Primer domače naloge iz MM

Jana Novak
87654321

30. 2. 2000

Naloga: Poišči presečišče dveh premic v ravnini.

Rešitev. Premici v ravnini podamo z enačbama v implicitni obliki

$$ax + by + c = 0,$$
$$dx + ey + f = 0.$$

Presek bo v splošnem točka $P = (x_0, y_0)$. Če sta premici vzporedni, je presek prazen.

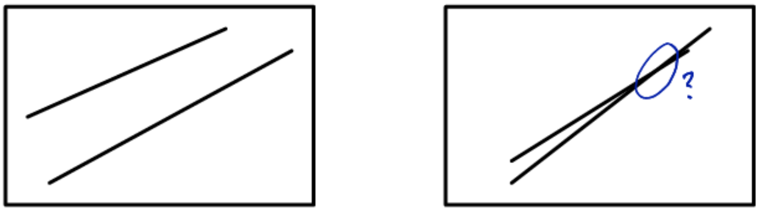
Premici sta vzporedni natanko tedaj, ko sta smerna koeficienta enaka:

$$by = -c - ax \qquad ey = -f - dx$$
$$y = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \qquad y = -\frac{f}{e} - \frac{d}{e}x$$
$$k_1 = -\frac{a}{b} \qquad k_2 = -\frac{d}{e}$$

če ni slučajno $b=0$ ali $e=0$

- Če je torej $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$, je presek prazen. Če je $\frac{a}{b} \doteq \frac{d}{e}$, bosta premici skoraj vzporedni, in je rezultat lahko zelo nenatančen:

  $ae \doteq bd$ oz. $bd - ae \doteq 0$



- Za presečišče velja:

$$ax_0 + by_0 + c = 0,$$
$$dx_0 + ey_0 + f = 0.$$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_0 \Rightarrow dx_0 + e\left(-\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_0\right) + f = 0$$
$$\Rightarrow dx_0 - \frac{ce}{b} - \frac{ae}{b}x_0 + f = 0$$
$$\Rightarrow x_0\left(d - \frac{ae}{b}\right) = \frac{ce}{b} - f \quad \Big/ \cdot b$$
$$x_0(bd - ae) = ce - bf \quad \Big/ : (bd - ae)$$
$$x_0 = \frac{ce - bf}{bd - ae}$$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(\frac{ce - bf}{bd - ae}\right) =$$
$$= \frac{-c(bd - ae) - a(ce - bf)}{b(bd - ae)} = \frac{-cbd + \cancel{ace} - \cancel{ace} + abf}{b(bd - ae)} = \frac{baf - bcd}{b(bd - ae)}$$

$$y_0 = \frac{af - cd}{bd - ae}$$

$\Rightarrow$ Presečišče je v točki $P(x_0, y_0)$, kjer je $x_0 = \frac{ce - bf}{bd - ae}$ in $y_0 = \frac{af - cd}{bd - ae}$. Če je $bd - ae = 0$, rešitev ne obstaja, če je blizu 0, je slabo pogojena.

Primer rešitve 2 iz MM

Janez Novak
12345678

31. 2. 2000

Naloga: Poišči presečišče dveh premic v ravnini.

Rešitev. Premici v ravnini podamo z enačbama v implicitni obliki

$$a_{11}x + a_{12}y = a_{13},$$
$$a_{21}x + a_{22}y = a_{23}.$$

Iščemo torej rešitve sistema $A\vec{v} = \vec{b}$, kjer je $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 2×2 matrika in $\vec{b} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$.

Sistem ima eno rešitev, če je $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ in 0 ali neskončno (enoparametrično družino) rešitev, če je $\det A = 0$ (takrat sta premici vzporedni in se ne sekata ali pa sovpadata.

V Octavu lahko rešitev sistema dobimo z izrazom

$$v = A\backslash b,$$

pri čemer se bo Octave izognil računanju inverza. V primeru, ko je $\det A = 0$, bo izpisal opozorilo in vrnil rešitev z minimalno normo.