

# FOTONIKA

Delovna verzija

Martin ČOPIČ  
Andrej PETELIN  
Mojca VILFAN

Recenzenti: \*\*\*

Lektor: \*\*\*

Risbe in diagrami: Andrej Petelin in Mojca Vilfan

Naslovne fotografije poglavij: Mojca Vilfan

©Kopiranje in razmnoževanje besedila ali njegovih delov ter slik je dovoljeno samo z odobritvijo avtorjev knjige.

LJUBLJANA, \*\*\* 2016

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Elektromagnetno valovanje</b>	<b>9</b>
1.1	Maxwellove enačbe	9
1.2	Valovna enačba in Poyntingov vektor	10
1.3	Monokromatski elektromagnetični val	11
1.4	Ravni val	12
1.5	Polarizacija EM valovanja	13
1.6	Lom in odboj EM valovanja	15
1.7	Uklon svetlobe	17
1.8	EM valovanje v anizotropnih snoveh	21
<b>2</b>	<b>Koherenca</b>	<b>25</b>
2.1	Youngov poskus	25
2.2	Koherenca navadnih svetil	26
2.3	Časovna koherenca	27
2.4	Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom	29
2.5	Prostorska koherenca	32
<b>3</b>	<b>Koherentni snopi svetlobe</b>	<b>37</b>
3.1	Omejen snop svetlobe	37
3.2	Obosna valovna enačba	38
3.3	Osnovni Gaussov snop	39
3.4	Snopi višjega reda	43
3.5	Besselov snop	45
3.6	Transformacije snopov z lečami	46
3.7	Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki	49
3.8	Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija	51
<b>4</b>	<b>Optični resonatorji</b>	<b>53</b>
4.1	Odprti resonatorji	53
4.2	Gaussovi snopi v resonatorjih	56
4.3	Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom	59

<b>4.4</b>	<b>Resonančne frekvence</b>	<b>60</b>
<b>4.5</b>	<b>Izgube v resonatorjih</b>	<b>62</b>
<b>4.6</b>	<b>*Obravnava z uklonskim integralom</b>	<b>64</b>
<b>4.7</b>	<b>*Sklopitev resonatorja z okolico</b>	<b>66</b>
<b>4.8</b>	<b>Sklopitev dveh resonatorjev</b>	<b>70</b>
<b>4.9</b>	<b>Sklopitev resonatorja z okolico</b>	<b>71</b>
<b>4.10</b>	<b>Sklopitev dveh resonatorjev</b>	<b>71</b>
<b>5</b>	<b>Interakcija svetlobe s snovjo</b>	<b>72</b>
<b>5.1</b>	<b>Kvantizacija elektromagnetskega polja</b>	<b>72</b>
<b>5.2</b>	<b>Sevanje črnega telesa</b>	<b>74</b>
<b>5.3</b>	<b>Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje</b>	<b>75</b>
<b>5.4</b>	<b>Absorpcijski koeficient</b>	<b>78</b>
<b>5.5</b>	<b>Nasičenje absorpcije</b>	<b>79</b>
<b>5.6</b>	<b>Optično ojačevanje</b>	<b>81</b>
<b>5.7</b>	<b>Optično črpanje trinivojskega sistema</b>	<b>82</b>
<b>5.8</b>	<b>Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte</b>	<b>84</b>
<b>5.9</b>	<b>Izpeljava verjetnosti za prehod</b>	<b>85</b>
<b>6</b>	<b>Laser</b>	<b>89</b>
<b>6.1</b>	<b>Zasedbene enačbe</b>	<b>89</b>
<b>6.2</b>	<b>Spektralna širina enega laserskega nihanja</b>	<b>89</b>
<b>6.3</b>	<b>Primerjava laserjev in običajnih svetil</b>	<b>89</b>
<b>6.4</b>	<b>Mnogofrekvenčni laser</b>	<b>89</b>
<b>6.5</b>	<b>Relaksacijske oscilacije</b>	<b>89</b>
<b>6.6</b>	<b>Delovanje v sunkih s preklopom dobrote</b>	<b>89</b>
<b>6.7</b>	<b>Uklepanje faz</b>	<b>89</b>
<b>6.8</b>	<b>Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo</b>	<b>89</b>
<b>6.9</b>	<b>Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>Primeri laserjev</b>	<b>90</b>
<b>7.1</b>	<b>Nd:YAG laser</b>	<b>90</b>
<b>7.2</b>	<b>He-Ne laser</b>	<b>90</b>
<b>7.3</b>	<b>Argonski ionski laser</b>	<b>90</b>
<b>7.4</b>	<b>Laser na ogljikov dioksid</b>	<b>90</b>
<b>7.5</b>	<b>Ekscimerski laser</b>	<b>90</b>
<b>7.6</b>	<b>Laserji na organska barvila</b>	<b>90</b>

7.7	Titan-safirni laser	90
7.8	Polvodniški laser	90
<b>8</b>	<b>Nelinearna optika .....</b>	<b>91</b>
8.1	Nelinarna susceptibilnost	91
8.2	Nelinearni optični pojavi drugega reda	92
8.3	Optično podvajanje frekvenc	94
8.4	Frekvenčno podvajanje Gaussovih snopov	99
8.5	*Račun podvajanja Gaussovih snopov	99
8.6	Parametrično ojačevanje	101
8.7	Nelinearni pojavi 3. reda	102
8.8	Samozbiranje	103
8.9	Optični solitoni	106
8.10	Optična fazna konjugacija	108
<b>9</b>	<b>Modulacija svetlobe .....</b>	<b>111</b>
9.1	Elektrooptični pojav	111
9.2	Amplitudna modulacija	112
9.3	Fazna in frekvenčna modulacija	115
9.4	Modulacija pri visokih frekvencah	116
9.5	Elastooptični pojav	117
9.6	Braggov uklon na zvočnih valovih	117
9.7	Modulacija s tekočimi kristali	122
9.8	Dodatek	126
<b>10</b>	<b>Optična vlakna .....</b>	<b>128</b>
10.1	Planparalelni vodnik	129
10.2	Cilindrično vlakno	131
10.3	Cilindrično vlakno s paraboličnim profilom lomnega količnika	131
10.4	Sprememba lomnega količnika vlakna	132
10.5	Izgube v optičnih vlaknih	133
10.6	Disperzija	134
10.7	Potovanje sunka po enorodovnem vlaknu	136
10.8	Sklopitev v optična vlakna	139
<b>11</b>	<b>Detektorji svetlobe .....</b>	<b>140</b>
11.1	Kalorimetrični detektorji	140

<b>11.2 Fotoprevodni detektorji</b>	<b>140</b>
<b>11.3 PN in PiN fotodiode</b>	<b>140</b>
<b>11.4 Plazovne fotodiode</b>	<b>140</b>
<b>11.5 Šum pri optični detekciji</b>	<b>140</b>



# Predgovor

Fotonika je veda o svetlobi. Obsega izredno široka področja nastanka svetlobe in svetlobnih virov, uporabe svetlobe v različne namene, širjenja optičnih signalov in zaznavanja svetlobe. V zadnjih desetletih je zato fotonika doživela izreden razcvet v raziskavah in tehnološki uporabi.

V pričajoči knjigi bomo obravnavali osnove fotonike. Po kratki ponovitvi splošne optike bomo spoznali delovanje laserjev in lastnosti laserske svetlobe, nadaljevali z nelinearnimi optičnimi pojavni in modulacijo svetlobe ter zaključili s prenosom in detekcijo laserskih signalov. Učbenik je zato primeren predvsem za študente II. stopnje fizike, ki že imajo znanje optike in zahtevanih matematičnih prijemov, ga pa priporočamo vsakemu, ki ga področje fotonike zanima. Bralcu v razmislek smo dodali nekaj preprostih nalog, zahtevnejša podpoglavlja pa so označena z zvezdico.

Prvotno gradivo za učbenik je nastalo po zapiskih za predavanja pri predmetu Elektrooptika. Gradivo smo dopolnili, posodobili in prilagodili obravnavani snovi pri predmetih Fotonika in Fizika laserjev. Za pomoč pri pripravi se najlepše zahvaljujemo prof. dr. Ireni Drevenšek Olenik \*\*\*

Avtorji

## Priporočena dodatna literatura

- B. E. A. Saleh in M. C. Teich, Fundamentals of Photonics, 2nd Edition, Wiley, New Jersey, 2007.
- A. Yariv in P. Yeh, Photonics, Sixth Edition, Oxford University Press, 2007.
- W. T. Silfvast, Laser Fundamentals, Second Edition, Cambridge University Press, 2008.
- C. C. Davis, Lasers and Electro-Optics, Cambridge University Press, 2006.
- J. W. Goodman, Statistical Optics, Second Edition, Wiley, New Jersey, 2015.
- W. Demtröder, Laser Spectroscopy, Fifth Edition, Springer, Berlin, 2014.

# 1. Elektromagnetno valovanje

Za začetek osvežimo osnove teorije elektromagnetnega polja in elektromagnetnega valovanja. Obnovili bomo zapis Maxwellovih enačb, opisali osnovne pojave valovanja (lom, odboj in uklon) in si ogledali razširjanje svetlobe v anizotropnih snoveh.

## 1.1 Maxwellove enačbe

Elektromagnetno polje v praznem prostoru opišemo z dvema vektorskima poljem, električnim in magnetnim, ki sta v splošnem funkciji prostora in časa. Vsaki točki v prostoru lahko priredimo jakost električnega polja  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  in jakost magnetnega polja  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . Za opis elektromagnetnega polja v snovi vpeljemo dva dodatna vektorja polja. To sta gostota električnega polja  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  in gostota magnetnega polja  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Vsa ta polja povezujejo Maxwellove enačbe<sup>1</sup>

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_e \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

Pri zapisu enačb smo upoštevali tudi izvore polj, to je gostoto električnega toka  $\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t)$  in gostoto naboja  $\rho_e(\mathbf{r}, t)$ .

Poleg Maxwellovih enačb veljata za vektorski polji zvezi

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{in} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (1.6)$$

kjer  $\mathbf{P}$  označuje električno polarizacijo, to je gostoto električnih dipolov,  $\mathbf{M}$  pa magnetizacijo, to je gostoto magnetnega momenta. Polarizacija in magnetizacija sta odvisni od zunanjih polj  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{H}$ . V splošnem sta njuni odvisnosti zelo zapleteni, v izotropnih in linearnih snoveh pa se zvezi poenostavita v

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \mathbf{E} \quad \text{in} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu - 1) \mathbf{H}. \quad (1.7)$$

Vpeljali smo električno ( $\chi_e$ ) in magnetno ( $\chi_m$ ) susceptibilnost ter dielektričnost  $\epsilon$  in magnetno permeabilnost  $\mu$ . Ko združimo gornje enačbe, lahko zapišemo dve konstitutivni relaciji

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad \text{in} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (1.9)$$

V linearnih anizotropnih snoveh moramo namesto skalarnih vrednosti  $\epsilon$  in  $\mu$  zapisati tenzorje.

<sup>1</sup> Škotski fizik James Clerk Maxwell, 1831–1879.

### Robni pogoji

Navedene Maxwellove enačbe zadoščajo za opis elektromagnetnega polja v neomejeni snovi, kjer so vse komponente polj zvezne funkcije. Za obravnavo v omejeni snovi moramo vedeti tudi, kaj se z elektromagnetnim poljem zgodi na meji dveh sredstev. Pri prehodu iz enega dielektrika v drugega se ohranjata normalni komponenti gostote električnega in magnetnega polja ter tangentni komponenti jakosti električnega in magnetnega polja (slika 1.1)

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (1.10)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (1.11)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1.12)$$

$$H_{1t} = H_{2t}. \quad (1.13)$$

Pri tem smo privzeli, da na meji med dielektrikoma ni površinskih tokov ali nabojev, sicer bi morali robna pogoja za  $D_n$  in  $H_t$  ustrezeno popraviti. Na meji dielektrika z idealnim prevodnikom (kovino, zrcalom) so robni pogoji drugačni. Za magnetno polje jih ne moremo preprosto zapisati, za električno polje pa velja, da mora biti tangentna komponenta jakosti električnega polja enaka nič. Posledica tega robnega pogoja je, da se pri pravokotnem vpodu valovanja na zrcalo faza valovanja spremeni za  $\pi$ .



Slika 1.1: Na meji med dvema dielektrikoma brez površinskih tokov in nabojev so tangentna komponenta jakosti električnega in magnetnega polja ter normalna komponenta gostote magnetnega in električnega polja zvezne količine.

## 1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor

Večinoma bomo obravnavali elektromagnetna valovanja v izotropnih, homogenih in linearnih snoveh brez zunanjih izvorov in nosilcev naboja ( $\mathbf{j}_e = 0$  in  $\rho_e = 0$ ). Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpeljemo valovno enačbo za jakost električnega ali magnetnega polja

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in} \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.14)$$

Pri tem je hitrost valovanja v snovi enaka

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c_0}{n}. \quad (1.15)$$

Magnetne in dielektrične lastnosti snovi smo pospravili v lomni količnik

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (1.16)$$

Za izotropno in nemagnetno snov ( $\mu = 1$ ) je lomni količnik  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

Vpeljimo še vektor gostote energijskega toka, to je Poyntingov vektor<sup>2</sup>  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (1.17)$$

Kot vidimo, je smer energijskega toka vedno pravokotna na smeri  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{H}$ . Gostoto energijskega toka  $j$ , to je količino energije, ki v danem časovnem intervalu preteče skozi dano ploskev z normalo  $\hat{\mathbf{n}}$ , izračunamo kot časovno povprečje projekcije Poyntingovega vektorja

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle. \quad (1.18)$$

Gostoti energijskega toka, predvsem gostoti svetlobnega toka, pravimo tudi intenziteta.

**Naloga 1.2.1 — Poyntingov teorem.** Iz Maxwellovih enačb izpelji kontinuitetno enačbo

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}^2 \right) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (1.19)$$

Pomagaj si z zvezo  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} - (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}$ .

Opazimo, da predstavlja Poyntingov teorem izrek o ohranitvi energije. Prvi in drugi člen na desni strani gornje enačbe opišeta gostoto energije, shranjene v električnem in magnetnem polju, medtem ko tretji in četrти člen opišeta energijo, ki je shranjena v snovi (električnih in magnetnih dipolih). Za valovanje v homogeni izotropni snovi tako velja

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.20)$$

kjer je  $w$  celotna gostota energije elektromagnetnega polja. Zapišemo jo kot

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu \mathbf{H}^2. \quad (1.21)$$

Valovno enačbo in ohranitvene zakone lahko zapišemo tudi za anizotropne, nehomogene ali nelinearne snovi. Nekaj teh primerov bomo srečali v nadaljevanju in jih bomo obravnavali sproti.

### 1.3 Monokromatski elektromagnetični val

Reševanje valovne enačbe si navadno poenostavimo z vpeljavo kompleksnega zapisa jakosti električnega in magnetnega polja. Račun si oglejmo na primeru monokromatskega elektromagnetičnega vala. Nastavek za monokromatski val s krožno frekvenco  $\omega$  naj bo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}) \quad \text{in} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \Re(\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}), \quad (1.22)$$

kjer sta  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  in  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  časovno neodvisna vektorja jakosti električnega in magnetnega polja s kompleksno amplitudo. Podobno lahko vpeljemo tudi kompleksne vektorje  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  in  $\mathbf{B}$ , ki opisujejo realne količine (polarizacijo, magnetizacijo, gostoto električnega in gostoto magnetnega polja). V nadaljevanju bomo večinoma pisali polja v kompleksni obliki, pri čemer se bomo držali gornje definicije. Zavedati pa se moramo, da je uporaba kompleksnega zapisa zgolj računski pripomoček, na koncu je treba rezultate vedno izraziti z realnimi količinami.

<sup>2</sup>Angleški fizik John Henry Poynting, 1852–1914.

Če vstavimo gornji nastavek za monokromatski val v valovno enačbo (enačba 1.14), dobimo Helmholtzevi enačbi<sup>3</sup> za kompleksna vektorja jakosti električnega in magnetnega polja. V homogenem in izotropnem sredstvu ju zapišemo kot

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.23)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.24)$$

kjer je  $k = nk_0 = n\omega/c_0$  velikost valovnega vektorja oziroma valovno število.

Vpeljimo še kompleksni Poyntingov vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (1.25)$$

**Naloga 1.3.1** Upoštevajoč izraz za Poyntingov vektor  $\mathbf{S}$  (enačba 1.17) pokaži, da lahko intenzi-  
teto valovanja  $j$  (oziora povprečje projekcije Poyntingovega vektorja) izrazimo s kompleksnim  
Poyntingovim vektorjem  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ :

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \Re(\mathbf{S}(\mathbf{r})). \quad (1.26)$$

## 1.4 Ravni val

Osnovna rešitev valovne enačbe je ravni val. Nastavek, ki predstavlja ravni val in hkrati reši Helmholtzevo enačbo (enačba 1.23), je oblike

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \quad (1.27)$$

in podobno za magnetno polje

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \quad (1.28)$$

pri čemer sta vektorja  $\mathbf{E}_0$  ter  $\mathbf{H}_0$  od kraja in časa neodvisna. Velikost valovnega vektorja  $\mathbf{k}$  je  $k = nk_0$ , pri čemer je  $n$  lomni količnik izotropne in homogene snovi.

Vektorja jakosti električnega in magnetnega polja zadostujeta Maxwellovim enačbam (enačbe 1.1–1.4), iz česar sledi, da sta polji vedno medsebojno pravokotni, hkrati pa pravokotni na valovni vektor  $\mathbf{k}$ . Elektromagnetno valovanje je torej transverzalno valovanje.

**Naloga 1.4.1** Pokaži, da za ravni val vedno velja  $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$  in  $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ . Izpelji še pravokotnost polj in valovnega vektorja v izotropni snovi

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad \text{in} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mu \mu_0 \mathbf{H}_0. \quad (1.30)$$

Zaradi enolične zveze med električnim in magnetnim poljem zadošča za opis ravnega vala le eno polje, navadno se odločimo za električno.

<sup>3</sup>Nemški zdravnik in fizik Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821–1894.

Energijski tok je pri ravnem valu v izotropni snovi vedno v smeri valovnega vektorja, pravokotno na valovne fronte. Iz definicije za gostoto svetlobnega toka (enačbi 1.26) ter Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledi

$$j = \Re \left( \frac{1}{4} E_0 H_0^* + \frac{1}{4} E_0^* H_0 \right) = \frac{1}{2} c \epsilon \epsilon_0 |E_0|^2 = \frac{1}{2} c_0 n \epsilon_0 |E_0|^2. \quad (1.31)$$

Gostota svetlobnega toka (intenziteta svetlobe) je torej sorazmerna s kvadratom amplitude jakosti električnega polja. Poglejmo nekaj primerov. Gostoti toka  $j = 1 \text{ kW/m}^2$  (približna gostota svetlobnega toka s Sonca) tako v praznem prostoru ustreza jakost električnega polja  $E_0 = 868 \text{ V/m}$ , gostoti  $j = 1 \text{ W}/\mu\text{m}^2$  (intenziteta močno fokusiranega laserskega žarka) pa  $E_0 = 27 \text{ MV/m}$ .

Zapišimo še povprečno gostoto energije valovanja. K energiji prispevata tako magnetno kot električno polje. Oba prispevka sta enaka, zato velja

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \epsilon \epsilon_0 |E_0|^2 + \frac{1}{4} \mu \mu_0 |H_0|^2 = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 |E_0|^2. \quad (1.32)$$

Povprečna gostota energije  $w$ , pomnožena s hitrostjo svetlobe v snovi, da gostoto energijskega toka  $j$  oziroma intenziteto svetlobe

$$j = cw. \quad (1.33)$$

Gornji izraz nazorno kaže, da je intenziteta svetlobe pravzaprav pretok energije. To si lahko predstavljamo, če vzamemo valj s prečnim presekom  $S$  in dolžino  $c\Delta t$ . V volumnu  $Sc\Delta t$  je potem shranjene  $wSc\Delta t$  energije. Energija, ki preteče skozi presek  $S$  v času  $\Delta t$ , je ravno  $cw$ .

Intenziteta ravnega vala je neodvisna od kraja in časa, iz česar sledi, da je povsod po prostoru enaka. Če bi hoteli izračunati energijo, ki jo nosi ravni val, bi opazili, da je ta energija neskončna. To seveda ni mogoče, zato se je vedno treba zavedati, da je ravni val le idealiziran, a nazoren in praktičen približek elektromagnetnega vala.

## 1.5 Polarizacija EM valovanja

Jakost električnega polja elektromagnetevalovanja je v izotropnem sredstvu pravokotna na smer valovnega vektorja<sup>4</sup>. Vektor  $\mathbf{E}$  torej leži v ravnini, pravokotni na smer valovnega vektorja, njegovo smer pa opiše polarizacija.

V splošnem je ravni val eliptično polariziran. Takrat vektor  $\mathbf{E}$  v ravnini, pravokotni na valovni vektor, oriše elipso. Obe komponenti vektorja  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  nihata sinusno z enako frekvenco, lahko pa se razlikujeta v amplitudi in fazi. Kadar je elipsa izrojena v daljico, govorimo o linearno polariziranem valovanju, kadar pa je krog, govorimo o cirkularno polariziranem valu. Poljubno polarizacijo lahko vedno zapišemo kot vsoto dveh linearne ali dveh cirkularne polariziranih valovanj.

Polarizacijo valovanja lahko zapišemo s kompleksnim Jonesovim vektorjem<sup>5</sup>  $\mathbf{J}$ . Za monokromatski ravni val, ki se širi v smeri  $z$ , je

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|E_0|} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

<sup>4</sup>V splošnem je jakost električnega polja pravokotna na smer Poyntingovega vektorja ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{S}$ ) in gostota električnega polja pravokotna na smer valovnega vektorja ( $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$ ). V anizotropnih sredstvih velja  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{S}$ .

<sup>5</sup>Ameriški fizik Robert Clark Jones, 1916–2004.

Dodali smo normalizacijski faktor  $|E_0| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}$ , da je Jonesov vektor normaliziran in  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* = 1$ . Ravni val, linearно polariziran v smeri  $x$ , tako zapišemo kot  $\mathbf{J} = (1, 0)$ , val, ki je linearно polariziran pod kotom  $45^\circ$  glede na osi  $x$  in  $y$ , pa je  $\mathbf{J} = (1, 1)/\sqrt{2}$ . Za zapis cirkularno polariziranega valovanja ni enotnega dogovora, tukaj zapišimo desno cirkularno polarizirano valovanje kot  $\mathbf{J} = (1, -i)/\sqrt{2}$ , levo cirkularno polarizirano pa z  $\mathbf{J} = (1, i)/\sqrt{2}$ . V našem zapisu je desno polariziran val tisti val, pri katerem se električna poljska jakost na danem mestu vrti v desno, če gledamo v smeri širjenja valovanja. Hkrati pa velja, da električna poljska jakost ob danem času vzdolž smeri širjenja valovanja opiše levosučno vijačnico.

Zapis z Jonesovim vektorjem je prikladen, saj omogoča preprost izračun prehoda ravnega vala skozi optične elemente, ki spreminjajo polarizacijo, a ohranjajo obliko ravnega vala. V splošnem se pri prehodu skozi sredstvo spremeni kompleksna amplituda  $\mathbf{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y})$

$$E_{2x} = T_{11}E_{1x} + T_{12}E_{1y} \quad (1.35)$$

$$E_{2y} = T_{21}E_{1x} + T_{22}E_{1y}, \quad (1.36)$$

pri čemer so komponente  $T_{ij}$  odvisne od lastnosti sredstva. Enačbi zapišemo v matrični obliki

$$\mathbf{E}_2 = T \cdot \mathbf{E}_1, \quad (1.37)$$

kjer sta  $\mathbf{E}_1$  in  $\mathbf{E}_2$  vstopni in izstopni val,  $T$  pa je Jonesova matrika. Jonesova matrika za prehod skozi linearни polarizator, ki polarizira v smeri  $x$ , je

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Oglejmo si še dva zanimiva primera optičnih komponent. Jonesova matrika za  $\lambda/2$  ploščico, ki spremeni desno cirkularno polariziran val v levo polariziran in obratno, je

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Jonesova matrika za  $\lambda/4$  ploščico pa je

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Ta optični element linearno polarizirano valovanje oblike  $\frac{E_0}{\sqrt{2}}(1, 1)$  spremeni v levo cirkularno polarizirano valovanje, cirkularno polarizirano valovanje pa nazaj v linearno.

**Naloga 1.5.1** Pokaži, da je Jonesova matrika za polarizator, ki prepušča polarizacijo pod kotom  $\vartheta$  glede na os  $x$ , podana s spodnjo matriko. Namig: matriko  $T'$ , ki predstavlja polarizator v smeri  $x$ , zapiši v zavrnjenem koordinatnem sistemu  $T = R(\vartheta) \cdot T' \cdot R(\vartheta)^T$ , kjer je  $R(\vartheta)$  rotacijska matrika.

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

## 1.6 Lom in odboj EM valovanja

Na ravni meji med dvema izotropnima dielektrikoma se del svetlobe odbije po odbojnem zakonu, del pa lomi po lomnem zakonu

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2. \quad (1.42)$$

S kotoma  $\vartheta_1$  in  $\vartheta_2$  smo označili vpadni in lomni kot,  $n_1$  in  $n_2$  pa sta lomna količnika prve in druge snovi. Poglejmo, kaj se pri lomu in odboju zgodi s polarizacijo valovanja. Os  $x$  naj bo pravokotna na vpadno ravnino (slika 1.2). Valovanje, polarizirano v tej smeri, je transverzalno električno (TE) valovanje. Takrat je električna poljska jakost vzporedna mejni ravnini. Kadar leži v mejni ravnini jakost magnetnega polja, govorimo o transverzalnem magnetnem valovanju (TM).



Slika 1.2: Lom elektromagnetskog valovanja. Levo: transverzalno električno (TE) valovanje. Desno: transverzalno magnetno (TM) valovanje. Os  $x$  je pravokotna na vpadno ravnino in kaže iz lista.

Jonesovi matriki za prepustnost  $t$  in odbojnost  $r$  na plasti med dvema dielektrikoma zapišemo kot

$$t = \begin{bmatrix} t_x & 0 \\ 0 & t_y \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad r = \begin{bmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

Potem je

$$E_{2x} = t_x E_{1x} \quad E_{3x} = r_x E_{1x} \quad (1.44)$$

$$E_{2y} = t_y E_{1y} \quad E_{3y} = r_y E_{1y}, \quad (1.45)$$

pri čemer smo z  $\mathbf{E}_2$  označili prepuščeni val, z  $\mathbf{E}_3$  pa odbitega. Iz robnih pogojev (enačbe 1.10–1.13) izračunamo koeficiente matrik  $r$  in  $t$  s Fresnelovimi enačbami<sup>6</sup>:

$$r_x = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2}, \quad t_x = 1 + r_x = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \quad (1.46)$$

in

$$r_y = \frac{n_2 \cos \vartheta_1 - n_1 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}, \quad t_y = (1 + r_y) \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}. \quad (1.47)$$

<sup>6</sup>Francoski fizik Augustin-Jean Fresnel, 1788–1827.

V splošnem sta odbojnost  $r$  in prepustnost  $t$  kompleksni količini, saj iz lomnega zakona sledi, da je  $\cos \vartheta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \vartheta_1}$  lahko kompleksen. Velikost števila  $|r|$  tako predstavlja odbojnost, argument  $\arg\{r\}$  pa spremembo faze pri odboju.

Prepustnost  $r$  in odbojnost  $t$  povesta, kako se spremeni kompleksna amplituda jakosti električnega polja. Razmerje med intenziteto odbite in vpadne svetlobe  $\mathcal{R}$  oziroma razmerje med intenziteto prepuščene in vpadne svetlobe  $\mathcal{T}$  izračunamo kot

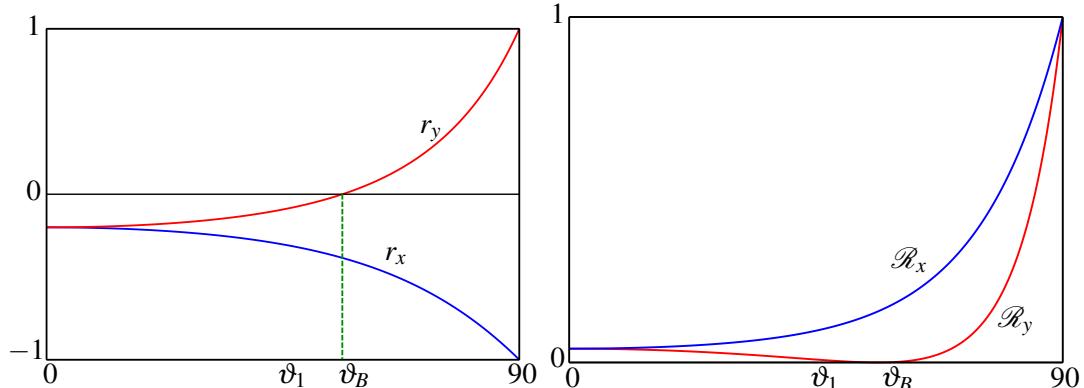
$$\mathcal{R} = |r|^2 \quad (1.48)$$

in

$$\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}. \quad (1.49)$$

Slednja enačba sledi iz ohranitve energije. V splošnem  $\mathcal{T}$  ni enak  $|t|^2$ , saj energijski tok potuje po različnih snoveh in v različnih smereh. Velja zveza

$$\mathcal{T} = \frac{n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1} |t|^2. \quad (1.50)$$



Slika 1.3: Odbojnost  $r$  za obe vpadni polarizaciji (levo) in razmerje med intenziteto odbite in vpadne svetlobe  $\mathcal{R}$  (desno) v odvisnosti od vpadnega kota. Pri Brewsterjevem vpadnem kotu je odbojnost enaka nič.

Zanimiva je odvisnost odbojnosti od vpadnega kota. Izkaže se, da pri nekem kotu, imenujemo ga Brewsterjev kot<sup>7</sup>, odbojnost za TM polarizacijo enaka nič in vsa vpadla svetloba je prepuščena. Brewsterjeva okna (steklene ploščice, postavljene pod Brewsterjevim kotom) uporabljamo v resonatorjih laserjev za povečanje izgub TE in zmanjšanje izgub TM polariziranega valovanja.

**Naloga 1.6.1 — Brewsterjev kot.** Pokaži, da za TM val obstaja vpadni kot

$$\vartheta_B = \arctan \left( \frac{n_2}{n_1} \right), \quad (1.51)$$

pri katerem je odbojnost enaka nič in prepustnost enaka  $\mathcal{T}=1$ .

<sup>7</sup>Škotski fizik in znanstvenik Sir David Brewster, 1781–1868.



Pri prehodu skozi optične elemente se – razen TM polariziranega valovanja pri Brewsterjevem kotu – vedno nekaj svetlobe odbije. Da zmanjšamo te izgube, optične elemente navadno prekrijemo z antirefleksno plastjo, to je nanosom ene ali več primerno izbranih debelin plasti dielektrikov z ustreznimi lomnimi količniki. Zaradi destruktivne interference se količina odbite svetlobe z izbrano valovno dolžino občutno zmanjša. Ker imamo v fiziki laserjev opraviti s koherentnimi izvori s točno določeno valovno dolžino, za zmanjšanje izgub, na primer v resonatorju laserja, vedno uporabljamo optične elemente (leče, kristale, akusto-optične modulatorje ...) z ustrezno antirefleksno plastjo.

## 1.7 Uklon svetlobe

Ko svetloba vpade na oviro, za oviro nastane senca. Nastala senca ni ostra, ampak ima zaradi uklona zabrisane robeve. Obravnave uklona svetlobe na odprtih (zaslonah) se lotimo z uporabo skalarnega približka teorije elektromagnetnega polja. To pomeni, da vpliv polarizacije zanemarimo. Vpliv polarizacije je pomemben zgolj pri zelo majhnih odprtih, torej kadar je  $\lambda \sim a$ , kjer je  $a$  velikost odprtine. Treba pa je povedati, da so tudi v tem primeru uklonske slike za različne polarizacije podobne, razlikujejo pa se po intenziteti prepuščene svetlobe.



### Žični polarizatorji

Primer, kjer skalarni približek ne da pravih rezultatov, je uklon na mrežici, narejeni iz zelo tankih prevodnik žic s periodo mrežice  $d \ll \lambda$ . Takšna mrežica deluje kot polarizator za valovanje s polarizacijo, ki je pravokotno na žice (TE polarizacija). Elektromagnetni val s TM polarizacijo pri prečkanju inducira tok v žicah, medtem ko je za TE polarizacijo inducirani tok bistveno manjši, saj je smer toka omejena vzdolž žice. Posledično je prepustnost za TE val velika, medtem ko se TM val delno absorbira in odbije. Takšni polarizatorji se večinoma uporabljajo v mikrovalovni tehniki, vendar se v zadnjih letih z razvojem in izboljšavo litografskih postopkov vse pogosteje uporabljajo tudi v bližnjem infrardečem področju svetlobe.

Pri velikostih odprtin  $a \gg \lambda$  torej uporabimo skalarno valovno enačbo (enačba 1.14)

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (1.52)$$

Zapisana valovna enačba velja za vse komponente električne  $E$  in tudi magnetne poljske jakosti  $H$ . Časovna odvisnost polja  $E$  je harmonična funkcija in je sorazmerna z  $e^{-i\omega t}$ . Z uporabo Greenovega teorema lahko jakost polja  $E_P$  v točki  $P$  izrazimo s poljem na poljubni ploskvi, ki obkroža točko  $P$  (slika 1.4). Zvezno opisuje Kirchhoffov integral<sup>8</sup>

$$E_P = -\frac{1}{4\pi} \oint \left( E \mathbf{n} \cdot \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \cdot \nabla E \right) dS, \quad (1.53)$$

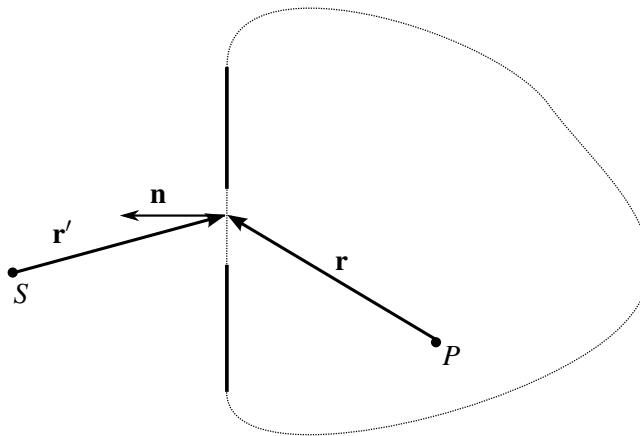
kjer je  $\mathbf{n}$  normala na ploskev, po kateri teče integral,  $r$  pa je oddaljenost od točke  $P$  do ploskve  $dS$ . Kirchhoffov integral velja splošno za katerokoli harmonično funkcijo, ki reši valovno enačbo (enačba 1.52), ne samo  $E$ , in torej ni vezan na obravnavo uklona svetlobe.

Kot prvi primer vzemimo točkast izvor v točki  $S$ . Svetloba iz njega vpada na zaslon, v katerem je odptina poljubne oblike. Izračunajmo skalarno polje v točki  $P$  na drugi strani zaslona. Vpadno svetlobo zapišemo kot

$$E = A \frac{e^{ikr'}}{r'}, \quad (1.54)$$

kjer je  $r'$  razdalja od izvora do točke na zaslonu,  $A$  pa zaradi ohranitve energije konstanta.

<sup>8</sup>Nemški fizik Gustav Kirchhoff, 1824–1887.



Slika 1.4: Integracijska ploskev v Kirchhoffovem integralu zajema odprtino in objema točko  $P$ .

Integracijska ploskev je lahko poljubna sklenjena ploskev, ki objema točko  $P$ . Izberemo tako, ki zajema odprtino na zaslonu, poleg tega pa naredimo še dva približka:

1. Jakost polja  $E$  in njen gradient doprineseta k integralu le na odprtini, na preostanku ploskve pa sta njuna prispevka zanemarljivo majhna.
2. Vrednost  $E$  in njen gradient sta na odprtini takšna, kot da zaslona ne bi bilo.

Zgornja približka sta precej groba, vendar se izkaže, da v splošnem kljub temu dobimo dobro ujemanje z eksperimentalno določeno uklonsko sliko, s čimer upravičimo njuno uporabo pri izračunu uklonske slike.

Kirchhoffov integral za primer točkastega izvora svetlobe se potem zapiše kot integral, pri čemer integriramo po odprtini

$$E_P = -\frac{ikAe^{-i\omega t}}{4\pi} \int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')] dS. \quad (1.55)$$

V literaturi ga pogosto imenujejo Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral.

---

**Naloga 1.7.1** Uporabi Kirchhoffov integral (enačba 1.53) in pokaži, da za primer krožnega vpadnega vala (enačba 1.54) polje v točki  $P$  zapišemo s Fresnel-Kirchhoffovim integralom (enačba 1.55). Pri tem privzami, da je oddaljenost točke  $P$  od odprtine  $r \gg \lambda$ .

---

Oglejmo si poseben primer, ko leži točkast izvor svetlobe na osi okrogle odprtine. Razdalja  $r'$  je potem konstantna in polje v točki  $P$  izračunamo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi} \int E_S \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1] dS, \quad (1.56)$$

pri čemer  $E_S$  predstavlja kompleksno amplitudo vpadnega polja v odprtini

$$E_S = A \frac{e^{ikr'}}{r'}. \quad (1.57)$$

Zgornja oblika Fresnel-Kirchhoffovega integrala ni pravzaprav nič drugega kot matematičen zapis Huygensovega načela<sup>9</sup>. Spomnimo se, da Huygensovo načelo pravi, da lahko vsako točko valovne fronte obravnavamo kot izvor novega krogelnega vala. Točno to je zapisano tudi v gornjem integralu. Vpadni val  $E_S$  v vsakem od elementov  $dS$  odprtine vzbudi krogelno valovanje s kompleksno amplitudo

$$E = A_0 \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (1.58)$$

polje v izbrani točki  $P$  pa je vsota prispevkov posameznih krogelnih valovanj.

Za razliko od osnovnega Huygensovega načela, v Fresnel-Kirchhoffovem integralu (enačba 1.55) nastopa še faktor  $[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1]$ , ki poskrbi, da ni valovanja v smeri nazaj proti izvoru. Tudi faktor  $-i$  manjka v osnovnem Huygensovem načelu, pomeni pa, da je uklonjeno valovanje fazno zakasnjeno za  $\pi/2$  glede na osnovno valovanje  $E_S$ .

Uporabna razširitev Fresnel-Kirchhoffovega uklona je z uporabo prepustnostne funkcije odprtine  $T$ . Z njo v splošnem popišemo amplitudne in fazne spremembe, do katerih lahko pride na raznih odprtinah, lečah, uklonskih mrežicah ... Razširjen uklonski integral zapišemo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi} \int T(r) E_S(r) \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1] dS, \quad (1.59)$$

pri čemer smo upoštevali tudi splošno obliko vpadnega vala  $E_S(r)$ .

### Fraunhoferjev in Fresnelov približek

Izračun Fresnel-Kirchhoffovega integrala je v splošnem zelo zapleten, zato se pogosto poslužujemo dveh približkov: Fraunhoferjevega<sup>10</sup> in Fresnelovega. Fraunhoferjeva uklonska slika velja za daljno polje, kadar lahko vpadni in uklonjeni val zapišemo kot ravna valova. Bolj zapleteno Fresnelovo uklonsko sliko pa moramo uporabiti, kadar obravnavamo primer bližnjega polja.



Slika 1.5: V Fraunhoferjevem približku valovanji obravnavamo kot ravna valova (levo). Fresnelov približek moramo uporabiti za obravnavno uklonu v primeru bližnjega polja (desno).

Mejo med daljnim in bližnjim poljem kvalitativno določa Fresnelovo število

$$F = \frac{a^2}{L\lambda}. \quad (1.60)$$

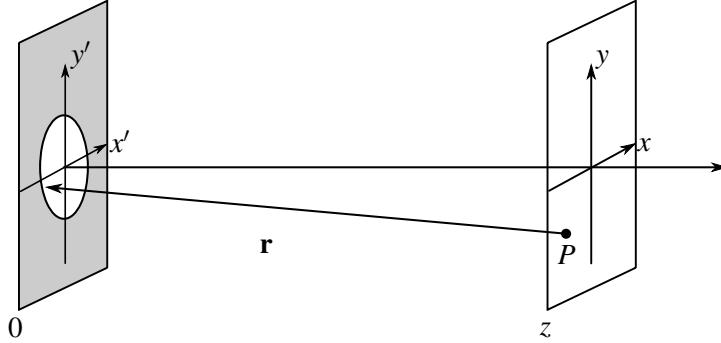
Pri tem je  $a$  karakteristična dimenzija odprtine,  $L$  tipična oddaljenost od odprtine ter  $\lambda$  valovna dolžina.

<sup>9</sup>Nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens, 1629–1695.

<sup>10</sup>Nemški fizik Joseph von Fraunhofer, 1787–1826.

V grobem velja, da za oddaljenosti  $L$  od odprtine, za katere velja  $F < 1$ , polje obravnavamo kot daljno polje, medtem ko  $F > 1$  pove, da moramo uklon obravnavati v Fresnelovem približku ali celo v polni obliki.

Zapišimo uklonske integrale za oba približka. Izhajajmo iz Fresnel-Kirchhoffovega integrala za točkast izvor (enačba 1.55) in zapišimo razdaljo  $r$  s koordinatama na zaslonu  $x', y'$  ter lego točke  $P$  s koordinatami  $x, y, z$  (slika 1.6).



Slika 1.6: K izračunu Fraunhoferjevega in Fresnelovega uklona. Zaslon, kjer opazujemo uklonsko sliko, je od odprtine oddaljen za  $z$ .

Zapišemo

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \quad (1.61)$$

in privzamemo, da je  $z$  razmeroma velik v primerjavi s prečnima razlikama. Potem lahko  $r$  razvijemo

$$r \approx z + \frac{(x - x')^2}{2z} + \frac{(y - y')^2}{2z}. \quad (1.62)$$

V Fraunhoferjevem približku zadošča uporaba le linearnih členov v gornjem izrazu in za Fraunhoferjev uklonski integral dobimo

$$E_P = -\frac{i}{z\lambda} \int \int E_S e^{-ik(xx' + yy')/z} dx' dy', \quad (1.63)$$

kar ni nič drugega kot Fourierova transformacija polja  $E_S$ .

V Fresnelovem približku upoštevamo tudi kvadratne člene v razvoju in dobimo

$$E_P = -\frac{i}{z\lambda} \int \int E_S e^{-ik((x-x')^2 + (y-y')^2)/2z} dx' dy'. \quad (1.64)$$

**Naloga 1.7.2** Pokaži, da je v Fraunhoferjevi uklonski sliki uklon na okrogli odprtini s premerom  $a$  podan z

$$E_P = E_0 \frac{J_1(\pi a \rho / \lambda z)}{\pi a \rho / \lambda z}, \quad (1.65)$$

kjer je  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

## 1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh

Do zdaj smo obravnavali elektromagnetno valovanje v izotropnih snoveh, v katerih je dielektričnost skalar in hitrost širjenja valovanja neodvisna od njegove smeri. V splošnem so snovi anizotropne, dielektričnost je tenzor, hitrost potovanja svetlobe skozi snov pa je odvisna od smeri razširjanja in od polarizacije valovanja.

Gostoto električnega polja v anizotropni snovi zapišemo kot

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \underline{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \mathbf{E}, \quad (1.66)$$

kjer je  $\epsilon_{ij}$  tenzor drugega reda in ima v splošnem devet komponent. V dielektričnih snoveh, v katerih ne pride do optične aktivnosti ali absorpcije, je tenzor realen in simetričen  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$ . Tak tenzor lahko vedno diagonaliziramo, torej poiščemo koordinatni sistem, v katerem je tenzor  $\underline{\epsilon}$  diagonalen. V takem koordinatnem sistemu velja

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \mathbf{E} \quad (1.67)$$

in

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_0 \epsilon_1 E_1 \\ D_2 &= \epsilon_0 \epsilon_2 E_2 \\ D_3 &= \epsilon_0 \epsilon_3 E_3. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Glavne osi sistema določajo smeri, vzdolž katerih sta jakost in gostota električnega polja vzporedni, lastne vrednosti pa ustrezajo trem lomnim količnikom  $\epsilon_i = \sqrt{n_i}$ . Kristale, za katere so vse tri vrednosti  $n_i$  različne, imenujemo optično dvoosni kristali, medtem ko sta v optično enoosnih kristalih dve lastni vrednosti enaki  $n_1 = n_2$ . Če so enake vse tri vrednosti, je snov izotropna.

### Optična indikatrisa

Poglejmo, kako se po anizotropnih snoveh širi valovanje v odvisnosti od njegove smeri in polarizacije. Preprost primer je valovanje, ki se širi vzdolž lastne osi  $z$ , polarizirano pa je vzdolž lastne osi  $x$ . Pri prehodu skozi kristal se polarizacija valovanja ohrani, lomni količnik za tak val pa je  $n_1$ . Podobno velja za val, polariziran v smeri  $y$ , za katerega je lomni količnik enak  $n_2$ . Če se valovanje širi vzdolž lastne osi  $z$ , vendar njegova polarizacija ne Sovpada z lastnima osema  $x$  ali  $y$ , dobimo po prehodu skozi kristal iz vpadnega linearno polariziranega valovanja v splošnem eliptično valovanje. Lastni komponenti namreč potujeta z različnima hitrostma, zato pride med njima do faznega zamika.

Za poljubno smer širjenja valovanja ter poljubno polarizacijo je račun bolj zapleten in je treba lomne količnike še izračunati. Pri tem si pomagamo z grafično upodobitvijo, s tako imenovano optično indikatriso (elipsoidom lomnega količnika).



Slika 1.7: Optična indikatrica oziroma elipsoid lomnega količnika. Glavne osi elipsoida sovpadajo z glavnimi osmi tenzorja  $\epsilon$ , polosi elipsoida pa so enake lomnim količnikom  $n_i$ . V primeru optično enoosnega kristala je indikatrica rotacijski elipsoid, v primeru izotropne snovi pa je optična indikatrica krogla.

Optična indikatrica je elipsoid, podan z enačbo

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1. \quad (1.69)$$

Glavne osi elipsoida sovpadajo z glavnimi osmi tenzorja  $\epsilon$ , polosi elipsoida pa so  $n_1$ ,  $n_2$  in  $n_3$ . Za val, ki se širi z valovnim vektorjem  $\mathbf{k}$ , skozi izhodišče narišemo ravnino, pravokotno na smer valovnega vektorja (slika 1.7). Presečišče ravnine in elipsoida je elipsa, katere glavni osi podata vrednosti lomnih količnikov  $n_a$  in  $n_b$  za obe lastni polarizaciji, njuni smeri pa predstavljata lastni smeri gostote električnega polja. Ker sta to lastni osi, smer jakosti električnega polja izračunamo z enačbo (1.68).

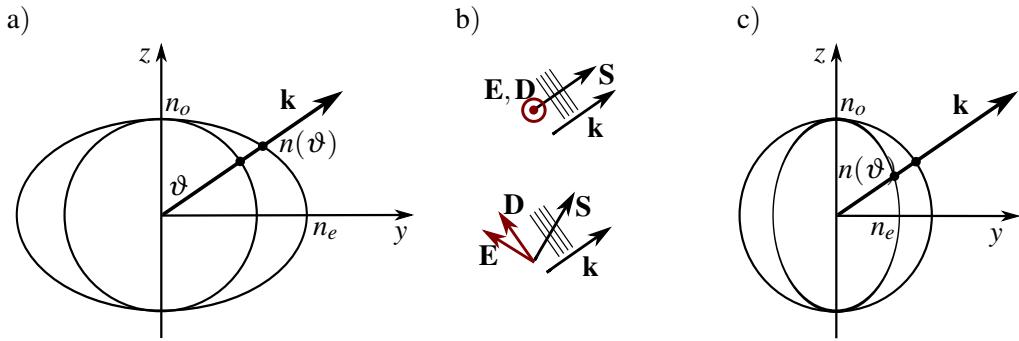
### Optično enoosni kristali

V optično enoosnih kristalih sta dve lastni vrednosti enaki in indikatrica je rotacijski elipsoid. Po dogovoru izberemo lastne vrednosti tako, da velja  $n_1 = n_2 \neq n_3$ . Za valovanje, ki se razširja v smeri  $z$ , sta lomna količnika za obe polarizacije enaka in os  $z$  imenujemo optična os. Hitrost valovanja, ki se širi vzdolž optične osi, je torej neodvisna od njegove polarizacije. Navadno vpeljemo tudi nove označke:  $n_1 = n_2 = n_o$ , ki označuje redni (*ordinary*) lomni količnik,  $n_3 = n_e$  pa izredni (*extraordinary*) lomni količnik.

Zaradi simetrije je pri izračunu lomnega količnika pomemben le kot  $\vartheta$  med valovnim vektorjem  $\mathbf{k}$  in optično osjo  $z$ . Dvema lastnima polarizacijama pripadata dva različna lomna količnika. Za lažjo predstavo oba lomna količnika skiciramo v odvisnosti od kota  $\vartheta$  (slika 1.8). Lomni količnik za žarek, ki je polariziran pravokotno na vpadno ravnino, je neodvisen od  $\vartheta$ , zato narišemo krožnico. Takemu žarku pravimo redni žarek. Žarek, ki je polariziran v vpadni ravnini, je tako imenovan izredni žarek. Pripadajoč lomni količnik je odvisen od kota  $\vartheta$  in ga izračunamo iz sledeče enačbe elipse s polosema  $n_o$  in  $n_e$ :

$$\frac{1}{n^2(\vartheta)} = \frac{\cos^2 \vartheta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{n_e^2}. \quad (1.70)$$

Opazimo, da se krožnica in elipsa dotikata ravno na osi  $z$ . Takrat se valovanje širi vzdolž optične osi in lomna količnika sta za obe polarizacije enaka  $n_o$ .



Slika 1.8: V optično enoosnih kristalih je lomni količnik odvisen od smeri valovnega vektorja in njegove polarizacije. a) primer pozitivno anizotropne snovi ( $n_e > n_o$ ). b) Redni žarek je polariziran pravokotno na vpadno ravnino. Zanj velja, da je  $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$  in  $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$ . Izredni žarek je polariziran v vpadni ravnini. Smer širjenja žarka  $\mathbf{S}$  ni vzporedna z valovnim vektorjem  $\mathbf{k}$ , prav tako valovne fronte niso pravokotne nanjo. c) Primer negativno anizotropne snovi ( $n_e < n_o$ ).

Navadno sta pri ravnem valu vektorja  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{D}$  vzporedna, prav tako  $\mathbf{k}$  in  $\mathbf{S}$ . Žarek se širi v smeri valovnega vektorja, valovne fronte pa so pravokotne nanj. To velja tudi za redni žarek v anizotropnih snoveh. Izredni žarek pa ima, kot že ime nakazuje, "izredne" lastnosti. Vektorja  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{D}$  nista vzporedna, zato tudi valovni vektor  $\mathbf{k}$  ni vzporen toku energije oziroma Poyntingovemu vektorju  $\mathbf{S}$  (slika 1.8 b). Žarek, ki ga vidimo, torej potuje v smeri, ki ni enaka smeri valovnega vektorja. Smer Poyntingovega vektorja določimo kot normalo na elipso pri kotu  $\vartheta$ .

### Dvojni lom

Ko vpade žarek na anizotropno snov, se lomi. Privzemimo, da je lomni količnik snovi, iz katere valovanje prehaja v anizotropen kristal, enak 1. Vemo, da je hitrost valovanja v snovi – in s tem tudi kot, pod katerim se lomi – odvisna od polarizacije valovanja. V splošnem dobimo dva lomljena žarka z različnima polarizacijama, kar da ime pojavu: dvolomnost (slika 1.9). Da zadostimo ohranitvi faze pri prehodu, moramo popraviti tudi lomni zakon (enačba 1.42).

Za redni val s TE polarizacijo (pravokotno na vpadno ravnino) velja navadni lomni zakon, pri čemer je lomni količnik snovi enak rednemu lomnemu količniku  $n_o$ :

$$\sin \vartheta_1 = n_o \sin \vartheta_o. \quad (1.71)$$

Za izredni val s TM polarizacijo (električna poljska jakost leži v vpadni ravnini) pa velja

$$\sin \vartheta_1 = n(\vartheta_e) \sin \vartheta_e, \quad (1.72)$$

pri čemer  $n(\vartheta_e)$  izračunamo iz enačbe (1.70).

Kadar vpada valovanje pravokotno na izotropno snov, se žarek ne lomi. V dvolomnih snoveh pa lahko tudi pri pravokotnem vpadu pride do razklona žarkov (slika 1.9 b). Kadar je optična os nagnjena glede na vpadnico, sta valovna vektorja obeh prepuščenih žarkov sicer vzporedna valovnemu vektorju vpadnega žarka ( $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_o \parallel \mathbf{k}_e$ ), razlikujejo pa se smeri Poyntingovih vektorjev ( $\mathbf{S}_1 \parallel \mathbf{S}_o \nparallel \mathbf{S}_e$ ). Ob prehodu skozi plast anizotropne snovi tako dobimo dva vzporedna, a razmaknjena žarka z medsebojno pravokotnimi polarizacijami. Enoosne kristale, odrezane pod primernim kotom in prave dolžine, zato lahko uporabimo kot polarizacijski delilnik žarkov.



Slika 1.9: Dvojni lom. a) Pri poševnem vpadu na anizotropno snov se valovanje loči na dva različno polarizirana žarka. b) Tudi pri pravokotnem vpadu se žarka ločita, če je optična os pod poljubnim kotom glede na normalo mejne ravnine. Valovni vektorji so v tem kolinearni, Poyntingovi vektorji pa imajo različne smeri.

## 2. Koherenca

V tem poglavju bomo spoznali koherenco. To je lastnost valovanja, ki je tesno povezana s pojavom interference. Ohlapno pravimo, da je koherentno tisto valovanje, s katerim se posrečijo interferenčni poskusi.

### 2.1 Youngov poskus

Interferenčnih pojavov ni mogoče opazovati z vsakim svetlobnim izvorom. Da bi to razumeli, si oglejmo interference valovanja, ki vpada na dve ozki reži (tako imenovani Youngov poskus<sup>1</sup>). Navadno predpostavimo, da sta obe reži osvetljeni z istim ravnim valom. Delni valovanji, ki izhajata iz rež, imata tako ves čas poskusa enako polarizacijo, enako frekvenco in enako fazno razliko. Zaradi različnih dolžin poti obeh delnih valovanj od reže do dane točke na zaslonsu dobimo na oddaljenem zaslonsu interferenčni vzorec (slika 2.1). Vendar dobimo interference le v primeru, ko je faza valovanja, ki vpada na reži, konstantna. Svetloba s konstantno fazo je koherentna in jo dobimo, na primer, iz kvalitetnega laserja. Svetloba iz običajnih svetil ne da interferenčnega vzorca, zato zanjo pravimo, da ni koherentna.



Slika 2.1: Youngov poskus na dveh režah. Le če je vpadno valovanje koherentno (levo), dobimo na zaslonsu interferenčni vzorec. Nekoherentno valovanje s spremenljivo fazo (desno) ne da interferenčnega vzorca.

Svetloba navadnih svetil, na primer plinskih razelektritvenih cevi, je zaradi vrste nastanka kaotične narave. Atomi sevajo neodvisno, zato se faza izsevanega valovanja spreminja. Približno konstantna je le znotraj nekega karakterističnega časa. Če je pri interferenčnem poskusu karakteristični čas spremicanja faze krajši od zakasnitve med valovanjem, ki nastane zaradi različno dolgih poti, dobimo na danem mestu zaslona izmenično konstruktivno in destruktivno interference. Ker je čas spremicanja praviloma bistveno krajši od časa opazovanja interference, utripanje svetlobe na zaslonsu ni vidno. Interferenčni poskus se ne posreči zaradi majhne časovne koherence, karakterističnemu času spremicanja faze pa rečemo koherenčni čas  $t_c$ . Časovno koherenco bomo natančneje obravnavali v razdelku (2.3), zaenkrat povejmo le, da je časovna koherenca vezana na fazno razliko med dvema točkama, ki ležita vzdolž smeri širjenja valovanja.

<sup>1</sup>Angleški znanstvenik Thomas Young, 1773–1829.

Poleg časovne koherence na interferenčno sliko pomembno vpliva tudi prostorska koherenca, ki je posledica končne dimenzijske svetlobe. Svetloba, ki vpada na reži z različnih delov svetlobe, ima namreč različno fazo zaradi različnih dolžin poti od svetlobe do rež. Ta faza se prišteje fazni razlike zaradi različno dolgih poti od rež do zaslona, zaradi česar se na zaslolu interferenčne proge nekoliko premaknejo. Če je fazna razlika žarkov iz različnih delov svetlobe večja od fazne razlike za režami, se celotna interferenčna slika na zaslolu izpovpreči. Interferenco pri Youngovem poskusu dobimo, kadar sta reži razmiknjeni le toliko, da je povprečna fazna razlika manjša od  $2\pi$ . Največjemu prečnemu razmiku, ki še da interferenco, rečemo prečna koherenčna razdalja  $d_c$ . Prostorska koherenca, ki jo bomo podrobneje spoznali v razdelku (2.5), je torej vezana na fazno razliko med dvema točkama, ki ležita prečno na smer širjenja valovanja.

Poudarimo še enkrat, da je pojem koherenčnosti statističen. Če je koherenčni čas  $t_c$  dolg v primerjavi s časom opazovanja, se vedno seštevajo amplitudne valovanje in dobimo interferenčno sliko. Ta se slučajno spreminja z značilnim časom  $t_c$ . Če pa so razlike poti večje od  $ct_c$  ali razmik rež večji od  $d_c$ , gledamo le povprečno sliko in interferenčne proge izginejo.

## 2.2 Koherenca navadnih svetil

Obravnavajmo plinsko razelektritveno cev in z ustreznim filtrom izberimo eno samo spektralno črto. Ta črta naj ima osrednjo frekvenco  $v_0$  in končno frekvenčno širino  $\delta v$ , ki je kombinacija naravne širine in razširitve zaradi trkov med atomi ter Dopplerjevega pojava (glej poglavje 5.8). Privzemimo, da je glavni prispevek k razširitvi spektralne črte zaradi medatomskih trkov, razširitev, povezano z Dopplerjevim pojavom, pa zanemarimo.

Celotna izsevana svetloba je vsota delnih valov, ki izhajajo iz posameznih atomov in so med seboj neodvisni. Vsak delni val ohranja konstantno fazo med dvema trkoma, to je v časovnem intervalu  $t_c$ . Valovni paket dolžine  $t_c$  mora vsebovati frekvence v pasu  $\Delta\omega$ , za katerega velja  $t_c\Delta\omega \sim 1$ . Koherenčni čas je torej kar reda velikosti obratne vrednosti spektralne širine svetlobe. Povsem monokromatsko valovanje bil imelo neskončen koherenčni čas in bi bilo popolno koherentno.

Zapišimo še izsevano polje takega svetila. Jakost električnega polja v izbrani točki prostora je vsota delnih valov, ki izvirajo iz raznih delov izvora. Vsak atom v izvoru, naj jih bo  $N$ , seva neodvisno, zato so tudi delna valovanja med seboj neodvisna. Posamična valovanja ohranjajo konstantno fazo v času med dvema trkoma atoma,  $t_c$ . Zaradi enostavnosti privzemimo, da so amplitudne  $E_1$  in polarizacije izsevanih polj posameznih atomov enake. Električno poljsko jakost  $E$  v izbrani točki prostora lahko zapišemo kot vsoto posameznih prispevkov

$$E = E_1 \sum_{n=1}^N e^{i\phi_n(t)}. \quad (2.1)$$

kjer se faza polja  $\phi_n(t)$ , ki ga izseva posamezni atom, naključno spremeni ob trku z drugim atomom. Povprečje vsote polj je nič, povprečni kvadrat skupnega polja, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka, pa je  $NE_1^2$ . Zaradi slučajnosti faz je slučajna tudi faza celotnega polja in se gotovo povsem spremeni v času, ko se spremeni faza posameznih prispevkov, to je  $t_c$ . S tako svetlobo bomo videli interferenco na režah, če bo razlika poti delnih valovanj manjša od  $ct_c$ .

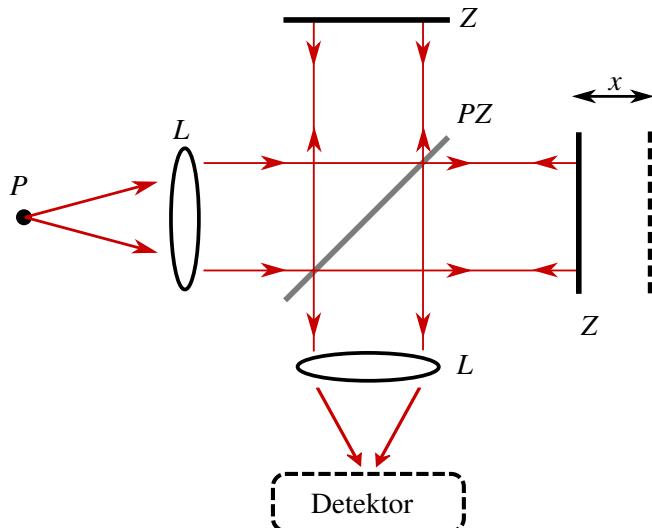
Oglejmo si izračun na primeru. Imejmo  $N = 100$  neodvisnih atomov, ki se jim faza naključno spreminja s karakterističnim časom  $t_c = 10/v$ , kjer je  $v$  frekvanca valovanja. Na sliki (2.2) sta prikazana časovna poteka amplitude  $E$  (enačba 2.1) in  $|E|^2$ , ki je sorazmeren z intenzitetu svetlobe. Za primerjavo je prikazan tudi ravni val  $E = \sqrt{N}E_1 e^{-i\omega t}$  s konstantno fazo in njegova intenziteta. Intenziteta ravnega vala je konstantna, medtem ko je povprečna intenziteta svetlobe navadnega svetila približno konstantna le znotraj  $t_c$ .



Slika 2.2: Zgoraj: shematski prikaz električne poljske jakosti ravnega vala s konstantno fazo (rdeča črta) in električne poljske jakosti navadnega svetila (modra črta) kot funkcije časa. Faza polja se naključno spreminja s karakterističnim časom  $t_c$ . Spodaj: intenziteta ravnega vala (rdeča črta) in intenziteta svetlobe navadnega svetila (modra črta) kot funkciji časa. Modra črtkana črta je povprečna intenziteta  $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t+t')E^*(t+t')dt'$  s časom integracije  $T = t_c$ .

### 2.3 Časovna koherenca

Časovno koherenco je najlažje obravnavati z Michelsonovim interferometrom<sup>2</sup>, ki je prikazan na sliki (2.3).



Slika 2.3: Michelsonov interferometer. Svetlobo iz izvora  $P$  usmerimo preko kolimacijske leče ( $L$ ) na polprepustno zrcalo ( $PZ$ ), s čimer jo razdelimo na dva snopa. S premikom enega zrcala ( $Z$ ) en delni žarek zakasnimo. Interferenco opazujemo na detektorju.

<sup>2</sup>Ameriški fizik in nobelovec Albert Abraham Michelson, 1852–1931.

Valovanje iz točke  $P$  na polprepustnem zrcalu razdelimo na dva delna snopa, nato enega s premikanjem zrcala zakasnimo za  $\tau = 2x/c$ . S kolimacijsko lečo dosežemo, da je čim več žarkov, ki izhajajo iz  $P$ , vzporednih z osjo interferometra. Dokler je zakasnitev  $\tau$  manjša od koherenčnega časa  $t_c$ , dobimo na detektorju interferenčne vrhove in doline. Pri zakasnitvah, ki so večje od koherenčnega časa, ni stalne fazne povezave, interferenčna slika se spreminja in v daljših časih izpovpreči. Zapišimo to ugotovitev še matematično.

Svetlobni tok na detektorju je sorazmeren s kvadratom električne poljske jakosti obeh delnih valovanj

$$|E_d(t)|^2 = |E(t) + E(t + \tau)|^2 = |E(t)|^2 + |E(t + \tau)|^2 + 2\Re E(t)E^*(t + \tau). \quad (2.2)$$

Zakasnitev  $\tau$  je določena s premikom pomičnega zrcala,  $\tau = 2x/c$ . Navadno opazujemo v času  $T$ , ki je dolg v primerjavi s koherenčnim časom, zato povprečimo po času

$$\begin{aligned} \langle |E_d|^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |E_d(t)|^2 dt \\ &= 2\langle |E|^2 \rangle + 2\Re \langle E(0)E^*(\tau) \rangle = 2\langle |E|^2 \rangle + 2\Re G(\tau). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Prvi člen je vsota povprečnih svetlobnih tokov obeh delnih snopov. Privzeli smo, da je polje v povprečju stacionarno in je zato povprečje neodvisno od izbire časovnega intervala. Drugi člen opisuje interferenco. Pri tem smo vpeljali časovno avtokorelacijsko funkcijo električnega polja

$$G(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t + \tau) dt. \quad (2.4)$$

Za majhne zakasnitve  $\tau$  je  $|G(\tau)| \approx |G(0)| = 1$  in na detektorju zaznamo interferenco. Za zakasnitve  $\tau$ , ki so precej večje od koherenčnega časa  $t_c$ , sta polji  $E(0)$  in  $E(\tau)$  statistično neodvisni in povprečje produkta je enako produktu povprečij. Ker je  $\langle E(t) \rangle = 0$ , pri velikih zakasnitvah  $\tau$  interferenčni člen izgine in svetlobni tok je enak vsoti tokov posameznih delnih snopov.

Priročno je vpeljati normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)}. \quad (2.5)$$

Za povsem koherentno valovanje je  $|g(\tau)| = 1$ , za povsem nekoherentno valovanje je  $|g(\tau)| = 0$ , za delno koherentna pa  $0 < |g(\tau)| < 1$ . Praviloma se vrednost  $|g(\tau)|$  z naraščajočim  $\tau$  zmanjšuje, saj postaja valovanje za velike časovne zamike vedno manj korelirano. Ohlapno povedano je koherenčni čas zakasnitev, pri kateri postane vrednost avtokorelacijske funkcije majhna. Koherenčni čas  $t_c$  pa lahko tudi bolj natančno definiramo z normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$t_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 d\tau. \quad (2.6)$$

Zakasnitev delnih valov je pogosto posledica različno dolgih optičnih poti, zato pogosto namesto koherenčnega časa uporabljamo koherenčno dolžino  $l_c = ct_c$ . Pri tem moramo paziti, da koherenčne dolžine, ki jo dobimo iz časovne koherence, ne zamešamo s prečno koherenčno razdaljo, o kateri bomo govorili kasneje.

**Naloga 2.3.1** Pokaži, da v navedenih avtokorelacijskih funkcijah  $g(\tau)$  spremenljivka  $t_c$  ustreza koherenčnemu času, kot je definiran v enačbi (2.6), in izračunaj  $|g(t_c)|$  za oba primera.

$$g(\tau) = \begin{cases} \exp(i\omega_0\tau - |\tau|/t_c), \\ \exp(i\omega_0\tau - \pi\tau^2/2t_c^2), \end{cases} \quad (2.7)$$

V razdelku (5.8) bomo spoznali, da sta to avtokorelacijski funkciji za svetlobo z Lorentzovim spektrom (razširitev spektralne črte zaradi trkov) in Gaussovim spektrom (Dopplerjeva razširitev).

Poglejmo še nekaj značilnih koherenčnih dolžin. Koherenčna dolžina svetlobe, izsevana iz črnega telesa, je  $l_c = ct_c \approx \hbar c/k_B T$  (glej nalogo 2.4.3). Svetloba s Sonca ( $T \approx 6000$  K) ima tako koherenčno dolžino zgolj  $\sim 0,4 \mu\text{m}$ . Svetloba, izsevana iz LED sijalk, ima koherenčno dolžino  $\sim 20 - 100 \mu\text{m}$ . Če želimo povečati koherenčno dolžino taki svetlobi, jo moramo usmeriti na ustrezne filtre in ji s tem zmanjšati spektralno območje. Ožje spektralno območje ima na primer živosrebrna svetilka, zato je koherenčna dolžina svetlobe za izbrano spektralno črto do okoli 50 cm. Koherenčna dolžina laserjev z ozko spektralno črto je tipično okoli 100 m, v nekaterih vlakenskih laserjih s širino spektralne črte nekaj kHz pa koherenčna dolžina presega 100 km.

## 2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom

Spoznali smo, da je monokromatski ravni val povsem koherenten in njegov korelacijski čas neskončno velik. Oglejmo si še koherenco elektromagnetnega vala, ki traja čas  $T$  in je sestavljen iz več monokromatskih valov. Jakost električnega polja valovanja razvijemo v Fourierovo vrsto:

$$E(t) = \sum_n A_n e^{-in\Delta\omega t}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.8)$$

kjer amplituda  $A_n$  označuje delež polja pri frekvenci  $\omega = n\Delta\omega$ . Čas  $T$ , ki označuje čas opazovanja svetlobnega polja, mora biti bistveno daljši od  $t_c$ . Pravzaprav bi morali napraviti limito  $T \rightarrow \infty$ , da bi rezultat ne bil odvisen od konkretnega vzorca svetlobnega polja. Izračunamo amplitudo  $A_n$

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{in\Delta\omega t} dt. \quad (2.9)$$

Kvadrat  $|A_n|^2$  je sorazmeren gostoti svetlobnega toka pri frekvenci  $\omega = n\Delta\omega$ . Zdaj lahko vpeljemo spekter, to je intenziteto svetlobnega toka pri frekvencah med  $\omega$  in  $\omega + \Delta\omega$ . Spekter  $S(\omega)$  torej izračunamo tako, da jakost svetlobnega toka pri  $\omega$  delimo s frekvenčnim intervalom  $\Delta\omega$ . Spekter je potem<sup>3</sup>

$$S(\omega) = \frac{|A_n|^2}{\Delta\omega} = \frac{T}{2\pi} |A_n|^2. \quad (2.10)$$

Vstavimo zdaj še amplitudo  $A_n$  (enačba 2.9) in dobimo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \int \int_{-T/2}^{T/2} E(t) E^*(t') e^{-i\omega(t'-t)} dt dt' \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-T/2}^{T/2} E(t) E^*(t+\tau) dt, \quad (2.12)$$

<sup>3</sup>Gostota svetlobnega toka je  $j = \epsilon\epsilon_0c|E|^2/2$  z enotami  $\text{W/m}^2$ . Zaradi poenostavitev bomo namesto  $j$  pogosto pisali intenziteto  $I = |E|^2$ , konstantne člene pa dodali le, če bomo rabili točno numerično vrednost.

kjer smo uvedli novo spremenljivko  $\tau = t' - t$ . Integral po  $t$  da ravno korelacijsko funkcijo  $G(\tau)$ . Ker je  $T \gg t_c$ , je korelacijska funkcija na mejah integracije po  $\tau$  nič, zato lahko meje raztegnemo do neskončnosti. S tem dobimo iskano zvezo, tako imenovani Wiener-Hinčinov teorem<sup>4</sup>

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.13)$$

Spekter svetlobe je torej Fourierova transformacija avtokorelacijske funkcije svetlobnega polja.

Vpeljemo lahko tudi normirani spekter

$$s(\omega) = \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} = \frac{S(\omega)}{G(0)}, \quad (2.14)$$

za katerega seveda velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) d\omega = 1. \quad (2.15)$$

Sledi

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \iff g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.16)$$

Iz Wiener-Hinčinovega teorema (enačba 2.13) neposredno sledi, da je koherenca povezana s spektrom in koherenčni čas  $t_c$  s spektralno širino svetlobe. Spektralno širino vpeljemo kot

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2 d\omega}. \quad (2.17)$$

Iz gornje definicije za spektralno širino in definicije za koherenčni čas (enačba 2.6) sledi, da je spektralna širina ne glede na obliko spektra obratno sorazmerna s koherenčnim časom (glej nalogo 2.4.1):

$$\gamma = \frac{1}{t_c}. \quad (2.18)$$

**Naloga 2.4.1** Iz definicij za spektralno širino  $\gamma$  (enačba 2.17) in koherenčni čas  $t_c$  (enačba 2.6) pokaži, da je spektralna širina obratno sorazmerna s koherenčnim časom (enačba 2.18) ne glede na obliko spektra. Namig: Uporabi Parsevalov teorem, ki pravi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.19)$$

kjer je

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} d\tau \quad (2.20)$$

Fouriereva transformiranka funkcije  $f(t)$ .

<sup>4</sup>Ameriški matematik Norbert Wiener, 1894–1964, in ruski matematik Aleksander Jakovljevič Hinčin, 1894–1959.

Za zgled vzemimo konkreten primer, ki je predstavljen na sliki (2.2). Na sliki (2.4) sta prikazana pripadajoč spekter in ustrezna avtokorelacijska funkcija. Ker so trki med atomi naključni, je avtokorelacijska funkcija eksponentno pojemanjača

$$G(t) = G_0 e^{-i\omega_0 t} e^{-t/t_c}, \quad (2.21)$$

spekter take svetlobe pa je Lorentzove oblike (glej nalogo 2.4.2)

$$S(\omega) = G_0 \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \quad (2.22)$$

kjer je  $\gamma = 1/t_c$  spektralna širina in  $G_0$  do konstante natančno intenziteta svetlobe. Točke na grafih predstavljajo spekter in izračunano avtokorelacijsko funkcijo za integracijski čas  $T = 100t_c$ . Za primerjavo sta z rdečo krivuljo prikazana tudi pričakovani spekter in avtokorelacijska funkcija (enačba 2.22). Zaradi končnega časa  $T$  pri izračunu povprečja se izmerjeni spekter nekoliko razlikuje od pričakovane vrednosti.



Slika 2.4: Spekter in avtokorelacijska funkcija valovanja s slike (2.2)

---

**Naloga 2.4.2** Imejmo dve vrsti svetlobe. Prva naj ima avtokorelacijsko funkcijo, ki je eksponentno pojemanjača, druga pa ima avtokorelacijsko funkcijo Gaussove oblike (enačbi 2.7). Pokaži, da sta njuna spektra oblike

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad \text{in} \quad s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\pi\gamma^2}\right), \quad (2.23)$$

kjer je  $\gamma = 1/t_c$  spektralna širina.

---

Spektralne črte atomov so pogosto Lorentzove oblike, kar je posledica eksponentnega razpada stanj (naravna širina). Dodatno se spektralne črte razširijo zaradi trkov med atomi, vendar tudi to vodi do Lorentzove oblike spektra. V plinih pa je pogostokrat prevladujoča razširitev črt zaradi Dopplerjevega pojava (glej razdelek 5.8). Spekter Dopplerjevo razširjene svetlobe je, kot bomo videli v nadaljevanju, Gaussove oblike. V tem primeru iz enačbe (2.13) sledi, da je tudi avtokorelacijska funkcija Gaussove oblike.

**Naloga 2.4.3** Numerično pokaži, da je koherenčni čas svetlobe, ki jo oddaja črno telo s temperaturo  $T$ , približno enak  $t_c \approx \hbar/k_B T$ . Normaliziran spekter sevanja črnega telesa zapišemo kot Planckov spekter

$$s(\omega) = \frac{15}{\pi^4} \frac{\hbar^4 \omega^3}{(kT)^4} / \left( e^{\hbar\omega/kT} - 1 \right) \quad \text{za } \omega > 0, \text{ sicer } s(\omega) = 0. \quad (2.24)$$



### Fouriereva spektroskopija

V prejšnjem razdelku smo videli, da časovno avtokorelacijsko funkcijo merimo z Michelsonovim interferometrom. Dobljena povezava med avtokorelacijo in spektrom je osnova za Fourierevo spektroskopijo, ki ima nekatere pomembne prednosti pred drugimi metodami in se danes precej uporablja, posebej v infrardečem področju.

## 2.5 Prostorska koherenca

Vrnimo se k Youngovem poskusu in obravnavi interference na dveh ozkih režah. Osvetljujmo zdaj reži s svetilom končnih razsežnosti. Svetilo naj še vedno sveti skoraj enobarvno svetlobo in naj bo na simetrali med režama, kot kaže slika (2.5).



Slika 2.5: Shema interferenčnega eksperimenta z razsežnim svetilom. Svetilo velikosti  $R$  postavimo v izhodišče koordinatnega sistema, na zaslonu  $B$  pa opazujemo sliko, ki nastane zaradi interference na dveh režah v ravnini  $A$ . Zaradi končne dimenzije svetila so interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Če je razlika poti za žarke z roba reda velikosti valovne dolžine  $\lambda$  ali več, se celotna interferenčna slika na zaslonu  $B$  izpovpreči.

Žarka, ki izhajata iz sredine svetila (polna črta), opravita do rež v ravnini  $A$  enako dolgo pot in povzročita na zaslonu  $B$  interferenčne proge. Žarka, ki izhajata iz roba izvora (prekinjena črta), imata do rež različno dolgo pot, zato nastane med njima fazna razlika že do ravnine  $A$ , ki se prišteje fazni razlici do ravnine  $B$ . Interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, so premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Ker so žarki z roba pri našem svetilu statistično neodvisni od žarkov iz sredine, z njimi ne interferirajo. Celoten interferenčni vzorec je zato kar vsota interferenčnih vzorcev žarkov iz različnih delov svetila. Če je razlika poti za žarke z roba reda velikosti valovne dolžine  $\lambda$  ali več, se celotna interferenčna slika na zaslonu  $B$  izpovpreči.

S slike razberemo, da velja za razdaljo med režama  $d$ , pri kateri interferenčne proge izginejo, približno

$$\delta s = d \sin \varphi \approx d \frac{R}{z} \sim \lambda \Rightarrow d_c \sim \frac{z\lambda}{R}, \quad (2.25)$$

Kjer  $d_c$  imenujmo prečno koherenčno razdaljo. Pogosto uporabljajo tudi pojem koherenčne ploskve, to je območja, v katerem je fazna razlika v povprečju konstantna. Velikost te ploskve je približno  $d_c^2$ . V območju koherenčne ploskve so tudi valovne fronte približno gladke.

Zapišimo gornje ugotovitve nekoliko bolj natančno. Na zaslonu  $B$  izmerimo gostoto svetlobnega toka, ki je sorazmerna povprečju kvadrata električne poljske jakosti valovanj, ki izhajata iz obeh odprtin

$$\begin{aligned} \langle |E_d|^2 \rangle &= \langle |K_1 E_1 + K_2 E_2|^2 \rangle \\ &= |K_1|^2 \langle |E_1|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |E_2|^2 \rangle + 2 \Re K_1 K_2^* \langle E_1(0) E_2^*(\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pri tem je  $\tau = d \sin \vartheta / c$  zakasnitev valovanja iz druge odprtine glede na valovanje iz prve. Faktorja  $K_1$  in  $K_2$  sta določena z uklonom na posameznih odprtinah. Interferenčna slika je vsebovana v podobnem členu kot pri Michelsonovem interferometru, le da imamo v tem primeru namesto avtokorelacijske funkcije navzkrižno korelacijsko funkcijo polj  $E_1$  in  $E_2$  iz obeh odprtin.

Kako je interferenčni člen povezan z lastnostmi svetila, brez težav doženemo v izbranem primeru skoraj enobarvne svetlobe z osrednjo frekvenco  $\omega$ . Tedaj lahko za zakasnitve  $\tau$ , ki so krajše od koherenčnega časa, zapišemo

$$E_2(\tau) = E_2(0) e^{-i\omega\tau} \quad (2.27)$$

in

$$\langle E_1(0) E_2^*(\tau) \rangle = \langle E_1(0) E_2^*(0) \rangle e^{i\omega\tau} = J(P_1, P_2) e^{i\omega\tau}. \quad (2.28)$$

Zadnji člen  $\Re e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) = \cos(kd \sin \vartheta)$  da interferenčne proge za koherentno osvetlitev zaslona  $A$ , povprečje produkta polj v odprtinah ob istem času  $J(P_1, P_2) = \langle E(P_1, 0) E^*(P_2, 0) \rangle$  pa meri stopnjo prečne koherence med obema odprtinama. Od velikosti tega člena je odvisen kontrast interferenčnih prog. Izračunajmo ga.

Polje v posamezni odprtini je vsota prispevkov iz celega izvora.

$$E(P_j) = -\frac{i}{\lambda} \int E(\xi, \eta) \frac{e^{iks_j}}{s_j} d\xi d\eta. \quad (2.29)$$

Pri tem je  $s_j$  razdalja med točko  $(\xi, \eta)$  na izvoru in točko  $P_j(x_j, y_j)$  na reži v ravni A (glej sliko 2.5). Faktor pred integralom  $-i/\lambda$  smo dobili iz uklonske teorije (enačba 1.55). Tako je

$$J(P_1, P_2) = \frac{1}{\lambda^2} \int \int \langle E(\xi, \eta) E^*(\xi', \eta') \rangle \frac{e^{ik(s_1 - s'_2)}}{s_1 s'_2} d\xi d\eta d\xi' d\eta'. \quad (2.30)$$

V našem svetilu sevajo atomi neodvisno. Valovanji iz dveh točk svetila, ki sta razmaknjeni za več kot  $\lambda$ , sta tako neodvisni in povprečje njunega produkta je enako nič. Tako približno velja

$$\langle E(\xi, \eta) E^*(\xi', \eta') \rangle = \frac{\lambda^2}{\pi} \cdot \delta(\xi - \xi', \eta - \eta') \langle |E(\xi, \eta)|^2 \rangle. \quad (2.31)$$

Faktor  $\lambda^2/\pi$  poskrbi za ustrezno normalizacijo. Naj bo oddaljenost svetila od zaslona  $A$  mnogo večja od dimenzije svetila ( $z \gg R$ ), tako da lahko imenovalec pod integralom v izrazu (2.30) nadomestimo z  $z^2$  in postavimo pred integral. Dobimo

$$J(P_1, P_2) = \frac{1}{\pi z^2} \int \langle |E(\xi, \eta)|^2 \rangle e^{ik(s_1 - s_2)} d\xi d\eta. \quad (2.32)$$

Dobljeni izraz lahko še nekoliko poenostavimo, če razvijemo  $s_1$  in  $s_2$  do drugega reda:

$$s_j = \sqrt{z^2 + (x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2} \approx z + \frac{(x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2}{2z}, \quad (2.33)$$

kjer sta  $(x_j, y_j)$  koordinati točke  $P_j$ . Pišimo še  $\langle |E(\xi, \eta)|^2 \rangle = I(\xi, \eta)$ , ki je do konstante natančno enak intenziteti valovanja, ter  $x_2 - x_1 = \Delta x$  in  $y_2 - y_1 = \Delta y$ . S tem dobimo znani rezultat, tako imenovani van Cittert-Zernikov teorem<sup>5</sup>

$$J(\Delta x, \Delta y) = \frac{e^{-i\phi}}{\pi z^2} \int I(\xi, \eta) e^{ik \frac{\Delta x \xi + \Delta y \eta}{z}} d\xi d\eta. \quad (2.34)$$

Faza

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda z} [(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)] \quad (2.35)$$

meri skupni premik interferenčnih prog, do katerega pride, kadar svetilo ni na isti osi kot odprtini v zaslonu. Kadar ležijo svetilo in odprtini v zaslonu  $A$  simetrično na isti osi, je faza  $\phi$  enaka nič.

Smiselno je vpeljati še normalizirano prečno prostorsko korelacijsko funkcijo

$$j(\Delta x, \Delta y) = \frac{J(\Delta x, \Delta y)}{J(0, 0)} = \frac{e^{-i\phi} \int I(\xi, \eta) \exp[ik(\Delta x \xi + \Delta y \eta)/z] d\xi d\eta}{\int I(\xi, \eta) d\xi d\eta}. \quad (2.36)$$

Dobljeni rezultat si je vredno nekoliko ogledati. Prečno prostorsko korelacijsko funkcijo  $J(P_1, P_2)$ , ki določa kontrast interferenčnih prog, smo izrazili kot 2-D Fourierovo transformacijo intenzitete svetlobe na samem svetilu (enačba 2.34). Ob tem se spomnimo, da velja podobna zveza med električno poljsko jakostjo v osvetljeni odprtini in njenega Fraunhoferjevo uklonsko sliko (enačba 1.63), pri čemer so količine, ki nastopajo v obeh zvezah, povsem različne. Različna je tudi veljavnost obeh: medtem ko je Fraunhoferjeva uklonska formula veljavna le v veliki oddaljenosti, za bližje odprtine pa je treba uporabiti Fresnelov izraz (enačba 1.64), je rezultat za  $J(P_1, P_2)$  veljaven v obeh območjih.

Ker je velikost svetila končna,  $J(P_1, P_2)$  pri dovolj veliki razdalji med točkama  $P_1$  in  $P_2$  gotovo pade na nič. Največja razdalja, do katere je  $J(P_1, P_2)$  še različna od nič, je ravno prečna koherenčna razdalja  $d_c$ , ustrezna ploskev pa je koherenčna ploskev  $S_c$ . Iz izraza za koherenčno razdaljo (enačba 2.25) jo lahko ocenimo

$$S_c \sim \frac{(\lambda z)^2}{S_0} \sim \frac{\lambda^2}{\Omega_0}, \quad (2.37)$$

kjer je  $S_0$  površina svetila,  $\Omega_0$  pa prostorski kot, pod katerim je videti svetilo v ravnini  $A$ .

---

<sup>5</sup>Nizozemski fizik Pieter Hendrik van Cittert, 1889–1959, in nizozemski fizik in nobelovec Frits Zernike, 1888–1966.

Oglejmo si primer. Naj bo svetilo v obliki kroga s polmerom  $R$ , obe odprtini v zaslonu naj imata koordinati  $y$  enaki nič, razmik med režama v smeri  $x$  pa naj bo  $d$ . Za prečno korelacijsko funkcijo dobimo iz enačbe (2.34)

$$J(0, \Delta y) = 2 \frac{R^2 I_0}{z^2} \frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z}, \quad (2.38)$$

kjer je  $J_1(x)$  Besselova funkcija. V ničlah Besselove funkcije pade prečna korelacijska funkcija  $J$  na nič in interferenčnega vzorca ne vidimo. Za prečno koherenčno razdaljo je zato smiselno vzeti ravno prvo ničlo, to je pri

$$d_c \approx 3,83 \frac{z}{kR} = 0,61 \frac{\lambda z}{R}. \quad (2.39)$$

Doslej smo obravnavali le valovanje v središču interferenčne slike na zaslonu  $B$ , to je pri tako majhnih kotih  $\vartheta$ , da je zakasnitev manjša od koherenčnega časa. Pri večjih kotih moramo upoštevati še vpliv končnega koherenčnega časa, zaradi česar se kontrast interferenčnih prog še dodatno zmanjšuje. Interferenčna slika je tako produkt časovnega in prostorskega dela.

V primeru dveh zelo tankih rež z razmikom  $d$  dobimo na zaslonu  $B$  uklonske vrhove. Za nekaj različnih razmikov med odprtinama  $d$  je intenziteta svetlobe na zaslonu prikazana na sliki (2.6). Če je  $d \ll \lambda z/R$  (slika a), je modulacija interferenčnih prog v sredini popolna in se zaradi končnega koherenčnega časa zmanjšuje le pri večjih kotih  $\vartheta$ . Pri nekaj večjem razmiku (slika b) tudi v sredini kontrast ni več popoln. Obenem se interferenčne proge zgostijo. Kadar je  $d \approx 3,83 z/kR$ , dosežemo prvo ničlo Besselove funkcije  $J_1(x)$  in interferenčni vzorec prvič izgine (slika c). Takrat je razdalja med režama ravno enaka koherenčni razdalji valovanja. Pri še večjih razmikih (slika d) je Besselova funkcija negativna in ponovno dobimo interferenčne proge, vendar so slabše izražene in z nasprotno fazo, kar nam da v sredini temno progno.



Slika 2.6: Interferenčna slika na zaslonu  $B$  za različne vrednosti razmikov med odprtinama: a)  $d = z/kR$ , b)  $d = 2z/kR$ , c)  $d = 3,832z/kR$  in d)  $d = 5,136z/kR$ . Z večanjem razdalje med režama se proge zgostijo in kontrast se zmanjša. Koherenčni čas svetlobe je  $t_c = 10/\omega$ , kar še dodatno zmanjšuje modulacijo interferenčnih prog. Pri  $d = 3,832z/kR$  dosežemo prvo ničlo Besselove funkcije in interferenčni vzorec popolnoma izgine. Nato se interferenčne proge zopet pojavijo, vendar z manjšim kontrastom in nasprotno fazo.



Merjenje prečne koherenčne razdalje svetlobe zvezd je osnova za Michelsonovo metodo določanja zvezdnih premerov. Svetlogo izbrane zvezde zberejo v teleskop preko dveh manjših parov zrcal, kjer sta zunanji zrcali na pomicnih rokah, tako da jih je mogoče razmikati. Glavno zrcalo teleskopa zbere svetlobna snopa v goriščni ravnini, kjer nastanejo interferenčne proge, če le pomicni zrcali nista preveč razmiknjeni. Iz razmika, pri katerem interferenčne proge izginejo, je mogoče določiti premere bližnjih svetlih zvezd. Za zvezdo s polmerom  $10^6$  km v razdalji 5 svetlobnih let je prečna koherenčna razdalja za zeleno svetobo okoli 15 m, kar je z Michelsonovim zvezdnim interferometrom mogoče izmeriti. Pri zvezdah, ki so dlje od nekaj deset svetlobnih let, metoda odpove.

**Naloga 2.5.1** Svetloba s frekvenco  $\omega$  in koherentnim časom  $t_c$  izhaja iz svetila s polmerom  $R$  in vpada na zaslon, ki je z oddaljen od svetila. V zaslonu sta dve zelo ozki reži na razmiku  $d$ . Pokaži, da je uklonska slika za zaslonom enaka

$$\frac{I}{I_0} = \left(1 + 2 \frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z} \cos(\omega\tau) e^{-\tau/t_c}\right), \quad (2.40)$$

kjer je  $\tau = d \sin \vartheta/c$  zakasnitev žarkov iz rež na zaslonu.

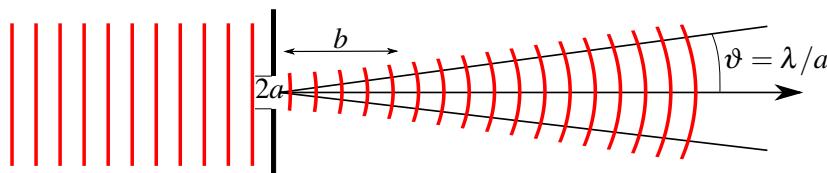
---

### 3. Koherentni snopi svetlobe

V tem poglavju bomo zapisali obosni približek valovne enačbe in spoznali njeno osnovno rešitev: Gaussov snop. Obravnavali bomo snope osnovnega in višjega reda ter se naučili računati prehode Gaussovih snopov prek optičnih elementov.

#### 3.1 Omejen snop svetlobe

Pri obravnavi elektromagnetnega valovanja pogosto uporabljamo približek ravnih valov. Ti so v smeri pravokotno na smer širjenja neomejeni in so zato lahko le idealizacija. Čim raven val usmerimo skozi odprtino v zaslonu, dobimo omejen snop svetlobe. V snopu svetlobe valovna čela niso ravna in meje snopa niso vzporedne, ampak se snop zaradi uklona širi (slika 3.1).



Slika 3.1: Omejen snop dobimo ob prehodu ravnega vala skozi končno odprtino.

V veliki oddaljenosti od zaslona lahko za izračun polja uporabimo Fraunhoferjevo uklonsko teorijo (glej poglavje 1.7). Vendar za oceno kota širjenja podrobnega računa niti ne potrebujemo. Velja približno

$$\vartheta \sim \frac{\lambda}{a}, \quad (3.1)$$

kjer je  $a$  polmer odprtine v zaslonu. Opis polja v bližini zaslona je zahtevnejši, saj je treba uporabiti Fresnelov približek. S slike (3.1) ocenimo, da seže območje bližnjega polja do razdalje

$$b \sim \frac{a}{\vartheta} = \frac{a^2}{\lambda}. \quad (3.2)$$

Včasih taki približni oceni zadoščata. Bolj kvantitativen opis omejenih snopov bi lahko dobili s Fraunhoferjevo in Fresnelovo uklonsko teorijo, kar pa ni najudobnejša pot. Lotimo se naloge raje preko približka obosne valovne enačbe.

**Naloga 3.1.1** Pokaži, da je Fraunhoferjeva uklonska slika reže, katere prepustnost se v radialni smeri spreminja kot Gaussova funkcija  $T(\xi, \eta) = e^{-(\xi^2 + \eta^2)/w_0^2}$ , podana z Gaussovo funkcijo oblike  $E(x, y, z) \propto e^{-(x^2 + y^2)/w^2(z)}$  in določi odvisnost  $w(z)$ . Izračunaj še uklonsko sliko v bližnjem polju po Fresnelovi uklonski teoriji.

### 3.2 Obosna valovna enačba

Pričnimo s časovno neodvisno valovno enačbo za monokromatsko valovanje s frekvenco  $\omega$ , to je Helmholtzevo enačbo (enačba 1.23)

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad (3.3)$$

kjer je  $k = n\omega/c_0$  valovno število in  $n$  lomni količnik sredstva, po katerem se valovanje širi. Zaradi enostavnosti obravnavajmo le eno polarizacijo, tako da  $E$  pišemo kot skalar. Iščemo rešitev za omejen snop, ki se širi približno vzdolž osi  $z$ . Zapišimo jo v obliki

$$E = E_0 \psi(\mathbf{r}, z) e^{ikz}, \quad (3.4)$$

kjer je  $\mathbf{r}$  krajevni vektor v ravnini  $xy$ . Glavni del odvisnosti od koordinate  $z$  smo zapisali v faktorju  $e^{ikz}$ , tako da lahko privzamemo, da se  $\psi$  v smeri  $z$  le počasi spreminja. Vstavimo gornji nastavek v Helmholtzevo enačbo (enačba 3.3) in pri tem zanemarimo druge odvode po  $z$ , saj je zaradi počasnega spremenjanja  $\partial^2 \psi / \partial z^2$  majhen v primerjavi s  $k \partial \psi / \partial z$  in  $k^2 \psi$ . Zaenkrat obravnavajmo le radialno simetrične rešitve. Dobimo obosno ali paraksialno valovno enačbo

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = -2ik \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Opazimo, da je obosna valovna enačba enaka Schrödingerjevi enačbi za prost delec v dveh dimenzijah, v kateri ima koordinata  $z$  vlogo časa. Omejenemu snopu v kvantni mehaniki ustreza lokaliziran delec – valovni paket. Ta se s časom širi, kar v optiki ustreza pojavi uklona.

Ena družina rešitev, ki v kvantni mehaniki predstavlja lastne funkcije energije in gibalne količine, so ravni valovi

$$\psi = e^{ik_1 x + ik_2 y} e^{-i\beta z}. \quad (3.6)$$

Pri tem  $\beta$  ustreza energiji v kvantni mehaniki,  $k_1$  in  $k_2$  pa komponentama gibalne količine. Da bo gornji nastavek rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5), mora veljati

$$\beta = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \quad (3.7)$$

Ko vstavimo nastavek za  $\psi$  v izraz za celotno polje  $E$  (enačba 3.4), dobimo ravni val, za katerega velja

$$k_3 = k - \beta = k - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}, \quad (3.8)$$

pri čemer je  $k_3$  vzdolžna komponenta valovnega vektorja,  $k_1$  in  $k_2$  prečni komponenti,  $k$  pa valovno število.

Za ravni val, ki je rešitev prvotne točne valovne enačbe (enačba 3.3) in ne samo obosnega približka, velja

$$k_3 = \sqrt{k^2 - (k_1^2 + k_2^2)}. \quad (3.9)$$

Očitno dobimo enačbo (3.8) iz enačbe (3.9) z razvojem korena za majhne vrednosti prečnih komponent valovnega vektorja, kar seveda ni nič nepričakovanega. Ta ugotovitev nam tudi pove, da je približek obosne enačbe dober, kadar je razmerje prečne in vzdolžne komponente valovnega vektorja majhno. Takrat je majhen tudi kot širjenja snopa in v razvoju lahko zanemarimo člene, višje od kvadratnih. To pa je tudi območje veljavnosti Fresnelove uklonske teorije, zato rešitve obosne valovne enačbe dajo enako dober približek.

### Fouriereva optika

Časovno odvisnost poljubnega začetnega stanja v kvantni mehaniki navadno izračunamo tako, da v nekem začetnem trenutku paket razvijemo po lastnih stanjih energije – ravnih valovih. Rešitev v poljubnem kasnejšem trenutku je potem dana v obliki Fourierevega integrala. Ta pot je zelo uporabna tudi v optiki in je osnova sklopa računskeih metod, znanih pod imenom Fouriereva optika. V našem primeru z njo brez težav pridemo nazaj do Fresnelove uklonske formule.

## 3.3 Osnovni Gaussov snop

Naša naloga je poiskati rešitve obosne enačbe, ki popišejo omejene snope. Iz kvantne mehanike vemo, da je najbolj lokaliziran in se najpočasneje širi valovni paket Gaussove oblike. Zato poskusimo najti rešitev obosne enačbe (3.5) v obliki

$$\psi(r, z) = e^{i \frac{kr^2}{2q(z)}} e^{-i\phi(z)}, \quad (3.10)$$

kjer funkcija  $q(z)$  opisuje širjenje snopa v prečni smeri,  $\phi(z)$  pa opisuje počasno spremeljanje faze snopa vzdolž osi  $z$ . Vstavimo nastavek (enačba 3.10) v obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Zaradi simetričnosti računamo v cilindričnih koordinatah in zapišemo

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left( \frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} \right) \psi \quad (3.11)$$

in

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left( -\frac{ikr^2}{2q^2} q(z)' - i\phi' \right) \psi. \quad (3.12)$$

Tako iz obosnega približka (enačba 3.5) dobimo

$$\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} = ik \left( \frac{ikr^2}{q^2} q(z)' + 2i\phi' \right). \quad (3.13)$$

Gornji izraz mora veljati pri vsakem  $r$ , zato morajo biti koeficienti pri  $r^2$  in pri drugih členih posebej enaki 0. Dobimo

$$q(z)' = 1 \quad \text{in} \quad \phi' = -\frac{i}{q}. \quad (3.14)$$

Z integracijo dobimo najprej

$$q = z - iz_0, \quad (3.15)$$

kjer smo z  $iz_0$  označili integracijsko konstanto. Integriramo še enačbo za fazo

$$\phi = \int_0^z -\frac{idz}{z - iz_0} = -i \ln(1 + i \frac{z}{z_0}). \quad (3.16)$$

Tako imamo

$$\begin{aligned} \psi &= \exp \left[ i \frac{kr^2}{2(z - iz_0)} \right] \exp \left[ -\ln(1 + i \frac{z}{z_0}) \right] = \\ &= \frac{1}{1 + i \frac{z}{z_0}} \exp \left[ -\frac{kr^2 z_0}{2(z_0^2 + z^2)} + \frac{ikr^2 z}{2(z_0^2 + z^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Realni del eksponenta opisuje širjenje snopa. Vpeljimo polmer snopa  $w$ :

$$w^2 = \frac{2z_0}{k} \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]. \quad (3.18)$$

V izhodišču pri  $z = 0$  je snop najožji in pravimo, da je tam grlo snopa. Vpeljimo še polmer snopa v grlu  $w_0$  in zapišimo hiperbolično odvisnost  $w$  od  $z$ :

$$w^2 = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]. \quad (3.19)$$

Med  $w_0$  in  $z_0$  velja zveza

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (3.20)$$

Dolžina  $z_0$  je ravno razdalja, pri kateri preide snop v asimptotično enakomerno širjenje. Pri  $z_0$  tudi preidemo v območje veljavnosti Fraunhoferjevega uklonskega približka. Celotna dolžina grla je  $2z_0$ , območju grla pa pravimo tudi območje bližnjega polja ali Rayleighovo območje in dolžini  $z_0$  Rayleighova dolžina<sup>1</sup>.



Slika 3.2: Gaussov snop s karakterističnimi parametri

Iz izraza za polmer snopa  $w(z)$  (enačba 3.19) razberemo še kot divergenco snopa v asimptotičnem območju. Najprej izračunajmo le polovični kot širjenja:

$$\vartheta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dw}{dz} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.21)$$

Nato pa zapišimo celotno divergenco snopa

$$\theta = 2 \frac{w_0}{z_0} = \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.22)$$

Dobljena izraza za območje bližnjega polja (enačba 3.20) in divergenco (enačba 3.21) sta v skladu z grobimi ocenami, ki smo jih napravili v začetku poglavja (enačbi 3.1 in 3.2). Faktor  $1/\pi$  je značilen za Gaussov snop, ki ima od vseh mogočih oblik najmanjšo divergenco.

Vrnimo se k imaginarnemu delu eksponenta v enačbi (3.17). Vpeljimo količino

$$R = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right], \quad (3.23)$$

<sup>1</sup>Angleški fizik in nobelovec John William Strutt, 3. baron Rayleighski, 1842–1919.

ki meri krivinski radij valovnih front snopa na razdalji  $z$ . To najlažje uvidimo, če krogelni val razvijemo po majhnih odmikih  $r$  od osi  $z$ :

$$\frac{1}{R} e^{ikR} = \frac{1}{R} e^{ik\sqrt{z^2+r^2}} \approx \frac{1}{R} e^{ik(z+\frac{r^2}{2R})}. \quad (3.24)$$

Upoštevali smo, da je na osi  $z = R$ .

**Naloga 3.3.1** Pokaži, da je največja ukrivljenost valovnih front snopa (najmanjši  $R$ ) ravno pri  $z = \pm z_0$ . Izračunaj še ukrivljenost front v grlu in v veliki oddaljenosti od grla.

Ostane nam še faktor pred eksponentom v izrazu (3.17). Ta faktor meri zmanjševanje amplitude snopa in s tem poskrbi za ohranitev energijskega toka ob širjenju žarka, poleg tega pa da še dodatno spremembo faze. Zapišimo ga v obliki

$$\frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{z}{z_0})^2}} e^{-i\eta(z)} = \frac{w_0}{w} e^{-i\eta(z)}, \quad (3.25)$$

pri čemer je

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \quad (3.26)$$

Dodatna faza  $\eta$ , imenujemo jo tudi Gouyeva faza<sup>2</sup> je posledica povečane fazne hitrosti valovanja, kadar je omejeno v prečni smeri. Pojav je najizrazitejši v bližini grla snopa. Srečamo ga tudi pri valovanju v valovodih.

S tem lahko končno zapišemo izraz za električno poljsko jakost osnovnega Gaussovega snopa<sup>3</sup>

$$E = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{ikz-i\omega t} e^{-r^2/w^2(z)} e^{ikr^2/2R(z)} e^{-i\eta(z)}. \quad (3.27)$$



Slika 3.3: Upodobitev gostota svetlobnega toka v Gaussovem snopu za  $z > 0$

<sup>2</sup>Francoski fizik Louis Georges Gouy, 1854–1926.

<sup>3</sup>Nemški matematik Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.

Intenziteta svetlobe je sorazmerna z  $E(r, z)E^*(r, z)$  in zanjo velja

$$I(r, z) = I_0 \frac{w_0^2}{w(z)^2} e^{-2r^2/w^2(z)}. \quad (3.28)$$

**Naloga 3.3.2** Pokaži, da je znotraj širine snopa  $w$  približno 87 % celotnega svetlobnega toka.

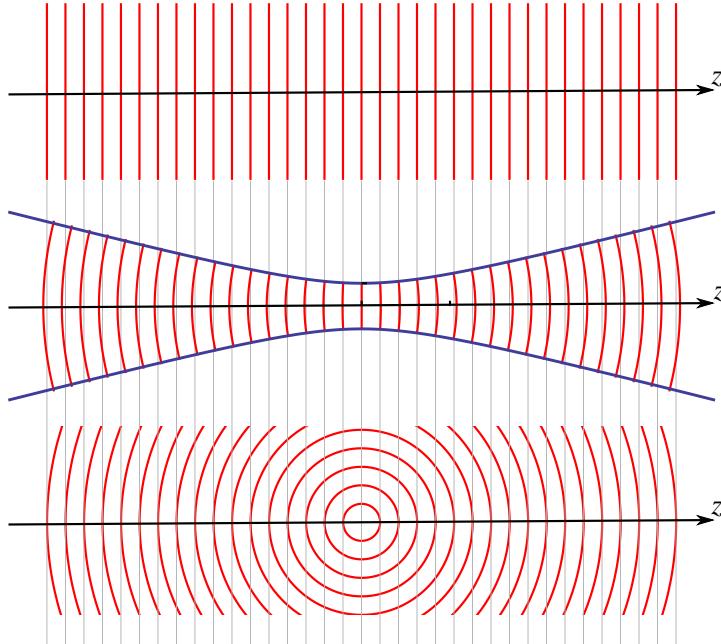
Povejmo še nekaj o parametru  $q(z)$ , ki smo ga uporabili pri izračunu Gaussovega snopa. Spomnimo se, da parameter  $q$  narašča linearno z oddaljenostjo od grla:

$$q(z) = z - iz_0. \quad (3.29)$$

Parameter  $q$  imenujemo kompleksni krivinski radij, njegov inverz pa kompleksna ukrivljenost:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} + i \frac{2}{kw^2}. \quad (3.30)$$

Primerjajmo še Gaussov snop z drugimi valovanji. Na sliki (3.4) so shematsko prikazane valovne fronte ravnega vala, Gaussovega snopa (3.27) in krogelnega vala (3.24). Vidimo, da je za majhne oddaljenosti od grla  $z$  Gaussov snop podoben ravnemu valu (ukrivljenost front je zelo majhna in  $R \rightarrow \infty$ ), medtem ko je za velike  $z$  podoben krogelnemu valu (krivinski radij  $R$  narašča sorazmerno z oddaljenostjo  $z$ ). Faza Gaussovega snopa je pri  $z \gg z_0$  zamaknjena za  $\pi/2$  glede na ravni in krogelni val.



Slika 3.4: Ravn val, Gaussov snop ter krogelni val. Pri majhnih razdaljah od grla je Gaussov snop podoben ravnemu valu, pri velikih razdaljah pa krogelnemu valu. Faza Gaussovega snopa se razlikuje od faze ravnega in krogelnega vala.

### 3.4 Snopi višjega reda

Osnovna rešitev obosne valovne enačbe je Gaussov snop. Poleg te rešitve pa obstaja še veliko drugih rešitev, ki so tudi omejene v prečni smeri. V kartezičnih koordinatah tako rešijo obosno valovno enačbo tudi Hermite-Gaussovi snopi<sup>4</sup>

$$\psi_{n,m}(x,y) = \frac{w_0}{w} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2q} - i\eta_{n,m}\right], \quad (3.31)$$

kjer so  $H_n$  Hermitovi polinomi stopnje  $n$ . V to se lahko prepričamo, če izraz vstavimo v obosno valovno enačbo (enačba 3.5) in upoštevamo, da Hermitovi polinomi zadoščajo enačbi

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \quad (3.32)$$

Osnovni Gaussov snop je očitno poseben primer gornje rešitve za  $m = n = 0$ . Polmer snopa  $w(z)$  in kompleksni krivinski radij  $q(z)$  sta za vse  $m$  in  $n$  enaka kot za osnovni snop in podana z enačbama (3.19) in (3.29). Razlika je v fazi, ki je odvisna tudi od  $n$  in  $m$ :

$$\eta_{n,m}(z) = (n+m+1) \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \quad (3.33)$$

To hitrejše spremjanje faze v bližnjem polju snopov višjega reda je analogno večji fazni hitrosti valov višjega reda v valovodih.

Nekaj višjih redov Hermite-Gaussovinih snopov je na sliki (3.5), kjer rišemo  $|\Re\psi_{n,m}(x,y,0)|$ . Vidimo, da indeksa  $n$  in  $m$  predstavlja število vozlov v prečni smeri, pri danem  $w$  pa polmer snopa narašča z  $n$  in  $m$ .



Slika 3.5: Prečni profil Hermite-Gaussovinih snopov za različne vrednosti  $(n, m)$

---

**Naloga 3.4.1** Pokaži, da za Hermite-Gaussove snope višjih redov efektivni polmer snopa narašča sorazmerno s korenom iz števila prečnih vozlov  $w_{eff} \propto w\sqrt{n+m}$ . Namig: pri zapisu prečne odvisnosti polja upoštevaj le vodilni člen Hermitovih polinomov ( $\psi_{n,m} \propto x^n y^m \exp(-(x^2+y^2)/w^2)$ ) in določi, na kateri razdalji od središča snopa ima polje  $\psi$  največjo amplitudo.

---

<sup>4</sup>Francoski matematik Charles Hermite, 1822–1901.

Hermite-Gaussovi snopi (enačba 3.31) tvorijo popoln ortogonalen sistem funkcij koordinat  $x$  in  $y$ :

$$\int \psi_{n,m}^*(x,y) \psi_{n',m'}(x,y) dx dy = \pi w_0^2 2^{n+m-1} n! m! \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \quad (3.34)$$

Polje nekega valovanja, ki ga poznamo v ravnini  $z = 0$ , lahko pri poljubnem  $z$  dobimo z razvojem po Hermite-Gaussovih snopih. Pri tem je izbira premora grla  $w_0$  poljubna, bo pa seveda vplivala na hitrost konvergencije razvoja. Na tak način lahko obravnavamo uklon na odprtini, kjer je očitno smiselno vzeti  $w_0$  približno enak dimenziji odprtine. Dobljeni rezultat je enako natančen kot Fresnelov uklonski integral.

Pri velikih  $z$ , kjer velja Fraunhoferjeva uklonska teorija, je polje Fourierjeva transformacija polja pri  $z = 0$ . Hermite-Gaussovi snopi ohranajo prečno obliko, ki pa se z naraščajočim  $z$  širi. Od tod vidimo, da je Fourierjeva transformacija Hermite-Gaussove funkcije  $H_n(x)e^{-x^2/2}$  zopet Hermite-Gaussova funkcija.

V cilindričnih koordinatah imajo snopi višjega reda obliko Laguerre-Gaussovih snopov<sup>5</sup>

$$\psi_{p,l}(r, \phi, z) = \frac{w_0}{w} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w^2} \right) e^{\pm il\phi} \exp \left[ \frac{ikr^2}{2q} - i\eta_{p,l} \right], \quad (3.35)$$

kjer je  $L_p^l$  pridruženi Laguerrov polinom in

$$\eta_{p,l}(z) = (2p + l + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (3.36)$$

Podobno kot je v kartezičnem primeru red polinoma določal število prečnih ničel, določata  $p$  in  $l$  v cilindričnem primeru število vozelnih črt, kjer je gostota svetlobnega toka nič. Na sliki (3.6) je prikazanih nekaj oblik amplitud  $|\Re \psi_{p,l}(r, \phi, 0)|$ .



Slika 3.6: Prečni profil Laguerre-Gaussovih snopov za različne vrednosti  $(p, l)$

Iz laserjev navadno želimo dobiti čim čistejši osnovni snop, vendar lahko pogosto opazimo tudi snope višjega reda. Da dobimo le osnovni snop, je treba posebej paziti pri konstrukciji laserja.

<sup>5</sup>Francoski matematik Edmond Nicolas Laguerre, 1834–1886.



### Tirna vrtilna količina in spin

Valovne fronte Laguerre-Gaussovih snopov pri  $l \neq 0$  imajo obliko vijačnic. Poyntingov vektor pri njih ni vzporeden z osjo žarka, ampak ima komponento tudi v prečni smeri. Ta spreminja smer, zato pride do pojava vrtilne količine v smeri osi snopa in snop na snov deluje z navorom. Pravimo, da Laguerre-Gaussovi snopi nosijo t.i. tirno vrtilno količino. V kvantni mehaniki funkcija  $\psi_{p,l}$  predstavlja foton s tirno vrtilno količino  $L = \hbar l$ , medtem ko leva in desna cirkularna polarizacija predstavlja spin fotona.



Slika 3.7: Valovna fronta Laguerre-Gaussovega snopa

## 3.5 Besselov snop

Poglejmo si še poseben primer omejenega snopa, to je Besselov snop<sup>6</sup>. Kot nastavek za rešitev valovne enačbe (enačba 3.3) izberemo

$$E = E_0 \psi(x, y) e^{i\beta z - i\omega t}, \quad (3.37)$$

kjer mora nastavek  $\psi$  zadostovati Helmholtzovi enačbi

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + k_{\perp}^2 \psi = 0, \quad (3.38)$$

pri  $k_{\perp}^2 = k^2 - \beta^2$ . V cilindričnih koordinatah ( $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ) se enačba prepiše v

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k_{\perp}^2 \psi = 0. \quad (3.39)$$

Rešitve gornje enačbe so s faznim faktorjem pomnožene Besselove funkcije:

$$\psi_m(x, y) = A_m J_m(k_{\perp} r) e^{im\phi}, \quad (3.40)$$

kjer je  $J_m$  Besselova funkcija in  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Za  $m = 0$  ima val obliko

$$E(r, \phi, z, t) = A_0 J_0(k_{\perp} r) e^{i\beta z - i\omega t}, \quad (3.41)$$

ki ga imenujemo Besselov snop. Valovne fronte takega snopa so ravne in snop nima divergence. Vendar pa Besselov snop ni omejen v pravem smislu. Za velike oddaljenosti od središča snopa  $r$  intenzitetni profil namreč pojema kot  $I \propto J_0^2(k_{\perp} r) \sim (2/\pi k_{\perp} r) \cos^2(k_{\perp} r - \pi/4)$ . Energija takega snopa ni omejena znotraj efektivnega radija, kot je to pri Gaussovih snopih. Za konstrukcijo Besselovih snopov bi (tako kot za konstrukcijo ravnega vala) potrebovali neskončno energije, kar je seveda nemogoče. Kljub temu pa lahko ustvarimo približke Besselovih snopov, ki imajo pomembne in uporabne lastnosti.

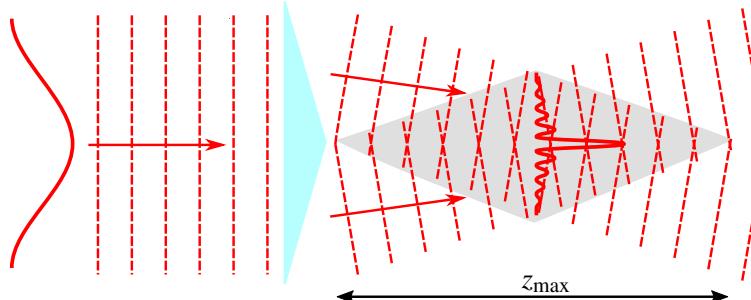
<sup>6</sup>Nemški astronom, matematik in fizik Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846.



Slika 3.8: Prečni presek in profil intenziteta Besselovega snopa



Z uporabo stožaste leče lahko preoblikujemo v približek Besselovega snopa (slika 3.9). Na plašču stožaste leče se namreč Gaussov snop zlomi in valovni vektorji nastalega žarka opisujejo stožec, kar je sicer lastnost Besselovih žarkov. Dobljeni žarek je približek Besselovega snopa, vendar le na določenem območju, dolgem  $z_{max}$ . Znotraj tega območja je divergenca snopa praktično enaka nič. Poleg manjše divergence imajo ti snopi še lastnost regeneracije. To pomeni, da se snop v senčni strani za objektom, ki ga osvetljuje (na primer v optični pinceti), regenerira. Profil snopa v senčni strani (daleč stran od objekta) je tako enak profilu snopa pred objektom.



Slika 3.9: Nastanek Besselovega snopa na stožasti leči

### 3.6 Transformacije snopov z lečami

Vrnimo se h Gaussovim snopom in poglejmo, kaj se zgodi z njimi pri prehodu skozi optične naprave. Začnimo z enostavno tanko lečo z goriščno razdaljo  $f$ . V geometrijski optiki je krivinski radij krogelnega vala, ki izhaja iz točke na osi, kar enak razdalji do točke. Leča preslika točko na osi v točko na osi, od tod pa sledi, da se sferični val s krivinskim radijem  $R_1$  po prehodu skozi lečo spremeni v val s krivinskim radijem  $R_2$ . Pri tem velja zveza

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}. \quad (3.42)$$

Krivinski radij v točki  $z$  je pozitiven, če je središče krožnice pri  $z' \leq z$ .

Kako pa je z Gaussovim snopom? Polmer snopa  $w$  se pri prehodu skozi tanko lečo ne spremeni, zato velja po enačbi (3.30) za kompleksni krivinski radij tik pred lečo in tik za njo

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f}. \quad (3.43)$$

Kompleksni krivinski radij  $q$  je po enačbi (3.29) linearja funkcija koordinate  $z$ . To nam skupaj z enačbo (3.43) omogoča račun prehoda snopa skozi poljuben sistem leč brez aberacij. Kot primer poglejmo, kako z zbiralno lečo zberemo snop.



Slika 3.10: Prehod Gaussovega snopa skozi tanko lečo. Grlo velikosti  $w_{01}$  v oddaljenosti  $x_1$  od gorišča leče se preslikava v grlo  $w_{02}$  v oddaljenosti  $x_2$  od gorišča leče.

Vpadni snop naj ima grlo s polmerom  $w_{01}$  in parametrom  $z_{01}$ . Lega grla je v točki, ki je za  $x_1$  oddaljena od levega gorišča leče (slika 3.10). Naj bosta

$$q_1^F = x_1 - iz_{01} \quad \text{in} \quad q_2^F = -x_2 - iz_{02} \quad (3.44)$$

kompleksna krivinska radija v levem in desnem gorišču, pri čemer je koordinatna os  $z$  usmerjena v desno, gledamo pa referenčno glede na lego grla vsakega posameznega snopa. Velja tudi

$$q_1 = q_1^F + f \quad \text{in} \quad q_2 = q_2^F - f. \quad (3.45)$$

Od tod dobimo z uporabo enačbe (3.43) enačbo za  $q$  v goriščih v kompaktni obliki

$$q_1^F q_2^F = -f^2. \quad (3.46)$$

Eračba je po obliki podobna eračbi za oddaljenost slike od gorišča v geometrijski optiki, pomen pa ima drugačen. Zapišimo posebej realni in imaginarni del

$$x_1 x_2 = f^2 - z_{01} z_{02} \quad \text{in} \quad \frac{x_1}{z_{01}} = \frac{x_2}{z_{02}}. \quad (3.47)$$

Dobimo eračbi za preslikavo Gaussovega snopa čez lečo z goriščno razdaljo  $f$ . Prva da povečavo:

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \quad (3.48)$$

druga eračba pa lego grla na desni strani leče:

$$x_2 = \frac{x_1 f^2}{x_1^2 + z_{01}^2}. \quad (3.49)$$

Gornja eračba se ujema z izrazom za preslikavo točke v geometrijski optiki le, kadar je  $z_{01} \ll x_1$ . Kadar je  $z_{01} \gg f$ , je val na leči pri vsakem  $x_1$  skoraj raven in  $x_2 \rightarrow 0$ , kar pomeni, da dobimo grlo na desni strani v gorišču. V praksi dobimo Gaussove snope iz laserjev in pogosto ne velja ne prva ne druga limita, temveč je treba uporabiti izraz (3.49). Tudi povečava polmera grla na desni, podana z eračbo (3.48), je precej drugačna kot v geometrijski optiki.

Za primer vzemimo snop iz He-Ne laserja (valovna dolžina 632,8 nm), ki ima grlo s polmerom  $w_{01} = 0,5$  mm na izhodnem ogledalu in je 50 cm pred lečo z goriščno razdaljo  $f = 25$  cm. Tedaj je  $z_{01} = 124$  cm. Po enačbi (3.49) dobimo grlo za lečo v oddaljenosti 1 cm od gorišča in 26 cm za lečo, po enačbi (3.48) pa izračunamo polmer  $w_{02} = 100 \mu\text{m}$ . Enačbe geometrijske optike bi dale popolnoma napačen položaj grla 50 cm za lečo, polmer grla pa 0,5 mm. Po drugi strani bi približek, da je vpadni snop kar raven, dal grlo na desni v gorišču s približno pravim polmerom. Zakaj da približek ravnih valov bolj pravilen rezultat, lahko hitro uvidimo, če pogledamo Rayleighovo dolžino snopa: snop vpada na lečo še v območju bližnjega polja ( $x_1 + f < z_{01}$ ), kjer je približno oblike ravnih valov.

Če postavimo grlo snopa v gorišče leče ( $x_1 = 0$ ), je grlo na desni strani tudi v gorišču ( $x_2 = 0$ ). Razmerje polmerov grl na eni in drugi strani leče lahko izračunamo:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_2}{x_1} = \frac{f^2}{z_{01}^2} \quad \text{in} \quad \frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f}{z_{01}}. \quad (3.50)$$

Velikost grla na desni strani je

$$w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01}}, \quad (3.51)$$

torej tem manjša, čim večji je polmer grla na levi. Vpadni žarek je tako smiselnou razširiti, vendar je polmer žarka lahko največ enak polmeru leče  $a$ . Najmanjša velikost grla na desni je tako

$$w_{02 \min} = \frac{\lambda f}{\pi a} \sim \lambda. \quad (3.52)$$

Dobi mikroskopski in fotografiski objektivi dosegajo numerično odprtino  $f/a \simeq 1$  in z njimi je mogoče Gaussov snop zbrati v piko velikosti  $\sim \lambda$ .

Omenili smo, da je treba za dosego majhnega polmera grla za lečo žarek pred lečo čim bolj razširiti. Razširitev vpadnega snopa naredimo s teleskopom (slika 3.11), katerega značilnost je, da je razmik med lečama enak vsoti goriščnih razdalj leč in zato gorišči leč sovpadata. Povečava teleskopa je pri taki postavitvi leč enaka razmerju med goriščima razdaljama (glej nalogu 3.6.1).



Slika 3.11: Prehod Gaussovega snopa skozi sistem dveh leč z goriščnima razdaljama  $f_1$  in  $f_2$

**Naloga 3.6.1** Imamo dve leči z goriščnima razdaljama  $f_1$  in  $f_2$ , ki sta na medsebojni razdalji  $d = f_1 + f_2$ . Pokaži, da je povečava takega teleskopa enaka

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f_2}{f_1}, \quad (3.53)$$

in je neodvisna od postavitve grla snopa  $x_1$ .

### 3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki

Preden se lotimo splošnejšega zapisa preslikav Gaussovega snopa, se spomnimo, kako se lotimo preslikav v geometrijski optiki. Sliko dobimo kot presečišče geometrijskih žarkov, ki izhajajo iz točke predmeta pred optičnim sistemom. Geometrijski žarek je pravokoten na valovne ploskve, pri čemer moramo vzeti še limito, ko gre valovna dolžina proti nič. Ukrivljenost valovne fronte je neposredno povezana s spremjanjem naklona žarkov, pri čemer bomo privzeli, da so nakloni žarkov glede na os majhni.

Geometrijski žarek v izbrani ravnini  $z$  lahko opišemo z dvema parametrom: oddaljenostjo od osi  $y$  in naklonom glede na os  $\theta$ . Ti dve količini sta med seboj neodvisni in ju sestavimo v vektor

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Preslikavo snopa bomo zapisali kot matriko, ki bo delovala na gornji vektor. Matrike bodo v splošnem oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

zato jih imenujemo tudi ABCD matrike. Zapišimo nekaj primerov.

Pri premiku za  $d$  se spremeni odmik od osi, naklon pa ostane enak:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + d\theta_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

To lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Matrika za premik  $d$  vzdolž osi  $z$  je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Poglejmo še matriko za prehod skozi lečo. Pri prehodu skozi tanko lečo se spremeni nagib žarka. Če je pred lečo vzporeden z osjo, gre za lečo skozi gorišče, zato

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -\frac{y_1}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Pri tem koeficientov  $B$  in  $D$  še ne poznamo. Določimo jih iz drugega pogoja, ki pravi, da ostane žarek, ki gre skozi lečo na osi, nespremenjen:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Sledi  $B = 0$  in  $D = 1$ . Matrika za prehod skozi lečo je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Podobno izpeljavo kot za prehod skozi lečo lahko naredimo za odboj na sferičnem ogledalu s krivinskim radijem  $R$ . Pripadajoča matrika je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

pri čemer je  $R > 0$  za konkavna zrcala. Matrika za odboj na ravnem zrcalu je identiteta.

Matriko sestavljenih optičnih naprave dobimo z množenjem matrik posameznih komponent. Pri tem moramo paziti na vrstni red množenja, saj množenje matrik ni komutativno. Matriko preslikave čez dva optična elementa, pri čemer žarek najprej preide element z indeksom 1 in nato element z indeksom 2, zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2A_1 + B_2C_1 & A_2B_1 + B_2D_1 \\ C_2A_1 + D_2C_1 & C_2B_1 + D_2D_1 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

V sistemu z več elementi (slika 3.12) zapišemo produkt matrik za vse elemente, pri čemer ne smemo pozabiti na premike med elementi.

Poglejmo primer. Žarek naj najprej prepotuje razdaljo  $d$ , nato pa ga usmerimo na tanko lečo z goriščno razdaljo  $f$ . Matrika za celoten prehod je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Gornji matrični formalizem je zelo prikladen predvsem za računanje zapletenih optičnih sistemov, saj ga je prav lahko izvesti na računalnik. Poleg tega bomo spoznali, da je enolično povezan z matričnim formalizmom izračuna kompleksne ukrivljenosti Gaussovih snopov, zato da preprosto možnost prenosa rezultatov računov geometrijske optike v optiko snopov.



Slika 3.12: Preslikave žarkov lahko obravnavamo z matrikami. Optični element  $M$  preslikava žarek  $(y_1, \theta_1)$  v  $(y_2, \theta_2)$ . Matriko za prehod poljubnega zaporedja optičnih elementov dobimo z množenjem matrik.

### 3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija

Poskusimo zdaj zapisati podoben matrični formalizem še za kompleksne krivinske radije. Za opis Gaussovega snopa zadošča, če v izbrani ravnini  $z$  poznamo kompleksni krivinski radij  $q$ . Ugotovili smo že, da je  $q$  linearna funkcija premika po  $z$  (enačba 3.29). Vemo tudi, kako se  $q$  spremeni pri prehodu skozi tanko lečo (enačba 3.43).

Pri premiku iz ravnine  $z_1$  v ravnino  $z_2$ , ki je premaknjena za  $d$ , se  $q$  spremeni

$$q_2 = q_1 + d. \quad (3.65)$$

Po enačbi (3.43) je pri prehodu skozi lečo

$$q_2 = \frac{q_1 f}{f - q_1} = \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1}. \quad (3.66)$$

Premik in leča dasta skupaj

$$q_2 = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1 + d}{f} + 1} = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1}{f} - \frac{d}{f} + 1}. \quad (3.67)$$

V vseh treh primerih lahko transformacijo kompleksnega krivinskega radija  $q$  zapišemo v obliki ulomljene linearne preslikave

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}. \quad (3.68)$$

Koeficiente preslikave razvrstimo v matriko

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Če iz gornjih enačb razberemo koeficiente ABCD matrik, vidimo, da so povsem enake kot v primeru geometrijske optike. Hitro lahko tudi preverimo, da je matrika za premik in lečo enaka produktu matrike za premik in matrike za lečo (enačba 3.64).

Omenimo še eno lastnost ABCD matrik. Kadar po prehodu čez optične elemente preidemo v snov z enakim lomnim količnikom kot je bil na začetku, je determinanta ABCD matrike enaka 1. V nasprotnem primeru je determinanta matrike enaka razmerju lomnih količnikov začetne in končne snovi.

$$AD - BC = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.70)$$

Opis prehoda	Skica	Matrika za prehod
Prehod skozi prostor za $d$		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Prehod preko meje dveh snovi		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod preko konveksno ukrivljene meje $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1 - n_2)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod preko konveksne leče $f > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Odboj na konkavnem zrcalu $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3.1: Matrike ABCD za nekaj osnovnih preslikav, ki veljajo tako v geometrijski optiki kot tudi za izračun preslikave kompleksnega krivinskega radija  $q$  Gaussovih snopov.

**Naloga 3.8.1** Pokaži, da za naslednje prehode veljajo ustrezne ABCD matrike.

Prehod skozi prostor in lečo		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{bmatrix}$
Prehod preko leče z debelino $d$ in krivinskima radijema $R_1$ in $R_2$		$\begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{n f_1} & \frac{d}{n} \\ -\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{d}{n f_1 f_2} & 1 - \frac{d}{n f_2} \end{bmatrix} f_i = \frac{R_i}{n-1}$
Prehod čez zaporedje plasti		$\begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



## 4. Optični resonatorji

Osnovni gradnik vsakega laserja je resonator. V njem je vzbujeno lastno valovanje, ki skozi delno prepustno steno resonatorja izhaja iz sistema. V tem poglavju bomo najprej spoznali optične resonatorje in kriterije za njihovo stabilno delovanje, nato pa izračunali lastne frekvence ter povezali širino črt z izgubami v sistemu.

### 4.1 Odprtii resonatorji

Optični resonatorji so votline, v katerih je mogoče vzpostaviti stoječe svetlobno valovanje. Taka stoječa valovanja so skoraj stacionarne rešitve valovne enačbe z ustreznimi robnimi pogoji v votlini in se obnašajo kot harmonika nihala. Če vzbujamo v resonatorju valovanja z različnimi frekvencami, dobimo pri nekaterih diskretnih frekvencah resonančno obnašanje. Te frekvence imenujemo lastne frekvence resonatorja. Zaradi dušenja imajo lastne frekvence končno širino, pri čemer je čas dušenja mnogo daljši od nihajne periode.

Optične resonatorje uporabljamo predvsem v dva namena:

1. V resonatorjih lahko z razmeroma šibkim zunanjim vzbujanjem dobimo veliko električno poljsko jakost pri resonančni frekvenci. Za vzdrževanje konstantne amplitude lastnega nihanja mora zunanjji vir zgolj pokrivati izgube v resonatorju. Če so te majhne, je zunanjji vir lahko šibek, polje v resonatorju pa vseeno veliko.
2. Resonatorji delujejo kot filtri, ki prepuščajo le polje s točno določeno frekvenco in prostorsko odvisnostjo. Primer take uporabe je Fabry-Perotov interferometer, opisan v nadaljevanju poglavja.

Resonatorje poznamo z različnih področij, na primer akustične pri glasbilah ali mikrovalovne in radijske. V mikrovalovnem področju, kjer so valovne dolžine valovanja okoli 1 cm, so resonatorji zaprte kovinske votline z dimenzijami, ki so primerljive z valovno dolžino vzbujenega valovanja. Resonančne frekvence so v takem resonatorju med seboj dobro ločene in ni težko doseči enega samega nihanja v izbranem frekvenčnem intervalu.

V optičnem področju je drugače, saj so resonatorji navadno mnogo večji od valovne dolžine. Vzemimo kocko s stranico  $L \gg \lambda$ , v kateri je vzbujeno zelo veliko število lastnih nihanj. Število lastnih nihanj  $N$  na frekvenčni interval  $\Delta\nu$  zapišemo z zvezno gostoto stanj

$$N = 2 \frac{1}{8} 4\pi k^2 \Delta k \frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V \Delta \omega = \frac{8\pi v^2}{c^3} V \Delta \nu. \quad (4.1)$$

To gornje enačbe smo prišli tako, da smo prešteli stoječa valovanja z velikostjo valovnega vektorja med  $k$  in  $k + \Delta k$ : volumen pripadajoče krogelne lupine v pozitivnem oktantu  $\frac{1}{8} 4\pi k^2 \Delta k$  smo delili z volumnom  $(\pi/L)^3$ , ki pripada enemu stanju. Upoštevali smo tudi, da ima vsako lastno nihanje dve možni polarizaciji.

Poglejmo primer. Izberimo osrednjo frekvenco  $v = 3 \cdot 10^{14}$  Hz, ki ustreza valovni dolžini  $1 \mu\text{m}$ , in širino frekvenčnega intervala  $\Delta v = 3 \cdot 10^9$  Hz, ki je tipična za Dopplerjevo razširjeno emisijsko črto v plinu. Potem je v votlini s stranico  $L = 1 \text{ cm}$  in prostornino  $V = 1 \text{ cm}^3$  število lastnih nihanj na izbran interval po enačbi (4.1) enako  $N = 2,5 \cdot 10^8$ . Če bi bile vse stene votline idealna zrcala, bi bil čas dušenja vseh lastnih nihanj približno enako dolg in vedno bi vzbujali zelo veliko število resonanc hkrati. Tak resonator bi bil neuporaben.

Hkratnemu vzbujanju velikega števila nihanj se izognemo z zmanjšanjem odbojnosti stranskih sten votline, saj s tem povečamo dušenje stoječih valov v prečni smeri. Dušenje valov, ki so pravokotni na idealno odbojni končni steni, ostane nespremenjeno. Nazadnje lahko stranske stene povsem odstranimo, tako da stoječih valov v prečni smeri ni več. Ostane le še nekaj valov, ki so pravokotni na končni steni. Takemu resonatorju pravimo odprt resonator (slika 4.1).



Slika 4.1: Odprt resonator. Levo: lastni nihajni načini takega resonatorja imajo diskretne vrednosti valovnih vektorjev  $k_n$ . Desno: žarki, ki niso pravokotni na zrcali, uidejo iz resonatorja.

Oglejmo si odprte resonatorje podrobneje. V zaprti pravokotni votlini velikosti  $a \times a \times L$  z idealno prevodnimi (zrcalnimi) stenami so dovoljene vrednosti valovnega vektorja za lastna nihanja

$$\mathbf{k}_{l,m,n} = \left( \frac{l\pi}{a}, \frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{L} \right), \quad (4.2)$$

kjer so  $l$ ,  $m$  in  $n$  cela števila,  $L$  dolžina,  $a$  pa prečna dimenzija resonatorja. Lastne frekvence so

$$\omega_{l,m,n} = c |\mathbf{k}_{l,m,n}|. \quad (4.3)$$

Dolžina resonatorja  $L$  je velika v primerjavi z  $\lambda$  in zato je  $n$  veliko število. Če prečnih sten ni, mora biti  $\mathbf{k}$  približno vzporeden z osjo  $z$ , zato morata biti  $l$  in  $m$  majhna. Tedaj lahko velikost valovnega vektorja razvijemo in dobimo za frekvenco

$$\omega_{l,m,n} = c \left( \frac{n\pi}{L} + \frac{l^2 + m^2}{2n} \frac{L\pi}{a^2} \right). \quad (4.4)$$

Drugi člen v oklepaju je navadno le majhen popravek, tako da so lastne frekvence odprtih optičnih resonatorjev odvisne predvsem od števila vozlov v vzdolžni smeri. To število je navadno veliko, med  $10^5$  in  $10^7$ . Možna so tudi lastna nihanja z nekaj vozli v prečni smeri, ki pa le malo vplivajo na lastne frekvence. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali predvsem lastna stanja brez vozlov v prečni smeri, ki jih bomo označili z enim samim indeksom  $n$ .

Razlika med frekvencama dveh zaporednih lastnih nihanj  $n$  in  $n+1$  je

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L}. \quad (4.5)$$

Pri dolžini resonatorja  $L = 30 \text{ cm}$  je v frekvenčnem intervalu s širino  $3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$  le še 6 nihanj, ki jih je brez težav mogoče razločiti.

V zaprtih votlinah z zrcalnimi stenami dobimo dobro določena lastna stanja pri poljubni obliki votline. Pri odprtih resonatorjih to ne velja. Da dobimo lastna nihanja z majhnimi izgubami, morata biti izpolnjena dva pogoja:

1. Snop geometrijskih žarkov mora ostati po mnogih odbojih ujet med zrcaloma resonatorja.
2. Polmer zrcala mora biti večji od polmera uklonsko razširjenega snopa, ki izhaja iz nasprotnega zrcala.

Resonatorjem, ki zadoščajo gornjima pogojem, pravimo stabilni resonatorji. Drugi pogoj lahko zapišemo tudi z enačbami, izhajajoč iz enačbe za oceno divergenc (enačba 3.1):

$$\vartheta = \frac{\lambda}{a_1} < \frac{a_2}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1 a_2}{\lambda L} > 1, \quad (4.6)$$

kjer sta  $a_1$  in  $a_2$  polmera zrcal resonatorja. Izrazu  $F = a_1 a_2 / \lambda L$  pravimo tudi Fresnelovo število.

### Fabry-Perotov interferometer

Poglejmo preprost primer resonatorja, omejenega z dvema vzporednima ravnima zrcaloma z veliko odbojnostjo. Takemu sistemu pravimo Fabry-Perotov interferometer<sup>1</sup>. Da nastane med zrcaloma stoječe valovanje, mora biti razdalja med zrcaloma večkratnik polovične valovne dolžine (enačba 4.2)

$$L = \frac{n\lambda}{2}. \quad (4.7)$$

Prepustnost interferometra za ravni val, ki vpada pravokotno na zrcali z odbojnostjo  $\mathcal{R}$ , je

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2 kL} \quad (4.8)$$

in je prikazana na sliki (4.2). Ko je frekvenca vpadnega valovanja ravno enaka lastni frekvenci resonatorja, je sistem v resonanci in  $T = 1$ . Širina resonance je tem manjša, čim večja je odbojnost zrcal. Ta tudi določa čas dušenja vzbujenega lastnega nihanja.



Slika 4.2: Prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v odvisnosti od valovnega vektorja  $k$  za tri različne odbojnosti zrcal  $\mathcal{R}$ .

<sup>1</sup>Francoska fizika Maurice Paul Auguste Charles Fabry, 1867–1945, in Jean-Baptiste Alfred Perot, 1863–1925.

**Naloga 4.1.1** Pokaži, da je prepustnost Fabry-Perotovega interferometra, katerega zrcali imata odbojnost  $\mathcal{R}$ , enaka

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2 \delta}, \quad (4.9)$$

kjer je  $\delta = kL \cos \vartheta$ ,  $L$  razmik med zrcalom,  $\vartheta$  vpadni kot,  $k$  pa valovni vektor svetlobe.

Prvemu pogoju stabilnosti ustreza v Fabry-Perotovem interferometru le žarki, ki so natanko pravokotni na zrcali. Čim sta zrcali le malo nevzporedni, stabilnih žarkov sploh ni več. Tako imenovani planparalelni interferometer je tako na meji stabilnosti. Z izpolnjevanjem drugega pogoja ni težav, saj morata biti pri na primer 30 cm dolgem resonatorju in valovni dolžini  $0,5 \mu\text{m}$  zrcali večji od 0,4 mm, da zadostita pogoju, zapisanem v enačbi (4.6).

Bolj stabilni resonatorji so sestavljeni iz dveh konkavno ukrivljenih zrcal. Tedaj so žarki, ki potujejo pod majhnim kotom glede na osrednjo os, ujeti med zrcalom in energija lastnih valovanj ostaja lokalizirana blizu osi.

## 4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih

V stabilnih resonatorjih s konkavnima zrcalom pričakujemo, da so lastna valovanja omejena na bližino osrednje osi in zrcali mnogo večji od polmera lastnega nihanja. Tedaj lahko za obravnavo električnega polja uporabimo obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Veliko odbojnost na zrcalih dobimo, kadar je njuna električna prevodnost velika. Iz tega izhaja robni pogoj, ki pravi, da je električno polje na zrcalu približno enako nič. Valovna fronta stoječega valovanja na zrcalu mora zato sopadati s površino zrcala.



Slika 4.3: Gaussov snop v odprttem resonatorju s konkavno ukrivljenima zrcaloma s krivinskima radijema  $R_1$  in  $R_2$ . Krivinski radij zrcal se ujema s krivinskim radijem čela snopa. Kadar sta polmera različna, grlo ne leži na sredini med zrcalom.

V prečni smeri omejene rešitve obosne enačbe smo našli v obliki potupočnih Gaussovih snopov (enačba 3.27). Podobno kot zapišemo stoječe valovanje na vrvi kot vsoto valovanj v nasprotnih smereh lahko stoječe snope dobimo s superpozicijo snopov, ki se širijo v različnih smereh ob osi. Da zadostimo robnim pogojem na zrcalih, se mora krivinski radij snopa ujemati s krivinskima radijema zrcal  $R_1$  in  $R_2$  (slika 4.3). Pri tem sta neznanki polmeri grla snopa, ki je podan s parametrom  $z_0$ , in lega grla.

Postavimo izhodišče osi  $z$  v grlo, kot smo navajeni, tako da sta zrcali pri  $z_1 < 0$  in  $z_2 > 0$ . Z uporabo enačbe za krivinski radij snopa  $R$  (enačba 3.23) dobimo

$$-R_1 = z_1 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z_1} \right)^2 \right] \quad \text{in} \quad (4.10)$$

$$R_2 = z_2 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z_2} \right)^2 \right]. \quad (4.11)$$

Pri tem smo upoštevali, da je krivinski radij za konkavno zrcalo glede na pozitivno smer  $z$  pozitiven. Prvo enačbo smo zapisali z negativnim predznakom pri  $R_1$ , zato da je krivinski radij pozitivno število. Veljati mora še

$$z_2 - z_1 = L. \quad (4.12)$$

Iz gornjih enačb najprej izračunamo razdaljo  $z_1$ , ki določa lego grla v resonatorju, nato pa parameter  $z_0$ , ki določa območje bližnjega polja, in preko enačbe (3.20) enolično tudi polmer grla

$$z_0^2 = \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}. \quad (4.13)$$

Da je snop realen in omejen, mora biti  $z_0^2 > 0$  in zato števec gornjega izraza pozitiven. Ta pogoj lahko po kratkem računu zapišemo v obliki stabilnostnega kriterija

$$0 < \left( 1 - \frac{L}{R_1} \right) \left( 1 - \frac{L}{R_2} \right) < 1. \quad (4.14)$$

Resonatorji, ki zadoščajo gornjemu pogoju, so stabilni.

---

**Naloga 4.2.1** Izhajajoč iz pogoja, da se na zrcalih krivinski radij valovnih front snopa ujema s krivinskim radijem zrcal (enačbi ?? in 4.11) izpelji kriterij za stabilno delovanje resonatorja (enačba 4.14).

---

Stabilnostni kriterij za resonatorje je najbolj nazorno predstaviti na diagramu, kjer na os  $x$  nanašamo  $L/R_1$ , na os  $y$  pa  $L/R_2$ . Na sliki (4.4) je stabilno območje delovanja resonatorjev, kot ga razberemo iz enačbe (4.14), označeno senčeno. Opazimo, da je možnih veliko različnih vrst stabilnih resonatorjev, ob tem da resonatorji, ki so sestavljeni iz dveh konveksnih zrcal, niso nikoli stabilni. Če je eno zrcalo ravno (plankonkavni resonatorji), je grlo Gaussovega snopa vedno na ravnem zrcalu. V primeru konveksno-konkavnega resonatorja leži grlo snopa izven resonatorja. Podrobneje si oglejmo nekaj posebnih primerov stabilnih resonatorjev.

### Simetrični resonatorji

Za simetrični resonator velja  $R_1 = R_2 = R$ . Na diagramu (slika 4.4) se taki resonatorji nahajajo na simetrali lihih kvadrantov pri  $x = y$ . Pri simetričnih resonatorjih je grlo v sredini resonatorja in enačba (4.13) se poenostavi v

$$z_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(2R - L)L}. \quad (4.15)$$

Polmer grla v simetričnem resonatorju je enak

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \sqrt[4]{(2R - L)L}. \quad (4.16)$$



Slika 4.4: Področje stabilnih resonatorjev. Resonator je stabilen, če sta parametra  $L/R_1$  in  $L/R_2$  znotraj osenčenega območja: (a) konfokalni resonator, (b) koncentrični resonator, (c) planparalelni resonator (Fabry-Perot), (d) konveksno-konkavni resonator in (e) plankonkonkavni resonator.

Po enačbi (3.19) lahko izračunamo še polmer snopa na ogledalu

$$w_1^2 = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{L}{2z_0} \right)^2 \right] = \frac{\lambda}{\pi} \frac{R\sqrt{L}}{\sqrt{2R-L}}. \quad (4.17)$$

Pri izbrani dolžini simetričnega resonatorja je polmer snopa na zrcalu najmanjši, kadar je  $R = L$ . Tedaj sovpadata geometrijski gorišči obeh zrcal, zato imenujemo tak resonator konfokalni. Hiter račun pokaže, da velja  $z_0 = L/2$ , snop od grla do zrcala pa se razširi za  $w_1/w_0 = \sqrt{2}$ .

---

**Naloga 4.2.2** Pokaži, da je polmer snopa na izhodnem zrcalu v simetričnem resonatorju z danimi parametromi  $R$  in  $L$  najmanjši, kadar je resonator konfokalni.

---

Pri dejanskem načrtovanju laserjev imamo dodatno omejitve, saj želimo ojačevalno sredstvo, ki je v resonatorju, čim boljše izrabiti. Pogosto je zato polmer grla snopa razmeroma velik. Iz enačbe (4.16) sledi, da mora biti v tem primeru velik tudi krivinski radij zrcal. S tem pridobimo na ojačanju, po drugi strani pa se nekoliko poslabša stabilnost.

Poglejmo primer. Naj bo dolžina resonatorja laserja  $L = 1$  m in valovna dolžina  $\lambda = 633$  nm. Tedaj je v konfokalni geometriji po enačbi (4.16) polmer grla  $w_0 = 0,32$  mm. Premer razelektrične cevi je navadno nekaj milimetrov in približno tako debel mora biti tudi svetlobni snop, če naj dobro izkoristi ojačanje zaradi stimuliranega sevanja. Da bi pri isti dolžini laserja dobili grlo s premerom 2 mm, moramo vzeti zrcali s krivinskim radijem okoli 50 m. Primer kaže, da že majhna ukrivljenost zrcal zagotovi dokaj ozke snope.

 Izkaže se, da so konfokalni resonatorji najmanj občutljivi na majhne zasuke zrcal. Pri zasuku zrcala se v navadnih stabilnih resonatorjih namreč premakne os, ki gre skozi krivinski središči obeh zrcal. Če želimo, da je največji odmik nove osi čim manjši, uporabimo konfokalne resonatorje.

Skrajna primera stabilnega simetričnega resonatorja sta koncentrični resonator, pri katerem sovpadata krivinski središči zrcal in  $L = 2R$ , in planparalelni resonator, pri katerem sta zrcali ravni. V prvem primeru gre po enačbi (4.16) polmer grla proti nič, v drugem pa raste sorazmerno z  $R^{1/4}$ . Pri ravnih zrcalah postanejo uklonske izgube na robovih znatne. Račun z Gaussovimi snopi tedaj ni več veljaven in treba je uporabiti pristope, ki jih bomo opisali v razdelku (4.6).

Spomnimo se, da obstajajo poleg osnovnega Gaussovega snopa še rešitve obosne enačbe z vozli v prečni smeri, to so snopi višjega reda. Imajo enak parameter  $z_0$  in enako ukrivljenost valovnih ploskev, zato so seveda tudi dobre rešitve za polje v stabilnih resonatorjih. Pri tem je treba vedeti, da je pri enakem  $w_0$  dejanski polmer snopa reda  $n$  za približen faktor  $\sqrt{n}$  večji (glej nalogo 3.4.1). Če želimo dobiti iz laserja samo osnovni Gaussov snop (imenovan tudi  $TEM_{00}$ ), ki ima od vseh snopov najbolj gladko valovno fronto in ima najmanjšo divergenco pri danem  $w_0$ , pogosto uporabimo zaslonko, ki snope višjih redov poreže, ali kakšen drug element, na primer Fabry-Perotov etalon, ki poveča izgube za snope višjega reda.

 V praksi se včasih uporabljujejo tudi nestabilni resonatorji, to je taki, za katere ne obstajajo rešitve v obliki Gaussovih snopov. Taki resonatorji imajo velike izgube na robovih zrcal, ker žarki v njih niso ujeti. Uporabni so v laserjih z velikim ojačanjem. Njihova prednost je, da je cel volumen resonatorja enakomerno pokrit s svetlobo.

### 4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom

V prejšnjem razdelku smo izpeljali pogoj za stabilnost resonatorja, sestavljenega iz dveh zrcal s polmeroma  $R_1$  in  $R_2$ , ki sta med seboj oddaljeni za  $L$ . Izhajali smo iz pogoja, da se ukrivljenost valovnih front na zrcalu ujema z ukrivljenostjo zrcal. Vendar so sistemi, kjer imamo zgolj dve zrcali, razmeroma redki. Pogosto so v resonatorju druge optične komponente, ki jih je treba upoštevati pri zapisu kriterija za stabilnost. Takrat si pomagamo z matrikami ABCD.

Izhajamo iz zahteve, da se v stabilnem resonatorju snop po enem celotnem obhodu preslika sam vase. Gaussov snop na neki točki v resonatorju zapišemo s kompleksno ukrivljenostjo (enačba 3.30). V najpreprostejšem primeru resonatorja snop prepotuje dano razdaljo, se odbije od zrcala, prepotuje resonator v nasprotni smeri, se odbije od drugega zrcala in se vrne v začetno lego. V bolj zapletenih primerih dodamo še prehode skozi druge optične elemente. Matriko za celotni prehod potem zapišemo kot produkt matrik ABCD za posamezne prehode  $M = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1$ . Končni produkt za celoten obhod je matrika oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

kompleksni krivinski radij po prehodu pa je enak začetnemu kompleksnemu radiju

$$q_2 = \frac{Aq + B}{Cq + D} = q. \quad (4.19)$$

Gornjo enačbo prepišemo v

$$Cq^2 + (D - A)q - B = 0. \quad (4.20)$$

Da dobimo realno vrednost  $w$ , mora biti  $q$  kompleksen in diskriminanta negativna

$$(D - A)^2 + 4BC < 0. \quad (4.21)$$

Upoštevamo še, da je determinanta matrike  $AD - BC = 1$  in dobimo pogoj za stabilnost, zapisan s koeficienti matrike  $M$ :

$$-1 < \left( \frac{A+D}{2} \right) < 1. \quad (4.22)$$

**Naloga 4.3.1** Pokaži, da je za resonator z dolžino  $L$  in s konkavnima zrcaloma s krivinskima radijema  $R_1$  in  $R_2$  pogoj za stabilnost (enačba 4.23) ekvivalenten pogoju (4.14).

Podoben, a malo bolj zapleten račun lahko naredimo tudi za resonatorje, v katerih se snop ne vrne v svojo začetno obliko po enem obhodu, ampak je teh obhodov  $n$ . Potem zapišemo matriko  $M$  kot produkt elementov v enem obhodu, celotna matrika pa je enaka  $M^n$ . Iz pogoja, da matrika ne divergira za velike  $n$ , dobimo pogoj za stabilnost, ki je natančno enak pogoju (4.23), ki smo ga ravnokar izpeljali.

## 4.4 Resonančne frekvence

Doslej smo obravnavali le prostorsko obliko polja v resonatorju, ničesar pa še nismo povedali o časovni odvisnosti lastnih nihanj. Frekvence lastnih nihanj dobimo iz pogoja, da se mora faza snopa pri enem obhodu (preletu resonatorja v obeh smereh) spremeniti za mnogokratnik  $2\pi$ . Fazo za osnovni snop zapišemo po enačbi (3.27)

$$kz + \frac{kr^2}{2R} - \eta(z) = kz - \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (4.23)$$

pri čemer gledamo valovanje na osi, pri  $r = 0$ . Razlika faze pri enem preletu je

$$\frac{\omega_n}{c}L - \left[ \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \right] = n\pi \quad (4.24)$$

Pri tem smo zanemarili, da lahko pride do dodatne majhne spremembe faze pri odboju na zrcalu. Ta za delček valovne dolžine spremeni efektivno dolžino resonatorja, ki je niti ne poznamo tako natančno. Iz istega razloga za osnovni snop ni treba upoštevati člena v oglatem oklepaju enačbe (4.25). Tako dobimo znano enačbo za resonančne frekvence

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}. \quad (4.25)$$

Razmik med dvema zaporednima lastnima frekvencama je v skladu z enačbo (4.5)

$$\Delta\omega = \frac{\pi c}{L}. \quad (4.26)$$

Za snope višjega reda, ki imajo vozle v prečni smeri, je fazni premik odvisen tudi od števila vozlov. Tako je na primer v cilindričnih koordinatah (enačba 3.36)

$$\eta_{p,l}(z) = (2p + l + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \quad (4.27)$$

Resonančni pogoj zapišemo kot

$$\frac{\omega_{n,p,l}}{c} L - (2p + l + 1) \left[ \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \right] = n\pi. \quad (4.28)$$

Resonančne frekvence so torej odvisne tudi od števila prečnih vozlov (slika 4.6), kar je dodaten razlog, da v laserjih vzbujamo le osnovno lastno nihanje.



Slika 4.5: Resonančne frekvence za skoraj planparalelni ( $R \gg L$ ) resonator.

Zanimiv in praktično pomemben je primer konfokalnega resonatorja, pri katerem je  $z_0 = L/2$  in  $\arctan(L/2z_0) = \arctan(1) = \pi/4$ . Resonančne frekvence so

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L} \left[ n + \frac{1}{2}(2p + l + 1) \right]. \quad (4.29)$$

Za snope, pri katerih je  $2p + l$  liho število, dobimo iste resonančne frekvence kot za osnovne snope, pri sodih  $2p + l$  pa dobimo še resonance na sredini med osnovnimi. Razmik med sosednjimi frekvencami je tako  $\Delta\nu = c/4L$  in konfokalni interferometer se obnaša kot dvakrat daljši planparalelni. To lahko razumemo tudi iz geometrijske slike: žarek, ki vstopi v konfokalni interferometer vzporedno z osjo, se šele po dveh preletih vrne sam vase.



Slika 4.6: V konfokalnem resonatorju se žarek šele po dveh preletih vrne sam vase.

Pri skoraj planparalelnem resonatorju je  $z_0 \gg L$ ,  $\arctan(L/2z_0)$  lahko razvijemo, upoštevamo enačbo (4.15) in dobimo

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L} \left[ n + (2p + l + 1) \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2L}{R}} \right]. \quad (4.30)$$

Ker je  $L$  majhen v primerjavi z  $R$ , so resonance snopov nizkega prečnega reda zelo blizu resonancam osnovnih snopov, niso pa čisto enake. Poglejmo primer. Vzemimo simetrični resonator z dolžino  $L = 1$  m in krivinskim radijem zrcal  $R = 50$  m, valovna dolžina pa naj bo  $\lambda = 500$  nm. Z uporabo enačbe (4.15) hitro lahko izračunamo  $z_0 = 4,97$  m. Ker je pogoj  $z_0 \gg L$  izpolnjen, lahko uporabimo gornji približek. Razlika med frekvencama za dva zaporedna osnovna snopa

$$\Delta\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L} = 940 \text{ MHz}, \quad (4.31)$$

medtem ko je razlika med frekvencama dveh prečnih snopov

$$\Delta\omega_{n,p,l} = \frac{c}{L} \sqrt{\frac{2L}{R}} = 60 \text{ MHz}. \quad (4.32)$$

## 4.5 Izgube v resonatorjih

Energija lastnega nihanja odprtrega resonatorja ni konstantna, ampak se počasi zmanjšuje iz več vzrokov:

1. Odbojnost ogledal ni enaka 1. Tudi če bi znali narediti popolno odbojna zrcala, tak resonator ne bi bil uporaben, saj nihanja ne bi mogli sklopiti z zunanjim poljem. Če torej hočemo dobiti nekaj svetlobe iz laserja ali filtrirati vpadajoči snop, mora biti odbojnost zrcal manjša od 1.
2. Na sredstvu in na optičnih elementih v resonatorju pride do absorpcije in sipanja svetlobe. Te izgube želimo navadno čim bolj zmanjšati.
3. Uklonske izgube so odvisne od premera zrcal in premera snopa na njih. V dani geometriji imajo najmanjši polmer osnovni snopi, snopi višjega reda so širši, zato imajo večje uklonske izgube. Merilo za uklonske izgube je Fresnelovo število (enačba 4.6)  $N_F = a^2/(L\lambda)$ , kjer je  $a$  polmer ogledal. Pri enakem  $N_F$  je polmer snopa na izhodnem zrcalu najmanjši, če je resonator konfokalni, zato ima tak resonator tudi najmanjše uklonske izgube (glej analogo 4.2.2). Če je  $N_F$  znatno večji od 1, kar navadno je, so uklonske izgube zanemarljive.

Vse izgube lahko popišemo z razpadnim časom za energijo nihanja

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau}W, \quad (4.33)$$

in

$$W = W_0 e^{-\frac{2t}{\tau}}, \quad (4.34)$$

pri čemer  $\tau$  imenujemo življenjski ali razpadni čas nihanj. Izguba energije na celoten obhod resonatorja je

$$-dW = (1 - \mathcal{R}_1)W + (1 - \mathcal{R}_2)W + \Lambda_0 W = \Lambda W. \quad (4.35)$$

Z  $\mathcal{R}_1$  in  $\mathcal{R}_2$  smo označili odbojnosti zrcal, od katerih je navadno ena kolikor mogoče blizu 1. Parameter  $\Lambda_0$  popiše absorpcijo in sipanje znotraj resonatorja ter morebitne uklonske izgube. Tipične vrednosti zanj so do nekaj stotink. Celotne izgube popišemo s parametrom  $\Lambda$ .

Razpadni čas nihanja lahko neposredno povežemo z izgubami, če v enačbo (4.34) vstavimo čas enega obhoda  $t = 2L/c$ . Dobimo

$$\frac{dW}{W} = \Lambda = -\frac{2}{\tau} \frac{2L}{c}, \quad (4.36)$$

od koder sledi

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\Lambda c}{4L} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{c}{4L}[(1 - \mathcal{R}_1) + (1 - \mathcal{R}_2)], \quad (4.37)$$

kjer smo s

$$\tau_0 = \frac{4L}{\Lambda_0 c} \quad (4.38)$$

označili razpadni čas zaradi notranjih izgub.

Notranje izgube so navadno zelo majhne, odbojnosc enega zrcala pa je približno enaka 1, tako da dobimo za življenjski čas nihanj približno

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{4L}(1 - \mathcal{R}). \quad (4.39)$$

Zaradi dušenja se energija lastnih nihanj eksponentno zmanjšuje, prav tako tudi amplituda jakosti električnega polja. Amplituda pojema z dvakrat daljšim karakterističnim časom, ki je enak kar  $\tau$ . Spekter eksponentno pojemajoče funkcije lahko izračunamo (glej nalogo 2.4.2) in dobimo Lorentzovo krivuljo s širino črte, ki ustreza ravno

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{1}{\tau}. \quad (4.40)$$

Lastne frekvence torej niso neskončno ozke, ampak imajo končno širino  $2/\tau$ . Poglejmo primer. Naj bodo notranje izgube na en obhod  $\Lambda_0 = 0,01$ , eno zrcalo naj bo idealno, drugo naj ima odbojnosc  $\mathcal{R} = 0,93$ . Dolžina resonatorja naj bo  $L = 0,5$  m, valovna dolžina pa 500 nm. Tedaj je  $1/\tau = 12 \cdot 10^6$  s<sup>-1</sup>. Zanimivo je pogledati razmerje med razmikom med zaporednima resonančnima frekvencama  $\Delta\omega$  (enačba 4.5) in širino resonance  $2/\tau$ . Dobimo  $\Delta\omega\tau/2 \approx 80$ .



Namesto razpadnega časa  $\tau$  se pogosto za opis izgub uporablja dobrota resonatorja, ki jo vpeljemo kot razmerje med resonančno frekvenco in širino črte

$$Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega_{1/2}}. \quad (4.41)$$

Za tipične optične resonatorje dobimo resonančno frekvenco  $\omega_n \sim 10^{15}$  Hz, širino pa smo izračunali, da je reda  $1/\tau \sim 10^7$  Hz. Faktor dobrote je tako  $Q \sim 10^8$ . Optični resonatorji imajo zelo velike faktorje dobrote!

Poglejmo še primer, ko so notranje izgube zanemarljive in sta odbojnosti obeh zrcal enaki. Potem dobimo iz enačbe (4.37)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{2L}(1 - \mathcal{R}). \quad (4.42)$$

Do istega rezultata pridemo tudi z razvojem izraza za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra (enačba 4.9) okoli vrha pri  $\omega_n$ :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2 L \frac{c}{(\omega - \omega_n)}} \approx \frac{1}{1 + \left[ \frac{2}{(1-\mathcal{R})} \frac{L}{c} (\omega - \omega_n) \right]^2}, \quad (4.43)$$

kjer smo upoštevali še, da je odbojnosc blizu  $\mathcal{R} \approx 1$ . Dobimo znano Lorentzovo krivuljo oblike

$$T = \frac{(\Delta\omega_{1/2})^2}{(\omega - \omega_n)^2 + (\Delta\omega_{1/2})^2}, \quad (4.44)$$

od koder hitro razberemo

$$\frac{1}{\tau} = \Delta\omega_{1/2} = \frac{c}{2L}(1 - \mathcal{R}). \quad (4.45)$$

## 4.6 \*Obravnavava z uklonskim integralom

V nestabilnih resonatorjih stacionarna rešitev v obliki stoječega Gaussovega snopa ne obstaja. Zato je v takih resonatorjih poiskati rešitev za električno polje precej zahtevno. Ker pa je problem soroden uklonu, ga lahko obravnavamo s pomočjo uklonske teorije.

Naj bo električno polje v točki  $P_1$  prvega zrcala  $E_1$ . Polje na drugem zrcalu v točki  $P_2$  lahko zapišemo s pomočjo Kirchhoffovega uklonskega integrala (enačba 1.56)

$$E_2 = -\frac{i}{2\lambda} \int_1 E_1(P_1) \frac{e^{ikr}(1 + \cos \vartheta)}{r} dS_1 \quad (4.46)$$

$$= \int_1 E_1(P_1) K(P_1, P_2) dS_1, \quad (4.47)$$

kjer je  $r$  razdalja med točkama  $P_1$  in  $P_2$ ,  $\vartheta$  je kot med zveznico in normalo na zrcali, druge faktorje pa smo pospravili v faktor

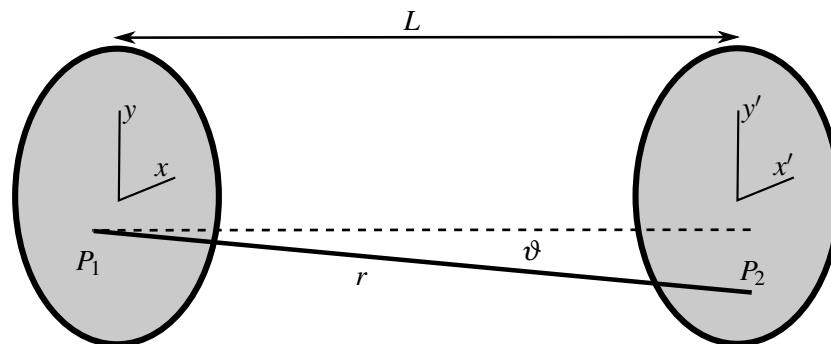
$$K(P_1, P_2) = -\frac{i}{2\lambda} \frac{e^{ikr}(1 + \cos \vartheta)}{r}, \quad (4.48)$$

ki predstavlja jedro integralske enačbe. Polje na prvem zrcalu mora biti na enak način povezano s poljem na drugem. Če naj zapisano polje predstavlja lastno nihanje resonatorja, mora biti po dveh odbojih sorazmerno začetnemu polju:

$$E_1(P) = \gamma \int_1 \int_2 E_1(P_1) K(P_1, P_2) K(P_2, P_1) dS_1 dS_2. \quad (4.49)$$

Enačba (4.48) je homogena integralska enačba, katere lastne rešitve so iskana lastna nihanja elektromagnetnega polja v resonatorju. Kompleksne lastne vrednosti  $\gamma$  določajo frekvenco in dušenje nihanj. V splošnem rešitev ni mogoče poiskati analitično in treba je uporabiti numerične metode. Najenostavnejša je iterativna metoda, pri kateri začnemo z nekim začetnim poljem in ponavljamo integracijo v enačbi (4.48), dokler se polje ne spreminja več.

Integralsko enačbo (4.48) je mogoče rešiti v posebnem primeru konfokalnega resonatorja. Prizemimo, da je brez izgub. Ker je resonator simetričen, se polje na obeh zrcalih lahko razlikuje kvečjemu za predznak. Vpeljimo kartezische koordinate na obeh zrcalih, kot kaže slika (4.7).



Slika 4.7: Koordinatna sistema na zrcalih resonatorja

Pričakujemo, da bo prečna razsežnost lastnega stanja majhna v primerjavi z dolžino resonatorja, zato lahko  $r$  razvijemo

$$r \approx L - \frac{xx' + yy'}{L}. \quad (4.50)$$

Ker obravnavamo konfokalni resonator, je krivinski radij zrcal kar enak dolžini resonatorja. V imenovalcu jedra integrala (enačba 4.47) zato lahko  $r$  nadomestimo z  $L$ . Kot med zveznico točk na obeh zrcalih in normalo na zrcali so majhni, zato je  $\cos \vartheta \approx 1$ .

Tako iz enačbe (4.46) dobimo

$$E(x',y') = \pm \frac{ie^{ikL}}{\lambda L} \int E(x,y) \exp\left[\frac{-ik(xx' + yy')}{L}\right] dx dy. \quad (4.51)$$

Integracija poteka po celiem zrcalu. Jedro integrala je produkt dveh faktorjev, ki vsebujejo vsak le  $x'$  ali  $y'$  koordinati. Zato poiščimo rešitev enačbe (4.50) v obliki produkta  $E(x',y') = E_0 f(x') g(y')$ . S tem nastavkom morata biti funkciji  $f(x')$  in  $g(y')$  rešitvi enačbe

$$\alpha f(x') = \int f(x) \exp\left[\frac{-ikxx'}{L}\right] dx, \quad (4.52)$$

kjer je  $\alpha$  še neznana konstanta. Meje integrala so od enega do drugega roba zrcala. Če je zrcalo dovolj veliko, pričakujemo, da je polje na robu dovolj majhno, da lahko meje vzamemo kar od  $-\infty$  do  $\infty$ . Vpeljimo še brezdimenzijski koordinati

$$X' = x' \sqrt{k/L} \quad \text{in} \quad Y' = y' \sqrt{k/L} \quad (4.53)$$

in dobimo

$$\alpha f(X') = \sqrt{\frac{L}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} f(X) e^{-iXX'} dX \quad (4.54)$$

ter podobno enačbo za  $g(Y')$ . Enačba (4.54) pravi, da mora biti  $f(X)$  podobna svoji Fourierovi transformiranki. Najpreprostejša funkcija s to lastnostjo je Gaussova funkcija

$$f(X) = \exp[-\frac{1}{2}X^2]. \quad (4.55)$$

Polje na zrcalu ima tako po pričakovanju obliko Gaussovega snopa

$$E(x,y) = E_0 \exp\left[-\frac{k(x^2 + y^2)}{2L}\right]. \quad (4.56)$$

Poglejmo še konstanto  $\alpha$ . Imeti mora imeti vrednost  $\alpha = \sqrt{2\pi L/k} = \sqrt{\lambda L}$ . Enaki izrazi veljajo tudi za smer  $y$ . Postavimo zdaj izračunano električno poljsko jakost (enačba 4.56) z ustrezno vrednostjo za  $\alpha$  v enačbo (4.50) in upoštevajmo, da mora biti  $E_2 = \pm E_1$ . Dobimo

$$i\alpha^2 \frac{e^{ikL}}{\lambda L} = ie^{ikL} = \pm 1. \quad (4.57)$$

Dobimo resonančni pogoj za frekvenco lastnega stanja, ki ga že poznamo (enačba 4.30)

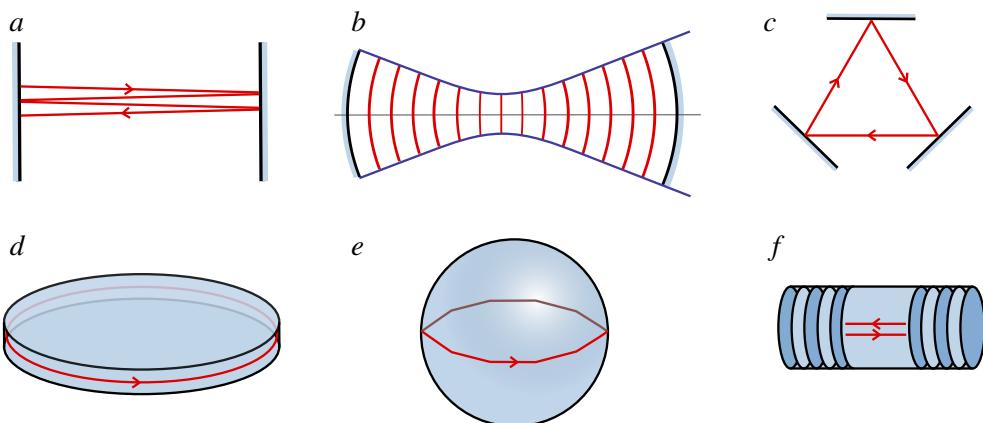
$$\omega_n = ck_n = \frac{c}{L}(2n+1)\frac{\pi}{2}. \quad (4.58)$$

Integralna enačba, dobljena iz uklonske teorije, tako da isti rezultat kot stoječe valovanje oblike Gaussovih snopov, ki so rešitve obosne valovne enačbe. To nas seveda ne preseneča, saj je obosna valovna enačba enako natančna kot Fresnelova uklonska teorija.

**Naloga 4.6.1** Pokaži, da so funkcije, ki so sorazmerne svoji Fourierovi transformaciji, Hermite-Gaussove funkcije (enačba 3.31), in izračunaj lastne frekvence stanj višjega reda.



V tem poglavju smo obravnavali samo dva primera laserskih resonatorjev: Fabry-Perotov resonator z dvema vzporednima ravnimi zrcaloma (a) in resonator z dvema sferičnima zrcaloma (b). Poleg teh dveh primerov je v uporabi še cela vrsta različnih resonatorjev. Ciklični resonator (c) je sestavljen iz več zrcal in žarek ciklično potuje med njimi. V vlakenskih laserjih je resonator kar vlakno med dvema zrcaloma ali pa ciklično sklenjeno vlakno. Kot laserski resonator lahko delujejo tudi mikroploščice (d) ali mikrokroglice (e), v katere je s totalnim odbojem ujeta svetloba. Namesto zrcal v mikroresonatorjih uporabimo tudi periodične dielektrične strukture, na katerih pride do Braggovega odboja (f).



## 5. Interakcija svetlobe s snovjo

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali svetlobo v praznem prostoru. Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. To je seveda zelo obširna tema in jo bomo obdelali le toliko, kolikor je treba za obravnavo ojačevanja svetlobe s stimulirano emisijo, ki je osnova za delovanje laserjev. Najprej bomo na kratko pogledali termodinamsko ravnovesje svetlobe v stiku s toplotnim rezervoarjem, torej sevanje črnega telesa, ki zahteva kvantno obravnavo elektromagnetnega polja. Nato bomo vpeljali fenomenološki Einsteinov opis mikroskopskih procesov absorpcije, spontane in stimulirane emisije in pokazali, da ti procesi niso neodvisni. Izpeljali bomo izraze za absorpcijski koeficient in koeficient ojačanja, na koncu poglavja pa bomo nakazali še kvantomehansko izpeljavo verjetnosti za prehod atoma iz višjega energijskega stanja v nižje s sevanjem.

### 5.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja

Ravni valovi so enostavne in zelo prikladne rešitve valovne enačbe (1.14), zato jih pri reševanju problemov pogosto uporabimo kot bazo, po kateri razvijemo elektromagnetno polje. Možen je razvoj po celotnem prostoru, vendar je tedaj nekoliko nerodna normalizacija baznih funkcij. Če je omejimo na le del prostora, se temu problemu izognemo. Mora pa biti izbrani del prostora dovolj velik, da končni rezultat ni odvisen od izbire njegove velikosti in oblike.

Najpreprosteje je vzeti votlino v obliki velike kocke s stranico  $L$  in idealno prevodnimi stenami. Rešitve Maxwellovih enačb (1.1 do 1.4) znotraj take votline so ob upoštevanju robnih pogojev (1.10) stoječa valovanja. Zapišemo jih v obliki

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos \frac{\pi l x}{L} \sin \frac{\pi m y}{L} \sin \frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t}, \\ E_y &= E_{y0} \sin \frac{\pi l x}{L} \cos \frac{\pi m y}{L} \sin \frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t}, \\ E_z &= E_{z0} \sin \frac{\pi l x}{L} \sin \frac{\pi m y}{L} \cos \frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

kjer so  $l, m$  in  $n$  cela števila. Vsako stoječe valovanje je določeno z valovnim vektorjem

$$\mathbf{k} = \left( \frac{\pi l}{L}, \frac{\pi m}{L}, \frac{\pi n}{L} \right), \quad (5.2)$$

katerega velikost je povezana s frekvenco  $k = \omega/c$ . Iz Maxwellove enačbe za prazen prostor (enačba 1.3)  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  sledi  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ . Za vsako trojico števil  $l, m, n$  imamo tako le dve neodvisni polarizaciji.

**Naloga 5.1.1** Pokaži, da stoječe valovanje, zapisano v obliki (5.1), reši valovno enačbo v kocki s stranico  $L$  in zadosti robnim pogojem idealno prevodnih sten votline.

Preštejmo, koliko je lastnih nihanj v intervalu velikosti valovnega vektorja med  $k$  in  $k + dk$  - to smo na hitro naredili že pri obravnavni resonatorjev (enačba 4.1). Možni valovni vektorji tvorijo tridimenzionalno mrežo v prvem oktantu prostora vseh valovnih vektorjev. Razmik med dvema zaporednima mrežnima točkama v smeri ene od osi je  $\pi/L$ . Število točk v osmini krogelne plasti med  $k$  in  $k + dk$  je za dovolj velike  $l, m$  in  $n$  enako volumnu plasti, deljenemu z volumnom, ki pripada posamezni mrežni točki, to je  $(\pi/L)^3$ . Upoštevati moramo še, da imamo pri vsakem  $\mathbf{k}$  dve polarizaciji, in dobimo

$$dN = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \pi k^2 dk. \quad (5.3)$$

Zapišemo število nihanj na enoto volumna

$$\rho(k) dk = \frac{k^2}{\pi^2} dk \quad (5.4)$$

in ga prevedemo na frekvenčno odvisnost

$$\rho(v) dv = \frac{8\pi v^2}{c^3} dv. \quad (5.5)$$

oziroma

$$\rho(\omega) d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \quad (5.6)$$

Številu nihanj na frekvenčni interval in enoto volumna votline  $\rho(\omega)$  pravimo gostota stanj.

Vsote po lastnih valovanjih, to je po dovoljenih vrednostih valovnega vektorja  $k$  lahko s pomočjo gostote stanj spremenimo v integrale po  $k$  ali po  $\omega$

$$\sum_k \dots \rightarrow V \int \rho(k) \dots dk = V \int \rho(\omega) \dots d\omega. \quad (5.7)$$

Označimo zdaj brezdimenzijski krajevni del rešitve (5.1) z  $E_\alpha$ , kjer  $\alpha$  označuje vsa tri cela števila  $l, m$  in  $n$  in še obe možni polarizaciji, da bo manj pisave. Pripadajoče magnetno polje izračunamo z Maxwellovo enačbo (1.2)

$$\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = i\omega \mathbf{B}_\alpha. \quad (5.8)$$

Polja  $\mathbf{E}_\alpha$  in  $\mathbf{B}_\alpha$  tvorijo poln ortogonalen sistem, zato lahko vsako elektromagnetno polje v votlini razvijemo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}} \sum_\alpha p_\alpha(t) \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \quad \text{in} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= i\sqrt{\frac{\mu_0}{V}} c_0 \sum_\alpha \omega_\alpha q_\alpha(t) \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Postavimo razvoj (5.9) v Maxwellovi enačbi (1.2 in 1.1), upoštevamo zvezo (5.8) in njej analogno za rotor magnetnega polja in dobimo

$$p_\alpha = \dot{q}_\alpha \quad \text{in} \quad \omega_\alpha^2 q_\alpha = -\dot{p}_\alpha, \quad (5.10)$$

od koder sledi še

$$\ddot{p}_\alpha + \omega_\alpha^2 p_\alpha = 0. \quad (5.11)$$

Ta enačba da seveda pričakovano odvisnost od časa oblike  $e^{-i\omega_\alpha t}$ .

Z upoštevanjem razvoja (enačbi 5.9) lahko zapišemo še energijo polja – Hamiltonovo funkcijo<sup>1</sup>

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}) dV = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2). \quad (5.12)$$

Enačbi (5.11) in (5.12) kažeta, da lahko elektromagnetno polje v votlini obravnavamo kot sistem neodvisnih harmonskih oscilatorjev. Pri tem se koeficienti razvoja  $p_{\alpha}$  in  $q_{\alpha}$  obnašajo kot impulzi in koordinate.

Prehod v kvantno mehaniko dosežemo tako, da klasičnim spremenljivkam impulza in koordinate pripredimo operatorje  $\hat{p}_{\alpha}$  in  $\hat{q}_{\alpha}$ , ki morajo zadoščati komutacijskim pravilom

$$[\hat{q}_{\alpha}, \hat{p}_{\beta}] = i\hbar\delta_{\alpha,\beta}. \quad (5.13)$$

Iz kvantne mehanike vemo, da so lastne vrednosti energije harmonskega oscilatorja, opisanega s Hamiltonianom (enačba 5.12), enake

$$W_{n,\alpha} = \hbar\omega_{\alpha}(n_{\alpha} + \frac{1}{2}), \quad n_{\alpha} = 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

Celotna energija kvantiziranega elektromagnetskoga polja v votlini je torej

$$W = \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha} n_{\alpha}, \quad (5.15)$$

pri čemer smo izpustili ničelno energijo. Izpuščali jo bomo tudi v nadaljevanju, saj je to energija osnovnega stanja, ki se ne more sprostiti.

**Razliki energije harmonskega oscilatorja, če se  $n_{\alpha}$  spremeni za 1, pravimo foton.** Iz same konstrukcije vidimo, da je pojem fotona vezan na določen opis elektromagnetskoga polja – reprezentacijo. V njej na primer vprašanje, kje se foton nahaja, očitno nima smisla.

## 5.2 Sevanje črnega telesa

Obravnavajmo sevanje v votlini, ki je v toplotnem ravnovesju s stenami s temperaturo  $T$ . Iz statistične fizike vemo, da verjetnost  $P$ , da je v izbranem stanju votline  $\alpha$   $n_{\alpha}$  fotonov, zapišemo s kanonično porazdelitvijo

$$P(n_{\alpha}) = \frac{e^{-W_{n,\alpha}/k_B T}}{\sum_{n_{\alpha}} e^{-W_{n,\alpha}/k_B T}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_{\alpha}n_{\alpha}}}{\sum_{n_{\alpha}} e^{-\beta\hbar\omega_{\alpha}n_{\alpha}}} = e^{-\beta\hbar\omega_{\alpha}n_{\alpha}}(1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\alpha}}), \quad (5.16)$$

pri čemer  $\beta = 1/k_B T$  in  $k_B$  Boltzmannova konstanta. Povprečno število fotonov v stanju  $\alpha$  je potem

$$\overline{n_{\alpha}} = \sum_{n_{\alpha}} n_{\alpha} P(n_{\alpha}) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\alpha}} - 1}. \quad (5.17)$$

S tem izrazom lahko tudi verjetnost  $P(n)$  zapišemo nekoliko drugače

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{1+n}}. \quad (5.18)$$

---

<sup>1</sup>Irski fizik in matematik Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865.

Ravnovesno gostoto energije elektromagnetnega polja v votlini na frekvenčni interval  $u$  dobimo tako, da povprečno energijo posameznega stanja  $n_\alpha \hbar \omega_\alpha$  pomnožimo s številom stanj na frekvenčnem intervalu, to je, z gostoto stanj  $\rho(\omega)$  (enačba ref4.4)

$$u(\omega) d\omega = \hbar \omega \bar{n} \rho(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}. \quad (5.19)$$

Dobimo znano formulo za energijo na enoto volumna na enoto frekvence, to je Planckov zakon<sup>2</sup> za spekter svetlobe v toplotnem ravnovesju z okolio s temperaturo  $T$

$$u(\omega) = \hbar \omega \bar{n} \rho(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}. \quad (5.20)$$

Lahko ga zapišemo tudi z valovno dolžino in dobimo energijo na enoto volumna na interval valovne dolžine

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\beta hc/\lambda} - 1}. \quad (5.21)$$



Slika 5.1: Planckov spekter za sevanje črnega telesa pri različnih temperaturah

### 5.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje

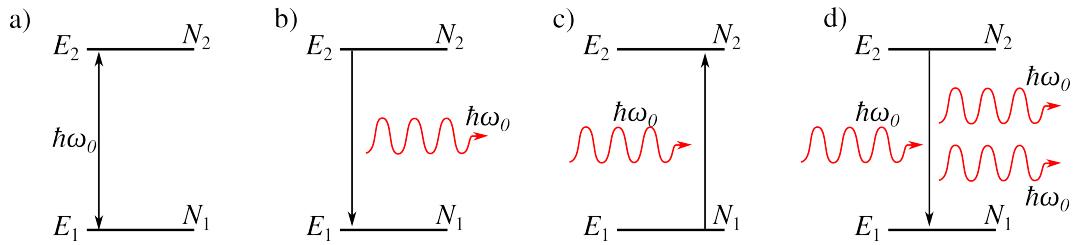
Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. Naj bo v votlini poleg elektromagnetnega polja še  $N$  atomov, ki se med seboj ne motijo. Za začetek naj bodo prav enostavni: imajo naj le dve energijski stanji z energijama  $E_1$  in  $E_2 > E_1$  (glej sliko 5.2 a).

Zaradi interakcije s poljem pri frekvenci prehoda  $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$  atomi prehajajo iz nižjega stanja v višje in obratno. Trije procesi opisujejo to prehajanje: spontano sevanje, absorpcija in stimulirano sevanje. Oglejmo si te procese bolj natančno.

#### Spontano sevanje

Vemo, da atom v vzbujenem stanju tudi brez vpliva zunanjega polja ni stabilen, temveč prej ali slej preide v nižje stanje. Temu pojavu pravimo spontano sevanje ali spontana emisija (slika 5.2 b).

<sup>2</sup>Nemški fizik in nobelovec Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947.



Slika 5.2: Shema energijskih nivojev dvonivojskega atoma (a) in prehodov med njima: spontano sevanje (a), absorpcija (b) in stimulirano sevanje (c).

Pri spontanem sevanju se izseva foton v katerokoli stanje polja v bližini frekvence prehoda. Verjetnost za prehod na enoto časa označimo z  $A_{21}$ . Karakteristični razpadni čas gornjega stanja je tako  $1/A_{21}$ .

### Absorpcija

Absorpcija fotona je prehod, pri katerem se foton z ustrezno energijo absorbira, atom pa preide iz spodnjega stanja v zgornje (slika 5.2 c). Verjetnost za prehod na časovno enoto  $r_{12}$  je sorazmerna spektralni gostoti energije polja  $u(\omega)$ , to je energiji na enoto volumna in frekvenčni interval, pri frekvenci prehoda  $\omega_0$

$$r_{12} = B_{12}u(\omega_0). \quad (5.22)$$

Vpeljali smo sorazmernostni koeficient  $B_{12}$ . Pri absorpciji se seveda zmanjša število fotonov v enem od stanj polja pri frekvenci  $\omega_0$ .

### Stimulirano sevanje

Tretji pojav je prehod atoma iz gornjega stanja v spodnje zaradi interakcije s poljem. Temu procesu pravimo stimulirano sevanje ali stimulirana emisija. Tudi verjetnost za stimuliran prehod na časovno enoto  $r_{21}$  je sorazmerna spektralni gostoti energije polja pri frekvenci prehoda  $\omega_0$

$$r_{21} = B_{21}u(\omega_0). \quad (5.23)$$

V tem primeru smo sorazmernostni koeficient označili z  $B_{21}$ . V primeru stimuliranega sevanja, se število fotonov v stanju, ki je prehod povzročilo, poveča za ena.

Preden nadaljujemo, se še nekoliko pomudimo pri izrazih za absorpcijo (enačba 5.22) in stimulirano emisijo (enačba 5.23). Zaradi končnega življenskega časa ima gornje stanje tudi končno spektralno širino. Zapisani enačbi (5.22) in (5.23) veljata le, kadar je spektralna gostota elektromagnetnega polja  $u(\omega)$  preko celotne širine prehoda približno konstantna (slika 5.3 a). To je gotovo res, če obravnavamo sevanje v votlini, ki je v termičnem ravnovesju (črno telo).

Če pa na atome svetimo s svetlobo s spektrom, ki je ozek v primerjavi s širino prehoda, na primer iz laserskega resonatorja, je verjetnost za prehod odvisna tudi od tega, kako blizu centralne frekvence prehoda je frekvenca vpadne svetlobe (slika 5.3 b). Naj bo  $w_{\omega R}$  gostota energije (ne spekter!) monokromatske svetlobe s frekvenco  $\omega_R$ . Tedaj lahko verjetnost za absorpcijo na časovno enoto zapišemo v obliki

$$r_{12} = B_{12}g(\omega_R)w_{\omega R}. \quad (5.24)$$



Slika 5.3: Pri izračunu verjetnosti za absorpcijo in stimulirano emisijo je pomembno, ali je širina spektralne gostote elektromagnetnega polja bistveno večja (a) ali bistveno manjša (b) glede na atomsko spektralno črto.

Pri tem funkcija  $g(\omega)$  opisuje obliko atomske spektralne črte z vrhom pri  $\omega_0$  ima vrh.

V splošnem primeru, ko se spekter vpade svetlobe spreminja v območju frekvence prehoda, moramo sešteti prispevke pri posameznih frekvencah (5.24) po ozkih frekvenčnih intervalih

$$r_{12} = B_{12} \int g(\omega) u(\omega) d\omega. \quad (5.25)$$

Če preverimo gornji zapis na primeru spektra črnega telesa, ki se ne spreminja dosti v območju prehoda, lahko  $u(\omega)$  postavimo pred integral in po pričakovanju dobimo znano enačbo (5.22). Iz tega sledi, da mora biti funkcija  $g(\omega)$  normirana

$$\int g(\omega) d\omega = 1. \quad (5.26)$$

Zelo pogosto je  $g(\omega)$  Lorentzove oblike

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \quad (5.27)$$

Za grobe ocene lahko funkcijo  $g(\omega)$  aproksimiramo tudi s pravokotnikom širine  $\delta\omega \simeq \gamma$  in višine  $1/\delta\omega$ .

### Einsteinovi koeficienti

Vrnimo se k fenomenološkim koeficientom  $A_{21}$ ,  $B_{21}$  in  $B_{12}$ , ki jih je vpeljal Einstein<sup>3</sup>. S temi koeficienti, pravimo jim tudi Einsteinovi koeficienti, je mogoče uspešno opisati velik del pojavov pri interakciji svetlobe s snovjo.

Vpeljimo pojem zasedenost stanj, ki pove število atomov v določenem stanju. Ker obravnavamo preproste modele atomov z zgolj dvema stanjema, zapišemo samo dve zasedenosti. Naj bo  $N_1$  zasedenost spodnjega stanja,  $N_2$  zasedenost zgornjega, skupno število atomov pa  $N = N_1 + N_2$ . V prisotnosti svetlobe se bo število atomov v spodnjem in zgornjem stanju v splošnem spremenjalo, skupno število pa se bo ohranjalo.

Obravnavajmo termično ravnovesje, ko je spekter svetlobe bistveno širši od širine atomskega prehoda (slika 5.3 a), tako da lahko uporabljamo enačbi (5.22) in (5.23). Zasedenost zgornjega nivoja se zmanjšuje zaradi spontanih in stimuliranih prehodov v spodnje stanje, povečuje pa se zaradi absorpcije s spodnjega stanja. To zapišemo z enačbo

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - r_{21}N_2 + r_{12}N_1 = -A_{21}N_2 - B_{21}u(\omega_0)N_2 + B_{12}u(\omega_0)N_1. \quad (5.28)$$

<sup>3</sup>Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.

Zaradi ohranitve skupnega števila atomov velja

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{-dN_2}{dt}. \quad (5.29)$$

V termičnem ravnovesju sta zasedenosti konstantni, tako da lahko zapišemo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}u(\omega_0)N_2 - B_{12}u(\omega_0)N_1 = 0. \quad (5.30)$$

Vemo pa, da mora biti v termičnem ravnovesju spektralna gostota energije sevanja  $u(\omega)$  kar termična Planckova gostota  $u_T(\omega)$ . Izrazimo najprej spektralno gostoto iz enačbe (5.30)

$$u_T(\omega_0) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}}. \quad (5.31)$$

Vemo tudi, da v termičnem ravnovesju za zasedenosti  $N_1$  in  $N_2$  velja kanonična porazdelitev

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2-E_1)} = e^{-\beta\hbar\omega_0}, \quad (5.32)$$

kjer je  $\beta = 1/k_B T$ . Sledi

$$u_T(\omega_0) = \frac{A_{21}/B_{12}}{e^{\beta\hbar\omega_0} - B_{21}/B_{12}}. \quad (5.33)$$

Za določitev koeficientov primerjamo gornji izraz s Planckovo formulo za  $u_T(\omega_0)$  (enačba 5.20). Očitno morata biti koeficienta  $B_{21}$  in  $B_{12}$  enaka (če sta stanji nedegenerirani), med  $A_{21}$  in  $B_{12}$  pa velja zveza

$$A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B_{12} \quad \text{in} \quad B_{12} = B_{21}. \quad (5.34)$$

Koeficient pred  $B_{12}$  je ravno enak gostoti stanj elektromagnetnega polja  $\rho(\omega)$  (enačba 5.6), pomnoženi z energijo fotona  $\hbar\omega$ . Videli bomo, da to ni slučajno in da sledi iz verjetnosti za prehod v kvantni elektrodinamiki (poglavlje 5.9). Pozoren bralec je lahko tudi opazil, da je z enačbo (5.33), ki smo jo dobili le z uporabo kanonične porazdelitve za atome, že določena oblika Planckove formule, ne da bi karkoli rekli o fotonih.

## 5.4 Absorpcijski koeficient

V prejšnjem razdelku smo napovedali, da lahko velik del pojavov pri interakciji svetlobe s snovjo opišemo z Einsteinovimi koeficienti. Poskusimo zdaj koeficiente  $A_{21}$  in  $B_{21}$  povezati z makroskopskim absorpcijskim koeficientom plina atomov.

Naj na izbran volumen plina vpada snop svetlobe s frekvenco  $\omega$ , ki je blizu frekvence atomskega prehoda  $\omega_0$ . Gostota vpadnega energijskega toka je  $j_\omega = w_\omega c$  (enačba 1.33), pri čemer je  $w_\omega$  gostota energije. Obravnavajmo primer, ko je spekter vpadnega snopa ozek v primerjavi s širino atomskega prehoda (slika 5.3 b). V tej obliki zapisane enačbe bodo bolj priročne pozneje pri obravnavi laserja. Privzemimo še, da je stanje stacionarno.

Ko svetloba vpade na plast plina debeline  $dz$ , se gostota energijskega toka zmanjša zaradi absorpcije in hkrati poveča zaradi stimulirane emisije (slika 5.5). Spontano sevanje, ki je seveda tudi prisotno, lahko zanemarimo, saj bo izsevano na vse strani enakomerno in ga bo le zelo



Slika 5.4: K absorpciji snopa svetlobe v plasti atomov

majhen del v smeri snopa. Spremembra energije snopa na enoto časa je enaka razlike med številom absorpcij in stimuliranih prehodov na enoto časa, pomnoženih z energijo fotona. To popišemo z enačbo

$$dP = S dj = (N_2 - N_1) \frac{S dz}{V} \hbar \omega r_{12} = (N_2 - N_1) \frac{S dz}{V} \hbar \omega B_{21} g(\omega) w_\omega, \quad (5.35)$$

pri čemer smo verjetnost z prehod izrazili iz enačbe (5.24). S  $S$  smo označili presek snopa, z  $V$  pa volumen plina. Tako dobimo enačbo za spremenjanje gostote toka

$$dj = \frac{1}{V} (N_2 - N_1) B_{21} g(\omega) \frac{\hbar \omega}{c} j_\omega dz \quad (5.36)$$

Priročno je vpeljati še presek za absorpcijo ali stimulirano sevanje

$$\sigma(\omega) = \frac{B_{21} g(\omega) \hbar \omega}{c}. \quad (5.37)$$

Z njim se izraz (5.36) poenostavi v

$$\frac{dj}{dz} = \frac{N_2 - N_1}{V} \sigma(\omega) j. \quad (5.38)$$

Navadno imamo opravka s plinom, ki je blizu termičnega ravnotesja, zato je  $N_2 < N_1$  in je  $dj/dz$  negativen. V tem primeru pride do absorpcije z absorpcijskim koeficientom

$$\mu(\omega) = \frac{N_1 - N_2}{V} B_{21} g(\omega) \frac{\hbar \omega}{c} = \frac{N_1 - N_2}{V} \sigma(\omega), \quad (5.39)$$

za gostoto energijskega toka pa velja enačba

$$\frac{dj}{j} = -\mu dz. \quad (5.40)$$

Energija se pri absorpciji na našem plinu dvonivojskih atomov seveda ne izgublja, temveč le siplje. Atom, ki je prešel v vzbujeno stanje, se s spontano emisijo vrne nazaj v osnovno, svetloba pa se izseva na vse strani – se siplje.

## 5.5 Nasičenje absorpcije

Čeprav je na prvi pogled enačba (5.40) za zmanjševanje gostote svetlobnega toka pri prehodu skozi absorbirajoči plin preprosta, je ni mogoče enostavno integrirati, saj je  $\mu$  odvisen od gostote

energijskega toka. Pri dovolj veliki gostoti svetlobnega toka namreč z absorpcijo znaten delež atomov preide v višje stanje, zaradi česar se zmanjša razlika  $N_1 - N_2$ , posledično se pa zmanjša tudi absorpcijski koeficient – absorpcija se nasiti. Zato temu pojavi pravimo nasičenje absorpcije. Obravnavajmo ga še matematično.

Obravnavajmo snop monokromatske svetlobe, ki vpada na plin. Atomi v plinu prehajajo med nivoji zaradi absorpcije, spontane in stimulirane emisije. Podobno kot smo zapisali enačbo (5.30) za termično ravnovesje v primeru širokega spektra, zapišemo stacionarno enačbo za naš primer kot

$$A_{21}N_2 + B_{21}g(\omega)(N_2 - N_1)\frac{j}{c} = 0, \quad (5.41)$$

pri čemer smo za verjetnost za prehod namesto enačbe (5.23) vzeli enačbo (5.24). Zasedenosť višjega stanja  $N_2$  lahko izrazimo s celotnim številom atomov  $N$  in razliko zasedenosťi

$$N_2 = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}(N_2 - N_1). \quad (5.42)$$

S tem lahko izračunamo razliko zasedenosťi

$$N_2 - N_1 = -\frac{N}{1 + 2\frac{B_{21}g(\omega)}{cA}j}. \quad (5.43)$$

Pri majhni gostoti toka  $j$  so praktično vsi atomi v osnovnem stanju in prispevajo k absorpciji. Pri velikih gostotah toka pa imenovalec gornjega izraza močno naraste, razlika zasedenosťi gre proti nič in absorpcija se zmanjšuje. Ko drugi člen v imenovalcu enačbe (5.43) doseže vrednost 1, pravimo, da gostota energijskega toka doseže vrednost saturacijske gostote. Zapišemo jo kot

$$j_s(\omega) = \frac{cA_{21}}{2B_{21}g(\omega)} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^2 g(\omega)}, \quad (5.44)$$

pri čemer smo upoštevali zvezo (5.34) med koeficientoma  $A_{21}$  in  $B_{21}$ . Kot vidimo, je saturacijska gostota odvisna le od frekvence vpadnega valovanja in širine atomskega prehoda. Za črto z valovno dolžino okoli 600 nm in širino črte  $10^8 \text{ s}^{-1}$  znaša saturacijska gostota svetlobnega toka okoli  $20 \text{ mW/cm}^2$ . Tako gostoto toka v ozek frekvenčni interval je z običajnimi svetili, na primer plinsko razelektritveno cevjo, praktično nemogoče doseči, medtem ko jo iz laserjev dobimo z lahkoto. Izraz za razliko zasedenosťi stanj lahko zapisemo v pregledni obliki

$$N_2 - N_1 = -\frac{N}{1 + \frac{j}{j_s(\omega)}}. \quad (5.45)$$

Vstavimo gornji izraz v enačbo za zmanjševanje gostote toka (enačba 5.38) in dobimo

$$dj = -\frac{\mu_0}{1 + \frac{j}{j_s}} j dz, \quad (5.46)$$

kjer smo z  $\mu_0 = NB_{21}g(\omega)\hbar\omega/Vc$  označili absorpcijski koeficient pri majhnih gostotah vpadnega toka. Enačbo brez težav integriramo in dobimo

$$\ln \frac{j}{j_0} + \frac{1}{j_s}(j - j_0) = -\mu_0 z, \quad (5.47)$$

kjer smo z  $j_0$  označili začetno gostoto toka. Kadar je ta dosti manjša od  $j_s$ , lahko drugi člen v



Slika 5.5: Pojemanje gostote svetlobnega toka v absorbirajočem plinu

gornji enačbi zanemarimo in dobimo navadno eksponentno pojemanje

$$j = j_0 e^{-\mu_0 z}. \quad (5.48)$$

Pri zelo velikih vpadnih gostotah pa lahko zanemarimo prvi člen in dobimo, da je pojemanje zgolj linearno

$$j = j_0 - \mu_0 j_s z = j_0 - \frac{N}{2V} A \hbar \omega z. \quad (5.49)$$

V primeru močnega vpadnega toka je zasedenost spodnjega in zgornjega nivoja skoraj enaka in je absorpcija omejena s tem, kako hitro se atomi vračajo v osnovno stanje preko spontanega sevanja, kar je razvidno tudi iz zadnje oblike izraza (5.49).

## 5.6 Optično ojačevanje

V prejšnjih razdelkih smo obravnavali prehod svetlobe skozi dvonivojski plin. V primeru termičnega ravnovesja je zgornji nivo manj zaseden od spodnjega in v plinu pride do absorpcije svetlobe. Če pa nekako dosežemo primer, da je  $N_2 > N_1$ , se bo snop svetlobe pri prehodu skozi tako pripravljen plin ojačeval. Takemu primeru pravimo stanje obrnjene zasedenosti. Tako stanje seveda ni v termičnem ravnovesju in ga je treba vzdrževati z dovajanjem energije plinu. Dovajjanju energije pravimo tudi optično črpanje. Načinov, kako dosežemo obrnjeno zasedenost z optičnim črpanjem je veliko. Oglejmo si nekaj primerov.

V plinih je najpogosteji način vzbujanja z električnim tokom. Elektroni, ki so glavni nosilci toka, se zaletavajo v atome ali ione in jih vzbujajo na višje nivoje, pri čemer lahko pride do obrnjene zasedenosti med nekim parom nivojev. Pogost proces v plinih je tudi prenos energije med atomi s trki. Vzemimo mešanico dveh plinov, pri katerih se nek nivo enih atomov ujema po energiji s stanjem drugih atomov. Vzbujen atom prve vrste lahko pri trku predstavi energijo brez sevanja atomu druge vrste, ki iz osnovnega stanja preide v ustrezni višji nivo. Če je pod tem nivojem še drugo vzbujeno stanje, bomo med njima dobili obrnjeno zasedenost, kadar je življenski čas gornjega nivoja daljši od spodnjega.

V trdnih neprevodnih kristalih sta v optičnem področju absorpcija in sevanje pri določeni valovni dolžini navadno posledica primesi. Obrnjeno zasedenost para nivojev primesi največkrat dobimo tako, da kristal obsevamo s svetlobo s frekvenco, ki ustreza prehodu na nek nivo nad izbranim parom. Tak način optičnega črpanja deluje tudi v organskih barvilih.

V polprevodnikih dosežemo obrnjeno zasedenost med prevodnim in valenčnim pasom z vbrizgavanjem elektronov in vrzeli v območje p-n spoja z električnim tokom v prevodni smeri. Možen mehanizem vzbujanja so tudi kemične reakcije. Po reakciji lahko produkti ostanejo v vzbujenem stanju in lahko dobimo obrnjeno zasedenost med paroma stanj.

Nekoliko bolj podrobno si bomo nekaj teh mehanizmov ogledali v nadaljevanju na konkretnih laserjih. Zaenkrat si kot primer oglejmo le model optičnega črpanja plina atomov s tremi stanji.

## 5.7 Optično črpanje trinivojskega sistema

Naj imajo atomi poleg osnovnega stanja z energijo  $E_0$ , označimo ga  $|0\rangle$ , še dve vzbujeni stanji z energijo  $E_1$  (stanje  $|1\rangle$ ) in energijo  $E_2 > E_1$  (stanje  $|2\rangle$ ). Na plin svetimo s svetlobo, ki vzbuja atome iz stanja  $|0\rangle$  v stanje  $|2\rangle$ , pri čemer je lahko spektralna gostota  $u_p$  črpalne svetlobe široka. Poleg tega naj se po plinu širi še monokromatska svetloba s frekvenco  $\omega$  blizu frekvence prehoda  $\omega_0$  med stanjema  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$  in z gostoto energije  $w$ . Ugotoviti želimo, pri kakšnih pogojih lahko dosežemo obrnjeno zasedenost med stanjema  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$  in s tem ojačevanje svetlobe okoli frekvence  $\omega_0$ .



Slika 5.6: Shema energijskih nivojev trinivojskega sistema in prehodov med njimi (a). V plinskih laserjih imamo navadno stanje obrnjene zasedenosti med drugim in prvim vzbujenim stanjem (b), v navadni trdninskih laserjih (npr. rubinskem) pa med prvim vzbujenim in osnovnim stanjem (c).

Zapišimo enačbe za spremjanje zasedenosti posameznih stanj. Osnovno stanje se prazni zaradi absorpcije črpalne svetlobe in polni zaradi spontanih prehodov iz stanj  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$ , stimulirane prehode iz stanja  $|2\rangle$  pa bomo zanemarili. Zasedenost stanja  $|2\rangle$  se povečuje zaradi absorpcije s spodnjimi nivoji in zmanjšuje zaradi spontanega in stimuliranega sevanja. Srednje stanje se polni s stimuliranimi in spontanimi prehodi iz stanja  $|2\rangle$  in prazni zaradi absorpcije v  $|2\rangle$  in spontanih prehodov v  $|0\rangle$ . Pri tem velja, da je vsota vseh zasedenosti enaka številu vseh atomov:  $N_0 + N_1 + N_2 = N$ . Zasedbene enačbe so torej

$$\frac{dN_0}{dt} = -rN + A_{20}N_2 + A_{10}N_1 \quad (5.50)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1 + B_{21}g(\omega)w(N_2 - N_1) + A_{21}N_2 \quad (5.51)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = rN_0 - A_{20}N_2 - A_{21}N_2 + B_{21}g(\omega)w(N_1 - N_2), \quad (5.52)$$

pri čemer predpostavili, da je  $N_0 \approx N \gg N_1, N_2$  in zato lahko črpanje  $B_{20}u_p(N_0 - N_2)$ , ki je praktično konstantno, zapisali s koeficientom  $r$ . Mehanizem črpanja smo tako skrili v  $r$  in prav ni pomembno, na kakšen način poteka.

Zanima nas stacionarno stanje, ko so vsi trije časovni odvodi enaki nič. Brez škode lahko tudi zanemarimo spontano sevanje iz stanja  $|2\rangle$  v osnovno stanje. Tako iz druge enačbe sistema (5.51) dobimo

$$B_{21}g(\omega)wN_2 + A_{21}N_2 = B_{21}g(\omega)wN_1 + A_{10}N_1 \quad (5.53)$$

in

$$N_2 = \frac{B_{21}g(\omega)w + A_{10}}{B_{21}g(\omega)w + A_{21}}N_1. \quad (5.54)$$

Ob upoštevanju zveze, ki jo dobimo iz prve enačbe sistema (5.50)

$$N_1 = \frac{rN}{A_{10}}, \quad (5.55)$$

zapišemo razliko zasedenosti kot

$$N_2 - N_1 = \left( \frac{N_2}{N_1} - 1 \right) N_1 = \frac{A_{10} - A_{21}}{A_{21} + B_{21}g(\omega)w} \frac{rN}{A_{10}}. \quad (5.56)$$

Iz gornje enačbe sledi, da dobimo obrnjeno zasedenost, če je  $A_{10} > A_{21}$ , torej kadar je razpadni čas stanja  $|1\rangle$  kraši kot razpadni čas stanja  $|2\rangle$ . Tak rezultat smo seveda lahko pričakovali.

V praktični primerih navadno velja  $A_{10} \gg A_{21}$ . Ob upoštevanju zveze  $j = wc$  povežemo razliko zasedenosti z gostoto vpadnega svetlobnega toka

$$N_2 - N_1 = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + \frac{B_{21}g(\omega)j}{cA_{21}}} = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + j/j_s}. \quad (5.57)$$

Konstante  $cA_{21}/B_{21}g(\omega)$  smo pospravili v  $j_s$ , ki ga bomo imenovali saturacijska gostota svetlobnega toka. Vidimo, da je dobljen izraz zelo podoben saturacijski gostoti za dvonivojski sistem (enačba 5.44), razlika je le v faktorju 2. Do te razlike pride zaradi različnega števila stanj in pogoj  $N_1 + N_2 = N$  ne velja več.

---

**Naloga 5.7.1** Pokaži, da je saturacijska gostota toka  $j_s$  odvisna le od frekvence valovanja in širine atomske črte  $\delta\omega$ .

---

Poglejmo zdaj, kaj se ob vpodu na plast trinivojskega plina zgodi s svetlobo s frekvenco  $\omega$  in gostoto svetlobnega toka  $j = wc$ . Račun je zelo podoben računu pri absorpciji (enačba 5.36). Zapišemo spremembo gostote toka na debelini  $dz$

$$dj = \frac{1}{V} (N_2 - N_1) B_{21}g(\omega) \frac{\hbar\omega}{c} j dz, \quad (5.58)$$

pri čemer gostota toka  $j = wc$  nastopa tudi v izrazu za razliko zasedenosti (enačba 5.57). Če to upoštevamo, dobimo diferencialno enačbo za gostoto toka

$$\frac{1}{j} \left( 1 + \frac{j}{j_s} \right) dj = G dz \quad (5.59)$$

oziroma

$$dj = \frac{G}{1 + \frac{j}{j_s}} j dz, \quad (5.60)$$

ki je spet zelo podobna enačbi za absorpcijo (enačba 5.46). Z  $G$  smo označili t.i. koeficient ojačanja pri majhnih vpadnih gostotah toka. Podan je z

$$G = \frac{rNB_{21}\hbar\omega g(\omega)}{VcA_{21}}. \quad (5.61)$$

Rešitev diferencialne enačbe je prikazana na sliki (5.7).



Slika 5.7: Naraščanje gostote svetlobnega toka pri optičnem ojačanju

Obnašanje gostote svetlobnega toka ima, tako kot pri absorpciji, dva režima. Pri majhnih gostotah toka  $j \ll j_s$  je naraščanje eksponentno

$$j(z) = j_0 e^{Gz}. \quad (5.62)$$

Pri velikih gostotah toka pride do nasičenja in gostota svetlobnega toka se ojačuje linearno z razdaljo

$$j(z) = \tilde{j}_0 + j_s G z = \tilde{j}_0 + \frac{rN}{V} \hbar \omega z. \quad (5.63)$$

V tem primeru je gostota toka dovolj velika, da vsi atomi, ki jih s črpanjem spravimo v najvišje stanje, preidejo v stanje  $|1\rangle$  s stimuliranim sevanjem. Pri konstantnem črpanju je tedaj linearno naraščanje gostote toka razumljivo.

## 5.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte

Doslej smo predpostavili, da svetijo vsi atomi obravnavane snovi pri isti frekvenci  $\omega_0$  in z isto spektralno širino, ki smo jo popisali s funkcijo  $g(\omega)$ , z vrhom pri  $\omega_0$ . Če to drži, pravimo, da je razširitev spektralne črte homogena. Primera homogene razširitve sta naravna širina in razširitev zaradi trkov med atomi. Funkcija  $g(\omega)$  je v tem primeru Lorentzove oblike

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (5.64)$$

s širino črte  $\gamma$ .

Spektralna črta je lahko razširjena tudi zato, ker vsi atomi ne svetijo pri povsem enaki frekvenci. Tedaj govorimo o nehomogeni razširitvi. Najpomembnejši primer nehomogene razširitve je

Dopplerjeva razširitev v plinu. Atomi plina vedno sevajo pri praktično isti frekvenci, vendar jih zaradi gibanja opazovalec v mirujočem (laboratorijskem) sistemu v skladu z Dopplerjevim pojavom zazna pri različnih frekvencah. Tako so frekvence  $\omega$  posameznih atomov odvisne od hitrosti  $v$  atoma glede na smer opazovanja. Zapišemo jih kot

$$\omega = \omega_0 - \frac{v}{c} \omega_0 = \omega_0 - k_0 v. \quad (5.65)$$

Označimo z  $\mathcal{N}(v)$  porazdelitev gostote atomov po hitrostih v smeri opazovanja. V termičnem ravnovesju je  $\mathcal{N}(v)$  Maxwellova porazdelitev

$$\mathcal{N}(v) = \frac{N}{V} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}. \quad (5.66)$$

Porazdelitev atomov po frekvencah dobimo tako, da hitrost izrazimo iz enačbe (5.65), pri čemer dobljeno funkcijo  $g_D(\omega)$  normiramo tako. Dobimo

$$g_D(\omega) = \frac{c}{\omega_0} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mc^2}{2k_B T} \frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0}}. \quad (5.67)$$

Dopplerjeva razširitev v plinu je torej Gaussove oblike. Njena širina pri polovični višini<sup>4</sup> je

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{mc^2}} \omega_0. \quad (5.68)$$

**Naloga 5.8.1** Izpelji obliko nehomogeno razširjene črte za Dopplerjevo razširitev (enačba 5.67) in pokaži, da je njena širina podana z enačbo (5.68).

Izračunajmo Dopplerjevo razširitev na primeru He-Ne laserja. Za prehod atoma neonja pri 632,8 nm in temperaturi 300 K dobimo  $\Delta\omega_D = 8 \times 10^9$  Hz. Nehomogena Dopplerjeva razširitev v redkem plinu je navadno nekaj redov velikosti večja od homogene naravne širine in razširitve zaradi trkov.

## 5.9 \*Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte

V razdelku (5.5) smo obravnavali nasičenje absorpcije pri homogeno razširjenem prehodu. Pri nasičenju absorpcije, kadar prevladuje nehomogena razširitev, nastopijo pomembni novi pojavi, zato si to podrobnejše oglejmo.

Naj na plin vpada močan snop monokromatske svetlobe s frekvenco  $\omega$ , ki je blizu osrednje frekvence  $\omega_0$  Dopplerjevo razširjene črte. S svetlobo lahko sodeluje le skupina atomov, pri kateri se Dopplerjevo premaknjena frekvanca od  $\omega$  ne razlikuje več kot za homogeno širino, ki jo opisuje funkcija  $g(\omega)$ . Zato ne moremo zapisati zasedbenih enačb za vse atome hkrati, ampak le za tiste, ki imajo hitrost med  $v$  in  $v + dv$  in ki absorbirajo pri frekvenci  $\omega_0 - kv$ .

Naj sta  $\mathcal{N}_1(v)$  in  $\mathcal{N}_2(v)$  hitrostni porazdelitvi atomov v spodnjem in v zgornjem stanju. Enačba za spremenjanje gostote  $\mathcal{N}_2(v)$  je analogna enačbi (5.28) za celotno zasedenost v homogenem primeru

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -A\mathcal{N}_2(v) - Bg(\omega - \omega_0 + kv) \frac{j_\omega}{c} [\mathcal{N}_2(v) - \mathcal{N}_1(v)], \quad (5.69)$$

<sup>4</sup>To širino imenujemo FWHM – Full width at half maximum.

kjer je  $j_\omega$  gostota vpadnega svetlobnega toka. Upoštevali smo, da je zaradi Dopplerjevega pojava prehod premaknjen k frekvenci  $\omega_0 - kv$ . Velja tudi

$$\mathcal{N}_1(v) + \mathcal{N}_2(v) = \mathcal{N}(v) \quad \text{in} \quad \frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -\frac{d\mathcal{N}_1(v)}{dt}. \quad (5.70)$$

Vpeljimo  $\mathcal{Z}(v) = \mathcal{N}_2(v) - \mathcal{N}_1(v)$ . Podobno kot v enačbi (5.42) zapišemo

$$\mathcal{N}_2(v) = 1/2\mathcal{N}(v) + 1/2\mathcal{Z}(v) \quad (5.71)$$

in dobimo

$$\dot{\mathcal{Z}}(v) = -A\mathcal{Z}(v) - A\mathcal{N}(v) - 2Bg(\omega - \omega_0 + kv)\frac{j_\omega}{c}\mathcal{Z}(v). \quad (5.72)$$

V stacionarnem stanju je

$$\mathcal{Z}(v) = \frac{\mathcal{N}(v)}{1 + \frac{2B}{Ac}g(\omega - \omega_0 + kv)j_\omega}. \quad (5.73)$$

Če je nasičenje majhno, lahko imenovalec v gornji enačbi razvijemo

$$\mathcal{Z}(v) \simeq \mathcal{N}(v)[1 - \frac{2B}{Ac}g(\omega - \omega_0 + kv)j_\omega]. \quad (5.74)$$

Porazdelitev  $\mathcal{Z}(v)$  je podobna nemoteni porazdelitvi atomov po hitrosti  $\mathcal{N}(v)$ , le da je pri hitrosti  $v = (\omega_0 - \omega)/k$  zmanjšana zaradi vpliva vpadne svetlobe, ki jo atomi s to hitrostjo lahko absorbirajo in s tem prehajajo v gornje stanje. V porazdelitvi atomov v spodnjem stanju tako nastane vdolbina, pravijo ji tudi Bennetova vdolbina, v gornjem stanju, ki je bilo na začetku prazno, pa dobimo ustrezni ozek vrh (Slika ??). Širina vdolbine je določena s homogeno širino prehoda, to je s funkcijo  $g(\omega - \omega_0 + kv)$ , globina pa z gostoto vpadnega toka.

Zapišimo sedaj absorpcijski koeficient pri neki frekvenci  $\omega'$ , ki ga izmerimo tako, da na plin posvetimo z dodatnim, šibkim testnim snopom. Upoštevati moramo, da k absorpciji prispevajo vsi atomi, katerih hitrost je taka, da je prehod dovolj blizu  $\omega'$ . Zato dobimo absorpcijski koeficient s seštevanjem po porazdelitvi  $\mathcal{Z}(v)$

$$\mu(\omega') = \frac{\hbar\omega'}{c} \int \mathcal{Z}(v)Bg(\omega' - \omega_0 + k'v)dv \quad (5.75)$$

Homogena razširitev je navadno dosti manjša od Dopplerjeve širine. V prvem približku vzemimo, da lahko  $g(\omega)$  nadomestimo kar z  $\delta(\omega)$ , pri čemer to ne smemo narediti tudi v imenovalcu izraza za  $\mathcal{Z}(v)$ . Tako dobimo V drugi vrstici smo uporabili približek ???. Odvisnost  $\mu(\omega')$ , ki jo izmerimo tako, da spremojmo frekvenco testnega snopa  $\omega'$ , je Gaussove oblike z vdolbino pri  $\omega$  in je podobna porazdelitvi  $\mathcal{Z}(v)$ , kot jo kaže slika ???. Vdolbina ima obliko homogeno razširjene črte. Merjenje nasičenja absorpcije s testnim žarkom torej omogoča dobiti obliko homogene črte kljub mnogo večji nehomogeni Dopplerjevi razširitvi in je zato v moderni spektroskopiji velikega pomena.

Absorpcijski koeficient za prvi, močan vpadni snop dobimo s tem, da v gornjem izrazu postavimo  $\omega' = \omega$ .  $\mathcal{N}((\omega - \omega')/k)$  opisuje običajno Gaussovo obliko Dopplerjevo razširjene črte, izraz v oglatem oklepaju pa da zmanjšanje absorpcije zaradi nasičenja, ki je odvisno le od vrednosti  $g(0)$  in zato enako pri vseh  $\omega$ . Z enim samim snopom izmerjena črta je kljub nasičenju še vedno Gaussove oblike. Vdolbina, ki jo izzge svetloba v hitrostni porazdelitvi atomov, s takim preprostim opazovanjem ne moremo zaznati.

Namesto z dvema različima snopoma, od katerih lahko enemu spremojmo frekvenco, lahko vdolbino v porazdelitvi zaznamo tudi z enim snopom spremenljive frekvence, ki se po prvem prehodu skozi plin odbije od ogledala in vrne v nasprotni smeri. S tem se v porazdelitvi atomov v spodnjem stanju simetrično pri hitrostih  $\pm(\omega_0 - \omega)/k$  pojavit dve vdolbini. Kadar je  $\omega$  blizu  $\omega_0$ , se začneta obe vdolbini prekrivati, stopnja nasičenja se poveča in s tem se celotna absorpcija po dveh prehodih zmanjša (Slika ??).

Zapišimo še enačbe za ta primer. Snop povzroči spremembo zasedenosti pri prehodu skozi plin v obeh smereh, zato je sedaj

$$\mathcal{Z}(v) \simeq \mathcal{N}(v) \left\{ 1 - \frac{2B}{Ac} j_\omega [g(\omega - \omega_0 + kv) + g(\omega - \omega_0 - kv)] \right\}. \quad (5.76)$$

Enako kot prej je absorpcijski koeficient za širjenje svetlobe v pozitivni smeri

$$\begin{aligned} \mu_+(\omega) &= \frac{\hbar\omega}{c} B \int \mathcal{Z}(v) g(\omega - \omega_0 + kv) dv \\ &\simeq \hbar B \mathcal{N} \left( \frac{\omega - \omega_0}{k} \right) \left\{ 1 - \frac{2B}{Ac} [g(0) + g(2(\omega - \omega_0))] j_\omega \right\}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Ker je  $\mathcal{Z}(v) = \mathcal{Z}(-v)$ , je izraz za absorpcijo v negativni smeri enak. Pri  $\omega = \omega_0$  je nasičenje večje in absorpcija se zato zmanjša. Izmerjeni absorpcijski profil ima na sredini vdolbino, ki je zopet podobna homogeno razširjeni črti. Faktor 2 v argumentu funkcije  $g(2(\omega - \omega_0))$  je posledica našega grobega približka, ko smo v integraciji  $g(\omega - \omega_0 + kv)$  nadomestili kar z  $\delta$  funkcijo. Natančnejši račun pokaže, da je vrh pri  $\omega_0$  kar oblike  $g(\omega - \omega_0)$  (Naloga).

## 5.10 Izpeljava verjetnosti za prehod

Verjetnosti za prehod atoma iz enega stanja v drugo s sevanjem, ki smo jih opisali s fenomenološkimi Einsteinovimi koeficienti  $A_{21}$  in  $B_{21}$  (razdelek 5.3), je mogoče izpeljati tudi drugače. Pri tem se poslužimo kvantne elektrodinamike, kar pomeni kvantno obravnavo tako atoma kot elektromagnetnega polja. Povsem strog račun je zahteven in presega okvir te knjige, zato si na kratko oglejmo le, kako pridemo do rezultata s perturbacijsko metodo.

Postavimo dvonivojski atom v votlino z elektromagnetskim poljem. Izračunajmo verjetnost, da zaradi interakcije s poljem atom preide iz stanja  $|2\rangle$  v stanje  $|1\rangle$ , pri čemer se število fotonov v izbranem stanju elektromagnetnega polja  $\alpha$  poveča z  $n_\alpha$  na  $n_\alpha + 1$ . V vseh ostalih stanjih polja naj bo število fotonov enako nič.

Med atomom in poljem privzemimo električno dipolno interakcijo

$$\hat{H}_i = -e\hat{E}(\mathbf{r}, t)\hat{x}, \quad (5.78)$$

kjer je  $\hat{x}$  operator koordinate elektrona v atomu. Privzeli smo, da je nihajoče polje polarizirano v smeri osi  $x$ . Stanja celotnega sistema, to je atoma in polja, zapišimo v obliki produkta atomskih stanj in stanja elektromagnetnega polja, pri čemer moramo navesti število fotonov v vsakem nihanju votline  $\alpha$

$$|i, \{n_\alpha\}\rangle \equiv |i\rangle |\{n_\alpha\}\rangle. \quad (5.79)$$

Začetno stanje celotnega sistema naj bo tako  $|2, n_\alpha\rangle$ , kar pomeni, da je atom v gornjem stanju, polje pa ima  $n_\alpha$  fotonov v enem samem stanju  $\alpha$ . Ustrezno končno stanje je  $|1, n_\alpha + 1\rangle$ .

V prvem redu teorije motenj je verjetnost za prehod iz začetnega v končno stanje na časovno enoto enaka

$$w_{21} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle 1, n_\alpha + 1 | \hat{H}_i | 2, n_\alpha \rangle|^2 \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \quad (5.80)$$

Z delta funkcijo izberemo le prehoda, pri katerih se ohranja energija.

Operator elektromagnetnega polja lahko po enačbi (5.9) razvijemo po lastnih nihanjih votline

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}} \sum_\alpha \hat{p}_\alpha(t) E_\alpha(\mathbf{r}), \quad (5.81)$$

kjer je  $\hat{p}_\alpha$  operator impulza nihanja  $\alpha$ ,  $E_\alpha$  pa funkcija, ki popisuje krajevno odvisnost polja. Vemo, da se vsako elektromagnetno nihanje votline obnaša kot harmonski oscilator. Zato lahko vpeljemo kreacijske in anihilacijske operatorje

$$\hat{a}_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}} (\omega_\alpha \hat{q}_\alpha - i\hat{p}_\alpha) \quad (5.82)$$

$$\hat{a}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}} (\omega_\alpha \hat{q}_\alpha + i\hat{p}_\alpha). \quad (5.83)$$

Kreacijski operatorji povečujejo, anihilacijski pa znižujejo število fotonov v danem stanju

$$\hat{a}_\alpha^\dagger |n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha + 1} |n_\alpha + 1\rangle \quad \text{in} \quad (5.84)$$

$$\hat{a}_\alpha |n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha} |n_\alpha - 1\rangle. \quad (5.85)$$

Edini od nič različni matrični elementi so tako oblike

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha + 1 | \hat{a}_\alpha^\dagger | n_\alpha \rangle &= \sqrt{n_\alpha + 1} && \text{in} \\ \langle n_\alpha - 1 | \hat{a}_\alpha | n_\alpha \rangle &= \sqrt{n_\alpha}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Operatorje  $\hat{p}_\alpha$  zdaj lahko izrazimo s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji in jih vstavimo v razvoj električnega polja (enačba 5.72). Dobimo

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = -i \sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}} (\hat{a}_\alpha^\dagger - \hat{a}_\alpha) E_\alpha(\mathbf{r}). \quad (5.87)$$

Nadaljujemo z izračunom potrebnega matričnega elementa. Operator koordinate  $\hat{x}$  deluje le na atomski del stanja,  $\hat{E}$  pa le na elektromagnetno polje, zato velja

$$\langle 1, n_\alpha + 1 | \hat{H}_i | 2, n_\alpha \rangle = -e \langle 1, n_\alpha + 1 | \hat{E} \hat{x} | 2, n_\alpha \rangle \quad (5.88)$$

$$= -e \langle 1 | \hat{x} | 2 \rangle \langle n_\alpha + 1 | \hat{E} | n_\alpha \rangle. \quad (5.89)$$

Vstavimo polje, ki smo ga izrazili s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji (enačba 5.78), upoštevamo zvezi (5.77) in dobimo

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha + 1 | \hat{E} | n_\alpha \rangle &= -i \sum_\beta \sqrt{\frac{\hbar\omega_\beta}{2V\varepsilon_0}} \langle n_\alpha + 1 | \hat{a}_\beta^\dagger - \hat{a}_\beta | n_\alpha \rangle E_\beta(\mathbf{r}) \\ &= -i \sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}} \sqrt{n_\alpha + 1} E_\alpha(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Od vseh operatorjev v razvoju polja dobimo namreč od nič različen matrični element le za kreacijski operator za stanje  $\alpha$ .

Vpeljimo še simbol za matrični element koordinate med atomskimi stanji  $\langle 1|\hat{x}|2\rangle = x_{12}$ . Iskana verjetnost za prehod iz začetnega stanja, v katerem smo imeli vzbujen atom in  $n_\alpha$  fotonov, v končno stanje z atomom v osnovnem stanju in  $n_\alpha + 1$  fotonov v stanju  $\alpha$  je tako

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{V \epsilon_0} (n_\alpha + 1) E_\alpha^2(\mathbf{r}) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \quad (5.91)$$

Verjetnost za prehod je sorazmerna z  $n_\alpha + 1$  in je od nič različna, tudi če je število kvantov polja enako nič. Tedaj imamo seveda spontano sevanje. Prispevek, ki je sorazmeren s številom že prisotnih fotonov, pa predstavlja stimulirano sevanje. Prehodna verjetnost vsebuje še kvadrat prostorske odvisnosti polja  $E_\alpha^2(\mathbf{r})$ . Če ne poznamo natančnega položaja atoma ali če imamo plin atomov, ki je enakomerno porazdeljen po votlini, lahko ta člen nadomestimo kar s povprečno vrednostjo. Kadar imamo stoeče valovanje, je to  $1/2$ .

Spontana emisija je možna v vsa elektromagnetna nihanja votline s pravo frekvenco. Celotno verjetnost za prehod atoma iz vzbujenega v osnovno stanje dobimo, če seštejemo verjetnosti za prehod z izsevanim fotonom v določenem stanju. Spomnimo se, da je ta verjetnost ravno enaka Einsteinovem koeficientu  $A_{21}$  (enačba 5.34)

$$A_{21} = \sum_\alpha w_{21} = \sum_\alpha \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V \epsilon_0} \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \quad (5.92)$$

Za prostorsko odvisnost polja  $E^2(\mathbf{r})$  smo vzeli povprečje  $1/2$ . Vsoto po nihanjih lahko z uporabo enačbe (5.7) spremenimo v integral in upoštevamo enačbo (5.6). Dobimo

$$A_{21} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\hbar\epsilon_0} \int \rho(\omega_\alpha) \omega_\alpha \delta(\omega_0 - \omega_\alpha) d\omega_\alpha = \frac{e^2 \omega_0^3 x_{12}^2}{2\pi\epsilon_0\hbar c^3}. \quad (5.93)$$

Z  $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$  smo označili frekvenco prehoda. S tem smo izpeljali vrednost Einsteinovega koeficiente  $A_{21}$ .

Zaradi spontanega sevanja vzbujeno atomske stanje ne more biti popolnoma stacionarno. Poleg tega energija stanja s končnim razpadnim časom ni natančno določeno. Zato moramo verjetnost za stimulirano sevanje (enačba 5.82) malo popraviti. Delta funkcijo energije nadomestimo s končno široko funkcijo  $g(\omega)$ , ki ima vrh pri  $\omega_0$  in je njen integral enak 1. Pri tem dobimo zaradi spremembe integracijske spremenljivke še en dodaten faktor  $1/\hbar$ . Tako imamo

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V \epsilon_0 \hbar} (n_\alpha + 1) g(\omega_\alpha). \quad (5.94)$$

Einsteinov koeficient za stimulirano sevanje lahko izrazimo iz enačbe (5.24), če upoštevamo, da je gostota energije polja  $n_\alpha \hbar \omega_\alpha / V$

$$B_{21} g(\omega_\alpha) = \frac{V w_{21}}{n_\alpha \hbar \omega_\alpha g(\omega_\alpha)} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2 \epsilon_0 \hbar^2}. \quad (5.95)$$

Poglejmo še razmerje izračunanih Einsteinovih koeficientov iz enačb (5.84) in (5.86). Vidimo, da se ujema z razmerjem, ki smo ga izpeljali z uporabo Planckove formule (enačba 5.34). Prehodena pot jasno kaže zvezo med spontanim in stimuliranim sevanjem ter gostoto stanj elektromagnetnega polja.



## 6. Laser

- 6.1 Zasedbene enačbe
- 6.2 Spektralna širina enega laserskega nihanja
- 6.3 Primerjava laserjev in običajnih svetil
- 6.4 Mnogofrekvenčni laser
- 6.5 Relaksacijske oscilacije
- 6.6 Delovanje v sunkih s preklopom dobrote
- 6.7 Uklepanje faz
- 6.8 Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo
- 6.9 Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra



## 7. Primeri laserjev

- 7.1 Nd:YAG laser
- 7.2 He-Ne laser
- 7.3 Argonski ionski laser
- 7.4 Laser na ogljikov dioksid
- 7.5 Ekscimerski laser
- 7.6 Laserji na organska barvila
- 7.7 Titan-safirni laser
- 7.8 Polvodniški laser

Pri obravnavi svetlobnega valovanja v snovi smo doslej vedno privzeli linearne zveze med polarizacijo in jakostjo električnega polja (enačba 1.7). To je seveda le približek, ki je dovolj dober le pri razmeroma majhnih jakostih polja. Kadar doseže jakost polja velike vrednosti – in v laserskih snopih jih nedvomno lahko doseže – je treba upoštevati tudi višje člene v razvoju. Takrat govorimo o nelinearni optiki. V tem poglavju bomo spoznali, kakšne zanimive pojave povzroči nelinearni del polarizacije, med drugim podvajanje frekvenc, optično usmerjanje, samozbiranje laserkega snopa in fazno konjugacijo.

## 8.1 Nelinarna susceptibilnost

V linearinem približku odziva snovi velja, da je polarizacija snovi  $\mathbf{P}$  linearna funkcija električne poljske jakosti svetlobe  $\mathbf{E}$ . Takrat zapišemo

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \underline{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \underline{\epsilon} \cdot \mathbf{E} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (\underline{\epsilon} - 1) \cdot \mathbf{E}. \quad (8.1)$$

Če uvedemo še tenzor linearne susceptibilnosti

$$\chi^{(1)} = \underline{\epsilon} - 1, \quad (8.2)$$

lahko odziv snovi zapišemo strnjeno kot

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E}. \quad (8.3)$$

Ta približek je dober za majhne jakosti električnega polja. Pri večjih poljih postanejo pomembni tudi členi višjega reda v razvoju polarizacije po  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E} \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(3)} : : \mathbf{E} \mathbf{E} \mathbf{E} + \dots \quad (8.4)$$

S  $\mathbf{P}_L$  in  $\mathbf{P}_{NL}$  smo označili linearni in nelinearni del polarizacije. Nelinearni susceptibilnosti  $\chi^{(2)}$  in  $\chi^{(3)}$  sta tenzorja tretjega in četrtega ranga<sup>1</sup>. Za bolj nazorno predstavo izpišimo nelinearna dela še po komponentah

$$(\mathbf{P}_{NL,2})_i = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \quad (8.5)$$

in

$$(\mathbf{P}_{NL,3})_i = \epsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l, \quad (8.6)$$

pri čemer smo seveda upoštevali Einsteinov zapis seštevanja po indeksih.

---

<sup>1</sup>Namesto tenzorjev susceptibilnosti  $\chi$  pogosto uporabimo zapis v obliki  $d = \epsilon_0 \chi^{(2)}$  in  $f = \epsilon_0 \chi^{(3)}$ .

Podrobneje si oglejmo tenzor susceptibilnosti  $\chi^{(2)}$ . Ta tenzor je od nič različen le v snoveh, ki nimajo centra inverzije. Značilne vrednosti za snovi, ki jih pogosto uporabimo v nelinearni optiki (npr. kristali KDP, BBO in LiNbO<sub>3</sub>)<sup>2</sup> so okoli  $\chi^{(2)} \sim 10^{-12} \text{ m/V} = 1 \text{ pm/V}$ . Poglejmo, pri kolikšnem polju je nelinearni del polarizacije opazen

$$\frac{P^{\text{NL}}}{P^{\text{L}}} = \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)} E^2}{\epsilon_0 \chi_{ij} E} \sim 10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{V}} E. \quad (8.7)$$

Da bo razmerje  $P^{\text{NL}}/P^{\text{L}} = 10^{-5}$ , je potrebna gostota svetlobnega toka okoli 1 MW/cm<sup>2</sup>. To za laser ni nič posebnega, z nekoherentnim svetilom pa mnogo redov velikosti preveč. Zato je bilo mogoče nelinearne optične pojave opazovati šele po iznajdbi laserjev. Potrebno polje je tudi primerljivo polju v atomu, kar nas seveda ne preseneča.

Povejmo še nekaj o komponentah tenzorja  $\chi^{(2)}$ . Ker lahko v produktu (enačba 8.5) vrstni red  $E_j E_k$  zamenjamo, mora biti tenzor invarianten na to zamenjavo

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj}. \quad (8.8)$$

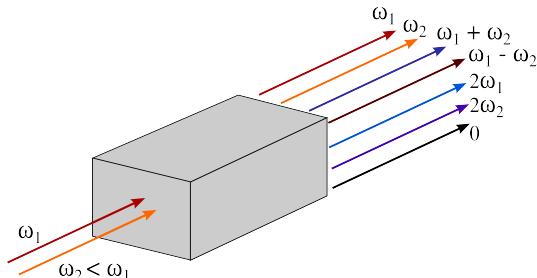
Posledično vpeljemo poenostavljen zapis, pri katerem prvi indeks prepišemo ( $x = 1, y = 2, z = 3$ ), zadnja dva indeksa zapišemo kot enega. Dogovorjene oznake so  $xx = 1, yy = 2, zz = 3, yz = 4, xz = 5, xy = 6$ . Tako na primer komponento  $\chi_{xxz}$  zapišemo kot  $\chi_{15}$ . Namesto splošnega tenzorja tretjega ranga smo torej uvedli matriko velikosti  $3 \times 6$ . Vendar koeficienti matrike niso poljubni. Kadar v snovi ni absorpcije, velja Kleinmanova zveza, zaradi katere je

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj} = \chi_{kij} = \chi_{kji} = \chi_{jik} = \chi_{jki}. \quad (8.9)$$

Dodatno se matrika poenostavi zaradi simetrijskih lastnosti kristala in navadno je le nekaj komponent matrike različnih od nič.

## 8.2 Nelinearni optični pojavi drugega reda

Imejmo nelinearni kristal s  $\chi^{(2)} \neq 0$ . Naj na tak kristal pravokotno vpadata dve valovanji s frekvencama  $\omega_1$  in  $\omega_2$ . V snovi nastajajo nova valovanja z različnimi kombinacijami frekvenc (glej sliko 8.1).



Slika 8.1: Shematski prikaz nastanka valovanj pri nelinearnih optičnih pojavih drugega reda

Nastanku valov pri podvojeni frekvenci pravimo tudi SHG (*Second harmonic generation*), nastanku valov pri vsoti frekvenc SFG (*Sum frequency generation*), pri razliki frekvenc DFG (*Difference frequency generation*) in pojavu statičnega polja pri  $\omega = 0$  optično usmerjanje.

<sup>2</sup>KH<sub>2</sub>PO<sub>4</sub> – kalijev dihidrogenfosfat; β-BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub> – beta barijev borat; LiNbO<sub>3</sub> – litijev niobat

Za opis nelinearnih pojavov drugega reda moramo rešiti valovno enačbo

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\text{NL}}}{\partial t^2}. \quad (8.10)$$

Pri tem je  $\mathbf{P}_{\text{NL}} = \epsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E} \mathbf{E}$ . Te enačbe v splošnem ne znamo rešiti in se moramo zateči k približkom.

---

**Naloga 8.2.1** Iz Maxwellovih enačb (1.1 do 1.4) izpelji nelinearno valovno enačbo (8.10).

---

Prva poenostavitev, ki jo bomo naredili, je omejitev na vzporedna vpadna žarka, ki se širita v smeri osi  $z$ . Poleg tega se bomo omejili na izračun samo enega nastalega valovanja in privzeli, da je neodvisno od drugih nastalih valovanj. Ta omejitev ni huda. Dokler sta namreč amplitudi valov pri vsoti in razliki frekvenc majhni, ju lahko obravnavamo vsako posebej. Ni sicer nujno, da sta obe nastali amplitudi vedno majhni, vendar je lahko, kot bomo videli kasneje, le en val naenkrat primerljiv z vpadnim. V snovi so tako prisotna tri valovanja: dve vpadni in tretje, novo nastalo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{2} \left[ A_1(z) e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + A_1^*(z) e^{-i(k_1 z - \omega_1 t)} \right] \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{\mathbf{e}_2}{2} \left[ A_2(z) e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} + A_2^*(z) e^{-i(k_2 z - \omega_2 t)} \right] \\ \mathbf{E}_3 &= \frac{\mathbf{e}_3}{2} \left[ A_3(z) e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} + A_3^*(z) e^{-i(k_3 z - \omega_3 t)} \right]. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Polja smo zapisali v realni obliki, to je s konjugirano-kompleksnimi deli, saj valovna enačba (8.10) ni linearna. Upoštevali smo tudi, da so zaradi nelinearne polarizacije amplitude funkcije kraja, za katere pa lahko privzamemo, da se le počasi spreminja. Njihova kompleksna vrednost dopušča pojav dodatnega faznega zamika. Za valovna števila naj seveda velja  $k_i^2 = \epsilon_i \omega^2 / c^2$ , pri čemer je  $\epsilon_i$  dielektrična konstanta pri frekvenci  $\omega_i$  in polarizaciji  $\mathbf{e}_i$ . S tem vsak od treh valov pri konstantni amplitudi reši linearne del valovne enačbe. Naša naloga je ugotoviti, kako se zaradi nelinearnosti spreminjajo amplitude posameznih valovanj. Dogovorimo se še, da bomo v tem poglavju z indeksi 1, 2 ... ločevali valove z različnimi frekvencami in polarizacijami, kartezične komponente vektorjev pa bomo označevali z  $x$ ,  $y$  in  $z$ .

Nastavek za polje, ki bo rešil nelinearno valovno enačbo, je tako

$$\mathbf{E}(z, t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{e}_j}{2} \left[ A_j(z) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + A_j^*(z) e^{-i(k_j z - \omega_j t)} \right]. \quad (8.12)$$

Izračunajmo najprej

$$\nabla^2 \mathbf{E} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{e}_j}{2} \left[ k_j^2 A_j(z) - 2ik_j \frac{dA_j(z)}{dz} \right] e^{i(k_j z - \omega_j t)} + \text{k. k.} \quad (8.13)$$

S k. k. smo označili konjugirano kompleksni del. Upoštevali smo, da se  $A_j(z)$  le počasi spreminja s krajem in smo zato njen drugi odvod zanemarili. Izračunamo še drugi odvod po času

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{e}_j}{2} (-\omega_j^2) \left[ A_j(z) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + \text{k. k.} \right]. \quad (8.14)$$

Nelinearna polarizacija vsebuje produkte polj, ki nihajo z vsemi možnimi vsotami in razlikami

parov frekvenc  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  in  $\omega_3$ . Drugi odvod nelinearnega dela polarizacije po času je tako

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\text{NL}}}{\partial t^2} &= \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{j'=1}^3 \sum_{j''=1}^3 \left( \frac{1}{4} \chi : \mathbf{e}_{j'} \mathbf{e}_{j''} \right) A_{j'}(z) A_{j''}(z) e^{i(k_{j'} + k_{j''})z - i(\omega_{j'} + \omega_{j''}t)} + \\ &+ \left( \frac{1}{4} \chi : \mathbf{e}_{j'} \mathbf{e}_{j''} \right) A_{j'}(z) A_{j''}^*(z) e^{i(k_{j'} - k_{j''})z - i(\omega_{j'} - \omega_{j''}t)} + \text{k.k.} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Če želimo, da je valovna enačba (8.10) izpolnjena ob vsakem času  $t$ , se morajo ujemati izrazi pri istih časovnih odvisnostih, to je pri istih frekvencah. Izberimo najprej člene pri  $\omega_j = \omega_3$ ,  $j' = 1$ ,  $j'' = 2$  in  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Dobimo

$$ik_3 \mathbf{e}_3 \frac{dA_3}{dz} e^{ik_3 z} = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega_3^2}{4} \chi : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 A_1 A_2 e^{i(k_1 + k_2)z}. \quad (8.16)$$

Množimo še obe strani skalarno z  $\mathbf{e}_1$ , upoštevajmo zvezo med  $k_3$  in  $\omega_3$  in ravnajmo podobno še za druga dva valova. Tako dobimo sistem sklopljenih enačb za amplitudo valovanj v optično nelinearnem sredstvu

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\omega_3 \chi_{ef3}}{4c_0 n_3} A_1 A_2 e^{-i\Delta kz} \quad (8.17)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2 \chi_{ef2}}{4c_0 n_2} A_1^* A_3 e^{i\Delta kz} \quad (8.18)$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1 \chi_{ef1}}{4c_0 n_1} A_2^* A_3 e^{i\Delta kz}. \quad (8.19)$$

Pri tem je  $\chi_{ef3} = \mathbf{e}_3 \cdot \chi : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  in ostali podobno. Ker ni nujno, da so polarizacijski vektorji vzporedni s koordinatnimi osmi, tudi  $\chi_{ef}$  niso čiste kartezične komponente tenzorja nelinearne susceptibilnosti. Z  $\Delta k$  smo označili razliko valovnih vektorjev

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2. \quad (8.20)$$

Čeprav je  $\omega_3 - \omega_2 - \omega_1 = 0$ , je  $\Delta k$  navadno različen od nič zaradi frekvenčne disperzije lomnega količnika, to je, ker so dielektrične konstante  $\varepsilon_i$  za valovanja z različnimi frekvencami različne. Videli bomo, da je to za vrsto nelinearnih optičnih pojavov bistveno. Dobljeni sistem sklopljenih diferencialnih enačb opisuje več pojavov, odvisno od začetnih pogojev in relativnih intenzitet valovanj. Mi si bomo ogledali le nekaj najpomembnejših primerov.

**Naloga 8.2.2** Pokaži, da nastavek za polje v nelinearni snovi (enačba 8.12) reši nelinearno valovno enačbo (8.10), in pokaži, da spremenjanje amplitude posameznih valovanj ustreza enačbam (8.17-8.19).

### 8.3 Optično podvajanje frekvenc

Obravnavajmo optično nelinearno sredstvo, na katerega vpadata valovanji  $E_1$  in  $E_2$ . Naj bosta frekvenci vpadnih valovanj enaki  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , valovanji pa razlikujemo zaradi možnosti dveh različnih vpadnih polarizacij. Takrat je  $\omega_3 = 2\omega$  in dobimo najpreprostejši in tudi najpomembnejši primer podvajanja frekvence. Pogosto ga uporabljam za pridobivanje laserskih snopov pri krajših valovnih dolžinah, na primer pri Nd:YAG laserju, ko infrardeče izhodno valovanje (1064 nm) pretvorimo v vidno svetlobo zelene barve (532 nm).

Zanima nas, kako se spreminja  $A_3(z) = A_{2\omega}(z)$  pri začetnem pogoju  $A_{2\omega}(0) = 0$ . Privzemimo še, da se pretvori le manjši del vpadnega energijskega toka, tako da sta  $A_1 = A_2 = A_0$  približno

konstantni. Tedaj lahko enačbo za  $A_3(z)$  (enačba 8.17) brez težav integriramo do dolžine kristala  $L$  in dobimo

$$A_{2\omega}(L) = \frac{i\omega}{2} \frac{\chi_{ef} A_0^2}{c_0 n_{2\omega}} e^{-i\Delta k L/2} \frac{\sin(\frac{\Delta k L}{2})}{\frac{\Delta k L}{2}} L, \quad (8.21)$$

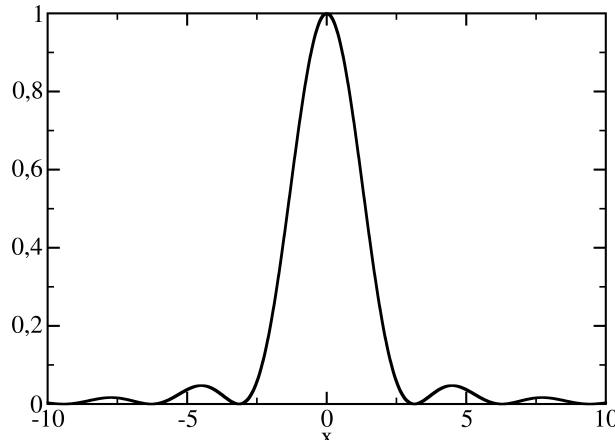
kjer smo z  $n_{2\omega}$  označili lomni količnik pri dvojni frekvenci. Iz tega izraza dobimo izhodno gostoto svetlobnega toka pri dvojni frekvenci

$$\langle j_{2\omega}(L) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{2\omega} c_0 |A_3|^2 = \frac{\omega^2 \chi_{ef}^2}{2 n_{2\omega} n_{\omega}^2 c_0^3 \epsilon_0} \langle j_{\omega} \rangle^2 L^2 \left( \frac{\sin(\frac{\Delta k L}{2})}{\frac{\Delta k L}{2}} \right)^2. \quad (8.22)$$

Razmerje med energijskim tokom pri podvojeni in osnovni frekvenci, to je, izkoristek pretvorbe, je tako

$$\frac{P_{2\omega}}{P_{\omega}} = \frac{\omega^2 \chi_{ef}^2}{2 S n_{2\omega} n_{\omega}^2 c_0^3 \epsilon_0} P_{\omega}^2 L^2 \left( \frac{\sin(\frac{\Delta k L}{2})}{\frac{\Delta k L}{2}} \right)^2, \quad (8.23)$$

pri čemer je  $S$  presek snopa. V izrazih (8.22) in (8.23) nastopa faktor  $\sin^2(\Delta k L/2)/(\Delta k L/2)^2$  (slika 8.2). Zaradi njega je na poti, ki je daljša od  $2\pi/\Delta k$ , stopnja pretvorbe zelo majhna.

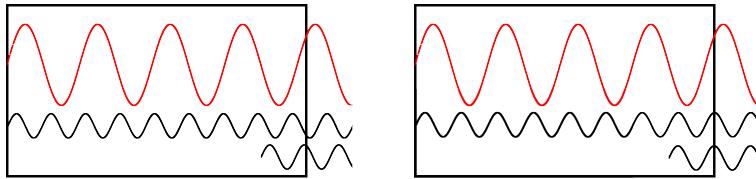


Slika 8.2: Izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje je sorazmeren s funkcijo  $\sin(x)/x$ , pri čemer je  $x = \Delta k L/2$ .

Poglejmo primer. Faktor  $\Delta k$  je različen od nič zaradi odvisnosti lomnih količnikov od frekvence. V  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  je redni lomni količnik pri 1000 nm 1,496, pri 500 nm pa 1,514, tako da je  $L_c = 2\pi/\Delta k$  le okoli 60 valovnih dolžin. Na večjih dolžinah postane stopnja pretvorbe zanemarljivo majhna.



Odvisnosti stopnje pretvorbe od razlike valovnih vektorjev pri osnovni in podvojeni frekvenci je lahko razumeti s pomočjo slike (8.3). Opazujmo prispevka k frekvenčno podvojenem valu, ki nastaneta eden na začetku kristala in drugi na koncu. Prispevek z začetka kristala zaradi disperzije na izhodni strani ni v fazi s prispevkom s konca. Pri dovolj veliki fazni razliki pride do destruktivne interference, ki zmanjšuje moč podvojene svetlobe. Razmere so podobne kot pri uklonu na široki reži, kjer prav tako seštevamo delna valovanja, ki se jim faza po reži linearno spreminja.



Slika 8.3: Levo: Neujemanje faz privede do destruktivne interference med valovi, ki nastajajo v različnih delih nelinearnega sredstva. Desno: V primeru, da se faze ujemajo, se valovanje podvojeni frekvenci ojača.

Opazimo, da lahko pri končnih vrednostih  $\Delta k$  dolžino kristala  $L$  v izrazu (8.23) pokrajšamo in izkoristek pretvorbe sinusno niha med nič in neko največjo vrednostjo z naraščajočim  $L$ . Povsem drugačno obnašanje pa dobimo, kadar se faze ujemajo in je  $\Delta k = 0$ . Takrat je vrednost faktorja  $\sin^2(\Delta k L / 2) / (\Delta k L / 2)^2$  največja in izkoristek pretvorbe narašča sorazmerno s kvadratom dolžine. Za uporabno pretvorbo v frekvenčno podvojeno valovanje je torej treba doseči fazno ujemanje valovnih vektorjev pri osnovni in podvojeni frekvenci.

**Naloga 8.3.1** Pokazali smo, da intenziteta frekvenčno podvojenega valovanja narašča sorazmerno s kvadratom debeline kristala. Vendar velja ta odvisnost le, če je intenziteta valovanja pri podvojeni frekvenci bistveno manjša od intenzitete vpadnega valovanja, oziroma  $A_3 \ll A_1, A_2$ . Pokaži, da sicer narašča kot

$$A_3 \propto \tanh(\kappa z) \quad (8.24)$$

in določi koeficient  $\kappa$ .

### Ujemanje faz

Poglejmo, kako lahko dosežemo ujemanje faz, ki je nujno za učinkovito optično podvajanje frekvenc. Spomnimo se, da je pogoj za ujemanje faz

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k - 2 = k_3^2\omega - k_1^\omega - k_2^\omega = \frac{2\omega}{c}n_3 - \frac{\omega}{c}n_1 - \frac{\omega}{c}n_2 = 0. \quad (8.25)$$

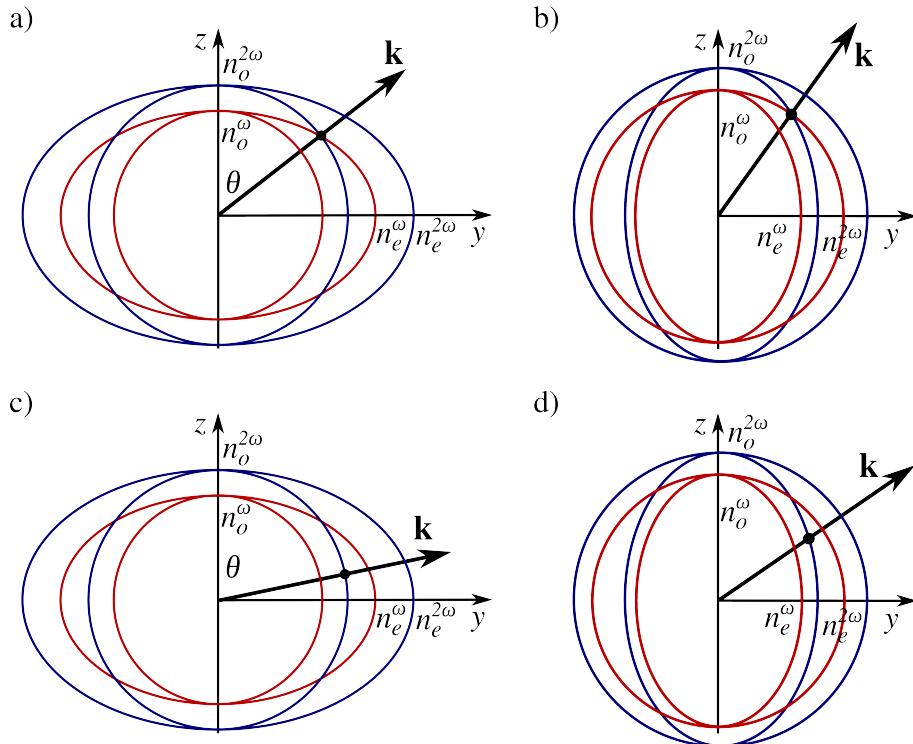
Iz tega sledi pogoj za ujemanje faz

$$n_1^\omega + n_2^\omega = n_3^{2\omega}. \quad (8.26)$$

Da lahko zadostimo gornjemu pogoju, izkoristimo dvojni lom v anizotropnih kristalih (glej poglavje ??), pri čemer se zaradi enostavnosti omejimo le na optično enosne kristale. Obravnavajmo samo kristale brez absorpcije in z normalno disperzijo, to pomeni, da oba lomna količnika naraščata s frekvenco.

Za razumevanje je najbolj nazoren grafični prikaz (slika 8.4). Podrobnejše poglejmo primer s slike (a). Na njem so narisani lomni količniki za pozitivno anizotropni ( $n_e > n_o$ ) enosni kristal pri enojni in dvojni frekvenci v odvisnosti od kota glede na optično os. Rdeča barva nakazuje lomne količnike pri vpadni frekvenci, modra pa pri podvojeni. Ekscentričnost elipse za izredni lomni količnik in frekvenčna disperzija sta zaradi večje nazornosti močno pretirani. Opazimo, da je pri nekem kotu  $\theta$  med smerjo širjenja svetlobe in optično osjo redni lomni količnik pri dvojni frekvenci enak izrednemu količniku pri osnovni frekvenci. Če torej izberemo izredno polarizacijo vpadnega vala (tako, ki leži v ravni optične osi in smeri širjenja), bo za podvojeni

val z redno polarizacijo (to je pravokotno na optično os) pri kotu  $\theta_m$  izpolnjen pogoj ujemanja faz (enačba 8.26). Zapišimo to še z enačbo.



Slika 8.4: Štirje primeri, pri katerih je izpolnjen pogoj za ujemanje faz. (a) Ujemanje faz prvega reda za pozitivno anizotropno snov, (b) ujemanje faz prvega reda za negativno anizotropno snov ter ujemanje faz drugega reda za pozitivno (c) in negativno (d) anizotropno snov.

Lomni količnik za redni val pri podvojeni frekvenci mora biti enak lomnemu količniku za izredni val pri osnovni frekvenci. Pri tem je lomni količnik za izredni val odvisen od kota

$$\frac{1}{(n_o^{2\omega})^2} = \frac{1}{(n^\omega(\theta))^2} = \frac{\cos^2 \theta}{(n_o^\omega)^2} + \frac{\sin^2 \theta}{(n_e^\omega)^2}. \quad (8.27)$$

Tako dobimo

$$\cos^2 \theta_m = \frac{(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^\omega)^{-2}}{(n_o^\omega)^{-2} - (n_e^\omega)^{-2}}. \quad (8.28)$$

**Naloga 8.3.2** Pokaži, da v primeru negativne anizotropije pogoj za ujemanje faz zapišemo kot

$$\cos^2 \theta_m = \frac{(n_o^\omega)^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}}{(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}}. \quad (8.29)$$

Slike (8.4 c in d) lahko razberemo, da obstaja še primer, pri katerem je izpolnjen pogoj za ujemanje faz. To je primer, pri katerem sta v vpadnem valu prisotni obe polarizaciji, redna in izredna, podvojeni val pa je spet redni. Tedaj mora biti za ujemanje faz redni lomni količnik pri

dvojni frekvenci enak povprečju rednega in izrednega lomnega količnika pri osnovni frekvenci. Za praktično uporabo je ta izbira, kadar obstaja, celo ugodnejša, ker je pri njej kot ujemanja faz bliže  $\pi/2$ . Ujemanje faz je zato manj občutljivo na majhna odstopanja v kotu ali na temperaturne spremembe lomnih količnikov. Račun kota  $\theta_m$  za ta primer je bolj zahteven, saj je treba rešiti enačbo četrte stopnje.

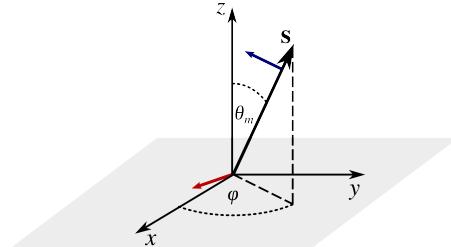
### Efektivna susceptibilnost

Na moč podvojenega snopa poleg faznega faktorja vpliva tudi velikost koeficientov tenzorja nelinearne susceptibilnosti. V optično enoosnem kristalu je kriterij ujemanja faz izpolnjen na stožcu okoli optične osi, pri čemer je stožec določen z izračunanim kotom  $\theta_m$  (enačbi 8.28 in 8.3.2). Drug kot, ki določa smer širjenja v ravnini, pravokotni na optično os, pa lahko izberemo tako, da izkoristimo največje komponente nelinearne susceptibilnosti.

Oglejmo si kot primer spet  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ , ki je negativno anizotropen (slika 8.4 b). Valovna dolžina osnovnega snopa naj bo 1000 nm. Po podatkih, navedenih zgoraj, dobimo po enačbi (8.3.2) za kot ujemanja faz  $\theta_m = 40^\circ$ . Nelinearna susceptibilnost ima v tetragonalni simetriji  $\bar{4}2m$  od nič različne komponente  $\chi_{xyz} = \chi_{zxy} = \chi_{yxz}$ , kjer se oznake  $x$ ,  $y$  in  $z$  nanašajo na kristalne osi. Smer širjenja osnovnega in podvojenega vala naj bo (slika 8.5)

$$\mathbf{s} = (\cos \varphi \sin \theta_m, \sin \varphi \sin \theta_m, \cos \theta_m), \quad (8.30)$$

kjer je  $\varphi$  kot med osjo  $y$  in projekcijo  $\mathbf{s}$  na ravnino  $xy$  še treba določiti. Izberemo ga tako, da bo podvojena moč največja. Iz pogoja za ujemanje faz vidimo, da mora biti vpadna polarizacija



Slika 8.5: K izračunu efektivne susceptibilnosti. Rdeč vektor označuje polarizacijo vhodnega vala, moder pa polarizacijo frekvenčno podvojenega vala.

redno polarizirana, biti mora torej pravokotna na os  $z$  (optično os) in  $\mathbf{s}$

$$\mathbf{e}^\omega = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0) \quad (8.31)$$

Zaradi oblike tenzorja nelinearne susceptibilnosti je od nič različna le  $z$  komponenta nelinearne polarizacije:

$$P_z^{2\omega} = -\epsilon_0 \chi_{zxy} E_0^2 \cos \varphi \sin \varphi. \quad (8.32)$$

Nelinearna polarizacija je v tem primeru očitno največja, kadar je  $\varphi = \pi/4$ . Polarizacija podvojenega vala  $\mathbf{E}^{2\omega}$  je izredna, to pomeni, da leži v ravnini osi  $z$  in  $\mathbf{s}$ . K njej bo prispeval le tisti del nelinearne polarizacije, ki je pravokoten na  $\mathbf{s}$ , to je  $P_z^{2\omega} \sin \theta$ . Po vsem tem je največji efektivni koeficient  $\chi_{ef}$ , ki nastopa v izrazih za amplitudo in moč podvojene svetlobe (enačbi 8.22 in 8.23), v izbranem primeru

$$\chi_{ef} = \sin \theta_m \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \chi_{zxy} = \frac{\sin \theta_m}{2} \chi_{zxy}. \quad (8.33)$$

## 8.4 Frekvenčno podvajanje Gaussovih snopov

Doslej smo vpadni in frekvenčno podvojeni snop obravnavali kot ravni valovanji, ki sta bili razsežni v prečni smeri. Izračunali smo, da v primeru, ko je  $\Delta k = 0$ , moč frekvenčno podvojene svetlobe narašča s kvadratom dolžine poti po nelinearnem sredstvu. Pretvorba v podvojeno svetlobo je po enačbi (8.23) tem učinkovitejša, čim večja je gostota svetlobnega toka pri osnovni frekvenci. Zato v praksi vpadno svetlobo vselej fokusiramo.

Poglejmo, kako se enačbe spremenijo, če je vpadni snop pri osnovni frekvenci Gaussove oblike. Rezultat lahko približno ocenimo, če vzamemo, da je efektivna dolžina za pretvorbo  $L$  kar dolžina grla; za njim se gostota toka zmanjšuje, s tem pa tudi pretvorba v podvojeni snop. Dolžina grla je

$$L = 2z_0 = \frac{2n\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{n w_0^2 \omega}{c}. \quad (8.34)$$

Tako je presek vpadnega snopa

$$S = \pi w_0^2 = \frac{\pi c L}{n \omega}. \quad (8.35)$$

Vstavimo  $S$  v enačbo (8.23) in dobimo

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^3 \chi_{ef}^2}{2\pi n_2 \omega n_\omega c_0^4 \epsilon_0} P_\omega^2 L \left( \frac{\sin(\frac{\Delta k L}{2})}{\frac{\Delta k L}{2}} \right)^2. \quad (8.36)$$

Vidimo, da je za uspešno konverzijo najbolje, da je dolžina grla enaka dolžini nelinearnega kristala. To seveda dosežemo z ustreznim fokusiranjem snopa. V tem primeru je izkoristek sorazmeren z dolžino, ne z njenim kvadratom.

---

**Naloga 8.4.1** Imejmo 1 cm dolg kristal  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ . Valovna dolžina vpadne svetlobe naj bo  $1,06 \mu\text{m}$ , vhodna moč  $P_\omega = 10 \text{ kW}$ , efektivna nelinearna susceptibilnost  $\chi_{ef} = 4 \cdot 10^{-13} \text{ m/V}$ ,  $\Delta k = 0$  in  $n = 1,5$ . Pokaži, da doseže faktor pretvorbe v frekvečno podvojeno svetlobo skoraj 50 %!

Da je dolžina grla  $2z_0 = 1 \text{ cm}$ , mora biti polmer grla okoli  $40 \mu\text{m}$ . Gostota svetlobnega toka v kristalu je pri tem  $2 \cdot 10^8 \text{ W/cm}^2$ , kar je že blizu praga za poškodbe, predvsem na vstopni ali izstopni površini. Zato je pri podvajjanju frekvenc zelo pomembna odpornost nelinearnega kristala proti poškodbam zaradi velike gostote svetlobnega toka. To in možnost ujemanja faz je pogosto odločilno, koliko je dani material zares uporaben.

---

## 8.5 \*Račun podvajanja Gaussovih snopov

V prejšnjem razdelku smo na hitro grobo ocenili vpliv oblike Gaussovih snopov na frekvečno podvajanje. Naredimo zdaj še natančejši izračun. Vrnimo se k valovni enačbi (8.10). Spet privzemimo, da imamo vpadna snopa pri frekvencah  $\omega_1$  in  $\omega_2$  in nastajajoč snop pri frekvenci  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Vsako od polj naj ima obliko

$$E_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_i}{n_i}} \psi_i(r, z) e^{i(k_i z - \omega_i t)} + \text{k. k.}, \quad (8.37)$$

kjer se amplituda  $\psi_i$  spreminja počasi v smeri osi  $z$ , odvisna pa je od prečne koordinate  $r$ . Dodatni faktor  $\sqrt{\omega_i/n_i}$  smo uvedli zgolj zaradi lepšega zapisa enačb. Vstavimo nastavek (8.37) v valovno enačbo (8.10) in zopet ločimo na levi in desni člene z enako frekvenco. Zanemarimo tudi druge odvode  $\psi$  po  $z$ . Tako namesto sistema enačb (8.17 do 8.19) dobimo sklopljen sistem obosnih enačb s pripadajočim sistemom konjugiranih enačb. Tu je

$$\kappa = d \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n_1 n_2 n_3}}. \quad (8.38)$$

S črtico smo označili odvajanje po  $z$ . Gornji sistem enačb je očitno posplošitev sistema (??) za primer, ko je valovanje odvisno tudi od prečne koordinate. Reševanje tega nelinearnega sistema parcialnih diferencialnih enačb je seveda v splošnem še precej bolj zabeljeno.

Poglejmo le najenostavnnejši primer podvojevanja,  $\omega_3 = 2\omega_1 = 2\omega$ . Privzemimo, da sta oba vpadna snopa enaka in osnovne Gaussove oblike,  $\psi_1 = \psi_2$ , da imamo poplno ujemanje faz,  $\Delta k = 0$ , in da je  $\psi_3$  dovolj majhen, da nam zmanjševanja  $\psi_1$  ni treba upoštevati. Vpadni snop lahko tako zapišemo

$$\psi_1 = A_1 \frac{1}{1 + iz/z_1} \exp\left[-\frac{r^2}{w_1^2(z)} - \frac{ik_1 r^2}{2R_1(z)}\right] \quad (8.39)$$

kjer za polmer snopa in krivinski radij veljajo zveze iz drugega poglavja:  $w_1^2 = w_{10}^2(1 + z^2/z_1^2)$  in  $R_1 = z(1 + z_1^2/z^2)$ . Upoštevali smo tudi, da je spremenjanje amplitude in dodatno fazo po en. 2.23 zapisati v kompleksni obliki  $1/(1 + iz/z_1)$ . Spomnimo se še, da velja  $z_1 = \pi w_{10}^2/\lambda = k_1 w_{10}^2/2$ . Za podvojeni snop tudi privzemimo Gaussovo obliko s počasi naraščajočo amplitudo:

$$\psi_3 = A_3(z) \psi_{3H}(z, r) = A_3(z) \frac{1}{1 + iz/z_3} \exp\left[-\frac{r^2}{w_3^2(z)} - \frac{ik_3 r^2}{2R_3(z)}\right] \quad (8.40)$$

$\psi_{3H}$  reši homogeno obosno valovno enačbo. Ko izraza za  $\psi_1$  in  $\psi_3$  postavimo v tretjo enačbo sistema ??, zato na levi ostane le  $2ik_3 A'_3(z) \psi_{3H}$ . Tako dobimo

$$A'_3(z) \frac{1}{1 + iz/z_3} \exp\left[-\frac{r^2}{w_3^2(z)} - \frac{ik_3 r^2}{2R_3(z)}\right] = -\frac{i\kappa}{4} A_1^2 \frac{1}{(1 + iz/z_1)^2} \exp\left[-\frac{2r^2}{w_1^2(z)} - \frac{ik_1 r^2}{R_1(z)}\right]. \quad (8.41)$$

Vzemimo, da je  $w_{30}^2 = w_{10}^2/2$ . Tedaj je  $z_3 = k_3 w_{30}^2/2 = (2k_1)(w_{10}^2/2)/2 = z_1$  in je tudi  $w_3^2(z) = w_1^2(z)/2$ . Poleg tega je  $R_3(z) = R_1(z)$  in lahko ne obeh straneh pokrajšamo eksponentna faktorja. Ostane

$$A'_3(z) = -\frac{i\kappa}{4} A_1^2 \frac{1}{1 + iz/z_1}. \quad (8.42)$$

Gornjo enčbo seveda brez težav integriramo. Naj bo grlo vpadnega snopa ravno na sredini nelinearnega sredstva, tako da teče integracija od  $-L/2$  do  $L/2$ :

$$\begin{aligned} A_3(L) &= -\frac{i\kappa}{4} A_1^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{1 + iz/z_1} \\ &= -\frac{i\kappa}{4} A_1^2 z_1 \ln \frac{1 + i\frac{L}{z_1}}{1 - i\frac{L}{2z_1}} \\ &= \frac{\kappa}{2} A_1^2 z_1 \arctan \frac{L}{2z_1}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Moč Gaussovega snopa je

$$P_i = \frac{\pi}{2} w_{i0}^2 c \epsilon_0 E_{i0}^2 / = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{\omega_i}{n} A_i^2 w_{i0}^2 \quad (8.44)$$

tako da je izkoristek pri podvojevanju Gaussovega snopa

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{3/2} \frac{\omega^3}{n^2} d^2 P_\omega \left( \frac{2z_1}{L} \arctan^2 \frac{L}{2z_1} \right) L. \quad (8.45)$$

Funkcija  $(\arctan^2 x)/x$  ima maksimalno vrednost 0.64 pri  $x = 1.39$ . Pri dani dložini nelinearnega sredstva  $L$  dobimo torej največji izkoristek, kadar je  $z_1 = 0.35L$ , kar je malo manj kot smo dobili s preprosto oceno  $2z_1 = L$ . Tedaj je

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{1.28}{4\pi c} \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{3/2} \frac{\omega^3}{n^2} d^2 P_\omega L, \quad (8.46)$$

torej približno 30 % več, kot smo dobili s preprosto oceno 8.36.

## 8.6 Parametrično ojačevanje

Nelinearno meanje treh valov, ki ga opisujejo enačbe ??, lahko izkoristimo tudi za ojačevanje optičnih signalov. Imejmo vhodni signal pri frekvenci  $\omega_1$  skupaj z močnim črpalnim valom pri frekvenci  $\omega_3 > \omega_1$ . Zaradi nelinearnosti se ojačuje val pri  $\omega_1$ , obenem pa nastaja dodaten val pri razliki frekvenc  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ . Temu procesu pravimo parametrično ojačevanje. Podoben princip se uporablja tudi v mikrovalvni tehniki, od koder je tudi ime.

Prepišimo najprej enačbe ?? v nekoliko prikladnejšo obliko, kot smo napravili že pri vpeljavi sistema 8.36. Naj bo

$$A_i(z) = \sqrt{\frac{n_i}{\omega_i}} E_i(z) \quad \text{in} \quad \kappa = d \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad (8.47)$$

S tem dobijo enačbe ?? obliko

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= \frac{i\kappa}{2} A_2^* A_3 e^{i\Delta kz} \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= \frac{-i\kappa}{2} A_3^* A_1 e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dA_3}{dz} &= \frac{i\kappa}{2} A_1 A_2 e^{-i\Delta kz} \end{aligned} \quad (8.48)$$

Privzemimo, da je črpalni val vselej dosti močnejši od ostalih dveh,  $A_3 \gg A_1, A_2$  in da smo poskrbeli za ujemanje faz,  $\Delta k = 0$ .  $A_3$  je tako približno konstanta. Označimo še  $g = \kappa/2A_3$ , pa imamo

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= ig A_2^* \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= ig A_1 \end{aligned} \quad (8.49)$$

Z začetnima pogojema  $A_1(0) = A_{10}$  in  $A_2(0) = 0$  dobimo iz ?? rešitev

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_{10} ch g z \\ A_2(z) &= i A_{10} sh g z \end{aligned} \quad (8.50)$$

Pri  $z > 1/g$  oba vala rasteta približno eksponentno na račun črpalnega vala. Proses parametričnega ojačevanja si lahko predstavljamo kot pretvorbo enega fotona pri frekvenci  $\omega_3$  v fotona pri  $\omega_1$  in  $\omega_2$ .

Privzeli smo, da je  $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = 0$ . Ta pogoj lahko izpolnimo na enak način kot pri podvajjanju frekvence, to je tako, da v dvolomnem kristalu izberemo ustrezeno smer glede na optično os in ustrezne polarizacije, tako da velja  $\omega_3 n_3 = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2$ , kjer so  $n_i$  lomni količniki za odgovarjajoče valove pri izbranih polarizacijah. Lahko na primer vzamemo izredno polarizacijo za črpalni val in redni polarizaciji za oba ojačevana valova, podobno kot pri podvajjanju frekvence. Tedaj mora veljati

$$n_i^{\omega_3} = \left[ \left( \frac{\cos \theta_m}{n_r^{\omega_3}} \right)^2 + \left( \frac{\sin \theta_m}{n_{i0}^{\omega_3}} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_r^{\omega_1} + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_r^{\omega_2}. \quad (8.51)$$

Možne so seveda tudi drugačne izbire polarizacij (Naloga). (Naloga: Obravnavaj parametrično ojačevanje, kadar je  $\Delta k \neq 0$ .)

*Primer:* Naj bo nelinearno sredstvo LiNbO<sub>3</sub>, v katerem je  $d = 5 \cdot 10^{-23}$  As/V in  $n = 2,2$ . Vzemimo  $v_1 \simeq v_2 = 3 \cdot 10^{14}$  Hz ( $\lambda_1 = 1 \mu\text{m}$ ) in gostoto moči črpalnega vala  $5 \text{ MW/cm}^2$ . Tedaj dobimo  $g = 0,67 \text{ cm}^{-1}$ .

Gornji primer kaže, da ojačenje ni prav veliko, kljub dokaj močnemu črpalnemu valu. Zato je parametrično ojačevanje zanimivo predvsem znotraj optičnih resonatorjev, s čemer dobimo neke vrste laser - *parametrični oscilator*.

## 8.7 Nelinearni pojavi 3. reda

Doslej smo obravnavali najnižji red nelinearnosti, katerega glavni učinek je mešanje treh frekvenc, na primer podvajanje frekvence ali parametrično ojačevanje. Ti pojavi so možni le v kristalih brez centra inverzije. Naslednji člen razvoja nelinearne polarizacije po električnem polju obstaja v vsaki snovi. V njem nastopa polje v tretji potenci. Če vsebuje vpadno polje le eno frekvenco, zaradi nelinearnosti tretjega reda dobimo polarizacijo pri  $3\omega$  in  $\omega$ . Pri dveh vpadnih frekvencah  $\omega_1$  in  $\omega_2$  so možne kombinacije  $2\omega_1 \pm \omega_2$  in  $\omega_1 \pm 2\omega_2$ , pri treh vpadnih frekvencah pa vse možne vsote in razlike frekvenc. Možnosti je torej precej več kot pri nelinearnosti drugega reda. Obravnavata nastajanja valovanja pri kombinaciji frekvenc je povsem analogna podvajjanju frekvence in parametričnemu ojačevanju. V enačbah za nastajanje novega valovanja ali ojačevanje katerega od vpadnih snopov spet nastopi fazni faktor, ki vsebuje razliko vseh valovnih vektorjev  $\Delta \mathbf{k}$ . Da bo nastajanje novega valovanja znatno, mora biti  $\Delta k L \simeq 0$ , spet mora biti torej izpolnjen pogoj ujemanja faz. Ker sedaj nastopajo v splošnem širje valovni vektorji, je seveda tudi pri izbiri geometrije in polarizacij za ujemanje faz precej več možnosti.

Če vsebuje vpadno valovanje le eno frekvenco, je v nelinearni polarizaciji tudi komponenta pri tej frekvenci, kar je ena od bistvenih razlik med nelinearnostjo drugega in tretjega reda. Nelinearne pojave pri eni sami frekvenci v "asih imenujejo tudi degenerirano mešanje štirih valov. Najpreprostejši tak učinek je odvisnost lomnega količnika od intenzitete vpadne svetlobe.

Vzemimo v smeri osi  $x$  polarizirano valovanje, ki vpada na nelinearno, zaradi enostavnosti izotropno snov. Nelinearna polarizacija ima tudi le komponento

$$P_1^{NL} = \epsilon_0 \chi_{1111}^{(3)} E^3 \quad (8.52)$$

Polje spet zapišimo kot vsoto dveh konjugirano-kompleksnih členov:

$$E = \frac{1}{2} (E_1 e^{i(kz - \omega t)} + E_1^* e^{-i(kz - \omega t)}) \quad (8.53)$$

Del polarizacije pri  $\omega$  dobimo tako, da v izrazu za  $E^3$  vzamemo dvakrat nekonjugirani del, enkrat pa konjugiranega. Taki členi so trije. Tako imamo

$$P_1^\omega = \frac{3}{8} \epsilon_0 \chi_{1111}^{(3)} |E_1|^2 E_1 \quad (8.54)$$

Ta del polarizacije lahko prištejemo k linearному delu in s tem dobimo lomni količnik, ki je odvisen od intenzitete:

$$\epsilon_0(\epsilon - 1)E_1 + \frac{3}{8} \epsilon_0 \chi_{1111}^{(3)} |E_1|^2 = \epsilon_0[n(I)^2 - 1]E_1 \quad (8.55)$$

Lomni količnik zapišimo v obliki

$$n(I) = n_0 + n_2 |E_1|^2, \quad (8.56)$$

$$n_2 = \frac{3}{8} \chi_{1111}^{(3)}. \quad (8.57)$$

Pojavu, pri katerem je sprememba lomnega količnika sorazmerna s kvadratom električnega polja, smo imenovali Kerrov pojav. Ker je sedaj spremembo povzroča kar optično polje samo, govorimo tudi o optičnem Kerrovem pojavu. Zanimivi posledici sta samozbiranje svetlobnega snopa in širjenje solitonov po optičnih vlaknih, kar si bomo pogledali v naslednjih razdelkih.

Tudi splošni primer degeneriranega štirivalovnega mešanja je pomemben, kjer se valovanja razlikujejo po smereh valovnih vektorjev. Vodi do pojava *fazne konjugacije*. Pri njem dobimo valovanje z enako valovno fronto kot eno od vpadnih valovanj, ki pa se širi v nasprotni smeri od prvotnega valovanja. Fazna konjugacija ima nekaj zanimivih uporab in jo bomo obravnavali v zadnjem razdelku poglavja.

## 8.8 Samozbiranje

Poglejmo si najprej pojav *samozbiranja* ali samofokusacije (angleško self focusing). Osnovni Gaussov snop naj vpada na sredstvo, v katerem je lomni količnik odvisen od intenzitete po enačbi 8.57. Optična Kerrova konstanta  $n_2$  je običajno pozitivna. Tedaj je lomni količnik v sredini snopa večji od nemotenega količnika na robu. V osi snopa se optična pod podaljša in valovna fronta začne v osi zaostajati glede na rob snopa. Če je zaostajanje dovolj veliko, lahko krivinski radij valovne fronte postane negativen in snop se ne širi, temveč oži (Slika??). Samozbiranje je pri dovolj veliki moči snopa tolikšno, da pride do katastrofične zožitve snopa in s tem do tolikšnega povečanja gostote svetlobnega toka, da nastanejo poškodbe v snovi.

Zaradi običajnega uklona se snop širi, pojav samozbiranja pa ima nasprotni učinek. Zato je pri primerni moči snopa možno, da se oba pojava po velikosti izenačita in snop ima v snovi konstanten polmer, valovne fronte pa so ravne. Snop samemu sebi ustvarja valovni vodnik, kjer je v sredi lomni količnik večji kot na robu. Ocenimo, količna mora biti moč v stacionarnem stanju.

Vzemimo, da je na izbranem mestu valovna fronta ravna. Lahko si mislimo, da je tam grlo Gaussovega snopa. Brez samozbiranja bi bil na razdalji dolžine grla  $z_0$  po izrazih iz drugega poglavja krivinski radij valovne fronte

$$R(z_0) = z_0 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z_0} \right)^2 \right] = 2z_0 \quad (8.58)$$

V bližini osi lahko Gaussovo funkcijo, ki opisuje prečno odvisnost amplitudo poja v snopu, razvijemo po prečni koordinati  $r$  do drugega reda; po enačbi 8.57 je odvisnost lomnega količnika približno

$$n(r) = n_0 + E_0^2 \left(1 - 2 \frac{r^2}{w_0^2}\right) n_2 . \quad (8.59)$$

Razlika med lomnim količnikom na osi in pri  $w_0$  od osi je  $\Delta n = 2E_0^2 n_2$ . Zaradi tega je razlika optičnih poti za žarek na osi in za  $w_0$  od osi  $\Delta nz_0$ . Valovna fronta bi se ukrivila na krivinski radij  $-R$ . Iz preproste geometrije velja zveza

$$\Delta nz_0 = R - R \sqrt{1 - \frac{w_0^2}{R^2}} \simeq \frac{1}{2} \frac{w_0^2}{R} \quad (8.60)$$

Da bo valovna fronta ostala ravna, morata biti krivinska radija v enačbah 8.58 in 8.60 enaka; od tu sledi

$$\Delta n = \frac{w_0^2}{4z_0^2} \quad (8.61)$$

Amplitudo polja v osi izrazimo z mo"jo:  $E_0^2 = 2P/(\pi\epsilon_0 c w_0^2)$ , pa dobimo za moč snopa s stacionarnim polmerom

$$P_s = \pi\epsilon_0 c \frac{w_0^4}{2n_2 z_0^2} = \frac{\epsilon_0 c \lambda^2}{4n_2} \quad (8.62)$$

Zanimivo je, da kritična moč ni odvisna od začetnega polmera snopa. Pri manjši moči se snop širi, čeprav nekoliko počasneje kot v sredstvu s konstantnim lomnim količnikom, če pa je moč znatno večja, lahko pride do katastrofičnega samozbiranja in porušitve snovi.

*Primer.* V  $\text{CS}_2$ , ki je tekočina z razmeroma velikim optičnim Kerrovim pojavom, je  $n_2 = 10^{-20}$  ( $\text{m}/\text{V}$ )<sup>2</sup>. Tedaj dobimo po gornji formuli za kritično moč vrednost

$$P_s = 10^4 \text{W.}$$

Za podrobnejši račun moramo zapisati valovno enačbo v obosnem približku. Začnimo spet s krajevnim delom valovne enačbe za monokromatsko valovanje v skalarjem približku

$$\nabla^2 E + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \quad (8.63)$$

Kot v drugem poglavju zapišimi polje v obliku počasi spreminjajoče se amplitude in faznega faktorja:

$$E = \psi(r, z) e^{ik_0 z} \quad (8.64)$$

kjer je  $k_0 = n_0 \omega / c$  valovno število brez nelinearnosti.  $\psi(r, z)$  se v smeri osi  $z$  le počasi spreminja, zato drugi odvod po  $z$  zanemarimo in dobimo

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - n_0^2) \psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (8.65)$$

Upoštevajmo odvisnost lomnega količnika od intenzitete, pri čemer zanemarimo člen z  $n_2^2$ , ker je gotovo majhen:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + 2k_0^2 \frac{n_2}{n_0} |\psi|^2 \psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (8.66)$$

Preden se lotimo reševanja gornje enačbe, jo še nekoliko polepšajmo. Vpeljimo

$$\kappa = 2k_0^2 \frac{n_2}{n_0} \quad (8.67)$$

in novo spremenljivko vzdolž osi  $z$

$$\zeta = \frac{z}{2k_0} \quad (8.68)$$

S tem preide enačba 8.66 v standardno oblikoneilinearne Schrodingerjeve enačbe

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \nabla_{\perp}^2 \psi + \kappa |\psi|^2 \psi = 0. \quad (8.69)$$

V treh dimenzijah je reševanje enačbe 8.69 težavno in analitične rešitve niso znane. V dveh dimenzijah pa stacionarno rešitev znamo poiskati. Ker nam bo koristila tudi nekoliko kasneje pri računu širjenja solitonov po optičnih vlaknih, si jo je vredno ogledati.

Stacionarni rešitvi se vzdolž  $\zeta$  lahko spreminja le faza, zato rešitev iščimo v obliki

$$\psi = e^{i\eta^2 \zeta} u(x) \quad (8.70)$$

kjer je  $\eta$  poljubna konstanta, katere pomen bomo videli kasneje. Iz enačbe 8.69 sledi za funkcijo  $u(x)$ , ki naj bo realna,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{2} \eta^2 u - \kappa u^3 \quad (8.71)$$

Z množenjem obeh strani z  $u'$  lahko enačbo enkrat integriramo

$$\left( \frac{du}{dx} \right)^2 + C = \eta^2 u^2 - \frac{1}{2} \kappa u^4 \quad (8.72)$$

Naj bo integracijska konstanta  $C$  kar 0. Ločimo spremenljivki in dobimo

$$\int_1^u \frac{du}{u \sqrt{\eta^2 - \frac{1}{2} \kappa u^2}} = x - x_0 \quad (8.73)$$

kjer smo novo integracijsko konstanto zapisali tako, da je pri  $x = x_0$  vrednost  $u = 1$ . Integral brez težav izračunamo:

$$\ln \left( \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{u}{\eta + \sqrt{\eta^2 - \kappa u^2 / 2}} \right) = x - x_0 \quad (8.74)$$

Izarazimo iskano funkcijo:

$$u = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \eta \frac{2}{e^{\eta(x-x_0)} + e^{-\eta(x-x_0)}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \eta \frac{1}{\operatorname{ch} \eta(x-x_0)} \quad (8.75)$$

tako da je po enačbi 8.70

$$\psi(x, z) = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \eta \frac{e^{i\eta^2 \zeta}}{\operatorname{ch} \eta(x-x_0)} \quad (8.76)$$

Vidimo, da predstavlja  $1/\eta$  mero za polmer snopa,  $x_0$  pa je le prečni premik snopa, ki ga lahko brey škode postavimo 0. Tako je polje stacionarnega snopa

$$E_s(x, z) = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{\eta}{\operatorname{ch}\eta(x-x_0)} \exp[ik_0z(1 + \frac{\eta^2}{2k_0^2})] \quad (8.77)$$

Od parametra  $\eta$  je torej odvisna tudi konstanta širjenja in s tem fazna hitrost. Ta je tem manjša, čim manjši je polmer snopa:

$$v_f = \frac{c}{n_0(1 + \frac{\eta^2}{2k_0^2})} \quad (8.78)$$

Moč dvodimenzionalnega snopa 8.77 je sorazmerna z integralom kvadrata polja po  $x$ . Integriramo brez težav in dobimo

$$\int |E_s|^2 dx = \frac{2}{\kappa} \eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \eta x} = \frac{4\eta}{\kappa} \quad (8.79)$$

Moč stacionarnega snopa v dveh dimenzijah je obratno sorazmerna s širino snopa  $1/\eta$ . Zato obstaja pri poljubni moči stacionarna širina. To je bistvena razlika med dvo- in tridimenzionalnim primerom, kjer se snop z nadkritično močjo krči v singularnost.

## 8.9 Optični soliton

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da pojav samozbiranja svetlobnega snopa lahko ravno kompenzira širjenje zaradi uklona, tako da ima pri ustrezni moči snop povsod konstantno širino in obliko. Povsem analogen pojav imamo tudi v časovni domeni. Sunek svetlob, ki se širi po snovi s frekvenčno siperzijo lomnega količnika, se podaljšuje, kot smo ugotovili v poglavju o optičnih vlaknih. Ob primernih pogojih lahko odvisnost lomnega količnika od intenzitete ravno kompenzira disperzijo in sunek ohranja obliko. Sunkom svetlobe, ki potujejo po sredstvu brez spremembe oblike, pravimo tudi *optični soliton*. Posebej so pomembni v optičnih vlaknih, kjer je disperzija izrazita in bi se je radi za učinkovit prenos informacije čim bolj iznebili.

Pojav optičnih solitonov ni težko razložiti. V vrhu svetlobnega sunka je pri  $n_2 > 0$  lomni količnik največji, zato je na dani geometrijski razdalji optična faza  $k_0 n z$  največja. Ker faza vzdolž sunka ni več povsod enaka, se od začetka do konca sunka spreminja tudi frekvenca, ki je odvod faze, in sicer je v sprednjem delu sunka nižja, v zadnjem pa višja. Če je disperzija lomnega količnika taka, da grupna hitrost narašča s frekvenco, bo zadnji del sunka dohitel sprednjega. Ta učinek nelinearnosti lahko ravno kompenzira širjenje sunka zaradi disperzije.

Računsko obravnavajmo primer širjenja solitona po enorodnem optičnem vlaknu. Spomnimo se (en. ??), da se zaradi spremembne lomnega količnika vlakna spremeni valovno število

$$\delta\beta = \frac{\omega^2}{c^2\beta} \frac{\int n \delta n |u|^2 dS}{\int |u|^2 dS} \quad (8.80)$$

kjer  $u(r)$  opisuje prečno obliko valovanja v vlaknu. Valovno število je v vlaknu funkcija frekvence. Kot v razdelku ??? ga razvijmo okoli centralne frekvence in dodajmo še prispevek 8.80:

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\omega^2}{c^2\beta} \frac{\int n \delta n |u|^2 dS}{\int |u|^2 dS} \quad (8.81)$$

Svetlobni sunek, ki se širi po vlaknu, zapišimo, kot smo že vajeni, v obliki počasi spreminjajoče se amplitudne funkcije in faznega faktorja pri nosilni frekvenci:

$$E(r, z, t) = A(z, t) u(r) \exp i[\beta(\omega_0)z - \omega_0 t] \quad (8.82)$$

V razdelku ??? smo s pomočjo razvoja 8.81 in Foureirove transformacije izpeljali diferencialno enačbo ??? za  $A(z, t)$ . Na isti način moramo sedaj le dodati člen  $\delta\beta$  iz en. 8.80:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) A = -\frac{i}{2} \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\kappa |A|^2 A \quad (8.83)$$

kjer je

$$\kappa = \frac{\omega^2}{c^2 \beta} \frac{\int n_0 n_2 |u|^4 dS}{\int |u|^2 dS} \quad (8.84)$$

Vpeljimo novo neodvisno spremenljivko

$$\tau = t - \frac{z}{v_g} \quad (8.85)$$

s katero opišemo obliko sunka, kot ga vidi opazovalec, ki se giblje z grupno hitrostjo skupaj s sunkom. Enačba 8.83 dobi s tem obliko

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \kappa |A|^2 A = 0 \quad (8.86)$$

Ta enačba ima kot pri obravnavi samozbiranja svetlobnega snopa v prejšnjem razdelku obliko nelinearne Schrodingerjeve enačbe 8.69, v kateri ima sedaj  $\tau$  isto vlogo kot prej prečna koordinata  $x$ . Rešitev s stacionarno dolžino sunka, ki ustreza rešitvi s konstantnim premerom snopa v primeru samozbiranja, tako dobimo, kadar je  $d^2 \beta / d\omega^2 < 0$ . To pomeni, da grupna hitrost narašča s frekvenco, kar je v skladu z razmislekoma na začetku tega razdelka. Optični soliton v vlaknu ima torej obliko

$$A(z, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \frac{\eta}{\operatorname{ch} \left[ \sqrt{2 \left| \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \right|^{-1}} \eta \tau \right]} \exp(i\eta^2 z)$$

$$A(z, t) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \frac{\eta}{\operatorname{ch} \left[ \sqrt{2 \left| \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \right|^{-1}} \frac{\eta}{v_g} (v_g t - z) \right]} \exp(i\eta^2 z) \quad (8.87)$$

Parameter  $\eta$  je sorazmeren z energijo solitona. Ta potuje z grupno hitrostjo in pri tem ohranja obliko. Analiza majhnih odmikov od dobljene rešitve pokaže, da je soliton tudi stabilen (Naloga). Zaradi tega se zdi, da bilo solitone mogoče izrabiti v optičnih komunikacijskih sistemih, kjer je potrebna velika gostota prenosa informacije na velike razdalje. S tem bi se izognili težavam, ki jih pri linearinem prenosu povzroča disperzija.

## 8.10 Optična fazna konjugacija

*Fazna konjugacija* je zanimiv in danes tudi prekično pomemben pojav, pri katerem dobimo iz danega novo valovanje, ki ima enake valovne fronte in potuje v nasprotni smeri od prvotnega valovanja; novo valovanje je tako, kot bi začetnemu obrnili predznak časa. Pojav je v ozki zvezi s holografijo, kjer najprej zapišemo predmetni snop, ki ga kasneje reproduciramo, pri fazni konjugaciji pa zapis začetnega vala in njegova reproducija potekata sočasno.

Napravimo poskus, ki ga kaže slika ???. Na nelinearen kristal naj v nasprotnih smereh vpada dva močna ravna črpalna vala z valovnima vektorjema  $\mathbf{k}_1$  in  $-\mathbf{k}_1$ . Poleg tega naj vpada še tretji, signalni snop, ki ni nujno raven val. Signalni val interferira s prvim črpalnim valom in s tem zaradi nelineranosti tretega reda povzroči modulacijo lomnega količnika, ki je skoraj periodična, če je signalni val blizu ravnega vala. Na tej periodični modulaciji se drugi črpalni val uklanja, pri čemer je uklonjeni val enake oblike kot signalni, le potuje v nasprotni smeri, ker ima drugi črpalni val nasprotno smer od prvega. Črpalna vala sta seveda enakovredna in ni mogoče ločiti, s katerim je signalni val interferiral in kateri se uklanja.

Pozoren bralec je ugotovil, da je gornja razlaga podobna razlagi holografije, le da sta tam postopka zapisa interference predmetnega vala z referenčnim in reprodukcije ločena.

Signalni val lahko zapišemo v obliki

$$E_3 = \operatorname{Re} \left[ \psi(r) e^{i(kz - \omega t)} \right] \quad (8.88)$$

Videli bomo, da je novonastali val

$$E_4 = \operatorname{Re} \left[ \psi^*(r) e^{i(-kz - \omega t)} \right] \quad (8.89)$$

Zaradi nasprotnega predznaka  $k$  potuje v obratni smeri od signalnega vala; poleg tega je še amplituda konjugirano kompleksna. To seveda ne pliva na obliko valovnih front, te so popolnoma enake kot pri signalnem valu. Zaradi lastnosti, da lahko novi val iz signalnega dobimo tako, da krajevni del kompleksno konjugiramo, nastalemu valu pravimo fazno konjugiran val.

Uporabna posledica fazne konjugacije je prikazana na sliki ???. Naj na neko neravno sredstvo z leve vpada Gaussov snop. Po prehodu skozi sredstvo valovne fronte niso več gladke. Ta popačen snop v faznem konjugatorju generira fazno konjugiran snop, ki potuje proti levi in ima enako nepravilne valoven fronte kot vpadni val. Po prehodu skozi neravno sredstvo se neravnosti valovne fronte kompenzirajo in dobimo enake gladke valoven ploskeve Gaussovega snopa, kot smo jih imeli na začetku. To lastnost popravljanja valovne fronte je mogoče koristni uporabiti, na primer namesto enega zrcala v laserskem resonatorju.

Poglejmo podrobneje, kako v nelinearnem sredstvu nastane fazano konjugiran val. Kot kaže slika ???, je celotno polje v nelinearnem kristalu vsota štirih valov, dveh črpalnih, signalnega in odbitega:

$$E = \frac{1}{2} E_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + \frac{1}{2} E_2 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + \frac{1}{2} E_3(z) e^{ikz} + \frac{1}{2} E_4(z) e^{-ikz} + \text{k.k.} \quad (8.90)$$

S k.k. smo spet označili konjugirano kompleksne člene. Ker so vsa polje pri isti frekvenci, nam časovenga faktorja ni treba pisati. Zaradi enostavnosti zapisa nelinearne polarizacije vzemimo, da so vse polarizacije enake. Privzeli smo še, da sta črpalna vala  $E_1$  in  $E_2$  dosti močnejša od  $E_3$  in  $E_4$ , tako da sta njuni amplitudi konstantni,  $E_3(z)$  in  $E_4(z)$  pa se le počasi spremunjata.

Postavimo  $E$  v časovno neodvisno valovno enačbo z nelinearno polarizacijo:

$$\nabla^2 E + \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} E = -\mu_0 \omega^2 P^{NL} \quad (8.91)$$

Pri tem je  $\epsilon \omega^2/c^2 = k^2$ . Ker obravnavamo le polje pri osnovni frekvenci, nastopajo v nelinearni polarizaciji le členi s to frekvenco. Vsebujejo še vedno različne kombinacije valovnih vektorjev. K enačbi za  $E_4$  prispevajo le tisti s krajevnim faznim faktorjem  $\exp(-ikz)$ , to je

$$P_4^{NL} = \epsilon_0 \chi^{(3)} [E_1 E_2 E_3^* + (|E_1|^2 + |E_2|^2) E_4] \quad (8.92)$$

Tu je  $\chi^{(3)}$  efektivna nelinearna susceptibilnost za izbrano polarizacijo vseh polj. Zanemarili smo člene, kjer  $E_3$  in  $E_4$  nastopata v višjih potencah, ker so majhni v primeri z zapisanimi. Z upoštevanjem, da se  $E(z)$  le počasi spreminja, dobimo enako kot pri mešanju treh frekvenc

$$\frac{dE_4}{dz} = i \frac{\omega}{nc} \chi^{(3)} [E_1 E_2 E_3^* + (|E_1|^2 + |E_2|^2) E_4] \quad (8.93)$$

Drugi člen na desni že poznamo; opisuje odvisnost lomnega količnika od intenzitete črpalnih valov, torej optični Kerrov pojav. Vpeljimo nove amplitude

$$A_k = E_k \exp \left[ -i \frac{\omega}{nc} (|E_1|^2 + |E_2|^2) z \right] \quad (8.94)$$

ki se od prvotnih razlikujejo le po faznem faktorju. S tem se enačba 8.93 poenostavi:

$$\frac{dA_4}{dz} = i \frac{\omega}{nc} \chi^{(3)} A_1 A_2 A_3^* \quad (8.95)$$

Podobno dobimo

$$\frac{dA_3^*}{dz} = i \frac{\omega}{nc} \chi^{(3)} A_1^* A_2^* A_4 \quad (8.96)$$

Z vpeljavo sklopitevene konstante

$$\kappa = \frac{\omega}{nc} \chi^{(3)} \quad (8.97)$$

se enačbi poenostavita:

$$\frac{dA_4}{dz} = i \kappa^* A_3^*$$

$$\frac{dA_3^*}{dz} = i \kappa A_4 \quad (8.98)$$

Bralcu priporočam, da si še enkrat ogleda korake, s katerimi smo zelo težaven problem nelinearne valovne enačbe poenostavili na linearen sistem dveh preprostih sklopljenih enačb za amplitudi signalnega in odbitega vala.

Splošni rešitvi sistema 8.98 sta

$$\begin{aligned} A_4(z) &= C_1 \cos |\kappa| z + C_2 \sin |\kappa| z \\ A_3^*(z) &= -i \frac{|\kappa|}{\kappa^*} (-C_1 \sin |\kappa| z + C_2 \cos |\kappa| z) \end{aligned} \quad (8.99)$$

Potrebujemo še robne pogoje za obe valovanji. Z leve, pri  $z = 0$ , poznamo  $A_3^*(0)$ , pri  $z = L$  pa ne more biti odbitega vala:  $A_4(L) = 0$ . S tem lahko določimo konstanti  $C_1$  in  $C_2$ :

$$\begin{aligned} A_4(z) &= i \frac{\kappa^* \sin |\kappa| (L-z)}{|\kappa| \cos |\kappa| L} A_3^*(0) \\ A_3^*(z) &= \frac{\cos |\kappa| (z-L)}{\cos |\kappa| L} A_3^*(0) \end{aligned} \quad (8.100)$$

Amplituda odbitega vala pri  $z = 0$  je

$$A_4(0) = i \frac{\kappa^*}{|\kappa|} \tan |\kappa| L A_3^*(0) \quad (8.101)$$

Odbiti val je sorazmeren s kompleksno konjugirano amplitudo vpadnega vala in ima natanko nasproten valovni vektor, zato tudi ime fazno konjugiran val. Ker je lahko  $\tan |\kappa| L > 1$ , je možno tudi ojačenje odbitega vala, ki gre seveda na račun moči črpalnih valov.

Doslej smo predpostavili, da je signalni val raven. Če je njegova amplituda odvisna še od prečne koordinate, ga lahko razvijemo po ravnih valovih in velja za vsako komponento posebej en. 8.101. Odbite komponente so sorazmerne s konjugiranimi komponentami signalnega vala z nasprotnim valovnim vektorjem in dajo skupaj valovno fronto enake oblike kot pri signalnem valu, le giblje se v nasprtni smeri, kot smo opisali že na začetku razdelka.

V NOVO POGLAVJE Poseben primer nelinearne susceptibilnosti  $d_{ijk}$  smo pravzaprav že srečali pri elektrooptičnem pojavu: elektrooptični tenzor  $r_{ijk}$  opisuje isto lastnost snovi, le da smo tam zahtevali, da je eno polje skoraj statično. Za  $d_{ijk}$  velja, kot za vsak tenzor tretjega ranga, da je lahko od nič različen le v snoveh brez centra inverzije. V centrosimetričnih snoveh je prvi od nič različni nelinearni člen tretjega reda.

# 9. Modulacija svetlobe

V optičnih napravah pogosto želimo spremnijati lastnosti svetlobnega valovanja. Nekaj takih primerov smo že srečali pri obravnavi laserja, kjer smo za preklop kvalitete laserja potrebovali element, ki mu je moč hitro spremnijati prepustnost. Pri optičnem prenašanju in obdelavi informacij je možnost modulacije amplitudne, frekvence ali faze svetlobnega vala z električnim signalom osnova skoraj vsake naprave.

Optični modulatorji izkoriščajo nekaj pojavov, od katerih sta najpomembnejša elektrooptični in elstooptični pojav. Pri prvem dosežemo spremembo lomnega količnika snovi z električnim poljem, pri drugem pa z deformacijo, ki jo navadno dobimo v zvočnem valu, zato takim modulatorjem pravimo akustooptični. Poseben zelo pomemben primer elektrooptičnih modulatorjev predstavljajo naprave na osnovi tekočih kristalov.

## 9.1 Elektrooptični pojav

V zunanjem električnem polju, katerega frekvanca naj bo majhna v primeri z optično frekvenco, se optični dielektrični tenzor lahko spremeni. Omejitev na nizko frekvenco je potrebna zato, da optično polje še vedno lahko obravnavamo linearно. Kako je, kadar to omejitev opustimo, si bomo ogledali v prihodnjem poglavju o nelinearni optiki, kamor pravzaprav formalno sodi tudi elektrooptični pojav.

Iz zgodovinskih razlogov zapišimo raje spremembo dielektričnemu inverznega tenzorja  $b = \epsilon^{-1}$ . Spremembo komponente  $b_{ij}$  lahko zapišemo kot potenčno vrsto zunanjega polja:

$$\delta b_{ij} = r_{ijk}E_k + q_{ijkl}E_kE_l . \quad (9.1)$$

Prvi člen, linearen z ozirom na zunanje polje, opisuje linearni elektrooptični pojav. Tenzor tretjega ranga  $r_{ijk}$ , ki lastnost snovi, imenujemo kar elektrooptični tenzor ali tudi Pockelsov tenzor. Kvadratnemu elektrooptičnemu pojavu pravimo Kerrov pojav. Za uporabo trdnih kristalov je pomemben predvsem linearni člen, zato se v nadaljevanju za Kerrov pojav ne bomo zanimali.

Preden si nekoliko pobliže ogledamo Pockelsov tenzor, zapišimo še, kako se z  $\delta b_{ij}$  izrazijo spremembe komponent dielektričnega tenzorja. Vzemimo tak koordinatni sistem, da bo nemoten dieletkrični tenzor v njem diagonalen. Ker so spremembe majhne, velja

$$(b + \delta b)^{-1} = [b(1 + b^{-1}\delta b)]^{-1} = (1 + b^{-1})^{-1}b^{-1} \simeq b^{-1} - b^{-1}\delta b b^{-1} , \quad (9.2)$$

torej

$$\delta \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ik}\delta b_{kl}\epsilon_{lj} = \epsilon_{ii}\epsilon_{jj}\delta b_{ij} . \quad (9.3)$$

Seveda je povsem vseeno, kako definiramo elektrooptični pojav, preko  $b$  ali  $\epsilon$ . Običajna definicija Pockelsovega tenzorja ima za posledico, da v izrazih, kjer nastopa sprememba dielektričnega tenzorja, nstopajo še nemotene vrednosti  $\epsilon$  ali lomnih količnikov.

Simetrija pomembno vpliva na obliko tenzorjev, ki popisujejo lastnosti snovi. Pockelsov tenzor je tretjega ranga, zato je lahko različen od nič le v takih kristalih, katerih simetrijska grupa ne vsebuje inverzije. Pri inverziji namreč električno polje spremeni predznak. Komponente simetričnega tenzorja drugega ranga se obnašajo kot produkti koordinat,  $b_{12}$  se transformira na primer enako kot  $xy$ , zato je  $b_{ij}$  na inverzijo neobčutljiv. Pockelsov tenzor  $r_{ijk}$  je lastnost snovi, zato se v primeru, da je inverzija simetrijski element kristala, ne sme spremeniti. Od tod sledi, da mora biti  $r_{ijk}$  identično enak nič. Kvadratni Kerrov pojav pa je dovoljen v vseh snoveh.

Simetrija tudi v primeru, ko nimamo centra inverzije, navadno močno zmanjša število neodvisnih komponent  $r_{ijk}$ . Pockelsov tenzor je po definiciji simetričen v prvih dveh indeksih, zato ima v najmanj simetričnem primeru triklinskega kristala 18 neodvisnih komponent, v kristalih z višjo simetrijo pa manj. Za primer poglejmo, kako štirištevna simetrijska os zmanjša število komponent.

Naj bo simetrijska os v smeri  $z$ . Električno polje naj bo najprej paralelno osi. Rotacija za  $\pi/2$  je simetrijska operacija in prevede os  $x$  v  $y$ , zato  $r_{113} = r_{223}$ . Poglejmo zvezo

$$\delta b_{12} = r_{123}E_3. \quad (9.4)$$

Pri rotaciji za  $\pi/4$  gre  $x$  v  $y$ ,  $y$  pa v  $-y$ , zato gre  $\delta b_{12}$  v  $-\delta b_{12}$  in dobimo

$$-\delta b_{12} = r_{123}E_3. \quad (9.5)$$

Zvezi 9.4 in 9.5 lahko veljata le, če je  $r_{123} = 0$ . Rotacija za  $\pi$  prevede zvezo  $\delta b_{13} = r_{133}E_3$  v  $-\delta b_{13} = r_{133}E_3$ , zato je tudi  $r_{133} = 0$  in z ozirom na enakovrednost  $x$  in  $y$   $r_{233} = 0$ .

Naj bo sedaj polje v smeri osi  $x$ . Pri rotaciji za  $\pi$  gre  $E_1$  v  $-E_1$ ,  $\delta b_{11}$  se ne spremeni in je  $r_{111}E_1 = -r_{111}E_1$ , torej  $r_{111} = 0$ . Rotacija za  $\pi/2$  zvezo  $\delta b_{23} = r_{231}E_1$  prevede v  $-\delta b_{13} = r_{231}E_2$ . Po definiciji pa je  $\delta b_{13} = r_{132}E_2$ , zato velja  $r_{231} = -r_{132}$ .

Podobno ravnamo še s preostalimi komponentami in tako ugotovimo, da imamo v tetragonalni grupi, ki vsebuje le štirištevno os, štiri neodvisne komponente elektrooptičnega tenzorja:  $r_{113} = r_{223}$ ,  $r_{333}$ ,  $r_{231} = -r_{132}$  in  $r_{131} = r_{232}$ , vse ostale komponente pa so nič. Oblika različnih tenzorjev pri različnih kristalnih simetrijah je dana na primer v ?? ali ??.

V literaturi pogosto uporablajo skrajšan zapis za elektrooptični tenzor. Prva dva indeksa, v katerih je  $r_{ijk}$  simetričen, združijo v enega z vrednostmi od 1 do 6 po dogovoru  $xx = 1$ ,  $yy = 2$ ,  $zz = 3$ ,  $yz = 4$ ,  $zx = 5$  in  $xy = 6$ . Tako postane  $r_{ijk}$  matrika velikosti  $6 \times 3$ , simetrični tenzor drugega ranga  $b_{ij}$  pa šetkomponenten vektor. Tak zapis je prikladen, se pa v račune hitro prikradejo napake, posebej še pri transformacijah koordinat, zato je računati bolje v normalnem tenzorskem zapisu.

## 9.2 Amplitudna modulacija

Poglejmo sedaj, kako lahko elektrooptični pojav izkoristimo za modulacijo amplitudo svetlobnega snopa. Osnovna zamisel je, da z električnim poljem tako spremenimo dvolomnost primerno izbranega in odrezanega kristala, da se spremeni polarizacija vpadnega vala, zaradi česar se spremeni tudi svetlobna moč, ki jo prepusti analizator za kristalom. Poglejmo si to kar na primerih.

Vzemimo kristal s kubično simetrijo  $\bar{4}3m$ , na primer ZnTe. Elektrooptični tenzor ima le eno neodvisno komponento

$$r_{123} = r_{231} = r_{312} = r. \quad (9.6)$$

Dielektrični tenzor brez polja je seveda izotopen, dvolomnosti ni. Električno polje vzdolž ene od osi, na primer  $z$ , povzroči spremembo  $\delta\epsilon_{12} = -\epsilon^2 r E_3$ , zaradi česar postane kristal enoosen z optičnima osema v ravni  $xy$ , torej pravokotno na  $\vec{E}$ . To ni najbolj ugodno. Bolje je izbrati polje v smeri (1,1,1):

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad (9.7)$$

to je vzdolž trištevne osi, ki ostane tudi pod poljem. Optične lastnosti so tedaj enake kot v trigonalnem kristalu, to je kristal postane enoosen z optično osjo vzdolž  $\vec{E}$ . Dielektrični tenzor dobi obliko

$$\underline{\epsilon} = [\epsilon], \quad \delta\epsilon = \frac{E_0}{\sqrt{3}}\epsilon^2 r. \quad (9.8)$$

Da bomo znali izračunati, kako se po takem kristalu širi vpadni svetlobni snop, moramo gornji dielektrični tenzor diagonalizirati. V našem primeru je to preprosto, saj smo že ugotovili, da predstavlja enoosno sredstvo z optično osjo vzdolž  $\vec{E}$ . Uvedimo torej nove koordinate z osjo  $z'$  vzporedno z  $\vec{E}$ :

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z). \quad (9.9)$$

V ravni, pravokotni na  $z'$  so vse smeri enakovredne, zato je vseeno, kako izberemo novi osi  $x'$  in  $y'$ , le pravokotni morata biti na  $z'$  in med seboj. Vzemimo

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-2x + y + z). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Matrika prehoda iz starega v novi sistem je torej

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

in dielektrični tenzor v novem sistemu

$$\underline{\epsilon}' = R \underline{\epsilon} R^{-1} = [\epsilon + \delta\epsilon]. \quad (9.12)$$

Iz oblike  $\epsilon'$  razberemo, da je redni lomni količnik, to je količnik za svetlubo, ki je polarizirana pravokotno na  $z'$ ,

$$n_r = \sqrt{\epsilon + \delta\epsilon} \simeq n_0 \left(1 + \frac{\delta\epsilon}{2\epsilon}\right) = n_0 + \frac{n_0^3 r E_0}{2\sqrt{3}}, \quad (9.13)$$

kjer je  $n_0 = \sqrt{\epsilon}$  nemoten lomni količnik. Izredni lomni količnik, za katerega je polarizacija vzporedna z osjo  $z'$ , je

$$n_i = n_0 - \frac{n_0^3 r E_0}{\sqrt{3}}. \quad (9.14)$$

Odrežimo iz obravnavanega kristala kvader z robovi vzdolž osi  $x'$ ,  $y'$  in  $z'$ . Postavimo ga med prekrižan polarizator in analizator tako, da se svetloba širi vzdolž osi  $x'$ , kot kaže slika ??.

Polarizator naj tvori z osjo  $z'$  kot  $45^\circ$ . Svetlobni val, ki vpada na kristal, moramo razdeliti na redni in izredni del. Po prehodu skozi kristal nastane med njima fazna razlika

$$\phi = k_0 L (n_i - n_r) = \frac{\sqrt{3} \pi n_0^3 r L U}{\lambda d}, \quad (9.15)$$

kjer je  $U$  napetost na kristalu.

Polarizator na izhodni strani prepusti le projekcijo obeh lastnih polarizacij:

$$E_{vh} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{vh} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \right), \quad (9.16)$$

kjer je  $E_{vh}$  amplituda svetlobnega vala za vhodnim polarizatorjem. Gostota prepuščenega svetlobnega toka bo torej

$$j_{vh} = \frac{1}{4} j_{vh} |1 - e^{i\phi}|^2 = \frac{1}{2} j_{vh} (1 - \cos \phi). \quad (9.17)$$

Ko je napetost na kristalu nič, je  $\phi = 0$  in je tudi  $j_{vh} = 0$ , kot pričakujemo, saj sta analizator in polarizator prekrižana, kristal pa je brez polja optično izotropen. Največjo prepustnost dobimo, ko je  $\phi = \pi$ . V ZnTe je  $r_{123} = 4 \cdot 10^{-12}$  m/V in  $n = 3$ . Naj bo kristal dolg 1 cm. Potrebno električno polje, da bo  $\phi = \pi$ , z drugimi besedami, da bo kristal deloval kot ploščica  $\lambda/2$ , je pri valovni dolžini 600 nm

$$E_{\lambda/2} = \frac{U_{\lambda/2}}{d} = \frac{\lambda}{\sqrt{3} n^3 r L} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ V/m}. \quad (9.18)$$

Napetost, da popolnoma odpremo modulator, je torej precej velika, pri debelini kistala 1 cm je potrebnih 3000 V. Velike delovne napetosti so značilne za kristalne elektrooptične modulatorje in so njihova glavna slaba stran.

Včasih želimo, da je zveza med modulacijsko napetostjo in izhodno gostoto toka linearna. Za to mora modulator delovati v okolici  $\phi = \pi/2$ . Namesto visoke stalne napetosti lahko uporabimo med polarizatorjem in kristalom še ploščico  $\lambda/4$ , ki nam da zahtevani stalni fazni premik med rednim in izrednim valom.

V praksi se pogosto uporablja kristali, ki imajo simetrijo nižjo od kubične in so dvolomni že brez zunanjega polja. Zato si kot primer poglejmo še modulator s kristalom kalijevega dihidrogen fosfata ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ). Je tetragonalne simetrije  $\bar{4}2m$  in ima dve neodvisni komponenti Pockelsovega tenzorja:  $r_{123} = 10^{-11}$  m/V in  $r_{231} = r_{132} = 8 \cdot 10^{-12}$  m/V. V uporabi sta dve geometriji, pri eni je optična os, to je štirištevna os kristala, vzporedna s smerjo svetlobnega vala in je tudi zunanje modulacijsko polje v isti smeri, kar je manj ugodno, pri drugi pa sta optična os in zunanje polje pravokotna na smer širjenja svetlobe, kot kaže slika ???. Električno polje v smeri  $z$  povzroči, da se pojavi izvendiagonalna komponenta dielektričnega tenzorja  $\delta\epsilon_{12} = \epsilon_1^2 r_{123} E$  in lastni vrednosti dielektričnega tenzorja v ravnini  $xy$  nista več enaki. Ena lastna vrednost postane  $\epsilon_1 + \delta\epsilon$  z lastno smerjo  $x'$   $45^\circ$  glede na kristalno os  $x$ , druga pa  $\epsilon_1 - \delta\epsilon$  z lastno smerjo  $y'$   $-45^\circ$  na os  $x$ . Kristal odrežemo tako, da se svetloba širi vzdolž osi  $y'$ . Tedaj se zaradi zunanjega polja lomni količnik za svetlobo, polarizirano v smeri  $x'$  spremeni za  $n_r^3 r_{123} E / 2$  in je fazna razlika med obema lastnima polarizacijama (smeri  $x'$  in  $z$ ) po prehodu skozi kristal

$$\phi = k_0 L \left[ (n_r - n_i) + \frac{n_r^3}{2} r_{123} E \right], \quad (9.19)$$

kjer sta  $n_r$  in  $n_i$  redni in izredni lomni količnik nemotenega kristala. Ker je kristal že sam po sebi dvolomen, povzroči zunanje polje le majhno dodatno fazno razliko. Dolžina kristala mora

biti taka, da velja  $k_0 L(n_r - n_i) = 2N\pi$ , če naj bo modulator brez zunanjega polja zaprt. Pri tem nastopi težava. Pogoj je lahko zaradi temperaturnega raztezanja in odvisnosti lomnih količnikov od temperature izpolnjen le pri eni temperaturi, poleg tega bi bil tak modulator tudi zelo občutljiv na to, da se svetloba širi natanko v smeri  $y'$ . Zato dvolomnost nemotenega kristala kompenziramo tako, da vzamemo dva enako dolga kristala in ju postavimo zapored tako, da sta optični osi med seboj pravokotni, kot kaže slika ???. Modulacijska napetost na drugem kosu mora imeti nasprotni predznak. Tedaj se fazna razlika med obema polarizacijama zaradi naravne dvolomnosti odšteje, zaradi modulacijske napetosti pa sešteje.

### 9.3 Fazna in frekvenčna modulacija

Amplitudno modulacijo svetlobe smo dobili tako, da smo z zunanjim poljem spremenili fazi lastnih valov, zaradi česar je postalo linearно polarizirano vpadno valovanje po prehodu kristala eliptično polarizirano. Spremembo polarizacije smo z analizatorjem prevedli v spremembo amplitude. Včasih pa želimo modulirati fazo vpadne svetlobe. Dobimo jo tako, da odstranimo izhodni polarizator, vhodno polarizacijo pa usmerimo tako, da je vpadna svetloba lastno valovanje, za katero je spremembra lomnega količnika zaradi modulacijskega polja večja. V primeru ZnTe, ki smo ga obravnavali v prejšnjem razdelku, je to izredno valovanje, polarizirano v smeri modulacijskega polja. Dodatna faza na izhodni strani kristala je

$$\phi = k_0 L(n_i - n_0) = \frac{\omega n_0^3 r L U}{\sqrt{3} c d}. \quad (9.20)$$

Če je spremembra faze linearна funkcija časa, to je, če jo lahko zapišemo v obliki  $\phi = \omega_1 t + \phi_0$ , predstavlja koeficient  $\omega_1$  spremembo frekvence vpadne svetlobe. Linearno naraščajoča modulacijska napetost da torej spremembo frekvence, kar v optiki pogosto potrebujemo. Dosegljive spremembe frekvence  $\omega_1$  so seveda dokaj majhne, do nekaj sto MHz. Omejene so z možno hitrostjo spremicanja napetosti. Napetost seveda tudi ne more neomejeno naraščati. Kadar se napetost vrača na nič, dobimo frekvenčni premik v nasprotni smeri, ki pa ga lahko zanemarimo, če je čas vračanja kratek primeri s časom naraščanja.

Poglejmo še, kakšen je spekter svetlobe, če je fazna modulacija periodična:

$$U = U_m \sin \omega_m t. \quad (9.21)$$

Polje izhodne svetlobe bo tedaj

$$E_{izh} = E_{vh} \cos(\omega t + \delta \sin \omega_m t), \quad (9.22)$$

kjer je  $\delta = \omega n_0^3 r U_m L / (\sqrt{3} c d)$ . Z uporabo identitet

$$\begin{aligned} \cos(\delta \sin x) &= J_0(\delta) + 2J_2(\delta) \cos 2x + \dots \\ \sin(\delta \sin x) &= 2J_1(\delta) \sin x + 2J_3 \sin 3x + \dots \end{aligned} \quad (9.23)$$

je izhodno polje mogoče zapisati v obliki

$$\begin{aligned} E_{izh} &= E_{vh} [J_0(\delta) \cos \omega t \pm J_1(\delta) \cos(\omega \pm \omega_m)t + \\ &\quad + J_2(\delta) \cos(\omega \pm 2\omega_m)t \pm \dots] \end{aligned} \quad (9.24)$$

Periodična fazna modulacija torej da v spektru stranske pasove, odmaknjene od osnovne frekvence  $\omega$  za modulacijsko frekvenco. Njihova velikost je podana s kvadratom Besselovih funkcij parametra  $\delta$ . Če je ta majhen, se lahko zadovoljimo le s prvim členom.

## 9.4 Modulacija pri visokih frekvencah

Pogosto je pomembna hitrost elektrooptične modulacije. Zato polejmo, kaj se zgodi pri visokih modulacijskih frekvencah.

Elektrooptični pojav pri nizkih frekvencah ima dva prispevka: direktnega, kjer zunanje polje vpliva neposredno na elektronsko polarizabilnost, in posrednega preko piezoelektričnega pojava. Snovi, ki nimajo centra inverzije, so tudi piezoelektrične in se v zunanjem električnem polju deformirajo. Deformacija pa povzroči spremembo lomnega količnika, o čemer bomo podrobnejše govorili v enem od naslednjih oddelkov. Celotno spremembo tenzorja  $b_{ij}$  lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\delta b_{ij} &= r_{ijk}^* E_k + p_{ijlm} S_{lm} \\ &= r_{ijk}^* E_k + p_{ijlm} \pi_{lmk} E_k\end{aligned}\quad (9.25)$$

Tu je  $S_{lm} = \pi_{lmk} E_k$  piezoelektrično povzročena deformacija. Pri nizkih frekvencah sta oba prispevka primerljivo velika in je efektivni elektrooptični tenzor  $r_{ijk} = r_{ijk}^* + p_{ijlm} \pi_{lmk}$ . Pri dovolj velikih frekvencah deformacija kristala ne more več slediti modulacijski napetosti in ostane le direktni prispevek  $r_{ijk}^*$ . To se zgodi nad akustičnimi resonancami kristala. Pri akustičnih resonancah, to je, kadar modulacija v kristalu vzbudi stopeče zvočno valovanje, pa se piezoelektrični prispevek resonančno poveča.

Pogoj za akustično resonanco je, da je dimenzija kristala mnogokratnik polovice valovne dolžine akustičnega vala v kristalu. Uporabne dimenzijske kristalov so reda velikosti centimeter, hitrost zvočnih valov je okoli 5000 m/s, tako da dobimo resonance v področju od nekaj sto kHz do nekaj deset MHz. Mogoče jih je tudi izkoristiti za povečanje elektrooptičnega efekta pri izbrani frekvenci.

Pri visokih frekvencah postane pomembna tudi električna vezava modulatorja. Kristal predstavlja neko kapacitivno breme. Njegova impedanca pada z rastočo frekvenco, zato je vedno večji del padca napetosti na notranjem uporu izvora napetosti. Pomagamo si lahko tako, da vzporedno s kristalom vežemo še tuljavo, tako da je resonančna frekvence  $1/(L_t C)$  nastalega nihajnega kroga enaka željeni modulacijski frekvenci  $\omega_m$ . Tedaj je večina padca napetosti na kristalu in tuljavi. Da resonanca ni preostra in da imamo na voljo dovolj širok pas modulacijskih frekvenca, vežemo vzporedno s kristalom še upor z upornostjo  $R$ . Širina modulacijskega pasu je

$$\Delta\omega_m = \frac{1}{RC} . \quad (9.26)$$

Na uporu se troši moč

$$P = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R} = \frac{1}{2} U^2 C \Delta\omega_m = \frac{\epsilon \epsilon_0 L a}{2d} U^2 C \Delta\omega_m , \quad (9.27)$$

kjer je  $a$  velikost kristala v prečni smeri. Naj bo  $U$  ravno napetost, ki da fazno razliko  $\pi$ . Potem dobimo z uporabo enačbe 9.18

$$P = \frac{A}{L} \frac{\epsilon \epsilon_0 \Delta\omega_m \lambda^2}{3n_0^6 r^2} , \quad (9.28)$$

kjer je  $A$  prečni presek kristala. Potrebna moč je odvisna od lastnosti modulatorja in širine modulacijskega pasu. Pri širini modulacijskega pasu 1 MHz in preseku kristala  $1 \text{ cm}^2$  je potrebna moč nekaj deset W, kar je za visokonapetosten in hiter izvor že znatna moč.

## 9.5 Elastooptični pojav

Dielektrične lastnosti in lomni količnik so odvisne tudi od deformacije snovi. Podobno kot pri elektrooptičnem pojavu lahko spremembo obratnega dielektričnega tenzorja zapišemo

$$\delta b_{ij} = p_{ijkl} S_{kl} . \quad (9.29)$$

$S_{kl}$  je tenzor defomacije snovi:

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) , \quad (9.30)$$

$p_{ijkl}$  pa *elastooptični tenzor*. Ta je različen od nič v vsaki snovi, ker povezuje dva simetrična tenzorja drugega ranga. Popisuje tudi spremembo dielektrične konstante in lomnega količnika zaradi spremembe gostote snovi. Je simetričen v prvem in drugem paru indeksov, tako da ima v najbolj splošnem primeru 36 neodvisnih komponent. Simetrija danega kristala seveda to število zmanjša.

Podobno kot pri elektrooptičnem pojavu lahko iz 9.29 izrazimo spremembo dielektričnega tenzorja

$$\delta \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ii} \epsilon_{jj} p_{ijkl} S_{kl} , \quad (9.31)$$

kjer smo že predpostavili, da je nemoteni  $\epsilon$  diagonalen.

Dvojni lom, ki se pojavi v deformirani snovi, izkoriščamo za študij mehanskih napetosti v modelih, ki so izdelani iz prozorne plastične snovi. Nas bo v nadaljevanju zanimal uklon svetlobe na periodični modulaciji lomnega količnika, ki nastane zaradi zvočnih valov v snovi.

## 9.6 Braggov uklon na zvočnih valovih

V plasti prozorne snovi vzbudimo stopeče zvočno valovanje. V zgoščini je lomni količnik nekoliko večji, zato je optična pot na takem mestu skozi plast daljša. Ravno svetlobno valovanje, ki pada na plast, po izstopu iz plasti ne bo imelo več povsod enake faze, valovno čelo bo periodično modulirano s periodo valovne dolžine zvoka. V veliki oddaljenosti od plasti bomo poleg osnovnega snopa dobili še uklonjene snopa v smereh, za katere velja

$$\Lambda \sin \theta = \pm 2N\pi , \quad (9.32)$$

kjer smo z  $\Lambda$  označili valovno dolžino zvoka v snovi. Zgoščine in razredčine izginejo vsake pol zvočne periode, zato je tudi intenziteta uklonjenih snopov modulirana z dvojno frekvenco zvoka.

V splošnem je delež uklonjene svetlobe neuporabno majhen. Znaten postane le tedaj, kadar je za enega od uklonjenih valov izpolnjen Braggov pogoj, to je, kadar velja

$$\vec{k}_0 \pm \vec{q} = \vec{k}_1 , \quad (9.33)$$

kjer je  $\vec{k}_0$  valovni vektor vpadne svetlobe,  $\vec{k}_1$  valovni vektor uklonjenega svetlobnega snopa,  $\vec{q}$  pa valovni vektor zvočnega vala. Znak plus velja, kadar potuje zvok proti projekciji  $\vec{k}_0$  na  $\vec{q}$ . Enačba 9.33 je pogoj za ohranitev gibalne količine fotona pri sipanju na zvočnem valu. Lahko jo prepišemo še nekoliko drugače. Frekvenca zvočnega vala je dosti nižja od frekvence svetlobe,

zato se frekvenca svetlobe pri sisanju le malo spremeni in sta  $\omega$  in  $\vec{k}_0$  po velikosti skoraj enaka. Tedaj je  $q = 2k_0 \sin \theta_B / 2$  (glej sliko 9.7), od koder imamo Braggov pogoj v obliki

$$2\Lambda \sin \frac{\theta_B}{2} = \lambda_0. \quad (9.34)$$

Obenem mora biti vpadni kot na zvočni val enak izhodnemu, torej na zvočnem valu se Braggovo siana svetloba zrcalno odbije. Razmere so povsem analogne Braggovemu sisanju rentgenske svetlobe na kristalnih ravninah. Kadar je izpolnjen Braggov pogoj, je mogoče doseči, da se vsa vpadna svetloba siplje, kot bomo pokazali nekoliko kasneje.

Če je zvočni val potajoč, kar smo v gornjem razmišljjanju že privzeli s tem, ko smo mu pripisali natanko določen valovni vektor  $\vec{q}$ , se spremeni tudi frekvenca sisanega vala zaradi Dopplerjevega premika pri odboju zvočnem valu, ki potuje s hitrostjo  $v_z$ . Upoštevati moramo le projekcijo na smer vpadne in odbite svetlobe, zato je

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm \frac{2v_z \sin \theta_B / 2}{c} = \pm \frac{2\Omega \sin \theta_B / 2}{c} = \pm \frac{\Omega}{\omega}; \quad (9.35)$$

Upoštevali smo, da velja Braggov pogoj 9.34. Sprememba frekvence siane svetlobe je kar enaka frekvenci zvočnega vala. To sledi tudi iz zahteve, da se mora pri sisanju na zvočnemvalu ohraniti energija vpadnega fotona in kvanta zvočnega valovanja - fonona, ki se pri sisanju absorbira (znak plus, zvočni val potuje proti projekciji  $\vec{k}_0$  na  $\vec{q}$ ) ali nastane.

Kadar imamo v snovi stoječe zvočno valovanje, lahko sisanje obravnavamo kot vsoto sisanja na dveh valovanjih z valovnima vektorjema  $\vec{q}$  in  $-\vec{q}$ . Smer Braggovo sisanega vala je obakrat enaka, frekvenca pa se enkrat poveča, drugič zmanjša za  $\Omega$ . Zato dobimo utripanje sisanega vala s frekvenco  $2\Omega$ .

Braggovo sisanje svetlobe na zvočnih valovih se uporablja v več optičnih napravah. Najpomembnejše je uklanjanje svetlobe iz vpadne smeri, pri čemer ima uklonjeni snop še spremenjeno frekvenco. Z vklaplanjem in izklaplanjem zvočnega vala, ki ga vzbujamo s piezoelektričnim elementom, na katerega pritisnemo izmenično napetost, lahko moduliramo intenziteto direktnega svetlobnega snopa. To potrebujemo na primer pri preklapanju kvalitete laserskega resonatorja. S spremenjanjem zvočne frekvence pa lahko spremojamo smer uklonjenega snopa, pri čemer pa smo precej omejeni s tem, da mora biti približno izpolnjen Braggov pogoj.

Druga uporaba je spremenjanje frekvenca svetlobe. Možne so spremembe do nekaj sto MHz, kar je ravno primerno za uporabo v laserskih merilnikih hitrosti, kjer merimo frekvenco utripanja med svetlobo, odbito od merjenega predmeta, in referenčno svetobo. Če ima referenčna svetloba isto frekvenco kot merilni snop, ni mogoče določiti predznaka hitrosti predmeta, če pa referenčni svetlobi nekoliko spremojimo frekvenco, dobimo utripanje tudi tedaj, ko predmet miruje. Frekvenca utripanja se poveča ali zmanjša glede na predznak hitrosti predmeta.

Tretja pomembna uporaba je kombinacija obeh gornjih za uklepanje faz v laserskem resonatorju. Če imamo v Braggovem elementu stoječe zvočno valovanje, je amplituda direktnega snopa modulirana s frekvenco zvoka. Če je frekvenca zvoka ravno enaka razmiku frekvenc laserskih nihanj, lahko dobimo ukljenjene faze vzbujenih nihanj in s tem kratke, periodične sunke svetlobe, kot smo videli v petem poglavju.

Zanimiva je tudi možnost, da napravimo s pomočjo Braggovega elementa hiter frekvenčni analizator električnih signalov. Shemo kaže slika ???. Piezoelektrični element vzbujamo z električnim signalom, ki ima neznan spekter. Enak spekter imajo tudi vzbujeni zvočni valovi. Vsakemu valu določene frekvence ustrezata določen kot odklona svetlobnega snopa. Za Braggovim

elementom postavimo lečo. Vsak delni uklonjeni snop da v goriščni ravnini svetlo točko, katere položaj je odvisen od kota odklona in s tem od frekvence zvočnega vala. Spekter zaznamo z vrstičnim detektorjem. Na celo napravo lahko pogledamo tudi takole: Braggova celica frekvenčni spekter zvočnih valov prevede v prostorski spekter prepuščene svetlobe. Prostorski spekter svetlobe pa lahko analiziramo z lečo, ki nam v goriščni ravnini na desni da prostorsko Fourierovo transformacijo svetlobnega snopa na levi strani leče.

Nismo še ugotovili, kolikšen je delež uklonjene svetlobe. Rešiti moramo valovno enačbo v nehomogenem sredstvu, kar je dokaj težaven problem in se moramo zateči k približkom. Ena možnost je, da uporabimo običajno uklonsko teorijo, kjer privzamemo, da lahko vpliv periodične modulacije lomnega količnika snovi upoštevamo s spremembou faze svetlobnega vala na izhodu iz snovi:  $\delta\phi = \delta n k_0 L$ , kjer je  $L$  debelina plasti. (Naloga) Vendar je tak račun dober le v primeru, kadar je prečna variacija faze majhna in je debelina  $L$  majhna.

Primernejša je metoda *sklopljenih valov*. Paralelen snop zvočnega valovanja z valovnim vektorjem  $\vec{q}$  naj potuje v smeri  $x$ . Širina snopa naj bo  $L$ . Nanj pod kotom  $\phi$  glede na os  $z$  vpada ravno svetlobno valovanje z valovnim vektorjem  $\vec{k} = (k_1, 0, k_3) = k(\sin\phi, 0, \cos\phi)$ . Vse valovanje, vpadno na levi zvočnega snopa in izhodno na desni, obravnavajmo znotraj snovi, da nam ni treba upoštevati še loma, ki le zaplete izraze. Zaradi periodične modulacije lomnega količnika so ravni valovi, katerih  $x$ -komponente valovnih vektorjev se razlikujejo za  $q$ , med seboj sklopljeni, zato njihove amplitudo niso konstantne, temveč se v smeri  $z$  počasi spreminja, kar želimo v različnih približkih izračunati.

Privzemimo, da se v snovi zaradi zvočnih valov spremeni le velikost dielektrične konstante, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon_1 \sin(qx - \Omega t), \quad (9.36)$$

kjer je sprememba  $\epsilon_1$  povezana z amplitudo deformacije  $S_0$  v zvočnem valu:  $\epsilon_1 = -\epsilon^2 p S_0$ . Izpustili smo indekse tenzorjev.

Valovna enačba ima obliko

$$\nabla^2 E = \frac{\epsilon'}{c^2} \frac{\partial E^2}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial P_1^2}{\partial t^2}. \quad (9.37)$$

Na levi strani smo zanemarili, da  $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$ , če je  $\epsilon$  funkcija kraja. Da s tem nismo zagrešili znantne napake, naj bralec ugotovi sam (Naloga).  $P_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 \sin(qx - \Omega t) E$  predstavlja dodatno polarizacijo snovi, ki nastane zaradi zvočnega vala.

Eqačbo 9.37 brez  $P_1$  rešijo ravni valovi. Učinek člena s  $P_1$  je, da ravnemuvalu z valovnim vektorjem  $\vec{k}$  in frekvenco  $\omega$  primeša val z valovnim vektorjem  $\vec{k} \pm \vec{q}$  in frekvenco  $\omega \pm \Omega$ . Zato iščimo rešitve v obliki vsote ravnih valov, torej Fourierove vrste

$$E = \sum_n A_n(z) e^{in(qx - \Omega t)} e^{i(k_1 x + k_3 z - \omega t)}. \quad (9.38)$$

Zaradi sklopiteve preko  $P_1$  moramo dovoliti, da so amplitude  $A_n$  funkcije  $z$ . Če je  $\epsilon_1$  dovolj majhen, se  $A_n(z)$  le počasi spreminja.

Izračunajmo

$$\nabla^2 E = \sum_n \{-[k_3^2 + (k_1 + nq)^2]A_n + 2ik_3 A'_n\} e^{i[(k_1 + nq)x + k_3 z - (\omega + n\Omega)t]}. \quad (9.39)$$

Člen z  $A_n''$  lahko izpustimo, če je le  $k_3 A_n' \gg A_n''$ , to je, če se  $A_n$  spreminjajo počasi v primerjavi z  $\exp(ik_3 z)$ . Vstavimo izraza 9.38 in 9.39 v valovno enačbo 9.37 in zahtevajmo, da je vsak člen vsote po  $n$  posebej enak nič. Tako dobimo

$$\begin{aligned} & -[k_3^2 + (k_1 + nq)^2]A_n + 2ik_3 A_n' = \\ & = -\frac{\epsilon'}{c^2}(\omega + n\Omega)^2[A_n - \frac{\epsilon_1}{2ie}(A_{n-1} - A_{n+1})] . \end{aligned} \quad (9.40)$$

Upoštevamo, da je  $k_1^2 + k_3^2 = \epsilon'(\omega/c)^2 = k^2$  in  $\Omega = v_z q$ . Ker je  $v_z \ll c$ , zanemarimo člene reda  $v_z/c$ , pa dobimo

$$A_n' + i\beta_n A_n + \xi(A_{n+1} - A_{n-1}) = 0 , \quad (9.41)$$

kjer je

$$\beta_n = \frac{nq}{k_3}(k_1 + nq) \quad (9.42)$$

in

$$\xi = \frac{\epsilon_1}{4\epsilon'} \frac{k^2}{k_3} . \quad (9.43)$$

Reševanje sistema 9.41 je težavno. Rešitve poiščimo le v treh pomembnih limitnih primerih. Naj bo amplituda vala, ki vpada z leve,  $A_0(0) = A_0$ , ostale  $A_n(0)$  pa nič.

Najprej privzemimo, da je  $L\xi \ll 1$ , da je torej  $\epsilon_1$  majhen in debelina zvočnega snopa ne prevelika. Tedaj je pri vseh  $z$  in za pozitivne  $n$   $A_{n+1} \ll A_n$  in lahko člen  $A_{n+1}$  v enačbi 9.41 ispustimo. S tem dobimo preprost sistem enačb

$$A_n' + i\beta_n A_n = \xi A_n , \quad (9.44)$$

ki jih lahko zapored integriramo:

$$A_n(z) = \xi e^{-i\beta_n z} \int_0^z A_{n-1}(z') e^{i\beta_n z'} dz' . \quad (9.45)$$

Podobne izraze dobimo za negativne  $n$ , to je za uklonjene valove, ki se jim frekvenca pri sisanju zmanjša.

Poglejmo posebej prvi uklonjeni val z amplitudo  $A_1$ . Po predpostavki, da je  $A_{\pm 1} \ll A_0$ , se le malo energije uklanja iz osnovnega vala in je  $A_0(z)$  skoraj konstanta. Potem lahko integral v 9.46 izračunamo:

$$A_1(L) = A_0 \xi L \frac{\sin \beta_1 L / 2}{\beta_1 L / 2} e^{-i\beta_1 L / 2} . \quad (9.46)$$

$A_1(L)$  ima vrh pri  $\beta_1 = 0$ , to je pri

$$\frac{q}{\cos \phi} (k \sin \phi + \frac{q}{2}) = 0 \quad (9.47)$$

ali

$$2k \sin \phi = -q . \quad (9.48)$$

Prečna komponenta valovnega vektorja sisanega vala je tedaj

$$k_1 + q = k \sin \phi - 2k \sin \phi = -k \sin \phi . \quad (9.49)$$

Smer sisanega vala je torej pod kotom  $-\phi$  glede na os  $z$ , simetrično z vpadnim valom. Če še označimo  $\theta = 2\phi$ , vidimo, da predstavlja  $\beta_1 = 0$  ravno pogoj za Braggovo sisanje vpadnega vala.

Razmere pri Braggovem sisanju je vredno pogledati še nekoliko podrobneje. Ker je hitrost zvoka mnogo manjša od hitrosti svetlobe, je  $\Omega/c \ll q$  in sta velikosti vpadnega in sisanega valovnega vektorja enaki. Komponenti  $x$  se razlikujeta za  $q$ . Kadar je Braggov pogoj izpolnjen, velja tudi da je sian valovni vektor  $\vec{k}_s = \vec{k} + \vec{q}$ , kot je razvidno iz slike ?? ali kot se lahko prepričamo s kratkim računom. Braggov pogoj je torej enakovreden zahtevi, da se morajo pri sisanju ohraniti valovni vektorji. V kvantni mehaniki je  $\hbar\vec{k}$  gibalna količina fotona,  $\hbar\vec{q}$  pa gibalna količina kvanta zvočnega valovanja fonona. Braggov pogoj je torej primer ohranitve gibalne količine. Če se ta ne ohranja, je sisanje neučinkovito in le oscilira okoli majhne vrednosti, kar opisuje faktor  $\sin(\xi L/2)$ .

Delež moči uklonjenga vala je

$$\frac{I_1}{I_0} = \left| \frac{A_1}{A_0} \right|^2 = (\xi L)^2 \left( \frac{\sin \beta_1 L/2}{\beta_1 L/2} \right)^2. \quad (9.50)$$

Kadar je Braggov pogoj izpolnjen, je  $I_0/I_1 = (\xi L)^2$ , kar lahko velja le, dokler je  $\xi L \ll 1$ . Da se izognem tej omejitvi, moramo upoštevati tudi zmanjšanje moči vpadnega snopa.

Braggov pogoj je hkrati lahko izpolnjen le za en uklonjen val, na primer  $n = 1$ . Zato so tedaj vse ostale amplitude  $A_n$ ,  $n \neq 0, 1$  majhne in ne vplivajo na  $A_1$ . To nam omogoča drug približek, ki je za uporabo zelo pomemben. Opustimo omejitev  $L\xi \ll 1$ , vendar zahtevajmo, da sta le  $A_0$  in  $A_1$  različni od nič. Sedaj  $A_0(z)$  ne smemo več obravnavati kot konstante. Iz sistema 9.41 dobimo

$$\begin{aligned} A'_0 + \xi A_1 &= 0 \\ A'_1 - \xi A_0 &= 0. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Začetni pogoji so  $A_0(0) = A_0$  in  $A_1(0) = 0$ . Rešitev enačb ?? je

$$\begin{aligned} A_0(L) &= A_0 \cos \xi L \\ A_1(L) &= A_0 \sin \xi L. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Če je izpolnjen Braggov pogoj, se moč vpadnega vala na razdalji  $\pi\xi/2$  skoraj vsa pretoči v uklonjeni snop, nato pa zopet nazaj (slika ??). Za čim bolj učinkovito delovanje akustooptičnega modulatorja seveda želimo doseči ravno take pogoje.

Razmerje med močjo uklonjenega in vpadnega snopa je

$$\frac{I_1}{I_0} = \sin^2 \left( \frac{\pi n_0^3 p S_0 L}{2\lambda \cos \phi} \right). \quad (9.53)$$

kjer smo upoštevali, da je  $\xi = \pi\varepsilon_1/(2n_0\lambda \cos \phi)$  in  $\varepsilon_1 = n_0^4 p S_0$ , kjer je  $S_0$  amplituda deformacije v zvočnem valu. Izrazimo jo lahko z gostoto moči zvočnega vala

$$j_z = \frac{1}{2} C S_0^2 v_z, \quad (9.54)$$

kjer je  $C$  elastična konstanta snovi. Iz  $v_z^2 = C/\rho$  izrazimo še  $C$ , s čemer dobimo

$$S_0 = \sqrt{\frac{2j_z}{\rho v_z^3}}. \quad (9.55)$$

Merilo uporabnosti neke snovi za akustooptični modulator je

$$M = \frac{n_0^6 p^2}{\rho v_z^3}. \quad (9.56)$$

Poglejmo primer. V kremenu  $\rho = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $v_z = 6000 \text{ m/s}$ ,  $n_0 = 1,46$  in  $p = 0,2$ , tako da je  $M = 8 \cdot 10^{-16} \text{ W/m}^2$ . Pri gostoti zvočnega toka  $10 \text{ W/cm}^2$  in valovni dolžini  $633 \text{ nm}$  je za popolen prenos močiv uklonjeni snop  $L = 3 \text{ cm}$ . Gornja gostota zvočnega toka je kar velika in je ni prav lahko doseči, zato so običajni uklonski izkoristki nekaj manjši od 1.

Kot odklona uklonjenega vala  $2\phi$  je

$$2\phi = \frac{q}{k} = \frac{\lambda}{n_0 \Lambda} = 1,7 \cdot 10^{-3}. \quad (9.57)$$

Kot je torej precej majhen.

Opisani račun izkoristka uklona na zvočnih valovih je uporaben tudi pri računu izkoristka holograma. V primeru faznega holograma je račun čisto enak in nam kaže tudi razliko med tankim in debelim hologramom, kako pa je z izkoristkom amplitudnega holograma, kjer je modulirana absorpcija v snovi, lahko bralec izračuna sam (Naloga).

Enačbe 9.41 je enostavno rešiti še v it Raman- Nathovem približku, ki sicer ni posebno pomemben za uporabo, je pa zanimiv. Vpeljimo novo neodvisno spremenljivko  $\zeta = 2\xi z$ . Zveza 9.41 preide v

$$2 \frac{dA_n(\zeta)}{d\zeta} + A_{n+1}(\zeta) - A_{n-1}(\zeta) = \frac{\beta_n}{\xi} A_n. \quad (9.58)$$

Člen na desni lahko izpustimo, če je

$$\frac{\beta_n}{\xi} = \frac{4nq}{k} \frac{\epsilon'}{\epsilon_l} \left( \sin \phi - \frac{nq}{2k} \right) \ll 1, \quad (9.59)$$

to je, če je pri danem  $\epsilon_l$  valovna dolžina zvoka dovolj velika v primeri z valovno dolžino svetlobe. Iz 9.58 dobimo tedaj rekurzjsko zvezo za Besselove funkcije

$$2J'_n + J_{n+1} - J_{n-1} = 0 \quad (9.60)$$

in je  $A_n(z) = A_0 J_n(2\xi z)$ . Kadar je  $2\xi L$  ničla  $J_0$ , prvič je to pri  $2\xi L = 2.4$ , se vsa energija ukloni iz vpadnega snopa, vendar gre v tem primeru, ko Braggov pogoj ni izpolnjen, v mnogo uklonjenih snopov.

## 9.7 Modulacija s tekočimi kristali

Tekoči kristali so anizotropne kapljevine in so vmesna faza med običajnimi izotropnimi kapljevimi in kristali. Stopnja njihove urejenosti je lahko različna. Tekoče kristale tvorijo podolgovate ali ploščate molekule, vendar so za sedaj praktično pomembne le faze, ki jih tvorijo podolgovate organske molekule. Tudi med njimi so bili do nedavnega v uporabi le optične naprave z nematskimi tekočimi kristali, zato se zanimajmo le zanje. Običajno jih tvorijo molekule z relativno togim jedrom iz dveh ali treh benzenovih obročev, ki imajo na koncih krajše ali daljše alifatske verige (slika ??). Težišča molekul so v nematski fazi neurenjena, enako kot v navadni tekočini, osi molekul pa so v povprečju urejene v določeno smer. Smer povprečne urejenosti opišemo

z enotnim vektorjem  $\vec{n}$ , ki mu rečemo it direktor. Smeri  $\vec{n}$  in  $-\vec{n}$  sta enakovredni, z drugimi besedami, molekule z enako verjetnostjo kažejo v smeri  $+\vec{n}$  kot v  $-\vec{n}$ . Stopnja urejenosti v mikroskopski sliki ni prav velika, povprečen odklon molekul od  $\vec{n}$  je nekaj deset stopinj.

Nematski tekoči kristal se obnaša kot enoosen dvolomni kristal z optično osjo vzporedno z  $\vec{n}$ . Ker je optična polarizabilnost benzenovih obročev vzdolž osi molekul precej večja od prečne, je razlika med rednim in izrednim lomnim količnikom razmeroma velika, navadno med 0,1 in 0,2.

V makroskopskem vzorcu nematskega tekočega kristala se smer  $\vec{n}$  po vzorcu neurejeno spreminja, če posebej ne poskrbimo, da ima povsod isto smer. Energija takega deformiranega stanja je nekoliko večja od energije homogenega stanja, zaradi česar na delček tekočega kristala okolica deluje z navorom, ki deluje v smeri zmanjševanja nehomogenosti  $\vec{n}$ . Temu pojemu, zna "ilnemu za tekoče kristale, pravimo orientacijska elastičnost. Nekoliko podrobnejše je opisan v Dodatku na koncu poglavja. Vendar so ti elastični navori prešibki, da bi uredili razsežne vzorce. Urejene vzorce, kakršne potrebujemo za uporabo v optičnih elementih, lahko dobimo s pomočjo zunanjega polja ali pa v dovolj tankih plasteh, kjer mejne površine ustrezno pripravimo.

Zunanje električno ali magnetno polje na tekoče kristale tudi deluje z navorom. Električna in magnetna susceptibilnost nematskega tekočega kristala nista skalarja, temveč imata dve različni lastni vrednosti, eno v za smer vzporedno z  $\vec{n}$ , drugo za pravokotno. Zato je elektrostatična energija odvisna od kota med zunanjim poljem  $\vec{E}$  in  $\vec{n}$ . Od kota odvisni del energije lahko zapišemo v obliki

$$w_a = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_a (\vec{E} \cdot \vec{n})^2, \quad (9.61)$$

kjer je  $\epsilon_a = \epsilon_{||} - \epsilon_{\perp}$  anizotropni del dielektrične konstante. Če je  $\epsilon_a > 0$ , se molekule skušajo postaviti v smer polja, če je  $\epsilon_a < 0$ , pa pravokotno na polje.

Urejen vzorec je mogoče narediti tudi v tankih plasteh. Če površino, ki je v stiku s tekočim kristalom, prevlečemo z primerno pastjo, se molekule tekočega kristala tik ob površini na določen način uredijo. Tanka plast najlona, ki jo podrgnemo v željeni smeri, povzroči, da je  $\vec{n}$  ob površini paralelen s površino v smeri drgnjenja. Drgnjenje deloma uredi verige najlona, zato se tudi molekule tekočega kristala raje uredijo v isti smeri. Da je  $\vec{n}$  pravokoten na površino, dosežemo na primer s tanko plastjo lecitina. Ta ima polarno glavo, ki se adsorbira na stekleno površino, in alifatsko verigo, ki stoji približno pravokotno na površino. Zato se tudi alifatski repi molekul tekočega kristala uredijo enako. V obeh primerih, paralelni ali pravokotni orientaciji ob steni, se urejenost zaradi orientacijske elastičnosti ohranja tudi stran od stene, tako da lahko brez težav dobimo urejene vzorce debeline do kakih  $200 \mu\text{m}$ . Pri večjih debelinah so elastični navori prešibki in ostanejo v vzorcu defekti.

Struktura tekočekristalnega vzorca je tako odvisna od orientacijske elastičnosti, od robnih pogojev, ki jih določimo z obdelavo mejne površine, in od zunanjega električnega ali magnetnega polja.

Preprost elektrooptični modulator ali kazalnik na osnovi nematskih tekočih kristalov lahko dobimo takole. Vzemimo vzorec tekočega kristala med dvema stekloma, na katerih sta prozorni elektrodi. Ureditev tekočega kristala naj bo vzporedna s površino stekel. Tudi optična os ima isto smer. Dovolj velika napetost zasuče  $\vec{n}$  in s tem optično os pravokotno na stene, razen tik ob površini. Pri debelini  $10 \mu\text{m}$  je potrebna napetost nekaj voltov. Nekaj več o tem preklopu najde bralec v Dodatku na koncu poglavja.

Naj debelina  $h$  obravnavane plasti za izbrano valovno dolžino svetlobe ustreza pogoju

$$h(n_i - n_r) = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (9.62)$$

kjer je  $N$  celo število. Plast torej deluje kot ploščica  $\lambda/2$ . Ker je  $n_i - n_r \simeq 0,1$ , je potrebna debelina nekaj  $\mu\text{m}$ . Vzorec damo med prekrižana polarizatorja s prepustno smerjo  $45^\circ$  na  $\vec{n}$ . Ploščica polarizacijo svetlobe z izbrano valovno dolžino zasuče za  $90^\circ$ , tako da gre svetlobe tudi skozi analizator. Ko vključimo napetost, se optična os obrne, polarizacija svetlobe se pri prehodu skozi plast ohrani in analizator je ne prepusti.

Tak preklopnik ima nekaj slabih lastnosti. Prepustnost je odvisna od valovne dolžine svetlobe in od temperature in debelina preklopnika mora biti povsod enaka. Zato se v praksi uporablja zasukana nematska plast.

Obrnimo eno od stekel za  $90^\circ$ , tako da sta smeri urejanja na obeh mejah med seboj pravokotni. Tedaj se smer  $\vec{n}$  v plasti zvezno zavrti od ene do druge površine, kot kaže slika ???. Polarizacija svetlobe, ki je ob vstopu v plast polarizirana v smeri urejanja, skozi plast približno sledi smeri  $\vec{n}$ , kot bomo pokazali nekoliko kasneje, in je ob izstopu iz plasti polarizirana pravokotno na vpadno polarizacijo. Z električnim poljem preklopimo optično os pravokotno na plast in polarizacija se ne zasuče. Plast med prekrižanima polarizatorjema brez polja prepušča svetlobo, v polju pa ne. Pri tem delovanje kazalnika ni dosti odvisno niti od debeline plasti niti od valovne dolžine. Kadar želimo, da kazalnik deluje v odbiti svetlobi, damo za zadnji analizator še odbojno površino.

Pri kristalnem elektrooptičnem modulatorju smo lahko dobili tudi vmesne prepustnosti, medtem ko s tekočimi kristali na opisan način lahko dobimo le zaprto in odprto stanje, vmesna stanja pa je zelo težko kontrolirati.

Pokažimo še, da polarizacija v sredstvu, ki je lokalno enoosno in se optična os suče v pravokotni smeri, v določenih pogojih res približno sledi optični osi. Poleg zasukane nematske celice je pomemben primer snovi s takimi lastnostmi holesteričen tekoči kristal, ki je zelo podoben nematskim, le da se  $\vec{n}$  spontano počasi suče okoli smeri, pravokotne na  $\vec{n}$ .

Optična os sredstva naj leži v ravnini  $xy$  in naj se enakomerno suče, ko se premikamo vzdolž osi  $z$ . Kot med optično osjo in osjo  $x$  lahko zapišemo

$$\phi = qz. \quad (9.63)$$

Pri tem je  $2\pi/q$  perioda sukanja optične osi. Zanimajmo se le za širjenje svetlobe v smeri  $z$ . Tedaj potrebujemo le del dielektričnega tenzorja v  $xy$  ravnini. Njegova oblika je

$$\boldsymbol{\epsilon}(z) = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon} + \frac{1}{2}\epsilon_a \cos 2\phi & \frac{1}{2}\epsilon_a \sin 2\phi \\ \frac{1}{2}\epsilon_a \sin 2\phi & \bar{\epsilon} + \frac{1}{2}\epsilon_a \cos 2\phi \end{bmatrix}, \quad (9.64)$$

kjer je

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_{||} + \epsilon_{\perp}}{2} \quad (9.65)$$

Valovna enačba za valovanje s frekvenco  $\omega$  je

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\epsilon}(z) \vec{E} \quad (9.66)$$

ali v komponentah

$$\begin{aligned} -\frac{d^2E_x}{dz^2} &= (\beta^2 + \alpha^2 \cos 2qz)E_x + \alpha^2 E_y \sin 2qz \\ -\frac{d^2E_y}{dz^2} &= \alpha^2 E_x \sin 2qz + (\beta^2 + \alpha^2 \cos 2qz)E_y, \end{aligned} \quad (9.67)$$

kjer je  $\alpha^2 = \epsilon_a \omega^2 / (2c^2)$  in  $\beta^2 = \epsilon \omega^2 / c^2$ .

Ugodno je vpeljati krožni polarizaciji  $E_+ = E_x + iE_y$  in  $E_- = E_x - iE_y$ . Enačbi ?? prejeta v

$$\begin{aligned} -\frac{d^2E_+}{dz^2} &= \beta^2 E_+ + \alpha^2 E_- e^{2iqz} \\ -\frac{d^2E_-}{dz^2} &= \alpha^2 E_+ e^{-2iqz} + \beta^2 E_-. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Iščemo lastne rešitve valovne enačbe v sredstvu s periodično modulacijo lomnega količnika. Matematično podoben problem je iskanje lastnih funkcij elektronov v kristalu. Za te vemo, da morajo imeti Blochovo obliko, to je, biti morajo produkt periodične funkcije s periodo kristalne mreže in faktorja  $\exp(ikz)$ . Matematiki pravijo tej trditvi Floquetov izrek. Veljati mora tudi v našem primeru. Lastne valove torej poiščimo v obliki

$$\begin{aligned} E_+ &= Ae^{i(k+q)z} \\ E_- &= Be^{i(k-q)z}. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Nastavek reši sistem ??, če  $A$  in  $B$  rešita sistem homogenih linearnih enačb

$$\begin{aligned} [(k+q)^2 - \beta^2]A - \alpha^2 B &= 0 \\ -\alpha^2 A + [(k-q)^2 - \beta^2]B &= 0. \end{aligned} \quad (9.70)$$

Sistem je netrivialno rešljiv, če je determinanta koefficientov enaka nič:

$$(k^2 + q^2 - \beta^2)^2 - 4k^2 q^2 - \alpha^4 = 0. \quad (9.71)$$

$\beta$  in  $\alpha$  sta sorazmerna z  $\omega$ . Dobljena enačba tako predstavlja disperzijsko relacijo - zvezo med  $\omega$  in  $k$  - za svetlobo v zavitem sredstvu. Prikazana je na sliki ???. Vsaki vrednosti  $\omega$ , razen v ozkem območju med  $\omega_-$  in  $\omega_+$ , recimo mu frekvenčna špranja, pripadajo 4 realne rešitve za  $k$ , po dve za valovanji v pozitivni in negativni smeri. V območju špranje je en par rešitev imaginaren. Vsaki vrednosti  $k$  pripada neko razmerje koefficientov  $A$  in  $B$ , ki ga izračunamo iz enčb ?? in ki določa polarizacijo lastnega vala. Polarizacije lastnih valov so v splošnem eliptične in med pri dani frekvenci med seboj niso pravokotne, kar je posledica tega, da sistem ?? ne predstavlja čisto navadnega problema lastnih vektorjev simetrične matrike. V območju frekvenčne špranje le en par rešitev predstavlja potujoč val, drug pa polje, ki eksponentno pojema v sredstvo. Zato se svetloba s frekvenco v špranji in z ustrezno polarizacijo, ki vpada na holesteričen tekoči kristal, totalno odbije. Pojav je povsem analogen Braggovemu odboju na kristalih in daje holesterikom značilen obarvan videz. Več o zanimivih podrobnostih optike holesteričnih tekočih kristalov najde bralec v ?? in nalogah k temu poglavju.(naloga)

Za razlago delovanja zasukane nematske celice zadošča primer, ko je  $q \ll \beta$  in  $\alpha$ , ko je torej perioda sukanja optične osi velika v primeru z valovno dolžino svetlobe. Tedaj lahko  $q$  v disperzijski zvezi kar zanemarimo, prvi popravek je šele reda  $q^2$ , in dobimo

$$k^2 = \left\{ \beta^2 + \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{||} \right. \quad (9.72)$$

Ti vrednosti, ki ustrezata velikosti valovnega vektorja za izredni in redni val v običajnem enoosnem kristalu, postavimo v eno od enačb ?? in dobimo še polarizaciji lastnih valov:  $B = \pm A$ .

Izračunajmo obe kartezični komponenti električnega polja za prvo rešitev:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2}(E_+ + E_-) = \frac{1}{2}Ae^{ikz}(e^{iqz} + e^{-iqz}) = Ae^{ikz} \cos qz \\ E_y &= \frac{1}{2}(E_+ - E_-) = \frac{1}{2i}Ae^{ikz}(e^{iqz} - e^{-iqz}) = Ae^{ikz} \sin qz \end{aligned} . \quad (9.73)$$

Polarizacija torej res kar sledi optični osi. Druga rešitev da val, ki je polariziran pravokotno na lokalno optično os in se prav tako suče z njo. Prvi val se širi s fzano hitrostjo  $c/n_i$ , torej kot izredni val, drugi pa s  $c/n_r$ , to je kot redni val. Če na zasukano nematsko celico vpada svetloba, polarizirana ali paralelno ali pravokotno na optično os ob meji, dobimo na izhodni strani polarizacijo zasukano za pravi kot. V primeru, da vpadna polarizacija ne sovpada z eno od lastnih, jo moramo seveda razstaviti na obe lastni in po prehodu skozi tekoči kristal zopet sestaviti, s čemer seveda na splošno dobimo eliptično polarizacijo.

## 9.8 Dodatek

Energija nematskega tekočega kristala je najnižja, kadar ima  $\vec{n}$  povsod isto smer. Povečanje energije zaradi krajevne odvisnosti  $\vec{n}$  je v najnižjem redu sorazmerno s  $(\nabla \vec{n}(\vec{r}))^2$ . Najsplonejši izraz za it orientacijsko elastično energijo dobimo tako, da tvorimo vse neodvisne člene, v katerih nastopa  $(\nabla \vec{n}(\vec{r}))^2$  in ki so invariantni na simetrijske operacije nematske faze. Dobimo[?]

$$F_e = \int \left\{ K_1(\nabla \cdot \vec{n})^2 + K_2[\vec{n} \times (\nabla \times \vec{n})]^2 + K_3[\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{n})]^2 \right\} dV \quad (9.74)$$

$K_1$ ,  $K_2$  in  $K_3$  so tri Frankove orientacijske elastične konstante. Prvi člen predstavlja deformacijo v obliki pahljače, drugi upogib, tretji pa zasuk (slika ??)

V zunanjem električnem polju se energija spremeni. Običajno je neodvisna električna količina električna poljska jakost, ker je polje posledica predpisanih napetosti na fiksni elektrodah. Ustrezni člen v termodinamičnem potencialu je tedaj  $-\vec{D} \cdot \vec{E}/2$ .  $\vec{E}$  razstavimo na komponento, paralelno in pravokotno z  $\vec{n}$ . Dielektrični tenzor ima v smeri  $\vec{n}$  vrednost  $\epsilon_{||}$ , v pravokotni smeri pa  $\epsilon_{\perp}$ . Tako je

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_{||} (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n} + \epsilon_0 \epsilon_{\perp} [\vec{E} - (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n}] \\ &= \epsilon_0 \epsilon_a (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n} - \epsilon_0 \epsilon_{\perp} \vec{E}, \end{aligned} \quad (9.75)$$

kjer je  $\epsilon_a = \epsilon_{||} - \epsilon_{\perp}$ . Drugi člen je neodvisen od  $\vec{n}$ , zato ga lahko izpustimo. Prosta energija nematičnega tekočega kristala v električnem polju je tako

$$F = F_0 + F_e - \frac{1}{2}(\vec{n} \cdot \vec{E})^2. \quad (9.76)$$

$F_0$  predstavlja del proste energije, ki je neodvisen od  $\vec{n}$  in  $\vec{E}$ . V ravnoesju je prosta energija najmanjša. Kadar je  $\epsilon_a > 0$ , se zato skuša  $\vec{n}$  postaviti vzporedno s poljem. Da lahko z minimizacijo  $F$  dobimo  $\vec{n}(\vec{r})$ , moramo poznati še robne pogoje.

Poglejmo primer. Naj bo nematski kristal med dvema paralelnima steklenima ploščama v razmiku  $h$ . Na obeh ploščah naj bo  $\vec{n}$  vzporen s površino v isti smeri. Brez zunanjega polja je  $\vec{n}$  povsod enako usmerjen. V dovolj velike zunanjem polju, pravokotnem na plošči, naj bo to smer  $z$ , dobi  $\vec{n}$  komponento v smeri  $z$ :

$$\vec{n}(z) = (n_1(z), 0, n_3(z)). \quad (9.77)$$

Deformacija  $n_3$  naj bo majhna. Tedaj je  $n_1 = 1n_3^2/2$ . Robna pogoja sta  $n_3(0) = n_3(h) = 0$ . Približno rešitev, ki ustreza robnima pogojem, poiščemo z nastavkom

$$n_3(z) = a \sin qz, \quad q = \frac{\pi}{h}. \quad (9.78)$$

Ta nastavek je prvi člen razvoja prave rešitve v Fourierovo vrsto. Velja

$$\nabla \times \vec{n} = (0, -\frac{dn_1}{dz}, 0) \quad (9.79)$$

in

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{n}) = (n_3 \frac{dn_1}{dz}, 0, n_1 \frac{dn_3}{dz}) \simeq (0, 0, n_3 \frac{dn_3}{dz}) \quad (9.80)$$

do drugega reda v  $n_3$ . Prosta energija je tako

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int \left[ K_1 \left( \frac{dn_3}{dz} \right)^2 + K_2 n_3^2 \left( \frac{dn_3}{dz} \right)^2 - \epsilon_0 \epsilon_a (n_3 E)^2 \right] dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h [K_1 q^2 a^2 \cos^2 qz + K_3 q^2 a^4 \sin^2 qz \cos^2 qz - \epsilon_0 \epsilon_a E a^2 \sin^2 qz] dz = \\ &= \frac{\pi}{4q} [K_1 q^2 a^2 + \frac{1}{4} K_3 q^2 a^4 - \epsilon_0 \epsilon_a E a^2]. \end{aligned} \quad (9.81)$$

Iščemo amplitudo deformacije  $a$ , pri kateri je prosta energija najmanjša. Tedaj mora biti  $a$  rešitev enačbe

$$(K_1 q^2 - \epsilon_0 \epsilon_a E) a + \frac{1}{2} K_3 q^2 a^3 = 0. \quad (9.82)$$

Rešitvi sta

$$a = 0 \quad \text{in} \quad a^2 = 2 \frac{\epsilon_0 \epsilon_a E - K_1 q^2}{K_3 q^2}. \quad (9.83)$$

Pri majhnih poljih, ko je  $\epsilon_0 \epsilon_a E < K_1 q^2$ , je fizikalno smiselna le prva rešitev, ko deformacije ni. Pri večjih poljih pa je stabilna druga rešitev. Ko večamo polje, deformacija v sredini plasti hitro naraste, tako da se  $\vec{n}$  postavi skoraj popolnoma v smer zunanjega polja. Tedaj naša rešitev seveda ni dobra, saj smo računali, kot da je  $n_3 \ll 1$ . Prehodu iz nedefromiranega stanja v deformirano stanje pravimo tudi Fredericksov prehod. Na njem je osnovano preklaplanje optičnih kazalnikov na nematske tekoče kristale.

V primeru zasukane nematske celice je prehod podoben, le račun je nekoliko bolj zapleten, ker ima deformacija vse tri komponente, tudi zasuk (Naloga).

## 10. Optična vlakna

Optična vlakna vodijo svetlobno valovanje s tem, da se na meji med sredico z večjim lomnim količnikom in plaščem valovanje totalno odbije. So torej dielektrični valovni vodniki za svetlobo. Njihove prednosti pred bakrenimi vodniki v komunikacijski tehnologiji so bistveno večja količina informacij, ki jo je mogoče prenašati po enem vlaknu, majhne izgube in neobčutljivost na elektromagnetne motnje. Zato danes v veliki meri nadomeščajo kovinske vodnike, posebej v medkrajevni telefoniji in računalniških povezavah.

Njenostavnejši model optičnega vodnika je planparalelna plast prozornega dielektrika z lomnim količnikom  $n_1$  večjim od okolice (slika ??). Plasti z večjim lomnim količnikom recimo sredica, okolici pa plasč vlakna. Žarek je ujet v sredici, če je vpadni kot  $\theta$  večji od kota totalnega odboja, za katerega velja  $\sin \theta_c = n_0/n_1$ . Količini  $\sin(\pi/2 - \theta_c)$ , ki določa največji kot divergence svetlobnega snopa, ki je še ujet v vlaknu, pravimo *numerična odprtina* vlakna. Razlika lomnih količnikov  $n_1 - n_0 = \Delta n$  je običajno dokaj majhna, to je le nekaj stotink.

Za podroben opis širjenja svetlobe po vlaknih, ki imajo običajno polmer sredice od nekaj do nekaj deset mikrometrov, geometrijska optika ne zadošča. Rešiti moramo Maxwellove enačbe z ustreznimi robnimi pogoji, kar je za praktična vlakna dokaj dolg račun. Ugotovimo najprej, kakšne so osnovne značilnosti valovanja po vlaknu.

Geometrijskemu žarku, ki potuje po sredici pod kotom in se na meji odbija, ustreza v valovni sliki val, ki ima prečno komponento valovnega vektorja različno  $k_{\perp}$  od nič. Kot totalnega odboja pri dani frekvenci določa največjo možno vrednost  $k_{\perp\max} \simeq n_1 k_0 \cos \theta_c = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_0^2} \simeq k_0 \sqrt{2n\Delta n}$ , kjer je  $k_0 = \omega/c$ ,  $n$  pa povprečni lomni količnik. Ker je valovanje v prečni smeri omejeno na sredico dimenzije  $a$ , ima lahko  $k_{\perp}$  le diskretne vrednosti, ki so približno  $N\pi/a$ , kjer je  $N$  celo število. Z vsakim  $N$  je določen en *rod* valovanj v vlaknu. Ker je omejen  $k_{\perp}$ , je število rodov je navzgor omejeno:  $N_{\max} \simeq k_0 a / \pi \sqrt{2n\Delta n}$ .  $N$  je tudi število vozlov, ki jih ima valovanje v prečni smeri. Število rodov v danem vlaknu je odvisno od razlike lomnih količnikov in od dimenzije vlakna. Videli bomo, da v optičnih vlaknih en rod vselej obstaja, kar je ena od razlik med dielektričnimi in kovinskimi vodniki, kakršne poznamo iz mikrovalovne tehnike in po katerih se pod določeno frekvenco ne more širiti nobeno valovanje. Optični vodniki, po katerih se širi en sam rod, imajo posebej lepe lastnosti za uporabo v komunikacijskih sistemih.

Fazna hitrost valovanja, ki potuje po valovnem vodniku, je odvisna od frekvence, imamo torej disperzijo. Razlog je v diskretnih vrednostih  $k_{\perp}$ . Naj bo  $\beta$  komponenta valovnega vektorja vzdolž vlakna, recimo ji tudi valovno število, tako da je odvisnost polja od koordinate vzdolž vlakna  $\exp i\beta z$ . Veljati mora

$$n_1 \frac{\omega}{c} = \sqrt{\beta^2 + k_{\perp}^2} \quad (10.1)$$

Za dano vrednost  $k_{\perp}$  torej zveza med valovnim številom in frekvenco ni linearna, zato je fazna hitrost  $v_f = \omega/\beta$  odvisna od frekvence. Grupna hitrost  $v_g = d\omega/d\beta$  je različna od fazne in tudi odvisna od frekvence, kar ima za uporabo vlaken pomembne posledice.

## 10.1 Planparalelni vodnik

Preprost dvodimenzionalen model optičnega vlakna je planparalelna plast prozornega dielektrika z lomnim količnikom večjim od okolice:  $n_1 > n_0$  (Slika ??). Rešitev krajevnega dela valovne enačbe

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n(x)^2 k_0^2 \mathbf{E} = 0 \quad (10.2)$$

kjer je  $k_0 = \omega/c$ , iščimo v obliki

$$\mathbf{E} = \psi(x) e^{i\beta z} \quad (10.3)$$

Za amplitudo  $\psi(x)$  dobimo enačbo

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + [n(x)^2 k_0^2 - \beta^2] \psi = 0 \quad (10.4)$$

kjer je v plasti (območje II.) lomni količnik  $n_1$ , v okolici (območji I. in III.) pa  $n_0$ . Robni pogoji so, da sta tangencialni komponenti električne in magnetne poljske jakosti na meji zvezni. V planparalelnem primeru lahko valovanja ločimo na transverzalno električna (TE) in transverzalno magnetna (TM). V prvem primeru je  $\mathbf{E}$  v smeri osi  $y$ , v drugem pa  $\mathbf{H}$ . Pri TE valovih je tangencialna komponenta magnetnega polja  $H_z$ . Ker je  $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}$ , dobimo iz zveznosti  $H_z$ , da je na meji zvezzen tudi odvod  $\partial E_y / \partial x$ . S tem postane problem matematično enak iskanju lastnih stanj energije za delec v končno globoki enodimenzionalni potencialni jami v kvantni mehaniki, kjer lastni vrednosti energije ustreza  $\beta^2$ . Poglejmo najprej, kakšne so možne rešitve:

- a.  $k_0 n_0 < \beta < k_0 n_1$ . Tedaj so rešitve oscilatorne v sredici in eksponentno pojemajoče v plašču. Predstavlja vodene valove v plasti. V kvantni mehaniki ustrezajo vezanim stanjem.
- b.  $\beta < k_0 n_0$ . Rešitve so oscilatorne v vseh treh območjih in opisujejo valove, ki niso ujeti v plasti, temveč z ene strani vpadajo na plast, se delno skoznjo lomijo, delno pa odbijejo. V rešitvi je upoštevana tudi interferenca na plasti (Naloga). Taka stanja v kvantni mehaniki opisujejo prost delec.

Zanima nas predvsem prvi primer. Začnimo s TE polarizacijo, to je  $\psi(x) = (0, \psi(x), 0)$ . Naj bo  $x = 0$  v sredini plasti. Zaradi simetrije morajo biti rešitve za  $\psi(x)$  ali sode ali lihe. Sode rešitve imajo v sredici obliko

$$\psi_{II}(x) = C_1 \cos k_\perp x \quad (10.5)$$

v območjih I in III pa

$$\psi_{I,III}(x) = C_0 e^{\kappa(a \mp x)} \quad (10.6)$$

Tu je  $k_\perp = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}$  in  $\kappa = \sqrt{\beta^2 - n_0^2 k_0^2}$ . Zveznost električne poljske jakosti na meji nam da

$$C_1 \cos k_\perp a = C_0 \quad (10.7)$$

Iz zveznosti odvoda dobimo

$$C_1 k_\perp \sin k_\perp a = \kappa C_0 \quad (10.8)$$

Zadnji dve enačbi morata biti hkrati izpolnjeni, zato velja zveza

$$k_\perp \tan k_\perp a = \kappa \quad (10.9)$$

Iz izrazov za  $k_{\perp}$  in  $\kappa$  dobimo še drugo zvezo

$$k_{\perp}^2 + \kappa^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_0^2) \quad (10.10)$$

Vpeljimo brezdimenzijske količine  $\xi = ak_{\perp}$ ,  $\eta = a\kappa$  in  $V^2 = a^2 k_0^2 (n_1^2 - n_0^2)$ . Z njimi lahko gornji enačbi zapišemo v prglednejši obliki

$$\xi \tan \xi = \eta \quad (10.11)$$

$$\xi^2 + \eta^2 = V^2 \quad (10.12)$$

Dovoljene vrednosti  $\xi$  in  $\eta$  dobimo kot presečišča krogov z radijem  $V$  in funkcije  $\xi \tan \xi$ , kar je prikazano na sliki ??.

Lihe rešitve imajo v sredici obliko

$$\psi_{II}(x) = C_1 \sin k_{\perp} x \quad (10.13)$$

v plašču pa

$$\psi_{I,III}(x) = \pm C_0 e^{\kappa(a \mp x)} \quad (10.14)$$

Na enak način kot za sode rešitve dobimo iz robnih pogojev, da mora veljati zveza

$$k_{\perp} \cot k_{\perp} a = -\kappa \quad (10.15)$$

ali

$$-\xi \cot \xi = \eta \quad (10.16)$$

Funkcija  $-\xi \cot \xi$  je na sliki ?? prikazana črtkano. Lastne vrednosti za lihe rešitve dobimo kot njena presečišča s krogomz radijem  $V$ .

Parameter  $V$  meri globino potencialne Jame; iz slike vidimo, da eno vodenega valovanja (ali vezano stanje v kvantni mehaniki) vselej obstaja. Pri velikih vrednostih  $V$  je rešitev za dovoljene vrednosti  $\xi$  več. Razen največje so zelo blizu mnogokratniku  $\pi/2$ , kar da za dovoljene vrednosti  $k_{\perp}$  približno mnogokratnike  $\pi/(2a)$ , kot smo pričakovali že v uvodu. Ko smo določili lastne vrednosti  $k_{\perp}$ , poznamo za vsak rod tudi disperzijsko zvezo med frekvenco in valovnim številom:

$$n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \beta^2 + k_{\perp}^2 \quad (10.17)$$

Pri tem je tudi lastna vrednost  $k_{\perp}$  lahko nekoliko odvisna od  $\omega$ , ker je ta vsebovana v  $V$ .

Osnovna lastna vrednost  $\xi_0$  je pri  $V \ll 1$  približno kar  $V$ . Zato je  $k_{\perp}^2 \simeq k_0^2 (n_1^2 - n_0^2)$  in je  $\beta = n_0 k_0$ . V primeru zelo šibkega vodenja je torej fazna hitrost vodenega vala približno enaka fazni hitrosti v plašču, to je  $c/n_0$ . To je lahko razumeti; pri majhnem  $V$  je namreč tudi  $\kappa$  majhen in se eksponentno pojemačče valovanje razteza daleč v plašč. (Naloga: Kakšna je v tej limiti grupna hitrost?). V nasprotnem primeru, ko je  $V \gg 1$ , je  $\xi_0 \simeq \pi/2 \ll V$ . Zato je tudi  $k_{\perp} \simeq \pi/(2a) \ll n_1 k_0$  in je približno  $\beta \simeq n_1 k_0$ . V tem primeru je torej fazna hitrost takša kot v sredstvu z lomnim količnikom sredice, kar je v skladu s preprosto predstavo, da se pri velikem  $V$  osnovni vodenii rod širi po sredici vzdolž osi vlakna.

Račun za transverzalno magnetne (TM) valove je zelo podoben, le v robnem pogoju za tangencialno komponento električnega polja nastopita dielektrični konstanti sredice in plašča, zato je predvsem najnižja lastna vrednost za  $k_{\perp}$  nekoliko večja kot za TE valove. (Naloga)

## 10.2 Cilindrično vlakno

Običajna vlakna so seveda tridimenzionalna s cilindrično geometrijo. Najpreprostejša struktura, povsem analogna gornjemu primeru planparalene plasti, je jedro s konstatnim lomnim količnikom, ki je nekoliko večji od lomnega količnika plašča. Pogoste so tudi zapletenejše konstrukcije, pri katerih je sredica sestavljena iz več kolobarjev z različnimi lomnimi količniki. S primerno izbiro je tako mogoče zelo zmanjšati disperzijo (Slika ??).

Račun za širjenje svetlobe po cilindričnem vlaknu s homogeno sredico je sicer podoben kot za planparalelni primer, vendar je precej bolj zapleten. Glavna komplikacija je, da v cilindrični geomteriji ni več delitve na čisto električno in magneto transverzalne valove, zato postanejo robni pogoji bolj zapleteni. Rešitve se izrazajo v obliki kombinacij Besselovih funkcij. Podrobnosti si bralec lahko ogleda v literaturi [?]. Osnovne značilnosti rešitev pa ostajajo enako kot v dvodimenzionalnem primeru. Kot smo ugotovili že na začetku, obstaja končno število vodenih valov, odvisno od premera sredice in razlike lomnih količnikov sredice in plašča. Če sta ti količini majhni, obstaja le eno vodeno valovanje in imamo enorodovno vlakno. Za njegovo valovno število velja  $n_0 k_0 < \beta < n_1 k_0$ .

## 10.3 Cilindrično vlakno s paraboličnim profilom lomnega količnika

V treh dimenzijah lahko hitro poiščemo rešitve za vlakno, v katerem je dielektrična konstanta kvadratna funkcija radialne koordinate  $r$ :

$$n(r)^2 = n_0^2 + n_2^2 r^2 \quad (10.18)$$

Parameter  $n_2$  je v praksi vselej majhen, zato ima za vse smiselne vrednosti  $r$  tudi lomni količnik paraboličen profil. Parabolična sredica mora sveda biti omejena, okoli nje imamo zopet plašč s konstantnim lomnim količnikom (Slika ??). Tipičen radij sredice je nekaj deset mikrometrov.

Komponento polja za izbrano polarizacijo napišimo v obliki

$$E = E_0 \psi(x, y) e^{i\beta z} \quad (10.19)$$

Zanemarili smo, da zaradi odvisnosti od prečnih koordinat in  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  polje ne more imeti povsod iste smeri; če hočemo biti natančni, moramo v gornji obliki zapisati vektorski potencial. Postavimo približni nastavek v valovno enačbo. Dobimo enačbo

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + [k_0^2 (n_0^2 + n_2^2 r^2) - \beta^2] \psi = 0 \quad (10.20)$$

ki je popolnoma enaka enačbi za krajevni del lastnih funkcij dvodimenzionalnega harmonskega oscilatorja v kvantni mehaniki. Rešitve imajo obliko

$$\psi_{lm} = H_l \left( \sqrt{2} \frac{x}{w} \right) H_m \left( \sqrt{2} \frac{y}{w} \right) e^{-(x^2+y^2)/w^2}, \quad w^2 = \frac{\lambda}{\pi n_2} \quad (10.21)$$

z lastnimi vrednostmi

$$\beta_{lm}^2 = n_0^2 k_0^2 \left[ 1 - \frac{2n_2}{k_0 n_0} (l + m + 1) \right] \quad (10.22)$$

Razmerje  $2n_2 / (k_0 n_0)$  je majhno, zato je približno  $\beta_{lm} = n_0 k_0 \left[ 1 - \frac{n_2}{k_0 n_0} (l + m + 1) \right]$ . Če je  $n_2$  neodvisen od frekvence, je grupna hitrost

$$v_g = \left( \frac{d\beta_{lm}}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c_0}{n_0} \quad (10.23)$$

enaka za vse rodove, kar je značilnost vlakna s kvadratnim profilom lomnega količnika. V dejanskem vlaknu je seveda tako odvisnost možna le v omejenem območju sredice, zato je tudi gornja analiza le približna in velja dobro za tiste rodove, ki se ne raztezajo izven sredice.

Neodvisnost grupne hitrosti od reda valovanja v vlaknu je praktično pomembna. Grupna hitrost določa čas potovanja svetlobnega sunka, ki lahko predstavlja en bit informacije. Če se po vlaknu lahko širi več rodov, ki imajo različno grupno hitrost, se sunek po prehodu skozi vlakno razširi, kar omejuje uporabno dolžino vlakna, kot bomo podrobnejše videli kasneje. Temu se lahko izognemo z uporabo enorodovnih vlaken, ki pa so dražja in je vanje te "je uvesti svetlobni snop, katerega divergencia in premer morata ustrezati ujetemu valu enorodovnega vlakna, če naj ne bo izgub. Zato se za krajše zveze uporablajo mnogorodovna vlakna, ki imajo sredico s približno paraboličnim profilom lomnega količnika.

## 10.4 Sprememba lomnega količnika vlakna

Sprememba lomnega količnika sredice ali plašča vlakna povzroči spremembo valovnega števila  $\beta$  danega roda. V enorodovnih vlaknih je to mogoče izkoristiti za izdelavo senzorjev, na primer temperature ali tlaka. Zaradi zunanjih vplivov, ki jih želimo zaznati, se spremeni lomni količnik vlakna in s tem propagacijska konstanta, kar lahko izmerimo preko spremembe faze valovanja na izhodu iz vlakna, to je, z ustrezno sestavljenim interferometrom. Ker je dolžina vlakna lahko velika, v nekaj centimetrov velik tulec lahko brez težav navijemo kilometre vlakna, je celotna sprememba faze velika že pri majhnih spremembah merjene količine. Sprememba valovnega števila povzroča tudi nezaželjene spremembe faze in odboje pri prenosu informacij. V tem razdelku zato poglejmo, kako se spremeni valovno število pri dani spremembi lomenga količnika.

Vzemimo rod vlakna s propagacijsko konstanto  $\beta_{lm}$  in prečnim profilom  $\psi_{lm}(r, \phi)$ . Ta mora zadoščati valovni enačbi

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_{lm} + (\epsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2) \psi_{lm} = 0 \quad (10.24)$$

Naj se dielektrična konstanta vlakna spremeni za  $\delta\epsilon$ . Zato se spremenita tudi propagacijska konstanta  $\beta = \beta_{lm} + \delta\beta$  in prečna oblika  $\psi = \psi_{lm} + \delta\psi$ . Tudi motena funkcija  $\psi$  mora zadoščati enačbi 10.24, zato za perturbacijo velja

$$\nabla_{\perp}^2 \delta\psi + (\epsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2) \delta\psi + \delta\epsilon k_0^2 \psi_{lm} = 2\beta_{lm} \delta\beta \psi_{lm} \quad (10.25)$$

kjer smo zanemarili produkte majhnih količin. Množimo obe strani enačbe s  $\psi_{lm}^*$  in integrirajmo po preseku vlakna, pri čemer upoštevajmo, da je  $\delta\psi$  ortogonalna na  $\psi_{lm}$ :

$$\int \psi_{lm}^* \nabla_{\perp}^2 \delta\psi dS + \int (\epsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2) \delta\psi \psi_{lm}^* + k_0^2 \int \delta\epsilon |\psi_{lm}|^2 dS \quad (10.26)$$

$$= 2\beta_{lm} \delta\beta \int |\psi_{lm}|^2 dS \quad (10.27)$$

Prvi člen na levi preoblikujmo z uporabo zvez  $\int (u \nabla_{\perp}^2 v - v \nabla_{\perp}^2 u) dS = \int \nabla_{\perp} \cdot (u \nabla_{\perp} v - v \nabla_{\perp} u) dS = \oint \mathbf{ds} \times (u \nabla_{\perp} v - v \nabla_{\perp} u)$ . Ker funkciji  $\psi_{lm}$  in  $\delta\psi$  opisujeta vodene valove, morata iti za velike  $r$  proti nič, zato je integral po krivulji v gornji zvezi nič in velja  $\int \psi_{lm}^* \nabla_{\perp}^2 \delta\psi dS = \int \delta\psi \nabla_{\perp}^2 \psi_{lm}^* dS$ . Ker  $\psi_{lm}^*$  zadošča enačbi 10.24, se v enačbi 10.26 prvi in drugi člen uničita in dobimo željeno zvezo

$$\delta\beta = \frac{k_0^2 \int \delta\epsilon |\psi_{lm}|^2 dS}{2\beta \int |\psi_{lm}|^2 dS} \quad (10.28)$$

ki je seveda analogna kvantomehanskemu rezultatu s teorijo motenj prvega reda za spremembo energije lastnega stanja pri majhni spremembi Hamiltonovega operatorja. Rezultat je tudi intuitivno razumljiv: v najnižjem redu je  $\delta\beta$  sorazmerna s uteženim povprečjem  $\delta\varepsilon$ , kjer je utež  $\psi_{lm}$ .

Sprememba valovnega števila  $\beta$  v delu vlakna, po katerem potuje svetloba, ne povzroči le spremembe faze, ampak tudi odboj dela valovanja. Ta pojav je le nekoliko druga oblika odboja na meji (zvezni ali ostri) dveh dielektrikov, ali splošneje, odboja vsakega valovanja na območju, kjer se spremeni fazna hitrost valovanja.

Odboj na območju vlakna, kjer se spreminja  $\beta$ , bomo najlažje dobili preko formule za odboj na meji dveh dielektrikov pri pravokotnem vpodu. Odbita amplituda je tedaj

$$E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_0 \quad (10.29)$$

Mislimo si, da je sprememba  $\beta$  na delu vlakna sestavljena iz majhnih stopničastih sprememb  $\Delta\beta_i$  na intervalih  $\Delta z$ . Za ravno valovanje, za katerega velja enačba 10.29, je sprememba lomnega količnika sorazmerna s spremembo fazne hitrosti. Ker tudi  $\beta$  določa fazno hitrost valovanja po vlaknu, je delež odbitega valovanja na stopničasti spremembi  $\Delta\beta_i$

$$\Delta E_i = \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} E_0 \quad (10.30)$$

Predpostavili smo, da je celotni del odbitega valovanja tako majhen, da ni treba upoštevati spremembe amplitude vpadnega vala  $E_0$ . Vse odbito valovanje je vsota prispevkov na posameznih stopnicah  $\Delta\beta_i$ , pri čemer moramo upoštevati še različne faze delnih odbitih valovanj:

$$E_r = \sum \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} e^{2i\beta z_i} E_0 = \frac{1}{2\beta} \sum \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z_i} \Delta z E_0 \quad (10.31)$$

Preidimo z vsote na integral, pa dobimo, da je odbita amplituda

$$E_r = \frac{E_0}{2\beta} \int \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z} dz \quad (10.32)$$

*Primer:* Naj se valovno število linearno spremeniti za  $\Delta\beta_0$  na razdalji  $L$ . Tedaj je po gornji formuli

$$\frac{E_r}{E_0} = 2 \frac{\Delta\beta_0}{L} \frac{\sin \beta L/2}{\beta} \quad (10.33)$$

Odbojnost je največja, kadar je  $L$  majhen v primeri z  $1/\beta$ , torej kadar je sprememba  $\beta$  ostra stopnica. Čim počasnejša je sprememba, tem manj je odboja, poleg tega pa odboja ni vsakič, ko je  $\sin \beta L/2 = 0$ , to je, pride do destruktivne interference vseh delnih odbojev. (Naloga: Odboj na erf stopnici).

## 10.5 Izgube v optičnih vlaknih

Ena najpomembnejših lastnosti optičnih valken je majhno slabljenje svetlobnega vala, posebej še v vlaknih iz kremenovega stekla. Najboljša vlakna imajo danes izgube okoli 0,2 dB/km pri valovni dolžini 1,55 μm. (1 decibel je  $10 \log(j_0/j)$ ). Glavni vzroki izgub so absorpcija in sisanje na nečistočah in sisanje na termičnih fluktuacijah gostote (Rayleighovo sisanje).

Slika ?? prikazuje tipično odvisnost izgub od valovne dolžine za dobro enorodovno vlakno iz kremenovega stekla s primesjo GeO<sub>2</sub>. Sipanje na fluktuacijah gostote je sorazmerno z  $\lambda^{-4}$ , zato dominira pri majhnih valovnih dolžinah, sipanje na defektih in nepravilnostih je skoraj zanemarljivo, pri valovnih dolžinah nad 1,6 μm pa prevlada absorpcija. Vrh med 1,3 μm in 1,5 μm je posledica absorpcije na OH ionih, ki se jih je v steklu zelo težko znebiti. Iz slike je razvidno, da so izgube najmanjše okoli 1,55 μm, zato se to območje največ uporablja za zvezne na velike razdalje. Najboljših modernih vlaken tudi ni več mogoče kaj dosti izboljšati glede izgub, saj so že dosegla spodnjo mejo, določeno s termičnimi fluktuacijami.

Pri optičnih zvezah nastanejo še izgube na spojih vlaken, ki so okoli 0,2 dB na spoj. Skupne izgube so tako dosti manjše kot v koaksialnem kablu in je možen prenos signala do nekaj sto kilometrov brez vmesnega ojačevanja. S tem pri dolžini optičnih zvez izgube niso več glavna omejitev, ampak je to popačitev signala zaradi disperzije.

V optičnem vlaknu nastanejo izgube tudi, kadar je vlakno ukrivljeno. Te izgube postanejo znantne, kadar je krivinski radij vlakna centimeter ali manj. Ta pojav je dovolj zanimiv, da si ga je vredno nekoliko podrobnejše ogledati.

Vzemimo spet dvodimenzionalno plast debeline 2a z lomnim količnikom  $n_1$  v sredstvu z lomnim količnikom  $n_0$ , ki naj bo ukrivljena s krivinskim radijem R. Taka plast tvori del kolobarja z notranjim radijem  $R - a$  in zunanjim radijem  $R + a$ , pri čemer je  $R \gg a$  (Slika ??). Zapišimo valovno enačbo za dve dimenziji v cilindrični geometriji:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} + k_0^2 n^2(r) E = 0 \quad (10.34)$$

kjer ima  $n(r)$  vrednost  $n_1$  v sredici in  $n_0$  drugje. Zanimajo nas rešitve oblike

$$E = \psi(r) e^{im\phi} \quad (10.35)$$

kjer je  $\psi(r)$  znatna le v sredici. Ker je valovna dolžina svetlobe dosti manjša od R, je m veliko število, ki je povezano z valovnim številom β: naj bo  $z = R\phi$  dolžina loka vzdolž sredine sredice. Tedaj je  $m\phi = (m/R)z$  in je torej  $\beta = m/R$ .  $\psi$  zadošča enačbi

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left[ k_0^2 n^2(r) - \frac{m^2}{r^2} \right] \psi = 0 \quad (10.36)$$

Rešitve za  $\psi$  so kombinacije Besselovih funkcij reda m, kar pa zaradi velikosti m ni posebno zanimivo. Dosti več bomo izvedeli, če primerno preoblikujemo valovno enačbo 10.34. Namesto r in φ vpeljimo koordinati  $x = r - R$  in  $z = R\phi$ . S tem smo prešli nazaj na koordinate planparelne plasti in iščemo popravke valovne enacbe 10.4 reda  $1/R$ . Tako je  $1/r \simeq 1/R$  in

$$\frac{m^2}{r^2} = \frac{m^2}{(R+x)^2} \simeq \frac{m^2}{R^2} \left( 1 - 2 \frac{x}{R} \right) = \beta^2 \left( 1 - 2 \frac{x}{R} \right) \quad (10.37)$$

S tem dobimo iz enačbe 10.36 približno enačbo za prečno obliko polja

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [k_0^2 n^2(r) - \beta^2] \psi + \frac{1}{R} \left( \frac{d\psi}{dx} - 2\beta^2 x \psi \right) = 0 \quad (10.38)$$

## 10.6 Disperzija

Zaradi disperzije, to je odvisnosti fazne in grupne hitrosti od frekvence, se sunek svetlobe, ki potuje po vlaknu, podaljšuje. Ta pojav omejuje količino informacije, ki jo je mogoče prenašati po

vlaknu dane dolžine. Zato je čim manjša disperzija v vlaknih vsaj toliko pomembna kot majhne izgube.

Vzemimo najprej enorodovno vlakno in naj bo svetloba v vlaknu modulirana v obliki kratkih sunkov, ki nosijo informacijo. Sunki potujejo z grupno hitrostjo

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} \quad (10.39)$$

Po enačbi 10.1 je grupna hitrost odvisna od frekvence tako zaradi eksplisitne korenske zveze med  $\omega$  in  $\beta$  kot zaradi odvisnosti lomnih količnikov sredice in plašča od frekvence. Prvemu prispevku recimo valovodna disperzija, ker je posledica omejitve valovanja v sredico vlakna, drugemu pa materialna disperzija. Oba prispevka sta pomembna.

Naj bo dolžina vlakna  $L$  in trajanje posameznega sunka  $\tau$ . Sunek potuje po vlaknu čas

$$T = \frac{L}{v_g} = L \frac{d\beta}{d\omega} \quad (10.40)$$

Svetloba ima končno spektralno širino  $\Delta\omega$ . Ta mora biti vsaj  $1/\tau$ , lahko pa je tudi večja, če svetlobni izvor, običajno polvodniški laser, ni povsem monokromatski. Ker vse spektralne komponente ne potujejo z isto hitrostjo, se sunek na koncu vlakna razleže za

$$\Delta\tau = \left| \frac{dT}{d\omega} \right| \Delta\omega = L \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Delta\omega \quad (10.41)$$

Naj bo tudi razmik med zaporednimi sunki  $\tau$ . Da se sunki ne bodo prekrivali, mora biti  $\Delta\tau < \tau$  in sme biti najvišja frekvenca modulacije kvečjemu

$$v_{\max} = \frac{1}{2\Delta\tau} \quad (10.42)$$

Ločiti moramo dva mejna primera. Kadar je  $\Delta\omega \gg 1/\tau$ , to je, kadar je spektralna širina izvora mnogo večja od širine zaradi modulacije, je

$$v_{\max} = \frac{1}{L\Delta\omega} \left( \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)^{-1} \quad (10.43)$$

Največja gostota informacije, ki jo lahko prenašamo po vlaknu, je v tem primeru obratno sorazmerna z dolžino vlakna in spektralno širino laserja.

V nasprotnem primeru, ko je laser dosti bolj monokromatski od razširitve zaradi same modulacije, imamo  $\Delta\omega = 1/\tau$ . Pri najvišji možni frekvenci modulacije  $v_{\max}$  je  $\tau \simeq \Delta\tau$  in je po enačbi 10.41

$$(\Delta\tau)^2 = L \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \quad (10.44)$$

in je

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right)^{-1}} \quad (10.45)$$

V tem primeru je najvišja frekvenca modulacije obratno sorazmerna s korenom dolžine vlakna.

Večji del disperzije grupne hitrosti prinese materialna disperzija, to je, odvisnost lomnega količnika od frekvence. Primer meritve razširitve sunka z znano spektralno širino v izbrani

dolžini vlakna kaže slika ???. Pri valovni dolžini okoli  $1,3 \mu\text{m}$  ima materialna disperzija, to je  $d^2n/d\omega^2$ , ničlo, ki je v celotni disperziji nekoliko premaknjena zaradi prispevka valovodne disperzije. Na valovodno disperzijo je mogoče vplivati s konstrukcijo vlakna. Sredica je lahko sestavljena iz več plasti z različnimi lomnimi količniki in različnimi debelinami, s čimer se spremeni prispevek valovodne disperzije in se položaj ničle celotne disperzije premakne k valovni dolžini izvora.

Iz slike ?? razberemo, da je tipična disperzija enorodovnega vlakna okoli  $10 \text{ ps/km}$  pri spektralni širini  $1 \text{ nm}$ . Od tod je  $d^2\beta/d\omega^2 = \Delta\tau\lambda / (\Delta\lambda L\omega) \simeq 5 \cdot 10^{-23} \text{ s}^2/\text{m}$ . Po enačbi 10.45 je v  $100 \text{ km}$  dolgem vlaknu tedaj najvišja frekvenca modulacije okoli  $10^9 \text{ Hz}$ . Pri zmogljivih zvezah na velike razdalje je torej za največjo dolžino vlakna brez obnovitve signala disperzija hujaša omejitev kot izgube. Največja možna razdalja in najvišje frekvenca modulacije sta danes nekaj sto kilometrov in nekaj GHz.

V mnogorodvnih vlaknih se sunek širi zaradi različnih grupnih hitrosti posameznih rodov. Različne grupne hitrosti v valovni sliki ustrezajo različni dolžini optične poti za žarke, ki potujejo pod različnimi koti glede na os vlakna. Te razlike so mnogo večje od disperzije v enorodvnih vlaknih, zato je pri dani dolžini vlakna popačitev signala dosti večja in se mnogorodovna vlakna ne uporablajo za dolge zveze.

## 10.7 Potovanje sunka po enorodovnem vlaknu

Poglejmo si nekoliko podrobnejše, kako po enorodovnem vlaknu ali drugem sredstvu z disperzijo potuje sunek valovanja z dano začetno obliko. Denimo, da smo poiskali lastna valovanja in da torej poznamo zvezo med valovnim številom  $\beta$  in frekvenco  $\omega$ . Zapišimo sunek v obliki

$$E(z, t) = a(z, t) \psi(x, y) \quad (10.46)$$

kjer je  $\psi(x, y)$  lastna rešitev prečenega dela valovne enačbe, ki določa tudi  $\beta(\omega)$ . Funkcijo  $a(z, t)$ , ki opisuje širjenje sunka in njegovo obliko v  $z$  smeri, lahko zapišemo s Fourierovim integralom po frekvencah

$$a(z, t) = \int a(\omega, z) e^{-i\omega t} d\omega \quad (10.47)$$

Sunek naj bo približno monokromatičen s frekvenco  $\omega_0$ , to pomeni, da je mnogo daljši od optične periode. Pri določeni  $\omega$  ima Fourierova amplituda krajevno odvisnost  $\exp[i\beta(\omega)z]$ , zato zadošča enačbi

$$\frac{\partial a(z, \omega)}{\partial z} = i\beta(\omega) a(z, \omega) \quad (10.48)$$

Privzeli smo, da je spekter sunka ozek, zato lahko  $\beta(\omega)$  razvijemo okoli  $\omega_0$ :

$$\frac{\partial a(z, \omega)}{\partial z} = i \left[ \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2} (\omega - \omega_0)^2 \right] a \quad (10.49)$$

Vpeljimo novo amplitudno funkcijo, ki ne bo vsebovala osnovne odvisnosti  $\exp[i\beta(\omega_0)z]$

$$a(z, \omega) = A(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta(\omega_0)z} \quad (10.50)$$

Ker je spkter različen od nič le okoli  $\omega_0$ , je prikladno  $A$  pisati kot funkcijo  $\omega - \omega_0$ . Napravimo obratno Fourierovo transformacijo zadnjega izraza:

$$\begin{aligned} a(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z, \omega - \omega_0) e^{i[\beta(\omega_0)z - \omega_0 t]} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0) e^{i[\beta(\omega_0)z - \omega_0 t]} \\ &= A(z, t) e^{i[\beta(\omega_0)z - \omega_0 t]} \end{aligned} \quad (10.51)$$

Funkcija  $A(z, t)$ , katere Fourierova transformacija je  $A(z, \omega)$ , očitno predstavlja prostorsko in časovno odvisnost ovojnice sunka. Postavimo definicijo 10.50 v enačbo 10.49:

$$\frac{\partial A(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} = i \left[ \frac{d\beta}{d\omega} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2} (\omega - \omega_0)^2 \right] A(z, \omega - \omega_0) \quad (10.52)$$

Z obratno Fourierovo transformacijo dobimo

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) A(z, t) = -\frac{i}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} \quad (10.53)$$

Upoštevali smo, da je

$$\int (i\omega)^n A(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{\partial^n}{\partial t^n} A(z, t) \quad (10.54)$$

in da je  $d\beta/d\omega = 1/v_g$ .

Enačba 10.53 opisuje razvoj oblike sunka pri širjenju po vlaknu. Če ni disperzije grupne hitrosti, to je, če je desna stran enačbe nič, je rešitev poljubna funkcija  $f(z - v_g t)$ . Sunek poljubne začetne oblike potuje po vlaknu nepopačen z grupno hitrostjo. Disperzija pa povzroči, da se spreminja tudi oblika. Enačbo lahko še nekoliko poenostavimo z vpeljavo novih neodvisnih spremenljivk

$$\begin{aligned} \tau &= t - \frac{z}{v_g} \\ \zeta &= z \end{aligned} \quad (10.55)$$

Za vrh sunka, ki naj ima pri  $t = 0$  koordinato  $z = 0$  in se giblje z grupno hitrostjo, je vselej  $\tau = 0$ . Spremenljivka predstavlja  $\tau$  torej čas v točki  $z = \zeta$ , merjen od trenutka, ko tja prispe center sunka. Z novima spremenljivkama se enačba 10.53 zapiše

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial \zeta} = 0 \quad (10.56)$$

Ta enačba ima isto obliko kot obosna valovna enačba, ki smo jo v drugem poglavju uporabili za obravnavo koherentnih snopov. Podobnost seže dlje od formalne oblike. Pri snopih, ki so omejeni v prečni smeri, disperzija fazne in grupne hitrosti po prečnih komponentah valovnega vektorja povzroča spremjanje prečnega preseka snopa, pri časovno omejenih sunkih v sredstvu s frekvenčno disperzijo pa se spreminja vzdolžna oblika sunka. Kot se morda bralec spominja, je tudi v praznem prostoru pri širjenju snopa v okolici grla fazna hitrost funkcija frekvence. Zato se kratek sunek, ki je omejen v prečni smeri, tudi v praznem prostoru razširi tako v prečni kot v vzdolžni smeri. (Naloga)

Obosno valovno enačbo rešijo Gaussovi snopi. V en. 10.56 ima vlogo prečne koordinate  $\tau$ . Po analogiji s snopi se bo zaradi disperzije najmanj širil sunek z Gaussovo časovno odvisnostjo.

Računa nam ni treba ponavljati, kar v izrazu za Gaussove snope napravimo ustrezeno zamenjavo črk. Valovnemu številu  $k$  pri snopih na primer ustreza parameter  $\mu = (d^2\beta/d\omega^2)^{-1}$ . Tako dobimo

$$A(\tau, \zeta) = \frac{A_0}{\sigma_0 \sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-i\frac{\mu\tau^2}{2b}\right) e^{i\phi(\zeta)} \quad (10.57)$$

kjer je  $\sigma$  trajanje sunka, za katerega velja enaka zveza kot za polmer Gaussovega snopa:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left(1 + \frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}\right) \quad (10.58)$$

Tu je  $\sigma_0$  trajanje sunka pri  $\zeta = 0$ , to je na mestu, kjer je sunek najkrajši. Dodatna skupna faza  $\phi(\zeta)$  ni posebno pomembna, pač pa je zanimiv drugi eksponentni faktor v enačbi 10.57. V njem smo z  $b = \zeta (1 + \zeta_0^2/\zeta^2)$  označili količino, ki je analogna krivinskemu radiju valovnih front v primeru Gaussovih snopov. Odvod faze po  $\tau$  predstavlja spremembo frekvence glede na centralno frekvenco sunka  $\omega_0$ :

$$\omega - \omega_0 = \frac{\mu\tau}{b} \quad (10.59)$$

Za pozitivno disperzijo  $\mu$  je frekvanca na prednji strani sunka, to je pri  $\tau < 0$ , večja in se linearno zmanjšuje proti koncu sunka. Pri  $\zeta = 0$  je sunek toliko kratek, kolikor je možno pri dani spektralni širini. Pri potovanju po vlaknu se zaradi disperzije sunek razširi, spektralna širina pa ostaja enaka, zato se je del pojavi kot spremenjanje frekvence znotraj sunka. Lahko si mislimo tudi, da je sunek najkrajši, to je omejen z Fourierovo transformacijo spektra, tedaj, kadar se vse frekvenčne komponente seštejejo z isto fazo, to je pri  $\zeta = 0$ . Da dobimo najkrajše sunke, kadar je faza vseh delnih valov enaka, smo srečali že pri fazno uklenjenih sunkih iz mnogofrekvenčnih laserjev. Pri potovanju sunka se zaradi disperzije faze frekvenčnih komponent različno spreminja in sunek se podaljša. Zanimivo je, da je pri tem pomemben šele drugi odvod fazne hitrosti po frekvenci, ki je sorazmeren z  $\mu$ , linearno spremenjanje faze pa ne povzroči razširitve.

Naloga: Pokaži, da je spekter sunka nespremenjen.

Naloga: Pokaži, da je za sunek poljubne začetne oblike razširitev mogoče zapisati z uklonskim integralom.

Naloga: Pokaži, da iz en. 10.58 sledi podobna ocena za maksimalno frekvenco modulacije (minimalno razširitev sunka) pri dani dolžini vlakna, kot jo da en. 10.45.

Razširitev sunka zaradi disperzije je pri  $\mu > 0$  mogoče kompenzirati s parom paralelnih uklonskih mrežic, kot kaže slika ???. Prva mrežica različne frekvenčna komponente razkloni, druga pa zopet zbere, vendar dolžine optičnih poti za različne komponente niso enake. celoten učinek je enak kot pri razširjanju sunka po sredstvu z negativno disperzijo. Račun je nekoliko preglednejši, rezultat pa povsem enak, če namesto refleksijskih mrežic vzamemo transmisiji, kot kaže slika ???. Naj na par vpada raven val pod kotom  $\alpha$ . Pred prvo mrežico je fazni faktor  $\exp(ik_1x)$ , kjer je  $k_1 = \omega/c \sin \alpha$ . Pri prehodu skozi mrežico se polje pomnoži s kompleksno prepustnostjo mrežice, ki povzroči razcep vala na uklonjene valove. Pri tem se faza za prvi uklonski red poveča za  $qx$ , kje je  $q = 2\pi/\Lambda$  in je  $\Lambda$  perioda mrežice. Premik do druge mrežice poveča fazo za  $k_3L$ . Za komponento valovnega vektorja v smeri  $z$  velja seveda  $k_3 = \sqrt{(\omega/c)^2 - (k_1 + q)^2}$ . Po prehodu

skozi drugo mrežico nas zanima prvi negativni uklonski red, ki da val v smeri prvotnega vala. Za ta red se faza spremeni za  $-qx$ , tako da je celotna sprememba faze

$$\Phi = L \sqrt{(\omega/c)^2 - (k_1 + q)^2} = \frac{L}{c} \sqrt{\omega^2 - (\omega \sin \alpha + qc)^2} \quad (10.60)$$

Disperzija, ki jo povzroči par mrežic, je določena z drugim odvodom faze po frekvenci:

$$\frac{d^2\Phi}{d\omega^2} = -\frac{Lq}{[\omega^2 - (\omega \sin \alpha + qc)^2]^{3/2}} \quad (10.61)$$

Drugi odvod je vselej negativen. Par mrežic torej deluje kot sredstvo z negativno disperzijo. Sunek, ki se je razširil zaradi potovanja po sredstvu s pozitivno disperzijo, lahko ponovno skrajšamo do meje, določene s širino spektra. Postopek se uporablja za pridobivanje zelo kratkih sunkov. Sunku iz fazno uklenjenega barvilnega ali Ti:safirnega laserja najprej v nelinearnem sredstvu razširijo spekter, pri čemer se sunek tudi časovno podaljša. O tem najde bralec nekaj več v poglavju o nelinearni optiki. Razširjen sunek nato s parom mrežic skrajšajo za faktor 10-100 glede na prvotno dolžino sunka. Tako dobijo sunke dolge le okoli 10 fs, kar je le še nekaj optičnih period.

## 10.8 Sklopitev v optična vlakna



## 11. Detektorji svetlobe

- 11.1 Kalorimetrični detektorji
- 11.2 Fotoprevodni detektorji
- 11.3 PN in PiN fotodiode
- 11.4 Plazovne fotodiode
- 11.5 Šum pri optični detekciji

Življenjski čas nihanj, 63  
ABCD matrike, 49, 51, 59  
Absorpcija, 74  
Absorpcija fotona, 71  
Absorpcijski koeficient, 74  
Avtokorelacijska funkcija, 28  
Besselov snop, 45  
Brewsterjev kot, 16  
DFG, 87  
Dielektričnost, 9, 21  
Dobrota resonatorja, 63  
Dopplerjeva razširitev, 80  
Dvolomnost, 23  
Dvonivojski sistem, 70  
Einsteinovi koeficienti, 72, 82  
Električna polarizacija, 9  
Električna susceptibilnost, 9  
Električno polje  
    gostota, 9  
    jakost, 9, 11  
Elektromagnetno valovanje, 11, 67  
Fabry-Perotov interferometer, 53, 55, 64  
Foton, 69  
Fraunhoferjev uklon, 19, 37  
Fresnel-Kirchhoffov integral, 18  
Fresnelov uklon, 19, 37  
Fresnelove enačbe, 15  
Fresnelovo število, 19, 55, 62  
Gaussov snop, 41, 56  
    divergenca, 40  
    grlo, 40  
    krivinski radij, 41  
    polmer, 40  
Gostota energije, 11, 13  
Gostota energijskega toka, 11–13, 29  
Gostota stanj, 53, 68  
Gouyeva faza, 41, 60  
Hamiltonova funkcija, 69  
Harmonski oscilator, 69  
Helmholtzeva enačba, 12, 38  
Hermite-Gaussovi snopi, 43, 66  
Huygensovo načelo, 19  
Intenziteta, *glej* Gostota energijskega toka  
Interferenca, 25, 28, 32, 35  
Izgube v resonatorju, 63  
Jonesov vektor, 13  
Jonesova matrika, 14, 15  
Kirchhoffov integral, 17  
Kirchhoffov uklonski integral, 64  
Kleinmanova zveza, 87  
Koherenčna dolžina, 28  
Koherenčna ploskev, 33, 34  
Koherenčna razdalja, 26, 33  
Koherenčni čas, 25, 28  
Koherenca, 25  
    časovna, 25, 27  
    prostorska, 26, 32  
Kompleksna ukrivljenost, 42  
Kompleksni krivinski radij, 42  
Laguerre-Gaussovi snopi, 44  
Laser  
    Nd:YAG, 89  
Lastne frekvence resonatorja, 53, 55, 60  
Lomni količnik, 10, 21  
    izredni, 22  
    redni, 22  
Lomni zakon, 15, 23  
Lorentzov spekter, 72  
Magnetizacija, 9  
Magnetna permeabilnost, 9  
Magnetna susceptibilnost, 9  
Magnetno polje  
    gostota, 9  
    jakost, 9, 11  
Maxwellove enačbe, 9  
Michelsonov interferometer, 27  
Nasičena absorpcija, 75  
Nelinearna optika, 86

- Obosna valovna enačba, 38  
Obrnjena zasedenost, 76  
Omejen snop, 37  
Optična indikatrisa, 21  
Optična os, 22  
Optično črpanje, 76  
Planckov zakon, 70  
Ploščica  $\lambda/2$ , 14  
Ploščica  $\lambda/4$ , 14  
Podvajanje frekvenc, 89  
Polarizacija valovanja, 13  
    TE, 15  
    TM, 15  
Poyntingov teorem, 11  
Poyntingov vektor, 11, 12  
Presek za absorpcijo, 74  
Presek za stimulirano sevanje, 74  
Preslikava čez lečo, 46  
Ravni val, 12, 38, 67  
Rayleighova dolžina, 40  
Resonator, 53  
    koncentrični, 59  
    konfokalni, 58, 61, 62, 64  
    odprt, 54  
    planparalelni, 56, 59, 61  
    simetrični, 58  
Robni pogoji, 10  
Saturacijska gostota toka, 75, 78  
Sevanje črnega telesa, 69  
SFG, 87  
SHG, 87  
Spekter, 29  
    Gaussov, 29, 31  
    Lorentzov, 29, 31  
    Planckov, 32  
Spektralna črta  
    homogena razširitev, 79  
    nehomogena razširitev, 79  
Spektralna širina, 30  
Spontano sevanje, 70, 82  
Stabilnost resonatorjev, 55  
Stabilnostni kriterij, 57, 60  
Stimulirano sevanje, 71, 82  
Susceptibilnost  
    linearna, 86  
    nelinearna, 86  
Tirna vrtilna količina, 45  
Uklon, 17, 37  
Valovna enačba, 10  
Valovni vektor, 12  
van Cittert-Zernikov teorem, 34  
Wiener-Hinčinov teorem, 30  
Youngov poskus, 25, 32  
Zasedenost stanj, 72