x * b.x, a.x * b.dx + a.dx * b.x)
+(a::DualNumber, b::DualNumber) = DualNumber(a.x + b.x, a.dx + b.dx)
-(a::DualNumber) = DualNumber(-a.x, -a.dx)
-(a::DualNumber, b::DualNumber) = DualNumber(a.x - b.x, a.dx - b.dx)
/(a::DualNumber, b::DualNumber) = DualNumber(a.x / b.x,
    (b.x * a.dx - a.x * b.dx) / b.x^2)
^(a::DualNumber, b::Number) = DualNumber(a.x^b, b * a.x^(b - 1) * a.dx)
^(a::Number, b::DualNumber) = DualNumber(a^b.x, log(a)a^b.x * b.dx)
```

Program 74: Osnovne operacije med dualnimi števili

```
import Base: sin, cos, exp, log, abs, isless
sin(a::DualNumber) = DualNumber(sin(a.x), cos(a.x) * a.dx)
cos(a::DualNumber) = DualNumber(cos(a.x), -sin(a.x) * a.dx)
exp(a::DualNumber) = DualNumber(exp(a.x), exp(a.x) * a.dx)
log(a::DualNumber) = DualNumber(log(a.x), a.dx / a.x)
abs(a::DualNumber) = DualNumber(abs(a.x), sign(a.x) * a.dx)
isless(a::DualNumber, b::DualNumber) = isless(a.x, b.x)
isless(a::DualNumber, b::Number) = isless(a.x, b)
```

Program 75: Elementarne funkcije za dualna števila

```
odvod(a::DualNumber) = a.dx
vrednost(a::DualNumber) = a.x

"""
y = odvod(f<:Function, x)

Izračuna vrednost odvoda funkcije `f` v točki `x`.
"""

odvod(f, x) = odvod(f(x + ε))
```

Program 76: Izračunaj odvod funkcije ene spremenljivke

```

"""
Dual(x, dx::Vector)

Predstavlja vrednost `f` odvisno od `n` spremenljivk in njen gradient
```\nabla f = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots f_n \frac{\partial}{\partial x_n}```.
"""

struct Dual <: Number
    x::Float64
    dx::Vector{Float64}
end

odvod(y::Dual) = y.dx
vrednost(y::Dual) = y.x

convert(::Type{Dual}, x::Real) = Dual(x, [zero(x)])
promote_rule(::Type{Dual}, ::Type{<:Number}) = Dual

```

Program 77: Podatkovni tip za mešanico dualnih števil

```

*(a::Dual, b::Dual) = Dual(a.x * b.x, a.x * b.dx .+ a.dx * b.x)
+(a::Dual, b::Dual) = Dual(a.x + b.x, a.dx .+ b.dx)
-(a::Dual) = Dual(-a.x, -a.dx)
-(a::Dual, b::Dual) = Dual(a.x - b.x, a.dx .- b.dx)
^(a::Dual, b::Float64) = Dual(a.x ^ b, b * a.x^(b - 1) * a.dx)
^(a::Float64, b::Dual) = Dual(a ^ b.x, log(a) * a^b.x * b.dx)
/(a::Dual, b::Dual) = Dual(a.x / b.x, (b.x * a.dx - a.x * b.dx) / b.x^2)
/(a::Float64, b::Dual) = Dual(a / b.x, (-a * b.dx) / b.x^2)

```

Program 78: Osnovne operacije med vektorskimi dualnimi števili

```

sin(a::Dual) = Dual(sin(a.x), cos(a.x) * a.dx)
cos(a::Dual) = Dual(cos(a.x), -sin(a.x) * a.dx)
exp(a::Dual) = Dual(exp(a.x), exp(a.x) * a.dx)
log(a::Dual) = Dual(log(a.x), a.dx / a.x)

```

Program 79: Elementarne funkcije za vektorska dualna števila

```

"""
x = spremenljivka(v)

Generiraj vektor `x` vektorskih dualnih števil za vrednost vektorske
spremenljivke `v`. Komponente vektorja `x` so vektorska dualna števila
z vrednostmi enakimi komponentam vektorja `v` in parcialnimi odvodi enakimi
1, če se indeksa komponente in parcialnega odvoda ujemata in 0 sicer.
Resultat te funkcije lahko uporabimo kot vhodni argument pri računanju
gradienta vektorske funkcije z argumentom `v`.
"""

function spremenljivka(v::Vector{T}) where {T}
    n = length(v)
    x = Vector{Dual}()
    for i = 1:n
        xi = Dual(convert(Float64, v[i]), zeros(Float64, n))
        xi.dx[i] = 1
        push!(x, xi)
    end
    return x
end

"""

g = gradient(f, x)

Izračunaj gradient vektorske funkcije `f` v danem vektorju `x`.
# Primer
```jl
f(x) = x[1]*x[2] + x[2]*sin(x[1])
gradient(f, [1., 2.])
```
"""

gradient(f, x::Vector) = odvod(f(spremenljivka(x)))

```

Program 80: Funkcija izračuna gradiant funkcije vektorske spremenljivke v dani točki

## 16 Začetni problem za NDE

Navadna diferencialna enačba

$$u'(t) = f(t, u, p) \quad (16.1)$$

ima enolično rešitev za vsak začetni pogoj  $u(t_0) = u_0$ . Iskanje rešitve NDE z danim začetnim pogojem imenujemo [začetni problem](#).

V tej vaji bomo napisali knjižnico za reševanje začetnega problema za NDE.

### 16.1 Naloga

1. Definiraj podatkovno strukturo, ki hrani podatke o začetnemu problemu za NDE.
2. Definiraj podatkovno strukturo, ki hrani podatke o rešitvi začetnega problema.
3. Implementiraj različne metode za funkcijo `resi`, ki poiščejo približek za rešitev začetnega problema z različnimi metodami:
  - Eulerjevo metodo,
  - Runge-Kutta reda 2,
  - Runge-Kutta reda 4.
4. Napiši funkcijo `vrednost`, ki za dano rešitev začetnega problema izračuna vrednost rešitve v vmesnih točkah s Hermitovim kubičnim zlepkom (Poglavlje 12).
5. Obravnavaj poševni met z zračnim uporom. Iz Newtonovih zakonov gibanja in kvadratnega zakona upora zapiši sistem NDE. Začetni problem reši z metodami, ki si jih implementiral. Kako daleč leti telo preden pade na tla? Koliko časa leti?
6. Za vse tri metode bomo oceni, kako se napaka spreminja v odvisnosti od dolžine koraka. Namesto točne rešitve uporabi približek, ki ga izračunamo s polovičnim korakom.

### 16.2 Reševanje enačbe z eno spremenljivko

Poglejmo, si najprej, kako numerično poiščemo rešitev diferencialne enačbe z eno spremenljivko. Reševali bomo le enačbe, pri katerih lahko odvod eksplisitno izrazimo. Take enačbe lahko zapišemo v obliki

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (16.2)$$

za neko funkcijo dveh spremenljivk  $f(t, u)$ . Funkcija  $f(t, u)$  določa odvod  $u'(t)$  in s tem tangento na rešitev  $u(t)$  v točki  $(t, u(t))$ . Za vsako točko  $(t, u)$  dobimo tangento oziroma smer v kateri se rešitev premakne. Funkcija  $f(t, u)$  tako določa polje smeri v ravnini  $(t, u)$ .

Za primer vzemimo enačbo

$$u'(t) = -2tu(t), \quad (16.3)$$

ki jo znamo tudi analitično rešiti in ima splošno rešitev

$$u(t) = Ce^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (16.4)$$

Poglejmo si, kako je videti polje smeri za enačbo (16.3). Tangente vzorčimo na pravokotni mreži na pravokotniku  $(t, u) \in [-2, 2] \times [0, 4]$ . Za eksplisitno podano krivuljo  $u = u(t)$  je vektor v smeri tangente podan s koordinatami  $[1, u'(t)]$ . Da dobimo lepšo sliko, vektor v smeri tangente normalizira-

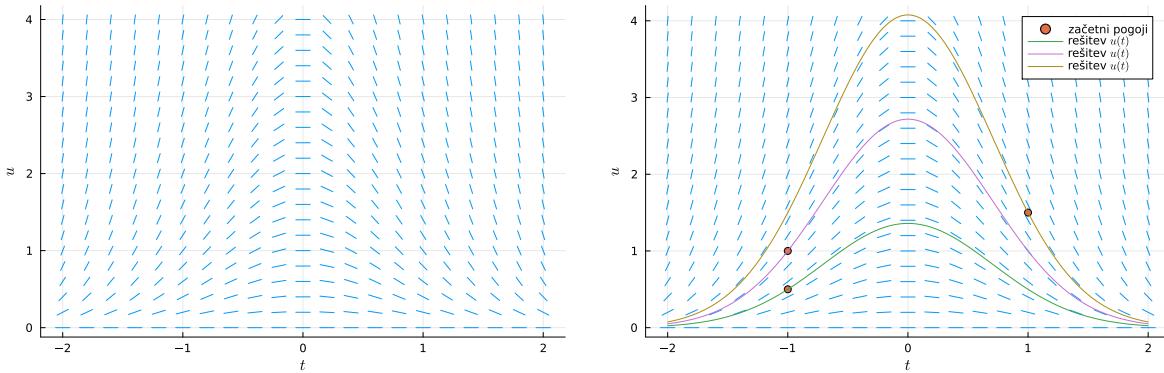
mo in pomnožimo s primernim faktorjem, da se tangente na sliki ne prekrivajo. Napišimo funkcijo `risci_polje(fun, (t0, tk), (u0, uk), n)`, ki nariše polje tangent za diferencialno enačbo (Program 83, Program 84).

Narišimo polje smeri za enačbo (16.3):

```
using Plots
fun(t, u) = -2 * t * u
plt = risci_polje(fun, (-2, 2), (0, 4))
```

Narišimo še nekaj začetnih pogojev in rešitev, ki gredo skoznje.

```
t0 = [-1, -1, 1]
u0 = [0.5, 1, 1.5]
scatter!(plt, t0, u0, label="začetni pogoji")
for i in 1:3
    C = u0[i] / exp(-t0[i]^2)
    plot!(plt, t -> C * exp(-t^2), -2, 2, label="rešitev \$u(t)\$")
end
plt
```



Slika 53: Levo: Polje smeri za enačbo  $u'(t) = -2tu(t)$ . V vsaki točki ravnine  $t, u$  enačba definira odvod  $u'(t) = f(t, u)$  in s tem tudi tangento na rešitev enačbe  $u(t)$ . Desno: Vsaka točka  $(t_0, u_0)$  v ravni  $t, u$  določa začetni pogoj. Za različne začetne pogoje dobimo različne rešitve. Rešitev NDE se v vsaki točki dotika tangente določene z  $u'(t) = f(t, u)$ .

Diferencialne enačba (16.3) ima neskončno rešitev. Če pa določimo vrednost v neki točki  $u(t_0) = u_0$ , ima enačba (16.3) enolično rešitev  $u(t)$ . Pogoj  $u(t_0) = u_0$  imenujemo *začetni pogoj*, diferencialno enačbo skupaj z začetnim pogojem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \tag{16.5}$$

pa *začetni problem*.

Rešitev začetnega problema (16.5) je funkcija  $u(x)$ . Funkcijo  $u(x)$  lahko numerično opišemo na mnogo različnih načinov. Dva načina, ki se pogosto uporablja, sta

- z vektorjem vrednosti  $[u_0, u_1, \dots, u_n]$  v danih točkah  $t_0, t_1, \dots, t_n$  ali
- z vektorjem koeficientov  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  v razvoju  $u(t) = \sum a_k \varphi_{k(t)}$  po dani bazi  $\varphi_{k(t)}$ .

Metode, ki poiščejo približek za vektor vrednosti, imenujemo [kolokacijske metode](#), metode, ki poiščejo približek za koeficiente v razvoju po bazi pa [spektralne metode](#). Metode, ki jih bomo spoznali v nadaljevanju, sodijo med kolokacijske metode.

### 16.3 Eulerjeva metoda

Najpreprostejša metoda za reševanje začetnega problema je [Eulerjeva metoda](#). Za dani začetni problem (16.5) bomo poiskali vrednosti  $u_i = u(t_i)$  v točkah  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_k$  na intervalu  $[t_0, t_k]$ . Vrednosti  $u_i$  poiščemo tako, da najprej izračunamo približek  $u_1$  za  $t_1$  in nato uporabimo isto metodo, da rešimo začetni problem z začetnim pogojem  $u(t_1) = u_1$ . Pri Eulerjevi metodi naslednjo vrednost dobimo tako, da izračunamo vrednost na tangenti v točki  $(t_k, u_k)$ . Tako rekurzivno dobimo približke za vrednosti v točkah  $t_1, t_2, \dots, t_n$ :

$$u_{k+1} = u_k + f(t_k, u_k)(t_{k+1} - t_k). \quad (16.6)$$

Zapišimo sedaj funkcijo `u, t = euler(fun, u0, (t0, tk), n)`, ki implementira Eulerjevo metodo s konstantnim korakom.

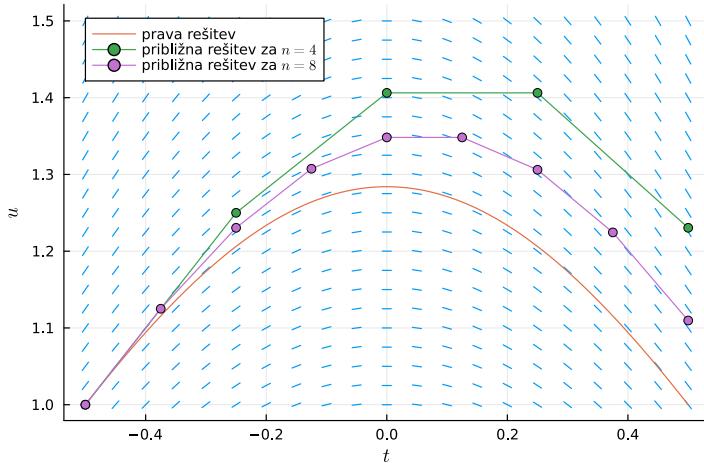
```
using Vaja16

tint = (-0.5, 0.5)
u0 = 1
risi_polje(fun, tint, (u0, 1.5))

C = u0 / exp(-tint[1]^2)
plot!(x -> C * exp(-x^2), tint[1], tint[2],
      label="prava rešitev", legend=:topleft)

t4, u4 = Vaja16.euler(fun, 1.0, (-0.5, 0.5), 4)
plot!(t4, u4, marker=:circle, label="približna rešitev za \$n=4\$",
      xlabel="\$t\$', ylabel="\$u\$")

t8, u8 = Vaja16.euler(fun, 1.0, [-0.5, 0.5], 8)
plot!(t8, u8, marker=:circle, label="približna rešitev za \$n=8\$",
      xlabel="\$t\$', ylabel="\$u\$")
```



Slika 54: Približna rešitev začetnega problema za enačbo  $u' = -2tu$  z začetnim pogojem  $u(-0.5) = 1$  na intervalu  $[-0.5, 0.5]$ . Približki so izračunani s 4 in 8 koraki Eulerjeve metode. Več korakov kot naredimo, boljši je približek za rešitev.

## 16.4 Ogrodje za reševanje NDE

V nadaljevanju bomo definirali tipe in funkcije, ki bodo omogočali enotno obravnavo reševanja začetnega problema in enostavno dodajanje različnih metod za reševanje NDE. Pri tem se bomo zgledovali po paketu [DifferentialEquations.jl](#) (glej [14] za podrobnejšo razlagu).

Definirajmo podatkovni tip `ZacetniProblem`, ki vsebuje vse podatke o začetnem problemu (16.5) in ga bomo uporabili kot vhodni podatek za funkcije, ki bodo poiskale numerično rešitev.

```
"""
zp = ZacetniProblem(f, u0 tint, p)
```

Podatkovna struktura s podatki za začetni problem za navadne diferencialne enačbo (NDE) oblike:

```
```math
u'(t) = f(t, u, p).
```
```

Desna stran NDE je podana s funkcijo `f`, ki je odvisna od vrednosti `u`, `t` in parametrov enačbe `p`. Začetni pogoj `` $u(t_0) = u_0$ `` je določen s poljem `u0` v začetni točki intervala `` $tint=[t_0, t_k]$ `` na katerem iščemo rešitev.

`## Polja`

```
* `f`: funkcija, ki izračuna odvod (desne strani NDE)
* `u0`: začetni pogoj
* `tint`: časovni interval za rešitev
* `p`: vrednosti parametrov enačbe
"""

struct ZacetniProblem{TU,TT,TP}
    f          # desne strani NDE  $u' = f(t, u, p)$ 
    u0::TU    # začetna vrednost
    tint::Tuple{TT,TT}  # interval na katerem iščemo rešitev
    p::TP      # parametri sistema
end
```

Program 81: Podatkovni tip, ki vsebuje vse podatke o začetnem problemu

Približke, ki jih bomo izračunali z različnimi metodami bomo tudi shranili v poseben podatkovni tip `ResitevNDE`. Poleg vrednosti neodvisne spremenljivke in izračunane približke rešitve bomo v tipu `ResitevNDE` hranili tudi vrednosti odvodov, ki smo jih izračunali s funkcijo desnih strani. Odvode bomo potrebovali za izračun vmesnih vrednosti s Hermitovim zlepkom.

```
"""
Podatkovna struktura, ki hrani približek za rešitev začetnega problema za NDE.
Uporablja se predvsem kot tip, ki ga vrnejo metode za reševanje začetnega
problema.
"""

struct ResitevNDE{TU,TT,TP}
    zp::ZacetniProblem{TU,TT,TP} # referenca na začetni problem
    t::Vector{TT}   # vrednosti časa(argumenta)
    u::Vector{TU}   # približki za vrednosti rešitve
    du::Vector{TU}  # izračunane vrednosti odvoda
end
```

Program 82: Podatkovni tip, ki vsebuje numerično rešitev začetnega problema

Definirajmo podatkovni tip `Euler`, ki vsebuje parametre za Eulerjevo metodo. Nato napišimo funkcijo `resi(p::ZacetniProblem, metoda::Euler)`, ki poišče rešitev začetnega problema z Eulerjevo metodo (za rešitev glej Program 87).

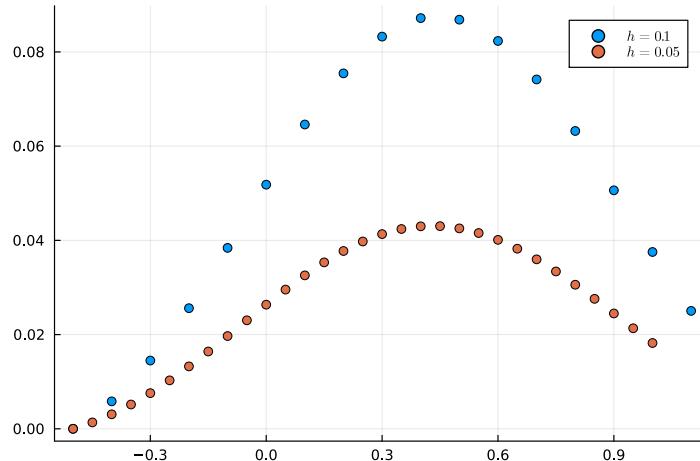
Ponovno rešimo začetni problem

$$\begin{aligned} u'(t) &= -2tu \\ u(-0.5) &= 1. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Faktor 2 v enačbi  $u'(t) = -2tu$  lahko obravnavamo kot parameter enačbe.

```
fun(t, u, p) = -p * t * u
problem = ZacetniProblem(fun, 1.0, (-0.5, 1.0), 2.0)
upravi(t) = exp(-t^2) / exp(-0.5^2)

res1 = resi(problem, Euler(0.1))
scatter(res1.t, res1.u - upravi.(res1.t), label="\$h=0.1\$")
res2 = resi(problem, Euler(0.05))
scatter!(res2.t, res2.u - upravi.(res2.t), label="\$h=0.05\$")
```



Slika 55: Napaka Eulerjeve metode za različni velikosti koraka

#### Večična razdelitev in posebni podatkovni tipi omogočajo abstraktno obravnavo

Uporaba specifičnih tipov omogoča definicijo specifičnih metod, ki so posebej napisane za posamezen primer. Taka organizacija kode omogoča večjo abstrakcijo in definicijo [domenskega jezika](#), ki je prilagojen posameznemu področju. Tako lahko govorimo o [ZacetnemuProblemu](#) namesto o funkcijah in vektorjih, ki vsebujejo dejanske podatke. Vrednost tipa [ResitevNDE](#) se razlikuje od vektorjev in matrik, ki jih vsebuje, predvsem v tem, da Julia ve, da gre za podatke, ki so numerični približek za rešitev začetnega problema. To prevajalniku omogoča, da za dane podatke avtomatično uporabi metode glede na vlogo, ki jo imajo v danem kontekstu. Takšna organizacija je zelo prilagodljiva in omogoča enostavno dodajanje na primer novih numeričnih metod, kot tudi novih formulacij samega problema.

## 16.5 Metode Runge - Kutta

Implementirajmo še metodi Runge - Kutta drugega in četrtega reda podani z Butcherjevima tabelama

$$\begin{array}{c|cc}
 & 0 & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 0 & \frac{1}{2} & 0 \quad \frac{1}{2} \\
 \hline
 1 & 1 & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\
 \hline
 & \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}
 \end{array} \tag{16.8}$$

Naslednji približek za  $u_{n+1} = u(t_n + h)$  za metodo drugega reda lahko zapišemo kot:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, u_n, p) \\
 k_2 &= hf(t_n + h, u_n + k_1, p) \\
 u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2).
 \end{aligned} \tag{16.9}$$

Za metodo četrtega reda pa je naslednji približek enak:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, u_n, p) \\
 k_2 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}k_1, p\right) \\
 k_3 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}k_2, p\right) \\
 k_4 &= hf(t_n + h, u_n + k_3, p) \\
 u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
 \end{aligned} \tag{16.10}$$

Definirajmo sedaj:

- podatkovni tip `RK2`, ki predstavlja metodo drugega reda (16.9) in funkcijo `korak(m::RK2, fun, t0, u0, par, smer)`, ki izračuna približek na naslednjem koraku (Program 89),
- podatkovni tip `RK4`, ki predstavlja metodo četrtega reda (16.10) in funkcijo `korak(m::RK4, fun, t0, u0, par, smer)`, ki izračuna približek na naslednjem koraku (Program 90).

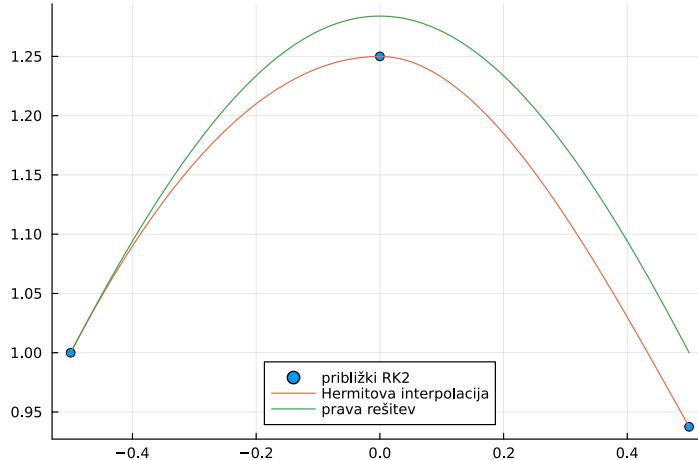
## 16.6 Hermitova interpolacija

Približne metode za začetni problem NDE izračunajo približke za rešitev zgolj v nekaterih vrednostih spremenljivke  $t$ . Vrednosti rešitve diferencialne enačbe lahko interpoliramo s **kubičnim Hermitovim zlepkom**, ki smo ga že spoznali v poglavju o zlepkih (Poglavlje 12). Hermitov zlepek je na intervalu  $[t_i, t_{i+1}]$  določen z vrednostmi rešitve in odvodi v krajiščih intervala. Ti podatki so shranjeni v vrednosti tipa `ResitevNDE`. Napišimo sedaj funkcijo `vrednost(res::ResitevNDE, t)`, ki vrne približek za rešitev NDE v dani točki (Program 88). Vrednosti rešitve lahko na ta način izračunamo tudi za argumente  $t$ , ki so med približki, ki jih izračuna Eulerjeva ali kakšna druga metoda. Prikažemo Hermitovo interpolacijo na grafu:

```

using Plots
fun(t, u, p) = -p * t * u
upravi(t) = exp(-t^2) / exp(-0.5^2)
zp = ZacetniProblem(fun, upravi(-0.5), (-0.5, 0.5), 2.0)
res = resi(zp, RK2(0.5))
scatter(res.t, res.u, label="približki RK2")
plot!(t -> res(t), res.t[1], res.t[end], label="Hermitova interpolacija")
plot!(upravi, res.t[1], res.t[end], label="prava rešitev", legend=:bottom)

```



Slika 56: Vmesne vrednosti med približki metode Runge - Kutta reda 2 interpoliramo s Hermitovim zlepkom.

## 16.7 Poševni met z zračnim uporom

Poševni met opisuje gibanje točkastega telesa pod vplivom gravitacije. Enačbe, ki opisujejo poševni met, izpeljemo iz [Newtonovih zakonov gibanja](#). Položaj telesa opišemo z vektorjem položaja  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ . Trajektorija je podana kot krivulja  $\mathbf{x}(t)$ , ki opisuje položaj v odvisnosti od časa. Označimo z

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (16.11)$$

vektor hitrosti in z

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad (16.12)$$

vektor pospeška. Gibanje točkastega telesa z maso  $m$  pod vplivom vsote vseh sil  $\mathbf{F}$ , ki delujejo na dano telo opiše 2. Newtonov zakon:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}(t). \quad (16.13)$$

Sile, ki delujejo na telo so lahko odvisne tako od položaja, kot tudi od hitrosti. Sile, ki delujejo na telo pri poševnem metu sta sila teže  $\mathbf{F}_g$  in sila zračnega upora  $\mathbf{F}_u$ . Predpostavimo lahko, da velja [kvadratni zakon upora](#), po katerem je velikost sile upora sorazmerna kvadraatu velikosti hitrosi. Upor vedno kaže v nasprotni smeri hitrosti, zato lahko zapišemo

$$\mathbf{F}_u = -C\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|, \quad (16.14)$$

kjer je konstanta  $C$  odvisna od gostote medija in oblike točkastega telesa. Sila teže kaže vertikalno navzdol in je sorazmerna masi in težnemu pospešku  $g$ :

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (16.15)$$

kjer je  $\mathbf{g} = g[0, 0, -1]^T$  vektor težnega pospeška. Vsoto vseh sil lahko zapišemo kot

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{g} - C\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|. \quad (16.16)$$

Ko vstavimo (16.16) v 2. Newtonov zakon (16.13), dobimo sistem enačb 2. reda:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(t) = m\mathbf{F} = \mathbf{g} - C\dot{\mathbf{x}}(t)\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|. \quad (16.17)$$

Če želimo uporabiti metode za numerično reševanje diferencialnih enačb, moramo sistem (16.17) prevesti na sistem enačb 1. reda. To naredimo tako, da vpeljemo nove spremenljivke za komponente odvoda  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ . Oznake za nove spremenljivke se ponujajo kar same  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ . Sistem enačb 2. reda (16.17) je ekvivalenten sistemu enačb 1. reda:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{g} - C\dot{\mathbf{x}}(t)\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|. \end{aligned} \quad (16.18)$$

V enačbah (16.18) se v resnici skriva 6 enačb, po ena za vsako komponento vektorjev  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{v}$ .

Zapišimo sedaj vrednost tipa `ZacetniProblem`, ki opiše začetni problem za enačbe (16.18). Vektorja  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{v}$  združimo v en vektor s 6 komponentami:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (16.19)$$

in napišemo funkcijo `f_posevni(t, u, p)`, ki izračuna vektor desnih stani enačb (16.18):

```
using LinearAlgebra
"""

Izračunaj desne strani enačb za poševni met.

"""

function f_posevni(_, u, par)
    g, c = par
    n = div(length(u), 2)
    v = u[n+1:end]
    fg = zero(v)
    fg[end] = -g
    f = fg - c * v * norm(v)
    return vcat(v, f)
end
```

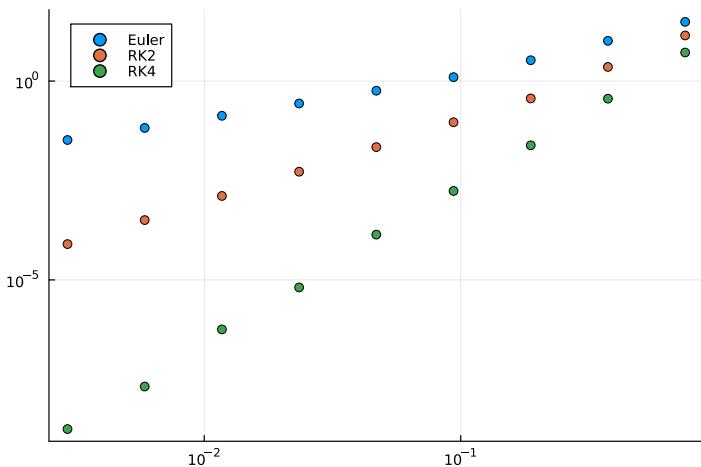
Primerjali bomo vse tri metode, ki smo jih do sedaj spoznali. Za različne vrednosti koraka bomo izračunali približek in ga primerjali s pravo rešitvijo. Ker prave rešitve ne poznamo, bomo uporabili približek, ki ga dobimo z metodo Runge-Kutta 4. reda s polovičnim korakom. Napako bomo ocenili tako, da bomo poiskali največno napako med  $n$  različnimi vrednostih  $t$  na danem intervalu  $[t_0, t_k]$ .

```

zp = ZacetniProblem(f_posevni, [0.0, 2.0, 10.0, 20.0], (0.0, 3.0), (9.8, 0.1))
function napaka(resevalec, zp, resitev, nvzorca=100)
    priblizek = resi(zp, resevalec)
    t0, tk = zp.tint
    t = range(t0, tk, nvzorca)
    maximum(t -> norm(priblizek(t) - resitev(t)), t)
end

h = 3 ./ (2 .^ (2:10))
resitev = resi(zp, RK4(h[end] / 2))
napakaEuler = [napaka(Euler(hi), zp, resitev) for hi in h]
napakaRK2 = [napaka(RK2(hi), zp, resitev) for hi in h]
napakaRK4 = [napaka(RK4(hi), zp, resitev) for hi in h]
scatter(h, napakaEuler, xscale=:log10, yscale=:log10, label="Euler")
scatter!(h, napakaRK2, xscale=:log10, yscale=:log10, label="RK2")
scatter!(h, napakaRK4, xscale=:log10, yscale=:log10, label="RK4", legend=:topleft)

```



Slika 57: Napaka za različne metode v odvisnosti od velikosti koraka

#### Kako izbrati prizerno metodo?

V tej vaji smo spoznali 3 različne metode: Eulerjevo, Runge-Kutta reda 2 in reda 4. Poleg omenjenih metod, obstaja še cel živalski vrt različnih metod za reševanje začetnega problema. Tule je na primer [seznam metod](#) implementiranih v paketu DifferentialEquations, podrobnejše pa so opisane v [15]. Kako se odločimo, katero metodo izbrati?

Izberemo metodo, ki ima red vsaj 4, sicer je treba korak zelo zmanjšati, da dobimo dovolj dobro natančnost. Za splošno rabo so najprimernejše metode s kontrolo koraka. Zelo popularna je metoda [Dormand - Prince reda 5, DOPRI5](#), ki jo privzeto uporablja Matlab, Octave in paket [DifferentialEquations](#) za Julijo.

Pri nekaterih NDE postanejo običajne metode kot so Runge - Kutta in DOPRI5 numerično nestabilne. Take enačbe imenujemo [toge diferencialne enačbe](#). Za toge diferencialne enačbe so razvili veliko specialnih metod (glej [16]).

Prav tako obstajajo metode, ki so prilagojene posebnim razredom diferencialnih enačb na primer enačbe na Liejevitih grupah in homogenih prostorih, Hamiltonske enačbe in še mnogo drugih.

## 16.8 Čas in dolžina meta

Za različne začetne pogoje in parametre želimo poiskati, kako daleč leti telo, preden pade na tla. Predpostavimo, da so tla na višini 0. Najprej bomo poiskali, kdaj telo zadene tla. To se bo zgodilo takrat, ko bo višina enaka 0. Iskani čas je rešitev enačbe

$$z(t) = 0. \quad (16.20)$$

Vrednost  $z(t)$  je ena komponenta rešitve začetnega problema. Enačba (16.20) je nelinearna enačba, za katero pa ne poznamo eksplisitne formule. Kljub temu lahko za iskanje rešitev uporabimo metode za reševanje nelinearnih enačb. Problema se bomo lotili malce bolj splošno. Enačbo (16.20) lahko zapišemo kot:

$$g(t) = F(\mathbf{u}(t)) = 0, \quad (16.21)$$

kjer je  $\mathbf{u}(t)$  rešitev začetnega problema (16.18), funkcija  $F(\mathbf{u})$  pa vrne tretjo komponento vektorja  $\mathbf{u}$ :

$$F([x, y, z, v_x, v_y, v_z]) = z. \quad (16.22)$$

Za reševanje enačbe  $g(t) = 0$  lahko uporabimo metode za reševanje nelinearnih enačb na primer bisekcijo ali Newtonovo metodo. Uporabili bomo Newtonovo metodo, saj lahko vrednost odvoda  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  in s tem tudi  $g'(t) = \frac{d}{dt}F(\mathbf{u}(t))$  izračunamo iz desnih strani diferencialne enačbe:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}F(\mathbf{u}(t)) = \nabla F(\mathbf{u}(t)) \cdot \dot{\mathbf{u}}(t) = \nabla F \cdot f(t, \mathbf{u}(t), p). \quad (16.23)$$

Z numeričnimi metodami dobimo približek za začetni problem v obliki zaporedja približkov

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n \quad (16.24)$$

za vrednosti v določenih časovnih trenutkih  $t_0, t_1 \dots t_n$ . Za vsak izračun  $g(t)$  bi morali vsakič znova izračunati začetni del zaporedja  $\mathbf{u}_i$ . Da se temu izognemo, najprej poiščimo interval  $[t_i, t_{i+1}]$  na katerem leži ničla. V tabeli poiščemo  $i$  za katerega je

$$F(\mathbf{u}_i)F(\mathbf{u}_{i+1}) < 0. \quad (16.25)$$

S tem, ko smo poiskali interval  $[t_i, t_{i+1}]$  na katerem je ničla, smo ničlo poiskali z natančnostjo  $\delta = |t_{i+1} - t_i|$ . Zmanjšanje koraka osnovne metode bi sicer dalo boljši približek, vendar se tudi časovna zahtevnost poveča za enak faktor, kot se zmanjša natančnost. Bistveno bolje je uporabiti eno od metod za reševanje nelinearnih enačb.

Vrednosti  $t_i$  in  $\mathbf{u}_i$  uporabimo kor nov začetni približek za začetni problem. Tako lahko zgolj z enim korakom izbrane metode izračunamo  $g(t) = F(\mathbf{u}(t))$  za katerikoli  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .

### Iskanje ničle v tabeli

Denimo, da imamo tabelo vrednosti funkcije  $[f_1, f_2 \dots f_n]$  in bi želeli poiskati ničlo. Pogoj  $f_i = 0$  ne bo najboljši, saj zaradi zaokrožitvenih napak skoraj zagotovo ne bo izpolnjen. Tudi pogoj  $|f_i| < \varepsilon$  ni dosti boljši, ker je ničla lahko med dvema vrednostima  $f_i$  in  $f_{i+1}$ , čeprav sta vrednosti daleč stran od ničle. Ničla je zagotovo tam, kjer funkcija spremeni predznak. Pravi pogoj je zato

$$f_i \cdot f_{i+1} < 0. \quad (16.26)$$

Napišimo naslednje funkcije:

- `niclaint(res::ResitevNDE, F)`, ki poišče interval, na katerem je za dana funkcija  $F(t, u, du)$  enaka 0 (Program 91).

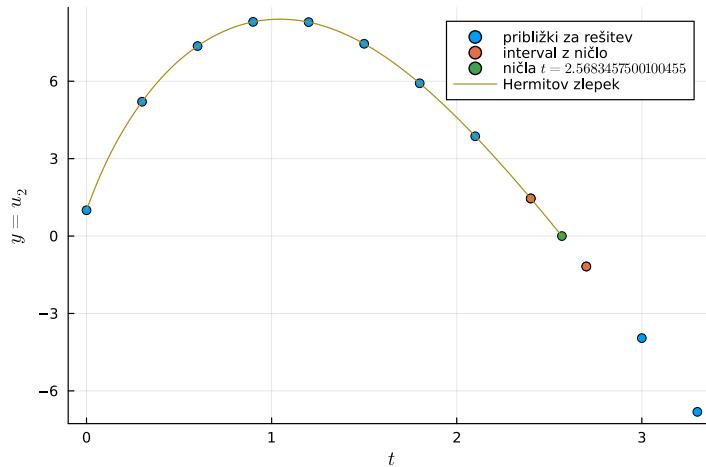
- `nicla(res::ResitevNDE, F, DF)`, ki poišče ničlo funkcije  $F(t, u, du)$  za dano rešitev začetnega problema. Za računanje novih vrednosti naj uporabi metodo RK4 (Program 92).

Funkcijo `nicla` uporabimo za poševni met. Uporabili bomo relativno velik korak, da bo postopek iskanja ničle bolj nazoren. Rešimo začetni problem za poševni met (16.18) s parametri  $g = 9.8 \text{m/s}^2$ ,  $c = 0.1$ , z začetnim položajem  $x = 0\text{m}$ ,  $y = 1\text{m}$  in začetno hitrostjo  $v_x = 10\text{m/s}$ ,  $v_y = 20\text{m/s}$ . Enote so v v numeričnem izračunu izpuščene.

```
x0 = [0.0, 1.0]
v0 = [10.0, 20.0]
tint = (0.0, 3.0)
g = 9.8
c = 0.1
zp = ZacetniProblem(f_posevni, vcat(x0, v0), tint, (g, c))
res = resi(zp, RK4(0.3))
scatter(res.t, [u[2] for u in res.u], label="približki za rešitev")
```

Približki za rešitev so precej naranzen, saj smo za izračun uporabili relativno velik korak  $h = 0.3$ . Kljub temu je zaradi visokega reda metode Runge-Kutta izračun dokaj natančen. V naslednjem koraku v tabeli približko, ki smo jo dobili z metodo Runge-Kutta, poiščemo interval, na katerem druga komponenta  $u_2$  spremeni predznak. Nato z Newtonovo metodo rešimo nelinearno enačbo  $u_2(t) = 0$ .

```
fun(_t, u, _du) = u[2]
dfun(_t, u, _du) = u[4]
i = Vaja16.niclaInt(res, fun)
scatter!(res.t[i:i+1], [res.u[i][2], res.u[i+1][2]], label="interval z ničlo")
t0 = nicla(res, fun, dfun)
scatter!([t0], [res(t0)[2]], label="ničla \${t}=\$(t0)\$")
plot!(t -> res(t)[2], 0, t0, label="Hermitov zlepek", xlabel="\$t\$",
      ylabel="višina \$y=u_2\$")
```



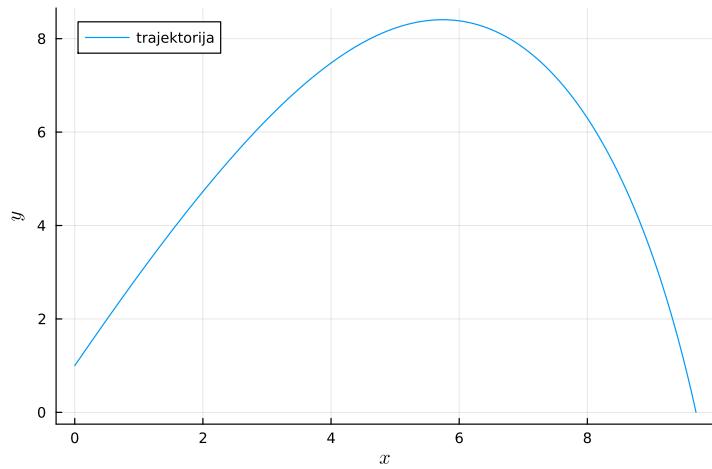
Slika 58: Slika ilustrira postopek, s katerim poiščemo, koliko časa izstrelki leti, preden pada na tla. Najprej poiščemo približke za rešitev z metodo Runge-Kutta reda 4. Nato poiščemo interval med približki, na katerem višina  $y = u_2$  spremeni predznak. Z Newtonovo metodo rešimo enačbo  $u_2(t) = 0$ .

Vrednost  $t_0$  predstavlja čas leta, medtem ko dolžino leta zaberemo iz prve komponente rešitve.

```
julia> (t0, res(t0))
(2.5683457500100455, [9.69610631974621, -4.334343792807005e-5, 1.4160245365127713,
-8.836708202579016])
```

Iz rezultata razberemo, da je čas leta približno 2.57s, medtem ko je dolžina, ki jo izstrelek doseže enaka 9.67m. Narišimo še trajektorijo sistema, ki je podana s parametrično krivuljo  $(x(t), y(t)) = (u_1(t), u_2(t))$ .

```
t = range(0, t0, 100)
x = [res(ti)[1] for ti in t]
y = [res(ti)[2] for ti in t]
plot(x, y, label="trajektorija", xlabel="\$x\$", ylabel="\$y\$")
```



Slika 59: Trajektorija poševnega meta od začetka do trenutka, ko le ta doseže tla

## 16.9 Rešitve

```
using LinearAlgebra

"""
Izračunaj enotski vektor v smeri tangente na rešitev diferencialne enačbe
`u'(t)=f(t, u(t))``.
function tangenta(f, t, u)
    v = [1, f(t, u)]
    return v / norm(v)
end

function daljica(f, t, u, l)
    v = l * tangenta(f, t, u) / 2
    dt, du = v
    return [t - dt, t + dt], [u - du, u + du]
end

"""
Vzorči polje smeri za NDE 1. reda `u' = fun(t, u)` na pravokotniku
`[t0, tk] x [u0, uk]` z `n` delilnimi točkami v obeh smereh.
"""
function vzorci_polje(fun, (t0, tk), (u0, uk), n=21)
    t = range(t0, tk, n)
    u = range(u0, uk, n)

    dt = t[2] - t[1]
    du = u[2] - u[1]
    l = min(dt, du) * 0.6

    # enotske vektorje skaliramo, da se ne prekrivajo
    polje = [daljica(fun, ti, ui, l) for ti in t for ui in u]
    return polje
end
```

Program 83: Funkcija izračuna polje smeri za NDE prvega reda v vozliščih pravokotni mreže na danem pravokotniku.

```

using Plots
function risi_polje(fun, (t0, tk), (u0, uk), n=21)
    polje = vzorci_polje(fun, (t0, tk), (u0, uk), n)
    N = length(polje)
    x = polje[1][1]
    y = polje[1][2]
    for i in 2:N
        # med daljice vrinemo vrednosti NaN, da plot prekine črto
        push!(x, NaN)
        append!(x, polje[i][1])
        push!(y, NaN)
        append!(y, polje[i][2])
    end
    return plot(x, y, xlabel="\$t\\"", ylabel="\$u\\"", label=false)
end

```

Program 84: Funkcija nariše polje smeri za NDE prvega reda v ravnini  $t, u$ .

```

"""
u, t = euler(fun, u0, (t0, tk), n)

Izračunaj približek za rešitev začetnega problema za diferencialno enačbo z
Eulerjevo metodo z enakimi koraki.

# Argumenti

- `fun` desne strani DE `u'=fun(t, u)`
- `u0` začetni pogoj `u(t0) = u0`
- `(t0, tk)` interval, na katerem iščemo rešitev
- `n` število korakov Eulerjeve metode
"""

function euler(fun, u0, tint, n)
    t0, tk = tint
    t = range(t0, tk, n + 1)
    h = t[2] - t[1]
    u = [u0]
    for i = 1:n
        u0 += h * fun(t[i], u0)
        push!(u, u0)
    end
    return t, u
end

```

Program 85: Eulerjeva metoda za reševanje začetnega problema NDE

```

"""
r = resi(zp::ZacetniProblem, resevalec::TR) where {TR<:ResevalecNDE}

Reši začetni problem za NDE `zp` z danim reševalcem `resevalec`.

# Primer

Rešimo ZP za enačbo `u'(t) = -2t u` z začetnim pogojem `u(-0.5) = 1.0`:
```julia-repl
julia> fun(t, u, p) = -p * t * u;
julia> problem = ZacetniProblem(fun, 1., (-0.5, 1), 2);
julia> res = resi(problem, Euler(0.5)) # reši problem s korakom 0.5
```

"""

function resi(zp::ZacetniProblem{TU,TT,TP}, metoda::TM) where
{TU,TT,TP,TM<:ResevalecNDE}
    t0, tk = zp.tint
    u0 = zp.u0
    smer = sign(tk - t0)
    t = [t0]
    u = [u0]
    du = TU[]
    while smer * t0 < smer * tk
        t0, u0, du0 = korak(metoda, zp.f, t0, u0, zp.p, smer)
        push!(t, t0)
        push!(u, u0)
        push!(du, du0)
    end
    push!(du, zp.f(t[end], u[end], zp.p)) # odvod v zadnjem približku
    return ResitevNDE(zp, t, u, du)
end

```

Program 86: Funkcija `resi`, ki poišče rešitev začetnega problema z različnimi metodami. Posamezne metode implementiramo tako, da definiramo metode za funkcijo `korak`.

```

abstract type ResevalecNDE end
"""

Euler(n)

Parametri za Eulerjevo metodo za reševanje začetnega problema NDE s fiksним korakom. Edini parameter je `h`, ki je enak velikosti koraka Eulerjeve metode.
"""

struct Euler{T} <: ResevalecNDE
    h::T # dolžina koraka
end

function korak(m::Euler{T}, fun, t0::T, u0, par, smer=1) where {T}
    du = fun(t0, u0, par)
    h = smer * m.h
    return t0 + h, u0 + h * du, du
end

```

Program 87: Metoda za funkcijo `korak`, ki poišče rešitev začetnega problema z enim korako Eulerjeve metode

```

using Vaja12
"""

y = vrednost(r, t)

Izračunaj vrednost rešitve `r` v točki `t`. Funkcija za izračun vrednosti uporabi
Hermitov zlepek.

"""

function vrednost(r::ResitevNDE, t)
    z = Vaja12.HermitovZlepek(r.t, r.u, r.du)
    return Vaja12.vrednost(t, z)
end

# Omogočimo, da rešitev NDE kličemo kot funkcijo
(res::ResitevNDE)(t) = vrednost(res, t)

```

Program 88: Vmesne vrednosti rešitve NDE, izračunamo s Hermitovim kubičnim zlepkom.

```

struct RK2{T} <: ResevalecNDE
    h::T # dolžina koraka
end

"""

Izračunaj en korak metode Runge-Kutta reda 2.

"""

function korak(m::RK2, fun, t0, u0, par, smer)
    h = smer * m.h
    du = fun(t0, u0, par)
    t = t0 + h
    k1 = h * du
    k2 = h * fun(t, u0 + k1, par)
    return t, u0 + (k1 + k2) / 2, du
end

```

Program 89: Metoda za funkcijo korak, ki poišče rešitev začetnega problema z enim korakom metode Runge-Kutta reda 2

```

struct RK4{T} <: ResevalecNDE
    h::T
end

function korak(res::RK4, fun, t0, u0, par, smer)
    h = smer * res.h
    du = fun(t0, u0, par)
    k1 = h * du
    k2 = h * fun(t0 + h / 2, u0 + k1 / 2, par)
    k3 = h * fun(t0 + h / 2, u0 + k2 / 2, par)
    k4 = h * fun(t0 + h, u0 + k3, par)
    return t0 + h, u0 + (k1 + 2(k2 + k3) + k4) / 6, du
end

```

Program 90: Metoda za funkcijo korak, ki poišče rešitev začetnega problema z enim korakom metode Runge-Kutta reda 4

```

function niclaint(res::ResitevNDE, fun)
    t, u, du = res.t, res.u, res.du
    n = length(t)
    for i in 1:n-1
        if fun(t[i], u[i], du[i]) * fun(t[i+1], u[i+1], du[i+1]) < 0
            return i
        end
    end
    throw("Ni intervala z ničlo")
end

```

Program 91: Funkcija poišče interval  $[t_i, t_{i+1}]$ , na katerem ima funkcija  $g(t) = F(\mathbf{u}(t))$  ničlo.

```

function newton(fdf, x0, maxit=10, atol=1e-8)
    for _ in 1:maxit # Newtonova metoda
        z, dz = fdf(x0)
        dx = -z / dz
        x0 += dx
        if abs(dx) < atol
            return x0
        end
    end
    throw("Newtonova metoda ne konvergira po $maxit korakih!")
end

function nicla(res::ResitevNDE, fun, dfun, maxit=10, atol=1e-8)
    t, u = res.t, res.u
    i = niclaint(res, fun)
    function rhs(tk) # desne strani enačbe
        resevalec = RK4(tk - t[i])
        smer = sign(tk - t[i])
        t0, u0, du0 = korak(resevalec, res.zp.f, t[i], u[i], res.zp.p, smer)
        return fun(t0, u0, du0), dfun(t0, u0, du0)
    end
    newton(rhs, t[i], maxit, atol)
end

```

Program 92: Funkcija poišče vrednost  $t$ , pri kateri je  $F(\mathbf{u}(t)) = 0$ .

# 17 Domače naloge

## 17.1 Navodila za pripravo domačih nalog

Ta dokument vsebuje navodila za pripravo domačih nalog. Navodila so napisana za programski jezik [Julia](#). Če uporabljate drug programski jezik, navodila smiselno prilagodite.

### 17.1.1 Kontrolni seznam

Spodaj je seznam delov, ki naj jih vsebuje domača naloga.

- koda (`src\DomacaXY.jl`)
- testi (`test\runtests.jl`)
- dokument `README.md`
- demo skripta, s katero ustvarite rezultate za poročilo
- poročilo v formatu PDF

Preden oddate domačo nalogo, uporabite naslednji *kontrolni seznam*:

- vse funkcije imajo dokumentacijo
- testi pokrivajo večino kode
- *README* vsebuje naslednje:
  - ime in priimek avtorja
  - opis naloge
  - navodila kako uporabiti kodo
  - navodila, kako pognati teste
  - navodila, kako ustvariti poročilo
- *README* ni predolg
- poročilo vsebuje naslednje:
  - ime in priimek avtorja
  - splošen(matematičen) opis naloge
  - splošen opis rešitve
  - primer uporabe (slikice prosim :-)

### 17.1.2 Kako pisati in kako ne

V nadaljevanju je nekaj primerov dobre prakse, kako pisati kodo, teste in poročilo. Pri pisanju besedil je vedno treba imeti v mislih, komu je poročilo namenjeno.

Pisec naj uporabi empatijo do bralca in naj poskuša napisati zgodbo, ki ji bralec lahko sledi. Tudi, če je pisanje namenjeno strokovnjakom, je dobro, če je čim več besedila razumljivega tudi širši publik. Tudi strokovnjaki radi beremo besedila, ki jih hitro razumemo. Zato je dobro začeti z okvirnim opisom z malo formulami in splošnimi izrazi. V nadaljevanju lahko besedilo stopnjujemo k vedno večjim podrobnostim.

Določene podrobnosti, ki so povezane s konkretno implementacijo, brez škode izpustimo.

### 17.1.2.1 Opis rešitve naj bo okviren

Opis rešitve naj bo zgolj okviren. Izogibajte se uporabi programerskih izrazov ampak raje uporabljajte matematične. Na primer izraz **uporabimo for zanko**, lahko nadomestimo s **postopek ponavljam**. Od bralca zahteva splošen opis manj napora in dobi širšo sliko. Če želite dodati izpeljave, jih napišite z matematičnimi formulami, ne v programskejem jeziku. Koda sodi zgolj v del, kjer je opisana uporaba za konkreten primer.

#### DOBRO! Splošen opis algoritma

Algoritem za LU razcep smo prilagodili tridiagonalni strukturi matrike. Namesto trojne zanke smo uporabili le enojno, saj je pod pivotnim elementom neničelen le en element. Časovna zahtevnost algoritma je tako z  $\mathcal{O}(n^3)$  padla na zgolj  $\mathcal{O}(n)$ .

#### SLABO! Podrobna razлага kode, vrstico po vrstico

V programu za LU razcep smo uporabili for zanko od 2 do velikosti matrike. V prvi vrstici zanke smo izračunali  $L.s[i]$ , tako da smo element  $T.s[i]$  delili z  $U.z[i-1]$ . Nato smo izračunali diagonalni element, tako da smo uporabili formulo  $U.d[i] - L.s[i]*U.d[i-1]$ . Na koncu zanke smo vrnili matriki  $L$  in  $U$ .

### 17.1.2.2 Podrobnosti implementacije ne sodijo v poročilo

Podrobnosti implementacije so razvidne iz kode, zato jih nima smisla ponavljati v poročilu. Algoritme opišete okvirno, tako da izpustite podrobnosti, ki niso nujno potrebne za razumevanje. Podrobnosti lahko dodate, v nadaljevanju, če mislite, da so nujne za razumevanje.

#### DOBRO! Algoritem opišemo okvirno, podrobnosti razložimo kasneje

V matriki želimo eleminirati spodnji trikotnik. To dosežemo tako, da stolpce enega za drugim preslikamo s Hausholderjevimi zrcaljenji. Za vsak stolpec poiščemo vektor, preko katerega bomo zrcalili. Vektor poiščemo tako, da bo imela zrcalna slika ničle pod diagonalnim elementom.

Tu lahko z razlago zaključimo. Če želimo dodati podrobnosti, pa jih navedemo za okvirno idejo.

#### DOBRO! Podrobnosti sledijo za okvirno razlago

Vektor zrcaljenja dobimo kot

$$u = [s(k) + A_{k,k}, A_{k+1,k}, \dots, A_{n,k}], \quad (17.1)$$

kjer je  $s(k) = \text{sign}(A_{k,k}) * \|A(k:n, k)\|$ . Podmatriko  $A(k:n, k+1:n)$  prezrcalimo preko vektorja  $u$ , tako da podmatriki odštejemo matriko

$$2u \frac{u^T A(k:n, k+1:n)}{u^T u}. \quad (17.2)$$

Na  $k$ -tem koraku prezrcalimo le podmatriko  $k:n \times k:n$ , ostali deli matrike pa ostanjejo nespremenjeni.

Takošnje razlaganje podrobnosti, brez predhodnega opisa osnovne ideje, ni dobro. Bralec težko loči, kaj je zares pomembno in kaj je zgolj manj pomembna podrobnost.

**SLABO!** *Tako dodamo vse podrobnosti, ne da bi razložili zakaj*

Za vsak  $k$ , poiščemo vektor  $u = [s(k) + A_{k,k}, A_{k+1,k}, \dots, A_{n,k}]$ , kjer je  $s(k) = \text{sign}(A_{k,k}) * \| [A_{k,k}, \dots, A_{n,k}] \|$ .

Nato matriko popravimo

$$A(k : n, k + 1 : n) = A(k : n, k + 1 : n) - 2 * u * \frac{u^T * A(k : n, k + 1 : n)}{u^T * u}. \quad (17.3)$$

Če implementacija vsebuje posebnosti, kot na primer uporaba posebne podatkovne strukture ali algoritma, jih lahko opišemo v poročilu. Vendar pazimo, da bralca ne obremenjujemo s podrobnostmi.

**DOBRO!** *Posebnosti implementacije opišemo v grobem in se ne spuščamo v podrobnosti*

Za tridiagonalne matrike definiramo posebno podatkovno strukturo `Tridiag`, ki hrani le neničelne elemente matrike. Julia omogoča, da LU razcep tridiagonalne matrike, implementiramo kot specifikirano metodo funkcije `lu` iz paketa `LinearAlgebra`. Pri tem upoštevamo posebnosti tridiagonalne matrike in algoritem za LU razcep prilagodimo tako, da se časovna in prostorska zahtevnost zmanjšata na  $\mathcal{O}(n)$ .

Pazimo, da v poročilu ne povzemamo direktno posameznih korakov kode.

**SLABO!** *Opisovanje, kaj počnejo posamezni koraki kode, ne sodi v poročilo.*

Za tridiagonalne matrike definiramo podatkovni tip `Tridiag`, ki ima 3 atribute `s`, `d` in `z`. Atribut `s` vsebuje elemente pod diagonalo, ...

LU razcep implementiramo kot metodo za funkcijo `LinearAlgebra.lu`. V `for` zanki izračunamo naslednje:

1. element  $l[i] = a[i, i-1] / a[i-1, i-1]$
2. ...

### 17.1.3 Kako pisati teste

Nekaj nasvetov, kako lahko testiramo kode.

- Na roke izračunajte rešitev za preprost primer in jo primerjajte z rezultati funkcije.
- Ustvarite testne podatke, za katere je znana rešitev. Na primer za testiranje kode, ki reši sistem  $Ax=b$ , izberete  $A$  in  $x$  in izračunate desne strani  $b=A*x$ .
- Preverite lastnost rešitve. Za enačbe  $f(x)=0$ , lahko rešitev, ki jo izračuna program preprosto vставite nazaj v enačbo in preverite, če je enačba izpolnjena.
- Red metode lahko preverite tako, da naredite simulacijo in primerjate red

metode z redom programa, ki ga eksperimentalno določite.

- Če je le mogoče, v testih ne uporabljamo rezultatov, ki jih proizvede koda sama. Ko je koda dovolj časa v uporabi, lahko rezultate kode same uporabimo za [regresijske teste](#).

#### 17.1.3.1 Pokritost kode s testi

Pri pisanju testov je pomembno, da testi izvedejo vse veje v kodi. Delež kode, ki se izvede med testi, imenujemo [pokritost kode](#) (angl. [Code Coverage](#)). V juliji lahko pokritost kode dobimo, če dodamo argument `coverage=true` metodi `Pkg.test`:

```
julia> import Pkg; Pkg.test("DomacaXY"; coverage=true)
```

Zgornji ukaz bo za vsako datoteko iz mape `src` ustvaril ustrezeno datoteko s končnico `.cov`, v kateri je shranjena informacija o tem, kateri deli kode so bili uporabljeni med izvajanjem testov.

Za poročanje o pokritosti kode lahko uporabite paket [Coverage.jl](#). Povzetek o pokritosti kode s testi lahko pripravite z naslednjim programom:

```
using Coverage
cov = process_folder("DomacaXY")
pokrite_vrstice, vse_vrstice = get_summary(cov)
delez = pokrite_vrstice / vse_vrstice
println("Pokritost kode s testi: $(round(delez*100))%.")
```

#### 17.1.4 Priprava zahteve za združitev na Github

Za lažjo komunikacijo predlagam, da rešitev domače naloge postavite v svojo vejo in ustvarite zahtevo za združitev (*Pull request* na Githubu ozziroma *Merge request* na Gitlabu). V nadaljevanju bomo opisali, kako to storiti, če repozitorij z domačimi nalogami gostite na Githubu. Postopek za Gitlab in druge platforme je podoben.

Preden začnete z delom, ustvarite vejo na svoji delovni kopiji repozitorija in jo potisnete na Github ali Gitlab. Ime veje naj bo domača-X, se pravi domaca-1 za 1. domačo nalogo in tako naprej. To storite z ukazom

```
$ git checkout -b domaca-1
$ git push -u origin domaca-1
```

Stikalo -u pove git-u, da naj z domačo vejo sledi veji na Githubu/Gitlabu.

Med delom sproti dodajate vnose z `git commit` in jih prenesete na splet z ukazom `git push`. Ko je domača naloga končana, na Githubu ustvarite zahtevo za združitev (angl. Pull request).

- Kliknete na zavihek `Pull requests` in nato na zelen gumb `Create pull request`.
- Na desni strani izberete vejo `domaca-1` in kliknete na gumb `Create draft pull request`.
- Ko je koda pripravljena na pregled, kliknite na gumb `Ready for review`.
- V komentarju za novo ustvarjeno zahtevo povabite asistenta k pregledu. To storite tako, da v komentar dodate uporabniško ime asistenta (npr. `@mojZlobniAsistent`).

`@mojZlobniAsistent Prosim za pregled.`

#### *Pri domačih nalogah se posvetujte s kolegi*

Nič ni narobe, če za pomoč pri domači nalogi prosite kolega. Seveda morate kodo in poročilo napisati samo, lahko pa kolega prosite za pregled ali za pomoč, če vam kaj ne dela.

Domačo nalogo tudi napišete v skupini, vendar morate v tem primeru rešiti toliko različnih nalog, kot je študentov v skupini.

## 17.2 1. domača naloga

Izberite eno izmed spodnjih nalog.

### Naloge

|  |     |
|--|-----|
| 17.2.1 SOR iteracija za razpršene matrike .....                  | 177 |
| 17.2.2 Metoda konjugiranih gradientov za razpršene matrike ..... | 178 |
| 17.2.3 Metoda konjugiranih gradientov s pred-pogojevanjem .....  | 178 |

|  |     |
|--|-----|
| 17.2.4 QR razcep zgornje hessenbergove matrike .....                   | 178 |
| 17.2.5 QR razcep simetrične tridiagonalne matrike .....                | 179 |
| 17.2.6 Inverzna potenčna metoda za zgornje hessenbergovo matriko ..... | 179 |
| 17.2.7 Inverzna potenčna metoda za tridiagonalno matriko .....         | 180 |
| 17.2.8 Naravni zlepek .....  | 181 |
| 17.2.9 QR iteracija z enojnim premikom .....                           | 181 |

### 17.2.1 SOR iteracija za razpršene matrike

Naj bo  $A$   $n \times n$  diagonalno dominantna razpršena matrika (velika večina elementov je ničelnih  $a_{ij} = 0$ ).

Definirajte nov podatkovni tip `RazprsenaMatrika`, ki matriko zaradi prostorskih zahtev hrani v dveh matrikah  $V$  in  $I$ , kjer sta  $V$  in  $I$  matriki  $n \times m$ , tako da velja

$$V(i, j) = A(i, I(i, j)). \quad (17.4)$$

V matriki  $V$  se torej nahajajo neničelni elementi matrike  $A$ . Vsaka vrstica matrike  $V$  vsebuje neničelne elemente iz iste vrstice v  $A$ . V matriki  $I$  pa so shranjeni indeksi stolpcev teh neničelnih elementov.

Za podatkovni tip `RazprsenaMatrika` definirajte metode za naslednje funkcije:

- indeksiranje: `Base.getindex`, `Base.setindex!`, `Base.firstindex` in `Base.lastindex`
- množenje z desne `Base.*` z vektorjem

Več informacij o [tipih in vmesnikih](#).

Napišite funkcijo `x, it = sor(A, b, x0, omega, tol=1e-10)`, ki reši razpršeni sistem  $Ax = b$  z SOR iteracijo. Pri tem je `x0` začetni približek, `tol` pogoj za ustavitev iteracije in `omega` parameter pri SOR iteraciji. Iteracija naj se ustavi, ko je

$$|Ax^{(k)} - b|_\infty < \delta, \quad (17.5)$$

kjer je  $\delta$  podan s argumentom `tol`.

Metodo uporabite za vložitev grafa v ravnino ali prostor [s fizikalno metodo](#). Če so  $(x_i, y_i, z_i)$  koordinate vozlišč grafa v prostoru, potem vsaka koordinata posebej zadošča enačbam

$$\begin{aligned} -st(i)x_i + \sum_{j \in N(i)} x_j &= 0, \\ -st(i)y_i + \sum_{j \in N(i)} y_j &= 0, \\ -st(i)z_i + \sum_{j \in N(i)} z_j &= 0, \end{aligned} \quad (17.6)$$

kjer je  $st(i)$  stopnja  $i$ -tega vozlišča,  $N(i)$  pa množica indeksov sosednjih vozlišč. Če nekatera vozlišča fiksiramo, bodo ostala zavzela ravnovesno lego med fiksiranimi vozlišči. Napišite funkcijo `ravnovesni_sistem`, ki za dani graf in koordinate vozlišč, ki so fiksirana, vrne matriko sistema in desne strani enačb za posamezne koordinate za vozlišča, ki niso fiksirana.

Za primer lahko upodobite [graf krožno lestev]([https://en.wikipedia.org/wiki/Ladder\\_graph#Circular\\_ladder\\_graph](https://en.wikipedia.org/wiki/Ladder_graph#Circular_ladder_graph)), kjer polovica vozlišč enakomerno razporedite na enotski krožnici.

Za risanje grafa lahko uporabite [GraphRecipes.jl](#).

Za primere, ki jih boste opisali, poiščite optimalni  $\omega$ , pri katerem SOR najhitreje konvergira in predstavite odvisnost hitrosti konvergence od izbire  $\omega$ .

### 17.2.2 Metoda konjugiranih gradientov za razpršene matrike

Definirajte nov podatkovni tip RazprsenaMatrika, kot je opisano v prejšnji nalogi.

Napišite funkcijo `[x, i]=conj_grad(A, b)`, ki reši sistem

$$Ax = b, \quad (17.7)$$

z metodo konjugiranih gradientov za A tipa RazprsenaMatrika.

Metodo uporabite na primeru vložitve grafa v ravnino ali prostor s fizikalno metodo, kot je opisano v prejšnji nalogi.

### 17.2.3 Metoda konjugiranih gradientov s pred-pogojevanjem

Za pohitritev konvergencije iterativnih metod, se velikokrat izvede t. i. pred-pogojevanje(engl. preconditioning). Za simetrične pozitivno definitne matrike je to pogosto nepopolni razcep Choleskega, pri katerem sledimo algoritmu za razcep Choleskega, le da ničelne elemente pustimo pri miru.

Naj bo A  $n \times n$  pozitivno definitna razpršena matrika(velika večina elementov je ničelnih  $a_{ij} = 0$ ). Matriko zaradi prostorskih zahtev hranimo kot sparse matriko. Poglejte si dokumentacijo za [razpršene matrike](#).

Napišite funkcijo `L = nep_chol(A)`, ki izračuna nepopolni razcep Choleskega za matriko tipa AbstractSparseMatrix. Napišite še funkcijo `x, i = conj_grad(A, b, L)`, ki reši linearni sistem

$$Ax = b \quad (17.8)$$

s pred-pogojeno metodo konjugiranih gradientov za matriko  $M = L^T L$  kot pred-pogojevalcem. Pri tem pazite, da matrike  $M$  ne izračunate, ampak uporabite razcep  $M = L^T L$ . Za različne primere preverite, ali se izboljša hitrost konvergencije.

### 17.2.4 QR razcep zgornje hessenbergove matrike

Naj bo H  $n \times n$  zgornje hessenbergova matrika (velja  $a_{ij} = 0$  za  $j < j - 2i$ ). Definirajte podatkovni tip ZgornjiHessenberg za zgornje hessenbergovo matriko.

Napišite funkcijo `Q, R = qr(H)`, ki izvede QR razcep matrike H tipa ZgornjiHessenberg z Givenovimi rotacijami. Matrika R naj bo zgornje trikotna matrika enakih dimenzij kot H, v Q pa naj bo matrika tipa Givens.

Podatkovni tip Givens definirajte sami tako, da hrani le zaporedje rotacij, ki se med razcepom izvedejo in indekse vrstic, na katere te rotacije delujejo. Posamezno rotacijo predstavite s parom

$$[\cos(\alpha); \sin(\alpha)], \quad (17.9)$$

kjer je  $\alpha$  kot rotacije na posameznem koraku. Za podatkovni tip definirajte še množenje `Base.*` z vektorji in matrikami.

Uporabite QR razcep za QR iteracijo zgornje hesenbergove matrike. Napišite funkcijo `lastne_vrednosti, lastni_vektorji = eigen(H)`, ki poišče lastne vrednosti in lastne vektorje zgornje hessenbergove matrike.

Preverite časovno zahtevnost vaših funkcij in ju primerjajte z metodami `qr` in `eigen` za navadne matrike.

### 17.2.5 QR razcep simetrične tridiagonalne matrike

Naj bo  $A$   $n \times n$  simetrična tridiagonalna matrika (velja  $a_{ij} = 0$  za  $|i - j| > 1$ ).

Definirajte podatkovni tip `SimetricnaTridiagonalna` za simetrično tridiagonalno matriko, ki hrani glavno in stransko diagonalo matrike. Za tip `SimetricnaTridiagonalna` definirajte metode za naslednje funkcije:

- indeksiranje: `Base.getindex`, `Base.setindex!`, `Base.firstindex` in `Base.lastindex`
- množenje z desne `Base.*` z vektorjem ali matriko

Časovna zahtevnost omenjenih funkcij naj bo linearна. Več informacij o [tipih](#) in Napišite funkcijo `Q`,  $R = qr(T)$ , ki izvede QR razcep matrike  $T$  tipa `Tridiagonalna` z Givensovimi rotacijami. Matrika  $R$  naj bo zgornje trikotna tridiagonalna matrika tipa `ZgornjeTridiagonalna`, v  $Q$  pa naj bo matrika tipa `Givens`. [vmesnikih](#).

Podatkovna tipa `ZgornjeTridiagonalna` in `Givens` definirajte sami (glejte tudi nalogu Poglavlje 17.2.4). Poleg tega implementirajte množenje `Base.*` matrik tipa `Givens` in `ZgornjeTridiagonalna`.

Uporabite QR razcep za QR iteracijo simetrične tridiagonalne matrike. Napišite funkcijo `lastne_vrednosti`, `lastni_vektorji = eigen(T)`, ki poišče lastne vrednosti in lastne vektorje simetrične tridiagonalne matrike.

Preverite časovno zahtevnost vaših funkcij in ju primerjajte z metodami `qr` in `eigen` za navadne matrike.

### 17.2.6 Inverzna potenčna metoda za zgornje hessenbergovo matriko

Lastne vektorje matrike  $A$  lahko računamo z **inverzno potenčno metodo**. Naj bo  $A_\lambda = A - \lambda I$ . Če je  $\lambda$  približek za lastno vrednost, potem zaporedje vektorjev

$$x^{(n+1)} = \frac{A_\lambda^{-1} x^{(n)}}{|A_\lambda^{-1} x^{(n)}|}, \quad (17.10)$$

konvergira k lastnemu vektorju za lastno vrednost, ki je po absolutni vrednosti najbližje vrednosti  $\lambda$ .

Da bi zmanjšali število operacij na eni iteraciji, lahko poljubno matriko  $A$  prevedemo v zgornje hessenbergovo obliko (velja  $a_{ij} = 0$  za  $j < i - 2$ ). S hausholderjevimi zrcaljenji lahko poiščemo zgornje hessenbergovo matriko  $H$ , ki je podobna matriki  $A$ :

$$H = Q^T A Q. \quad (17.11)$$

Če je  $v$  lastni vektor matrike  $H$ , je  $Qv$  lastni vektor matrike  $A$ , lastne vrednosti matrik  $H$  in  $A$  pa so enake.

Napišite funkcijo `H`, `Q = hessenberg(A)`, ki s Hausholderjevimi zrcaljenji poišče zgornje hessenbergovo matriko  $H$  tipa `ZgornjiHessenberg`, ki je podobna matriki  $A$ .

Tip `ZgornjiHessenberg` definirajte sami, kot je opisano v nalogi o QR razcepu zgornje hessenbergove matrike. Poleg tega implementirajte metodo `L`, `U = lu(A)` za matrike tipa `ZgornjiHessenberg`, ki bo pri razcepu upoštevala lastnosti zgornje hessenbergovih matrik. Matrika  $L$  naj ne bo polna, ampak tipa `SpodnjaTridiagonalna`. Tip `SpodnjaTridiagonalna` definirajte sami, tako da bo hrnil le neničelne elemente in za ta tip matrike definirajte operator `Base.\`, tako da bo upošteval strukturo matrik  $L$ .

Napišite funkcijo `lambda`, `vektor = inv_lastni(A, l)`, ki najprej naredi hessenbergov razcep in nato izračuna lastni vektor in točno lastno matrike  $A$ , kjer je  $l$  približek za lastno vrednost. Inverza matrike

A nikar ne računajte, ampak raje uporabite LU razcep in na vsakem koraku rešite sistem  $L(Ux^{n+1}) = x^n$ .

Metodo preskusite za izračun ničel polinoma. Polinomu

$$x^n + a_{\{n-1\}}x^{\{n-2\}} + \dots + a_1x + a_0 \quad (17.12)$$

lahko priredimo matriko

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (17.13)$$

katere lastne vrednosti se ujemajo z ničlami polinoma.

### 17.2.7 Inverzna potenčna metoda za tridiagonalno matriko

Lastne vektorje matrike  $A$  lahko računamo z **inverzno potenčno metodo**. Naj bo  $A_\lambda = A - \lambda I$ . Če je  $\lambda$  približek za lastno vrednost, potem zaporedje vektorjev

$$x^{\{(n+1)\}} = \frac{A_\lambda^{-1}x^{(n)}}{|A_\lambda^{-1}x^{(n)}|}, \quad (17.14)$$

konvergira k lastnemu vektorju za lastno vrednost, ki je po absolutni vrednosti najbližje vrednosti  $\lambda$ .

Naj bo  $A$  **simetrična matrika**. Da bi zmanjšali število operacij na eni iteraciji, lahko poljubno simetrično matriko  $A$  prevedemo v tridiagonalno obliko. S hausholderjevimi zrcaljenji lahko poiščemo tridiagonalno matriko  $T$ , ki je podobna matriki  $A$ :

$$T = Q^T A Q. \quad (17.15)$$

Če je  $v$  lastni vektor matrike  $T$ , je  $Qv$  lastni vektor matrike  $A$ , lastne vrednosti matrik  $T$  in  $A$  pa so enake.

Napišite funkcijo  $T$ ,  $Q = \text{tridiag}(A)$ , ki s Hausholderjevimi zrcaljenji poišče tridiagonalno matriko  $H$  tipa **Tridiagonalna**, ki je podobna matriki  $A$ .

Tip **Tridiagonalna** definirajte sami, kot je opisano v nalogi o QR razcepu tridiagonalne matrike. Poleg tega implementirajte metodo  $L$ ,  $U = \text{lu}(A)$  za matrike tipa **Tridiagonalna**, ki bo pri razcepu upoštevala lastnosti tridiagonalnih matrik. Matrike  $L$  in  $U$  naj ne bodo polne matrike. Matrika  $L$  naj bo tipa **SpodnjaTridiagonalna**, matrika  $U$  pa tipa **ZgornjaTridiagonalna**. Tipa **SpodnjaTridiagonalna** in **ZgornjaTridiagonalna** definirajte sami, tako da bosta hranila le neničelne elemente. Za oba tipa definirajte operator **Base.\**, tako da bo upošteval strukturo matrik.

Napišite funkcijo **lambda**, **vektor** = **inv\_lastni(A, l)**, ki najprej naredi hessenbergov razcep in nato izračuna lastni vektor in točno lastno matrike  $A$ , kjer je  $l$  približek za lastno vrednost. Inverza matrike  $A$  nikar ne računajte, ampak raje uporabite LU razcep in na vsakem koraku rešite sistem  $L(Ux^{n+1}) = x^n$ .

Metodo preskusite na laplaceovi matriki, ki ima vse elemente 0 razen  $l_{ii} = -2$ ,  $l_{i+1,j} = l_{i,j+1} = 1$ . Poiščite nekaj lastnih vektorjev za najmanjše lastne vrednosti in jih vizualizirajte z ukazom **plot**.

Lastni vektorji laplaceove matrike so približki za rešitev robnega problema za diferencialno enačbo

$$y''(x) = \lambda^2 y(x), \quad (17.16)$$

katere rešitve sta funkciji  $\sin(\lambda x)$  in  $\cos(\lambda x)$ .

### 17.2.8 Naravni zlepek

Danih je  $n$  interpolacijskih točk  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 1, 2 \dots n$ . **Naravni interpolacijski kubični zlepek**  $S$  je funkcija, ki izpolnjuje naslednje pogoje:

1.  $S(x_i) = f_i$ ,  $i = 1, 2 \dots n$ .
2.  $S$  je polinom stopnje 3 ali manj na vsakem podintervalu  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2 \dots n - 1$ .
3.  $S$  je dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na interpolacijskem intervalu  $[x_1, x_n]$
4.  $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$ .

Zlepek  $S$  določimo tako, da postavimo

$$S(x) = S_{i(x)} = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (17.17)$$

nato pa izpolnimo zahtevane pogoje<sup>4</sup>.

Napišite funkcijo `Z = interpoliraj(x, y)`, ki izračuna koeficient polinoma  $S_i$  in vrne element tipa Zlepek.

Tip Zlepek definirajte sami in naj vsebuje koeficiente polinoma in interpolacijske točke. Za tip Zlepek napišite dve funkciji

- `y = vrednost(Z, x)`, ki vrne vrednost zlepka v dani točki  $x$ .
- `plot(Z)`, ki nariše graf zlepka, tako da različne odseke izmenično nariše z rdečo in modro barvo (uporabi paket `Plots`).

### 17.2.9 QR iteracija z enojnim premikom

Naj bo  $A$  simetrična matrika. Napišite funkcijo, ki poišče lastne vektorje in vrednosti simetrične matrike z naslednjim algoritmom

- Izvedi Hessenbergov razcep matrike  $A = U^T TU$  (uporabite lahko vgrajeno funkcijo `LinearAlgebra.hessenberg`)
- Za tridiagonalno matriko  $T$  ponavljaj, dokler ni  $h_{n-1,n}$  dovolj majhen:
  - za  $T - \mu I$  za  $\mu = h_{n,n}$  izvedi QR razcep
  - nov približek je enak  $RQ + \mu I$
- Postopek ponovi za podmatriko brez zadnjega stolpca in vrstice

Napiši metodo `lastne_vrednosti`, `lastni_vektorji = eigen(A, EnojniPremik(), vektorji = false)`, ki vrne

- vektor lastnih vrednosti simetrične matrike  $A$ , če je vrednost `vektorji` enaka `false`.
- vektor lastnih vrednosti  $\lambda$  in matriko s pripadajočimi lastnimi vektorji  $V$ , če je `vektorji` enaka `true`

Pazi na časovno in prostorsko zahtevnost algoritma. QR razcep tridiagonalne matrike izvedi z Givensovimi rotacijami in hrani le elemente, ki so nujno potrebni (glej nalogo [QR razcep simetrične tridiagonalne matrike](#)).

---

<sup>4</sup>pomagajte si z: Bronštajn, Semendjajev, Musiol, Mühlig: **Matematični priročnik**, Tehniška založba Slovenije, 1997, str. 754 ali pa J. Petrišič: **Interpolacija**, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1999, str. 47

Funkcijo preiskusi na Laplaceovi matriki grafa podobnosti (glej [vajo o spektralnem gručenju](#)).

## 17.3 2. domača naloga

Tokratna domača naloga je sestavljena iz dveh delov. V prvem delu morate implementirati program za računanje vrednosti dane funkcije  $f(x)$ . V drugem delu pa izračunati eno samo številko. Obe nalogi rešite na **10 decimalk** (z relativno natančnostjo  $10^{-10}$ ) Uporabite lahko le osnovne operacije, vgrajene osnovne matematične funkcije `exp`, `sin`, `cos`, ..., osnovne operacije z matrikami in razcepe matrik. Vse ostale algoritme morate implementirati sami.

Namen te naloge ni, da na internetu poiščete optimalen algoritem in ga implementirate, ampak da uporabite znanje, ki smo ga pridobili pri tem predmetu, čeprav na koncu rešitev morda ne bo optimalna. Uporabite lahko interpolacijo ali aproksimacijo s polinomi, integracijske formule, Taylorjevo vrsto, zamenjave spremenljivk, itd. Kljub temu pazite na **časovno in prostorsko zahtevnost**, saj bo od tega odvisna tudi ocena.

Izberite **eno** izmed nalog. Domačo nalogo lahko delete skupaj s kolegi, vendar morate v tem primeru rešiti toliko različnih nalog, kot je študentov v skupini.

Če uporabljate drug programski jezik, ravno tako kodi dodajte osnovno dokumentacijo, teste in demo.

## Naloge

|  |     |
|--|-----|
| 17.3.1 Naloge s funkcijami .....           | 182 |
| 17.3.2 Naloge s števili .....              | 183 |
| 17.3.3 Lažje naloge (ocena največ 9) ..... | 185 |

### 17.3.1 Naloge s funkcijami

Implementacija funkcije naj zadošča naslednjim zahtevam:

- relativna napaka je manjša od  $5 \cdot 10^{-11}$  za vse argumente in
- časovna zahtevnost je omejena s konstanto, ki je neodvisna od argumenta.

## Naloge

|  |     |
|--|-----|
| 17.3.1.1 Fresnelov integral (težja) .....      | 182 |
| 17.3.1.2 Funkcija kvantilov za $N(0, 1)$ ..... | 183 |
| 17.3.1.3 Integralski sinus (težja) .....       | 183 |
| 17.3.1.4 Naravni parameter (težja) .....       | 183 |

### 17.3.1.1 Fresnelov integral (težja)

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna vrednosti Fresnelovega kosinusa

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt. \quad (17.18)$$

**Namig:** Uporabite pomožni funkciji

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\pi z^2 t}{2}}}{\sqrt{t(t^2+1)}} dt \\ g(z) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{t} e^{-\frac{\pi z^2 t}{2}}}{t^2+1} dt, \end{aligned} \tag{17.19}$$

kot je opisano v [17].

#### 17.3.1.2 Funkcija kvantilov za $N(0, 1)$

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna funkcijo kvantilov za standardno normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko. Funkcija kvantilov je inverzna funkcija  $\Phi^{-1}(x)$  porazdelitvene funkcije:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{17.20}$$

Poskrbite, da bo relativna napaka za vrednosti blizu 0 in 1 dovolj majhna in da je časovna zahtevnost omejena z isto konstanto na celiem intervalu  $(0, 1)$ .

#### 17.3.1.3 Integralski sinus (težja)

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna integralski sinus

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt. \tag{17.21}$$

Uporabite pomožni funkciji

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t+z} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{t^2+1} dt \\ g(z) &= \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t+z} dt = \int_0^\infty \frac{te^{-zt}}{t^2+1} dt \\ \text{Si}(z) &= \frac{\pi}{2} - f(z)\cos(z) - g(z)\sin(z), \end{aligned} \tag{17.22}$$

kot je opisano v [18].

#### 17.3.1.4 Naravni parameter (težja)

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna **naravni parameter**:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2} d\tau \tag{17.23}$$

za parametrično krivuljo

$$(x(t), y(t)) = (t^3 - t, t^2 - 1). \tag{17.24}$$

Za velike vrednosti argumenta  $t$  aproksimirajte funkcijo  $s(\frac{1}{t})^{-1}$  s polinomom.

#### 17.3.2 Naloge s števili

## Naloge

|  |     |
|--|-----|
| 17.3.2.1 Sila težnosti .....               | 184 |
| 17.3.2.2 Ploščina hipotrohoide .....       | 184 |
| 17.3.2.3 Povprečna razdalja (težja) .....  | 184 |
| 17.3.2.4 Ploščina Bézierove krivulje ..... | 184 |

### 17.3.2.1 Sila težnosti

Izračunajte velikost sile težnosti med dvema vzporedno postavljenima enotskima homogenima kockama na razdalji 1. Predpostavite, da so vse fizikalne konstante, ki nastopajo v problemu, enake 1. Sila med dvema telesoma  $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^3$  je enaka

$$\mathbf{F} = \int_{T_1} \int_{T_2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (17.25)$$

### 17.3.2.2 Ploščina hipotrohoide

Izračunajte ploščino območja, ki ga omejuje hypotrochoida podana parametrično z enačbama:

$$x(t) = (a + b) \cos(t) + b \cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) \quad (17.26)$$

$$y(t) = (a + b) \sin(t) + b \sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \quad (17.27)$$

za parametra  $a = 1$  in  $b = -\frac{11}{7}$ .

**Namig:** Uporabite formulo za [ploščino krivočrtnega trikotnika](#) pod krivuljo:

$$P = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt \quad (17.28)$$

### 17.3.2.3 Povprečna razdalja (težja)

Izračunajte povprečno razdaljo med dvema točkama znotraj telesa  $T$ , ki je enako razlike dveh kock:

$$T = ([-1, 1])^3 - ([0, 1])^3. \quad (17.29)$$

Integral na produktu razlike dveh množic  $(A - B) \times (A - B)$  lahko izrazimo kot vsoto integralov:

$$\begin{aligned} \int_{A-B} \int_{A-B} f(x, y) dx dy &= \int_A \int_A f(x, y) dx dy \\ &\quad - 2 \int_A \int_B f(x, y) dx dy + \int_B \int_B f(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (17.30)$$

### 17.3.2.4 Ploščina Bézierove krivulje

Izračunajte ploščino zanke, ki jo omejuje Bézierova krivulja dana s kontrolnim poligonom:

$$(0, 0), (1, 1), (2, 3), (1, 4), (0, 4), (-1, 3), (0, 1), (1, 0). \quad (17.31)$$

**Namig:** Uporabite lahko formulo za [ploščino krivočrtnega trikotnika](#) pod krivuljo:

$$P = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))dt. \quad (17.32)$$

### 17.3.3 Lažje naloge (ocena največ 9)

Naloge so namenjen tistim, ki jih je strah eksperimentiranja ali pa za to preprosto nimajo interesa ali časa. Rešiti morate eno od nalog:

#### 17.3.3.1 Gradientni spust z iskanjem po premici

#### 17.3.3.2 Interpolacija z baricentrično formulo

Napišite program, ki za dano funkcijo  $f$  na danem intervalu  $[a, b]$  izračuna polinomski interpolant, v Čebiševih točkah. Vrednosti naj računa z [baricentrično Lagrangevo interpolacijo](#), po formuli

$$l(x) = \begin{cases} \frac{\sum \frac{f(x_j)\lambda_j}{x-x_j}}{\sum \frac{\lambda_j}{x-x_j}} & x \neq x_j \\ f(x_j) & \text{sicer} \end{cases} \quad (17.33)$$

Čebiševe točke so podane na intervalu  $[-1, 1]$  s formulo

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (17.34)$$

vrednosti uteži  $\lambda_k$  pa so enake

$$\lambda_k = (-1)^k \begin{cases} 1 & 0 < i < n \\ \frac{1}{2} & i = 0 \\ n & \text{sicer.} \end{cases} \quad (17.35)$$

Za interpolacijo na splošnem intervalu  $[a, b]$  si pomagaj z linearno preslikavo na interval  $[-1, 1]$ . Program uporabi za tri različne funkcije  $e^{-x^2}$  na  $[-1, 1]$ ,  $\frac{\sin x}{x}$  na  $[0, 10]$  in  $|x^2 - 2x|$  na  $[1, 3]$ . Za vsako funkcijo določi stopnjo polinoma, da napaka ne bo presegla  $10^{-6}$ .

#### 17.3.3.3 Gauss-Legendrove kvadrature

Izpelji [Gauss-Legendreovo integracijsko pravilo](#) na dveh točkah

$$\int_0^h f(x)dx = Af(x_1) + Bf(x_2) + R_f \quad (17.36)$$

vključno s formulo za napako  $R_f$ . Izpelji sestavljeni pravilo za  $\int_a^b f(x)dx$  in napiši program, ki to pravilo uporabi za približno računanje integrala. Ocen, koliko izračunov funkcijске vrednosti je potrebnih, za izračun približka za

$$\int_0^5 \frac{\sin x}{x} dx \quad (17.37)$$

na 10 decimalk natančno. *Namig:* Najprej izpelji pravilo na intervalu  $[-1, 1]$  in ga nato prevedi na poljuben interval  $[x_i, x_{i+1}]$ . Za oceno napake uporabite izračun z dvojnim številom korakov.

## 17.4 3. domača naloga

### 17.4.1 Navodila

Zahtevana števila izračunajte na **10 decimalk** (z relativno natančnostjo  $10^{-10}$ ) Uporabite lahko le osnovne operacije, vgrajene osnovne matematične funkcije  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , ..., osnovne operacije z matrikami in razcepe matrik. Vse ostale algoritme morate implementirati sami.

Namen te naloge ni, da na internetu poiščete optimalen algoritem in ga implementirate, ampak da uporabite znanje, ki smo ga pridobili pri tem predmetu, čeprav na koncu rešitev morda ne bo optimalna. Kljub temu pazite na **časovno in prostorsko zahtevnost**, saj bo od tega odvisna tudi ocena.

Izberite **eno** izmed nalog. Domačo nalogo lahko delete skupaj s kolegi, vendar morate v tem primeru rešiti toliko različnih nalog, kot je študentov v skupini.

Če uporabljate drug programski jezik, ravno tako kodi dodajte osnovno dokumentacijo in teste.

### 17.4.2 Težje naloge

#### 17.4.2.1 Ničle Airijeve funkcije

Airyjeva funkcija je dana kot rešitev začetnega problema

$$Ai''(x) - x Ai(x) = 0, \quad Ai(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}} \Gamma(\frac{2}{3})}, \quad Ai'(0) = -\frac{1}{3^{\frac{1}{3}} \Gamma(\frac{1}{3})}. \quad (17.38)$$

Poiskite čim več ničel funkcije  $Ai$  na 10 decimalnih mest natančno. Ni dovoljeno uporabiti vgrajene funkcije za reševanje diferencialnih enačb. Lahko pa uporabite Airyjevo funkcijo `airyai` iz paketa `SpecialFunctions.jl`, da preverite ali ste res dobili pravo ničlo.

#### 17.4.2.1.1 Namig

Za računanje vrednosti  $y(x)$  lahko uporabite Magnusovo metodo reda 4 za reševanje enačb oblike

$$y'(x) = A(x)y, \quad (17.39)$$

pri kateri nov približek  $\mathbf{Y}_{k+1}$  dobimo takole:

$$\begin{aligned} A_1 &= A\left(x_k + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \\ A_2 &= A\left(x_k + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \\ \sigma_{k+1} &= \frac{h}{2}(A_1 + A_2) - \frac{\sqrt{3}}{12}h^2[A_1, A_2] \\ \mathbf{Y}_{k+1} &= \exp(\sigma_{k+1})\mathbf{Y}_k. \end{aligned} \quad (17.40)$$

Izraz  $[A, B]$  je komutator dveh matrik in ga izračunamo kot  $[A, B] = AB - BA$ . Eksponentno funkcijo na matriki ( $\exp(\sigma_{k+1})$ ) pa v programskejem jeziku julia dobite z ukazom `exp`.

#### 17.4.2.2 Dolžina implicinto podane krivulje

Poščite približek za dolžino krivulje, ki je dana implicitno z enačbama

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= x^4 + y^2/2 + z^2 = 12 \\ F_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 4z^2 = 8. \end{aligned} \quad (17.41)$$

Krivuljo lahko poščete kot rešitev diferencialne enačbe

$$\dot{x}(t) = \nabla F_1 \times \nabla F_2. \quad (17.42)$$

#### 17.4.2.3 Perioda limitnega cikla

Poščite periodo limitnega cikla za diferencialno enačbo

$$x''(t) - 4(1 - x^2)x'(t) + x = 0 \quad (17.43)$$

na 10 decimalk natančno.

#### 17.4.2.4 Obhod lune

Sondo Appolo pošljite iz Zemljine orbite na tir z vrnitvijo brez potiska (free-return trajectory), ki obkroži Luno in se vrne nazaj v Zemljino orbito. Rešujte sistem diferencialnih enačb, ki ga dobimo v koordinatnem sistemu, v katerem Zemlja in Luna mirujeta (omejen krožni problem treh teles). Naloge ni potrebno reševati na 10 decimalk.

##### 17.4.2.4.1 Omejen krožni problem treh teles

Označimo z  $M$  maso Zemlje in z  $m$  maso Lune. Ker je masa sonde zanemarljiva, Zemlja in Luna krožita okrog skupnega masnega središča. Enačbe gibanja zapišemo v vrtečem koordinatnem sistemu, kjer masi  $M$  in  $m$  mirujeta. Označimo

$$\mu = \frac{m}{M+m} \quad \text{ter} \quad \mu^- = 1 - \mu = \frac{M}{M+m}. \quad (17.44)$$

V brezdimenzijskih koordinatah (dolžinska enota je kar razdalja med masama  $M$  in  $m$ ) postavimo maso  $M$  v točko  $(-\mu, 0, 0)$ , maso  $m$  pa v točko  $(\mu^-, 0, 0)$ . Označimo z  $R$  in  $r$  oddaljenost satelita s položajem  $(x, y, z)$  od mas  $M$  in  $m$ , tj.

$$\begin{aligned} R &= R(x, y, z) = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \\ r &= r(x, y, z) = \sqrt{(\mu^- - x)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (17.45)$$

Enačbe gibanja sonde so potem:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x + 2\dot{y} - \frac{\mu}{R^3}(x + \mu) - \frac{\mu}{r^3}(x - \mu), \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} - \frac{\mu}{R^3}y - \frac{\mu}{r^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{R^3}z - \frac{\mu}{r^3}z. \end{aligned} \quad (17.46)$$

#### 17.4.2.5 Perioda geostacionarne orbite

Oblika planeta Zemlja ni čisto pravilna krogla. Zato tudi gravitacijsko polje ne deluje v vseh smereh enako. Gravitacijsko polje lahko zapišemo kot odvod gravitacijskega potenciala

$$\mathbf{F}_{g(\mathbf{r})} = m \cdot \nabla V(\mathbf{r}), \quad (17.47)$$

kjer je  $V(\mathbf{r})$  skalarna funkcija položaja  $\mathbf{r}$ . [Zemljina gravitacija Zemljin gravitacijski potencial](#).

#### 17.4.3 Lažja naloga (ocena največ 9)

Naloga je namenjena tistim, ki jih je strah eksperimentiranja ali pa za to preprosto nimajo interesa ali časa.

##### 17.4.3.1 Matematično nihalo

Kotni odmak  $\theta(t)$  (v radianih) pri nedušenem nihanju uteži obešene na vrvici opišemo z diferencialno enačbo

$$\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) + \theta''(t) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta'_0, \quad (17.48)$$

kjer je  $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$  težni pospešek in  $l$  dolžina nihala. Napišite funkcijo, ki izračuna odmak nihala ob določenem času. Enačbo drugega reda prevedite na sistem prvega reda in računajte z metodo [DOPRI5](#) (algoritem 7.5 v [1]).

Za različne začetne pogoje primerjajte rešitev z nihanjem harmoničnega nihala, ki je dano z enačbo

$$\frac{g}{l} \theta(t) + \ddot{\theta}(t) = 0. \quad (17.49)$$

Pri harmoničnem nihalu je nihajni čas neodvisen od začetnih pogojev, medtem ko je pri matematičnem nihalu nihajni čas narašča, ko se veča energija nihala. Narišite graf odvisnosti nihajnega časa matematičnega nihala od energije nihala.

## Literatura

- [1] B. Orel, *Osnove numerične matematike*. 2020.
- [2] B. Plestenjak, *Razširjen uvod v numerične metode*, 1. natis., let. 52. DMFA - založništvo, 2015, str. 418–419.
- [3] J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, in V. B. Shah, „Julia: A Fresh Approach to Numerical Computing“, *SIAM Review*, let. 59, št. 1, str. 65–98, jan. 2017, doi: [10.1137/141000671](https://doi.org/10.1137/141000671).
- [4] D. E. Knuth, „Literate programming“, *The Computer Journal*, let. 27, št. 2, str. 97–111, 1984, doi: [10.1093/comjnl/27.2.97](https://doi.org/10.1093/comjnl/27.2.97).
- [5] Savchenko V. V., Pasko, A. A., Okunev, O. G., in Kunii T. L., „Function representation of solids reconstructed from scattered surface points and contours“, *Computer Graphics Forum*, let. 14, št. 4, str. 181–188, 1995, Pridobljeno: 22. julij 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <http://citeserx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.48.80&rep=rep1&type=pdf>
- [6] Turk G. in O'Brien J., „Variational Implicit Surfaces“. 1999. Pridobljeno: 22. julij 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <https://www.semanticscholar.org/paper/Variational-Implicit-Surfaces-Turk-O'Brien/50dbc9f86af75dad7be6b2e92601e4ded7bee2d6>
- [7] B. S. Morse, T. S. Yoo, P. Rheingans, D. T. Chen, in K. R. Subramanian, „Interpolating implicit surfaces from scattered surface data using compactly supported radial basis functions“. str. 89–98, maj 2001. doi: [10.1109/SMA.2001.923379](https://doi.org/10.1109/SMA.2001.923379).
- [8] M. Buhmann, „Radial Basis Functions“, v *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics*, B. Engquist, Ur., 2015, str. 1216–1219.
- [9] U. von Luxburg, „A tutorial on spectral clustering“, *Statistics and Computing*, let. 17, št. 4, str. 395–416, dec. 2007, doi: [10.1007/s11222-007-9033-z](https://doi.org/10.1007/s11222-007-9033-z).
- [10] M. J. Kochenderfer in T. A. Wheeler, *Algorithms for Optimization*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2019. [Na spletu]. Dostopno na: <https://algorithmsbook.com/optimization/>
- [11] M. M. Shepherd in J. G. Laframboise, „Chebyshev approximation of  $(1+2x)\exp(x^2)\operatorname{erfc}x$  in  $0 \leq x < \infty$ “, *Mathematics of Computation*, let. 36, št. 153, str. 249–253, 1981, doi: [10.1090/S0025-5718-1981-0595058-X](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1981-0595058-X).
- [12] N. M. Temme, „Digital Library of Mathematical Functions: Chapter 3 Numerical Methods“. Pridobljeno: 15. junij 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <https://dlmf.nist.gov/3>
- [13] L. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice, Extended Edition*. 2019. doi: [10.1137/1.9781611975949](https://doi.org/10.1137/1.9781611975949).
- [14] C. Rackauckas in Q. Nie, „DifferentialEquations.jl--a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in Julia“, *Journal of Open Research Software*, let. 5, 2017, Pridobljeno: 12. avgust 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <https://openresearchsoftware.metajnl.com/articles/10.5334/jors.151>
- [15] E. Hairer, G. Wanner, in S. P. Nørsett, *Solving Ordinary Differential Equations I*, let. 8. v Springer Series in Computational Mathematics, vol. 8. Berlin, Heidelberg: Springer, 1993. doi: [10.1007/978-3-540-78862-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1).

- [16] E. Hairer in G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II*, let. 14. v Springer Series in Computational Mathematics, vol. 14. Berlin, Heidelberg: Springer, 1996. doi: [10.1007/978-3-642-05221-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-05221-7).
- [17] N. M. Temme, „Digital Library of Mathematical Functions: Chapter 7 Error Functions, Dawson’s and Fresnel Integrals“. Pridobljeno: 15. junij 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <https://dlmf.nist.gov/7>
- [18] N. M. Temme, „Digital Library of Mathematical Functions: Chapter 6 Exponential, Logarithmic, Sine, and Cosine Integrals“. Pridobljeno: 15. junij 2024. [Na spletu]. Dostopno na: <https://dlmf.nist.gov/6>