FOTONIKA

Martin ČOPIČ
Mojca VILFAN

Recenzenti: ***

Lektor: ***

Risbe in diagrami: Mojca Vilfan in Andrej Petelin

Oblikovanje, postavitev in prelom: Mojca Vilfan

Naslovne slike poglavij: Mojca Vilfan, Martin Rigler (str. 120 in 176), Andrej Petelin (str. 37), ESO (str. 93), Irena Drevenšek (str. 140), in NASA (str. 238)

LJUBLJANA, 2019

Kazalo

Predgovor

Fotonika je veda o svetlobi. Obsega izredno široka področja nastanka svetlobe in svetlobnih virov, uporabe svetlobe v različne namene, širjenja optičnih signalov in njihovega spreminjanja ter zaznavanja svetlobe. V zadnjih desetletjih je zato fotonika doživela izreden razcvet v raziskavah in tehnološki uporabi.

V pričujoči knjigi bomo obravnavali osnove fotonike. Po kratki ponovitvi splošne optike bomo spoznali delovanje laserjev in lastnosti laserske svetlobe, nadaljevali z nelinearnimi optičnimi pojavi in modulacijo svetlobe ter zaključili s prenosom in detekcijo laserskih signalov. Knjiga je zato zelo primerna predvsem za študente II. stopnje fizike, ki že imajo znanje optike in zahtevanih matematičnih prijemov, ga pa priporočava vsakemu, ki ga področje fotonike zanima, naj bo to ljubiteljsko ali profesionalno. Bralcu v razmislek sva dodala nekaj nalog, zahtevnejša podpoglavja pa so označena z zvezdico.

Prvotno gradivo za to knjigo je nastalo po zapiskih s predavanj pri predmetu Elektrooptika in kasneje Fotonika ter Fizika laserjev. Gradivo sva dopolnila, posodobila in prilagodila obravnavani snovi pri predmetih Fotonika I in Fotonika II. Za pomoč pri pripravi se najlepše zahvaljujeva prof. dr. Ireni Drevenšek Olenik, ki je kot dolgoletna predavateljica Fotonike znatno pripomogla k oblikovanju te knjige, in Andreju Petelinu za pomoč pri delu ter ostalim sodelavcem z Odseka za kompleksne snovi Instituta "Jožef Stefan" za sodelovanje pri pripravi.

Avtorja

Priporočena dodatna literatura

- A. Yariv in P. Yeh, Photonics, Sixth Edition, Oxford University Press, 2007.
- B. E. A. Saleh in M. C. Teich, Fundamentals of Photonics, 2nd Edition, Wiley, New Jersey, 2007.
- G. A. Reider, Photonics, An Introducion, Springer, Berlin, 2016.
- V. Degiorgio in I. Cristiani, Photonics, A Short Course, Springer International, 2016.
- W. T. Silfvast, Laser Fundamentals, Second Edition, Cambridge University Press, 2008.
- C. C. Davis, Lasers and Electro-Optics, Cambridge University Press, 2006.
- O. Svelto, Principles of Lasers, Fifth Edition, Springer, New York, 2010
- K. F. Renk, Basics of Laser Physics, Second Edition, Springer, Berlin, 2017.
- J. W. Goodman, Statistical Optics, Second Edition, Wiley, New Jersey, 2015.
- W. Demtröder, Laser Spectroscopy, Fifth Edition, Springer, Berlin, 2014.
- G. New, Introduction to Nonlinear Optics, Cambridge University Press, 2011.
- R. W. Boyd, Nonlinear Optics, Third Edition, Academic Press, 2008.

1. Elektromagnetno valovanje

Za začetek bomo osvežili osnove teorije elektromagnetnega polja in elektromagnetnega valovanja. Obnovili bomo zapis Maxwellovih enačb in valovne enačbe, opisali osnovne pojave valovanja (lom, odboj in uklon) in si na kratko ogledali razširjanje svetlobe v anizotropnih snoveh.

1.1 Maxwellove enačbe

Elektromagnetno polje v praznem prostoru opišemo z dvema vektorskima poljema, električnim in magnetnim, ki sta na splošno funkciji lege $\mathbf{r}$ in časa t. Vsaki točki v prostoru lahko priredimo jakost električnega polja $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ in gostoto magnetnega polja $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Za opis elektromagnetnega polja v snovi vpeljemo dve dodatni količini. To sta gostota električnega polja $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ in jakost magnetnega polja $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$. Vse te količine povezujejo Maxwellove enačbe[1]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_e \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1.4}$$

Pri zapisu enačb smo upoštevali tudi izvore polj, to je gostoto električnega toka $\mathbf{j}_e(\mathbf{r},t)$ in gostoto naboja $\rho_e(\mathbf{r},t)$, ki pa ju bomo v nadaljevanju izpuščali.

Poleg Maxwellovih enačb veljata zvezi

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{in} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}, \tag{1.6}$$

kjer $\mathbf{P}$ označuje električno polarizacijo, to je gostoto električnih dipolov, $\mathbf{M}$ pa magnetizacijo, to je gostoto magnetnega momenta. Polarizacija in magnetizacija sta odvisni od zunanjih polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$. Na splošno sta njuni odvisnosti zelo zapleteni, v izotropnih in linearnih snoveh[2] pa se zvezi poenostavita v

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{M} = \frac{(\mu - 1)}{\mu\mu_0}\mathbf{B} = \chi_m\mathbf{H} = (\mu - 1)\mathbf{H}. \tag{1.7}$$

Vpeljali smo električno χ_e in magnetno χ_m susceptibilnost ter dielektričnost ε in magnetno permeabilnost μ. Ko združimo gornje enačbe, lahko zapišemo dve konstitutivni relaciji

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu}. \tag{1.8}$$

V linearnih anizotropnih snoveh moramo namesto skalarnih vrednosti ε in μ zapisati tenzorje.

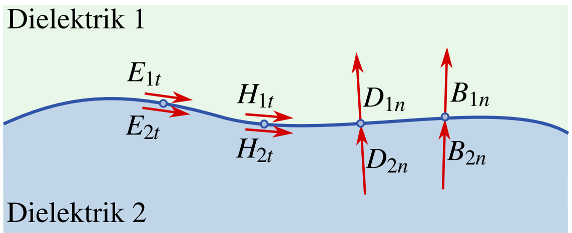
[1] Škotski fizik James Clerk Maxwell, 1831–1879.
[2] Med nelinearne snovi, za katere napisani zvezi ne veljata, sodijo na primer feroelektriki in feromagneti.

Robni pogoji

Navedene Maxwellove enačbe zadoščajo za opis elektromagnetnega polja v neomejeni snovi, kjer so vse komponente polj zvezne funkcije. Za obravnavo v omejeni snovi moramo vedeti tudi, kaj se z elektromagnetnim poljem zgodi na meji dveh sredstev. Pri prehodu iz enega dielektrika v drugega se ohranjata normalni komponenti gostote električnega in magnetnega polja ter tangentni komponenti jakosti električnega in magnetnega polja (slika 1.1)

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{1.9}$$
$$B_{1n} = B_{2n} \tag{1.10}$$
$$E_{1t} = E_{2t} \tag{1.11}$$
$$H_{1t} = H_{2t}. \tag{1.12}$$

Privzeli smo, da na meji med dielektrikoma ni površinskih tokov ali nabojev, sicer bi morali robna pogoja za D_n in H_t ustrezno popraviti. Na meji dielektrika z idealnim prevodnikom (kovino, zrcalom) so robni pogoji drugačni. Za magnetno polje jih ne moremo preprosto zapisati, za električno polje pa velja, da mora biti tangentna komponenta jakosti električnega polja enaka nič. Posledica tega pogoja je, da se pri pravokotnem vpadu na zrcalo faza valovanja spremeni za π.



Slika 1.1: Na meji med dvema dielektrikoma brez površinskih tokov in nabojev se ohranjata tangentni komponenti E_t in H_t ter normalni komponenti D_n in B_n.

1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor

Večinoma bomo obravnavali elektromagnetna valovanja v izotropnih, homogenih in linearnih snoveh brez zunanjih izvorov in nosilcev naboja ($\mathbf{j}_e = 0$ in $\rho_e = 0$). Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpeljemo valovni enačbi za jakost električnega in gostoto magnetnega polja

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in} \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.13}$$

Pri tem je hitrost valovanja v snovi enaka

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c_0}{n}. \tag{1.14}$$

Magnetne in dielektrične lastnosti snovi smo pospravili v lomni količnik n, ki pove, kolikokrat je hitrost svetlobe v snovi manjša od hitrosti svetlobe v praznem prostoru. Velja

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{1.15}$$

Za izotropno in nemagnetno snov ($\mu = 1$) je lomni količnik $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Vpeljimo še vektor gostote energijskega toka, to je Poyntingov vektor[3] $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{1.16}$$

Iz lastnosti vektorskega produkta sledi, da je smer energijskega toka vedno pravokotna na smeri $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$. Gostoto energijskega toka j, to je količino energije, ki v danem času preteče skozi dano ploskev z normalo $\hat{\mathbf{n}}$, izračunamo kot časovno povprečje projekcije Poyntingovega vektorja

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle . \tag{1.17}$$

Gostoto energijskega toka j imenujemo tudi gostota svetlobnega toka.

Poyntingov izrek, ki ga lahko izpeljemo neposredno iz Maxwellovih enačb in konstitutivnih relacij, predstavlja izrek o ohranitvi energije. Za valovanje v homogeni izotropni snovi tako velja

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1.18}$$

kjer je w celotna gostota energije elektromagnetnega polja. Zapišemo jo kot

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{B}^2}{\mu\mu_0}. \tag{1.19}$$

Valovno enačbo in ohranitvene zakone lahko zapišemo tudi za anizotropne, nehomogene ali nelinearne snovi. Nekaj teh primerov bomo srečali v nadaljevanju in jih bomo obravnavali sproti.

1.3 Monokromatski elektromagnetni val

Reševanje valovne enačbe navadno poenostavimo s kompleksnim zapisom električnega in magnetnega polja. Račun si oglejmo na primeru monokromatskega elektromagnetnega vala. Nastavek za monokromatski val s krožno frekvenco ω naj bo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) \qquad \text{in} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}), \tag{1.20}$$

kjer sta $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ časovno neodvisna vektorja jakosti električnega in gostote magnetnega polja s kompleksno amplitudo. Podobno lahko vpeljemo tudi kompleksne vektorje $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ in $\mathbf{H}$, ki opisujejo realne količine (polarizacijo, magnetizacijo, gostoto električnega in jakost magnetnega polja). V nadaljevanju bomo večinoma pisali polja v kompleksni obliki, pri čemer se bomo držali gornje definicije. Zavedati pa se moramo, da je uporaba kompleksnega zapisa zgolj računski pripomoček, na koncu je treba rezultate vedno izraziti z realnimi količinami.

Če vstavimo nastavka za monokromatski val (enačbi 1.20) v valovni enačbi (enačbi 1.13), dobimo Helmholtzevi enačbi[4] za kompleksna vektorja jakosti električnega in gostote magnetnega polja. V homogenem in izotropnem sredstvu ju zapišemo kot

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.21}$$
$$\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \tag{1.22}$$

kjer je $k = nk_0 = n\omega/c_0$ valovno število. Vpeljemo lahko tudi kompleksni Poyntingov vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}). \tag{1.23}$$

[3] Angleški fizik John Henry Poynting, 1852–1914.
[4] Nemški fiziolog in fizik Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821–1894.

Naloga 1.3.1 Upoštevajoč izraz za Poyntingov vektor $\mathbf{S}$ (enačba 1.16) pokaži, da lahko gostoto svetlobnega toka j (oziroma povprečje projekcije Poyntingovega vektorja) izrazimo s kompleksnim Poyntingovim vektorjem $\mathbf{S}(\mathbf{r})$

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \Re(\mathbf{S}(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}}. \tag{1.24}$$

1.4 Ravni val

Osnovna rešitev valovne enačbe (enačba 1.13) je ravni val. Nastavek, ki predstavlja ravni val in hkrati reši Helmholtzevo enačbo (enačba 1.21), je oblike

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} \tag{1.25}$$

in podobno za magnetno polje

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}, \tag{1.26}$$

pri čemer sta vektorja $\mathbf{E}_0$ ter $\mathbf{B}_0$ od kraja in časa neodvisna. Velikost valovnega vektorja $\mathbf{k}$ je valovno število $k = nk_0$, kjer je n lomni količnik izotropne in homogene snovi.

Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledijo zveze o ortogonalnosti količin električnega in magnetnega polja. Vedno sta med seboj pravokotna vektorja jakosti električnega $\mathbf{E}$ in magnetnega polja $\mathbf{H}$ (naloga 1.4.1), ki sta po definiciji tudi vedno pravokotna na Poyntingov vektor $\mathbf{S}$ (enačba 1.16). V izotropnih snoveh je Poyntingov vektor vzporeden valovnemu vektorju, zato sta v izotropnih snoveh $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ hkrati pravokotna na valovni vektor $\mathbf{k}$. Elektromagnetno valovanje je torej transverzalno valovanje. Zaradi enolične zveze med električnim in magnetnim poljem zadošča za opis ravnega vala le eno polje, navadno se odločimo za električno.

Naloga 1.4.1 Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) pokaži, da za ravni val vedno velja

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}. \tag{1.27}$$

Izpelji še zvezi

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad \text{in} \tag{1.28}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mu \mu_0 \mathbf{H}_0, \tag{1.29}$$

iz katerih izhaja, da v izotropni snovi velja $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k}$.

Energijski tok je pri ravnem valu v izotropni snovi vedno v smeri valovnega vektorja, pravokotno na valovne fronte. Iz definicije za gostoto svetlobnega toka (enačba 1.24) ter Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledi

$$j = \frac{1}{4} E_0 H_0^* + \frac{1}{4} E_0^* H_0 = \frac{1}{2} c_0 n \varepsilon_0 |E_0|^2. \tag{1.30}$$

Gostota svetlobnega toka je torej sorazmerna s kvadratom amplitude jakosti električnega polja. Poglejmo nekaj primerov. Gostoti toka $j = 1\ \mathrm{kW/m^2}$ (približna gostota svetlobnega toka s Sonca na Zemljinem površju) v praznem prostoru ustreza jakost električnega polja $E_0 = 868\ \mathrm{V/m}$, gostoti $j = 1\ \mathrm{W/\mu m^2}$ (močno zbran laserski žarek) pa $E_0 = 27\ \mathrm{MV/m}$.

Zapišimo še povprečno gostoto energije valovanja. K energiji prispevata tako magnetno kot električno polje. Oba prispevka sta enaka, zato velja

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_0 |E_0|^2 + \frac{1}{4}\frac{|B_0|^2}{\mu\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 |E_0|^2 . \tag{1.31}$$

Povprečna gostota energije w, pomnožena s hitrostjo svetlobe v snovi, da gostoto energijskega oziroma svetlobnega toka j

$$j = cw = \frac{1}{2}c\varepsilon\varepsilon_0 |E_0|^2 = \frac{1}{2}c_0 n\varepsilon_0 |E_0|^2 . \tag{1.32}$$

Prva enakost nazorno kaže, da je gostota svetlobnega toka pravzaprav pretok energije. To si lahko predstavljamo, če vzamemo valj s prečnim presekom S in dolžino $c\Delta t$. V volumnu $Sc\Delta t$ je potem shranjene $wSc\Delta t$ energije. Energija, ki preteče skozi presek S v času Δt, je ravno cw.

Gostota svetlobnega toka ravnega vala je neodvisna od kraja in časa, iz česar sledi, da je povsod po prostoru enaka. Če bi hoteli izračunati energijo, ki jo nosi ravni val, bi opazili, da je ta energija neskončna. To seveda ni mogoče, zato se je vedno treba zavedati, da je ravni val le idealiziran, a nazoren in praktičen približek elektromagnetnega vala.

1.5 Polarizacija EM valovanja

Jakost električnega polja elektromagnetnega valovanja je v izotropnem sredstvu vedno pravokotna na smer valovnega vektorja[5]. Vektor $\mathbf{E}_0$ tako leži v ravnini, ki je pravokotna na smer valovnega vektorja, njegovo smer pa opiše polarizacija.

Električno polje ravnega vala lahko razstavimo na dve medsebojno pravokotni komponenti vektorja $\mathbf{E}_0$. Ti dve komponenti nihata sinusno z enako frekvenco, lahko pa se razlikujeta v amplitudi in fazi. Na splošno je ravni val eliptično polariziran in vrh vektorja električne poljske jakosti $\mathbf{E}_0$ v ravnini, ki je pravokotna na smer širjenja, orisuje elipso. Kadar je elipsa izrojena v daljico, govorimo o linearno polariziranem valu, kadar pa je krog, govorimo o cirkularno polariziranem valu. Poljubno polarizacijo lahko vedno zapišemo kot vsoto dveh linearno ali dveh cirkularno polariziranih valovanj.

Priročen zapis polarizacije je s kompleksnim Jonesovim vektorjem[6] $\mathbf{J}$. Za monokromatski ravni val, ki se širi v smeri z in ima komponenti E_x in E_y, je Jonesov vektor

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|E_0|}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} . \tag{1.33}$$

Dodali smo normalizacijski faktor $|E_0| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}$, da je Jonesov vektor normiran in $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}^* = 1$. Ravni val, linearno polariziran v smeri x, tako zapišemo kot $\mathbf{J} = (1,0)$, val, ki je linearno polariziran pod kotom 45° glede na osi x in y, pa je $\mathbf{J} = (1,1)/\sqrt{2}$. Za zapis cirkularno polariziranega valovanja ni enotnega dogovora, tukaj zapišimo desno cirkularno polarizirano valovanje kot $\mathbf{J} = (1,-i)/\sqrt{2}$, levo cirkularno polarizirano pa z $\mathbf{J} = (1,i)/\sqrt{2}$. V našem zapisu je desno polariziran val tisti val, pri katerem se električna poljska jakost na danem mestu vrti v desno, če gledamo proti izvoru valovanja.

[5] Na splošno velja $\mathbf{E} \perp \mathbf{S}$ (enačba 1.16) in $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$ (naloga 1.4.1). To velja tudi v anizotropnih sredstvih, vendar je tam $\mathbf{E} \nparallel \mathbf{D}$ in $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{S}$.

[6] Ameriški fizik Robert Clark Jones, 1916–2004.

Zapis z Jonesovim vektorjem je prikladen, saj omogoča preprost izračun prehoda ravnega vala skozi optične elemente, ki spreminjajo polarizacijo, a ohranjajo njegovo obliko. Na splošno se pri prehodu skozi optični element spremeni kompleksna amplituda $\mathbf{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y})$

$$E_{2x} = A_{11}E_{1x} + A_{12}E_{1y} \tag{1.34}$$

$$E_{2y} = A_{21}E_{1x} + A_{22}E_{1y}, \tag{1.35}$$

pri čemer so komponente A_{ij} odvisne od lastnosti elementa. Enačbi zapišemo v matrični obliki $\mathbf{E}_2 = A \cdot \mathbf{E}_1$ oziroma z Jonesovimi vektorji $\mathbf{J}_2 = A \cdot \mathbf{J}_1$, kjer $\mathbf{J}_1$ in $\mathbf{J}_2$ opisujeta polarizaciji vstopnega in izstopnega vala, A pa je Jonesova matrika. Jonesova matrika za prehod skozi linearni polarizator, ki polarizira v smeri x, je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.36}$$

za polarizator, orientiran pod kotom 45 ° glede na os x, pa

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.37}$$

Oglejmo si še dva zanimiva primera. Jonesova matrika za optični element, ki eni komponenti doda fazni zamik π (tak element imenujemo ploščica $\lambda/2$), je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.38}$$

Ploščica $\lambda/2$ tako spremeni desno cirkularno polariziran val v levo polariziran in obratno, linearno polariziran val pa prezrcali čez koordinatno os. Podobno je Jonesova matrika za element, ki eni komponenti doda fazni zamik $\pi/2$ (imenujemo ga ploščica $\lambda/4$), enaka

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

Ploščica $\lambda/4$ linearno polarizirano valovanje z Jonesovim vektorjem $(1,1)/\sqrt{2}$ spremeni v levo cirkularno polarizirano valovanje, cirkularno polarizirano valovanje pa nazaj v linearno.

Naloga 1.5.1 Pokaži, da je Jonesova matrika za polarizator, ki prepušča polarizacijo pod kotom ϑ glede na os x, podana z matriko

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & \sin^2\vartheta \end{bmatrix}. \tag{1.40}$$

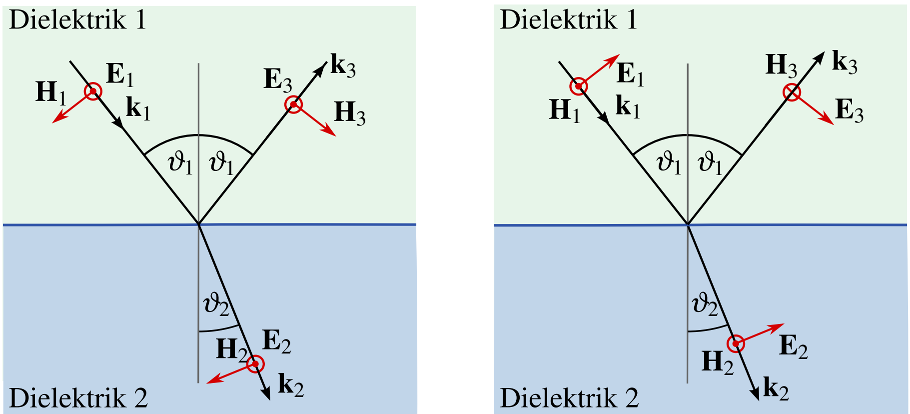
Namig: matriko A', ki opisuje polarizator v smeri x, zapiši v zasukanem koordinatnem sistemu $A = R(\vartheta) \cdot A' \cdot R(\vartheta)^{\mathrm{T}}$, kjer je $R(\vartheta)$ rotacijska matrika.

1.6 Lom in odboj EM valovanja

Na ravni meji med dvema izotropnima dielektrikoma se del svetlobe odbije po odbojnem zakonu, ki pravi, da je odbojni kot enak vpadnemu, del pa lomi po lomnem zakonu

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2. \tag{1.41}$$

S kotoma ϑ_1 in ϑ_2 smo označili vpadni in lomni kot, n_1 in n_2 pa sta lomna količnika prve in druge snovi (slika 1.2). Poglejmo, kaj se pri lomu in odboju zgodi s polarizacijo valovanja. Dogovorimo se, da valovanje, pri katerem je električna poljska jakost pravokotna na vpadno ravnino, imenujemo transverzalno električno (TE) valovanje. Kadar leži jakost električnega polja v vpadni ravnini in je na vpadno ravnino pravokotna jakost magnetnega polja, govorimo o transverzalnem magnetnem valovanju (TM).



Slika 1.2: Lom elektromagnetnega valovanja na meji dveh izotropnih dielektrikov. Levo: transverzalno električno (TE) valovanje. Desno: transverzalno magnetno (TM) valovanje.

Z E_1 označimo amplitudo jakosti električnega polja vpadnega valovanja, z E_2 prepuščenega in z E_3 odbitega. Nato vpeljemo amplitudno prepustnost t in amplitudno odbojnost r, ki pa sta odvisni od vpadne polarizacije. Zapišemo

$$E_{2\mathrm{TE}} = t_{\mathrm{TE}} E_{1\mathrm{TE}} \qquad E_{3\mathrm{TE}} = r_{\mathrm{TE}} E_{1\mathrm{TE}} \tag{1.42}$$

$$E_{2\mathrm{TM}} = t_{\mathrm{TM}} E_{1\mathrm{TM}} \qquad E_{3\mathrm{TM}} = r_{\mathrm{TM}} E_{1\mathrm{TM}}. \tag{1.43}$$

Koeficiente r in t izračunamo iz robnih pogojev (enačbe 1.9–1.12). Enačbe, ki opisujejo odvisnost odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota za različni vpadni polarizaciji, imenujemo Fresnelove enačbe[7]. Za TE polarizacijo velja

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \quad \text{in} \quad t_{\mathrm{TE}} = 1 + r_{\mathrm{TE}} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \tag{1.44}$$

in za TM polarizacijo

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{n_1 \cos \vartheta_2 - n_2 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1} \quad \text{in} \quad t_{\mathrm{TM}} = (1 + r_{\mathrm{TM}}) \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}. \tag{1.45}$$

[7] Francoski fizik in inženir Augustin Jean Fresnel, 1788–1827.

Na splošno sta odbojnost r in prepustnost t kompleksni količini, saj iz lomnega zakona sledi, da je $\cos\vartheta_2 = \sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\vartheta_1}$ lahko kompleksen. Velikost števila $|r|$ tako predstavlja odbojnost, argument $\arg(r)$ pa spremembo faze pri odboju.

Amplitudna odbojnost r in amplitudna prepustnost t povesta, kako se spremeni kompleksna amplituda jakosti električnega polja pri odboju oziroma lomu. Razmerje med gostoto energijskega toka odbite in vpadne svetlobe $\mathscr{R}$ oziroma prepuščene in vpadne svetlobe $\mathscr{T}$ izračunamo kot

$$\mathscr{R} = |r|^2 \qquad \text{in} \qquad \mathscr{T} = 1 - \mathscr{R}. \tag{1.46}$$

Slednja enačba sledi iz ohranitve energije. Na splošno $\mathscr{T}$ ni enak $|t|^2$, saj energijski tok potuje po različnih snoveh in v različnih smereh. Velja zveza

$$\mathscr{T} = \frac{n_2\cos\vartheta_2}{n_1\cos\vartheta_1}|t|^2. \tag{1.47}$$

Najpreprostejši primer je pravokotni vpad svetlobe na mejo dveh sredstev. Zaradi simetrije sta v tem primeru odbojnost in prepustnost neodvisni od polarizacije. Sledi

$$r_{\mathrm{TE}} = r_{\mathrm{TM}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{in} \quad t_{\mathrm{TE}} = t_{\mathrm{TM}} = \frac{4n_1n_2}{n_1+n_2}. \tag{1.48}$$

Ob pravokotnem vpadu iz zraka na steklo ($n_1 = 1$ in $n_2 \approx 1,5$) je tako odbojnost

$$\mathscr{R} = \left(\frac{1-n_2}{1+n_2}\right) \approx 0,04. \tag{1.49}$$

Poglejmo še odvisnost odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota (slika 1.3). Pri tem je pomembno, ali se svetloba lomi v optično gostejše ($n_1 < n_2$) ali v optično redkejše sredstvo ($n_1 > n_2$). Najprej obravnavajmo primer loma v optično gostejšo snov (sliki a in c). Vidimo, da je pri nekem kotu, imenujemo ga Brewstrov kot[8], odbojnost za TM polarizirano valovanje enaka nič. Posledično je ob vpadu pod Brewstrovim kotom odbito valovanje vedno TE polarizirano. Vse TM valovanje je prepuščeno, zato pri Brewstrovem kotu velja $\mathscr{T}_{\mathrm{TM}} = 1$ in $\mathscr{T}_{\mathrm{TE}} < 1$.

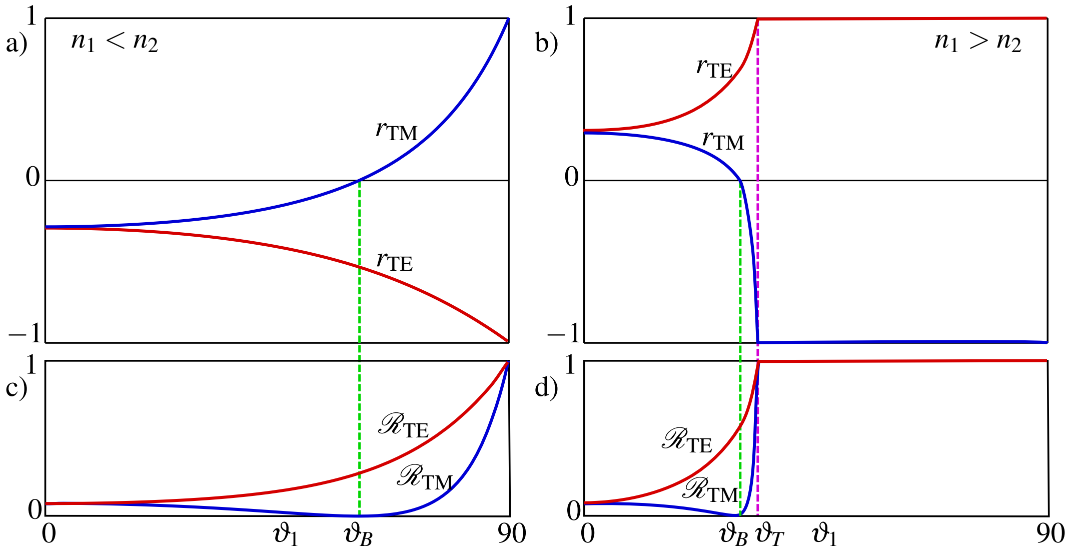
Naloga 1.6.1 Pokaži, da Brewstrov kot izračunamo kot

$$\vartheta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{1.50}$$

Negativen predznak odbojnosti r_{TE} pomeni, da ima odbiti TE polarizirani val pri vpadu na optično gostejše sredstvo nasprotno fazo od vpadnega. Za TM val je faza pri vpadnih kotih, manjših od Brewstrovega, nasprotna, pri večjih vpadnih kotih pa ima odbita svetloba enako fazo kot vpadna.

Pri vpadu na optično redkejše sredstvo (sliki 1.3 b in d) je pomemben še en kot, to je mejni kot totalnega odboja $\vartheta_T = \arcsin(n_2/n_1)$. Pri vpadnih kotih, ki so večji od ϑ_T, se svetloba v celoti odbije in govorimo o totalnem ali popolnem odboju. Kljub temu električna poljska jakost v optično redkejšem sredstvu ni enaka nič, saj se tam pojavi evanescentno polje. To je polje, ki se širi v smeri mejne ravnine, njegova amplituda pa pojema eksponentno z oddaljenostjo od nje. Vdorna globina je odvisna od valovne dolžine valovanja, lomnega količnika snovi in tudi od vpadnega kota. Čeprav se v optično redkejši snovi pojavi električno polje, je Poyntingov vektor v smeri pravokotno na mejno ploskev v povprečju enak nič in zato ne pride do prenosa energije v drugo snov.

[8] Škotski fizik in znanstvenik Sir David Brewster, 1781–1868.



Slika 1.3: Amplitudna odbojnost r za obe vpadni polarizaciji (a, b) in razmerje med gostoto energijskega toka odbite in vpadne svetlobe $\mathscr{R}$ za obe polarizaciji (c, d) v odvisnosti od vpadnega kota. Za primer na slikah (a) in (c) velja $n_1 < n_2$, za primer na slikah (b) in (d) pa $n_1 > n_2$. Z zeleno je označen Brewstrov kot ϑ_B, z vijolično pa mejni kot totalnega odboja ϑ_T.

★ Prozorne ploščice, ki so postavljene pod Brewstrovim kotom glede na smer vpadne svetlobe, imenujemo Brewstrova okna. Njihova značilnost je, da eno polarizacijo (TM) prepustijo v celoti, druge polarizacije (TE) pa se del odbije, del pa prepusti. Brewstrova okna so zelo uporabna pri izdelavi resonatorjev plinskih laserjev, saj so izgube za izbrano polarizacijo zelo majhne, za drugo pa razmeroma velike.

★ Pri prehodu skozi optične elemente se – razen TM polariziranega valovanja pri Brewstrovem kotu – vedno nekaj svetlobe odbije. Da zmanjšamo te izgube, optične elemente navadno prekrijemo z antirefleksno plastjo, to je nanosom ene ali več primerno debelih plasti dielektrikov z ustreznimi lomnimi količniki. Zaradi destruktivne interference valovanj, odbitih na posameznih plasteh, se količina odbite svetlobe z izbrano valovno dolžino občutno zmanjša. Ker so laserji koherentni izvori svetlobe s točno določeno valovno dolžino, za zmanjšanje izgub, na primer v resonatorju laserja, uporabljamo optične elemente (leče, kristale, modulatorje ...) z ustrezno antirefleksno plastjo.

1.7 Uklon svetlobe

Kadar svetloba vpade na oviro, za oviro nastane senca. Nastala senca ni ostra, ampak ima zaradi uklona zabrisane robove. Obravnave uklona svetlobe na odprtinah ali zaslonkah se lotimo z uporabo skalarnega približka teorije elektromagnetnega polja. To pomeni, da vpliva polarizacije ne upoštevamo. Ta je pomemben zgolj pri zelo majhnih odprtinah, kjer je velikost odprtine a po velikosti podobna valovni dolžini svetlobe $a \sim \lambda$. Vendar so tudi v tem primeru uklonske slike za različne polarizacije podobne, razlikujejo pa se po jakosti uklonjene svetlobe.

★ Primer, kjer skalarni približek ne da pravih rezultatov, je uklon na mrežici, narejeni iz zelo tankih prevodnih žic. Takšna mrežica deluje kot polarizator za vpadno elektromagnetno valovanje. Elektromagnetni val s polarizacijo, ki je vzporedna žicam, pri prečkanju v žicah inducira tok in val se delno odbije in delno absorbira. Za valovanje, ki je polarizirano pravokotno na žice, je inducirani tok bistveno manjši, saj je tok omejen na smer vzdolž žice. Posledično je val, polariziran pravokotno na žice, prepuščen, val, polariziran vzporedno z žicami, pa ne. Takšni polarizatorji se večinoma uporabljajo v mikrovalovni tehniki, vendar se v zadnjih letih z razvojem in izboljšavo litografskih postopkov vse pogosteje uporabljajo tudi v bližnjem infrardečem delu svetlobe.

Pri velikostih odprtin $a \gg \lambda$ torej uporabimo skalarno obliko valovne enačbe (enačba 1.13)

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{1.51}$$

Časovna odvisnost polja E je harmonična funkcija in je sorazmerna z $e^{-i\omega t}$. Z uporabo Greenovega izreka jakost polja E_P v točki prostora P izrazimo s poljem na poljubni ploskvi, ki to točko obkroža. Zvezo opisuje Kirchhoffov integral[9]

$$E_P = -\frac{1}{4\pi}\oint\left(E\,\mathbf{n}\cdot\nabla\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{n}\cdot\nabla E\right)dS, \tag{1.52}$$

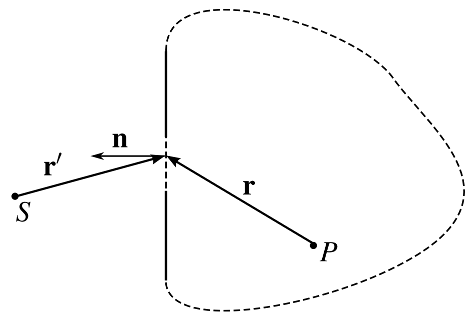
kjer je $\mathbf{n}$ normala na ploskev, po kateri teče integral, r pa oddaljenost od P do dela ploskve dS.

Naj svetloba iz točkastega izvora v točki S (slika 1.4) vpada na zaslon z odprtino poljubne oblike. Izračunajmo skalarno polje v točki P na drugi strani zaslona. Vpadno svetlobo zapišemo kot

$$E = A\frac{e^{ikr'}}{r'}, \tag{1.53}$$

kjer je r' razdalja od izvora do točke na zaslonu, A pa zaradi ohranitve energije konstanta.

Integracijska ploskev je lahko poljubna sklenjena ploskev, ki objema točko P. Izberemo ploskev, ki zajema odprtino na zaslonu, poleg tega pa naredimo še dva približka: jakost polja E in njen gradient doprineseta k integralu le na odprtini, na preostanku ploskve pa sta njuna prispevka zanemarljivo majhna; vrednost E in njen gradient sta na odprtini takšna, kot da zaslona ne bi bilo. Približka sta precej groba, vendar se izkaže, da se kljub temu dobro ujemata z eksperimentalno uklonsko sliko, s čimer upravičimo njuno uporabo.



Slika 1.4: Integracijska ploskev v Kirchhoffovem integralu zajema odprtino in objema točko P.

Kirchhoffov integral za točkast izvor svetlobe se zapiše kot integral po odprtini

$$E_P = -\frac{ikAe^{-i\omega t}}{4\pi}\int\frac{e^{ik(r+r')}}{rr'}\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}')\right)dS. \tag{1.54}$$

Imenujemo ga Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral.

Naloga 1.7.1 Uporabi Kirchhoffov integral (enačba 1.52) in pokaži, da za primer krožnega vpadnega vala (enačba 1.53) polje v točki P zapišemo s Fresnel-Kirchhoffovim integralom (enačba 1.54). Pri tem privzemi, da je oddaljenost točke P od odprtine $r \gg \lambda$.

[9]Nemški fizik Gustav Robert Kirchhoff, 1824–1887.

Oglejmo si poseben primer, ko leži točkast izvor svetlobe na osi okrogle odprtine. Polje v točki P izračunamo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi}\int E_S \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1\right)dS, \tag{1.55}$$

pri čemer E_S predstavlja kompleksno amplitudo vpadnega polja v odprtini

$$E_S = A\frac{e^{ikr'}}{r'}. \tag{1.56}$$

Zgornja oblika Fresnel-Kirchhoffovega integrala ni pravzaprav nič drugega kot matematičen zapis Huygensovega načela[10]. Spomnimo se, da Huygensovo načelo pravi, da lahko vsako točko valovne fronte obravnavamo kot izvor novega krogelnega vala. Točno to je zapisano tudi v gornjem integralu. Vpadni val E_S v vsakem od elementov odprtine dS vzbudi krogelno valovanje s kompleksno amplitudo

$$E = A_0\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{1.57}$$

polje v izbrani točki P pa je vsota prispevkov posameznih krogelnih valovanj. Za razliko od osnovnega Huygensovega načela, v Fresnel-Kirchhoffovem integralu (enačba 1.55) nastopa še faktor $(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1)$, ki poskrbi, da ni valovanja v smeri nazaj proti izvoru. Tudi faktor $-i$ manjka v osnovnem Huygensovem načelu, pomeni pa, da je uklonjeno valovanje fazno zakasnjeno za $\pi/2$ glede na osnovno valovanje E_S.

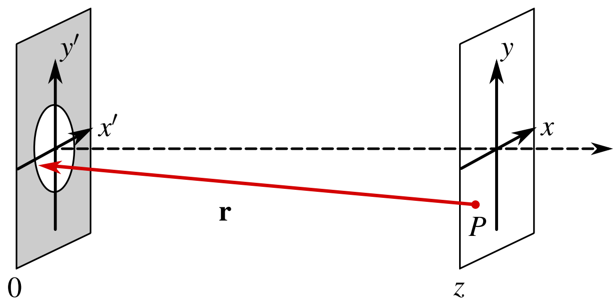
Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral uporabno razširimo z dodatkom prepustnostne funkcije odprtine T. Z njo na splošno popišemo amplitudne in fazne spremembe, do katerih pride na raznih odprtinah, lečah, uklonskih mrežicah ... Razširjen uklonski integral zapišemo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi}\int T(r')E_S(r')\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1\right)dS, \tag{1.58}$$

pri čemer smo upoštevali tudi splošno obliko vpadnega vala $E_S(r')$.

Fraunhoferjev in Fresnelov približek

Izračun Fresnel-Kirchhoffovega uklonskega integrala (enačba 1.54) je na splošno zelo zapleten, zato se pogosto poslužujemo dveh približkov: Fraunhoferjevega[11] in Fresnelovega.



Slika 1.5: K izračunu Fraunhoferjevega in Fresnelovega uklona

[10] Nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens, 1629–1695.
[11] Nemški fizik Joseph von Fraunhofer, 1787–1826.

Izhajamo iz Fresnel-Kirchhoffovega integrala za točkast izvor (enačba 1.54) in zapišemo lego točke P s koordinatami x, y in z, razdaljo r pa s koordinatami točke P in koordinatama na zaslonu x' in y' (slika 1.5). Privzamemo, da je oddaljenost zaslona z bistveno večja od prečnih dimenzij x in y. Zapišemo razdaljo r in jo razvijemo

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \approx z + \frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z}. \tag{1.59}$$

Vstavimo razvoj v uklonski integral (enačba 1.55), pri čemer r v imenovalcu nadomestimo kar z z. Pridemo do Fresnelovega uklonskega približka

$$E_P(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \int\int E_S\, e^{ik((x-x')^2+(y-y')^2)/2z} dx'dy'. \tag{1.60}$$

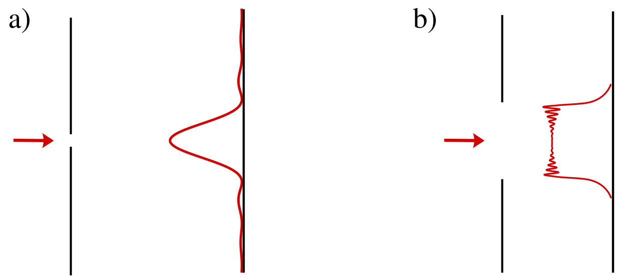
Kadar je oddaljenost zaslona dovolj velika oziroma so prečne dimenzije dovolj majhne, da zadošča razvoj do linearnih členov, govorimo o Fraunhoferjevem uklonu in uklonski integral je

$$E_P(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ik(z+(x^2+y^2)/2z)} \int\int E_S\, e^{-ik(xx'+yy')/z} dx'dy'. \tag{1.61}$$

V njem prepoznamo Fourierevo transformacijo polja E_S. Fraunhoferjeva uklonska slika velja za razmeroma velike oddaljenosti zaslona od uklonske odprtine, ko lahko uklonjeni val dovolj dobro opišemo z ravnim valom. Bolj zapleteno Fresnelovo uklonsko sliko moramo uporabiti, kadar obravnavamo primer bližnjega polja. Mejo med Fraunhoferjevim in Fresnelovim režimom kvalitativno določa Fresnelovo število

$$F = \frac{a^2}{L\lambda}. \tag{1.62}$$

Pri tem je a karakteristična dimenzija odprtine, L tipična oddaljenost zaslona od odprtine ter λ valovna dolžina svetlobe. V grobem velja, da lahko Fraunhoferjev približek uporabimo, kadar je $F < 1$ in je odstopanje faze od ravnega vala znotraj odprtine majhno. Sicer moramo uklon obravnavati v Fresnelovem približku ali celo v polni obliki.



Slika 1.6: Značilna uklonska slika odprtine v Fraunhoferjevem (a) in Fresnelovem režimu (b)

Naloga 1.7.2 Pokaži, da je v Fraunhoferjevi uklonski sliki uklon na okrogli odprtini podan z

$$I_P = I_0 \frac{4J_1(ka\rho/z)}{ka\rho/z}, \tag{1.63}$$

kjer je a polmer odprtine, $J_1(x)$ je Besslova funkcija in $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh

Do zdaj smo obravnavali elektromagnetno valovanje v izotropnih snoveh, v katerih je dielektričnost skalar in hitrost valovanja neodvisna od smeri. Na splošno so snovi anizotropne, dielektričnost je tenzor, hitrost potovanja svetlobe skozi snov pa je odvisna od smeri širjenja in od polarizacije valovanja.

Gostoto električnega polja v anizotropni snovi zapišemo kot

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \mathbf{E}, \tag{1.64}$$

kjer je $\underline{\varepsilon}$ tenzor drugega ranga in ima na splošno devet komponent.

V dielektričnih snoveh, v katerih ne pride do optične aktivnosti ali absorpcije, je tenzor realen in simetričen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$. Tak tenzor lahko vedno diagonaliziramo, torej poiščemo koordinatni sistem, v katerem je diagonalen. V takem koordinatnem sistemu velja

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \mathbf{E} \tag{1.65}$$

in

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1, \\ D_2 &= \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2, \\ D_3 &= \varepsilon_0 \varepsilon_3 E_3. \end{aligned} \tag{1.66}$$

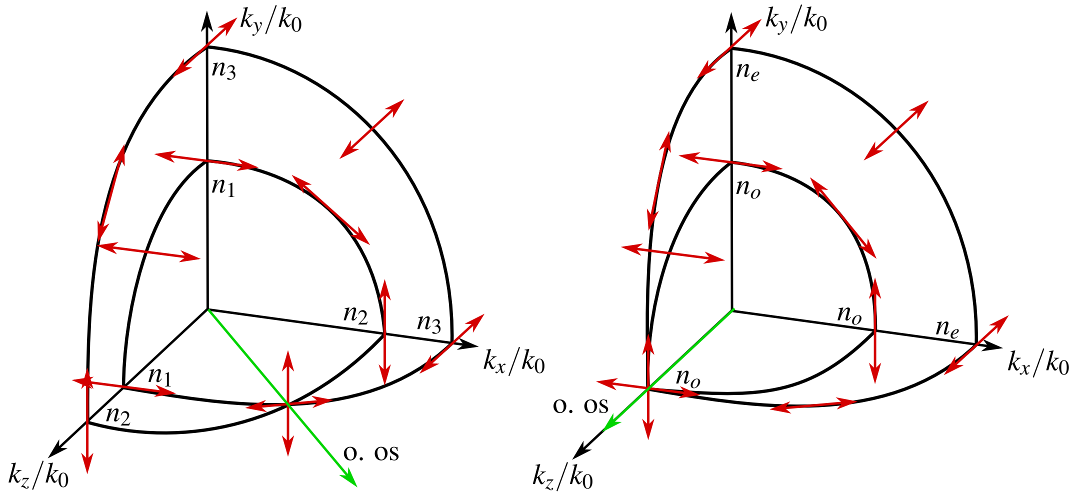
Glavne osi novega koordinatnega sistema določajo smeri, vzdolž katerih sta jakost in gostota električnega polja vzporedni, iz lastnih vrednosti pa izračunamo tri lomni količnike $n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$. Snovi, za katere so vse tri vrednosti n_i različne, imenujemo optično dvoosne snovi, medtem ko sta v optično enoosnih snoveh dve lastni vrednosti enaki $n_1 = n_2$. Če so enake vse tri lastne vrednosti, je snov izotropna.

Ploskev valovnega vektorja

V anizotropnih snoveh je lomni količnik odvisen od smeri širjenja svetlobe in izkaže se, da tudi od njene polarizacije. Poglejmo najprej preprost primer, ko se svetloba širi vzdolž lastne osi, naj bo to os z. Če je vpadno valovanje polarizirano vzdolž lastne osi x, se pri prehodu skozi kristal polarizacija valovanja ohrani, lomni količnik za tak val je n_1. Podobno velja za val, polariziran v smeri y, za katerega je lomni količnik enak n_2. Če polarizacija valovanja, ki se širi vzdolž lastne osi z, ne sovpada z lastnima osema x ali y, nastane po prehodu skozi kristal iz vpadnega linearno polariziranega valovanja na splošno eliptično valovanje. Lastni komponenti namreč potujeta različno hitro, zato pride med njima do faznega zamika.

Za poljubno smer širjenja valovanja in poljubno polarizacijo je račun razmeroma zapleten. Formalen pristop izhaja iz valovne enačbe (enačba 1.13), v kateri moramo upoštevati tudi električno polarizacijo $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\underline{\varepsilon} - I)\mathbf{E}$. Iz nje sledi sistem enačb za komponente valovnega vektorja in električne poljske jakosti.

Rešitev tega sistema najbolj nazorno predstavimo s ploskvijo valovnega vektorja, ki je sklenjena dvolistna ploskev (slika 1.7). Dvolistnost ploskve vodi pri vsakem valovnem vektorju **k** do dveh rešitev in dveh različnih lomnih količnikov, od katerih vsak ustreza eni od ortogonalnih polarizacij. Točke, v katerih se ploskev dotika sama sebe in sta lomna količnika za obe polarizaciji enaka, določajo smeri optičnih osi.



Slika 1.7: Dvolistna ploskev valovnega vektorja, pri čemer zaradi nazornosti rišemo le presečišča ploskve z geometrijskimi ravninami v prvem oktantu. V dvoosnem kristalu (levo) sta dve optični osi. Druga os ni narisana, leži pa simetrično glede na os z. Privzeli smo, da velja $n_1 < n_2 < n_3$. V optično enoosnem kristalu (desno) je le ena optična os, po dogovoru je to os z. Rdeče puščice označujejo ustrezno polarizacijo.

Optično enoosni kristali

V optično enoosnih kristalih sta dve lastni vrednosti enaki. Lastne vrednosti izberemo tako, da velja $n_1 = n_2 \neq n_3$. Navadno vpeljemo nove oznake: $n_1 = n_2 = n_o = n_\perp$, ki ga imenujemo redni (*ordinary*) lomni količnik, in $n_3 = n_e = n_\parallel$, ki je izredni (*extraordinary*) lomni količnik. V eni smeri sta lomna količnika za obe polarizaciji enaka in tisti smeri pravimo optična os. Po dogovoru je to os z. Hitrost valovanja, ki se širi vzdolž optične osi, je tako neodvisna od njegove polarizacije. Ker je optična os samo ena, imenujemo kristal optično enoosen.

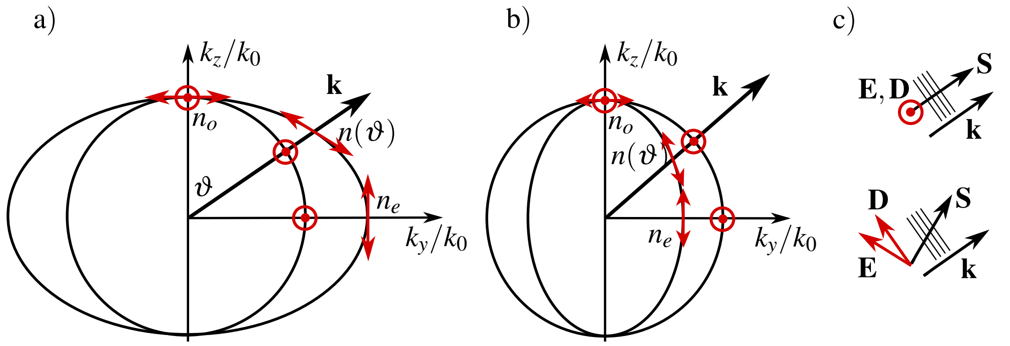
Za lažjo predstavo si oglejmo ploskev valovnega vektorja (slika 1.7, desno). V tem primeru ni treba obravnavati celotne ploskve, ampak zaradi rotacijske simetrije zadošča, da narišemo presek ploskve valovnega vektorja z vpadno ravnino, ki jo določata optična os in valovni vektor **k**. Pomemben je le kot ϑ med valovnim vektorjem **k** in optično osjo z, zato si lahko drugo koordinatno os poljubno izberemo. Tukaj izberemo os y (slika 1.8).

Za vsako smer valovnega vektorja, torej za vsak kot ϑ, obstajata dve rešitvi, ki pripadata dvema lastnima polarizacijama z ustreznima lomnima količnikoma. Lomni količnik za žarek, ki je polariziran pravokotno na vpadno ravnino, je neodvisen od ϑ. To je redni žarek, njegov lomni količnik pa je vedno n_o, ne glede na vpadni kot. Na skici temu žarku ustreza krožnica.

Žarek, katerega polarizacija leži v vpadni ravnini, je izredni žarek. Pripadajoč lomni količnik je odvisen od kota ϑ in ga izračunamo iz sledeče enačbe elipse s polosema n_o in n_e:

$$\frac{1}{n^2(\vartheta)} = \frac{\cos^2\vartheta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{n_e^2}. \tag{1.67}$$

Navadno sta pri ravnem valu vektorja **E** in **D** vzporedna, prav tako **k** in **S**. Žarek se širi v smeri valovnega vektorja, valovne fronte pa so pravokotne nanj. To velja tudi za redni žarek v anizotropnih snoveh. Izredni žarek pa ima, kot že ime nakazuje, "izredne" lastnosti. Vektorja **E** in **D** nista vzporedna, zato tudi valovni vektor **k** ni vzporeden energijskemu toku oziroma Poyntingovemu vektorju **S** (slika 1.8 c). Smer energijskega toka, ki ni enaka smeri valovnega vektorja, določimo z normalo na elipso pri kotu ϑ.



Slika 1.8: V optično enoosnih kristalih je lomni količnik odvisen od smeri valovnega vektorja **k** in polarizacije. Poznamo pozitivno anizotropne snovi, pri katerih je $n_e > n_o$ (a) in negativno anizotropne snovi, kjer velja $n_e < n_o$ (b). V obeh primerih je redni žarek polariziran pravokotno na vpadno ravnino. Zanj velja, da je $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ in $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$ (c, zgoraj). Polarizacija izrednega žarka leži v vpadni ravnini. Smer **S** ni vzporedna z valovnim vektorjem **k**, prav tako valovne fronte niso pravokotne nanjo (c, spodaj). Primer je narisan za pozitivno anizotropno snov.

Dvojni lom

Ko vpade žarek na snov, se lomi. Hitrost valovanja – in s tem tudi kot, pod katerim se lomi – je v anizotropnih snoveh odvisna od polarizacije. Pri zapisu lomnega zakona (enačba 1.41) v anizotropnih snoveh moramo biti zato pazljivi. Na splošno se pojavita dva lomljena žarka z različnima polarizacijama, kar da ime pojavu: dvolomnost (slika 1.9).

Za redni val s TE polarizacijo (pravokotno na vpadno ravnino) velja navadni lomni zakon, pri čemer je lomni količnik snovi enak rednemu lomnemu količniku n_o

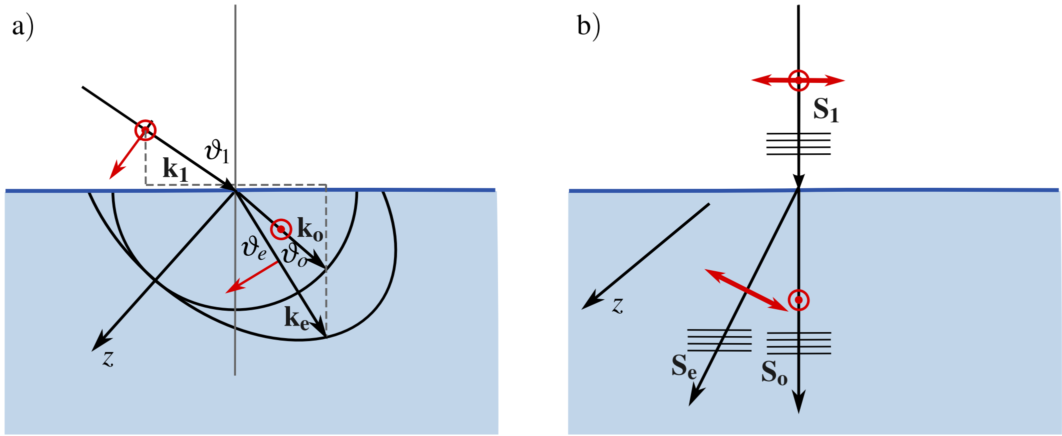
$$\sin\vartheta_1 = n_o \sin\vartheta_o. \tag{1.68}$$

Pri zapisu smo privzeli, da je lomni količnik snovi, iz katere valovanje prehaja v anizotropno snov, enak 1. Za izredni val s TM polarizacijo (električna poljska jakost leži v vpadni ravnini) prav tako zapišemo lomni zakon

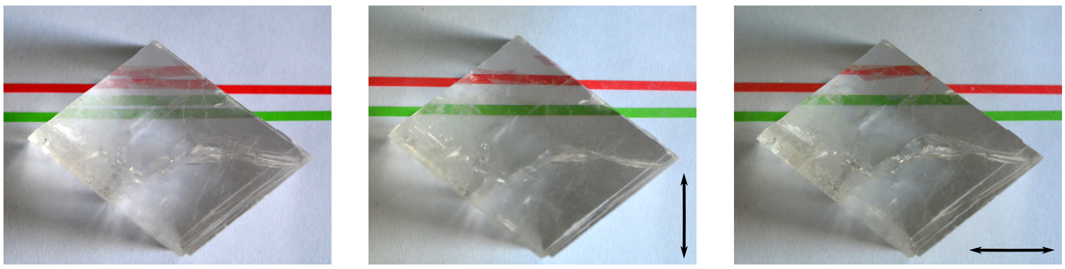
$$\sin\vartheta_1 = n(\vartheta_e)\sin\vartheta_e, \tag{1.69}$$

le da je lomni količnik $n(\vartheta_e)$ odvisen od smeri širjenja valovanja in je določen z enačbo elipse (enačba 1.67).

Kadar vpada valovanje pravokotno na izotropno snov, se žarek ne lomi. V dvolomnih snoveh pa lahko tudi pri pravokotnem vpadu pride do razklona svetlobe (slika 1.9 b). Kadar je optična os nagnjena glede na vpadnico, sta valovna vektorja obeh prepuščenih žarkov sicer vzporedna valovnemu vektorju vpadnega žarka ($\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_o \parallel \mathbf{k}_e$), razlikujeta pa se smeri Poyntingovih vektorjev ($\mathbf{S}_1 \parallel \mathbf{S}_o \nparallel \mathbf{S}_e$). Ob prehodu skozi plast anizotropne snovi tako svetloba potuje v dveh smereh in nastaneta dve sliki z medsebojno pravokotnima polarizacijama (slika 1.10) .



Slika 1.9: Dvojni lom. Pri poševnem vpadu na anizotropno snov se valovanje loči na dva različno polarizirana žarka (a). Če je optična os usmerjena pod poljubnim kotom glede na normalo mejne ravnine, pride do razklona svetlobe tudi pri pravokotnem vpadu. Valovna vektorja sta tudi v tem primeru kolinearna, Poyntingova vektorja pa imata različne smeri (b).



Slika 1.10: Dvojni lom v kristalu kalcita (islandski dvolomec). Po prehodu skozi kristal nastaneta dve razmaknjeni sliki in z linearnim polarizatorjem pokažemo, da imata sliki različni polarizaciji.

Snov	n_o	n_e
$CaCO_3$ (kalcit)	1,6557	1,4849
$BaTiO_3$	2,4042	2,3605
$LiNbO_3$	2,2864	2,2022
KH_2PO_4 (KDP)	1,5074	1,4669
tekoči kristal 5CB (25 °C)	1,5319	1,7060
telur ($\lambda = 10$ µm)	4,7969	6,2455

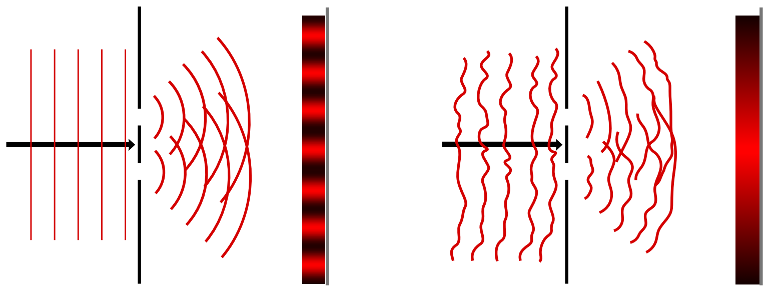
Tabela 1.1: Redni in izredni lomni količniki za nekaj izbranih optično enoosnih kristalov. Razen v primeru telurja veljajo vrednosti za svetlobo z valovno dolžino 633 nm.

2. Koherenca

V tem poglavju bomo spoznali koherenco. To je lastnost valovanja, ki je tesno povezana s pojavom interference. Ohlapno pravimo, da je koherentno tisto valovanje, s katerim se posrečijo interferenčni poskusi.

2.1 Youngov poskus

Interferenčnih pojavov ni mogoče opazovati z vsakim svetlobnim izvorom. Da bi to razumeli, si oglejmo interferenco valovanja, ki vpada na dve ozki reži (tako imenovani Youngov poskus[1]). Navadno predpostavimo, da sta obe reži osvetljeni z istim ravnim valom. Delni valovanji, ki izhajata iz rež, imata tako ves čas poskusa enako polarizacijo, enako frekvenco in enako fazo. Zaradi različnih dolžin poti obeh delnih valovanj od reže do dane točke na zaslonu nastane na oddaljenem zaslonu interferenčni vzorec (slika 2.1). Vendar se interferenca pojavi le v primeru, ko je faza valovanja, ki vpada na reži, konstantna. Svetloba s konstantno fazo je koherentna in nastane, na primer, v kvalitetnem laserju. Svetloba iz običajnih svetil ima spremenljivo fazo in zato ne da interferenčnega vzorca. Zanjo pravimo, da ni koherentna.



Slika 2.1: Youngov poskus na dveh režah. Le če je vpadno valovanje koherentno (levo), se pojavi na zaslonu interferenčni vzorec. Nekoherentno valovanje s spremenljivo fazo (desno) ne da interferenčnega vzorca.

Svetloba navadnih svetil, na primer plinskih razelektritvenih cevi, je zaradi vrste nastanka kaotične narave. Atomi sevajo neodvisno, zato se faza izsevanega valovanja spreminja. Približno konstantna je le znotraj nekega karakterističnega časa. Če je pri interferenčnem poskusu karakteristični čas spreminjanja faze krajši od zakasnitve med valovanjema zaradi različno dolgih poti, pride na danem mestu zaslona izmenično do konstruktivne in destruktivne interference. Čas spreminjanja je praviloma bistveno krajši od časa opazovanja, zato utripanja ne vidimo in zaznamo povprečno razmazano sliko. Interferenčni poskus se ne posreči zaradi majhne časovne koherence, karakterističnemu času spreminjanja faze pa rečemo koherenčni čas t_c. Časovno koherenco bomo natančneje obravnavali v razdelku (2.3), zaenkrat povejmo le, da je časovna koherenca vezana na fazno razliko med točkami, ki ležijo vzdolž smeri širjenja valovanja.

[1] Angleški znanstvenik Thomas Young, 1773–1829.

Poleg časovne koherence na interferenčno sliko pomembno vpliva tudi prostorska koherenca, ki je posledica končne dimenzije svetila. Svetloba, ki na reži vpada iz različnih delov svetila, ima namreč različno fazo zaradi razlike v dolžini poti od svetila do rež. Ta faza se prišteje fazni razliki zaradi različno dolgih poti od rež do zaslona, zato se interferenčne proge na zaslonu nekoliko premaknejo. Če je fazna razlika žarkov iz različnih delov svetila večja od fazne razlike za režami, se celotna interferenčna slika na zaslonu izpovpreči. Interferenca se pri Youngovem poskusu pojavi, kadar sta reži razmaknjeni le toliko, da je povprečna fazna razlika manjša od 2π. Največjemu prečnemu razmiku, ki še da interferenco, rečemo prečna koherenčna razdalja d_c. Prostorska koherenca, ki jo bomo podrobneje spoznali v razdelku (2.5), je torej vezana na fazno razliko med točkami, ki ležijo prečno na smer širjenja valovanja.

Poudarimo še enkrat, da je pojem koherence statističen. Če je koherenčni čas t_c dolg v primerjavi s časom opazovanja, se seštevajo amplitude valovanj in pojavi se interferenčna slika. Ta se slučajno spreminja z značilnim časom t_c. Če pa so razlike poti večje od ct_c ali razmik rež večji od d_c, gledamo le povprečno sliko in interferenčne proge izginejo.

2.2 Koherenca navadnih svetil

Obravnavajmo plinsko razelektritveno cev in z ustreznim filtrom izberimo eno samo spektralno črto. Ta črta naj ima osrednjo frekvenco ν_0 in končno frekvenčno širino $\Delta\nu$. Privzemimo, da je glavni prispevek k razširitvi spektralne črte posledica medatomskih trkov.

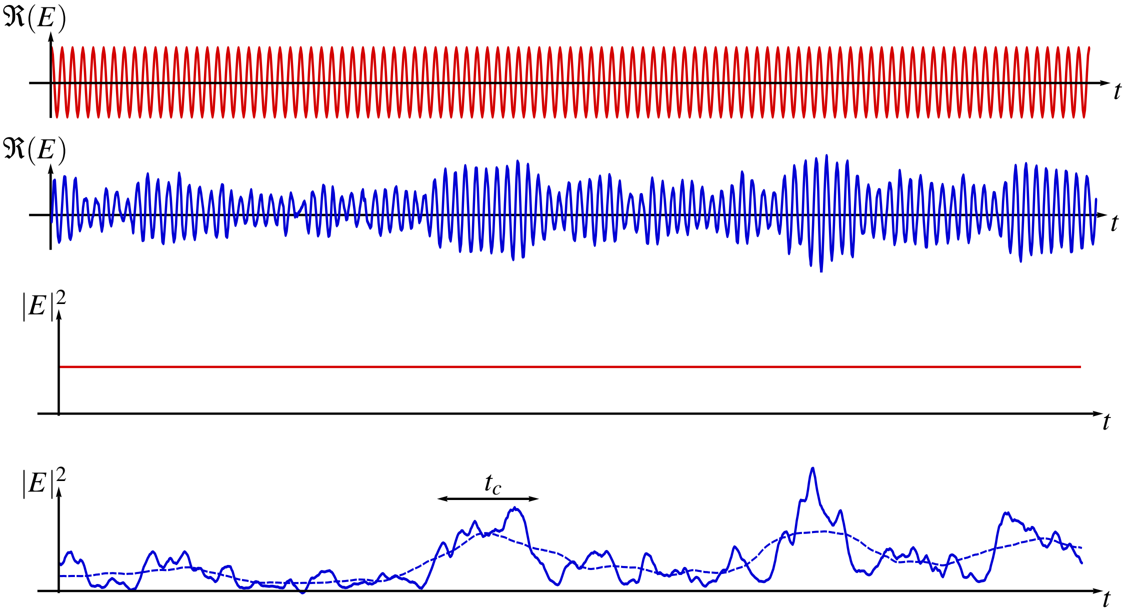
Celotna izsevana svetloba je vsota delnih valov, ki izhajajo iz posameznih atomov in so med seboj neodvisni. Vsak delni val ohranja konstantno fazo med dvema trkoma, to je v intervalu dolžine t_c. Valovni paket dolžine t_c tako vsebuje frekvence v pasu $\Delta\nu$, za katerega velja $t_c\Delta\nu \sim 1$. Koherenčni čas je torej kar reda velikosti obratne vrednosti spektralne širine svetlobe. Povsem monokromatsko valovanje bil imelo neskončen koherenčni čas in bi bilo popolno koherentno.

Zapišimo še izsevano polje takega svetila. Jakost električnega polja v izbrani točki prostora je vsota delnih valov, ki izvirajo iz raznih delov izvora. Vsak atom v izvoru, naj jih bo N, seva neodvisno, zato so tudi delna valovanja med seboj neodvisna. Posamična valovanja ohranjajo konstantno fazo v času med dvema trkoma atoma t_c. Zaradi enostavnosti privzemimo, da so amplitude E_1 in polarizacije izsevanih polj posameznih atomov enake. Električno poljsko jakost E v izbrani točki prostora potem zapišemo kot vsoto posameznih prispevkov

$$E = E_1 \sum_{n=1}^{N} e^{i\phi_n(t)}. \tag{2.1}$$

kjer se faza polja $\phi_n(t)$, ki ga izseva posamezni atom, naključno spremeni ob trku z drugim atomom. Povprečje vsote polj je nič, povprečni kvadrat skupnega polja, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka, pa je NE_1^2. Zaradi slučajnosti faz je slučajna tudi faza celotnega polja in se gotovo povsem spremeni v času, ko se spremeni faza posameznih prispevkov, to je t_c. S tako svetlobo bomo videli interferenco na režah, če bo razlika poti delnih valovanj manjša od ct_c.

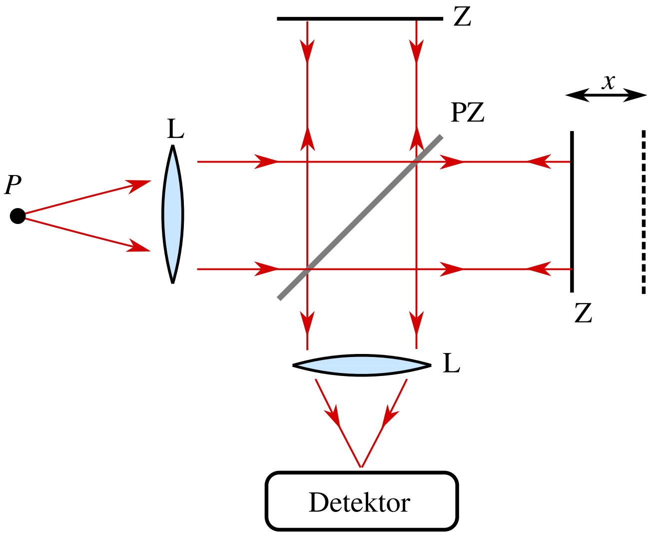
Oglejmo si izračun na primeru. Imejmo $N = 100$ neodvisnih atomov, ki se jim faza naključno spreminja s karakterističnim časom $t_c = 10/\nu$, kjer je ν frekvenca valovanja. Na sliki (2.2) sta prikazana časovna poteka amplitude E (enačba 2.1) in $|E|^2$. Za primerjavo je prikazan tudi ravni val $E = \sqrt{N}E_1 e^{-i\omega t}$ s konstantno fazo in pripadajoč $|E|^2$, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka. Ta je v primeru ravnega vala konstantna, medtem ko je povprečna gostota svetlobnega toka iz navadnega svetila približno konstantna le znotraj t_c.



Slika 2.2: Zgoraj: shematski prikaz električne poljske jakosti ravnega vala s konstantno fazo (rdeča črta) in električne poljske jakosti navadnega svetila (modra črta) kot funkcije časa. Spodaj: pripadajoča vrednost $|E|^2$ v primeru ravnega vala (rdeča črta) in v primeru svetlobe iz navadnega svetila (modra črta) kot funkcija časa. Modra črtkana črta je povprečna vrednost $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t+t')E^*(t+t')dt'$ s časom integracije $T = t_c$.

2.3 Časovna koherenca

Časovno koherenco je najpreprosteje obravnavati z Michelsonovim interferometrom[2], ki je prikazan na sliki (2.3).



Slika 2.3: Michelsonov interferometer. Svetlobo iz izvora P usmerimo preko kolimacijske leče (L) na polprepustno zrcalo (PZ), s čimer jo razdelimo na dva snopa. S premikanjem enega zrcala (Z) spreminjamo zakasnitev enega delnega snopa. Interferenco opazujemo na detektorju.

[2] Ameriški fizik in nobelovec Albert Abraham Michelson, 1852–1931.

Valovanje iz točke P na polprepustnem zrcalu razdelimo na dva delna snopa, nato enega s premikanjem zrcala zakasnimo za $\tau = 2x/c$. Dokler je zakasnitev τ manjša od koherenčnega časa t_c, snopa med seboj interferirata. S spreminjanjem lege zrcala se tako na detektorju izmenično pojavijo ojačitve in oslabitve. Pri zakasnitvah, ki so večje od koherenčnega časa, ni stalne fazne povezave in interferenčna slika se izpovpreči.

★ S kolimacijsko lečo dosežemo, da je čim več žarkov, ki izhajajo iz P, vzporednih z osjo interferometra. V eksperimentih snop svetlobe ni nikoli povsem vzporeden in dolžine poti posameznih žarkov se med seboj malo razlikujejo. Na detektorju tako za $\tau < t_c$ nastanejo jasno vidni interferenčni krogi. Pri večjih vrednostih τ se kontrast interferenčnih prog zmanjšuje in pri zakasnitvah, ki so daljše od koherenčnega časa, se slika povsem zabriše.

Zapišimo ugotovitev še matematično. Gostota svetlobnega toka na detektorju je sorazmerna s kvadratom električne poljske jakosti obeh delnih valovanj

$$|E_d(t)|^2 = |E(t)+E(t+\tau)|^2 = |E(t)|^2 + |E(t+\tau)|^2 + 2\Re\left(E(t)E^*(t+\tau)\right). \tag{2.2}$$

Zakasnitev τ je določena s premikom pomičnega zrcala $\tau = 2x/c$. Navadno opazujemo v času T, ki je dolg v primerjavi s koherenčnim časom svetlobe, zato izraz povprečimo po času

$$\begin{aligned}\langle |E_d(t)|^2\rangle &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |E_d(t)|^2\,dt \\ &= 2\langle |E(t)|^2\rangle + 2\Re\langle E(t)E^*(t+\tau)\rangle = 2\langle |E(t)|^2\rangle + 2\Re G(\tau).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Prvi člen je vsota povprečnih prispevkov obeh delnih snopov. Privzeli smo, da je polje v povprečju stacionarno in je zato povprečje neodvisno od izbire časovnega intervala. Drugi člen opisuje interferenco. Za opis smo vpeljali časovno avtokorelacijsko funkcijo električnega polja

$$G(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t+\tau)\,dt. \tag{2.4}$$

Za zakasnitve τ, ki so manjše od koherenčnega časa t_c, je avtokorelacijska funkcija različna od nič in na detektorju zaznamo interferenco. Pri zakasnitvah, ki so precej večje od koherenčnega časa t_c, pa sta polji $E(t)$ in $E(t+\tau)$ statistično neodvisni in povprečje produkta je enako produktu povprečij. Ker je $\langle E(t)\rangle = 0$, pri velikih zakasnitvah τ interferenčni člen izgine.

Priročno je vpeljati normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)}. \tag{2.5}$$

Za povsem koherentno valovanje je $|g(\tau)| = 1$, za povsem nekoherentno valovanje je $|g(\tau)| = 0$, za delno koherentna pa $0 < |g(\tau)| < 1$. Praviloma se vrednost $|g(\tau)|$ z naraščajočim τ zmanjšuje, saj postaja valovanje za velike časovne zamike vedno manj korelirano. Ohlapno povedano je koherenčni čas zakasnitev, pri kateri postane vrednost avtokorelacijske funkcije majhna. Koherenčni čas t_c lahko tudi bolj natančno definiramo z normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$t_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2\,d\tau. \tag{2.6}$$

Zakasnitev delnih valov je pogosto posledica različno dolgih optičnih poti, zato namesto koherenčnega časa t_c pogosto uporabljamo koherenčno dolžino $l_c = c\,t_c$.

Naloga 2.3.1 Pokaži, da v navedenih avtokorelacijskih funkcijah $g(\tau)$ spremenljivka t_c ustreza koherenčnemu času, kot je definiran v enačbi (2.6), in izračunaj $|g(t_c)|$ za oba primera.

$$g(\tau) = \begin{cases} \exp\left(i\omega_0\tau - |\tau|/t_c\right), \\ \exp\left(i\omega_0\tau - \pi\tau^2/2t_c^2\right), \end{cases} \tag{2.7}$$

Ob nalogi (2.4.2) in v razdelku (5.8) bomo spoznali, da sta to avtokorelacijski funkciji za svetlobo z Lorentzovim spektrom (razširitev spektralne črte zaradi medatomskih trkov) in Gaussovim spektrom (Dopplerjeva razširitev).

Poglejmo nekaj značilnih vrednosti koherenčnih dolžin. Koherenčna dolžina svetlobe, izsevane iz črnega telesa, je $l_c = ct_c \approx \hbar c/k_BT$ (glej nalogo 2.4.3). Svetloba s Sonca ($T \approx 6000$ K) ima tako koherenčno dolžino zgolj $\sim 0,4$ µm, kar ustreza koherenčnemu času $t_c \sim 1$ fs. Svetloba, izsevana iz LED sijalk, ima koherenčno dolžino $\sim$ 20–100 µm. Živosrebrna svetilka ima za izbrano spektralno črto koherenčno dolžino do okoli 50 cm, kar ustreza koherenčnemu času $t_c \sim 1,6$ ns. Koherenčna dolžina laserjev je tipično okoli 100 m, v nekaterih vlakenskih laserjih pa koherenčna dolžina presega 100 km.

2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom

Spoznali smo, da je monokromatski ravni val povsem koherenten in njegov korelacijski čas neskončen. Obravnavajmo zdaj koherenco poljubnega valovanja, ki je v povprečju stacionarno. To pomeni, da se povprečna gostota svetlobnega toka v času zajemanja, ki traja čas T, ne spreminja. Vzorec valovanja razvijemo v Fourierevo vrsto

$$E(t) = \sum_n A_n(\omega)e^{-in\Delta\omega t}, \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.8}$$

Amplitude $A_n(\omega)$ so slučajne spremenljivke, ki predstavljajo delež polja pri krožni frekvenci $\omega = n\Delta\omega$, čas opazovanja T pa naj bo bistveno daljši od t_c. Zapišimo amplitude A_n

$$A_n(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\,e^{i\omega t}\,dt. \tag{2.9}$$

Kvadrat $|A_n(\omega)|^2$, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka pri krožni frekvenci ω, imenujmo intenziteta valovanja[3]. Potem vpeljemo spekter $S(\omega)$, ki podaja intenziteto svetlobe pri ω, deljeno z intervalom $\Delta\omega$

$$S(\omega) = \frac{|A_n(\omega)|^2}{\Delta\omega} = \frac{T}{2\pi}|A_n(\omega)|^2. \tag{2.10}$$

Vstavimo še amplitudo A_n (enačba 2.9) in dobimo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\int\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t')\,e^{-i\omega(t'-t)}\,dt\,dt'. \tag{2.11}$$

Uvedemo novo spremenljivko $\tau = t' - t$ in zapišemo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}d\tau \int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t+\tau)\,dt. \tag{2.12}$$

[3] Intenziteto valovanja na splošno vpeljemo kot $I = |E|^2$, gostota svetlobnega toka pa je $j = \varepsilon\varepsilon_0 c|E|^2/2$ z enotami W/m^2 (enačba 1.32). Kadar predfaktorji niso pomembni, pogosto uporabljamo krajši izraz.

Integral po t je ravno enak korelacijski funkciji $G(\tau)$ (enačba 2.4). Privzeli smo, da velja $T \gg t_c$, zato je korelacijska funkcija na mejah integracije po τ praktično enaka nič in meje integracije smo lahko raztegnili do neskončnosti. Zveza, ki smo jo dobili, je Wiener-Hinčinov izrek[4]

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega.} \tag{2.13}$$

Spekter svetlobe je torej Fouriereva transformiranka avtokorelacijske funkcije svetlobnega polja. Pri tem ne pozabimo, da je spekter, ki smo ga zapisali z enačbo (2.12), zapisan za izbran vzorec valovanja, ki traja čas T, in je tudi slučajna spremenljivka. Povprečni spekter dobimo tako, da naredimo limito $T \to \infty$.

$$\langle S(\omega)\rangle = \lim_{T\to\infty} S(\omega). \tag{2.14}$$

★ Zaradi priročnosti smo zapisali spekter in Wiener-Hinčinov izrek s krožno frekvenco. Podobno lahko vpeljemo tudi spekter na frekvenčni interval in Wiener-Hinčinov izrek se prepiše v

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}\,d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)e^{i2\pi\nu\tau}\,d\nu. \tag{2.15}$$

Iz Wiener-Hinčinovega izreka (enačba 2.13) neposredno sledi, da je koherenca nekega valovanja tesno povezana z njegovim spektrom. Koherenčni čas t_c je tako povezan s spektralno širino svetlobe γ, za katero velja (glej nalogo 2.4.1)

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{t_c}.} \tag{2.16}$$

Valovanje z dolgim t_c ima tako zelo majhno spektralno širino (ozek spekter), valovanje s kratkim t_c pa ima širok spekter. To je v skladu s primeri, navedenimi na koncu prejšnjega razdelka: svetloba s Sonca ima širok spekter in zelo kratek koherenčni čas, svetloba iz laserjev pa ima praviloma ozko spektralno črto in dolg koherenčni čas. Ugotovimo tudi, da lahko valovanju podaljšamo koherenčni čas z ustreznim spektralnim filtriranjem.

Naloga 2.4.1 Formalno lahko vpeljemo spektralno širino kot

$$\gamma = \frac{1}{2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|s(\omega)|^2\,d\omega}; \quad \text{kjer je} \quad s(\omega) = \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega} = \frac{S(\omega)}{G(0)} \tag{2.17}$$

normirani spekter. Z uporabo enačbe za koherenčni čas t_c (enačba 2.6) pokaži, da je spektralna širina obratno sorazmerna s koherenčnim časom (enačba 2.16) ne glede na obliko spektra.
Namig: Uporabi Parsevalov izrek, ki pravi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega, \tag{2.18}$$

kjer je

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \tag{2.19}$$

Fouriereva transformiranka funkcije $f(t)$.

---

[4] Ameriški matematik Norbert Wiener, 1894–1964, in ruski matematik Aleksander Jakovljevič Hinčin, 1894–1959.

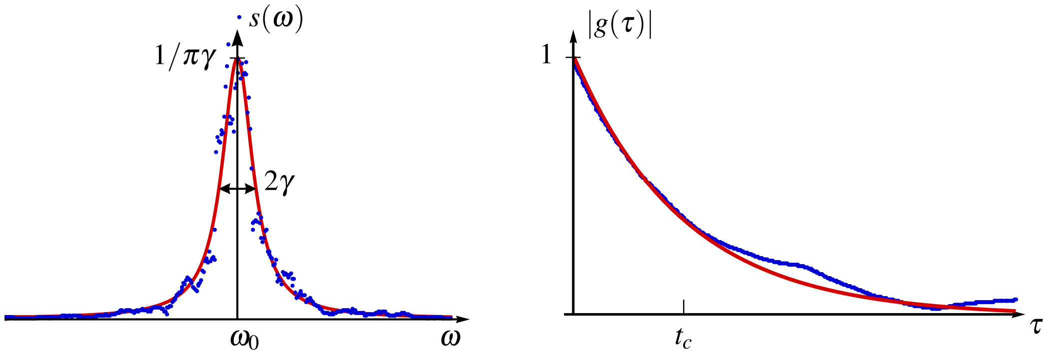
Za zgled Wiener-Hinčinovega izreka vzemimo primer, ki je predstavljen na sliki (2.2). Ker so trki med atomi naključni, je avtokorelacijska funkcija eksponentno pojemajoča

$$g(\tau) = e^{i\omega_0\tau}e^{-\tau/t_c}, \tag{2.20}$$

spekter take svetlobe pa je Lorentzove oblike (glej nalogo 2.4.2)

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}, \tag{2.21}$$

pri čemer je $\gamma = 1/t_c$ spektralna širina. Normirani spekter $s(\omega)$ in ustrezna avtokorelacijska funkcija $g(\tau)$ sta prikazana na sliki (2.4). Točke na grafih predstavljajo spekter in izračunano avtokorelacijsko funkcijo za integracijski čas $T = 100t_c$. Za primerjavo sta z rdečo krivuljo prikazana tudi pričakovani spekter (enačba 2.21) in avtokorelacijska funkcija (enačba 2.20). Zaradi končnega časa T pri izračunu povprečja se spekter iz simulacije nekoliko razlikuje od pričakovanega.



Slika 2.4: Spekter in avtokorelacijska funkcija valovanja s slike (2.2)

Naloga 2.4.2 Imejmo dve vrsti svetlobe. Prva naj ima avtokorelacijsko funkcijo, ki je eksponentno pojemajoča, druga pa ima avtokorelacijsko funkcijo Gaussove oblike (enačbi 2.7). Pokaži, da sta njuna spektra oblike

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \quad \text{in} \quad s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\gamma}\exp\Big(-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\pi\gamma^2}\Big), \tag{2.22}$$

kjer je $\gamma = 1/t_c$ spektralna širina.

Spektralne črte atomov so pogosto Lorentzove oblike, kar je posledica eksponentnega razpada stanj (naravna širina). Dodatno se spektralne črte razširijo zaradi trkov med atomi, vendar tudi to vodi do približno Lorentzove oblike spektra. V plinih je pogosto prevladujoča razširitev črt zaradi Dopplerjevega pojava (glej razdelek 5.8). Spekter Dopplerjevo razširjene svetlobe je, kot bomo videli v nadaljevanju, Gaussove oblike. V tem primeru iz enačbe (2.13) sledi, da je tudi avtokorelacijska funkcija Gaussove oblike.

Naloga 2.4.3 Numerično pokaži, da je koherenčni čas svetlobe, ki jo oddaja črno telo s temperaturo T, približno enak $t_c \approx \hbar/k_B T$. Normirani spekter sevanja črnega telesa zapišemo kot Planckov spekter

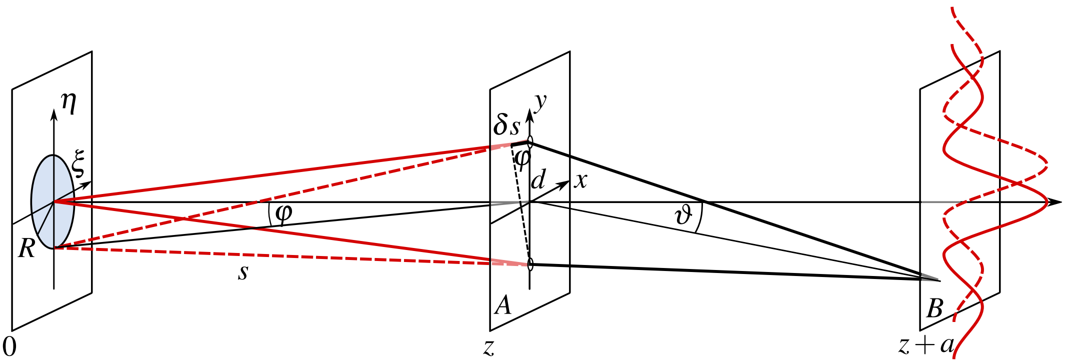
$$s(\omega) = \frac{15}{\pi^4}\frac{\hbar^4\omega^3}{(kT)^4} / \left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right) \quad \text{za } \omega > 0, \text{ sicer } s(\omega) = 0. \tag{2.23}$$

★ V prejšnjem razdelku smo videli, da časovno avtokorelacijsko funkcijo merimo z Michelsonovim interferometrom. Dobljena povezava med merjeno avtokorelacijo in izračunanim spektrom je osnova za Fourierevo spektroskopijo[5], pri kateri določimo absorpcijski ali emisijski spekter snovi iz izmerjene avtokorelacijske funkcije. Tak pristop ima nekatere pomembne prednosti pred drugimi metodami in se danes precej uporablja, posebej v infrardečem delu EM valovanja (tako imenovana metoda FTIR - *Fourier-transform infrared spectroscopy*).

2.5 Prostorska koherenca

Vrnimo se k Youngovemu poskusu in obravnavi interference na dveh ozkih režah. Osvetljujmo zdaj zaslon z dvema odprtinama s svetilom končnih razsežnosti. Svetilo naj sveti skoraj enobarvno svetlobo in naj bo na simetrali med odprtinama, kot kaže slika (2.5).

Žarka, ki izhajata iz sredine svetila (polna rdeča črta), opravita do odprtin v ravnini A enako dolgo pot in povzročita na zaslonu B interferenčne proge. Žarka, ki izhajata iz roba izvora (prekinjena rdeča črta), imata do odprtin različno dolgo pot, zato nastane med njima fazna razlika že do ravnine A, ki se prišteje fazni razliki do ravnine B. Interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, so premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Ker so žarki z roba statistično neodvisni od žarkov iz sredine, z njimi ne interferirajo. Celotni interferenčni vzorec je zato kar vsota interferenčnih vzorcev žarkov iz različnih delov svetila. Če je razlika poti za žarke iz različnih delov velikosti valovne dolžine λ, se celotna interferenčna slika na zaslonu B izpovpreči.



Slika 2.5: Shema interferenčnega eksperimenta z razsežnim svetilom

Razdaljo med odprtinama d_c, pri kateri interferenčne proge izginejo, imenujemo prečna koherenčna razdalja. Zanjo velja približno

$$\delta s = d_c \sin\varphi \approx d_c \frac{R}{z} \sim \lambda \;\Rightarrow\; d_c \sim \frac{z\lambda}{R}. \tag{2.24}$$

[5]Francoski matematik in fizik Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830.

Pogosto je v uporabi pojem koherenčna ploskev, to je območje, v katerem je fazna razlika v povprečju konstantna. Velikost te ploskve je približno d_c^2. V območju koherenčne ploskve so tudi valovne fronte približno gladke. Vsekakor pa moramo paziti, da koherenčne razdalje d_c ne zamenjamo s koherenčno dolžino l_c, ki smo jo vpeljali pri časovni koherenci valovanja.

Zapišimo gornje ugotovitve nekoliko bolj natančno. Na zaslonu B izmerimo povprečno gostoto svetlobnega toka, ki je sorazmerna povprečju kvadrata električne poljske jakosti valovanj, ki izhajata iz obeh odprtin

$$\begin{aligned}\langle |E_d|^2\rangle &= \langle |K_1E_1+K_2E_2|^2\rangle\\ &= |K_1|^2\langle |E_1|^2\rangle + |K_2|^2\langle |E_2|^2\rangle + 2\Re\left(K_1K_2^*\langle E_1(t)E_2^*(t+\tau)\rangle\right).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Pri tem je je $\tau = d\sin\vartheta/c$ zakasnitev valovanja iz druge odprtine glede na valovanje iz prve, faktorja K_1 in K_2 pa sta določena z uklonom na posameznih odprtinah. Interferenčna slika je vsebovana v podobnem členu kot pri Michelsonovem interferometru (enačba 2.3), le da nastopa v tem primeru namesto avtokorelacijske funkcije navzkrižna korelacijska funkcija polj E_1 in E_2 iz obeh.

Kako je interferenčni člen povezan z lastnostmi svetila, brez težav doženemo v izbranem primeru skoraj enobarvne svetlobe z osrednjo krožno frekvenco ω. Tedaj lahko za zakasnitve τ, ki so krajše od koherenčnega časa, zapišemo

$$E_2(\tau) = E_2(0)\,e^{-i\omega\tau} \tag{2.26}$$

in

$$\langle E_1(t)E_2^*(t+\tau)\rangle = \langle E_1(t)E_2^*(t)\rangle e^{i\omega\tau} = J(P_1,P_2)\,e^{i\omega\tau}. \tag{2.27}$$

Faktor $\Re e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) = \cos(kd\sin\vartheta)$ da interferenčne proge za koherentno osvetlitev zaslona, povprečje produkta polj v odprtinah ob istem času $J(P_1,P_2) = \langle E(P_1,t)E^*(P_2,t)\rangle$ pa meri stopnjo prečne koherence med obema odprtinama. Od velikosti tega člena je odvisen kontrast interferenčnih prog. Izračunajmo ga.

Polje v posamezni odprtini je vsota prispevkov iz celega izvora.

$$E(P_j) = -\frac{i}{\lambda}\int E(\xi,\eta)\frac{e^{iks_j}}{s_j}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.28}$$

Pri tem je s_j razdalja med točko na izvoru s koordinato (ξ,η) in točko $P_j(x_j,y_j)$ v odprtini na ravnini A (glej sliko 2.5). Faktor pred integralom $-i/\lambda$ izhaja iz uklonske teorije (enačba 1.54). Tako je

$$J(P_1,P_2) = \frac{1}{\lambda^2}\int\int \langle E(\xi,\eta)E^*(\xi',\eta')\rangle \frac{e^{ik(s_1-s_2')}}{s_1s_2'}\,d\xi\,d\eta\,d\xi'd\eta'. \tag{2.29}$$

V izbranem svetilu sevajo atomi neodvisno. Valovanji iz dveh točk svetila, ki sta razmaknjeni za več kot λ, sta neodvisni in povprečje njunega produkta je enako nič. Tako približno velja

$$\langle E(\xi,\eta)E^*(\xi',\eta')\rangle = \frac{\lambda^2}{\pi}\cdot\delta(\xi-\xi',\eta-\eta')\langle |E(\xi,\eta)|^2\rangle. \tag{2.30}$$

Faktor λ^2/π poskrbi za ustrezno normalizacijo. Naj bo oddaljenost svetila od zaslona A veliko večja od dimenzije svetila ($z \gg R$), tako da lahko imenovalec pod integralom v izrazu (2.29) nadomestimo z z^2 in postavimo pred integral. Sledi

$$J(P_1,P_2) = \frac{1}{\pi z^2}\int \langle |E(\xi,\eta)|^2\rangle e^{ik(s_1-s_2)}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.31}$$

Izraz lahko še nekoliko poenostavimo, če razvijemo s_1 in s_2

$$s_j = \sqrt{z^2 + (x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2} \approx z + \frac{(x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2}{2z}. \tag{2.32}$$

Pri tem sta (x_j, y_j) koordinati točke P_j. Pišimo še $\langle |E(\xi,\eta)|^2 \rangle = I(\xi,\eta)$ ter $x_2 - x_1 = \Delta x$ in $y_2 - y_1 = \Delta y$. S tem dobimo tako imenovani van Cittert-Zernikov izrek[6]

$$J(\Delta x, \Delta y) = \frac{e^{-i\phi}}{\pi z^2} \int I(\xi,\eta) e^{ik(\Delta x \xi + \Delta y \eta)/z} d\xi\, d\eta. \tag{2.33}$$

Faza

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda z}[(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)] \tag{2.34}$$

meri skupni premik interferenčnih prog, do katerega pride, kadar svetilo ne leži na isti osi kot odprtini v zaslonu. Kadar ležita odprtini v ravnini A simetrično glede na os svetila, je faza ϕ enaka nič.

Dobljeni rezultat si je vredno nekoliko ogledati. Prečno prostorsko korelacijsko funkcijo $J(P_1, P_2)$, ki določa kontrast interferenčnih prog, smo izrazili kot 2-D Fourierevo transformiranko intenzitete svetlobe na samem svetilu (enačba 2.33).

★ Ob tem se spomnimo, da velja podobna zveza med električno poljsko jakostjo v osvetljeni odprtini in njeno Fraunhoferjevo uklonsko sliko (enačba 1.61), pri čemer so količine, ki nastopajo v obeh zvezah, povsem različne. Različna je tudi veljavnost obeh izrazov: medtem ko je Fraunhoferjeva uklonska formula veljavna le v veliki oddaljenosti, za opis uklonske slike v bližnjem polju pa je treba uporabiti Fresnelov izraz (enačba 1.60), je rezultat za $J(P_1, P_2)$ (enačba 2.33) veljaven v obeh območjih.

Pri velikih razdaljah med točkama P_1 in P_2 vrednost $J(P_1, P_2)$ gotovo pade na nič. Največja razdalja, do katere je $J(P_1, P_2)$ še različna od nič, je ravno prečna koherenčna razdalja d_c, ustrezna ploskev pa je koherenčna ploskev S_c. Iz izraza za koherenčno razdaljo (enačba 2.24) jo lahko ocenimo

$$S_c \sim \frac{(\lambda z)^2}{S_0} \sim \frac{\lambda^2}{\Omega_0}, \tag{2.35}$$

kjer je S_0 površina svetila, Ω_0 pa prostorski kot, pod katerim je videti svetilo v ravnini A.

Oglejmo si primer. Naj bo svetilo v obliki kroga s polmerom R, obe odprtini v zaslonu naj imata koordinati y enaki nič, razmik med njima v smeri x pa naj bo d. Prečno korelacijsko funkcijo izračunamo iz enačbe (2.33) in dobimo (glej nalogo 2.5.1)

$$J(0, \Delta y) = 2\frac{R^2 I_0}{z^2} \frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z}, \tag{2.36}$$

kjer je $J_1(x)$ Besslova funkcija. V ničlah prve Besslove funkcije pade prečna korelacijska funkcija J na nič in interferenčnega vzorca ne vidimo. Za prečno koherenčno razdaljo je zato smiselno vzeti ravno prvo ničlo Besslove funkcije J_1, to je pri

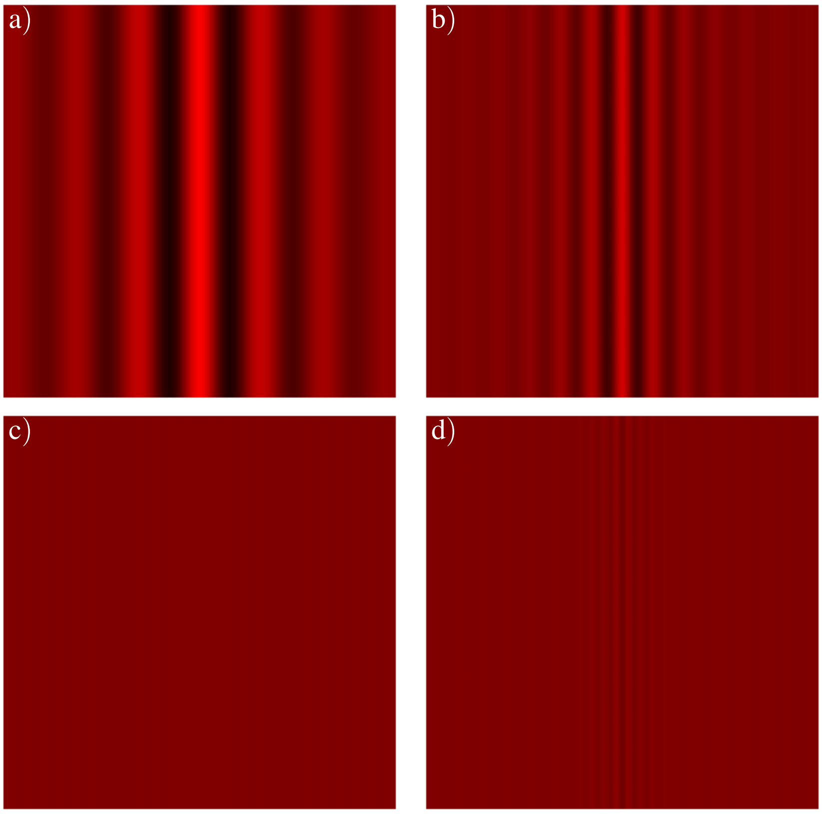
$$d_c \approx 3{,}83\frac{z}{kR} = 0{,}61\frac{\lambda z}{R}. \tag{2.37}$$

[6] Nizozemski fizik Pieter Hendrik van Cittert, 1889–1959, in nizozemski fizik in nobelovec Frits Zernike, 1888–1966.

Naloga 2.5.1 Pokaži, da prečno korelacijsko funkcijo za okroglo svetilo s polmerom R, pri čemer odprtini na zaslonu ležita simetrično na osi y v razmiku d, zapišemo z enačbo (2.36).

Doslej smo obravnavali le valovanje v središču interferenčne slike na zaslonu B, to je pri tako majhnih kotih ϑ, da je zakasnitev manjša od koherenčnega časa. Pri večjih kotih moramo upoštevati še vpliv končnega koherenčnega časa, zaradi česar se kontrast interferenčnih prog še dodatno zmanjšuje. Interferenčna slika je tako produkt časovnega in prostorskega dela.

Poglejmo še primer dveh zelo tankih vzporednih rež. Za nekaj različnih razmikov med režama d je intenziteta svetlobe na zaslonu prikazana na sliki (2.6). Če je $d \ll \lambda z/R$ (slika a), je modulacija interferenčnih prog v sredini popolna in se zaradi končnega koherenčnega časa zmanjšuje le pri večjih kotih ϑ. Pri nekaj večjem razmiku (slika b) tudi v sredini kontrast ni več popoln. Obenem se interferenčne proge zgostijo. Kadar je $d \approx 3,83\,z/kR$, dosežemo prvo ničlo Besslove funkcije $J_1(x)$ in interferenčni vzorec prvič izgine (slika c). Takrat je razdalja med režama ravno enaka prečni koherenčni razdalji valovanja. Pri še večjih razmikih (slika d) je Besslova funkcija negativna in ponovno se pojavijo interferenčne proge, vendar so slabše izražene in z nasprotno fazo, kar da v sredini temno progo.



Slika 2.6: Interferenčna slika na zaslonu za različne vrednosti razmikov med režama: a) $d = z/kR$, b) $d = 2z/kR$, c) $d = 3,832\,z/kR$ in d) $d = 5,136\,z/kR$. Z večanjem razdalje med režama se proge zgostijo in kontrast se zmanjša. Koherenčni čas svetlobe je $t_c = 10/\omega$, kar še dodatno zmanjšuje modulacijo interferenčnih prog. Pri $d = 3,832\,z/kR$ je prva ničla Besslove funkcije in interferenčni vzorec popolnoma izgine. Pri večjih d se interferenčne proge zopet pojavijo, vendar z manjšim kontrastom in nasprotno fazo.

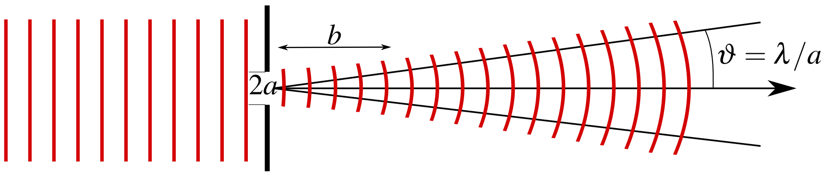
★ Merjenje prečne koherenčne razdalje svetlobe iz zvezd je osnova za Michelsonovo metodo določanja zvezdnih premerov. Svetlobo iz izbrane zvezde zberejo v teleskop preko dveh manjših parov zrcal, kjer sta zunanji zrcali na pomičnih rokah, tako da ju je mogoče razmikati. Glavno zrcalo teleskopa zbere svetlobna snopa v goriščni ravnini, kjer nastanejo interferenčne proge, če le pomični zrcali nista preveč razmaknjeni. Iz razmika, pri katerem interferenčne proge izginejo, je mogoče določiti premere bližnjih svetlih zvezd. Za zvezdo s polmerom 10^6 km v razdalji 5 svetlobnih let je prečna koherenčna razdalja za zeleno svetlobo okoli 15 m, kar je z Michelsonovim zvezdnim interferometrom mogoče izmeriti. Pri zvezdah, ki so dlje od nekaj deset svetlobnih let, metoda odpove.

3. Koherentni snopi svetlobe

V tem poglavju bomo zapisali obosni približek valovne enačbe in spoznali njeno osnovno rešitev: Gaussov snop. Obravnavali bomo snope osnovnega in višjega reda ter se naučili računati prehode Gaussovih snopov skozi optične elemente.

3.1 Omejen snop svetlobe

Pri obravnavi elektromagnetnega valovanja pogosto uporabljamo približek ravnih valov. Ti so v smeri pravokotno na smer širjenja neomejeni in so zato lahko le idealizacija. Čim raven val usmerimo skozi odprtino v zaslonu, nastane omejen snop svetlobe. V snopu svetlobe valovna čela niso ravna in meje snopa niso vzporedne, ampak se snop zaradi uklona širi (slika 3.1).



Slika 3.1: Omejen snop nastane ob prehodu ravnega vala skozi končno odprtino.

V veliki oddaljenosti od zaslona polje izračunamo s Fraunhoferjevo uklonsko teorijo (glej poglavje 1.7). Vendar za oceno kota širjenja računa niti ne potrebujemo. Velja približno

$$\vartheta \sim \frac{\lambda}{a}, \tag{3.1}$$

kjer je a polmer odprtine v zaslonu. Opis polja v bližini zaslona je zahtevnejši, saj je treba uporabiti Fresnelov približek (enačba 1.60). Območje bližnjega polja seže do b, ki ga lahko ocenimo s slike (3.1)

$$\frac{a}{b} \sim \vartheta \sim \frac{\lambda}{a} \qquad \text{in tako} \qquad b \sim \frac{a^2}{\lambda}. \tag{3.2}$$

Včasih taki približni oceni zadoščata. Bolj kvantitativen opis omejenih snopov bi lahko dobili s Fraunhoferjevo in Fresnelovo uklonsko teorijo, kar pa ni najudobnejša pot (glej nalogo 3.1.1). Lotimo se problema raje z uporabo približka obosne valovne enačbe.

Naloga 3.1.1 Pokaži, da je Fraunhoferjeva uklonska slika na odprtini, katere prepustnost se v radialni smeri spreminja kot Gaussova funkcija $T(\xi,\eta) = e^{-(\xi^2+\eta^2)/w_0^2}$, podana z Gaussovo funkcijo oblike $E(x,y,z) \propto e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)}$ in določi odvisnost $w(z)$. Izračunaj še uklonsko sliko v bližnjem polju po Fresnelovi uklonski teoriji.

3.2 Obosna valovna enačba

Obravnavo začnemo z valovno enačbo in monokromatskim valovanjem s krožno frekvenco ω. Ustrezna Helmholtzeva enačba je (enačba 1.21)

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \tag{3.3}$$

kjer je $k = n\omega/c_0$ valovno število in n lomni količnik sredstva, po katerem se valovanje širi. Zaradi enostavnosti obravnavamo le eno polarizacijo, tako da E pišemo kot skalar. Iščemo rešitev za omejen snop, ki se širi približno vzdolž osi z. Uporabimo nastavek

$$E = E_0 \psi(\mathbf{r}, z) e^{ikz}, \tag{3.4}$$

kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor v ravnini xy, prečni na smer širjenja svetlobe. Glavni del odvisnosti od koordinate z smo zapisali v faktorju e^{ikz}, tako da lahko privzamemo, da se ψ v smeri z le počasi spreminja. Vstavimo gornji nastavek v Helmholtzevo enačbo (enačba 3.3) in pri tem zanemarimo druge odvode ψ po z, saj je zaradi počasnega spreminjanja $\partial^2\psi/\partial z^2$ majhen v primerjavi s $k\partial\psi/\partial z$ in $k^2\psi$. Dobimo obosno ali paraksialno valovno enačbo za ψ

$$\boxed{\nabla_\perp^2 \psi = -2ik\frac{\partial \psi}{\partial z}.} \tag{3.5}$$

★ Opazimo, da je obosna valovna enačba enaka Schrödingerjevi enačbi za prost delec v dveh dimenzijah, v kateri ima koordinata z vlogo časa. Omejenemu snopu v kvantni mehaniki ustreza lokaliziran delec – valovni paket. Ta se s časom širi, kar v optiki ustreza pojavu uklona.

Zapišimo nastavek za ravni val v obliki

$$\psi = e^{ik_1x + ik_2y}\, e^{-i\beta z}. \tag{3.6}$$

Da bo gornji nastavek rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5), mora veljati

$$\beta = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \tag{3.7}$$

Ko vstavimo nastavek za ψ v izraz za polje E (enačba 3.4), dobimo ravni val, za katerega velja

$$k_3 = k - \beta = k - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \tag{3.8}$$

Pri tem k_3 označuje vzdolžno in k_1 ter k_2 prečni komponenti valovnega vektorja, k pa je valovno število. Za ravni val, ki je rešitev Helmholtzeve enačbe (enačba 3.3) in ne obosnega približka (enačba 3.5), velja

$$k_3 = \sqrt{k^2 - (k_1^2 + k_2^2)}. \tag{3.9}$$

Vidimo, da sledi enačba (3.8) iz enačbe (3.9) z razvojem za majhne vrednosti k_1 in k_2. To pove, da je približek obosne enačbe dober, kadar je razmerje prečne in vzdolžne komponente valovnega vektorja majhno. Takrat je majhen tudi kot širjenja snopa in člene, višje od kvadratnih, lahko zanemarimo. To pa je tudi območje veljavnosti Fresnelove uklonske teorije.

★ Časovno odvisnost poljubnega začetnega stanja v kvantni mehaniki navadno izračunamo tako, da v nekem začetnem trenutku paket razvijemo po lastnih stanjih energije – ravnih valovih. Rešitev v poljubnem kasnejšem trenutku je potem dana v obliki Fourierevega integrala. Ta pot je zelo uporabna tudi v optiki in je osnova sklopa računskih metod, znanih pod imenom Fouriereva optika. V našem primeru z njo brez težav pridemo nazaj do Fresnelove uklonske formule.

3.3 Osnovni Gaussov snop

Naša naloga je poiskati rešitve obosne enačbe, ki popišejo omejene snope. Iz kvantne mehanike vemo, da je najbolj lokaliziran in se najpočasneje širi valovni paket Gaussove oblike. Zato poskusimo najti rešitev obosne enačbe (enačba 3.5) z nastavkom

$$\psi(r,z) = e^{ikr^2/2q(z)}\, e^{-i\phi(z)}, \tag{3.10}$$

kjer funkcija $q(z)$ opisuje širjenje snopa v prečni smeri, $\phi(z)$ pa opisuje počasno spreminjanje faze snopa vzdolž osi z. Vstavimo nastavek (enačba 3.10) v obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Zaenkrat se omejimo le na radialno simetrične rešitve in v cilindričnih koordinatah zapišemo

$$\nabla_\perp^2 \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2}\right)\psi \tag{3.11}$$

in

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(-\frac{ikr^2}{2q^2} q(z)' - i\phi'\right)\psi. \tag{3.12}$$

Tako iz obosnega približka (enačba 3.5) sledi

$$\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} = ik\left(\frac{ikr^2}{q^2} q(z)' + 2i\phi'\right). \tag{3.13}$$

Gornja zveza mora veljati pri vsakem r, zato sta koeficienta pri r^2 na obeh straneh enačbe enaka in člena brez odvisnosti od r prav tako. Sledi

$$q(z)' = 1 \qquad \text{in} \qquad \phi' = -\frac{i}{q}. \tag{3.14}$$

Z integracijo dobimo najprej

$$q = z - iz_0, \tag{3.15}$$

kjer smo z $-iz_0$ označili integracijsko konstanto. Integriramo še enačbo za fazo

$$\phi = \int_0^z -\frac{idz}{z - iz_0} = -i\ln(1 + i\frac{z}{z_0}). \tag{3.16}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \psi &= \exp\left(i\frac{kr^2}{2(z - iz_0)}\right)\exp\left(-\ln(1 + i\frac{z}{z_0})\right) = \\ &= \frac{1}{1 + i\frac{z}{z_0}} \exp\left(-\frac{kr^2 z_0}{2(z_0^2 + z^2)} + \frac{ikr^2 z}{2(z_0^2 + z^2)}\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Najprej podrobneje poglejmo realni del eksponenta, ki opisuje širjenje snopa. Polmer snopa w, ki je funkcija koordinate z, opišemo z enačbo

$$w^2 = \frac{2z_0}{k}\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right). \tag{3.18}$$

V izhodišču pri $z = 0$ je snop najožji in pravimo, da je tam grlo snopa. Polmer snopa v grlu označimo z w_0 in zapišemo hiperbolično zvezo $w(z)$

$$\boxed{w^2 = w_0^2\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right).} \tag{3.19}$$

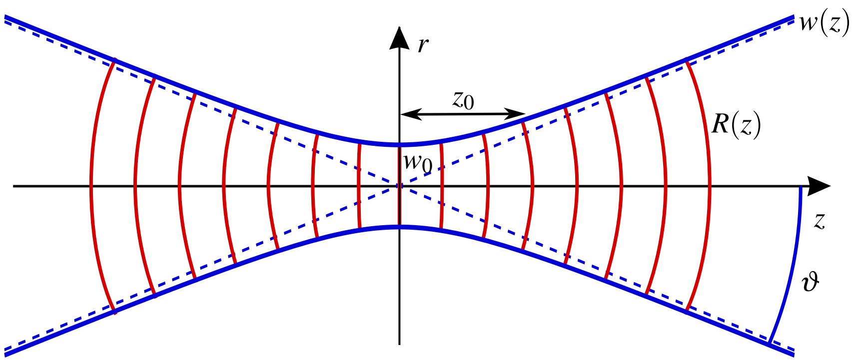
Pri tem velja

$$w_0^2 = \frac{2z_0}{k} \tag{3.20}$$

oziroma

$$\boxed{z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}.} \tag{3.21}$$

Parameter z_0 označuje oddaljenost od grla, pri kateri preide snop v asimptotično enakomerno širjenje, in tako omejuje območje, znotraj katerega se snop ne razširi znatno. Imenujemo ga Rayleighova dolžina[1], območje približno konstantne širine snopa pa območje bližnjega polja ali Rayleighovo območje. Celotna dolžina območja bližnjega polja je zaradi simetričnosti Gaussovega snopa enaka $2z_0$. Vrednost z_0 označuje tudi oddaljenost od grla, pri kateri začne veljati Fraunhoferjev uklonski približek.



Slika 3.2: Gaussov snop s karakterističnimi parametri

Zapišimo še kot divergence snopa v velikih oddaljenostih. Polovični kot širjenja je

$$\vartheta = \lim_{z\to\infty} \frac{dw}{dz} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.22}$$

Celotna divergenca snopa pa

$$\boxed{\theta = 2\frac{w_0}{z_0} = \frac{2\lambda}{\pi w_0}.} \tag{3.23}$$

Izraza za območje bližnjega polja (enačba 3.21) in divergenco (enačba 3.22) sta v skladu z ocenami, ki smo ju napravili v začetku poglavja (enačbi 3.1 in 3.2). Faktor π oziroma $1/\pi$ je značilen za Gaussov snop, ki ima od vseh možnih oblik najmanjšo divergenco.

★ Za določanje kakovosti dejanskega laserskega snopa in njegovega odstopanja od idealnega Gaussovega snopa se pogosto vpelje faktor M^2

$$\theta = M^2 \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.24}$$

Dobri laserji dosegajo vrednost $M^2 \sim 1$, pri močnejših trdninskih ali polprevodniških laserjih pa je lahko $M^2 \sim 30$ ali več. V grobem velja, da M^2 narašča z močjo laserja in oblika snopa močnih laserjev navadno znatno odstopa od oblike idealnega Gaussovega snopa.

[1] Angleški fizik in nobelovec John William Strutt, 3. baron Rayleighški; lord Rayleigh, 1842–1919.

Vrnimo se k imaginarnemu delu eksponenta v enačbi (3.17). Vpeljemo količino

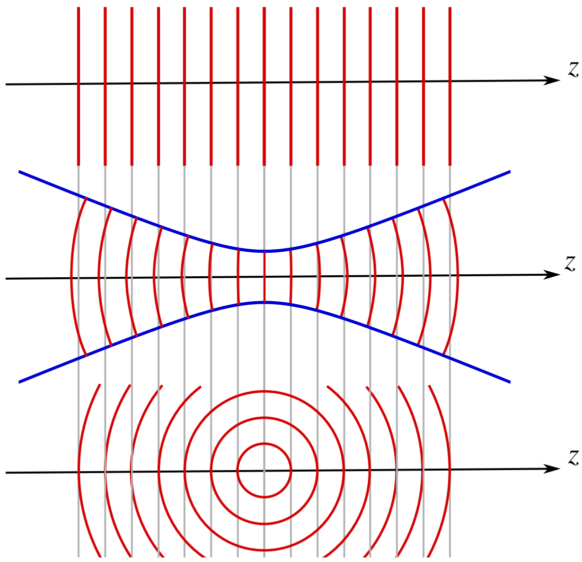
$$\boxed{R = z\left(1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right),} \tag{3.25}$$

ki meri krivinski radij valovnih front pri oddaljenosti od grla z. To najlažje uvidimo, če zapis imaginarnega dela primerjamo z zapisom za krogelni val, razvit po majhnih odmikih r od osi z

$$\frac{1}{R}e^{ikR} = \frac{1}{R}e^{ik\sqrt{z^2+r^2}} \approx \frac{1}{R}e^{ikz+ikr^2/2R}. \tag{3.26}$$

Naloga 3.3.1 Pokaži, da je največja ukrivljenost valovnih front snopa (in s tem najmanjši R) ravno pri $z = \pm z_0$. Izračunaj še ukrivljenost front v grlu in v veliki oddaljenosti od grla.

Na sliki (3.3) so prikazane valovne fronte ravnega vala, Gaussovega snopa (enačba 3.29) in krogelnega vala (enačba 3.26). Vidimo, da je v bližini grla Gaussov snop podoben ravnemu valu (ukrivljenost front je zelo majhna in $R \to \infty$). Za velike oddaljenosti krivinski radij valovnih front postaja kar enak oddaljenosti z. Snop je tako podoben delu krogelnega vala, le da je faza Gaussovega snopa zamaknjena za $\pi/2$ glede na krogelni val.



Slika 3.3: Ravni val, Gaussov snop ter krogelni val. V bližini grla je Gaussov snop podoben ravnemu valu, pri velikih oddaljenostih od grla pa krogelnemu valu.

Ostane še faktor pred eksponentom v izrazu (3.17). Ta faktor meri zmanjševanje amplitude električne poljske jakosti v snopu in s tem poskrbi za ohranitev energijskega toka ob širjenju žarka, poleg tega pa še dodatno spremeni fazo. Zapišemo ga v obliki

$$\frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{z}{z_0})^2}}e^{-i\eta(z)} = \frac{w_0}{w}e^{-i\eta(z)}, \tag{3.27}$$

pri čemer je

$$\boxed{\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right).} \tag{3.28}$$

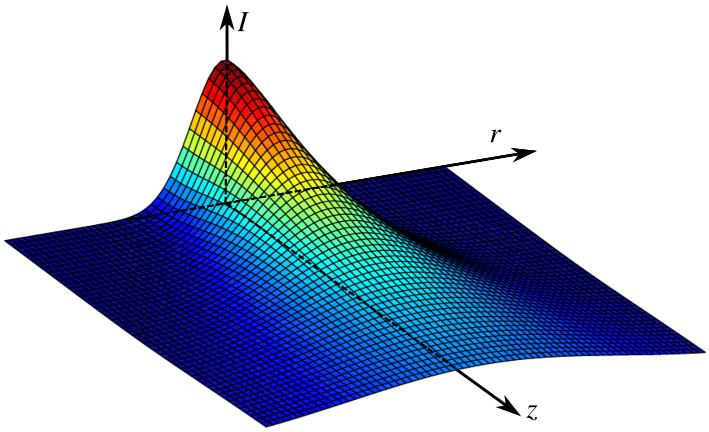
Dodatna faza η, imenujemo jo Gouyeva faza[2], je posledica povečane fazne hitrosti valovanja, kadar je valovanje omejeno v prečni smeri. Podoben pojav bomo srečali tudi pri valovanju, ki je omejeno v valovode (poglavje **??**).

S tem lahko končno zapišemo izraz za električno poljsko jakost osnovnega Gaussovega snopa[3]

$$E(r,z,t) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{ikz-i\omega t} e^{-r^2/w^2(z)} e^{ikr^2/2R(z)} e^{-i\eta(z)}. \tag{3.29}$$

Intenziteta svetlobe, ki je enaka $E(r,z,t)E^*(r,z,t)$, je potem

$$I(r,z) = I_0 \frac{w_0^2}{w^2(z)} e^{-2r^2/w^2(z)}. \tag{3.30}$$



Slika 3.4: Upodobitev intenzitete svetlobe v Gaussovem snopu za $z > 0$

Naloga 3.3.2 Pokaži, da je celotna svetlobna moč v Gaussovem snopu enaka

$$P = \frac{1}{2} c_0 \varepsilon_0 I_0 \left(\frac{1}{2} \pi w_0^2 \right). \tag{3.31}$$

Povejmo še nekaj o parametru $q(z)$, ki smo ga uporabili pri izračunu Gaussovega snopa v nastavku (enačba 3.10). Spomnimo se, da parameter q narašča linearno z oddaljenostjo od grla

$$q(z) = z - iz_0. \tag{3.32}$$

Parameter q imenujemo kompleksni krivinski radij, njegov inverz pa kompleksna ukrivljenost

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} + i\frac{2}{kw^2}. \tag{3.33}$$

Naloga 3.3.3 Uporabi enačbi (3.21 in 3.25) in izpelji gornji izraz za kompleksno ukrivljenost.

Kompleksni krivinski radij je zelo uporaben pri obravnavi preslikav Gaussovih snopov z lečami.

[2] Francoski fizik Louis Georges Gouy, 1854–1926.
[3] Nemški matematik, fizik in astronom Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.

3.4 Snopi višjega reda

Osnovna rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5) je Gaussov snop (enačba 3.29). Poleg te rešitve obstaja še veliko drugih rešitev, prav tako omejenih v prečni smeri. V kartezičnih koordinatah tako rešijo obosno valovno enačbo Hermite-Gaussovi snopi[4]

$$\psi_{n,m}(x,y) = \frac{w_0}{w} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left(\frac{ik(x^2+y^2)}{2q} - i\eta_{n,m}\right), \tag{3.34}$$

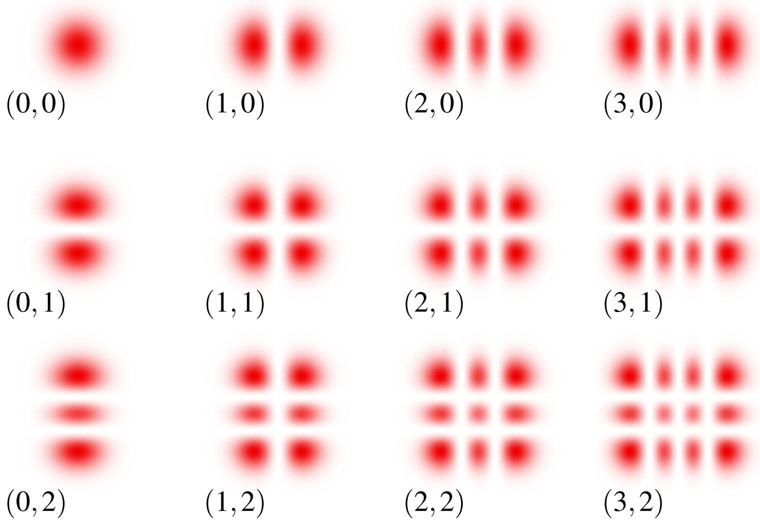
kjer so H_n Hermitovi polinomi stopnje n (npr. $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$ ...). V to se lahko prepričamo, če izraz vstavimo v obosno valovno enačbo (enačba 3.5) in upoštevamo zvezo med Hermitovimi polinomi

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \tag{3.35}$$

Osnovni Gaussov snop je očitno poseben primer gornje rešitve za $n = m = 0$. Polmer snopa $w(z)$ in kompleksni krivinski radij $q(z)$ sta za vse n in m enaka kot za osnovni snop in podana z enačbama (3.19) in (3.32). Razlika je v fazi, ki je odvisna tudi od n in m

$$\eta_{n,m}(z) = (n+m+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.36}$$

Na sliki (3.5) so intenzitetni profili Hermite-Gaussovih snopov višjih redov $|\psi_{n,m}(x,y,0)|^2$. Indeksa n in m določata število vozlov v prečnih smereh x in y, širina snopa pa narašča z n in m.



Slika 3.5: Prečni profil intenzitete Hermite-Gaussovih snopov v grlu za različne vrednosti (n,m)

Naloga 3.4.1 Pokaži, da za Hermite-Gaussove snope višjih redov efektivni polmer snopa narašča sorazmerno s korenom iz števila prečnih vozlov $w_{eff} \propto w\sqrt{n+m}$.
Namig: pri zapisu prečne odvisnosti polja upoštevaj le vodilni člen Hermitovih polinomov in določi razdaljo od središča snopa, pri kateri je amplituda polja ψ največja.

[4] Francoski matematik Charles Hermite, 1822–1901.

Hermite-Gaussovi snopi (enačba 3.34) tvorijo popoln ortogonalen sistem funkcij koordinat x in y

$$\int \psi_{n,m}^*(x,y)\,\psi_{n',m'}(x,y)\,dxdy = \pi w_0^2\, 2^{n+m-1} n!\, m!\, \delta_{n,n'}\, \delta_{m,m'}. \tag{3.37}$$

Polje nekega valovanja, ki ga poznamo v ravnini $z = 0$, lahko pri poljubnem z izračunamo z razvojem po Hermite-Gaussovih snopih. Pri tem je izbira polmera grla w_0 poljubna, bo pa seveda vplivala na hitrost konvergence razvoja. Na tak način lahko obravnavamo uklon na odprtini, kjer je očitno smiselno vzeti w_0 približno enak dimenziji odprtine. Dobljeni rezultat je enako natančen kot Fresnelov uklonski integral.

Pri velikih z, kjer velja Fraunhoferjeva uklonska teorija, je polje Fouriereva transformiranka polja pri $z = 0$. Hermite-Gaussovi snopi ohranjajo prečno obliko, ki pa se z naraščajočim z širi. To je v skladu s tem, da je Fouriereva transformiranka Hermite-Gaussove funkcije $H_n(x)e^{-x^2/2}$ kar Hermite-Gaussova funkcija.

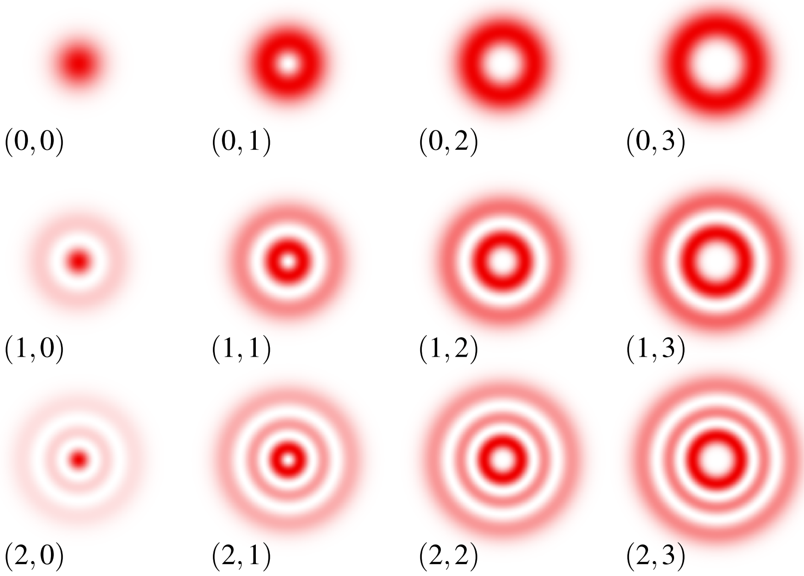
V cilindričnih koordinatah imajo snopi višjega reda obliko Laguerre-Gaussovih snopov[5]

$$\psi_{p,l}(r,\varphi,z) = \frac{w_0}{w}\left(\frac{\sqrt{2}r}{w}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) e^{\pm il\varphi} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q} - i\eta_{p,l}\right), \tag{3.38}$$

kjer so L_p^l pridruženi Laguerrovi polinomi (npr. $L_0^l(x) = 1, L_1^l(x) = -x+l+1, L_2^l(x) = x^2/2 - (l+2)x + (l+2)(l+1)/2$ ...) in

$$\eta_{p,l}(z) = (2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.39}$$

Podobno kot v kartezičnem primeru red polinoma določa število prečnih ničel, določa p v cilindričnem primeru število vozelnih črt, kjer je gostota svetlobnega toka enaka nič. Na sliki (3.6) je prikazanih nekaj intenzitetnih profilov Laguerre-Gaussovih snopov višjih redov $|\psi_{p,l}(r,\varphi,0)|^2$. Ker nastopa odvisnost od kota le v fazi, so intenzitetni profili snopa radialno simetrični. Opazimo, da je pri vseh snopih z $l \neq 0$ v središču snopa minimum.

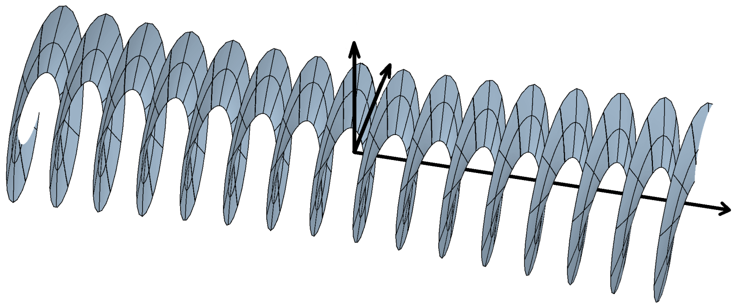


Slika 3.6: Prečni profil intenzitete Laguerre-Gaussovih snopov v grlu za različne vrednosti (p,l)

[5] Francoski matematik Edmond Nicolas Laguerre, 1834–1886.

Navadno želimo, da iz laserja izhaja čim čistejši osnovni snop, vendar pogosto opazimo tudi snope višjega reda. Da dobimo le osnovni snop, je treba posebej paziti pri konstrukciji laserja.

★ Valovne fronte Laguerre-Gaussovih snopov imajo pri $l \neq 0$ obliko vijačnic. Poyntingov vektor pri njih ni vzporeden z osjo žarka, ampak ima komponento tudi v prečni smeri. Ta spreminja smer, zato pride do pojava vrtilne količine v smeri osi snopa in snop na snov deluje z navorom. Pravimo, da Laguerre-Gaussovi snopi nosijo t.i. tirno vrtilno količino. V kvantni mehaniki funkcija $\psi_{p,l}$ predstavlja foton s tirno vrtilno količino $L = \hbar l$, medtem ko leva in desna cirkularna polarizacija predstavljata spin fotona.



Slika 3.7: Valovna fronta Laguerre-Gaussovega snopa

3.5 Besslov snop

Poglejmo še poseben primer omejenega snopa, to je Besslov snop[6]. Nastavek za eksaktno rešitev valovne enačbe (enačba 1.13), pri čemer obravnavamo polje skalarno, naj bo

$$E = E_0 \psi(x,y) e^{i\beta z - i\omega t}. \tag{3.40}$$

Funkcija ψ mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla_\perp^2 \psi + k_\perp^2 \psi = 0 \tag{3.41}$$

pri $k_\perp^2 = k^2 - \beta^2$. V cilindričnih koordinatah ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) se enačba prepiše v

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k_\perp^2 \psi = 0. \tag{3.42}$$

Rešitve gornje enačbe so s faznim faktorjem pomnožene Besslove funkcije

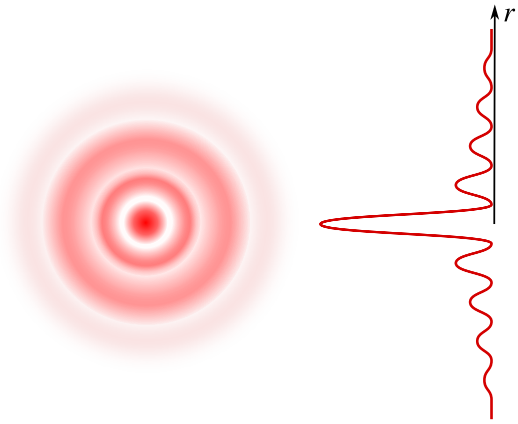
$$\psi_m(r,\varphi) = J_m(k_\perp r) e^{im\varphi}, \tag{3.43}$$

kjer je J_m Besslova funkcija, m pa celo število. Za $m = 0$ je rešitev osnovi Besslov snop

$$E(r,z,t) = E_0 J_0(k_\perp r) e^{i\beta z - i\omega t}. \tag{3.44}$$

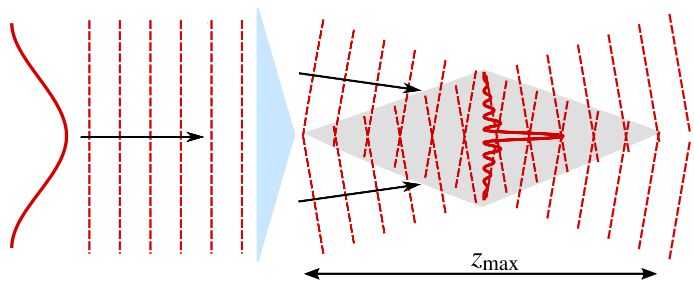
Valovne fronte Besslovega snopa so ravne in snop nima divergence. Vendar pa Besslov snop ni omejen v pravem smislu. Za velike oddaljenosti od osi snopa r intenzitetni profil namreč pojema kot $I \propto J_0^2(k_\perp r) \sim (2/\pi k_\perp r)\cos^2(k_\perp r - \pi/4)$. Energija takega snopa ni omejena znotraj efektivnega radija, kot je to pri Gaussovih snopih. Za konstrukcijo Besslovih snopov bi (tako kot za konstrukcijo ravnega vala) potrebovali neskončno energije, kar je seveda nemogoče. Lahko pa ustvarimo dobre približke Besslovih snopov, ki imajo pomembne in uporabne lastnosti.

[6]Nemški astronom, matematik in fizik Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846.



Slika 3.8: Prečni presek in profil intenzitete Besslovega snopa

★ Z uporabo stožčaste leče (aksikona) lahko Gaussov snop preoblikujemo v približek Besslovega snopa (slika 3.9). Na plašču stožčaste leče se namreč Gaussov snop zlomi in valovni vektorji nastalega snopa opisujejo stožec, kar je sicer lastnost Besslovih snopov. Dobljeni snop je približek Besslovega snopa, vendar le na določenem območju, dolgem z_{max}. Znotraj tega območja je divergenca snopa praktično enaka nič. Poleg manjše divergence imajo ti snopi še lastnost regeneracije. To pomeni, da se snop v senčni strani za objektom, ki ga osvetljuje (na primer v optični pinceti), regenerira. Profil snopa v senčni strani (daleč stran od objekta) je tako enak profilu snopa pred objektom.



Slika 3.9: Nastanek približka Besslovega snopa na stožčasti leči

3.6 Transformacije snopov z lečami

Vrnimo se k osnovnim Gaussovim snopom in poglejmo, kaj se zgodi z njimi pri prehodu skozi optične elemente. Začnemo z enostavno tanko lečo z goriščno razdaljo f. V geometrijski optiki je krivinski radij krogelnega vala, ki izhaja iz točke na osi, kar enak razdalji do točke. Leča točko na optični osi preslika v točko na osi, od tod pa sledi, da se krogelni val s krivinskim radijem R_1 po prehodu skozi lečo spremeni v val s krivinskim radijem R_2. Pri tem velja zveza

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}. \tag{3.45}$$

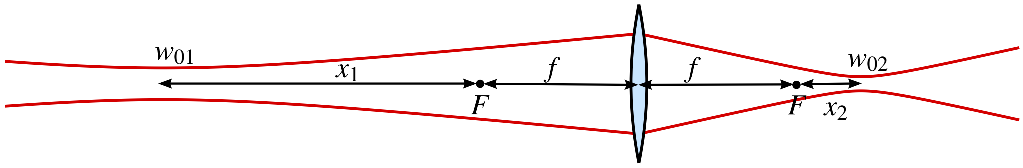
Dogovorimo se, da je krivinski radij v točki z pozitiven, če je središče krožnice pri $z' \leq z$.

Kako pa je z Gaussovim snopom? Polmer snopa w se pri prehodu skozi tanko lečo ne spremeni, zato velja po enačbah (3.33) in (3.45) za kompleksni krivinski radij tik pred lečo in tik za njo

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f}. \tag{3.46}$$

Kompleksni krivinski radij q je po enačbi (3.32) linearna funkcija koordinate z in za opis Gaussovega snopa zadošča, da v neki točki z poznamo q. Iz realnega dela parametra q določimo ukrivljenost front, iz imaginarnega pa polmer snopa. Enačba (3.46) torej zadošča za račun prehoda snopa skozi poljuben sistem leč brez aberacij, če le poznamo njegovo goriščno razdaljo.

Kot primer poglejmo, kako z zbiralno lečo zberemo Gaussov snop.



Slika 3.10: Prehod Gaussovega snopa skozi tanko lečo. Grlo velikosti w_{01} v oddaljenosti x_1 od gorišča leče F se preslika v grlo velikosti w_{02} v oddaljenosti x_2 od gorišča leče F.

Vpadni snop naj ima grlo s polmerom w_{01} in parametrom $z_{01} = \pi w_{01}^2/\lambda$. Lega grla je v točki, ki je za x_1 oddaljena od levega gorišča leče F (slika 3.10). Naj bosta

$$q_1^F = x_1 - iz_{01} \qquad \text{in} \qquad q_2^F = -x_2 - iz_{02} \tag{3.47}$$

kompleksna krivinska radija v levem in desnem gorišču, pri čemer je koordinatna os z usmerjena v desno, gledamo pa referenčno glede na lego grla vsakega posameznega snopa. Za vrednosti q tik pred lečo in tik za njo velja tudi

$$q_1 = q_1^F + f \qquad \text{in} \qquad q_2 = q_2^F - f. \tag{3.48}$$

Od tod z uporabo enačbe (3.46) izpeljemo zvezo za q v goriščih v kompaktni obliki

$$\boxed{q_1^F q_2^F = -f^2.} \tag{3.49}$$

Enačba je po obliki podobna enačbi za oddaljenost slike od gorišča v geometrijski optiki, pomen pa ima drugačen. Uporabimo enačbi (3.47) in zapišimo posebej realni in imaginarni del

$$x_1 x_2 = f^2 - z_{01} z_{02} \qquad \text{in} \qquad \frac{x_1}{z_{01}} = \frac{x_2}{z_{02}}. \tag{3.50}$$

Dobimo enačbi za preslikavo Gaussovega snopa z lečo z goriščno razdaljo f. Prva enačba

$$\boxed{x_2 = \frac{x_1 f^2}{x_1^2 + z_{01}^2}} \tag{3.51}$$

določa lego grla preslikanega snopa na desni strani leče, druga pa povečavo

$$\boxed{\frac{w_{02}}{w_{01}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}.} \tag{3.52}$$

Enačba (3.51) se ujema z izrazom za preslikavo točke v geometrijski optiki le, kadar je $z_{01} \ll x_1$. Kadar je $z_{01} \gg f$, je val na leči skoraj raven in $x_2 \to 0$, kar pomeni, da leži grlo na desni strani v gorišču. V praksi za Gaussove snope, ki izhajajo iz laserjev, pogosto ne velja ne prva ne druga limita, zato je treba uporabiti zapisani izraz (enačba 3.51). Tudi velikost polmera grla na desni, podana z enačbo (3.52), je precej drugačna kot v geometrijski optiki.

Za primer vzemimo snop iz He-Ne laserja z valovno dolžino $632,8$ nm. Grlo s polmerom $w_{01} = 0,5$ mm naj bo na izhodu iz laserja in 50 cm oddaljeno od leče z goriščno razdaljo $f = 25$ cm. Za tak snop je $z_{01} = 124$ cm. Po enačbi (3.51) leži grlo za lečo v oddaljenosti 1 cm od gorišča in torej 26 cm za lečo, po enačbi (3.52) pa izračunamo polmer $w_{02} = 100$ µm. Enačbe geometrijske optike bi dale popolnoma napačen položaj grla 50 cm za lečo, polmer grla pa $0,5$ mm. Po drugi strani bi približek, da je vpadni snop kar raven, dal grlo na desni v gorišču s približno pravim polmerom. Zakaj da približek ravnih valov bolj pravilen rezultat, lahko hitro uvidimo, če pogledamo Rayleighovo dolžino snopa z_{01}: snop vpada na lečo še v območju bližnjega polja ($x_1 + f < z_{01}$), kjer je približno oblike ravnih valov.

Če postavimo gorišče leče v grlo snopa ($x_1 = 0$), je grlo na desni strani tudi v gorišču ($x_2 = 0$). Razmerje polmerov grl na eni in drugi strani leče lahko izračunamo

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{x_2}{x_1} = \frac{f^2}{z_{01}^2} \qquad \text{in} \qquad \frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f}{z_{01}}. \tag{3.53}$$

Velikost grla na desni strani je tako

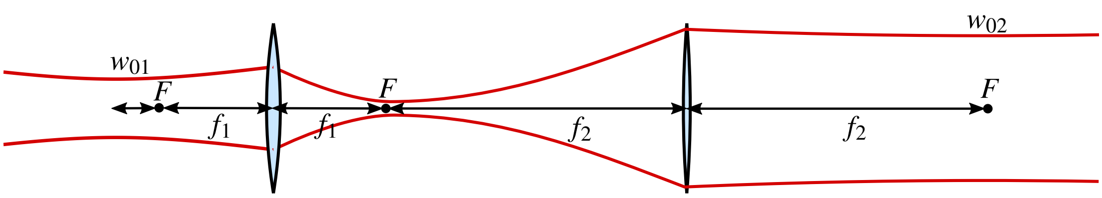
$$w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01}}. \tag{3.54}$$

Če želimo doseči kar se da majhno grlo po prehodu skozi lečo, mora biti polmer vpadnega snopa kar se da velik. Vpadni snop je tako smiselno razširiti, vendar je polmer snopa lahko največ enak polmeru leče a. Najmanjša velikost grla, ki jo še lahko dosežemo z zbiralno lečo, je tako

$$\boxed{w_{02\ \min} = \frac{\lambda f}{\pi a} \sim \lambda.} \tag{3.55}$$

Dobri mikroskopski in fotografski objektivi dosegajo $f/a \simeq 1$, zato je mogoče z njimi Gaussov snop zbrati v piko velikosti $\sim \lambda$.

Omenili smo, da je treba za dosego majhnega polmera grla za lečo snop pred lečo čim bolj razširiti. Razširitev vpadnega snopa naredimo s teleskopom (slika 3.11), katerega značilnost je, da je razmik med lečama enak vsoti goriščnih razdalj leč in zato gorišči leč sovpadata. Povečava teleskopa je pri taki postavitvi leč enaka razmerju med goriščnima razdaljama (glej nalogo 3.6.1).



Slika 3.11: Prehod Gaussovega snopa skozi teleskop iz leč z goriščnima razdaljama f_1 in f_2. Pri teleskopu gorišči leč sovpadata.

Naloga 3.6.1 Dve leči z goriščnima razdaljama f_1 in f_2 naj bosta na medsebojni razdalji $d = f_1 + f_2$. Pokaži, da je povečava takega teleskopa enaka

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f_2}{f_1}. \tag{3.56}$$

3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki

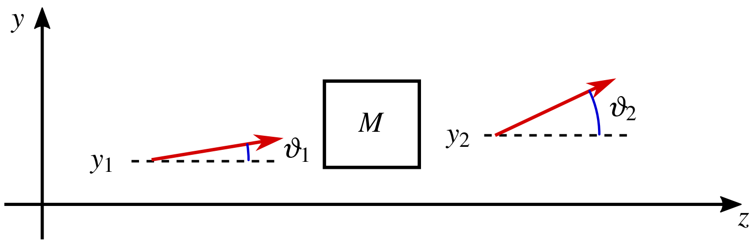
Preden se lotimo splošnejšega zapisa preslikav Gaussovega snopa, se spomnimo, kako obravnavamo preslikave v geometrijski optiki. Slika nastane kot presečišče žarkov, ki izhajajo iz točke predmeta pred optičnim sistemom. Žarek je pravokoten na valovne ploskve, pri čemer moramo vzeti še limito zelo majhne valovne dolžine. Ukrivljenost valovne fronte je neposredno povezana s spreminjanjem naklona žarkov, pri čemer bomo privzeli, da so nakloni žarkov glede na os majhni.

Žarek v izbrani ravnini z lahko opišemo z dvema parametroma: oddaljenostjo y od osi in naklonom ϑ glede na os sistema. Ti dve količini sta med seboj neodvisni in ju sestavimo v vektor

$$\begin{bmatrix} y \\ \vartheta \end{bmatrix}. \tag{3.57}$$

Preslikavo žarka zapišemo kot matriko, ki deluje na vpadni vektor in ga preslika v izhodni vektor (slika 3.12)

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.58}$$



Slika 3.12: Preslikave žarkov lahko obravnavamo z matrikami. Optični element, ki ga predstavlja matrika M, preslika žarek (y_1, ϑ_1) v (y_2, ϑ_2).

Matrike M so na splošno oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{3.59}$$

zato jih imenujemo matrike ABCD. Poglejmo nekaj primerov.

Pri premiku za d vzdolž osi se zaradi končnega naklona spremeni odmik od osi, naklon pa ostane enak

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + d\vartheta_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

Matrika za premik d vzdolž osi z je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Poglejmo še matriko za prehod skozi lečo. Pri prehodu skozi tanko lečo se spremeni nagib žarka. Če je žarek pred lečo vzporeden z osjo, gre za lečo skozi gorišče, zato

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -\frac{y_1}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.63}$$

Pri tem koeficientov B in D še ne poznamo. Določimo jih iz drugega pogoja, ki pravi, da se žarek, ki gre skozi lečo na osi, ne spremeni

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.64}$$

Sledi $B = 0$ in $D = 1$. Matrika za prehod skozi lečo je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.65}$$

Podobno izpeljavo kot za prehod skozi lečo naredimo za odboj na sferičnem zrcalu s krivinskim radijem R. Pripadajoča matrika je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.66}$$

pri čemer je $R > 0$ za konkavna zrcala. Matrika za odboj na ravnem zrcalu je identiteta.

Matriko sestavljene optične naprave zapišemo kot produkt matrik posameznih komponent. Pri tem moramo paziti na vrstni red množenja, saj množenje matrik ni komutativno. Matriko preslikave z dvema optičnima elementoma, pri čemer žarek najprej preide element z indeksom 1 in nato element z indeksom 2, zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2A_1 + B_2C_1 & A_2B_1 + B_2D_1 \\ C_2A_1 + D_2C_1 & C_2B_1 + D_2D_1 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

V sistemu z več elementi zapišemo produkt matrik za vse elemente, pri čemer ne smemo pozabiti na premike med posameznimi elementi.

Poglejmo primer. Žarek naj najprej prepotuje razdaljo d, nato pa ga usmerimo na tanko lečo z goriščno razdaljo f. Matrika za celoten prehod je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix}. \tag{3.68}$$

★ Opisani matrični formalizem je zelo prikladen predvsem za računanje prehoda svetlobe skozi zapletene optične sisteme, saj ga je prav lahko izvesti z računalnikom. Poleg tega je enolično povezan z matričnim formalizmom za izračun kompleksne ukrivljenosti Gaussovih snopov, zato omogoča preprost prenos rezultatov geometrijske optike v optiko Gaussovih snopov.

3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija

Poskusimo zdaj zapisati podoben matrični formalizem še za kompleksne krivinske radije. Za opis Gaussovega snopa zadošča, da v izbrani ravnini z poznamo kompleksni krivinski radij q. Vemo, da je q linearna funkcija premika po z (enačba 3.32). Izračunali smo tudi že, kako se q spremeni pri prehodu skozi tanko lečo (enačba 3.46).

Pri premiku iz ravnine z_1 v ravnino z_2, ki je premaknjena za d, se q spremeni

$$q_2 = q_1 + d. \tag{3.69}$$

Po enačbi (3.46) je pri prehodu skozi lečo

$$q_2 = \frac{q_1 f}{f - q_1} = \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1}. \tag{3.70}$$

Premik in leča dasta skupaj

$$q_2 = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1 + d}{f} + 1} = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1}{f} - \frac{d}{f} + 1}. \tag{3.71}$$

V vseh treh primerih lahko transformacijo kompleksnega krivinskega radija q zapišemo v obliki ulomljene linearne oziroma Möbiusove preslikave[7]

$$\boxed{q_2 = \frac{A q_1 + B}{C q_1 + D}.} \tag{3.72}$$

Ko koeficiente preslikave razvrstimo v matriko

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

in iz gornjih enačb razberemo koeficiente matrik za opisane preslikave, vidimo, da so povsem enaki koeficientom matrik ABCD, ki jih poznamo iz geometrijske optike (3.59). Hitro lahko tudi preverimo, da je matrika za premik in lečo, ki jo dobimo iz preslikave (enačba 3.71), enaka produktu matrike za premik in matrike za lečo (enačba 3.68).

Omenimo še eno lastnost matrik ABCD. Kadar po prehodu skozi optične elemente snop svetlobe preide v snov z enakim lomnim količnikom, kot je bil na začetku, je determinanta matrike ABCD enaka 1. V nasprotnem primeru je determinanta matrike enaka razmerju lomnih količnikov začetne in končne snovi.

$$\det(M) = AD - BC = \frac{n_1}{n_2}. \tag{3.74}$$

[7] Nemški matematik in astronom August Ferdinand Möbius, 1790–1868.

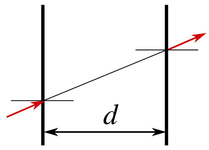
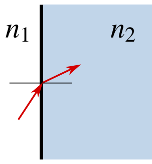
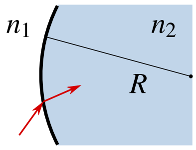
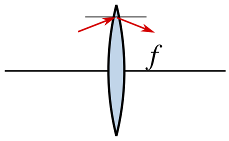
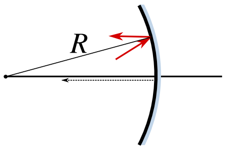
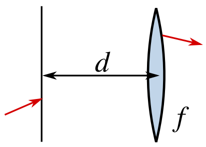
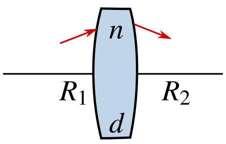
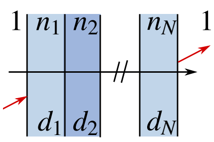
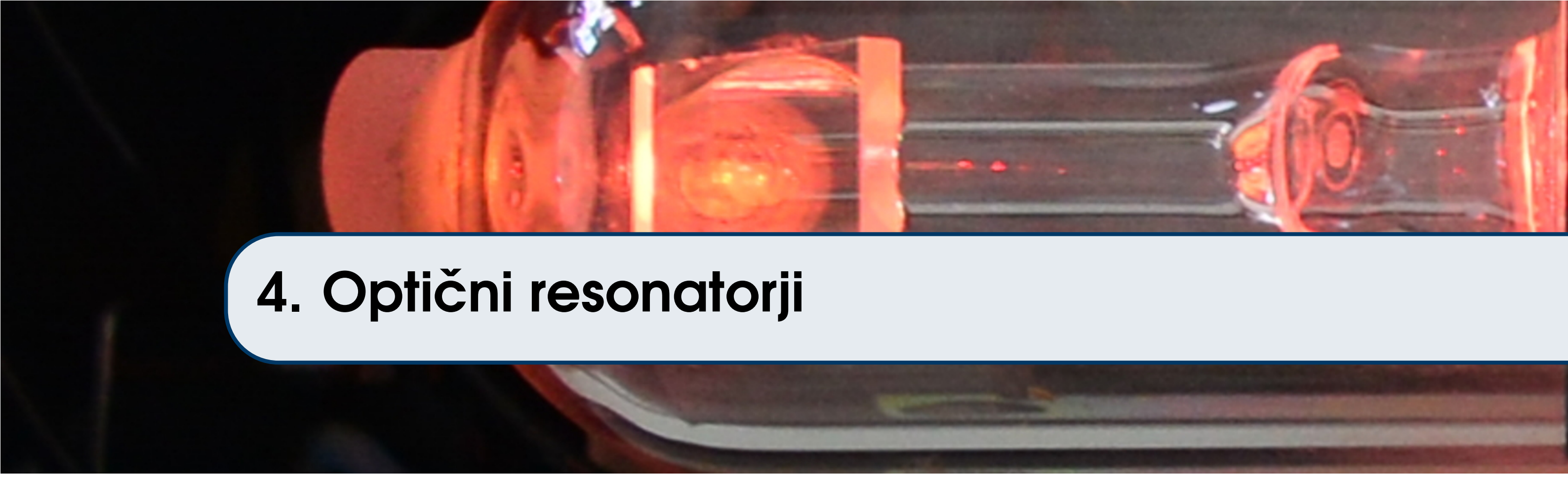
Opis prehoda	Skica	Matrika za prehod
Prehod skozi prostor za d		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Prehod skozi mejo dveh snovi		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod skozi konveksno ukrivljeno mejo $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1-n_2)}{n_2R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod skozi konveksno lečo $f > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Odboj na konkavnem zrcalu $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3.1: Matrike ABCD za nekaj osnovnih preslikav, ki veljajo tako v geometrijski optiki kot tudi za izračun preslikave kompleksnega krivinskega radija q Gaussovih snopov.

Naloga 3.8.1 Pokaži, da za naslednje prehode veljajo ustrezne matrike ABCD.

Prehod skozi prostor in lečo		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d}{f} \end{bmatrix}$
Prehod skozi lečo z debelino d in krivinskima radijema R_1 in R_2		$\begin{bmatrix} 1-\frac{d}{nf_1} & \frac{d}{n} \\ -\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1}-\frac{d}{nf_1f_2} & 1-\frac{d}{nf_2} \end{bmatrix}$ $f_i = \frac{R_i}{n-1}$
Prehod skozi zaporedje plasti		$\begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



4. Optični resonatorji

Osnovni gradnik vsakega laserja je resonator. V njem je vzbujeno lastno elektromagnetno nihanje, ki skozi delno prepustno steno resonatorja kot valovanje izhaja iz sistema. V tem poglavju bomo najprej spoznali optične resonatorje in kriterije za njihovo stabilno delovanje, nato pa izračunali lastne frekvence resonatorjev ter povezali spektralno širino črt izsevane svetlobe z izgubami v laserskem resonatorju.

4.1 Odprti resonatorji

Optični resonatorji so votline, v katerih je mogoče vzpostaviti stoječe svetlobno valovanje. Če vzbujamo v resonatorju valovanja z različnimi frekvencami, se pri nekaterih diskretnih frekvencah pojavi resonančno obnašanje. Te frekvence imenujemo lastne frekvence resonatorja. Zaradi dušenja imajo lastne frekvence končno frekvenčno oziroma spektralno širino, pri čemer je čas dušenja mnogo daljši od nihajne periode.

Optične resonatorje uporabljamo predvsem v dva namena:

1. V resonatorjih lahko ob razmeroma šibkem zunanjem vzbujanju nastane velika električna poljska jakost pri resonančni frekvenci. Za vzdrževanje konstantne amplitude lastnega nihanja mora zunanji vir zgolj pokrivati izgube v resonatorju. Če so te majhne, je zunanji vir lahko šibek, polje v resonatorju pa vseeno veliko.

2. Resonatorji delujejo kot filtri, ki prepuščajo le polje s točno določeno frekvenco in izbrano prostorsko odvisnostjo. Primer take uporabe je Fabry-Perotov interferometer, opisan v nadaljevanju.

★ Resonatorje poznamo z različnih področij, na primer akustične pri glasbilih ali mikrovalovne in radijske. V mikrovalovnem področju, kjer so valovne dolžine valovanja okoli 1 cm, so resonatorji zaprte kovinske votline z dimenzijami, ki so primerljive z valovno dolžino vzbujenega valovanja. Resonančne frekvence so v takem resonatorju med seboj dobro ločene in ni težko doseči enega samega lastnega nihanja v izbranem frekvenčnem intervalu.

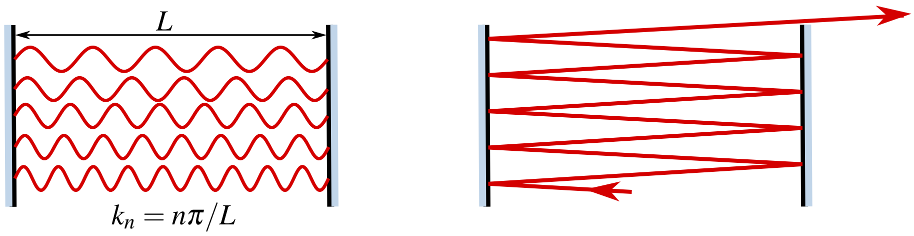
V optiki so resonatorji navadno veliko večji od valovne dolžine svetlobe. Vzemimo kocko s stranico $L \gg \lambda$, v kateri je vzbujeno zelo veliko število lastnih nihanj. Število lastnih nihanj N na frekvenčni interval $\Delta\nu$ zapišemo z zvezno gostoto stanj

$$N = 2\frac{1}{8}4\pi k^2 \Delta k \frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V\Delta\omega = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V\Delta\nu. \tag{4.1}$$

Do gornje enačbe smo prišli tako, da smo prešteli stoječa valovanja z velikostjo valovnega vektorja med k in $k+\Delta k$: volumen pripadajoče krogelne lupine v pozitivnem oktantu $\frac{1}{8}4\pi k^2 \Delta k$ smo delili z volumnom $(\pi/L)^3$, ki pripada enemu stanju. Upoštevali smo tudi, da ima vsako lastno nihanje lahko dve polarizaciji.

Poglejmo primer. Izberimo osrednjo frekvenco $\nu = 3 \cdot 10^{14}$ Hz, ki ustreza valovni dolžini 1 µm, in širino frekvenčnega intervala $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz, ki je značilna za Dopplerjevo razširjeno emisijsko črto v plinu. Potem je v votlini s stranico $L = 1$ cm in prostornino $V = 1$ cm^3 število lastnih nihanj na izbran frekvenčni interval po enačbi (4.1) enako $N = 2{,}5 \cdot 10^8$. Če bi bile vse stene votline idealna zrcala, bi bil čas dušenja vseh lastnih nihanj približno enako dolg in vedno bi vzbujali zelo veliko število resonanc hkrati. Tak resonator bi bil neuporaben.

Hkratnemu vzbujanju velikega števila nihanj se izognemo z zmanjšanjem odbojnosti stranskih sten votline, saj tako povečamo dušenje stoječih valov v prečni smeri. Dušenje valov, ki so pravokotni na idealno odbojni končni steni, ostane nespremenjeno. Nazadnje lahko stranske stene povsem odstranimo, tako da stoječih valov v prečni smeri sploh ni več. Ostane le še nekaj valov, ki so pravokotni na končni steni. Takemu resonatorju pravimo odprti resonator (slika 4.1).



Slika 4.1: Levo: lastni nihajni načini odprtega resonatorja imajo diskretne vrednosti velikosti valovnih vektorjev k_n. Desno: žarki, ki niso pravokotni na zrcali, iz odprtega resonatorja uidejo.

Obravnavajmo odprte resonatorje podrobneje. V zaprti pravokotni votlini velikosti $a \times a \times L$ z idealno odbojnimi stenami so dovoljene vrednosti valovnega vektorja za lastna nihanja

$$\mathbf{k}_{l,m,n} = \left(\frac{l\pi}{a}, \frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{L}\right), \tag{4.2}$$

kjer so l, m in n cela števila, L dolžina, a pa prečna dimenzija resonatorja. Lastne krožne frekvence so

$$\omega_{l,m,n} = c|\mathbf{k}_{l,m,n}|. \tag{4.3}$$

Dolžina resonatorja L je velika v primerjavi z λ, zato je n zelo veliko število. Če prečnih sten ni, je $\mathbf{k}$ približno vzporeden z osjo z in števili l in m sta majhni. Tedaj lahko velikost valovnega vektorja razvijemo in krožno frekvenco zapišemo kot

$$\omega_{l,m,n} = c\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{l^2+m^2}{2n}\frac{L\pi}{a^2}\right). \tag{4.4}$$

Drugi člen v oklepaju je navadno le majhen popravek, tako da so lastne frekvence odprtih optičnih resonatorjev odvisne predvsem od števila vozlov v vzdolžni smeri. To število je navadno veliko, med 10^5 in 10^7. Možna so tudi lastna nihanja z nekaj vozli v prečni smeri, ki pa le malo vplivajo na lastne frekvence. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali predvsem lastna nihanja brez vozlov v prečni smeri in jih označili z enim samim indeksom n.

Razlika med frekvencama dveh zaporednih lastnih nihanj n in $n+1$ je

$$\boxed{\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \quad \text{oziroma} \quad \Delta\nu_n = \frac{c}{2L}.} \tag{4.5}$$

Pri dolžini resonatorja $L = 30$ cm je v frekvenčnem intervalu $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz le še $\Delta\nu/\Delta\nu_n = 6$ lastnih nihanj, ki jih je brez težav mogoče razločiti.

V zaprtih votlinah z zrcalnimi stenami obstajajo dobro določena lastna stanja pri poljubni obliki votline. To ne drži za odprte resonatorje. Da se pojavijo lastna nihanja z majhnimi izgubami, morata biti izpolnjena dva pogoja:

1. Snop žarkov mora po mnogih odbojih ostati ujet med zrcaloma resonatorja.

2. Polmer zrcala mora biti večji od polmera uklonsko razširjenega snopa, ki se širi od nasprotnega zrcala.

Resonatorje, ki zadoščajo gornjima pogojema, imenujemo stabilni resonatorji. Drugi pogoj lahko zapišemo tudi z enačbami, izhajajoč iz enačbe za oceno divergence (enačba 3.1):

$$\vartheta = \frac{\lambda}{a_1} < \frac{a_2}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_1 a_2}{\lambda L} > 1, \tag{4.6}$$

kjer sta a_1 in a_2 polmera zrcal. Izrazu $F = a_1 a_2/\lambda L$ pravimo Fresnelovo število (enačba 1.62) in resonator je stabilen pri $F > 1$. Laserji imajo pogosto $F \gg 1$, lahko tudi $F \sim 100$.

Fabry-Perotov interferometer

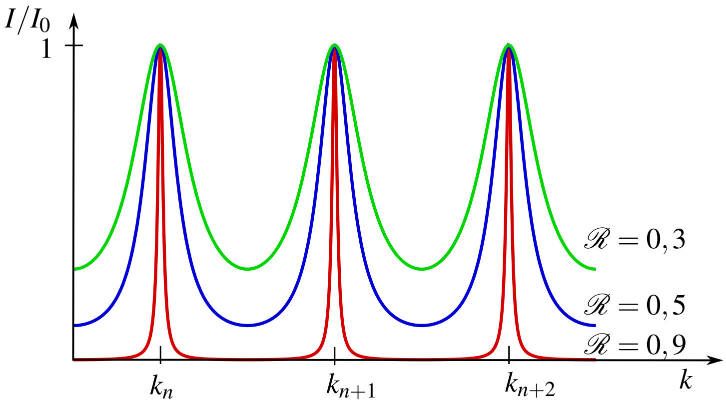
Poglejmo resonator, omejen z dvema vzporednima ravnima zrcaloma z veliko odbojnostjo. Takemu sistemu pravimo Fabry-Perotov interferometer[1]. Da nastane med zrcaloma stoječe valovanje, mora biti razdalja med zrcaloma večkratnik polovične valovne dolžine (enačba 4.2)

$$L = \frac{n\lambda}{2}. \tag{4.7}$$

Prepustnost interferometra za ravni val, ki vpada pravokotno na zrcali z odbojnostjo $\mathscr{R}$, lahko izračunamo (glej nalogo 4.1.1). Prepustnost je enaka

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2 kL} \tag{4.8}$$

in je prikazana na sliki (4.2) za tri različne vrednosti $\mathscr{R}$.



Slika 4.2: Prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v odvisnosti od valovnega števila k pri različnih odbojnostih zrcal $\mathscr{R}$.

Ko je frekvenca vpadnega valovanja ravno enaka lastni frekvenci resonatorja, je sistem v resonanci in $T = 1$. Širina resonance se z naraščajočo odbojnostjo zrcal $\mathscr{R}$ zmanjšuje. Spoznali bomo, da odbojnost zrcal določa tudi čas dušenja vzbujenega lastnega nihanja.

[1] Francoska fizika Maurice Paul Auguste Charles Fabry, 1867–1945, in Jean-Baptiste Alfred Perot, 1863–1925.

Naloga 4.1.1 Pokaži, da je prepustnost Fabry-Perotovega interferometra, katerega zrcali imata odbojnost $\mathscr{R}$, enaka

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2\delta}, \tag{4.9}$$

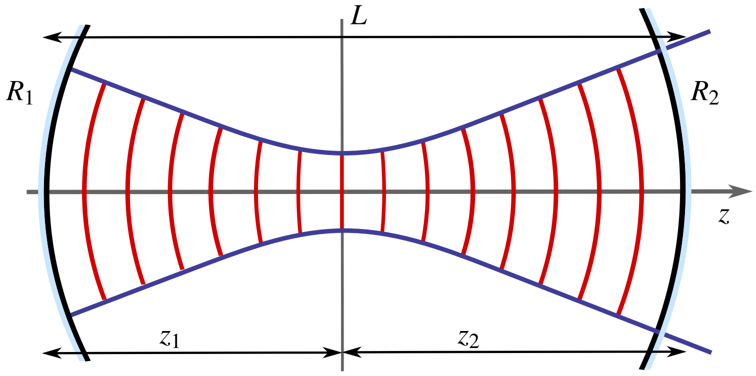
kjer je $\delta = kL\cos\vartheta$, L razmik med zrcaloma, ϑ vpadni kot, k pa valovno število.

Prvemu pogoju za stabilnost ustrezajo v Fabry-Perotovem interferometru le žarki, ki so natanko pravokotni na zrcali. Čim sta zrcali le malo nevzporedni, stabilnih žarkov sploh ni več. Tak planparalelni interferometer torej deluje na meji stabilnosti. Z izpolnjevanjem drugega pogoja ni težav, saj morata biti pri na primer 30 cm dolgem resonatorju in valovni dolžini $0,5$ μm zrcali večji od $0,4$ mm, da zadostita pogoju, zapisanem v enačbi (4.6).

Bolj stabilni resonatorji so sestavljeni iz dveh konkavno ukrivljenih zrcal. Tedaj so žarki, ki potujejo pod majhnim kotom glede na osrednjo os, ujeti med zrcaloma in energija lastnih nihanj ostaja lokalizirana blizu osi.

4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih

V stabilnih resonatorjih s konkavnima zrcaloma pričakujemo, da so lastna nihanja omejena na bližino osrednje osi in zrcali znatno večji od polmera lastnega nihanja. Tedaj lahko za obravnavo električnega polja uporabimo obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Stoječe valovanje se pojavi, kadar svetloba po odboju od zrcala konstruktivno interferira sama s sabo. Od tod izhaja robni pogoj, ki pravi, da se oblika valovne fronte stoječega valovanja na zrcalu ujema z obliko zrcala, električno polje na površini zrcala pa je približno enako nič.



Slika 4.3: Gaussov snop v odprtem resonatorju s konkavno ukrivljenima zrcaloma s krivinskima radijema R_1 in R_2. V stabilnem resonatorju se krivinski radij čela snopa ujema s krivinskim radijem zrcal. Kadar $R_1 \neq R_2$, grlo snopa ne leži na sredini resonatorja.

V prečni smeri omejene rešitve obosne enačbe smo našli v obliki potujočih Gaussovih snopov (enačba 3.29). Podobno kot lahko zapišemo stoječe valovanje z vsoto valovanj, ki se širita v nasprotnih smereh, lahko stoječe snope zapišemo s superpozicijo snopov, ki se širita v različnih smereh ob osi. Da zadostimo robnim pogojem na zrcalih, se mora krivinski radij valovnih front snopa na zrcalih ujemati s krivinskima radijema zrcal R_1 in R_2 (slika 4.3). Pri tem sta neznanki polmer grla snopa w_0, ki je povezan s parametrom z_0, in lega grla.

Postavimo izhodišče osi z v grlo, kot smo navajeni, tako da sta zrcali pri $z_1 < 0$ in $z_2 > 0$. Uporabimo enačbo za krivinski radij snopa R (enačba 3.25) in zapišemo

$$-R_1 = z_1\left[1+\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2\right] \quad \text{in} \tag{4.10}$$

$$R_2 = z_2\left[1+\left(\frac{z_0}{z_2}\right)^2\right]. \tag{4.11}$$

Pri tem smo upoštevali, da je krivinski radij za konkavno zrcalo glede na pozitivno smer z pozitiven. Prvo enačbo smo zapisali z negativnim predznakom pri R_1, zato da je krivinski radij pozitivno število. Veljati mora še

$$z_2 - z_1 = L. \tag{4.12}$$

Iz gornjih enačb najprej izračunamo razdaljo z_1, ki določa lego grla v resonatorju, nato pa parameter z_0, ki določa območje bližnjega polja in preko enačbe (3.21) enolično tudi polmer grla

$$z_0^2 = \frac{L(R_1-L)(R_2-L)(R_1+R_2-L)}{(R_1+R_2-2L)^2}. \tag{4.13}$$

Da je snop realen in omejen, mora biti $z_0^2 > 0$ in zato števec gornjega izraza pozitiven. Ta pogoj lahko po kratkem računu zapišemo v obliki stabilnostnega kriterija

$$\boxed{0 < \left(1-\frac{L}{R_1}\right)\left(1-\frac{L}{R_2}\right) < 1.} \tag{4.14}$$

Resonatorji, ki zadoščajo gornjemu pogoju, so stabilni.

Naloga 4.2.1 Izhajajoč iz pogoja, da se na zrcalih krivinski radij valovnih front snopa ujema s krivinskim radijem zrcal (enačbi 4.10 in 4.11), izpelji kriterij za stabilno delovanje resonatorja (enačba 4.14).

Stabilnostni kriterij za resonatorje je najbolj nazorno predstaviti na diagramu, kjer na os x nanašamo L/R_1, na os y pa L/R_2. Na sliki (4.4) je stabilno območje delovanja resonatorjev, kot ga razberemo iz enačbe (4.14), označeno senčeno. Opazimo, da je možnih veliko različnih vrst stabilnih resonatorjev, ob tem da resonatorji, ki so sestavljeni iz dveh konveksnih zrcal, niso nikoli stabilni. Če je eno zrcalo ravno (plankonkavni resonatorji), je grlo Gaussovega snopa vedno na ravnem zrcalu. V primeru konveksno-konkavnega resonatorja leži grlo snopa izven resonatorja. Podrobneje si oglejmo nekaj posebnih primerov stabilnih resonatorjev.

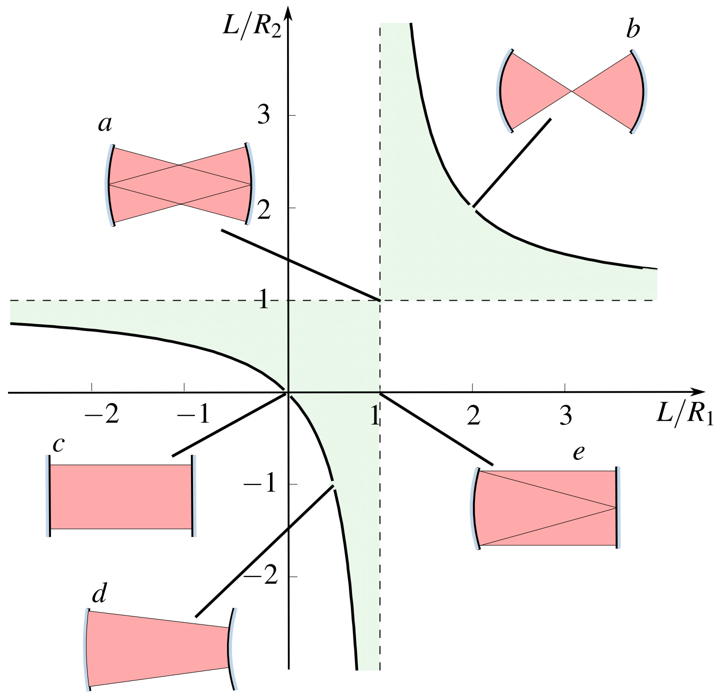
Simetrični resonatorji

Za simetrični resonator velja $R_1 = R_2 = R$. Na diagramu (slika 4.4) se taki resonatorji nahajajo na simetrali lihih kvadrantov pri $x = y$. V simetričnih resonatorjih je grlo v sredini resonatorja in enačba (4.13) se poenostavi v

$$z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(2R-L)L}. \tag{4.15}$$

Polmer grla v simetričnem resonatorju je enak

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\sqrt[4]{(2R-L)L}. \tag{4.16}$$



Slika 4.4: Laserski resonator je stabilen, če sta parametra L/R_1 in L/R_2 znotraj obarvanega območja: (a) konfokalni resonator, (b) koncentrični resonator, (c) planparalelni resonator (Fabry-Perot), (d) konveksno-konkavni resonator in (e) plankonkavni resonator.

Po enačbi (3.19) lahko izračunamo še polmer snopa na ogledalu

$$w_1 = w_0 \sqrt{\left(1 + \left(\frac{L}{2z_0}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \frac{R\sqrt{L}}{\sqrt{2R-L}}}. \tag{4.17}$$

Pri izbrani dolžini simetričnega resonatorja je polmer snopa na zrcalu najmanjši, kadar je $R = L$. Tedaj sovpadata geometrijski gorišči obeh zrcal, zato imenujemo tak resonator konfokalni. Hiter račun pokaže, da velja $z_0 = L/2$, in je celoten obseg resonatorja območje bližnjega polja, snop pa se na razdalji od grla do zrcala razširi za $w_1/w_0 = \sqrt{2}$.

Naloga 4.2.2 Pokaži, da je polmer snopa na izhodnem zrcalu v simetričnem resonatorju z danima parametroma R in L najmanjši, kadar je resonator konfokalni.

Pri dejanskem načrtovanju laserjev velja dodatna omejitev, saj želimo ojačevalno sredstvo, ki je v resonatorju, čim bolj izkoristiti. Pogosto je zato polmer grla snopa razmeroma velik. Iz enačbe (4.16) sledi, da mora biti v tem primeru velik tudi krivinski radij zrcal. S tem pridobimo na ojačenju, po drugi strani pa se nekoliko poslabša stabilnost.

Poglejmo primer. Naj bo dolžina resonatorja laserja $L = 1$ m in valovna dolžina $\lambda = 633$ nm. Tedaj je v konfokalni geometriji po enačbi (4.16) polmer grla $w_0 = 0,32$ mm. Premer razelektritvene cevi je navadno nekaj milimetrov in približno tako debel mora biti tudi svetlobni snop, da dobro izkoristi ojačenje zaradi stimuliranega sevanja. Da bi pri isti dolžini laserja dobili grlo s premerom 2 mm, bi morali uporabiti zrcali s krivinskim radijem okoli 50 m. Primer kaže, da že majhna ukrivljenost zrcal zagotovi dokaj ozke snope.

★ Izkaže se, da so konfokalni resonatorji najmanj občutljivi na majhne zasuke zrcal. Pri zasuku zrcala se v navadnih stabilnih resonatorjih namreč premakne os, ki gre skozi krivinski središči obeh zrcal. Če želimo, da je največji odmik nove osi kar se da majhen, uporabimo konfokalne resonatorje.

Skrajna primera stabilnega simetričnega resonatorja sta koncentrični resonator, pri katerem sovpadata krivinski središči zrcal in $L = 2R$, in planparalelni resonator, pri katerem sta zrcali ravni. V prvem primeru gre po enačbi (4.16) polmer grla proti nič, v drugem pa raste sorazmerno z $R^{1/4}$. Pri ravnih zrcalih postanejo uklonske izgube na robovih znatne. Račun z Gaussovimi snopi tedaj ni več veljaven in treba je uporabiti pristope, ki jih bomo opisali v razdelku (4.6).

Poleg osnovnega Gaussovega snopa rešijo obosno enačbo tudi snopi višjega reda. Ti imajo enak parameter z_0 in enako ukrivljenost R, zato tudi taki snopi predstavljajo rešitve za polje v stabilnih resonatorjih. Vendar je pri enakem w_0 polmer snopa reda n za približno $\sqrt{n}$-krat večji (glej nalogo 3.4.1). Če želimo, da iz laserja izhaja samo osnovni Gaussov snop[2] (ki ima najmanjšo divergenco pri danem w_0) pogosto uporabimo zaslonko, ki snope višjih redov poreže, ali kakšen drug element, npr. Fabry-Perotov etalon[3], ki poveča izgube za snope višjega reda.

★ Včasih se uporabljajo tudi nestabilni resonatorji, za katere ne obstajajo rešitve v obliki Gaussovih snopov. Taki resonatorji imajo velike izgube na robovih zrcal, ker žarki v njih niso ujeti. Uporabni so predvsem v laserjih z velikim ojačenjem. Njihova prednost je, da je cel volumen resonatorja enakomerno pokrit s svetlobo.

4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom

V prejšnjem razdelku smo izpeljali pogoj za stabilnost resonatorja, sestavljenega iz dveh zrcal s polmeroma R_1 in R_2, ki sta med seboj oddaljeni za L. Izhajali smo iz pogoja, da se ukrivljenost valovnih front na zrcalu ujema z ukrivljenostjo zrcal. Vendar so sistemi z zgolj dvema zrcaloma razmeroma redki. Pogosto so v resonatorju druge optične komponente, ki jih je treba upoštevati pri zapisu kriterija za stabilnost. Takrat si pomagamo z matrikami ABCD.

Izhajamo iz zahteve, da se v stabilnem resonatorju snop po enem celotnem obhodu preslika sam vase. Gaussov snop na neki točki v resonatorju zapišemo s kompleksno ukrivljenostjo q (enačba 3.33). V najpreprostejšem primeru resonatorja snop prepotuje razdaljo do zrcala, se na njem odbije, prepotuje resonator v nasprotni smeri, se odbije od drugega zrcala in se vrne v izhodišče. V bolj zapletenih primerih je treba upoštevati še prehode skozi druge optične elemente. Matriko za celoten prehod zapišemo kot produkt matrik ABCD za posamezne prehode $M = M_N M_{N-1} ... M_2 M_1$. Končni produkt za celoten obhod je matrika oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

kompleksni krivinski radij po obhodu pa je enak začetnemu

$$q_2 = \frac{Aq + B}{Cq + D} = q. \tag{4.19}$$

[2]Osnovni Gaussov snop imenujemo tudi TEM_{00} – *Transverse Electromagnetic Mode*, transverzalno elektromagnetno valovanje.

[3]Razlika med Fabry-Perotovim interferometrom in etalonom je v tem, da je interferometer sestavljen iz premičnih zrcal, etalon pa je ploščica z nespremenljivo debelino. Pri izrazu za prepustnost etalona je treba upoštevati še lomni količnik ploščice.

Gornjo enačbo prepišemo v

$$Cq^2 + (D-A)q - B = 0. \tag{4.20}$$

Da je w realen, mora biti q kompleksen (enačba 3.33) in zato diskriminanta kvadratne enačbe negativna

$$(D-A)^2 + 4BC < 0. \tag{4.21}$$

Upoštevamo še, da je determinanta matrike $AD - BC = 1$ in pogoj za stabilnost zapišemo s koeficienti matrike M

$$\boxed{-1 < \left(\frac{A+D}{2}\right) < 1.} \tag{4.22}$$

Naloga 4.3.1 Pokaži, da je za resonator z dolžino L in s konkavnima zrcaloma s krivinskima radijema R_1 in R_2 pogoj za stabilnost (enačba 4.22) ekvivalenten pogoju (4.14).

★ Podoben, a malo bolj zapleten račun lahko naredimo tudi za resonatorje, v katerih se snop ne vrne v svojo začetno obliko po enem obhodu, ampak je teh obhodov n. V tem primeru zapišemo matriko M kot produkt elementov v enem obhodu, celotna matrika pa je enaka M^n. Iz pogoja, da matrika ne divergira za velike n, izpeljemo pogoj za stabilnost, ki je natančno enak pogoju (4.22).

4.4 Resonančne frekvence

Doslej smo obravnavali le prostorsko obliko polja v resonatorju, ničesar pa še nismo povedali o časovni odvisnosti lastnih nihanj. Frekvence lastnih nihanj izpeljemo iz pogoja, da se mora faza snopa pri enem obhodu[4] spremeniti za mnogokratnik 2π. Fazo za osnovni snop zapišemo po enačbi (3.29)

$$\phi = kz + \frac{kr^2}{2R} - \eta(z) = kz - \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \tag{4.23}$$

pri čemer smo se omejili na valovanje na osi pri $r = 0$. Razlika faze po obhodu je

$$\frac{\omega_n}{c} 2L - 2\left(\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right) = 2n\pi. \tag{4.24}$$

Člen v oklepaju je enak za vsa nihanja in le za delček valovne dolžine spremeni efektivno dolžino resonatorja. Ker dolžine resonatorja niti ne poznamo tako natančno, lahko ta prispevek zanemarimo. Iz istega razloga lahko izpustimo tudi spremembo faze na zrcalu. Od tod sledi znana enačba za resonančne frekvence

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{in} \quad \nu_n = \frac{nc}{2L}. \tag{4.25}$$

Konstantni členi, ki jih pri zapisu frekvence nismo upoštevali, ne vplivajo na razmik med dvema zaporednima lastnima frekvencama. Razlika med zaporednima lastnima frekvencama je tako v skladu z enačbo (4.5)

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \quad \text{in} \quad \Delta\nu_n = \frac{c}{2L}. \tag{4.26}$$

[4] Prelet resonatorja je prehod svetlobe od enega zrcala do drugega, obhod pa imenujemo prelet v obe smeri.

Za snope višjega reda, ki imajo vozle v prečni smeri, je fazni premik odvisen tudi od števila vozlov. Tako je na primer v cilindričnih koordinatah (enačba 3.39)

$$\eta_{p,l}(z) = (2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{4.27}$$

Resonančni pogoj zapišemo kot

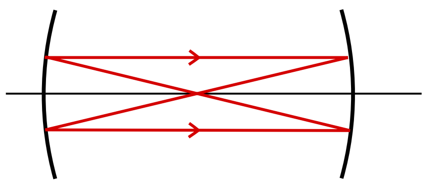
$$\frac{\omega_{n,p,l}}{c}2L - 2(2p+l+1)\left(\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right) = 2n\pi. \tag{4.28}$$

Resonančne frekvence so torej odvisne tudi od števila prečnih vozlov (slika 4.6), kar je dodaten razlog, da v laserjih vzbujamo le osnovno lastno nihanje.

Zanimiv in praktično pomemben je primer konfokalnega resonatorja, pri katerem je $z_0 = L/2$ in $\arctan(L/2z_0) = \arctan(1) = \pi/4$. Resonančne frekvence so

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L}\left(n + \frac{1}{2}(2p+l+1)\right) \quad \text{in} \quad \nu_{n,p,l} = \frac{c}{2L}\left(n + \frac{1}{2}(2p+l+1)\right). \tag{4.29}$$

Snopi, pri katerih je $2p+l$ liho število, imajo iste resonančne frekvence kot osnovni snopi, pri sodih $2p+l$ pa se pojavijo še resonance na sredini med osnovnimi. Razmik med sosednjimi frekvencami je tako $\Delta\nu = c/4L$ in konfokalni interferometer se obnaša kot dvakrat daljši planparalelni. To lahko razumemo tudi iz geometrijske slike: žarek, ki vstopi v konfokalni resonator ali interferometer vzporedno z osjo, se šele po dveh obhodih vrne sam vase.

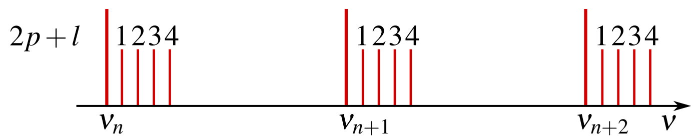


Slika 4.5: V konfokalnem resonatorju se žarek šele po dveh obhodih vrne sam vase.

Pri skoraj planparalelnem simetričnem resonatorju je $z_0 \gg L$, $\arctan(L/2z_0)$ lahko razvijemo, upoštevamo enačbo (4.15) in zapišemo

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L}\left(n + (2p+l+1)\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2L}{R}}\right). \tag{4.30}$$

Ker je L majhen v primerjavi z R, so resonance snopov nizkega prečnega reda zelo blizu resonancam osnovnih snopov. Poglejmo primer. Vzemimo simetrični resonator z dolžino $L = 1$ m in $R = 50$ m, valovna dolžina naj bo $\lambda = 500$ nm. Z uporabo enačbe (4.15) hitro lahko izračunamo $z_0 = 4{,}97$ m. Ker je pogoj $z_0 \gg L$ izpolnjen, lahko uporabimo gornji približek. Razlika med frekvencama dveh osnovnih snopov je $\Delta\nu_{n,p,l} = 150$ MHz, medtem ko je razlika med frekvencama dveh prečnih snopov $\Delta\nu_{n,p,l} = 9{,}5$ MHz.



Slika 4.6: Resonančne frekvence za skoraj planparalelni ($R \gg L$) resonator

4.5 Izgube v resonatorjih

Energija lastnega nihanja odprtega resonatorja ni konstantna, ampak se počasi zmanjšuje. Razlogov je več:

1. Odbojnost zrcal ni enaka 1. Tudi če bi znali narediti popolno odbojna zrcala, tak resonator ne bi bil uporaben, saj nihanja ne bi mogli sklopiti z zunanjim poljem. Če naj torej laser oddaja svetlobo, mora biti odbojnost vsaj enega od zrcal manjša od 1.

2. Na sredstvu in na optičnih elementih v resonatorju pride do absorpcije in sipanja svetlobe. Te izgube želimo navadno kar se da zmanjšati.

3. Uklonske izgube so odvisne od velikosti zrcal in velikosti snopa na njih. V dani geometriji imajo najmanjši polmer osnovni snopi, snopi višjega reda so širši, zato imajo večje uklonske izgube. Merilo za uklonske izgube je Fresnelovo število (enačba 4.6) $N_F = a^2/(L\lambda)$, kjer je a polmer ogledal. Pri enakem N_F je polmer snopa na izhodnem zrcalu najmanjši, če je resonator konfokalni, zato ima tak resonator tudi najmanjše uklonske izgube (glej nalogo 4.2.2). Navadno je N_F znatno večji od 1 in so uklonske izgube zanemarljive.

Vse izgube lahko popišemo z razpadnim časom za energijo

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau}W, \tag{4.31}$$

in

$$W = W_0 e^{-2t/\tau}, \tag{4.32}$$

pri čemer τ imenujemo življenjski ali razpadni čas nihanj. Izguba energije na celoten obhod resonatorja je sestavljena iz izgub na zrcalih in drugih (predvsem notranjih) izgub

$$\Delta W = -(1-\mathscr{R}_1)W - (1-\mathscr{R}_2)W - \Lambda_0 W = -\Lambda W. \tag{4.33}$$

Z $\mathscr{R}_1$ in $\mathscr{R}_2$ smo označili odbojnosti zrcal, od katerih je navadno ena kolikor mogoče blizu 1. Parameter Λ_0 popiše absorpcijo in sipanje znotraj resonatorja ter morebitne uklonske izgube. Tipične vrednosti Λ_0 so do nekaj stotink. Celotne izgube združimo v parameter Λ.

Razpadni čas nihanja lahko neposredno povežemo z izgubami, če v enačbo (4.31) vstavimo čas enega obhoda $t = 2L/c$. Zapišemo

$$\frac{\Delta W}{W} = -\Lambda = -\frac{2}{\tau}\frac{2L}{c}, \tag{4.34}$$

od koder sledi

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\Lambda c}{4L} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{c}{4L}\left((1-\mathscr{R}_1)+(1-\mathscr{R}_2)\right), \tag{4.35}$$

kjer smo s

$$\tau_0 = \frac{4L}{\Lambda_0 c} \tag{4.36}$$

označili razpadni čas zaradi notranjih izgub.

Notranje izgube Λ_0 so navadno zelo majhne, odbojnost enega zrcala je $\mathscr{R}_1 \sim 1$, tako da je življenjski čas nihanj približno

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{c}{4L}(1-\mathscr{R}_2).} \tag{4.37}$$

Zaradi dušenja se energija lastnih nihanj eksponentno zmanjšuje, prav tako tudi amplituda jakosti električnega polja, ki pojema s karakterističnim časom τ. Spekter eksponentno pojemajoče funkcije lahko izračunamo (glej nalogo 2.4.2) in dobimo Lorentzovo krivuljo s širino črte, ki ustreza ravno

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \tag{4.38}$$

Lastne krožne frekvence torej niso neskončno ozke, ampak imajo končno širino $2/\tau$. Poglejmo primer. Naj bodo notranje izgube na obhod $\Lambda_0 = 0{,}01$, eno zrcalo naj bo idealno, drugo naj ima odbojnost $\mathscr{R} = 0{,}93$. Dolžina resonatorja naj bo $L = 0{,}5$ m, valovna dolžina pa 500 nm. Tedaj je $1/\tau = 12 \cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$. Zanimivo je pogledati razmerje med razliko krožnih frekvenc $\Delta\omega_n$ (enačba 4.5) in širino resonance $2/\tau$. Za opisani primer velja $\Delta\omega_n \tau/2 \approx 80$.

★ Namesto razpadnega časa τ se za opis izgub pogosto uporablja dobrota resonatorja, ki jo vpeljemo kot razmerje med resonančno krožno frekvenco in širino črte

$$Q = \frac{\omega_n}{2\gamma} = \frac{\omega_n \tau}{2}. \tag{4.39}$$

Za tipične optične resonatorje je resonančna krožna frekvenca $\omega_n \sim 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$, širina pa reda $1/\tau \sim 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$. Faktor dobrote je tako $Q \sim 10^8$. Optični resonatorji imajo zelo velike faktorje dobrote!

Poglejmo še primer, ko so notranje izgube zanemarljive in sta odbojnosti obeh zrcal enaki. Potem sledi iz enačbe (4.35)

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{c}{2L}(1-\mathscr{R}).} \tag{4.40}$$

Do istega rezultata pridemo tudi z razvojem izraza za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra (enačba 4.8) okoli vrha pri ω_n

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2} \sin^2 L\frac{(\omega-\omega_n)}{c}} \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{(1-\mathscr{R})}\frac{L}{c}(\omega-\omega_n)\right)^2}, \tag{4.41}$$

kjer smo upoštevali še, da je odbojnost $\mathscr{R} \approx 1$. Rezultat je znana Lorentzova krivulja oblike

$$T = \frac{\gamma^2}{(\omega-\omega_n)^2 + \gamma^2}, \tag{4.42}$$

od koder hitro razberemo

$$\frac{1}{\tau} = \gamma = \frac{c}{2L}(1-\mathscr{R}). \tag{4.43}$$

4.6 *Obravnava resonatorjev z uklonskim integralom

V nestabilnih resonatorjih stacionarna rešitev v obliki stoječega Gaussovega snopa ne obstaja. Zato je v takih resonatorjih rešitev za električno polje precej zahtevno poiskati. Ker pa je problem soroden uklonu, ga lahko obravnavamo z uklonsko teorijo.

Označimo jakost električnega polja v točki P_1 na prvem zrcalu z E_1. Polje na drugem zrcalu v točki P_2 lahko zapišemo s Kirchhoffovim uklonskim integralom (enačba 1.55)

$$E_2 = -\frac{i}{2\lambda}\int_1 E_1(P_1)\frac{e^{ikr}(1+\cos\vartheta)}{r}\,dS_1 \tag{4.44}$$

$$= \int_1 E_1(P_1)K(P_1,P_2)dS_1. \tag{4.45}$$

Integriramo po celotni prvi ploskvi, r je razdalja med točkama P_1 in P_2, ϑ je kot med zveznico in normalo na zrcali v osi, druge faktorje pa smo pospravili v faktor

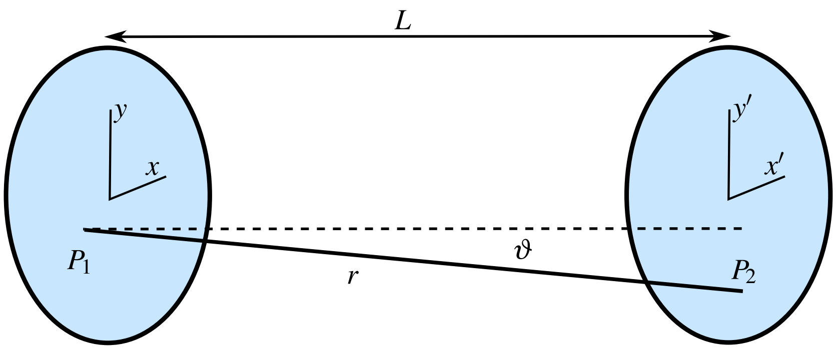
$$K(P_1,P_2) = -\frac{i}{2\lambda}\frac{e^{ikr}(1+\cos\vartheta)}{r}, \tag{4.46}$$

ki predstavlja jedro integralske enačbe. Polje na prvem zrcalu je na enak način povezano s poljem na drugem. Če naj zapisano polje predstavlja lastno nihanje resonatorja, mora biti po dveh odbojih sorazmerno začetnemu polju

$$E_1(P) = \gamma\int_1\int_2 E_1(P_1)K(P_1,P_2)K(P_2,P_1)\,dS_1\,dS_2. \tag{4.47}$$

Enačba (4.47) je homogena integralska enačba, katere lastne rešitve so iskana lastna nihanja elektromagnetnega polja v resonatorju. Kompleksne lastne vrednosti γ določajo frekvenco in dušenje nihanj. Na splošno rešitev ni mogoče poiskati analitično in treba je uporabiti numerične metode. Najenostavnejša je iterativna metoda, pri kateri začnemo z nekim začetnim poljem in ponavljamo integracijo v enačbi (4.47), dokler se polje ne spreminja več.

Integralsko enačbo (enačba 4.47) je mogoče rešiti v posebnem primeru konfokalnega resonatorja. Privzemimo, da je brez izgub. Resonator je simetričen, zato se polje na obeh zrcalih lahko razlikuje kvečjemu za predznak.



Slika 4.7: Koordinatna sistema na zrcalih resonatorja

Vpeljemo kartezične koordinate na obeh zrcalih, kot kaže slika (4.7). Pričakujemo, da bo prečna razsežnost lastnega nihanja majhna v primerjavi z dolžino resonatorja L, zato lahko r razvijemo, pri čemer se kvadratni členi ravno odštejejo zaradi ukrivljenosti zrcal. Ostaneta le še mešana člena

$$r \approx L - \frac{xx' + yy'}{L}. \tag{4.48}$$

V konfokalnem resonatorju je krivinski radij zrcal kar enak dolžini resonatorja. V imenovalcu jedra integrala (enačba 4.46) zato lahko r nadomestimo z L. Koti med zveznico točk na obeh zrcalih in normalo na zrcali so majhni, zato je $\cos\vartheta \approx 1$.

Tako iz enačbe (4.45) sledi

$$E(x',y') = \pm\frac{ie^{ikL}}{\lambda L}\int E(x,y)\exp\left(\frac{-ik(xx'+yy')}{L}\right)dx\,dy. \tag{4.49}$$

Integracija poteka po celem zrcalu. Jedro integrala je produkt dveh faktorjev, ki vsebujeta vsak le x' ali y' koordinati. Zato poiščemo rešitev enačbe (4.49) v obliki produkta $E(x',y') = E_0 f(x')g(y')$. S tem nastavkom mora biti funkcija $f(x')$ rešitev enačbe

$$\alpha f(x') = \int f(x)\exp\left(\frac{-ikxx'}{L}\right)dx, \tag{4.50}$$

kjer je α še neznana konstanta. Meje integrala so od enega do drugega roba zrcala. Če je zrcalo dovolj veliko, pričakujemo, da je polje na robu dovolj majhno, da lahko meje vzamemo kar od $-\infty$ do ∞. Vpeljemo še brezdimenzijski koordinati

$$X = x\sqrt{k/L} \quad \text{in} \quad X' = x'\sqrt{k/L} \tag{4.51}$$

in dobimo

$$\alpha f(X') = \sqrt{\frac{L}{k}}\int_{-\infty}^{\infty} f(X)e^{-iXX'}\,dX \tag{4.52}$$

ter podobno enačbo za $g(Y')$. Enačba (4.52) pravi, da mora biti $f(X)$ podobna svoji Fourierevi transformiranki. Najpreprostejša funkcija s to lastnostjo je Gaussova funkcija

$$f(X) = \exp\left(-\frac{1}{2}X^2\right). \tag{4.53}$$

Polje na zrcalu ima tako po pričakovanju obliko Gaussovega snopa

$$E(x,y) = E_0\exp\left(-\frac{k(x^2+y^2)}{2L}\right). \tag{4.54}$$

Poglejmo še konstanto α. Iz enačbe (4.52) sledi, da je njena vrednost $\alpha = \sqrt{2\pi L/k} = \sqrt{\lambda L}$. Postavimo zdaj izračunano električno poljsko jakost (enačba 4.54) z ustrezno vrednostjo za α v enačbo (4.49) in upoštevajmo, da mora biti $E_2 = \pm E_1$. Sledi

$$i\alpha^2\frac{e^{ikL}}{\lambda L} = ie^{ikL} = \pm 1. \tag{4.55}$$

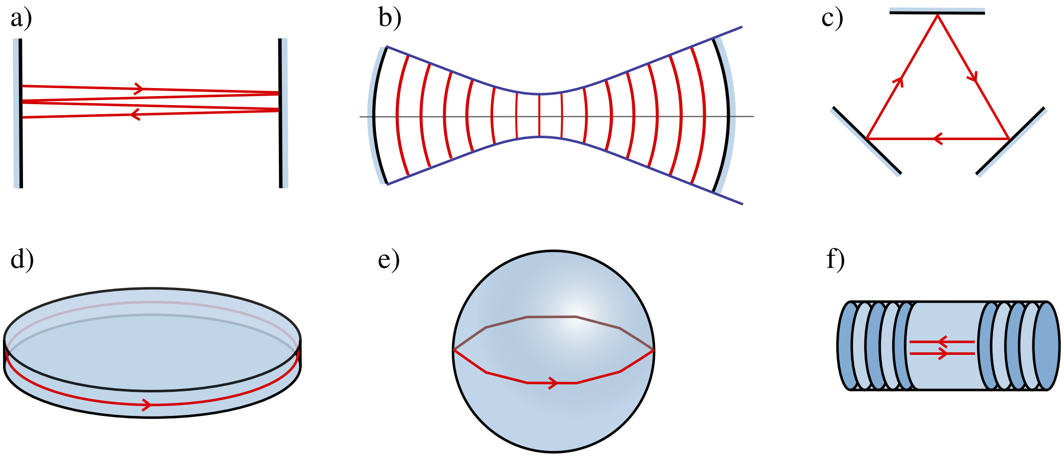
Iz gornjega izraza izpeljemo resonančni pogoj za frekvenco lastnega nihanja in izračunamo razliko med dvema lastnima krožnima frekvencama, ki jo že poznamo (enačba 4.26)

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L}. \tag{4.56}$$

Integralska enačba iz uklonske teorije tako da isti rezultat kot stoječe valovanje v obliki Gaussovih snopov, ki so rešitve obosne valovne enačbe. To nas seveda ne preseneča, saj je obosna valovna enačba enako natančna kot Fresnelova uklonska teorija.

Naloga 4.6.1 Pokaži, da so funkcije, ki so sorazmerne svoji Fourierevi transformaciji, Hermite-Gaussove funkcije (enačba 3.34), in izračunaj lastne frekvence nihanj višjega reda.

DO zdaj smo obravnavali samo dva primera laserskih resonatorjev: Fabry-Perotov resonator z dvema vzporednima ravnima zrcaloma (a) in resonator z dvema sferičnima zrcaloma (b). Poleg teh dveh primerov je v uporabi še cela vrsta različnih resonatorjev. Ciklični resonator (c) je sestavljen iz več zrcal in žarek ciklično potuje med njimi. V vlakenskih laserjih je resonator optično vlakno med dvema zrcaloma ali pa sklenjeno vlakno. Kot laserski resonator lahko delujejo tudi mikroploščice (d) ali mikrokroglice (e), v katere je s totalnim odbojem ujeta svetloba. Namesto zrcal se v mikroresonatorjih uporablja tudi periodične dielektrične strukture, na katerih pride do Braggovega odboja (f).



4.7 *Sklopitev resonatorja z okolico

Na začetku poglavja smo omenili, da resonatorjev ne uporabljamo le pri izdelavi laserjev, ampak lahko služijo tudi kot frekvenčni in prostorski filtri za svetlobno valovanje. Povezavo med lastnimi nihanji resonatorja in prepustnostjo ter odbojnostjo za valovanje, ki na resonator vpada, bomo poiskali s formalizmom sklapljanja valovanj, ki je neke vrste perturbacijska analiza in je pogosto zelo uporaben.

Začnimo z resonatorjem z idealno odbojnimi stenami brez notranjih izgub. Stoječe lastno valovanje v resonatorju zapišemo kot produkt krajevnega in časovnega dela

$$E(\mathbf{r},t) = f(t)g(\mathbf{r}). \tag{4.57}$$

Krajevni del $g(\mathbf{r})$ naj bo normiran tako, da je $\int g^2 dV = 1$. Iz valovne enačbe (enačba 1.13) sledi, da mora časovni del zadoščati nihajni enačbi drugega reda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_n^2 f = \ddot{f} + \omega_n^2 f = 0. \tag{4.58}$$

Vpeljemo novo kompleksno spremenljivko a, ki je kombinacija funkcije f in njenega časovnega odvoda

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2}}(f + \frac{i}{\omega_n}\dot{f}). \tag{4.59}$$

Izbira predfaktorja bo razvidna v nadaljevanju. Z odvajanjem in uporabo nihajne enačbe (enačba 4.58) ugotovimo, da za a velja diferencialna enačba

$$\dot{a} = -i\omega_n a. \tag{4.60}$$

Funkcija a ima preprosto časovno odvisnost $e^{-i\omega_n t}$.

Poglejmo elektromagnetno energijo v resonatorju. Električni del energije polja, ki je ravno polovica celotne energije, zapišemo kot

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 f^2 \int g^2 dV = \frac{1}{4}(a+a^*)^2. \tag{4.61}$$

V spremenljivki a in konjugirani spremenljivki a^* prepoznamo klasično obliko anihilacijskih in kreacijskih operatorjev v kvantno-mehanskem opisu harmonskega oscilatorja.

Celotna energija lastnega nihanja resonatorja je po analogiji iz kvantne mehanike enaka

$$W = |a|^2. \tag{4.62}$$

Vpeljana nova spremenljivka $a(t)$ je sorazmerna z $e^{-i\omega_n t}$, zato ji pravimo tudi komponenta amplitude s pozitivno frekvenco. Prednost uporabe spremenljivke a je v preprostejših enačbah, ki so le prvega reda.

Obravnavali smo resonator brez izgub, zdaj si oglejmo še primer z izgubami. Izgube v resonatorju opišemo z dodatnim členom v enačbi (4.60)

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a. \tag{4.63}$$

V taki obliki lahko zapišemo enačbo le, kadar so izgube majhne. Če niso, je treba uporabiti navadno nihajno enačbo drugega reda. Gornji približek namreč ne vsebuje zmanjšanja nihajne frekvence pri velikem dušenju. Prehod na dve nesklopljeni enačbi prvega reda za a in a^* je točen le, kadar ni izgub. Izgube sklopijo enačbi za a in a^*, vendar smo v našem približku to sklopitev zanemarili.

Naj bo odbojnost enega zrcala resonatorja nekoliko manjša od 1. Izgube v resonatorju potem opišemo kot (enačba 4.37) $1/\tau = (1-\mathscr{R})c/(4L)$. Druga posledica zmanjšane odbojnosti je sklopitev resonatorja z okolico. To pomeni, da valovanje izhaja iz resonatorja, po drugi strani pa to pomeni tudi, da je lastno nihanje mogoče vzbujati z valovanjem, ki na resonator vpada.

Naj s_+ opiše snop valovanja, ki vpada na resonator. Amplituda s_+ naj bo izbrana tako, da je $|s_+|^2$ enako moči vpadnega valovanja. Zaenkrat tudi zanemarimo notranje izgube resonatorja. Potem lahko zapišemo

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a + \kappa s_+, \tag{4.64}$$

kjer je κ sklopitveni koeficient med vpadnim valovanjem in amplitudo lastnega nihanja. Koeficient κ je določen s prepustnostjo zrcala, ki pa je vsebovana tudi v $1/\tau$. Koeficient κ torej ni neodvisen in poiščimo zvezo med κ in $1/\tau$.

Naj ima vpadno valovanje frekvenco ω. Tedaj lahko iz enačbe (4.64) izračunamo amplitudo nihanja v stacionarnem stanju. Upoštevamo, da mora imeti v stacionarnem stanju nihanje enako frekvenco kot vpadni val. Sledi

$$a = \frac{\kappa s_+}{i(\omega_n - \omega) + 1/\tau}. \tag{4.65}$$

Označimo del valovanja, ki se od resonatorja odbije ali iz njega izvira, s s_-. Če vpadnega vala ni, energija nihanja pojema zaradi odtekanja v s_-. Ohranitev energije da

$$-\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}|a|^2 = \frac{2}{\tau}|a|^2 = |s_-|^2 \tag{4.66}$$

ali

$$|s_-| = \sqrt{\frac{2}{\tau}}|a|, \tag{4.67}$$

kjer smo fazo s_- priredili z izbiro referenčne ravnine, v kateri opazujemo s_-.

Ob prisotnosti vpadnega vala s_+ lahko izhajajoči val zapišemo kot vsoto direktnega odboja vpadnega vala s_+ in prispevka iz resonatorja

$$s_- = rs_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau}}a, \tag{4.68}$$

kjer r zaenkrat še ne poznamo. Ker ni notranjih izgub, mora bit v stacionarnem stanju vpadna moč enaka izhajajoči

$$|s_+|^2 = |s_-|^2. \tag{4.69}$$

Uporabimo še izraz za stacionarno vrednost a (enačba 4.65) in zapišemo enakost

$$r^2 + \frac{2(\tau\kappa^2 + r\kappa\sqrt{2\tau})}{1+\tau^2(\omega_n-\omega)^2} = 1. \tag{4.70}$$

Gornja enačba mora veljati pri vsaki frekvenci ω, to je pri vsaki vrednosti imenovalca ulomka. Zato mora biti $r^2 = 1$ in $\tau\kappa = -r\sqrt{2\tau}$. Ker sta τ in κ pozitivna, je $r = -1$ in

$$\kappa = \sqrt{\frac{2}{\tau}}. \tag{4.71}$$

Odbito valovanje lahko torej zapišemo

$$s_- = -s_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau}}a. \tag{4.72}$$

Z upoštevanjem notranjih izgub (enačba 4.36) se amplituda nihanja spremeni v

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau}\right)a + \sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+. \tag{4.73}$$

Enačbi (4.72) in (4.73) sta osnovna izraza za sklapljanje resonatorjev z enim vhodom. Za primer uporabe izračunajmo odbojnost resonatorja s_-/s_+ kot funkcijo frekvence vpadnega vala. V enačbo (4.72) vstavimo izraz za stacionarno vrednost amplitude nihanja

$$a = \frac{\sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+}{i(\omega_n-\omega)+(\frac{1}{\tau_0}+\frac{1}{\tau})}. \tag{4.74}$$

Sledi

$$\frac{s_-}{s_+} = \frac{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_0}-i(\omega_n-\omega)}{\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau_0}+i(\omega_n-\omega)}. \tag{4.75}$$

Daleč od resonance je odbojnost -1. V resonanci (pri $\omega_n = \omega$) odboja ni, kadar je $\tau = \tau_0$. Takrat je moč, ki gre iz vpadnega valovanja v vzbujanje resonatorja, največja in je sklopitev, ki jo meri τ, popolnoma prilagojena izgubam. Taka prilagoditev je analogna zahtevi, da mora biti impedanca bremena na koncu valovoda ali koaksialnega kabla enaka impedanci valovoda oziroma kabla.

Če sta obe zrcali resonatorja delno prepustni, kot na primer pri Fabry-Perotovem interferometru, je enačba za amplitudo nihanja

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) a + \kappa_1 s_{+1} + \kappa_2 s_{+2}, \tag{4.76}$$

kjer sta s_{+1} in s_{+2} valovanji, ki vpadata z ene in druge strani. Izgube zaradi končne prepustnosti so

$$\frac{1}{\tau_{1,2}} = \frac{c}{4L}(1 - \mathscr{R}_{1,2}). \tag{4.77}$$

S podobnim razmislekom kot prej, s tem da postavimo najprej eno, nato drugo vpadno valovanje na nič, dobimo

$$\kappa_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{\tau_{1,2}}}. \tag{4.78}$$

Prepustnost resonatorja – oziroma razmerje med močjo vpadnega valovanja na eni strani in izhodnega na drugi – je

$$T = \frac{|s_{-2}|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{2}{\tau_2}\frac{|a|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{4\tau_c^2/\tau_1\tau_2}{1 + \tau_c^2(\omega_n - \omega)^2}, \tag{4.79}$$

kjer je $1/\tau_c = 1/\tau_0 + 1/\tau_1 + 1/\tau_2$. Če ni notranjih izgub, je prepustnost v resonanci

$$T = \frac{4/\tau_1\tau_2}{(1/\tau_1 + 1/\tau_2)^2}. \tag{4.80}$$

Prepustnost je v resonanci popolna, če sta obe zrcali enaki in $\tau_1 = \tau_2$. Gornja izraza se ujemata z znanim izrazom za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v bližini resonanc, če so izgube in prepustnost zrcal majhne (enačbi 4.8 in 4.42).

Resonatorji imajo mnogo lastnih nihanj. Očitno veljajo gornji izrazi za vsako lastno nihanje posebej in celoten odziv resonatorja na poljubno vpadno valovanje zapišemo kot vsoto po vseh lastnih nihanjih. Pri tem ne smemo pozabiti, da mora vpadno valovanje, ki se sklaplja z izbranim lastnim nihanjem, imeti prostorsko odvisnost, ki ustreza lastnemu stanju. V primeru stabilnih resonatorjev iz prejšnjih razdelkov mora torej biti vpadni snop Gaussov z enakim w_0 in istega prečnega reda kot resonatorsko stanje. Če vpadno valovanje ni tako, ga najprej razvijemo po Gaussovih snopih, ki ustrezajo resonatorju. Pri zahtevnejših interferometričnih meritvah je treba za vzbujanje le ene resonance vpadni snop prilagoditi resonatorju, tako da je polmer na vhodnem zrcalu enak polmeru lastnega nihanja, krivinski radij vpadne valovne fronte pa enak krivinskemu radiju zrcala.

Resonator pa ne deluje le kot frekvenčni filter, ampak tudi kot prostorski. Če ima vpadno valovanje isto frekvenco kot eno od nihanj resonatorja, ima prepuščeno valovanje obliko Gaussovega snopa, kot jo določa resonator, ne glede na obliko vpadnega snopa.

Gornji način obravnave resonatorjev in sklopitve z vpadnim valovanjem je posebej prikladen za račun nestacionarnega obnašanja in za primer, ko je resonator napolnjen z nelinearnim sredstvom.

4.8 *Sklopitev dveh resonatorjev

Podobno kot sklopitev z zunanjim valovanjem lahko obravnavamo tudi sklopitev med dvema resonatorjema. Naj bosta dva resonatorja brez izgub sklopljena z delno prepustnim zrcalom. Sklopitev naj bo šibka, tako da lahko zapišemo

$$\dot{a}_1 = -i\omega_1 a_1 + \kappa_{12} a_2 \tag{4.81}$$

$$\dot{a}_2 = -i\omega_2 a_2 + \kappa_{21} a_1. \tag{4.82}$$

Zaradi ohranitve energije sklopitvena koeficienta κ_{12} in κ_{21} nista neodvisna. Vsota energij obeh resonatorjev mora biti konstantna, zato

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(|a_1|^2+|a_2|^2) &= a_1\dot{a}_1^* + a_1^*\dot{a}_1 + a_2\dot{a}_2^* + a_2^*\dot{a}_2 \\ &= a_1^*\kappa_{12}a_2 + a_1\kappa_{12}^*a_2^* + a_2^*\kappa_{21}a_1 + a_2\kappa_{21}^*a_1^* \\ &= 0.\end{aligned} \tag{4.83}$$

Veljati mora torej

$$\kappa_{12} + \kappa_{21}^* = 0. \tag{4.84}$$

Poglejmo primer dveh sklopljenih resonatorjev, pri čemer je v drugem resonatorju vzbujeno stoječe valovanje. Moč tistega dela, ki potuje proti prvemu resonatorju, je polovica energije, deljena s časom preleta od enega zrcala do drugega

$$|s_+|^2 = \frac{1}{2}|a_2|^2\frac{c}{L}. \tag{4.85}$$

Z upoštevanjem enačbe (4.71) je

$$\kappa_{12}a_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+ = \sqrt{\frac{c}{\tau L}}a_2, \tag{4.86}$$

tako da je

$$\kappa_{12} = \frac{c}{2L}\sqrt{1-\mathscr{R}}, \qquad \kappa_{21} = -\kappa_{12}. \tag{4.87}$$

Zaradi sklopitve se spremenijo lastne frekvence resonatorjev. Poglejmo dva enaka sklopljena resonatorja

$$\dot{a}_1 = -i\omega_0 a_1 + \kappa_{12} a_2 \tag{4.88}$$

$$\dot{a}_2 = -i\omega_0 a_2 - \kappa_{12} a_1. \tag{4.89}$$

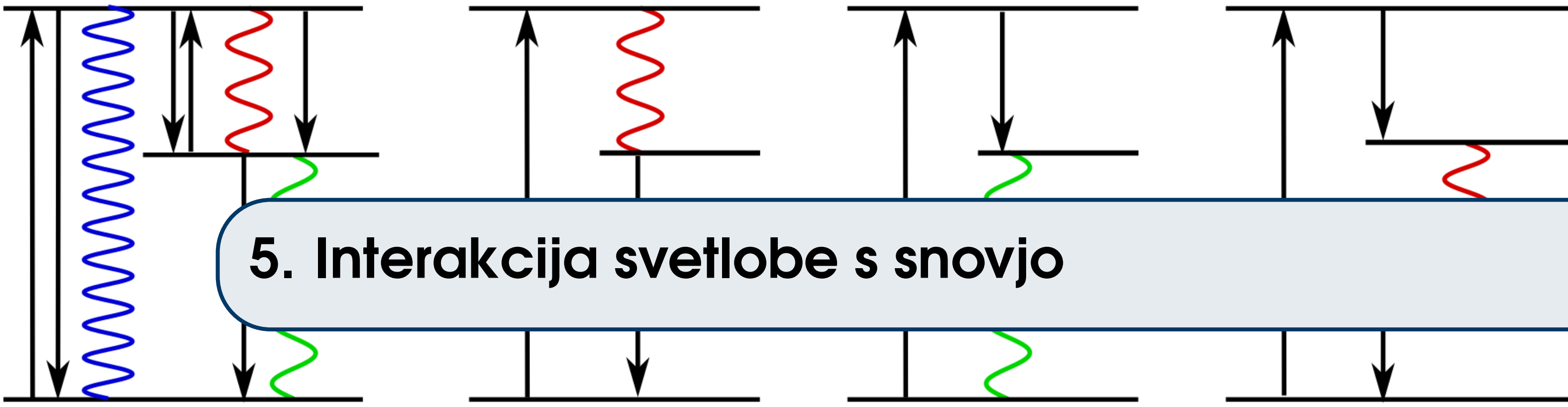
Iščemo rešitve oblike $A_i e^{-i\omega t}$. Če uporabimo ta nastavek v gornjih diferencialnih enačbah, dobimo homogen linearen sistem za A_1 in A_2, ki je netrivialno rešljiv, če je determinanta enaka nič. Ta pogoj da enačbo za frekvenco

$$(\omega-\omega_0)^2 = \kappa_{12}^2 \tag{4.90}$$

in

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \kappa_{12}. \tag{4.91}$$

Zaradi sklopitve sta se prej enaki frekvenci resonatorjev razcepili v dve, kot smo lahko pričakovali.



5. Interakcija svetlobe s snovjo

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali svetlobo v praznem prostoru. Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. To je seveda zelo obširna tema in jo bomo obdelali le v obsegu, potrebnem za razumevanje ojačevanja svetlobe s stimulirano emisijo, kar je osnova za delovanje laserjev. Najprej bomo na kratko pogledali termodinamsko ravnovesje svetlobe v stiku s toplotnim zalogovnikom, torej sevanje črnega telesa, ki zahteva kvantno obravnavo elektromagnetnega polja. Nato bomo vpeljali fenomenološki Einsteinov opis mikroskopskih procesov absorpcije, spontane in stimulirane emisije in pokazali, da ti procesi niso neodvisni. Izpeljali bomo izraze za absorpcijski koeficient in koeficient ojačenja, na koncu poglavja pa bomo nakazali še kvantnomehansko izpeljavo verjetnosti za prehod atoma iz višjega energijskega stanja v nižje s sevanjem.

5.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja

Ravni valovi so enostavne in zelo prikladne rešitve valovne enačbe (enačba 1.13), zato jih pogosto uporabimo za bazo, po kateri razvijemo elektromagnetno polje. Možen je razvoj po celotnem prostoru, vendar je tedaj nekoliko nerodna normalizacija baznih funkcij. Če se omejimo na le del prostora, se temu problemu izognemo. Mora pa biti izbrani del prostora dovolj velik, da končni rezultat ni odvisen od izbire njegove velikosti in oblike.

Najpreprosteje je vzeti votlino v obliki velike kocke s stranico L in idealno prevodnimi stenami. Rešitve Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) znotraj take votline so ob upoštevanju robnih pogojev (enačbe 1.9–1.12) stoječa valovanja. Zapišemo jih v obliki

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0}\cos\frac{\pi l x}{L}\sin\frac{\pi m y}{L}\sin\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t} \\ E_y &= E_{y0}\sin\frac{\pi l x}{L}\cos\frac{\pi m y}{L}\sin\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t} \\ E_z &= E_{z0}\sin\frac{\pi l x}{L}\sin\frac{\pi m y}{L}\cos\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kjer so l, m in n cela števila. Vsako stoječe valovanje je določeno z valovnim vektorjem

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\pi l}{L}, \frac{\pi m}{L}, \frac{\pi n}{L}\right), \tag{5.2}$$

katerega velikost je povezana s frekvenco $k = \omega/c$. Iz Maxwellove enačbe za prazen prostor $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ (enačba 1.3) sledi $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$. Za vsako trojico števil l, m in n obstajata tako dve neodvisni polarizaciji.

Naloga 5.1.1 Pokaži, da stoječe valovanje, zapisano z enačbami (5.1), reši valovno enačbo (enačba 1.13) v kocki s stranico L in zadosti robnim pogojem idealno prevodnih sten votline.

Preštejmo, koliko je lastnih valovanj v intervalu velikosti valovnega vektorja med k in $k+dk$ – to smo na hitro naredili že pri obravnavni resonatorjev (enačba 4.1). Možni valovni vektorji tvorijo tridimenzionalno mrežo v prvem oktantu prostora vseh valovnih vektorjev. Razmik med dvema zaporednima mrežnima točkama v smeri ene od osi je π/L. Število točk v osmini krogelne lupine med k in $k+dk$ je za dovolj velike l, m in n enako prostornini lupine, deljeni s prostornino, ki pripada posamezni mrežni točki, to je $(\pi/L)^3$. Upoštevati moramo še, da sta pri vsakem $\mathbf{k}$ dovoljeni dve polarizaciji, zato

$$dN = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \pi k^2\, dk. \tag{5.3}$$

Zapišemo število stanj na enoto volumna

$$\frac{dN}{V} = \frac{k^2}{\pi^2} dk \tag{5.4}$$

in ga prevedemo na frekvenčno odvisnost

$$\frac{dN}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \tag{5.5}$$

Vpeljemo gostoto stanj $\rho(\omega)$, to je število valovanj na frekvenčni interval[1] na enoto volumna votline

$$\boxed{\rho(\omega) = \frac{dN}{V d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}.} \tag{5.6}$$

Vsote po lastnih valovanjih, to je po dovoljenih vrednostih valovnega vektorja k, lahko z uporabo gostote stanj spremenimo v integrale po k ali po ω

$$\sum_k \ldots \quad \Rightarrow \quad V\int \rho(k)\ldots dk = V\int \rho(\omega)\ldots d\omega. \tag{5.7}$$

Označimo brezdimenzijski krajevni del rešitve (enačbe 5.1) z $\mathbf{E}_\alpha$, kjer α označuje trojico števil l, m in n in še obe možni polarizaciji. Pripadajoče magnetno polje izračunamo z Maxwellovo enačbo (enačba 1.2)

$$\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = i\omega_\alpha \mathbf{B}_\alpha. \tag{5.8}$$

Polja $\mathbf{E}_\alpha$ in $\mathbf{B}_\alpha$ tvorijo poln ortogonalen sistem, zato jih lahko uporabimo za razvoj poljubnega elektromagnetnega polja v votlini

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}} \sum_\alpha p_\alpha(t)\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \quad \text{in} \tag{5.9}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = i\sqrt{\frac{\mu_0}{V}} c_0 \sum_\alpha \omega_\alpha q_\alpha(t)\mathbf{B}_\alpha(\mathbf{r}). \tag{5.10}$$

Vstavimo splošen razvoj (enačbi 5.9 in 5.10) v Maxwellovi enačbi (enačbi 1.1 in 1.2), upoštevamo zvezo (enačba 5.8) in njej analogno za rotor magnetnega polja. Sledi

$$p_\alpha = \dot{q}_\alpha \quad \text{in} \quad \omega_\alpha^2 q_\alpha = -\dot{p}_\alpha, \tag{5.11}$$

od koder sledi še

$$\ddot{p}_\alpha + \omega_\alpha^2 p_\alpha = 0. \tag{5.12}$$

Ta enačba da seveda pričakovano časovno odvisnost oblike $e^{-i\omega_\alpha t}$.

[1] V tem poglavju bomo ohlapno uporabljali besedo frekvenca tudi za krožno frekvenco. Iz zapisa bo vedno jasno, za katero frekvenco gre.

Naloga 5.1.2 Uporabi razvoj polja (enačbi 5.9 in 5.10) in iz Maxwellovih enačb izpelji enačbo (5.12).

Z upoštevanjem razvoja (enačbi 5.9 in 5.10) in ob ustrezni normalizaciji zapišemo energijo polja – Hamiltonovo funkcijo[2]

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0})\,dV = \frac{1}{2}\sum_\alpha (p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2). \tag{5.13}$$

Gornji zapis (enačbi 5.12 in 5.13) kaže, da lahko elektromagnetno polje v votlini obravnavamo kot sistem neodvisnih harmonskih oscilatorjev. Pri tem se koeficienti razvoja p_α in q_α obnašajo kot gibalne količine in koordinate.

Prehod v kvantno mehaniko dosežemo tako, da klasičnim spremenljivkam gibalne količine in koordinate priredimo operatorje $\hat{p}_\alpha$ in $\hat{q}_\alpha$, ki morajo zadoščati komutacijskim pravilom

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha,\beta}. \tag{5.14}$$

Iz kvantne mehanike vemo, da so lastne vrednosti energije harmonskega oscilatorja, opisanega s Hamiltonovo funkcijo (enačba 5.13), diskretne. Njihove vrednosti so enake

$$\boxed{W_{n,\alpha} = \hbar\omega_\alpha(n_\alpha + \frac{1}{2}), \quad n_\alpha = 0,1,2\dots} \tag{5.15}$$

Razliki energije harmonskega oscilatorja, če se n_α spremeni za 1, pravimo foton. Energija fotona je tako enaka $\hbar\omega$, n pa predstavlja število fotonov z dano energijo.

Celotno energijo kvantiziranega elektromagnetnega polja v votlini izračunamo tako, da seštejemo prispevke vseh možnih stanj

$$W = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha n_\alpha, \tag{5.16}$$

pri čemer smo izpustili ničelno energijo. Izpuščali jo bomo tudi v nadaljevanju, saj je to energija osnovnega stanja, ki se ne more sprostiti.

★ Vidna svetloba z valovno dolžino 500 nm ima frekvenco $\nu = 6\cdot 10^{14}$ Hz. Ustrezna energija fotona je $W = 4\cdot 10^{-19}$ J oziroma $W = 2,5$ eV.

5.2 Sevanje črnega telesa

Obravnavajmo sevanje v votlini, ki je v toplotnem ravnovesju s stenami s temperaturo T. Iz statistične fizike vemo, da verjetnost P, da je v izbranem stanju votline α število fotonov enako n_α, zapišemo z Boltzmannovo porazdelitvijo

$$P(n_\alpha) = \frac{e^{-W_{n\alpha}/k_BT}}{\sum_\alpha e^{-W_{n\alpha}/k_BT}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}}{\sum_\alpha e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}} = e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}(1 - e^{-\beta\hbar\omega_\alpha}), \tag{5.17}$$

pri čemer $\beta = 1/k_BT$ in k_B Boltzmannova konstanta.

[2] Irski matematik Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865.

Povprečno število fotonov v stanju α je potem

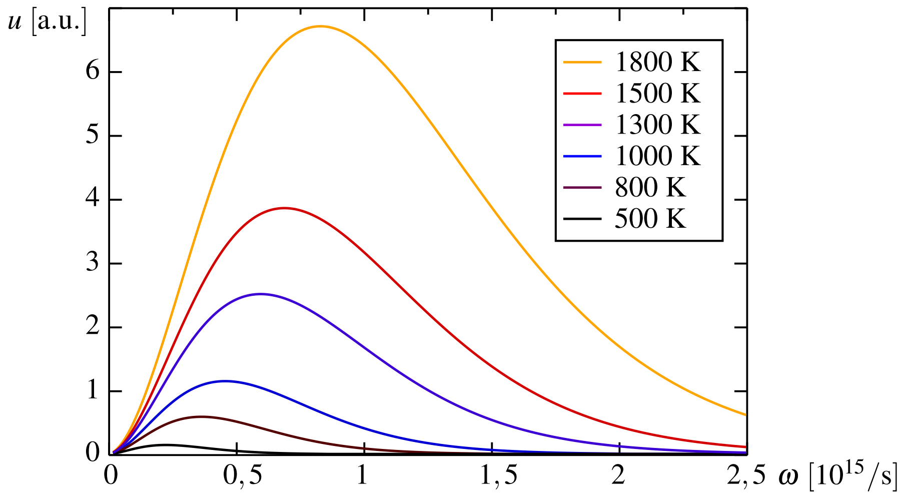
$$\langle n_\alpha \rangle = \sum_\alpha n_\alpha P(n_\alpha) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_\alpha} - 1}. \tag{5.18}$$

Povprečno energijo posameznega stanja zapišemo kot produkt energije tega stanja in povprečnega števila fotonov v tem stanju

$$\langle W_\alpha \rangle = \hbar\omega_\alpha \langle n_\alpha \rangle = \frac{\hbar\omega_\alpha}{e^{\beta\hbar\omega_\alpha} - 1}. \tag{5.19}$$

Ravnovesno gostoto energije elektromagnetnega polja v votlini na frekvenčni interval izračunamo tako, da povprečno energijo posameznega stanja pomnožimo z gostoto stanj $\rho(\omega)$ (enačba 5.6). Dobimo znano formulo za energijo na enoto volumna na enoto frekvence, to je Planckov zakon[3]. Planckov zakon opiše spektralno gostoto energije svetlobe u , izsevane iz črnega telesa, ki je v toplotnem ravnovesju z okolico s temperaturo T

$$\boxed{u(\omega) = \hbar\omega\langle n \rangle \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}.} \tag{5.20}$$



Slika 5.1: Planckov spekter za sevanje črnega telesa pri različnih temperaturah

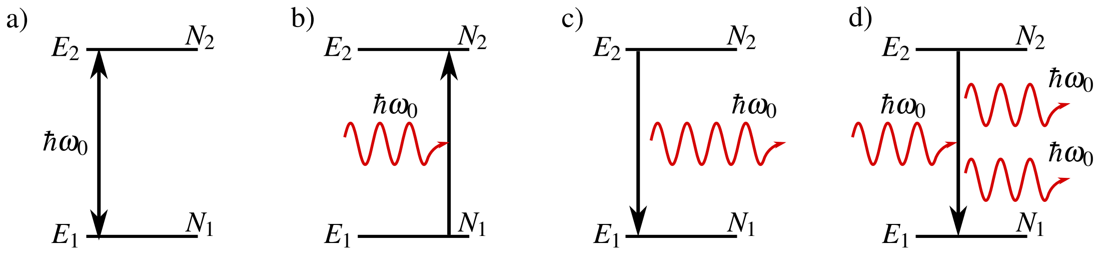
5.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje

Oglejmo si osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. Naj bo v votlini poleg elektromagnetnega polja še N atomov, ki se med seboj ne motijo. Za začetek naj bodo atomi prav enostavni: imajo naj le dve energijski stanji z energijama E_1 in E_2 (slika 5.2 a). Stanje E_2 naj ima višjo energijo od E_1, razlika med njima pa naj bo

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_0. \tag{5.21}$$

Zaradi interakcije s poljem pri frekvenci prehoda ω_0 atomi prehajajo iz nižjega stanja v višje in obratno. Prehajanje med obema stanjema opisujejo trije procesi: absorpcija, spontano sevanje in stimulirano sevanje.

[3]Nemški fizik in nobelovec Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947.



Slika 5.2: Shema energijskih nivojev dvonivojskega atoma (a) in treh vrst prehodov med njima: absorpcija (b), spontano sevanje (c) in stimulirano sevanje (d).

Absorpcija fotona

Absorpcija fotona je prehod, pri katerem se foton z ustrezno energijo absorbira, atom pa preide iz nižjega energijskega stanja v višje (slika 5.2 b). Verjetnost za prehod na časovno enoto, ki jo označimo z r_{12}, je sorazmerna spektralni gostoti energije polja $u(\omega)$, to je energiji na enoto volumna in frekvenčni interval, pri frekvenci prehoda ω_0. Sorazmernostni koeficient označimo z B_{12} in zapišemo

$$r_{12} = B_{12}u(\omega_0). \tag{5.22}$$

To je enostavno razumeti. Več kot je fotonov v votlini pri frekvenci, ki je v bližini frekvence prehoda, več fotonov se lahko absorbira in večja je verjetnost za prehod atoma v višje stanje. Pri absorpciji se seveda število fotonov v enem od stanj polja pri frekvenci ω_0 zmanjša za ena.

Spontano sevanje

Atom v vzbujenem stanju ni stabilen, temveč prej ali slej spontano preide v nižje stanje. Temu pojavu pravimo spontano sevanje ali spontana emisija (slika 5.2 c).

Pri spontanem sevanju je foton izsevan v katerokoli stanje polja v bližini frekvence prehoda. Smer izsevane svetlobe je poljubna, v odsotnosti zunanjega polja pa je poljubna tudi polarizacija izsevane svetlobe. Verjetnost za prehod na časovno enoto označimo z A_{21}. Za dovoljene prehode je vrednost $A_{21} \sim 10^6$–$10^8/\mathrm{s}$, za prepovedane pa okoli $\sim 10^4/\mathrm{s}$. Karakteristični (naravni) razpadni čas gornjega stanja vpeljemo kot $\tau = 1/A_{21}$.

Zaradi končnega življenjskega časa ima vzbujeno stanje končno spektralno širino. Če ni Dopplerjeve razširitve, je atomska spektralna črta najpogosteje kar Lorentzove oblike z vrhom pri ω_0 (enačba 2.21)

$$\boxed{g(\omega-\omega_0) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}.} \tag{5.23}$$

Funkcija $g(\omega)$ je normirana

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\,d\omega = 1, \tag{5.24}$$

za grobe ocene pa se funkcijo g pogosto nadomesti s pravokotnikom širine 2γ in višine $1/2\gamma$.

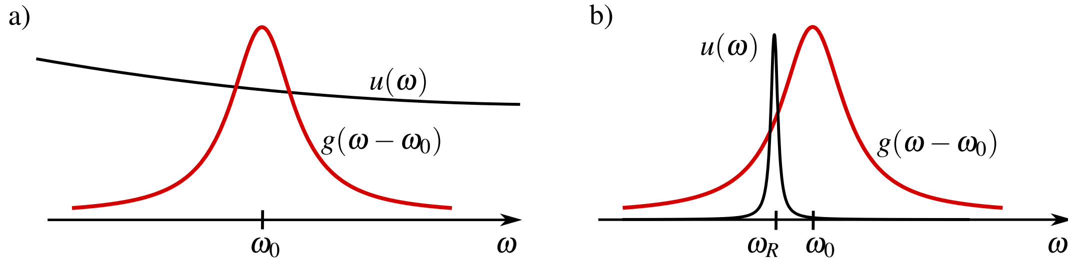
Stimulirano sevanje

Tretji pojav je prehod atoma iz višjega stanja v nižje zaradi interakcije s poljem. Temu procesu pravimo stimulirano sevanje ali stimulirana emisija. Tudi verjetnost za stimuliran prehod na časovno enoto r_{21} je sorazmerna s spektralno gostoto energije polja pri frekvenci prehoda ω_0

$$r_{21} = B_{21} u(\omega_0). \tag{5.25}$$

V tem primeru smo sorazmernostni koeficient označili z B_{21}. Kadar pride do stimuliranega sevanja, se število atomov v vzbujenem stanju zmanjša, število fotonov v stanju, ki je prehod povzročilo, pa se poveča. Izsevana svetloba ima enako fazo, frekvenco, polarizacijo in smer potovanja kot vpadna. Tipične vrednosti parametra so $B_{21} \sim 10^{16}$–10^{20} $\mathrm{m^3/Js^2}$.

Pomudimo se še nekoliko pri izrazih za absorpcijo (enačba 5.22) in za stimulirano emisijo (enačba 5.25). Zapisani enačbi veljata le, kadar je spektralna gostota elektromagnetnega polja $u(\omega)$ preko celotne spektralne širine prehoda približno konstantna (slika 5.3 a). To je gotovo res, če obravnavamo sevanje v votlini, ki je v termičnem ravnovesju z okolico (črno telo).



Slika 5.3: Pri izračunu verjetnosti za absorpcijo in stimulirano emisijo je pomembna oblika spektralne gostote elektromagnetnega polja $u(\omega)$. V prvem primeru je bistveno širša (a), v drugem pa bistveno ožja (b) od širine atomske spektralne črte $g(\omega-\omega_0)$.

V splošnem primeru, ko se spekter vpadne svetlobe spreminja v območju atomske spektralne črte, moramo sešteti prispevke po ozkih frekvenčnih intervalih

$$r_{12} = B_{12} \int g(\omega-\omega_0)\, u(\omega)\, d\omega. \tag{5.26}$$

Gornji zapis preverimo na primeru spektra črnega telesa, ki se ne spreminja dosti v območju prehoda. Takrat $u(\omega_0)$ postavimo pred integral in po pričakovanju dobimo znano zvezo (enačba 5.22).

Če pa na atome svetimo s svetlobo s spektrom, ki je ozek v primerjavi s spektralno širino prehoda (na primer iz laserskega resonatorja), je verjetnost za prehod odvisna tudi od tega, kako blizu osrednje frekvence prehoda je frekvenca vpadne svetlobe (slika 5.3 b). Naj bo w_R gostota energije skoraj monokromatske vpadne svetlobe s frekvenco ω_R. Verjetnost za absorpcijo na časovno enoto je potem

$$\boxed{r_{12} = B_{12} g(\omega_R-\omega_0)\, w_R.} \tag{5.27}$$

Koeficiente A_{21}, B_{12} in B_{21}, s katerimi smo opisali spontano sevanje, absorpcijo in stimulirano emisijo, je prvi vpeljal Einstein[4], zato jih imenujemo tudi Einsteinovi koeficienti. Poglejmo si jih podrobneje.

[4] Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.

Einsteinovi koeficienti

Zasedenost stanj določa število atomov v določenem stanju. Ker zaenkrat obravnavamo preproste modele atomov z zgolj dvema stanjema, zapišemo samo dve zasedenosti. Naj bo N_1 zasedenost nižjega stanja, N_2 zasedenost višjega stanja, skupno število atomov pa $N_1 + N_2 = N$. V prisotnosti svetlobe se število atomov v spodnjem in zgornjem stanju lahko spreminja, skupno število pa se ohranja.

Obravnavajmo termično ravnovesje, ko je spekter svetlobe bistveno širši od širine atomskega prehoda (slika 5.3 a), tako da lahko za zapis verjetnosti za prehod uporabimo enačbi (5.22) in (5.25). Zasedenost višjega nivoja se zmanjšuje zaradi spontanih in stimuliranih prehodov v nižje stanje, povečuje pa se zaradi absorpcije. To zapišemo z enačbo

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - r_{21}N_2 + r_{12}N_1 = -A_{21}N_2 - B_{21}u(\omega_0)N_2 + B_{12}u(\omega_0)N_1. \tag{5.28}$$

Zaradi ohranitve skupnega števila atomov velja

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}. \tag{5.29}$$

V termičnem ravnovesju sta zasedenosti konstantni, tako da lahko zapišemo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}u(\omega_0)N_2 - B_{12}u(\omega_0)N_1 = 0. \tag{5.30}$$

Vemo tudi, da v termičnem ravnovesju za zasedenosti N_1 in N_2 velja Boltzmannova porazdelitev

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2-E_1)} = e^{-\beta\hbar\omega_0}, \tag{5.31}$$

kjer je $\beta = 1/k_BT$. Izrazimo spektralno gostoto $u(\omega_0)$ iz enačbe (5.30)

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}} \tag{5.32}$$

in z uporabo enačbe (5.31) dobimo

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}/B_{12}}{e^{\beta\hbar\omega_0} - B_{21}/B_{12}}. \tag{5.33}$$

Po drugi strani vemo, da je v termičnem ravnovesju spektralna gostota energije sevanja $u(\omega_0)$ enaka termični Planckovi gostoti $u(\omega_0)$ (enačba 5.20). Iz primerjave obeh zapisov ugotovimo, da morata biti koeficienta B_{21} in B_{12} enaka in določimo zvezo med koeficientoma A_{21} in B_{12}

$$\boxed{A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}B_{12} \qquad \text{in} \qquad B_{12} = B_{21}.} \tag{5.34}$$

Koeficient pred B_{12} v prvi enačbi je ravno enak gostoti stanj elektromagnetnega polja $\rho(\omega)$ (enačba 5.6), pomnoženi z energijo fotona $\hbar\omega$. Videli bomo, da to ni slučaj, saj to izhaja iz verjetnosti za prehod v kvantni elektrodinamiki (poglavje 5.10). Pozoren bralec je lahko tudi opazil, da je z enačbo (5.33), ki smo jo dobili le z uporabo Boltzmannove porazdelitve za atome, že določena oblika Planckove formule, ne da bi kar koli rekli o fotonih.

★ Zveza $B_{12} = B_{21}$ velja le v primeru nedegeneriranih stanj. V realnih sistemih so stanja pogosto degenerirana in je treba gornje enačbe ustrezno popraviti

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{g_1}{g_2}, \tag{5.35}$$

pri čemer g_1 in g_2 označujeta degeneriranost stanj.

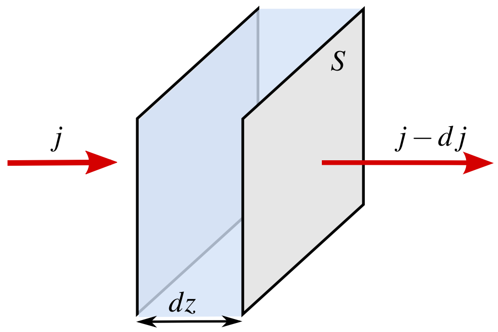
5.4 Absorpcijski koeficient

Naj na izbran volumen plina vpada snop svetlobe s frekvenco ω, ki je blizu frekvence atomskega prehoda ω_0. Gostota vpadnega energijskega toka je $j = w_\omega c$ (enačba 1.32), pri čemer je w_ω gostota energije. Obravnavajmo primer, ko je spekter vpadnega snopa ozek v primerjavi s širino atomskega prehoda (slika 5.3 b). V tej obliki je zapis enačb sicer bolj zapleten, a hkrati bolj priročen pozneje pri obravnavi laserja. Privzemimo še, da je stanje stacionarno.

Ko svetlobni snop vpade na plast plina debeline dz, se gostota energijskega toka zmanjša zaradi absorpcije in hkrati poveča zaradi stimulirane emisije (slika 5.4). Spontano sevanje, ki je seveda tudi prisotno, lahko zanemarimo, saj je svetloba izsevana na vse strani enakomerno in le majhen del je izsevan v smeri snopa. Sprememba energije snopa v časovni enoti je enaka razliki med številom absorpcij in stimuliranih prehodov v tem času, pomnoženih z energijo fotona[5]

$$dP = r_{12} \frac{(N_2 - N_1)}{V} Sdz\, \hbar\omega = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g w_\omega \hbar\omega\, Sdz, \tag{5.36}$$

pri čemer smo verjetnost za prehod izrazili iz enačbe (5.27).



Slika 5.4: K absorpciji svetlobe v plasti atomov

S S smo označili presek snopa, z V pa volumen plina. Sledi

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g \hbar\omega \frac{j}{c} dz. \tag{5.37}$$

Priročno je vpeljati presek za absorpcijo

$$\boxed{\sigma(\omega) = \frac{B_{21}\, g \hbar\omega}{c}.} \tag{5.38}$$

Z njim se izraz (5.37) poenostavi v

$$\boxed{\frac{dj}{dz} = \frac{\Delta N}{V} \sigma(\omega) j,} \tag{5.39}$$

kjer ΔN označuje $N_2 - N_1$. Navadno obravnavamo pline, ki so blizu termičnega ravnovesja. V tem primeru je $N_2 < N_1$ in dj negativen, zato pride do absorpcije svetlobe z absorpcijskim koeficientom μ. Zapišemo

$$\frac{dj}{j} = -\mu dz \tag{5.40}$$

[5] Zaradi preglednosti tukaj pišemo obliko atomske spektralne črte kot g, pri čemer je to vrednost Lorentzove krivulje z osrednjo frekvenco ω_0 pri ω, torej $g(\omega - \omega_0)$.

in

$$\mu(\omega) = \frac{\Delta N}{V}\sigma(\omega) = \frac{\Delta N}{V} B_{21}\, g \frac{\hbar\omega}{c}. \tag{5.41}$$

Tako smo makroskopski koeficient absorpcije svetlobe v plinu atomov povezali z Einsteinovim koeficientom B_{21}. Povejmo še, da so tipične velikosti presekov za absorpcijo $\sigma \sim 10^{-24}$–10^{-16} m^2.

★ Energija se pri absorpciji v plinu dvonivojskih atomov seveda ne izgublja. Atom, ki je prešel v vzbujeno stanje, se s spontano emisijo vrne nazaj v osnovno, svetloba pa se izseva na vse strani – se siplje.

5.5 Nasičenje absorpcije

Čeprav je videti izraz za zmanjševanje gostote svetlobnega toka pri prehodu skozi absorbirajoči plin (enačba 5.40) preprost, ga ni mogoče enostavno integrirati, saj je absorpcijski koeficient μ odvisen od gostote energijskega toka. Pri dovolj velikem svetlobnem toku namreč z absorpcijo znaten delež atomov preide v višje stanje, zato se zmanjša razlika ΔN in posledično se zmanjša tudi absorpcijski koeficient μ. Takrat se absorpcija v plinu nasiti in pojavu pravimo nasičenje absorpcije.

Naj na plin vpada snop monokromatske svetlobe. Atomi v plinu prehajajo med nivojema zaradi absorpcije, spontane in stimulirane emisije. Podobno kot smo zapisali termično ravnovesje v primeru širokega spektra (enačba 5.30), zapišemo stacionarno enačbo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}\, g\, \Delta N \frac{j}{c} = 0, \tag{5.42}$$

pri čemer smo za verjetnost za prehod uporabili enačbo (5.27) in upoštevali $w = j/c$. Zasedenost višjega stanja N_2 lahko izrazimo s celotnim številom atomov N in razliko zasedenosti ΔN

$$N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) + \frac{1}{2}(N_2 - N_1) = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\Delta N. \tag{5.43}$$

S tem lahko izračunamo razliko zasedenosti

$$\Delta N = -\frac{N}{1 + 2\frac{Bg}{cA} j}. \tag{5.44}$$

Pri majhni gostoti toka j so praktično vsi atomi v osnovnem stanju in prispevajo k absorpciji. Pri velikih gostotah toka pa imenovalec gornjega izraza močno naraste, razlika zasedenosti gre proti nič in absorpcija se zmanjšuje. Ko drugi člen v imenovalcu (enačba 5.44) doseže vrednost 1, pravimo, da gostota energijskega toka doseže vrednost saturacijske gostote. Zapišemo jo kot

$$j_s(\omega) = \frac{cA_{21}}{2B_{21}g} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^2 g}, \tag{5.45}$$

pri čemer smo upoštevali zvezo med koeficientoma A_{21} in B_{21} (enačba 5.34). Kot vidimo, je saturacijska gostota odvisna le od krožne frekvence vpadnega valovanja in vrednosti $g(\omega - \omega_0)$, ki je približno obratna vrednost širine atomskega prehoda. Za črto z valovno dolžino 600 nm in širino 10^8 s^{-1} znaša saturacijska gostota svetlobnega toka okoli 20 mW/cm^2. Tako veliko gostoto svetlobnega toka je v tako ozkem frekvenčnem intervalu z navadnimi svetili praktično nemogoče doseči, medtem ko jo z laserji z lahkoto.

Izraz za razliko zasedenosti stanj zapišemo v preglednejši obliki

$$\Delta N = -\frac{N}{1 + j/j_s(\omega)}. \tag{5.46}$$

Vstavimo gornji izraz v enačbo za zmanjševanje gostote toka (enačba 5.39) in dobimo

$$dj = -\frac{\mu_0}{1 + j/j_s}\, j\, dz, \tag{5.47}$$

kjer je

$$\mu_0 = \frac{N}{V}\sigma = \frac{N B_{21}\, g\, \hbar\omega}{V c} \tag{5.48}$$

absorpcijski koeficient pri majhnih gostotah vpadnega toka.

Enačbo (5.47) brez težav integriramo

$$\ln \frac{j}{j_0} + \frac{j - j_0}{j_s} = -\mu_0 z, \tag{5.49}$$

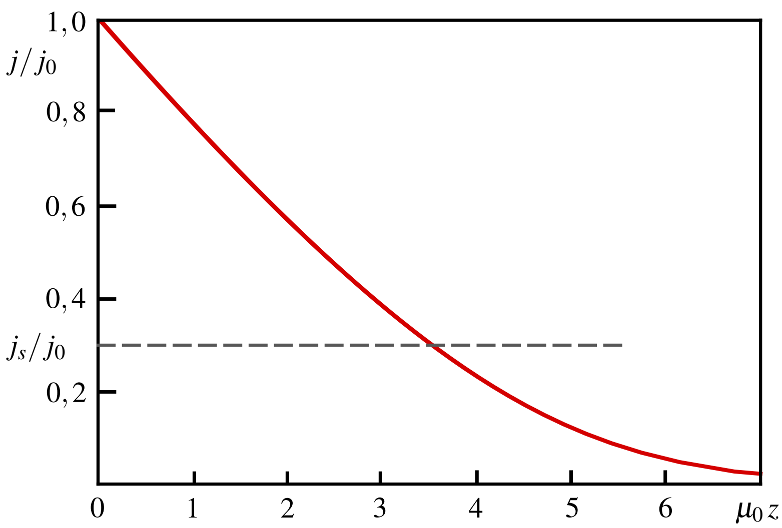
kjer smo z j_0 označili začetno gostoto svetlobnega toka. Kadar je ta dosti manjša od j_s, lahko drugi člen v gornji enačbi zanemarimo in gostota svetlobnega toka eksponentno pojema

$$j = j_0 e^{-\mu_0 z}. \tag{5.50}$$

Pri zelo velikih vpadnih gostotah, ko pride do nasičenja absorpcije, lahko prvi člen v izrazu zanemarimo in pride do linearnega zmanjševanja gostote svetlobnega toka

$$j = j_0 - \mu_0 j_s z. \tag{5.51}$$

V primeru močnega vpadnega toka je zasedenost osnovnega in vzbujenega nivoja skoraj enaka in absorpcija je omejena s tem, kako hitro se lahko atomi vračajo v osnovno stanje preko spontanega sevanja.



Slika 5.5: Pojemanje gostote svetlobnega toka v absorbirajočem plinu (enačba 5.49)

5.6 Optično ojačevanje

V prejšnjih razdelkih smo obravnavali prehod svetlobe skozi dvonivojski plin. V termičnem ravnovesju je zgornji nivo manj zaseden od spodnjega in v plinu pride do absorpcije svetlobe. Če pa nekako dosežemo stanje obrnjene zasedenosti, za katerega velja $N_2 > N_1$, se snop svetlobe pri prehodu skozi plin ojačuje. Ta pojav je osnova za delovanje laserjev.

Stanje obrnjene zasedenosti seveda ni v termičnem ravnovesju in ga je treba vzdrževati z dovajanjem energije plinu oziroma *črpanjem*. Načinov, kako dosežemo obrnjeno zasedenost s črpanjem, je veliko. Zaenkrat opišimo le nekaj osnovnih mehanizmov, podrobneje jih bomo spoznali na konkretnih primerih laserjev, ki jih bomo obravnavali v poglavju **??**.

V plinih je najpogostejši način črpanja vzbujanje z električnim tokom. Elektroni, ki so glavni nosilci toka, se zaletavajo v atome ali ione plina in jih vzbujajo v višje nivoje, pri čemer lahko pride do obrnjene zasedenosti med nekim parom nivojev. Tako črpanje uporabljamo na primer v argonskem laserju.

Pogost proces v plinih je tudi prenos energije med atomi s trki. V mešanici dveh plinov, pri katerih se nek nivo enih atomov ujema po energiji z nekim nivojem drugih atomov, lahko vzbujen atom prve vrste pri trku preda energijo brez sevanja atomu druge vrste, ta pa iz osnovnega stanja preide v ustrezen višji nivo. Če je pod tem nivojem še drugo vzbujeno stanje, katerega življenjski čas je krajši od življenjskega časa zgornjega nivoja, pride do obrnjene zasedenosti. Primer uporabe takega črpanja je He-Ne laser.

V trdnih neprevodnih kristalih sta v optičnem področju absorpcija in sevanje pri določeni valovni dolžini navadno posledica primesi. Obrnjeno zasedenost para nivojev primesi največkrat dosežemo tako, da kristal obsevamo s svetlobo s frekvenco, ki ustreza prehodu na nek nivo nad izbranim parom. Tako črpanje uporabljamo na primer v Nd:YAG in Ti:safir laserjih.

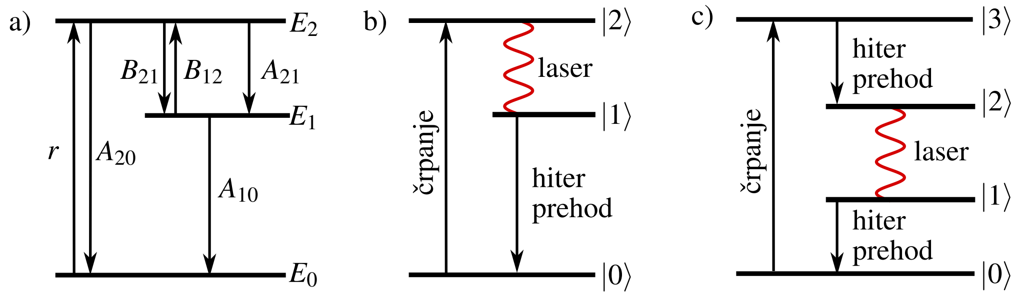
V polprevodnikih dosežemo obrnjeno zasedenost med prevodnim in valenčnim pasom z vbrizgavanjem elektronov in vrzeli v območje *p*-*n* stika z električnim tokom v prevodni smeri.

5.7 Optično črpanje trinivojskega sistema

Kot primer optičnega ojačevanja si oglejmo najpreprostejši model optičnega črpanja. Gre za plin atomov s tremi nivoji, tako imenovani trinivojski sistem. Osnovno stanje, ki ga označimo z $|0\rangle$, naj ima energijo E_0. Poleg tega naj imajo atomi še dve vzbujeni stanji z energijo E_1 (stanje $|1\rangle$) in energijo $E_2 > E_1$ (stanje $|2\rangle$), tako da je energijska razlika med vzbujenima nivojema $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$ (slika 5.6 a).

Na tak trinivojski plin svetimo s črpalno svetlobo, ki vzbuja atome iz osnovnega stanja $|0\rangle$ v stanje $|2\rangle$, pri čemer je lahko spektralna gostota u_p črpalne svetlobe široka. Po plinu naj se širi še monokromatska svetloba z gostoto energije w in frekvenco ω, ki je blizu frekvence prehoda ω_0 med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$. Ugotoviti želimo, pri katerih pogojih lahko dosežemo obrnjeno zasedenost med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$ in s tem ojačevanje svetlobe okoli frekvence ω_0 (slika 5.6 b).

★ Trinivojski laserski sistem na sliki (5.6 b) je pravzaprav poseben primer bolj realističnega štirinivojskega sistema, pri katerem gornji črpalni nivo sovpada z gornjim laserskim nivojem. Sicer se tretji vzbujeni nivo, v katerega črpamo, praviloma zelo hitro prazni v drugega vzbujenega, od tam pa počasi v prvega vzbujenega, kot kaže slika (5.6 c). Obravnava štirinivojskih sistemov je bolj zapletena od obravnave trinivojskih sistemov, ki pa za opis delovanja laserjev povsem zadošča. Podrobneje bomo večnivojske sisteme obravnavali na konkretnih laserskih primerih (poglavje **??**).



Slika 5.6: Shema energijskih nivojev trinivojskega sistema in oznake koeficientov za prehode med njimi (a). V plinskih laserjih je stanje obrnjene zasedenosti navadno med vzbujenima stanjema (b), pogosto pa so laserji štiri- ali večnivojski (d).

Zapišimo enačbe za spreminjanje zasedenosti posameznih stanj. Osnovno stanje $|0\rangle$ se prazni zaradi absorpcije črpalne svetlobe in polni zaradi spontanih prehodov iz stanj $|1\rangle$ in $|2\rangle$, stimulirane prehode iz stanja $|2\rangle$ pa bomo zanemarili. Zasedenost stanja $|2\rangle$ se povečuje zaradi absorpcije s spodnjih nivojev in zmanjšuje zaradi spontanega in stimuliranega sevanja. Srednje stanje se polni s stimuliranimi in spontanimi prehodi iz stanja $|2\rangle$ in prazni zaradi absorpcije v $|2\rangle$ in spontanih prehodov v $|0\rangle$. Pri tem velja, da je vsota vseh treh zasedenosti enaka številu vseh atomov in $N_0 + N_1 + N_2 = N$. Zasedbene enačbe so tako

$$\frac{dN_0}{dt} = -rN_0 + A_{20}N_2 + A_{10}N_1 \tag{5.52}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1 + B_{21}\,g\,w\,(N_2 - N_1) + A_{21}N_2 \tag{5.53}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = rN_0 - A_{20}N_2 - A_{21}N_2 - B_{21}\,g\,w\,(N_2 - N_1). \tag{5.54}$$

Pri zapisu smo predpostavili, da je $N_0 \approx N \gg N_1, N_2$, zato smo lahko črpanje $B_{20}\,u_p(N_0 - N_2)$, ki je praktično konstantno, zapisali s koeficientom r. Mehanizem črpanja smo tako skrili v r in prav nič ni pomembno, na kakšen način poteka. S tem smo obravnavo posplošili z optičnega črpanja na druge sisteme.

Zanima nas stacionarno stanje, ko so vsi trije časovni odvodi enaki nič. Tako iz druge enačbe sistema (enačba 5.53) sledi

$$B_{21}\,g\,wN_2 + A_{21}N_2 = B_{21}\,g\,wN_1 + A_{10}N_1 \tag{5.55}$$

in

$$N_2 = \frac{B_{21}\,g\,w + A_{10}}{B_{21}\,g\,w + A_{21}} N_1. \tag{5.56}$$

Brez škode lahko zanemarimo tudi spontano sevanje iz stanja $|2\rangle$ v osnovno stanje. Tako iz prve enačbe sistema (enačba 5.52) dobimo

$$N_1 = \frac{rN}{A_{10}} \tag{5.57}$$

in zapišemo razliko zasedenosti kot

$$N_2 - N_1 = \left(\frac{N_2}{N_1} - 1\right) N_1 = \frac{A_{10} - A_{21}}{A_{21} + B_{21}g\,w}\,\frac{rN}{A_{10}}. \tag{5.58}$$

Iz gornje enačbe sledi, da pride do obrnjene zasedenosti, če je $A_{10} > A_{21}$, torej kadar je razpadni čas stanja $|1\rangle$ krajši od razpadnega časa stanja $|2\rangle$. Tak rezultat smo seveda lahko pričakovali.

V praktičnih primerih navadno velja $A_{10} \gg A_{21}$. Ob upoštevanju zveze $j = wc$ povežemo razliko zasedenosti z gostoto vpadnega svetlobnega toka

$$N_2 - N_1 = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + \frac{B_{21} g j}{c A_{21}}} = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + j/j_s}. \tag{5.59}$$

Konstante smo pospravili v saturacijsko gostoto svetlobnega toka

$$j_s = \frac{cA_{21}}{B_{21} g}. \tag{5.60}$$

★ Vidimo, da je izraz za saturacijsko gostoto toka v trinivojskem sistemu (enačba 5.60) zelo podoben izrazu za saturacijsko gostoto v dvonivojskem sistemu (enačba 5.45), razlikujeta se le v faktorju 2. Do te razlike pride zaradi različnega števila stanj, saj pogoj $N_1 + N_2 = N$ v trinivojskem sistemu ne velja.

Poglejmo, kaj se zgodi s svetlobo ob vpadu na plast trinivojskega plina. Naj ima vpadna svetloba frekvenco ω in gostoto svetlobnega toka $j = wc$. Račun je zelo podoben računu za absorpcijo (enačba 5.37). Sprememba gostote toka na debelini dz je enaka

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g \frac{\hbar\omega}{c} j\, dz, \tag{5.61}$$

pri čemer gostota toka j nastopa tudi v izrazu za razliko zasedenosti (enačba 5.59). Če to upoštevamo, dobimo diferencialno enačbo za gostoto toka

$$\frac{1}{j}\left(1 + \frac{j}{j_s}\right) dj = G\, dz \tag{5.62}$$

oziroma

$$\boxed{dj = \frac{G}{1 + j/j_s} j\, dz,} \tag{5.63}$$

ki je spet zelo podobna enačbi za absorpcijo (enačba 5.47). Z G smo označili t.i. koeficient ojačenja pri majhni gostoti vpadnega toka. Podan je z

$$G = \frac{N}{V} \frac{r}{A_{21}} \sigma = \frac{rNB_{21}\hbar\omega g}{VcA_{21}}, \tag{5.64}$$

pri čemer smo koeficient ojačenja izrazili s presekom za stimulirano sevanje σ. Rešitev diferencialne enačbe (enačba 5.63) je prikazana na sliki (5.7).

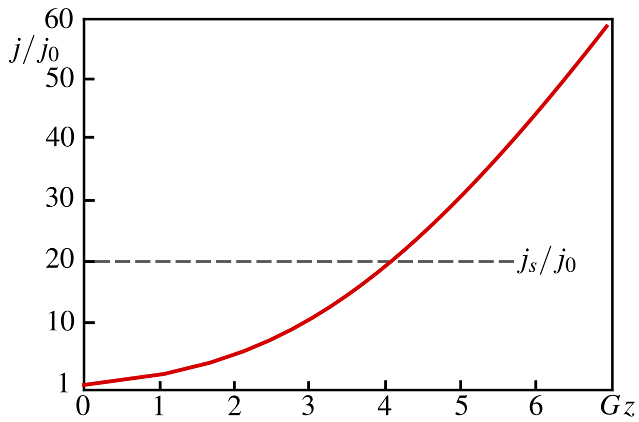
Obnašanje gostote svetlobnega toka ima, tako kot pri absorpciji, dva režima. Pri majhnih gostotah toka $j \ll j_s$ je naraščanje eksponentno

$$j(z) = j_0 e^{Gz}. \tag{5.65}$$

Pri velikih gostotah toka pride do nasičenja in gostota svetlobnega toka narašča linearno

$$j(z) = j_0 + j_s G z. \tag{5.66}$$

V tem primeru je gostota toka tako velika, da vsi atomi, ki jih s črpanjem spravimo v najvišje stanje, preidejo v stanje $|1\rangle$ s stimuliranim sevanjem. Pri konstantnem črpanju je tedaj linearno naraščanje gostote toka razumljivo.



Slika 5.7: Naraščanje gostote svetlobnega toka pri optičnem ojačevanju

Vrnimo se k preseku za stimulirano sevanje σ (enačba 5.64). Opazimo, da je enak preseku za absorpcijo (enačba 5.38) dvonivojskega sistema in tako odvisen od frekvence in sorazmeren vrednosti atomske spektralne črte pri frekvenci prehoda. Za He-Ne laser ($\lambda = 633$ nm in $\Delta\nu \sim 1{,}5$ GHz) znaša $\sigma \sim 10^{-16}$ m^2, za Nd:YAG (1064 nm in $\Delta\nu \sim 150$ GHz) pa $\sigma \sim 10^{-22}$ m^2. Zaradi različnih presekov, različnih gostot atomov in različnih načinov črpanja se koeficienti ojačenja v večnivojskih sistemih med seboj precej razlikujejo. Tipičen koeficient ojačenja v He-Ne laserju z dolžino $L = 0{,}5$ m je $GL \sim 1{,}015$, v Nd:YAG laserju z dolžino ojačevalnega sredstva $L = 10$ cm pa $GL \sim 50$. Pri prvem laserju je sicer velik presek za stimulirano sevanje, vendar je gostota atomov v obrnjeni zasedenosti razmeroma majhna. V drugem primeru pa močno črpanje prevlada nad majhnim presekom in pride do velikega ojačenja.

5.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte

Doslej smo privzeli, da svetijo vsi atomi obravnavane snovi pri isti frekvenci ω_0 in z isto spektralno širino, ki smo jo popisali s funkcijo $g(\omega - \omega_0)$, z vrhom pri ω_0. Če to velja, je razširitev spektralne črte homogena. Funkcija $g(\omega - \omega_0)$ je v tem primeru Lorentzove oblike

$$g_L(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \tag{5.67}$$

s širino črte $\Delta\omega_L = 2\gamma$ (glej sliko 2.4). Primera homogene razširitve sta naravna širina in razširitev zaradi trkov med atomi. Homogena razširitev je pogosto večja od obratne vrednosti razpadnega časa nivoja. V plinu namreč prihaja do trkov, ki lahko zmotijo le fazo sevanja, ne da bi povzročili prehod, razširijo pa spektralno črto. V trdni snovi pa homogeno razširitev brez prehoda povzročajo termična nihanja lokalnega polja.

Spektralna črta je lahko razširjena tudi zato, ker svetloba, izhajajoča iz različnih atomov, nima povsem iste frekvence. Tedaj govorimo o nehomogeni razširitvi. Najpomembnejši primer nehomogene razširitve je Dopplerjeva razširitev v plinu. Atomi plina vedno sevajo pri praktično isti frekvenci ω_0, vendar jih zaradi gibanja opazovalec v mirujočem (laboratorijskem) sistemu v skladu z Dopplerjevim pojavom zazna pri različnih frekvencah.

Tako so opazovane frekvence posameznih atomov ω odvisne od hitrosti v atoma glede na smer opazovanja. Zapišemo jih kot

$$\omega = \omega_0 - \frac{v}{c}\omega_0 = \omega_0 - k_0 v. \tag{5.68}$$

Označimo z $\mathcal{N}(v)$ porazdelitev gostote atomov po hitrostih, pri čemer se omejimo le na premikanje v smeri opazovanja. V termičnem ravnovesju je $\mathcal{N}(v)$ Maxwellova porazdelitev

$$\mathcal{N}(v) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, \tag{5.69}$$

kjer je m masa posameznega atoma. Porazdelitev atomov po frekvencah izračunamo tako, da hitrost izrazimo iz enačbe (5.68), poleg tega funkcijo $g_D(\omega-\omega_0)$ normiramo. Sledi

$$g_D(\omega-\omega_0) = \frac{c}{\omega_0}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{2k_B T}\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}\right). \tag{5.70}$$

Dopplerjeva razširitev v plinu je torej Gaussove oblike. Njena širina pri polovični višini[6] je

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\frac{2k_B T\ln 2}{mc^2}}\,\omega_0. \tag{5.71}$$

Naloga 5.8.1 Izpelji obliko nehomogeno razširjene črte za Dopplerjevo razširitev (enačba 5.70) in pokaži, da je njena širina podana z enačbo (5.71).

Izračunajmo Dopplerjevo razširitev na primeru He-Ne laserja. Za prehod atoma neona pri 632,8 nm in temperaturi 300 K je izračunana vrednost $\Delta\omega_D = 8\cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1}$ oziroma $\Delta\nu = 1{,}4$ GHz. Dejanske izmerjene vrednosti širine črte za He-Ne laser znašajo okoli 1,5 GHz, kar je znatno več od naravne širine črte (1,2 MHz). Še bolj izrazite so razširitve zaradi nehomogenosti v trdninskih laserjih, na primer v Nd:YAG laserju, v katerem je širina črte $\Delta\nu = 150$ GHz. Nehomogena razširitev zaradi Dopplerjevega pojava v redkem plinu ali zaradi nehomogenosti v trdnih snoveh je tako kar nekaj redov velikosti večja od homogene naravne širine in razširitve zaradi trkov.

★ Pri nehomogenih razširitvah bi za bolj natančen izračun morali upoštevati tudi naravno širino posameznega atoma. To bi zapisali s konvolucijo Lorentzove in Gaussove funkcije in dobili tako imenovan Voigtov profil[7], ki pa ga ne moremo preprosto analitično zapisati.

5.9 *Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte

V razdelku (5.5) smo obravnavali nasičenje absorpcije pri homogeno razširjenem prehodu. Pri nasičenju absorpcije, kadar prevladuje nehomogena razširitev, nastopijo pomembni novi pojavi.

Začnimo z dvonivojskim plinom, na katerega vpada močan snop monokromatske svetlobe s frekvenco ω_S, ki je blizu osrednje frekvence ω_0 Dopplerjevo razširjene črte. S svetlobo lahko sodeluje le skupina atomov, pri kateri se Dopplerjevo premaknjena frekvenca od ω_S ne razlikuje več kot za homogeno širino, ki jo opisuje funkcija $g(\omega-\omega_S)$. Zato ne moremo zapisati zasedbenih enačb za vse atome hkrati, ampak le za tiste, ki imajo hitrost med v in $v+dv$ in ki absorbirajo svetlobo pri frekvenci $\omega_0 - kv$.

[6] Celotno širino na polovični višini imenujemo FWHM – *Full width at half maximum.*
[7] Nemški fizik Woldemar Voigt, 1850–1919.

Naj bosta $\mathscr{N}_1(v)$ in $\mathscr{N}_2(v)$ hitrostni porazdelitvi atomov v osnovnem in vzbujenem stanju. Gostota $\mathscr{N}_2(v)$ se spreminja podobno kot celotna zasedenost v homogenem primeru (enačba 5.28)

$$\frac{d\mathscr{N}_2(v)}{dt} = -A\mathscr{N}_2(v) - B\,g(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}\left(\mathscr{N}_2(v) - \mathscr{N}_1(v)\right), \tag{5.72}$$

kjer je j gostota vpadnega svetlobnega toka. Upoštevali smo, da je zaradi Dopplerjevega pojava prehod premaknjen k frekvenci $\omega_0 - kv$. Velja tudi

$$\mathscr{N}_1(v) + \mathscr{N}_2(v) = \mathscr{N}(v) \tag{5.73}$$

in

$$\frac{d\mathscr{N}_2(v)}{dt} = -\frac{d\mathscr{N}_1(v)}{dt}. \tag{5.74}$$

Vpeljimo $\mathscr{Z}(v) = \mathscr{N}_1(v) - \mathscr{N}_2(v)$. Podobno kot v enačbi (5.43) zapišemo

$$\mathscr{N}_2(v) = \frac{1}{2}\mathscr{N}(v) - \frac{1}{2}\mathscr{Z}(v) \tag{5.75}$$

in dobimo

$$\dot{\mathscr{Z}}(v) = -A\mathscr{Z}(v) + A\mathscr{N}(v) - 2B\,g(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}\mathscr{Z}(v). \tag{5.76}$$

V stacionarnem stanju je

$$\mathscr{Z}(v) = \frac{\mathscr{N}(v)}{1 + \frac{2B}{Ac}g(\omega_S - \omega_0 + kv)\,j}. \tag{5.77}$$

Če je nasičenje majhno, lahko imenovalec razvijemo

$$\mathscr{Z}(v) \approx \mathscr{N}(v)\left(1 - \frac{2B}{Ac}g(\omega_S - \omega_0 + kv)\,j\right). \tag{5.78}$$

Porazdelitev $\mathscr{Z}(v)$ je podobna nemoteni porazdelitvi atomov po hitrosti $\mathscr{N}(v)$, le da je pri hitrosti $v = (\omega_0 - \omega_S)/k$ zmanjšana zaradi vpliva vpadne svetlobe. Atomi s to hitrostjo namreč svetlobo absorbirajo in s tem prehajajo v gornje stanje. V porazdelitvi atomov tako nastane vdolbina, ki jo imenujemo Bennettova vdolbina[8] (slika 5.8). Širina vdolbine je določena s homogeno širino prehoda, to je s funkcijo $g(\omega_S - \omega_0 + kv)$, globina pa z gostoto vpadnega toka j.

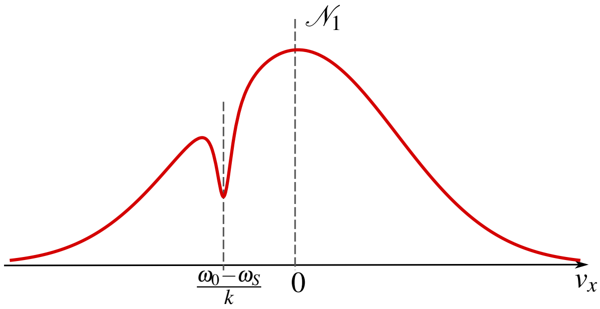
Naj na snov poleg močnega vpadnega žarka pri ω_S vpada še šibko valovanje pri frekvenci ω'. Izračunajmo absorpcijski koeficient za valovanje pri ω'. Upoštevati moramo, da k absorpciji prispevajo vsi atomi, katerih hitrost je taka, da je prehod dovolj blizu ω'. Absorpcijski koeficient potem izračunamo s seštevanjem po porazdelitvi $\mathscr{Z}(v)$ (enačba 5.41)

$$\mu(\omega') = \frac{\hbar\omega'}{c}\int \mathscr{Z}(v)Bg(\omega' - \omega_0 + k'v)\,dv. \tag{5.79}$$

Homogena razširitev je dosti manjša od Dopplerjeve širine, zato v prvem približku Lorentzovo funkcijo g v enačbi (5.79) nadomestimo kar z $\delta(\omega)$, v izrazu za $\mathscr{Z}$ (enačba 5.77) pa jo pustimo. Tako je absorpcijski koeficient za šibko testno svetlobo

$$\begin{aligned} \mu(\omega') &= \frac{\hbar\omega'}{k'c}B\frac{\mathscr{N}\left(\frac{\omega_0-\omega'}{k'}\right)}{1 + \frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S - \omega')} \\ &\approx \hbar B\mathscr{N}\left(\frac{\omega_0 - \omega'}{k'}\right)\left(1 - \frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S - \omega')\right). \end{aligned} \tag{5.80}$$

[8] Ameriški fizik William Ralph Bennett Jr., 1930–2008.



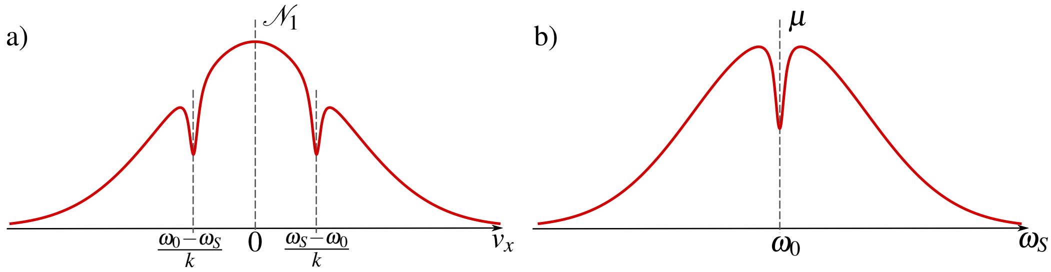
Slika 5.8: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, kjer zaradi absorbirane svetlobe nastane Bennettova vdolbina. Podobno obliko ima tudi absorpcijski koeficient.

V drugi vrstici smo uporabili približek (enačba 5.78). Vidimo, da je odvisnost $\mu(\omega')$ Gaussove oblike z vdolbino pri ω_S in je tako podobna porazdelitvi, kot jo kaže slika (5.8). Odvisnost $\mu(\omega')$ lahko tudi izmerimo, tako da spreminjamo frekvenco testnega snopa ω'.

★ Merjenje absorpcije s testnim žarkom omogoča opazovanje oblike homogene črte kljub mnogo večji nehomogeni Dopplerjevi razširitvi. V moderni spektroskopiji ima zato ta metoda velik pomen.

Izračunajmo še absorpcijski koeficient za prvi, močan vpadni snop, tako da v gornjem izrazu vstavimo $\omega' = \omega_S$. Vodilni člen $\mathcal{N}((\omega_0 - \omega_S)/k)$ opisuje običajno Gaussovo obliko Dopplerjevo razširjene črte, izraz v oklepaju pa da zmanjšanje absorpcije zaradi nasičenja, ki je odvisno le od vrednosti $g(0)$ in zato enako za vse ω_S. Z enim samim vpadnim snopom svetlobe torej vdolbine v absorpciji ne moremo zaznati, saj je izmerjena črta kljub nasičenju Gaussove oblike.

Namesto z dvema različnima snopoma, od katerih lahko šibkemu testnemu snopu spreminjamo frekvenco, lahko vdolbino v porazdelitvi zaznamo tudi z enim samim snopom spremenljive frekvence, ki se po prvem prehodu skozi plin odbije od ogledala in vrne v nasprotni smeri. S tem se v porazdelitvi atomov v spodnjem stanju simetrično pri hitrostih $\pm(\omega_0 - \omega_S)/k$ pojavita dve Bennettovi vdolbini (slika 5.9 a). Kadar je ω_S blizu ω_0, se vdolbini vsaj delno prekrivata, stopnja nasičenja se poveča in v krivulji za absorpcijo svetlobe se pojavi vdolbina (slika 5.9 b). Imenujemo jo Lambova vdolbina[9].



Slika 5.9: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, če svetloba prehaja skozi plin v dveh smereh (a). Če frekvenca vpadne svetlobe približno sovpada s centralno frekvenco prehoda, se vdolbini prekrivata in absorpcija se zmanjša (b).

Zapišimo enačbe za ta primer. Vpadni snop svetlobe povzroči spremembo zasedenosti pri prehodu skozi plin v obeh smereh, zato je zdaj

$$\mathscr{X}(v) \approx \mathcal{N}(v)\left(1 - \frac{2Bj}{Ac}\left(g(\omega_S - \omega_0 + kv) + g(\omega_S - \omega_0 - kv)\right)\right). \tag{5.81}$$

[9] Ameriški fizik in nobelovec Willis Eugene Lamb Jr., 1913–2008.

Podobno kot prej izračunamo absorpcijski koeficient za širjenje svetlobe v pozitivni smeri

$$\begin{aligned}\mu_+(\omega_S) &= \frac{\hbar\omega}{c}B\int \mathscr{X}(v)g(\omega_S-\omega_0+kv)\,dv \\ &\approx \hbar B\mathscr{N}\left(\frac{\omega_S-\omega_0}{k}\right)\left(1-\frac{2Bj}{Ac}\left(g(0)+g(2(\omega_S-\omega_0))\right)\right)\,. \end{aligned} \tag{5.82}$$

Izmerjeni absorpcijski profil je odvisen od frekvence vpadne svetlobe ω_S in ima pri ω_0 vdolbino, ki je zopet podobna homogeno razširjeni črti. Faktor 2 v argumentu funkcije $g(2(\omega_S-\omega_0))$ je posledica našega grobega približka, ko smo v integraciji $g(\omega_S-\omega_0+kv)$ nadomestili kar z δ funkcijo. Natančnejši račun pokaže, da je vrh pri ω_0 kar oblike $g(\omega_S-\omega_0)$.

Naloga 5.9.1 Pokaži, da je rezultat natančnejše izpeljave absorpcijskega koeficienta

$$\mu_+(\omega_S) = \hbar B\mathscr{N}\left(\frac{\omega_S-\omega_0}{k}\right)\left(1-\frac{Bj}{Ac}\left(g(0)+g(\omega_S-\omega_0)\right)\right)\,. \tag{5.83}$$

Pri računu privzemi, da je širina Dopplerjeve porazdelitve bistveno večja od širine homogene razširitve (enačba 5.67) in Maxwellovo porazdelitev postavi pred integral.

5.10 *Izpeljava verjetnosti za prehod

Verjetnosti za prehod atoma iz enega stanja v drugo s sevanjem, ki smo jih opisali s fenomenološkimi Einsteinovimi koeficienti A_{21} in B_{21} (razdelek 5.3), je mogoče izpeljati tudi drugače. Pri tem se poslužimo kvantne elektrodinamike, kar pomeni kvantno obravnavo tako atoma kot elektromagnetnega polja. Povsem strog račun je zahteven in presega okvir te knjige, zato si na kratko oglejmo le, kako pridemo do rezultata z uporabo Fermijevega zlatega pravila.

Postavimo dvonivojski atom v votlino z elektromagnetnim poljem. Izračunajmo verjetnost, da zaradi interakcije s poljem atom preide iz stanja $|2\rangle$ v stanje $|1\rangle$, pri čemer se število fotonov v izbranem stanju elektromagnetnega polja α poveča z n_α na $n_\alpha+1$. V vseh ostalih stanjih polja naj bo število fotonov enako nič.

Med atomom in poljem privzemimo električno dipolno interakcijo

$$\hat{H}_i = -e\hat{E}(\mathbf{r},t)\hat{x}, \tag{5.84}$$

kjer je $\hat{x}$ operator koordinate elektrona v atomu. Privzeli smo, da je nihajoče polje polarizirano v smeri osi x. Stanja celotnega sistema, to je atoma in polja, zapišemo v obliki produkta atomskih stanj in stanja elektromagnetnega polja, pri čemer moramo navesti število fotonov v vsakem nihanju votline α. Zapišemo okrajšano

$$|i,n_\alpha\rangle \equiv |i\rangle|\{n_\alpha\}\rangle. \tag{5.85}$$

Začetno stanje celotnega sistema naj bo tako $|2,n_\alpha\rangle$, kar pomeni, da je atom v gornjem stanju (stanju 2), polje pa ima n_α fotonov v enem samem stanju α. Ustrezno končno stanje po prehodu je $|1,n_\alpha+1\rangle$.

V prvem redu teorije motenj je verjetnost za prehod iz začetnega v končno stanje na časovno enoto, pri čemer z delta funkcijo izberemo le prehod, pri katerem se ohranja energija, enaka

$$w_{21} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle 1,n_\alpha+1|\hat{H}_i|2,n_\alpha\rangle|^2\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha). \tag{5.86}$$

Operator elektromagnetnega polja lahko po enačbi (5.10) razvijemo po lastnih nihanjih votline

$$\hat{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}}\sum_\alpha \hat{p}_\alpha(t)E_\alpha(\mathbf{r}), \tag{5.87}$$

kjer je $\hat{p}_\alpha$ operator gibalne količine stanja α, E_α pa funkcija, ki popisuje krajevno odvisnost polja. Vemo, da se vsako elektromagnetno nihanje votline obnaša kot harmonski oscilator. Zato lahko vpeljemo kreacijske in anihilacijske operatorje

$$\hat{a}_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha\hat{q}_\alpha - i\hat{p}_\alpha) \qquad \text{in} \tag{5.88}$$

$$\hat{a}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha\hat{q}_\alpha + i\hat{p}_\alpha). \tag{5.89}$$

Kreacijski operatorji povečujejo, anihilacijski pa zmanjšujejo število fotonov v danem stanju

$$\hat{a}_\alpha^\dagger|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha+1}|n_\alpha+1\rangle \qquad \text{in} \tag{5.90}$$

$$\hat{a}_\alpha|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha}|n_\alpha-1\rangle. \tag{5.91}$$

Edini od nič različni matrični elementi so tako oblike

$$\langle n_\alpha+1|\,\hat{a}_\alpha^\dagger\,|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha+1} \qquad \text{in} \tag{5.92}$$

$$\langle n_\alpha-1|\,\hat{a}_\alpha\,|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha}. \tag{5.93}$$

Operatorje $\hat{p}_\alpha$ lahko izrazimo s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji in jih vstavimo v razvoj električnega polja (enačba 5.87). Dobimo

$$\hat{E}(\mathbf{r},t) = -i\sum_\alpha\sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}}\left(\hat{a}_\alpha^\dagger - \hat{a}_\alpha\right)E_\alpha(\mathbf{r}). \tag{5.94}$$

Nadaljujemo z izračunom matričnega elementa. Operator koordinate $\hat{x}$ deluje le na atomski del stanja, $\hat{E}$ pa le na elektromagnetno polje, zato velja

$$\langle 1,n_\alpha+1|\,\hat{H}_i\,|2,n_\alpha\rangle = -e\,\langle 1,n_\alpha+1|\,\hat{E}\,\hat{x}\,|2,n_\alpha\rangle \tag{5.95}$$

$$= -e\,\langle 1|\,\hat{x}\,|2\rangle\langle n_\alpha+1|\,\hat{E}\,|n_\alpha\rangle. \tag{5.96}$$

Vstavimo polje, ki smo ga izrazili s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji (enačba 5.94), upoštevamo zvezi (5.92) in (5.93) in zapišemo

$$\begin{aligned}\langle n_\alpha+1|\,\hat{E}\,|n_\alpha\rangle &= -i\sum_\beta\sqrt{\frac{\hbar\omega_\beta}{2V\varepsilon_0}}\langle n_\alpha+1|\,\hat{a}_\beta^\dagger - \hat{a}_\beta\,|n_\alpha\rangle E_\beta(\mathbf{r})\\ &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}}\sqrt{n_\alpha+1}\,E_\alpha(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{5.97}$$

Od vseh operatorjev v razvoju polja je namreč od nič različen matrični element le za kreacijski operator za stanje α.

Vpeljimo še simbol za matrični element koordinate med atomskima stanjema $\langle 1|\hat{x}|2\rangle = x_{12}$. Iskana verjetnost za prehod iz začetnega stanja, v katerem je v votlini vzbujen atom in n_α fotonov, v končno stanje, v katerem je atom v osnovnem stanju in $n_\alpha+1$ fotonov v stanju α, je tako

$$w_{21} = \frac{\pi e^2\omega_\alpha x_{12}^2}{V\varepsilon_0}(n_\alpha+1)\,E_\alpha^2(\mathbf{r})\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha). \tag{5.98}$$

Verjetnost za prehod je sorazmerna z $n_\alpha + 1$ in je od nič različna, tudi če je število kvantov polja enako nič. To opisuje seveda spontano sevanje. Prispevek, ki je sorazmeren s številom že prisotnih fotonov, pa predstavlja stimulirano sevanje. Verjetnost za prehod vsebuje še kvadrat prostorske odvisnosti polja $E_\alpha^2(\mathbf{r})$. Če ne poznamo natančnega položaja atoma ali če je plin atomov enakomerno porazdeljen po votlini, lahko ta člen nadomestimo s povprečno vrednostjo. Za stoječe valovanje je to 1/2.

Kolikšna pa je verjetnost za spontano emisijo? Spontana emisija je možna v vsa elektromagnetna nihanja votline s pravo frekvenco. Celotno verjetnost za prehod atoma iz vzbujenega stanja v osnovno izračunamo tako, da seštejemo verjetnosti za prehod z izsevanim fotonom v določenem stanju. Spomnimo se, da je ta verjetnost ravno enaka Einsteinovem koeficientu A_{21} (enačba 5.34)

$$A_{21} = \sum_\alpha w_{21} = \sum_\alpha \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V\varepsilon_0}\,\delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \tag{5.99}$$

Za prostorsko odvisnost polja $E^2(\mathbf{r})$ smo vzeli povprečje 1/2. Vsoto po nihanjih lahko z uporabo enačbe (5.7) spremenimo v integral in upoštevamo enačbo (5.6). Dobimo

$$A_{21} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\hbar\varepsilon_0}\int \rho(\omega_\alpha)\omega_\alpha\,\delta(\omega_0 - \omega_\alpha)\,d\omega_\alpha = \frac{e^2\omega_0^3 x_{12}^2}{\varepsilon_0 h c^3}, \tag{5.100}$$

pri čemer smo z $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ označili frekvenco prehoda. S tem smo izpeljali vrednost Einsteinovega koeficienta A_{21}.

★ Pri gornjem izračunu Einsteinovega koeficienta A_{21} smo privzeli, da so vsi dipoli urejeni v smeri svetlobe. Če želimo rezultat izenačiti s koeficientom, ki smo ga vpeljali za izotropno sevanje črnega telesa, ga moramo pomnožiti s faktorjem $\langle\cos^2\vartheta\rangle = 1/3$.

Zaradi spontanega sevanja vzbujeno atomsko stanje nikoli ni popolnoma stacionarno. Poleg tega energija stanja s končnim razpadnim časom ni natančno določena, zato moramo verjetnost za stimulirano sevanje (enačba 5.98) malo popraviti. Delta funkcijo energije nadomestimo s končno široko funkcijo $g(\omega - \omega_0)$, ki ima vrh pri ω_0. Zaradi spremembe integracijske spremenljivke nastopi še dodaten faktor $1/\hbar$ in zapišemo

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V\varepsilon_0\hbar}(n_\alpha + 1)g(\omega_\alpha - \omega_0). \tag{5.101}$$

Poglejmo še Einsteinov koeficient za stimulirano sevanje B_{21}. Lahko ga izrazimo iz enačbe (5.27), če upoštevamo, da je gostota energije polja $n_\alpha\hbar\omega_\alpha/V$

$$B_{21} = \frac{V\,w_{21}}{n_\alpha\hbar\omega_\alpha\,g(\omega_\alpha - \omega_0)} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\varepsilon_0\hbar^2}. \tag{5.102}$$

Razmerje Einsteinovih koeficientov izračunamo z uporabo enačb (5.100) in (5.102) in dobimo

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega_\alpha^3}{\pi^2 c^3}, \tag{5.103}$$

ki se ujema z razmerjem, ki smo ga izpeljali z uporabo Planckove formule (enačba 5.34). Prehojena pot jasno kaže zvezo med spontanim in stimuliranim sevanjem ter gostoto stanj elektromagnetnega polja.

5.11 *Rabijeve oscilacije

Ko močna svetloba vpada na dvonivojski sistem, lahko v primeru, da je frekvenca vpadne svetlobe ω blizu frekvence prehoda ω_0, pride do periodične izmenjave energije med svetlobnim poljem in dvonivojskim sistemom. Oscilacije števila fotonov oziroma pričakovane vrednosti zasedenosti nivojev imenujemo Rabijeve oscilacije[10].

Obravnavajmo sklopitev dvonivojskega sistema z elektromagnetnim valovanjem v semiklasičnem modelu. To pomeni, da dvonivojski sistem obravnavamo kvantno, svetlobo, ki vpada nanj, pa kot klasično skalarno polje. V odsotnosti električnega polja zapišemo Hamiltonian za elektron kot

$$H_0 = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2|, \tag{5.104}$$

pri čemer je $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0$ frekvenca prehoda. V prisotnosti svetlobnega polja moramo dodati še člen, ki opisuje dipolno interakcijo. Celoten Hamiltonian postane časovno odvisen in ga zapišemo kot

$$H = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2| - e\hat{x}E_0\cos(\omega t). \tag{5.105}$$

Schrödingerjevo enačbo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \tag{5.106}$$

rešujemo z nastavkom

$$|\psi\rangle = c_1(t)e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + c_2(t)e^{-i\omega_2 t}|2\rangle, \tag{5.107}$$

saj je valovna funkcija, ki popisuje stanje sistema, na splošno kombinacija obeh stanj. Nastavek (enačba 5.107) in Hamiltonian (enačba 5.105) vstavimo v enačbo (5.106), ki jo enkrat pomnožimo z $\langle 1|$, drugič pa z $\langle 2|$ in izpeljemo sistem dveh sklopljenih enačb

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{\hbar}V\cos(\omega t)e^{-i\omega_0 t}c_2 \qquad \text{in} \qquad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{\hbar}V\cos(\omega t)e^{i\omega_0 t}c_1, \tag{5.108}$$

pri čemer je $V = -\langle 1|e\hat{x}E_0|2\rangle$. Zapišemo še $\cos(\omega t)$ kot kompleksno število in zanemarimo hitro spreminjajočo se komponento pri $\omega_0 + \omega$, tako da enačbi prepišemo v

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}Ve^{-i\Delta t}c_2 \qquad \text{in} \qquad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}Ve^{i\Delta t}c_1, \tag{5.109}$$

kjer je $\Delta = \omega_0 - \omega$. Dodajmo še začetni pogoj, da je sistem v osnovnem stanju in torej $c_1(0) = 1$ in $c_2(0) = 0$. Rešitvi enačb (5.109) sta tako

$$c_1(t) = e^{-i\Delta t/2}\left(\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right) \qquad \text{in} \tag{5.110}$$

$$c_2(t) = \frac{V}{i\hbar\Omega}e^{i\Delta t/2}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \tag{5.111}$$

Pri tem smo vpeljali Rabijevo frekvenco

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{V}{\hbar}\right)^2} = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\langle 1|\hat{x}|2\rangle\, eE_0}{\hbar}\right)^2}. \tag{5.112}$$

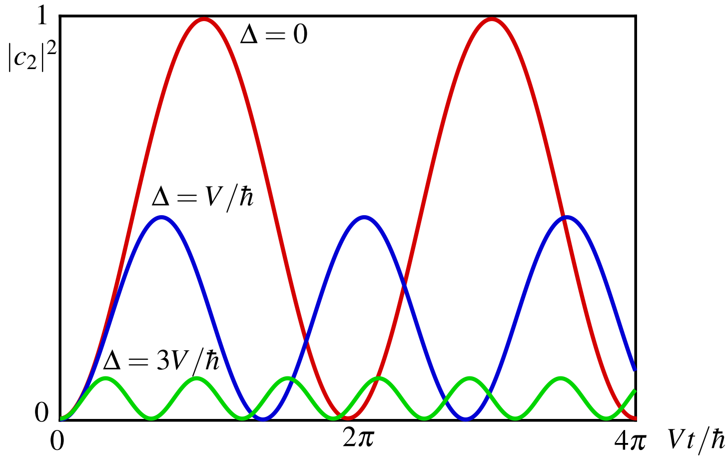
[10] Ameriški fizik in nobelovec Isidor Isaac Rabi, 1898–1988.

Naloga 5.11.1 Pokaži, da enačbi (5.110) in (5.111) rešita sistem enačb (5.109) ob izbranih začetnih pogojih.

Poglejmo rezultat podrobneje. Verjetnost, da najdemo atom v stanju $|2\rangle$, je enaka

$$P_2(t) = |c_2(t)|^2 = \frac{V^2}{\hbar^2\Omega^2}\sin^2(\Omega t/2). \tag{5.113}$$

Če je frekvenca vpadne svetlobe točno enaka frekvenci prehoda, je $\Delta = 0$ in $\Omega = V/\hbar$. Takrat je amplituda nihanja zasedenosti vzbujenega stanja kar enaka 1 in sistem v celoti periodično prehaja iz osnovnega stanja v vzbujeno in nazaj. To pomeni, da prihaja izmenično do popolne absorpcije svetlobe in do popolne stimulirane emisije. Pri odstopajoči vpadni frekvenci se amplituda nihanja zmanjša, hkrati pa se poveča frekvenca oscilacij. Frekvenca oscilacij pa ni odvisna zgolj od frekvence vpadnega valovanja, ampak tudi od njegove amplitude električne poljske jakosti. Zelo groba ocena Rabijeve frekvence je zato $\Omega \sim$ MHz.



Slika 5.10: Rabijeve oscilacije za tri različne vrednosti odstopanja frekvence vpadne svetlobe od frekvence prehoda $\Delta = \omega_0 - \omega$. Z naraščajočim odstopanjem se amplituda oscilacij zmanjšuje, njihova frekvenca pa povečuje.

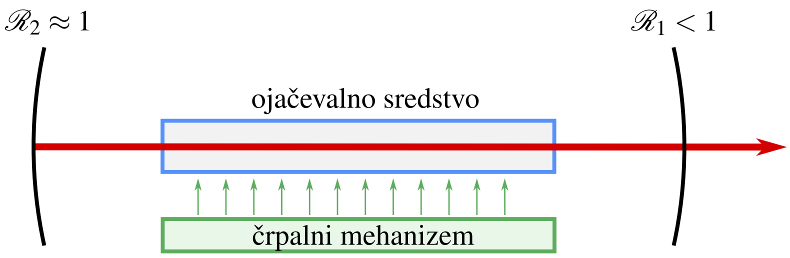
★ Rabijeve oscilacije niso omejene samo na optične prehode, ampak se pojavijo pri vrsti dvonivojskih sistemov, ki interagirajo z spreminjajočim se zunanjim poljem. Poznamo jih na primer pri jedrski magnetni resonanci (NMR) ali kvantnih logičnih vezjih.

6. Laser

V prejšnjih poglavjih smo spoznali resonatorje, pojasnili ojačevanje svetlobe in opisali črpanje, ki je potrebno za ojačevanje optičnega signala. V tem poglavju bomo vsa ta spoznanja združili in komponenete sestavili v eno samo napravo – laser. Opisali bomo delovanje laserjev in spoznali njihove prednosti pred navadnimi svetili. Zapisali bomo zasedbene enačbe in razložili delovanje laserjev, spoznali zanimive spremljujoče pojave, opisali načine delovanja laserjev v sunkih in na koncu predstavili še semiklasični model laserja.

6.1 Laser

Spoznali smo, da se svetloba pri prehodu skozi sredstvo z obrnjeno zasedenostjo med dvema nivojema ojačuje. Postavimo tako sredstvo v optični resonator. Na začetku nastaja predvsem spontano izsevana svetloba, ki se med zrcaloma resonatorja odbija in ob vsakem preletu skozi snov postopoma ojačuje. Vzbujajo se nihanja resonatorja z nihajnimi frekvencami blizu frekvence atomskega prehoda, pri katerih snov ojačuje. Energija nihanj z dovolj majhnimi izgubami narašča, dokler se ojačenje ne izenači z izgubami. Sistem preide v stacionarno stanje in seva močno koherentno svetlobo. Tak izvor svetlobe imenujemo laser. Beseda laser je nastala iz kratice za *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* – ojačenje svetlobe s stimuliranim sevanjem.



Slika 6.1: Shema laserja s ključnimi deli: ojačevalno sredstvo, črpalni mehanizem in resonator

★ Kot klasično analogijo za laser vzemimo klarinet, ki je sestavljen iz cevi in ustnika. Cev deluje kot resonator, v katerem nastane stojni zvočni val, pri čemer je frekvenca stoječega vala določena z dolžino cevi in s številom vozlov. Naloga ustnika je dovajanje energije in s tem vzdrževanje konstantne amplitude nihanja. To glasbenik doseže s pihanjem v ustnik in tresenjem prožnega jezička, ki s tresljaji proizvaja zvok. Tresenje jezička je približno periodično in vsebuje mnogo različnih frekvenc, tudi take, ki ustrezajo frekvenci stoječih valov v cevi. Ko amplituda tlaka v cevi naraste nad neko mejo, pride do zanimivega pojava. Nihanje tlaka v gornjem koncu cevi povratno deluje na ustnik in ga sili, da niha s frekvenco najmočneje vzbujenega stoječega vala v cevi, druge frekvence pa zamrejo. Moč pihanja gre le še v nihanje jezička s pravo frekvenco in ojačuje nihanje zračnega stolpca. Tako se s povratno zvezo med nihanjem jezička in stoječim valovanjem v cevi vzdržuje stoječe valovanje s konstantno amplitudo.

V grobem ima laser tri ključne sestavne dele: ojačevalno sredstvo, črpalni mehanizem in ukrivljeni zrcali, ki tvorita resonator (slika 6.1). Črpalni mehanizem vzdržuje obrnjeno zasedenost v ojačevalnem sredstvu, resonator pa omogoča, da se svetloba dovolj ojači in tako stimulirano sevanje prevlada nad spontanim. Odbojnost vsaj enega od zrcal mora biti manjša od 1, da skozenj lahko izhaja svetloba.

Pri osnovnem opisu delovanja laserja se omejimo na najpreprostejši model in privzemimo, da frekvenca le enega resonatorskega nihanja sovpada s frekvenco prehoda aktivne snovi. Ta privzetek v večini laserjev ni avtomatično izpolnjen, vendar ga je pogosto mogoče doseči z dodatnimi elementi v resonatorju. Aktivno snov oziroma ojačevalno sredstvo v laserju stalno črpamo in s tem vzdržujemo obrnjeno zasedenost.

Naj bo W energija svetlobnega valovanja v resonatorju. Zaradi izgub skozi zrcali in zaradi absorpcije ter sipanja v resonatorju se energija na en obhod resonatorja zmanjša za (enačba 4.33)

$$\Delta W_{\text{izgube}} = -\Lambda W = -\left(1-\mathscr{R}_1+1-\mathscr{R}_2+2\alpha L\right)W, \tag{6.1}$$

kjer so Λ celotne izgube, α so izgube na enoto poti zaradi absoprcije in sipanja, L je dolžina resonatorja, $\mathscr{R}_1$ in $\mathscr{R}_2$ pa sta odbojnosti zrcal. V ojačevalnem sredstvu, v katerem vzdržujemo obrnjeno zasedenost, pride do ojačevanja s stimuliranim sevanjem. Energija nihanja resonatorja se tako na en obhod po enačbi (5.63) poveča za

$$\Delta W_{\text{ojačenje}} = \frac{G}{1+W/W_s}\, W\, 2L'. \tag{6.2}$$

Namesto saturacijske gostote svetlobnega toka j_s smo vpeljali saturacijsko energijo $W_s = V j_s/c$, L' pa označuje dolžino ojačevalnega sredstva. Račun pogosto poenostavimo, tako da vzamemo $L' = L$, tukaj pa zaradi jasnosti obdržimo ločen zapis. Privzeli smo tudi, da je ojačenje na en obhod dovolj majhno, da enačbe (5.63) ni treba integrirati.

V stacionarnem stanju se zmanjšanje energije zaradi izgub ravno izenači s povečanjem energije zaradi ojačenja. Zapišemo

$$|\Delta W_{\text{izgube}}| = |\Delta W_{\text{ojačenje}}|, \tag{6.3}$$

od koder sledi

$$\Lambda W = \frac{G\, 2L'}{1+W/W_s}\, W. \tag{6.4}$$

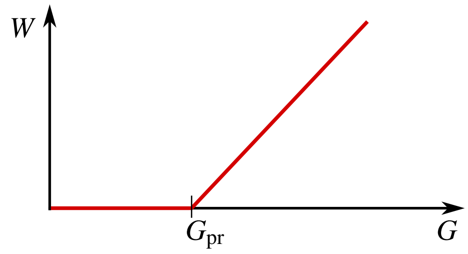
Ta enačba ima dve rešitvi za energijo svetlobnega nihanja. Prva je $W = 0$, druga pa

$$\boxed{W = W_s\left(\frac{G}{G_{\text{pr}}}-1\right),} \tag{6.5}$$

pri čemer je

$$\boxed{G_{\text{pr}} = \frac{\Lambda}{2L'}.} \tag{6.6}$$

Združimo obe rešitvi: energija svetlobe v laserju je pod določeno vrednostjo ojačenja, imenujemo jo ojačenje na pragu delovanja G_{pr}, enaka nič, nad pragom pa linearno narašča z ojačenjem G (slika 6.2). Ojačenje je seveda odvisno od stopnje obrnjene zasedenosti, ta pa je povezana z močjo črpanja.



Slika 6.2: Odvisnost energije svetlobe v laserju od ojačenja

Izhodna moč laserja je enaka energiji, ki zapusti resonator skozi izhodno zrcalo, deljeni s časom obhoda resonatorja $2L/c$

$$\boxed{P = (1-\mathscr{R}_1)\frac{c}{2L}W.} \tag{6.7}$$

Ker so vsi predfaktorji v gornji enačbi konstantni, je izhodna moč kar sorazmerna z energijo svetlobe v resonatorju. Odvisnost izhodne moči laserja od črpanja je tako do konstante enaka, kot je prikazana na sliki (6.2).

Naloga 6.1.1 Izračunaj izhodno moč iz laserja pri dani dolžini resonatorja $L = L'$, odbojnosti enega zrcala $\mathscr{R}_2 = 1$, notranjih izgubah na enoto dolžine α in ojačenju G. Pokaži, da je izhodna moč največja pri odbojnosti izhodnega zrcala

$$\mathscr{R}_1 = 1 - 2\alpha L\left(\sqrt{\frac{G}{\alpha}} - 1\right). \tag{6.8}$$

6.2 Zasedbene enačbe

Za podrobnejši opis delovanja laserja zapišimo zasedbene enačbe. Enačbam za zasedenost atomskih nivojev v trinivojskem sistemu (enačbe 5.52–5.54) dodamo še enačbo za energijo lastnega valovanja v resonatorju. Še naprej obravnavajmo primer, ko je vzbujeno le eno resonatorsko stanje, opazujemo pa prehode med prvim in drugim vzbujenim stanjem (slika 5.6 b).

Preden zapišemo enačbe, napravimo še nekaj poenostavitev. Najprej privzamemo, da je razpadni čas spodnjega laserskega stanja $|1\rangle$, ki ga določa koeficient A_{10}, dosti krajši od razpadnega časa zgornjega stanja $|2\rangle$. Tedaj vsi atomi iz spodnjega stanja zelo hitro preidejo v osnovno stanje in $N_1 \approx 0$, če le ni preveč stimuliranega sevanja. Zanemarimo tudi spontano sevanje iz drugega vzbujenega nivoja $A_{20} \approx 0$. Celoten sistem potem opišemo z dvema spremenljivkama: prva je N_2, ki označuje zasedenost drugega vzbujenega stanja in hkrati približno obrnjeno zasedenost; druga je število fotonov n, ki opisuje energijo v izbranem stanju resonatorja. Gostota energije polja je $w = n\hbar\omega/V$, pri čemer je V volumen resonatorja.

Zasedbeni enačbi sta

$$\frac{dN_2}{dt} = rN - A_{21}N_2 - B_{21}gN_2\frac{\hbar\omega}{V}n = rN - A_{21}N_2 - \frac{\sigma c}{V}N_2 n \tag{6.9}$$

in

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma c}{V}N_2(n+1) - \frac{2}{\tau}n. \tag{6.10}$$

Prva enačba sledi neposredno iz enačbe (5.54) ob upoštevanju zgoraj navedenih poenostavitev. Drugo pa dobimo s sledečim razmislekom. Energija svetlobe oziroma število fotonov v resonatorju se povečuje predvsem zaradi stimuliranega sevanja, ki predstavlja zadnji člen v enačbi (6.9). Vemo pa, da je verjetnost za prehod atoma iz višjega v nižje stanje z izsevanjem fotona v izbrano stanje elektromagnetnega polja sorazmerna z $n+1$ (enačba 5.101), kjer je n število fotonov v izbranem stanju. Če torej namesto n v zadnjem členu enačbe (6.9) pišemo $n+1$, opišemo poleg stimuliranega sevanja tudi prispevek spontanega sevanja. Dodamo še člen, s katerim popišemo zmanjševanje energije svetlobe v resonatorju zaradi izgub, kar opišemo z razpadnim časom $\tau/2$ (enačba 4.31).

Gornji enačbi predstavljata sistem dveh sklopljenih diferencialnih enačb za časovni razvoj števila fotonov v resonatorskem stanju in za zasedenost gornjega atomskega stanja. Enačbi sta nelinearni in ju ne znamo analitično rešiti. Vseeno pa lahko nekaj povemo o takem sistemu.

Poglejmo najprej stacionarne rešitve, za katere velja $\dot{N}_2 = 0$ in $\dot{n} = 0$. Iz enačbe (6.9) izrazimo N_2 in ga vstavimo v enačbo (6.10). Sledi

$$\frac{2}{\tau} n\left(A_{21}V + \sigma c n\right) = \sigma c r N (n+1). \tag{6.11}$$

Enačbo zapišemo še bolj pregledno, če vpeljemo koeficient ojačenja G (enačba 5.64) in ojačenje na pragu G_{pr} (enačbi 4.35 in 6.6)

$$G_{\mathrm{pr}}\, n \left(1 + \frac{\sigma c}{V A_{21}} n\right) = G(n+1). \tag{6.12}$$

Vpeljemo še brezdimenzijsko konstanto p, pri čemer upoštevamo zvezo med Einsteinovimi koeficienti (enačba 5.34)

$$p = \frac{VA_{21}}{\sigma c} = \frac{VA_{21}}{B_{21}\hbar\omega g} = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3 g} \simeq \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}\Delta\omega. \tag{6.13}$$

V zadnjem izrazu smo privzeli, da je $g \simeq 1/\Delta\omega$. Parameter p je torej približno enak produktu gostote stanj elektromagnetnega polja v resonatorju (enačba 5.6) in širine atomskega prehoda (ter volumna), torej kar številu vseh stanj v frekvenčnem intervalu atomskega prehoda. To število je navadno precej veliko $p \sim 10^8$–10^{10}.

★ S primerjavo izraza za p (enačba 6.13) z izrazom za saturacijsko gostoto toka (enačba 5.60) vidimo, da p predstavlja število fotonov v resonatorju, pri katerem pride do nasičenja ojačenja, če je frekvenca nihanja resonatorja blizu centra atomske črte.

Enačbo (6.12) prepišemo

$$\frac{n^2}{p} - \left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right) n - \frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} = 0 \tag{6.14}$$

s pozitivno rešitvijo

$$n = \frac{p}{2}\left(\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right)^2 + \frac{4G}{p\,G_{\mathrm{pr}}}}\right). \tag{6.15}$$

Ker je p zelo veliko število, lahko koren razvijemo, če le ni ojačenje preveč blizu praga, ko je $G/G_{\mathrm{pr}} \simeq 1$.

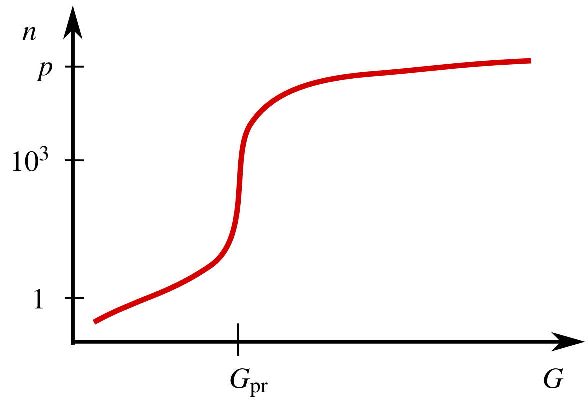
Pod pragom je $G < G_{\mathrm{pr}}$ in

$$n \approx \frac{p}{2}\left(\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}}-1\right)+\left(1-\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}}\right)+\frac{2G}{p(G_{\mathrm{pr}}-G)}\right)=\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}-G}. \tag{6.16}$$

Pri razvoju korena smo upoštevali, da mora biti pozitiven. Nad pragom je število fotonov

$$\boxed{n \approx p\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}}-1\right)=\frac{W_s}{\hbar\omega}\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}}-1\right).} \tag{6.17}$$

Rezultat, ki je po pričakovanju skladen z enačbo (6.5), si oglejmo podrobneje. Pod pragom so izgube večje od črpanja in gre praktično vsa moč, ki jo dovedemo v sistem, preko spontanega sevanja v veliko število stanj elektromagnetnega polja. Število fotonov v izbranem resonatorskem nihanju je tako okoli ena do neposredne bližine praga, kjer hitro naraste (slika 6.3), nad pragom je reda velikosti p. Nad pragom povsem prevlada stimulirano sevanje v eno samo izbrano nihanje resonatorja. Prehod preko praga je zaradi velikega p tako hiter, da ga ni mogoče izmeriti. Izjema so polprevodniški laserji, katerih volumen – in posledično tudi p – je tako majhen, da je mogoče opaziti zvezen prehod preko praga.



Slika 6.3: Odvisnost števila fotonov v resonatorju od ojačenja za $p = 10^5$.

Izračunjamo še stacionarno zasedenost zgornjega atomskega nivoja. Iz enačbe (6.10) sledi

$$\boxed{N_2 = \frac{2V}{\tau\sigma c}\frac{n}{n+1} \approx \frac{2V}{\tau\sigma c}.} \tag{6.18}$$

Na pragu je po enačbi (6.15) $n = \sqrt{p}$. Sledi

$$N_{2\mathrm{pr}} = \frac{2V}{\tau\sigma c}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1}. \tag{6.19}$$

Ker je p zelo veliko število, iz gornjih enačb sledi, da zasedenost višjega nivoja oziroma obrnjena zasedenost narašča do bližine praga, nad pragom pa je praktično konstantna in skoraj natanko enaka kot na pragu. To ni težko razumeti. Nad pragom je število fotonov v resonatorju veliko in linearno narašča z močjo črpanja. S tem se povečuje hitrost praznjenja gornjega atomskega stanja s stimuliranim sevanjem, kar ravno izniči učinek povečanja črpanja. V stacionarno delujočem laserju obrnjene zasedenosti torej ni mogoče povečati nad vrednost na pragu $N_{2\mathrm{pr}}$. To ima pomembne praktične posledice, kot bomo videli v nadaljevanju.

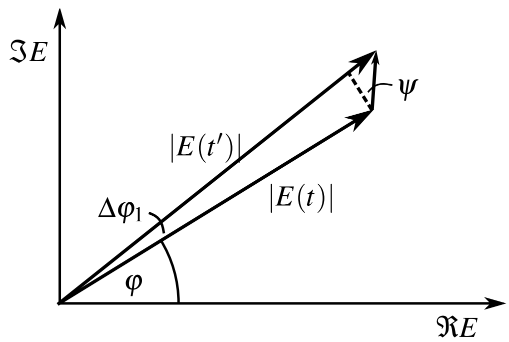
★ Obravnava laserja z zasedbenimi enačbami je seveda zelo groba. Nismo upoštevali, da je prostorska odvisnost polja v delujočem laserju drugačna od lastnega stanja praznega resonatorja. Poleg tega smo privzeli, da so atomi lahko le v lastnih energijskih stanjih, kar je res le v primeru stacionarnih stanj brez zunanjega, časovno odvisnega polja svetlobe. Bolj podroben pristop je semiklasični model, pri katerem za opis svetlobe uporabimo klasično valovno enačbo, za atome pa kvantno mehaniko (glej poglavje 6.12). Ta model zadošča za opis skoraj vseh pojavov v laserjih razen vpliva spontanega sevanja. Za dosledno obravnavo tega je treba svetlobo opisati s pomočjo kvantne elektrodinamike, kar presega okvir te knjige.

Povzemimo na kratko, kaj smo spoznali o delovanju enofrekvenčnega laserja. Pri dovolj velikem ojačenju, ki ravno pokriva izgube resonatorja, je v stacionarnem stanju energija in s tem amplituda izbranega lastnega nihanja resonatorja različna od nič. Frekvenca svetlobe je določena z izbranim lastnim stanjem resonatorja, ki določa tudi prostorsko odvisnost valovanja v resonatorju in obliko izhodnega snopa. V navadnem stabilnem resonatorju je polje po obliki zelo blizu Gaussovem snopu, zato je tak tudi izhodni snop. Gaussova prostorska odvisnost izhodnega snopa je morda najpomembnejša lastnost laserjev. Gaussov snop se, kot vemo, najmanj širi zaradi uklona in ga je mogoče zbrati v piko približne velikosti valovne dolžine. Laser se tako najbolj približa idealno točkastemu izvoru svetlobe.

6.3 Spektralna širina enega laserskega nihanja

Povejmo še nekaj o spektralni širini svetlobe enofrekvenčnega laserja. Če bi se lastno stanje elektromagnetnega polja v resonatorju obnašalo kot klasično harmonsko nihalo, bi bil spekter laserja neskončno ozek. Vendar imajo laserji končno spektralno širino – v idealnem primeru zaradi kvantizacije elektromagnetnega polja, v praksi pa zaradi zunanjih motenj. Poskusimo oceniti razširitev zaradi vpliva kvantizacije. Zaradi nje je poleg stimuliranega sevanja vedno prisotno tudi spontano sevanje. To predstavlja kvantni šum, ki vodi do razširitve spektra.

Predstavimo amplitudo nihanja $E(t)$ na izbranem mestu v resonatorju kot kompleksno število, ki ga v kompleksni ravnini določata dolžina $|E(t)|$ in faza φ (slika 6.4). Pri tem fazo določimo glede na neko začetno izbrano fazo. Ker je energija svetlobe sorazmerna s številom fotonov, je dolžina sorazmerna s korenom iz števila fotonov v izbranem nihanju. Stimulirano sevanje, ki ravno pokriva izgube resonatorja, vzdržuje dolžino $|E(t)|$ praktično konstantno, nespremenjena ostaja tudi faza. Spontano sevanje velikosti amplitude nihanja ne spreminja dosti, vendar stohastična narava spontano izsevanih fotonov vpliva na njeno fazo. Majhen prispevek spontanega sevanja preko spreminjajoče se faze skrajša koherenčni čas in določa spodnjo mejo za širino spektralne črte.



Slika 6.4: Amplituda polja v resonatorju in njena sprememba zaradi spontanega sevanja

Pri spontani emisiji se izseva en foton s poljubno fazo. Prispevek h kompleksni amplitudi ima torej dolžino 1 in poljubno smer (slika 6.4). Zanima nas povprečje kvadrata spremembe faznega kota pri enem spontano izsevanem fotonu

$$\overline{\Delta\varphi_1^2} = \overline{\left(\frac{\cos\psi}{\sqrt{\bar{n}}}\right)^2} = \frac{1}{2\bar{n}}, \tag{6.20}$$

kjer ψ označuje kot med fazo celotnega polja in spontano izsevanega fotona. Zaporedne spontane emisije so med seboj neodvisne, zato izračunamo povprečni kvadrat spremembe faze pri m emisijah tako, da seštejemo povprečne kvadrate za posamezne fotone

$$\overline{\Delta\varphi_m^2} = m\overline{\Delta\varphi_1^2} = \frac{m}{2\bar{n}}. \tag{6.21}$$

Ocenimo še število spontano izsevanih fotonov na časovno enoto. Vemo, da stimulirano sevanje ravno pokrije izgube resonatorja, zato je stimulirano izsevanih fotonov na časovno enoto $2\bar{n}/\tau$. Vemo tudi, da je razmerje med verjetnostjo za stimulirano in spontano sevanje enako številu fotonov v danem stanju polja (enačba 5.98), zato je število spontanih sevanj na časovno enoto kar $2/\tau$. Tako je število spontano izsevanih fotonov v času t enako $m = 2t/\tau$ in

$$\overline{\Delta\varphi^2(t)} = \frac{t}{\bar{n}\tau}. \tag{6.22}$$

Čas t_p, v katerem se faza znatno spremeni, je torej velikostnega reda

$$t_p \sim \bar{n}\tau = \frac{W}{\hbar\omega}\tau = \frac{P}{\hbar\omega}\tau^2. \tag{6.23}$$

Ker je število fotonov v nihanju nad pragom zelo veliko ($\sim 10^9$ v majhnem He-Ne laserju), τ pa je $\sim 10^{-7}$, je karakteristični čas za fazno razširitev idealnega laserja $t_p \sim 100$ s.

Iz enačbe (6.23) vidimo tudi, da je spektralna širina, ki je podana z $1/t_p$, obratno sorazmerna z izhodno močjo laserja. Spodnjo mejo za spektralno širino pri dani izhodni moči laserja podaja Schawlow-Townseva limita[1]

$$\Delta\nu_{\min} = \frac{\pi h\nu}{P}\Delta\nu_R^2, \tag{6.24}$$

pri čemer $\Delta\nu_R$ predstavlja širino nihanja praznega resonatorja.[2] V neposredni bližini praga, kjer je $\bar{n} \sim 1$, je spektralna širina približno enaka širini nihanj praznega resonatorja.

Dejanski laserji seveda nimajo niti približno tako ozkega spektra, kot smo ga pravkar ocenili. Vemo, da je frekvenca laserja določena z dolžino resonatorja ($\nu = nc/2L$), pri čemer je n zelo veliko celo število. Že majhna sprememba dolžine resonatorja povzroči spremembo frekvence laserja, pri znatnejši spremembi dolžine pa lahko pride tudi do preskoka vzbujenega stanja resonatorja, to je števila n. Dolžina resonatorja se spreminja predvsem zaradi zunanjih mehanskih motenj in zaradi spreminjanja temperature. Če se posebej ne potrudimo s konstrukcijo resonatorja, so fluktuacije frekvence kar reda velikosti razmika med sosednimi stanji resonatorja, to je reda velikosti ~ 100 MHz. Fluktuacije dolžine je mogoče zmanjšati s skrbno konstrukcijo, temperaturno stabilizacijo in uporabo materialov z majhnim toplotnim raztezkom. Na tak način je mogoče dobiti laser z efektivno spektralno širino pod ~ 1MHz.

[1] Ameriška fizika in nobelovca Arthur Leonard Schawlow, 1921–1999, in Charles Hard Townes, 1915–2015.

[2] Natančnejši izračun odstopa od preprosto izpeljanega za faktor 2. V zapisanem izrazu je že upoštevan pravilen predfaktor.

★ Zapisali smo, da lahko s posebno konstrukcijo laserjev dosežemo spektralno širino pod $\sim$ 1MHz. Vendar najmanjša dosežena spektralna širina znaša $\sim$ 10 mHz, kar je še 8 velikostnih redov manj! Gre za prav poseben laser iz monokristalov silicija, hlajenega na -150 °C. Fluktuacije dolžine resonatorja so pogojene s termičnimi fluktuacijami v odbojnih plasteh, ki znašajo okoli 10^{-17}m. Koherenčna dolžina takega laserja je več milijonov kilometrov[3].

Tu velja opozoriti, da je narava spektralne razširitve v laserju drugačna kot v navadnih svetilih. V drugem poglavju smo videli, da intenziteta svetlobe navadnega svetila fluktuira na časovni skali koherenčnega časa, ki je obraten spektralni širini (poglavje 2.2). Šum navadnih svetil je torej amplitudno moduliran šum. Pri enofrekvenčnem laserju je drugače. Amplituda in intenziteta izhodne svetlobe sta konstantni, fluktuira le frekvenca oziroma faza. Šum laserja je torej v obliki frekvenčne modulacije.

6.4 Primerjava laserjev in navadnih svetil

Povzemimo, kar smo se do zdaj naučili o laserjih in jih primerjajmo z navadnimi svetili. Primerjajmo enofrekvenčni laser, v katerem je vzbujeno le eno osnovno stanje resonatorja Gaussove oblike, z navadnim nekoherentnim izvorom svetlobe.

Svetlobni snop iz laserja ima dve takoj očitni odliki: je zelo usmerjen in zelo enobarven. Prva lastnost je posledica tega, da je lastno stanje stabilnega resonatorja Gaussove oblike in je zato tak tudi izhodni snop. Divergenca Gaussovega snopa je posledica uklona in je najmanjša možna. Valovne fronte izhodne svetlobe so gladke in na dani razdalji ves čas enake, zato je laserski snop prostorsko idealno koherenten. Koherenten Gaussov snop lahko z ustrezno optiko zberemo v piko velikosti valovne dolžine, s čimer dosežemo že pri razmeroma majhni izhodni moči zelo veliko gostoto svetobnega toka. To je zelo uporabno v tehnologiji, na primer za natančno in čisto obdelavo materialov, ter v medicini, kjer laserje uporabljajo za zahtevne kirurške posege.

Kako pa je z navadnimi svetili? V njih atomi sevajo neodvisno, zato izsevana svetloba ni prostorsko koherentna. Valovna fronta na danem mestu je nepravilna in se v koherenčnem času znatno spremeni. Vendar tudi iz svetlobe navadnega nekoherentnega svetila lahko pridobimo koherenten snop, če na dano razdaljo od svetila postavimo zaslonko, ki je manjša od koherenčne ploskve na tistem mestu (glej razdelek 2.5). Ocenimo moč tako dobljenega koherentnega snopa za zaslonko.

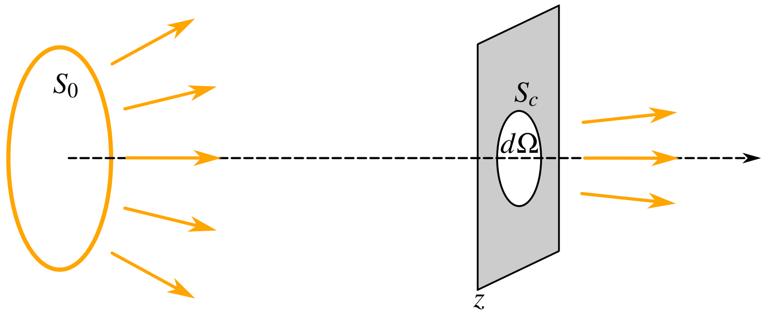
Svetilo naj ima svetlost B[4]. Moč koherentnega snopa za zaslonko, ki prepušča svetlobo skozi prostorski kot $\Delta\Omega$, je (slika 6.5)

$$P = BS_0\Delta\Omega = \frac{BS_0S_c}{z^2} \sim \frac{BS_0}{z^2}\frac{\lambda^2 z^2}{S_0} = B\lambda^2. \tag{6.25}$$

Pri tem je S_0 površina svetila, z oddaljenost zaslonke od svetila, S_c pa velikost koherenčne ploskve, za katero smo uporabili oceno (enačba 2.35). Da iz $S_0 = 1$ mm^2 velikega svetila dosežemo koherenten snop svetlobe z valovno dolžino okoli 550 nm, mora biti premer zaslonke, ki jo postavimo 1 m od izvora, okoli $0,6$ mm. V tem primeru znaša moč, ki prehaja skozi zaslonko, pri svetlosti 100 W/cm^2 le približno $3 \cdot 10^{-7}$ W. Pri podobni divergenci žarka je močno navadno svetilo torej štiri rede velikosti šibkejše od zelo šibkih laserjev z močjo 1 mW.

[3]Phys. Rev. Lett. **118**, 263202 (2017).

[4]Svetilnost je moč, izsevana v dan prostoski kot $I = dP/d\Omega$; svetlost pa je svetilnost na enoto ploskve $B = I/S = dP/Sd\Omega$.



Slika 6.5: K izračunu moči koherentnega snopa svetlobe iz nekoherentnega svetila

Druga odlična lastnost svetlobe iz enofrekvenčnega laserja je njena zelo majhna spektralna širina. Z nekaj truda je ta lahko pod 1 kHz, emisijske črte v plinu pa so zaradi Dopplerjeve razširitve široke vsaj nekaj GHz, pa še to le v razmeroma redkem in hladnem plinu, kjer je svetlost majhna. Primerjajmo spektralno gostoto moči laserja in navadnih svetil. Majhen He-Ne laser seva 1 mW v približno 10^7 Hz in spektralna gostota moči je $dP/d\nu \sim 10^{-10}$ W/Hz. Po drugi strani zelo svetla živosrebrna svetilka seva v močno razširjene spektralne črte s širino okoli 10 nm, kar ustreza $\sim 10^{13}$ Hz. Spektralna gostota v koherentnem snopu, ki smo ga pripravili iz navadne svetilke, je tako le okoli $3 \cdot 10^{-20}$ W/Hz. Šolski He-Ne laser torej prekaša najmočnejše nekoherentno svetilo za 10 velikostnih redov. Z laserji je seveda mogoče doseči znatno večje moči, v sunkih tipično do okoli 10^{12} W, tako da po spektralni gostoti moči v koherentnem snopu laserji prekašajo običajna svetila 20–25 velikostnih redov. Verjetno v zgodovini težko najdemo še kak drug izum, ki je prinesel tolikšno izboljšavo v neki bistveni količini in tako ni nenavadno, da je prihod laserjev v začetku 60-ih let povzročil preporod optike.

6.5 Večfrekvenčni laser

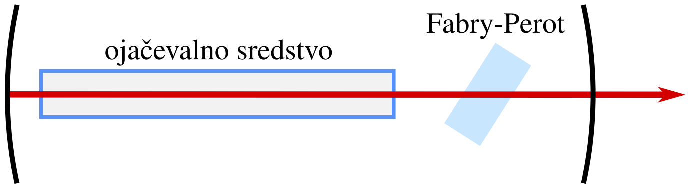
Do zdaj smo obravnavali laserje, v katerih je bilo vzbujeno eno samo valovanje. Vendar je ojačevalna širina večine aktivnih sredstev navadno večja od razlike med frekvencami posameznih stanj resonatorja. V plinih, na primer, je ojačevalna širina zaradi Dopplerjevega pojava vsaj nekaj GHz, lastne frekvence resonatorja pa so pri 30 cm dolgem resonatorju razmaknjene za 500 MHz. Tako se lahko zgodi, da ojačenje v laserju za več nihanj hkrati presega ojačenje na pragu in vzbujenih je več nihanj. Svetloba iz takega večfrekvenčnega laserja ni monokromatska, temveč je sestavljena iz množice ozkih črt znotraj ojačevalnega pasu. Izsevana svetloba tako ni bistveno bolj monokromatska od ustrezne spektralne komponente svetlečega plina. Ostaja pa seveda prostorsko koherentna.

Za holografijo, interferometrijo in nekatere spektroskopske uporabe potrebujemo ozko spektralno črto. Zato moramo poskrbeti, da je vzbujeno le eno samo nihanje resonatorja, najbolje tisto, ki je najbližje vrhu ojačenja aktivnega sredstva. To dosežemo tako, da za vsa ostala nihanja povečamo izgube, na primer s Fabry-Perotovim etalonom, ki ga vstavimo v laserski resonator (slika 6.6). Njegova prepustnost v odvisnosti od krožne frekvence ω, debeline L, lomnega količnika n, odbojnost sten $\mathscr{R}$ in nagiba glede na os resonatorja φ je podana z enačbo (4.9)

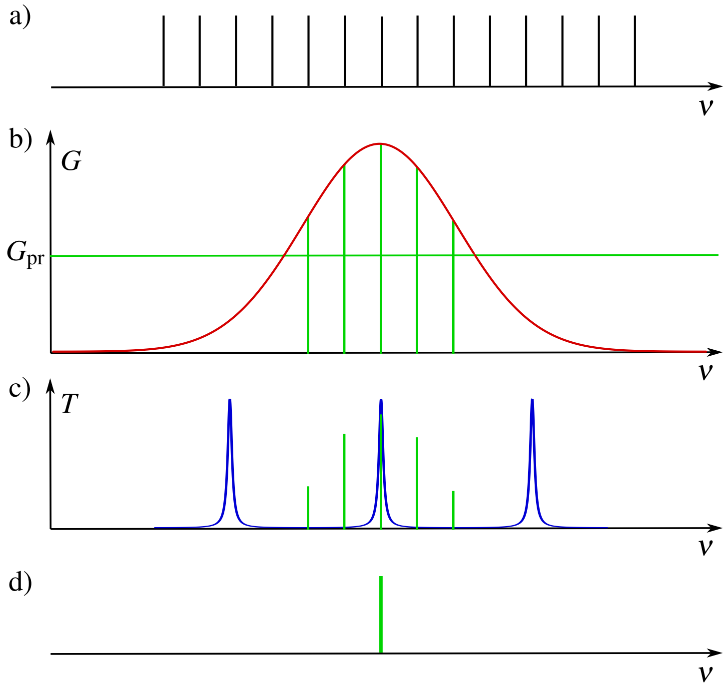
$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2} \sin^2(\frac{n\omega}{c} L \cos\varphi)} \tag{6.26}$$

in jo kaže slika (4.2).

Debelino etalona in njegov nagib izberemo tako, da vrh prepustnosti sovpada z izbranim stanjem resonatorja. Izgube za ostala nihanja, ki bi sicer bila ojačena, se tako povečajo in laser sveti le pri eni sami izbrani frekvenci. Ta proces je shematsko prikazan na sliki (6.7): izmed vseh možnih stanj v resonatorju (a) svetijo le tista, za katere je ojačenje nad pragom (b). Ko v resonator dodamo Fabry-Perotov etalon z razmeroma velikim razmikom med sosednjimi vrhovi prepustnosti (c), je ojačeno eno samo nihanje (d). Ker zadošča že zmerno povečanje izgub, je odbojnost sten etalona navadno dokaj nizka, pod 0,5.



Slika 6.6: Shema laserja s Fabry-Perotovim etalonom



Slika 6.7: Lastne frekvence resonatorja (a) in frekvenčna odvisnost ojačenja z označenim pragom delovanja (b). Z zeleno so označene tiste lastne frekvence, ki se v laserju ojačujejo. Ko dodamo Fabry-Perotov etalon z dano prepustnostjo (c), povečamo izgube za vse načine, ki bi sicer bili ojačeni, razen za enega. Tako dosežemo delovanje laserja pri eni sami frekvenci (d).

★ Nagib etalona omogoča natančno spreminjanje izbrane frekvence, poleg tega pa je nujen, da se neprepuščena svetloba odbije ven iz smeri osi resonatorja. Če bi bila os etalona vzporedna z osjo resonatorja, bi se pojavile dodatne resonance, kar bi močno motilo delovanje laserja.

Opisali smo, kako v laserju dosežemo delovanje pri enem samem longitudinalnem nihanju. Poleg tega je treba omejiti tudi ojačenje višjih prečnih nihanj. To navadno dosežemo z zaslonkami, saj so snopi višjih redov bolj razširjeni od osnovnega.

6.6 Relaksacijske oscilacije

Stacionarno delovanje laserjev smo že dodobra spoznali. Za obravnavo nestacionarnega delovanja pa se moramo vrniti k obravnani zasedbenih enačb (6.9) in (6.10). Na splošno je treba zapisan sistem diferencialnih enačb reševati numerično, vseeno pa lahko nekaj povemo o obnašanju laserja v bližini stacionarnega delovanja.

Spet se omejimo na enofrekvenčni laser, v katerem zasedenost vzbujenega stanja in število fotonov v njem opišemo z enačbama (6.9) in (6.10). Najprej zaradi preglednosti vpeljemo brezdimnezijski čas $t' = tA$ in $\tau' = \tau A$, kar pomeni, da merimo čas v enotah življenjskega časa laserskega nivoja. Ponovno uporabimo parameter $p = VA/(B\hbar\omega g)$ (enačba 6.13), ki pomeni število stanj elektromagnetnega polja v volumnu V in znotraj spektralne širine laserskega nivoja. Enačbi zapišemo

$$\frac{dN_2}{dt'} = -\frac{nN_2}{p} - N_2 + N_{20} \tag{6.27}$$

$$\frac{dn}{dt'} = \frac{nN_2}{p} - \frac{2}{\tau'}n. \tag{6.28}$$

Pri tem smo vpeljali konstanto $N_{20} = rN/A$, ki ima tudi nazornen pomen. Predstavlja zasedenost, ki bi jo dobili pri danem stacionarnem črpanju, če v izbranem stanju ne bi bilo fotonov in s tem ne stimuliranega sevanja. Meri torej moč črpanja. V enačbi za hitrost spreminjanja števila fotonov smo zanemarili prispevek spontanega sevanja, za katerega smo že ugotovili, da se pozna le do praga.

Poiščimo približne rešitve sistema sklopljenih diferencialnih enačb z linearizacijo. Naj laser najprej deluje stacionarno, v nekem trenutku pa se nekoliko izmakne iz stacionarnega stanja. To se lahko zgodi, na primer, če spremenimo moč črpanja. Trenutno zasedenost N_2 in število fotonov n lahko zapišemo v obliki

$$N_2 = N_{2s} + x \qquad \text{in} \qquad n = n_s + y, \tag{6.29}$$

kjer sta N_{2s} in n_s vrednosti v stacionarnem stanju. Zanju velja

$$N_{2s} = \frac{2p}{\tau'} \tag{6.30}$$

in

$$n_s = p\frac{N_{20} - N_{2s}}{N_{2s}} = p(a-1). \tag{6.31}$$

Enačba (6.30) je v skladu s tem, da je stacionarna zasedenost enaka zasedenosti na pragu, ta pa je odvisna od izgub resonatorja. Razmerje $a = N_{20}/N_{2s}$ je mera za moč črpanja in mora biti v delujočem laserju večje od 1. V večini praktičnih primerov doseže vrednosti $a \sim 5$.

Vstavimo nastavka (enačbi 6.29) v enačbi (6.27 in 6.28). Dobimo sistem enačb

$$\frac{dx}{dt'} = -\frac{n_s N_{2s}}{p} - N_{2s} + N_{20} - \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - x \tag{6.32}$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{n_s N_{2s}}{p} - \frac{2}{\tau'}n_s + \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - \frac{2}{\tau'}y. \tag{6.33}$$

Ker sta x in y majhna v primerjavi s stacionarnimi vrednostmi, lahko mešan produkt xy zanemarimo. Vsi členi, ki vsebujejo le stacionarne vrednosti, dajo ravno 0, saj smo jih tako določili.

Če upoštevamo še izraza za stacionarni vrednosti (enačbi 6.30 in 6.31), zapišemo linearizirani diferencialni enačbi za odmika od stacionarnih vrednosti

$$\frac{dx}{dt'} = -ax - \frac{2}{\tau'}y \quad \text{in} \quad \frac{dy}{dt'} = (a-1)x. \tag{6.34}$$

Zapisan linearni sistemi diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti rešimo tako, da poiščemo rešitev v obliki eksponentne funkcije

$$x = x_0 e^{\lambda t'} \qquad \text{in} \qquad y = y_0 e^{\lambda t'}. \tag{6.35}$$

Dobljeni homogeni sistem linearnih enačb

$$(a+\lambda)x_0 + \frac{2}{\tau'}y_0 = 0 \tag{6.36}$$

$$-(a-1)x_0 + \lambda y_0 = 0 \tag{6.37}$$

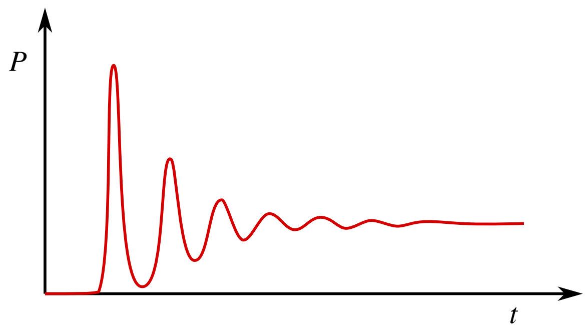
ima netrivialno rešitev le, če je njegova determinanta enaka nič

$$\lambda^2 + a\lambda + \frac{2}{\tau'}(a-1) = 0. \tag{6.38}$$

Rešitvi sta

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2}{\tau'}(a-1)}. \tag{6.39}$$

Obnašanje rešitve je odvisno od velikosti brezdimenzijskega relaksacijskega časa nihanja resonatorja $\tau' = A\tau$. Kratek račun pokaže, da je za $\tau' > 2$ izraz pod korenom za vse vrednosti a pozitiven in laser se vrača v stacionarno stanje eksponentno. Za $\tau' < 2$ pa je koren v določenem območju parametra a imaginaren in laser se vrača v stacionarno stanje z dušenim nihanjem, ki mu pravimo relaksacijske oscilacije. Primer takega nihanja pri vključitvi laserja kaže slika (6.8).



Slika 6.8: Relaksacijske oscilacije intenzitete laserja po vklopu

Poglejmo še primer. Vzemimo vrednost $\tau \sim 10^{-7}$ s in razpadno konstanto laserskega nivoja $A \sim 10^5$/s. Tedaj je $\tau' \sim 10^{-2}$ in relaksacijske oscilacije se pojavijo pri vseh dosegljivih vrednostih črpanja nad pragom, to je za $a > 1$. Ker a v praksi ni nikoli dosti večji od 3–5, je krožna frekvenca oscilacij v brezdimenzijskih enotah približno enaka $\omega_r' \sim 1/\sqrt{\tau'}$. Ko preidemo nazaj na prave enote časa, dobimo $\omega_r \sim \sqrt{A/\tau}$. Krožna frekvenca relaksacijskih oscilacij je v tem primeru velikostnega reda geometrijske sredine med razpadnima konstantama nihanja resonatorja in atomskega stanja. Tipične vrednosti frekvence relaksacijskih oscilacij so $\sim 10^5$ Hz, karakteristični čas dušenja pa $\sim 10^{-5}$ s.

★ Relaksacijske oscilacije so praktično pomembne, saj določajo gornjo mejo hitrosti, s katero lahko izhodna moč laserja sledi modulaciji črpanja. Poleg tega se pri tej frekvenci pojavi resonanca, pri kateri se šum črpanja ojačeno prenaša v šum izhodne moči.

6.7 Sunkovni laserji

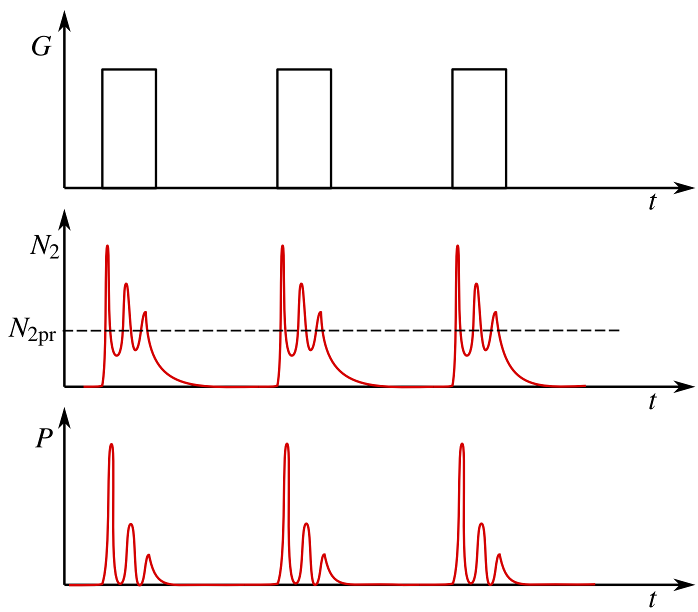
Kadar potrebujemo veliko izhodno moč laserja pri zmerni povprečni porabi energije, zvezno delujoči laserji, ki smo jih obravnavali do zdaj, niso primerni. Poslužiti se moramo sunkovnih laserjev, ki v kratkem časovnem intervalu delujejo z zelo veliko izhodno močjo.

Poglejmo primer. Močan zvezno delujoč laser ima izhodno moč 10 kW. Sunkovni laser pa naj oddaja svetlobo v 10 ns dolgih sunkih s povprečno energijo 1 J in s ponovitvijo 1000/s. Povprečna moč, s katero deluje tak laser, je 1 kW, moč, ki jo dosega v sunkih, pa je 100 MW. Tako pri nižji povprečni moči laserja dosežemo moči, ki so za 5–10 velikostnih redov večje od moči zvezno delujočih laserjev.

V grobem ločimo dva načina sunkovnega delovanja laserjev. V prvem primeru periodično spreminjamo črpalno moč, v drugem pa periodično spreminjamo izgube v resonatorju. V slednjo skupino uvrščamo laserje na preklop dobrote in laserje, ki uklepajo faze valovanj.

Obravnavajmo najprej najpreprostejši način, pri katerem moduliramo črpanje. To dosežemo na primer z bliskavko ali drugim sunkovnim laserjem. V intervalu črpanja je ojačenje večje od izgub in svetloba izhaja iz laserja, ko pa črpanja ni, so izgube prevelike in laser ne sveti. Tipična frekvenca modulacije črpanja je $\nu \sim 20$ Hz. Najbolj pogosto se modulacija črpanja uporablja v polprevodniških laserjih, saj je zelo preprosto modulirati črpalni električni tok.

Vendar se pri modulaciji črpanja lahko pojavi težava. Ko ob močnem črpanju obrnjena zasedenost znatno preseže zasedenost praga (v nestacionarnem stanju je to mogoče), laser posveti in v kratkem času zasedenost pade nazaj pod prag. Če tedaj črpanje še traja, zasedenost naraste in laser ponovno posveti. To se lahko večkrat ponovi. Razmiki med zaporednimi sunki so reda velikosti periode relaksacijskih oscilacij, so pa lahko precej nepravilni (slika 6.9). Pri takem režimu delovanja v posameznem sunku ne dobimo razpoložljive energije črpanja v enem samem lepo oblikovanem sunku, kar močno omejuje uporabnost tega pristopa.

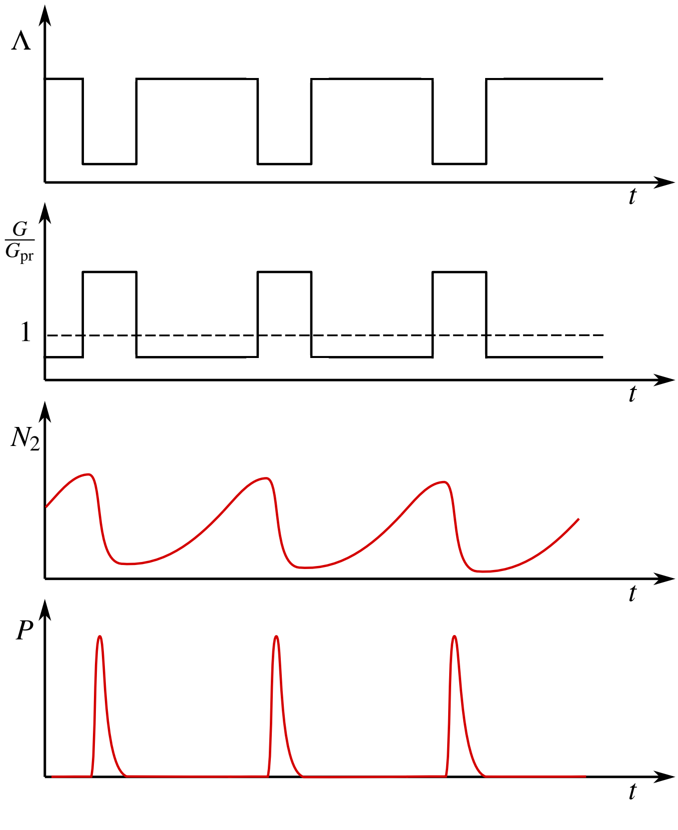


Slika 6.9: Delovanje sunkovnega laserja z periodično moduliranim črpanjem, pri katerem se pojavijo neželene oscilacije

6.8 Delovanje v sunkih s preklopom dobrote

Namesto modulacije črpanja lahko v sunkovnih laserjih periodično spreminjamo izgube. Čim večje so namreč izgube, višji je prag za delovanje laserja in večja je lahko stopnja inverzije. Tako v sistemu atomov shranimo več energije, ki se lahko izseva iz sistema preko stimuliranega sevanja. Ko je enkrat ustvarjena velika obrnjena zasedenost, izgube zelo hitro zmanjšamo. Optično ojačenje je veliko in energija svetlobe v kratkem času močno naraste. S tem se tudi obrnjena zasedenost hitro zniža na vrednost močno pod pragom. Predstavljamo si lahko, da dobimo prvi nihaj relaksacijskih oscilacij, le da je začetno stanje daleč od stacionarnega in zato linearni približek ne drži več. Iz laserja dobimo kratek in zelo močan sunek svetlobe, pri čemer je energija sunka skoraj tolikšna kot je bila energija obrnjene zasedenosti. Tipične dolžine sunkov, ki jih dosežemo na ta način, so $t \sim 10$ ns, sunki pa se ponavljajo s frekvenco $\nu \sim 1$–100 kHz. Dogajanje v laserju kaže slika (6.10).

★ V elektrotehniki se izgube resonatorjev podajajo z dobroto Q, to je razmerjem frekvence lastnega stanja in njegove širine. Ker s povečanjem izgub spremenimo širino črte in z njo dobroto, opisano tehniko imenujemo preklop dobrote.



Slika 6.10: Izgube (Λ), relativno ojačenje (G/G_p), zasedenost višjega nivoja (N_2) in izsevana moč laserja (P) v odvisnosti od časa, kadar laser deluje v režimu preklopa dobrote.

Izgube resonatorja je mogoče spreminjati na več načinov. Najpreprosteje je vrteti eno od ogledal. Tedaj je resonator uglašen le v kratkem trenutku, ko je ogledalo pravokotno na os. Metoda je dokaj uspešna, a zastarela. Boljši in danes najbolj razširjen način je z vgradnjo elektro-optičnega ali akusto-optičnega modulatorja, o katerih bomo govorili v nadaljevanju (poglavje **??**). Na kratko povejmo, da lahko z njimi električno krmilimo izgube z visoko frekvenco.

Kot smo že povedali, nelinearnih laserskih enačb za zasedenost in število fotonov (enačbi 6.9) in (6.10) ne moremo analitično rešiti. Preden jih podrobneje pogledamo, napravimo nekaj ocen. Dolžina sunka je odvisna od hitrosti, s katero se izprazni zgornji laserski nivo. To se ne more zgoditi hitreje kot v nekaj preletih sunka skozi resonator. Trajanje sunka je torej vsaj nekajkrat $2L/c$, to je za 15 cm dolg resonator vsaj nekaj ns.

Ocenimo še hitrost naraščanja števila fotonov na začetku in njegovega upadanja na koncu sunka. Zapišimo najprej še enkrat enačbi za zasedenost in število fotonov, pri čemer upoštevajmo, da nas zanima le dogajanje v času sunka, ki je zeko kratek v primerjavi z atomskim razpadnim časom, zato ustrezni člen v enačbi (6.9) zanemarimo. Navadno je tudi črpanje prešibko, da bi med sunkom znatno vplivalo na zasedenost, zato lahko člen rN izpustimo. S črpanjem seveda ustvarimo začetno zasedenost N_{20}. Tako ostane

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{\sigma c}{V} n N_2 \tag{6.40}$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma c}{V} n N_2 - \frac{2}{\tau} n. \tag{6.41}$$

Na začetku sunka je n majhen, N_2 pa velik in njegova vrednost se ne razlikuje dosti od začetne vrednosti N_{20}. Število fotonov na začetku sunka tako narašča približno eksponentno

$$n(t) = n_0 e^{t N_{20} \sigma c / V} = n_0 e^{t/\tau_r}. \tag{6.42}$$

Začetnega števila fotonov ne poznamo, vemo pa, da je velikostnega reda 1, saj predstavlja spontano emisijo. Da n naraste na znatno vrednost, recimo več od 10^{10} fotonov, je potreben čas blizu 30 τ_r.

Proti koncu sunka N_2 pojema zaradi sevanja svetlobe in $N_2 \to 0$. Ostane samo še en člen, ki da preprosto rešitev

$$n(t) = \tilde{n}_0 e^{-2t/\tau}. \tag{6.43}$$

Eksponentno pojemanje števila fotonov na koncu sunka je torej določeno z izgubami resonatorja (enačba 4.35).

Dogajanja v vmesnih časih ne moremo enostavno popisati, lahko pa najdemo medsebojno zvezo med n in N_2, če iz enačb eliminiramo čas. Izrazimo dt iz enačbe (6.40) in ga vstavimo v enačbo (6.41). Sledi

$$dn = -dN_2 + \frac{\tilde{N}_2}{N_2} dN_2 \ , \tag{6.44}$$

kjer smo zapisati $\tilde{N}_2 = 2V/(\sigma c \tau)$. Enačbo brez težav integriramo

$$\boxed{n = N_{20} - N_2 + \tilde{N}_2 \ln \frac{N_2}{N_{20}}.} \tag{6.45}$$

Pri tem smo privzeli, da je na začetku sunka $n = 0$ in $N_2 = N_{20}$.

Iz dobljene zveze najprej izračunamo, kolikšna je končna zasedenost N_{2k}. Na koncu mora biti zopet $n = 0$, kar da transcendentno enačbo za N_{2k}

$$\ln \frac{N_{2k}}{N_{20}} = \frac{N_{2k}}{N_{20}} - \frac{N_{20}}{\tilde{N}_2}. \tag{6.46}$$

Enačba ima obliko

$$\ln \frac{x}{a} = x - a, \tag{6.47}$$

kjer je $x = N_{2k}/N_{20}$ in $a = N_{20}/\tilde{N}_2$, in jo lahko preprosto numerično rešimo. Izkaže se, da kadar je začetna zasedenost N_{20} le malo nad pragom, tudi končna zasedenost N_{2k} ne pade dosti pod prag, zato je izraba energije slabša. Pri večjih začetnih vrednostih N_{20} pa pade končna zasedenost praktično na nič. Za $a = 2$, na primer, je $x = 0,41$, medtem ko je že pri $a = 4$ vrednost x le še 0,08.

Ko poznamo začetno in končo vrednost zasedenosti, lahko izračunamo celotno energijo sunka $W = \hbar\omega(N_{20} - N_{2k})$. Če je začetna vrednost dovolj nad pragom, lahko končno zasedenost zanemarimo in je

$$\boxed{W \approx \hbar\omega N_{20}.} \tag{6.48}$$

Trenutna moč, ki izhaja iz laserja, je dana s $P = (\hbar\omega 2/\tau)n$. Največja je v vrhu sunka, ki je določen z $dn/dN_2 = 0$. Ta enačba ima rešitev pri $N_2 = \tilde{N}_2$, vrh sunka je torej natanko tedaj, ko pade zasedenost N_2 na prag $\tilde{N}_2$.

Izsevana moč je tedaj

$$P_{\max} = \frac{n_{\max}\hbar\omega}{2L/c}(1-\mathscr{R}) = \frac{2n_{\max}\hbar\omega}{\tau}. \tag{6.49}$$

Ko vstavimo še vrednost za $n_{\max}$, dobimo

$$P_{\max} = \frac{2\hbar\omega}{\tau}\left(N_{20} - \tilde{N}_2 - \tilde{N}_2 \ln(N_{20}/\tilde{N}_2)\right). \tag{6.50}$$

Ker je navadno $N_{20} \gg \tilde{N}_2$, je $n_{\max} \approx N_{20}$ in

$$\boxed{P_{\max} \approx \frac{2\hbar\omega N_{20}}{\tau}.} \tag{6.51}$$

Poglejmo primer. Naj bo presek za stimulirano sevanje $\sigma = B\hbar\omega g/c$ okoli 10^{-19}cm^2 in začetna gostota zasedenosti $N_{20}/V = 10^{19}\text{cm}^3$, kar so tipični podatki za neodimov laser. Tedaj je $\tau_r =$ 30 ps in čas naraščanja sunka okoli ~ 1 ns. Število fotonov se nato zmanjšuje s krakterističnim razpadnim časom resonatorja $\tau/2 \sim 2L/(c(1-\mathscr{R}))$. Za dosego kratkih sunkov svetlobe je zato v laserjih s preklopom dobrote odbojnost izhodnega zrcala navadno dokaj nizka, recimo $0,5$. Pri $L = 15$ cm je tako $\tau = 4$ ns. Celotno trajanje sunka je v izbranem primeru tako $\sim$ 10 ns, pri čemer traja okoli 100 ns od preklopa dobrote, da sunek zraste iz šuma spontanega sevanja. Energija sunka je blizu $N_{20}\hbar\omega$, to je pri aktivnem volumnu $0,5$ cm^2 nekaj desetink joula. Od tod lahko ocenimo, da je moč v vrhu sunka velikostnega več 10 MW.

6.9 Uklepanje faz

Krajše sunke kot s preklopom dobrote je mogoče dobiti z uklepanjem faz. Pri tem gre za povsem drugačen način, ki je prav presentljiva manifestacija koherentnosti laserske svetlobe. Spoznali smo že, da v laserju navadno niha več nihanj hkrati, pri čemer so njihove frekvence enakomerno razmaknjene za $\Delta\omega = \pi c/L$ (enačba 4.5). Celotno električno polje v neki točki v laserju zapišemo kot vsoto

$$E(t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} A_m e^{i(\omega_0 + m\Delta\omega)t + i\varphi_m(t)}, \tag{6.52}$$

pri čemer je N število vseh vzbujenih nihanj. Upoštevali smo, da ima vsako nihanje lahko poljubno fazo $\varphi_m(t)$, ki je na splošno predvsem zaradi zunanjih motenj slučajna funkcija časa. Zaradi tega se tudi celotno polje slučajno spreminja, kar močno zmanjšuje uporabnost takega laserja.

Denimo, da nekako dosežemo enake faze vseh nihanj. Poleg tega zaradi enostavnosti računa privzemimo, da so tudi vse amplitude A_m enake. Tedaj postane vsota (6.52) geometrijska in jo brez težav seštejemo

$$E(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} \frac{\sin(N\Delta\omega t/2)}{\sin(\Delta\omega t/2)}. \tag{6.53}$$

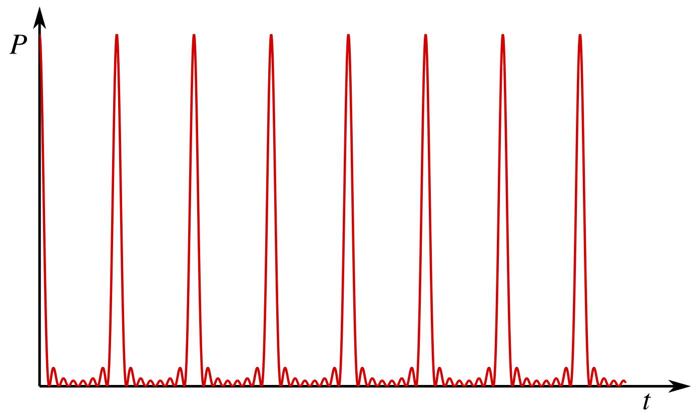
Moč izhodne svetlobe ima časovno odvisnost

$$P(t) = P_0 \frac{\sin^2(N\Delta\omega t/2)}{\sin^2(\Delta\omega t/2)}, \tag{6.54}$$

ki jo kaže slika (6.11). Predstavlja periodično zaporedje sunkov, ki si sledijo s periodo $T = 2\pi/\Delta\omega = 2L/c$, kar je enako času obhoda svetlobe v resonatorju. Konstanta P_0 je moč posameznega nihanja. Moč v vrhu sunka je tako N^2P_0, povprečna moč pa NP_0. Računsko je pojav enak kot uklon na mrežici in lahko rečemo, da imamo opravka z interferenco v času. Dolžina sunkov je

$$\tau_{ML} = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_G}, \tag{6.55}$$

ker je N ravno število nihanj znotraj širine ojačevanja $\Delta\omega_G$. Dolžina sunka je torej obratno sorazmerna s širino ojačevanja aktivnega sredstva.



Slika 6.11: Časovna odvisnost moči večfrekvenčnega laserja z enakimi (uklenjenimi) fazami

Premislimo še, kakšna je prostorska odvisnost električnega polja v resonatorju. Polje na danem mestu opisuje enačba 6.53. Še krajevno odvisnost dobimo, če v 6.53 zamenjamo t s $(t - z/c)$. To pa predstavlja svetlobni paket, ki potuje sem in tja med ogledali resonatorja. Na izhodnem ogledalu se ga vsakič nekaj odbije, nekaj pa gre ven iz resonatorja (slika **??**). Razmik med sunki, ki izhajajo iz resonatorja, je $2L$, prostorska dolžina posameznega sunka pa $\tau_{ML}c = 2L/N$.

V našem računu predpostavka, da so vse amplitude A_m enake, ni prav nič bistvena za osnovne ugotovitve. Če vzamemo realističen primer, da so amplitude oblike $A_m = A_0 \exp[(m\Delta\omega/\Delta\omega_G)^2]$, vsote 6.52 ne znamo točno sešteti, lahko pa jo približno pretvorimo v integral, ki je Fouriereva transformiranka Gaussove funkcije (Pri prehodu z diskretne vsote na integral seveda izgubimo

Slika 6.12: Prostorska odvisnost fazno uklenjenih sunkov.

periodičnost zaporedja sunkov.). Ta je zopet Gaussova funkcija, katere širina je obratna vrednost širine prvotne funkcije, prav podobno, kot smo dobili zgoraj. Odvisnost amplitud nihanj od m vpliva torej le na točno obliko sunkov, osnovne ugotovitve pa se ne spremene. (Naloga).

Pač pa je predpostavka, da so vse faze φ_m enake, bistvena. V naši dosedanji sliki mnogofrekvenčnih laserjev so resonatorska stanja med seboj neodvisna, zato so faze poljubne in se zaradi motenj lahko še spreminjajo. Da dobijo za vsa nihanja isto vrednost, moramo poskrbeti posebej. Tako *uklepanje faz* je mogoče doseči na več načinov. Ena možnost je, da moduliramo izgube resonatorja s frekvenco, ki je ravno enaka razliki frekvenc med resonatorskimi stanji. To ni težko razložiti. Naj bo modulator tak, da je večino časa zaprt, le v razmikih $T = 2L/c$ naj bo kratek čas odprt. Postavimo ga tik ob eno ogledalo. Tedaj se v resonatorju očitno lahko uspešno ojačuje le kratek sunek, kakršen je na sliki **??**. Izgube za vsa nihanja bodo majhne le tedaj, kadar bodo vse faze enake. V praksi ni potrebno, da je modulacija tako izrazita. Običajno zadošča sinusna modulacija izgub, kjer je relativna prepustnost v minimumu za nekaj destink manjša od maksimalne.

Kako pri modulaciji pride do uklepanja faz, lahko uvidimo še drugače. Modulacija amplitude posameznega nihanja povzroči, da se v spektru nihanja pojavita še stranska pasova pri frekvencah $\omega_m \pm \Delta\omega$. Ta se ravno pokrivata z obema sosednjima nihanjema in se konstruktivno prištejeta, če imata enako fazo. S tem pa so tudi izgube manjše in ima delovanje laserja z uklenjenimi fazami najnižji prag. Zadnji razmislek tudi pove, da ni dobra le amplitudna modulacija, temveč tudi fazna (ali frekvenčna), saj se tudi tedaj pojavijo stranski pasovi.

Za modulacijo se najpogosteje uporabljajo akustooptični modulatorji, pri katerih izkoriščamo uklon svetlobe na stoječih zvočnih valovih v primernem kristalu (Glej 7. poglavje). Frekvenca zvočnega vala mora biti enaka polovici zahtevane modulacijske frekvence, za 1,5 m dolg laser torej 50 MHz.

Poleg opisanega aktivnega postopka je mogoče faze ukleniti tudi tako, da v resonator postavimo plast barvila, ki močno absorbira svetlobo laserja pri majnhi gostoti toka, pri veliki gostoti toka pa pride do nasičenja absorpcije (glej razdelek 4.5), zato postane barvilo prozorno. Na začetku imamo v laserju predvsem spontano sevanje, ki se pri enem prehodu skozi aktivno snov deloma ojači. Barvilo najmanj absorbira največjo fluktuacijo. Pri dovolj velikem ojačenju bo ta rastla in spet dobimo fazno uklenjeni sunek. Ker mora po prehodu sunka absorpcija v barvilu zopet hitro narasti, mora biti relaksacijski čas barvila zelo kratek, v območju pikosekund.

Z uklepanjem faz je danes mogoče dobiti sunke z dolžino pod 100 fs (10^{-13} s). Tak sunek traja le še nekaj deset optičnih period. S posebnimi prijemi jih lahko še skrajšajo na okoli 10 fs. Če je potrebna večja energija sunkov, jih ojačijo, kar ne pokvari mnogo osnovnega sunka. Zelo kratke svetlobne sunke danes na široko uporabljajo za študij hitre molekularne dinamike in kratkoživih vzbujenih elektronskih stanj v polvodnikih in mnogih drugih snoveh. Z njimi se je časovna ločljivost povečala za nekaj redov velikosti [**?**].

6.10 *Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo

Še ožjo lasersko črto lahko dobimo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Ideja je taka: frekvenco svetlobe, ki izhaja iz laserja, primerjamo z nekim standardom in iz razlike ugotovimo spremembo dolžine resonatorja. Eno od obeh zrcal je nameščeno na piezoelektričnem nosilcu, ki mu z električno napetostjo lahko spreminjamo dolžino in tako popravimo dolžino resonatorja.

Pogalvitna težava je seveda, kako najti dovolj stabilen primerjalni standard za frekvenco. Ena možnost je, da izhodno svetlobo spustimo skozi konfokalni interferometer, ki je skoraj v resonanci z laserjem in ima dovolj ozek vrh prepustnosti. Majhen premik frekvence laserja bo povzročil, da se bo spremenil skozi interferometer prepuščeni svetlobni tok. Na prvi pogled je videti, da s tem nismo nič pridobili, saj bo resonančna frekvenca interferometra stabilna tudi le toliko, kot je stabilna njegova dolžina. Vendar je z izolacijo in temperaturno stabilizacijo možno držati dolžino praznega resonatorja - interferometra - mnogo natančneje kot dolžino laserja, v katerem imamo aktivno sredstvo, ki mu moramo dovajati energijo.

Druga možnost je stabilizirati laser na primerno molekularno absorpcijsko črto. Te so lahko zelo ozke, zato je tudi spekter laserja lahko izredno ozek, pod 1 kHz. Pri tem moti Dopplerjeva razširitev absorpcijske črte, ki pa se ji je mogoče izogniti. Kako to napravimo in kako je bila s tem omogočena nova definicija metra, si bomo pogledali v razdelku ????.

V drugem razdelku smo videli, da je efektivna spektralna širina enofrekvenčnega laserja odvisna od fluktuacij dolžine optične poti svetlobe pri preletu resonatorja. Na to lahko poleg spreminjanja geometrijske dolžine vpliva še spreminjanje lomnega količnika. Če se posebej ne potrudimo, laser sveti nekje blizu vrha ojačevalnega pasu, pri čemer frekvenca pleše za znaten del razmika med resonatorskimi stanji. V šolskem He-Ne laserju je to na primer nekaj deset MHz.

Bistveno manjšo širino lahko dosežemo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Pri tem je pogalvitni problem, kako dobiti primerjalni standard. S stabilizacijo na pomožni interferometer, ki smo jo na kratko opisali v drugem razdelku, lahko dobimo zelo ozko črto, ki pa ima le toliko natančno določeno frekvenco, kot poznamo dolžino interferometra. Včasih, na primer za natančna interferometrična merjenja dolžin, s tem nismo zadovoljni in potrebujemo drug, absoluten standard.

Tak standard za frekvenco so ozki prehodi v primernem razredčenem plinu. Vendar naletimo na težavo. Zaradi Dopplerjevega pojava so absorpcijske črte močno razširjene. Pomagamo si s pojavom nasičenja absorpcije, o katerem smo govorili v razdelku 4.9. Tam smo videli, da se pri dvakratnem prehodu monokromatskega snopa svetlobe skozi plin v nasprotnih smereh pojavi v sredini Dopplerjevo razširjene črte vdolbina, ki ima obliko homogeno razširjene črte. Homogena širina je lahko mnogo manjša od Dopplerjeve in je zato vdolbina uporabna kot frekvenčni standard.

V laserski resonator postavimo poleg aktivnega sredstva še celico s primernim plinom, ki ima absorpcijsko črto v bližini vrha ojačenja aktivnega sredstva. Za He-Ne laser pri 633 nm so to na primer pare ioda. Zaradi absorpcije se povečajo izgube v laserju in izhodna moč se zmanjša. Spreminjajmo sedaj dolžino resonatorja in s tem frekvenco laserja. Ko se ta približa na homogeno širino centru absorpcijske črte pri ω_0, se absorpcija zmanjša in s tem se moč laserja poveča.

Slika 6.13: Odvisnost moči laserja z nasičenim absorberjem od frekvence

Slika 6.14: Shema stabilizacije laserja na nasičeno absoprcijo

Odvisnost moči laserja z absorberjem od dolžine kaže slika ??. Povečanje moči v vrhu običajno ni prav veliko, manj od procenta.

Shema stabilizacije na nasičeno absorpcijo je prikazana na sliki ??. Eno od zrcal resonatorja je na piezoelektričnem nosilcu. Nanj vodimo izmenično napetost s frekvenco Ω in s tem moduliramo frekvenco laserja, da se vozi preko absorpcijske vdolbine pri ω_0. Zaradi tega se spreminja tudi izhodna moč laserja, ki jo opazujemo s fotodiodo. Kadar je srednja frekvenca laserja enaka ω_0, se moč zmanjša simetrično pri odmikih navzgor in navzdol od ω_0 in se zato spreminja z dvojno frekvenco modulacije 2Ω. Kadar pa je srednja frekvenca laserja nekoliko odmaknjena od ω_0, se izhodna moč pri odmiku v zrcala v eno stran spremeni drugače kot v drugo, kar pomeni, da je v signalu s fotodiode tudi komponenta s frekvenco Ω. Da držimo srednjo frekvenco laserja enako ω_0, moramo torej meriti komponento izhodne moči pri modulacijski frekvenci in s povratno zanko skrbeti, da je ta enaka nič.

Komponento signala s frekvenco Ω zaznamo s faznim detektorjem, ki deluje tako, da signal množi z refenčno modulacijsko napetostjo. V produktu dobimo istosmerno komponento, ki je sorazmerna signalu pri frekvenci Ω in ki jo izločimo z nizkopasovnim filtrom. Izhod iz faznega detektorja je tako sorazmeren odmiku srednje frekvence laserja od ω_0. Preko primernega ojačevalnika ga vodimo na piezoelektrični nosilec zrcala in tako popravljamo dolžino laserja.

Napravimo kvantitativno oceno opisane stabilizacijske sheme. Odvisnost izhodne moči od frekvence laserja ω lahko približno zapišemo v obliki

$$P(\omega) = P_0 + \frac{P_1\gamma^2}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \ . \tag{6.56}$$

P_0 je moč laserja brez saturacijskega vrha pri ω_0, P_1 pa povečanje moči pri ω_0. Predpostavili smo, da se ojačenje laserja in nehomogeno razširjeni del absorpcije ne spreminjata mnogo preko homogene širine absorberja in je zato P_0 približno konstantna. Frekvenco laserja moduliramo:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega + a\sin\Omega t \ . \tag{6.57}$$

Z $\Delta\omega$ smo označili odstopanje srednje frekvence laserja od centra absorpcijske črte ω_0. Če sta a in $\Delta\omega$ majhna v primeri s homogeno širino γ, lahko imenovalec v enačbi 6.56 razvijemo:

$$P(\omega) = P_0 + P_1[1 - \frac{1}{\gamma^2}\Delta\omega^2 + \frac{2}{\gamma^2}a\Delta\omega\sin\Omega t - \frac{a^2}{\gamma^2}\sin^2\Omega t] \ . \tag{6.58}$$

Amplituda signala pri Ω je $2P_1 a\Delta\omega/\gamma^2$. Najmanjša razlika, ki jo lahko zaznamo, je določena s šumom meritve. Kot bomo videli v poglavju o detekciji svetlobe, je osnovni izvor šuma fotodiode Poissonov šum števila parov elektron-vrzel, ki nastanejo zaradi fotoefekta v p-n spoju. Najmanjša sprememba svetlobne moči, ki jo lahko izmerimo, je (glej 10??. poglavje)

$$P_N \simeq \sqrt{\hbar\omega P\frac{1}{\tau}} \ , \tag{6.59}$$

kjer je P celotna svetlobna moč, ki vpada na diodo, τ pa čas meritve, ki je v našem primeru določen s časovno konstanto nizkopasovnega filtra na izhodu faznega detektorja.

Vzemimo na primer He-Ne laser, stabiliziran na iodove pare. Povprečna moč laserja P_0 naj je 10 mW in $P_1 = 0.1$ mW. Širina absorpcijske črte $\gamma = 10^6$ s^{-1}. Izberimo amplitudo modulacije $a = 10^5$ s^{-1} in $\tau = 10^{-4}$ s. Časovna konstanta τ ne sme biti prevelika, določa namreč, kako hitro popravljamo dolžino laserja. Gornje vrednosti dajo za najmanjšo zaznavno moč pri Ω $P_N = 0.5\times10^{-8}$ W. Najmanjše merljivo odstopanje frekvence laserja je tedaj

$$\Delta\omega_N = \frac{P_N\gamma^2}{2P_1 a} = 2.5\times10^3\ s^{-1} \ . \tag{6.60}$$

Takšno in še boljšo stabilnost frekvence tudi zares dosežejo. Pozoren bralec bo opazil, da je $\Delta\omega_N < 0.01\gamma$, to je, položaj absorpcijskega vrha je na opisan način mogoče določiti z natančnostjo nekaj tisočink celotne širine.

Na absorpcijsko črto stabiliziranega laserja navadno ne uporabljamo direktno, temveč z njim kontroliramo drug laser. Del izhodne svetlobe iz obeh laserjev zmešamo na detekcijski fotodiodi. V signalu dobimo utripanje, ki je enako razliki frekvenc obeh laserjev. S spreminjanjem dolžine drugega laserja skrbimo, da je frekvenca utripanja konstantna. Na ta način lahko v ozkem frekvenčnem intervalu še spreminjamo frekvenco drugega laserja.

Z merjenjem utripanja med dvema stabiliziranima laserjema ugotavljajo tudi njihovo stabilnost.

6.11 *Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra

Najnatančneje merljiva količina je čas odnosno frekvenca. Frekvence laserja, ki sveti v vidnem področju seveda ni mogoče direktno prešteti. Pač pa je v začetku sedemdesetih let uspelo s

Slika 6.15: Primerjalna veriga za meritev frekvence He-Ne laserja

heterodinsko tehniko, ki se v mikrovalovni tehniki pogosto uporablja, napraviti primerjavo stabiliziranega He-Ne laserja z osnovno cezijevo uro in tako določiti frekvenco absorpcijske črte metana pri 3.39 μm z isto natan"nostjo, kot jo ima cezijeva ura.

S heterodinsko tehniko primerjamo frekvenci dveh ali več valovanj tako, da jih zmešamo na primernem nelinearnem elementu, običajno neki diodi. Zaradi nelinearnosti dobimo v odzivu diode različne mnogokratnike vpadnih frekvenc, njihove vsote in razlike. Od teh je kaktera lahko dovolj nizka, da jo lahko direktno preštejemo.

Za primerjanje frekvenc nad mikrovalvnim področjem je potreben ustrezen mešalni element. Polvodniške diode nehajo biti uporabne pri približno 20 GHz. Za višje frekvence uporabijo diode kovina-izolator-kovina, ki jih sestavljajo oksidirana površina niklja, ki se je dotika ostra volframska konica. Taka dioda deluje kot uporaben mešalni element do frekvenc okoli 200 THz, to je skoraj do vidnega področja.

Za primerjavo He-Ne laserja, stabiliziranega na metan pri 3.39 μm, z osnovno cezijevo uro je bilo potrebno zgraditi celo verigo vmesnih primerjav, ki jo kaže slika **??**. Frekvenco CO_2 laserja dobimo na primer iz utripanja med frekvencama CO_2 laserja pri 10.2 μm in pri 9.3 μm, trikratnikom frekvence HCN laserja in še klistrona s frekvenco 20 GHz. Na ta način so izmerili, da je frekvenca CH_4 črte na katero je stabiliziran He-Ne laser, 88.376181627 THz.

Valovno dolžino laserja dobimo z interferometrično primerjavo z dolžinskim standardom, ki je bil do leta 1984 določen z neko kriptonovo črto. Iz znane frekvence in valovna dolžine določimo hitrost svetlobe. Zaradi relativno velike širine črte kriptonove svetilke je bil po starem meter definiran le z relativno natančnostjo 10^{-8}, kar je pomenilo, da tudi hitrost svetlobe ne more biti določena bolj natančno. Meritev frekvence laserja pa je dosti natančnejša. Zato je bilo smiselno opustiti meter kot osnovno enoto in raje definirati hitrost svetlobe kot pretvornik med sekundo in metrom. Z njeno vrednost so vzeli, kar so dobili z naboljšo primerjavo stabiliziranega laserja in kriptonove črte: $c = 299792458\ m/s$. Na metan ali jod stabilizirani laser je postal sekundarni standard za dolžino. Laser je pravzaprav pri tem le pomožna naprava; standard je ustrezni molekularni prehod.

6.12 *Semiklasični model laserja

Doslej smo laserje obravnavali le z modelom zasedbenih enačb. Ta je zelo grob, saj smo pri tem zanemarili nekaj pomembnih pojavov. Svetlobo v resonatorju smo opisali le s celotno energijo oziroma številom fotonov in se za njeno valovno naravo nismo menili. Kar privzeli smo, da sta frekvenca delujočega laserja in oblika polja v njem enaki kot za lastno stanje praznega resonatorja. Aktivno snov smo opisali le z zasedenostjo zgornjega in spodnjega laserskega stanja in s tem izpustili možnost, da se zaradi interakcij z elektromagnetnim poljem atomi nahajajo v nestacionarnem, mešanem stanju.

Gornje pomanjkljivosti delno odpravimo s tem, da elektromagnetno polje v resonatorju obravnavamo klasično z valovno enačbo, atome aktivne snovi pa kvantno in upoštevamo, da se pokoravajo Schrödingerjevi enačbi. S tem dobimo semiklasični model laserja. Za še natančnejši opis bi morali obravnavati kvantno tudi svetlobo, kar pa presega okvir te knjige.

Aktivna snov naj bo množica enakih dvonivojskih atomov s stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$, ki imata energiji W_1 in W_2. Atomi s svetlobo sodelujejo preko dipolne interakcije oblike $H = -eE(t)\hat{x}$, kjer je $E(t)$ polje v resonatorju, ki naj bo zaradi preprostosti polarizirano v smeri osi x. Časovno odvisno stanje atomov zapišimo v obliki

$$|\psi\rangle = c_1(t)|1\rangle \exp(-iW_1 t/\hbar) + c_2(t)|2\rangle \exp(-iW_2 t/\hbar). \tag{6.61}$$

Iz Schrödingerjeve enačbe (enačba 5.106) dobimo za časovna odvoda koeficientov $c_1(t)$ in $c_2(t)$ zvezi (glej enačbi 5.108)

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{\hbar}E(t)v_{12}e^{-i\omega_0 t}c_2 \qquad \text{in} \qquad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{\hbar}E(t)v_{12}e^{i\omega_0 t}c_1, \tag{6.62}$$

pri čemer je $v_{12} = -e\langle 1|\hat{x}|2\rangle$ in $\omega_0 = (W_2 - W_1)/\hbar$.

Električni dipolni moment atoma v stanju ψ je

$$p = e\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = -(c_1^* c_2 e^{-i\omega_0 t} + c_1 c_2^* e^{i\omega_0 t})v_{12}. \tag{6.63}$$

Razdelimo p na dva dela in zapišemo

$$p = p^+ + p^- = -v_{12}[\eta(t) + \eta^*(t)], \tag{6.64}$$

kjer smo vpeljali $\eta(t) = c_1^* c_2 e^{-i\omega_0 t}$.

Zanima nas, kako se dipolni moment spreminja s časom. Zadošča, če poznamo, kako se s časom spreminja parameter $\eta(t)$. Njegov časovni odvod izrazimo iz enačb (6.62) in dobimo

$$\dot{\eta} = -i\omega_0\eta + \frac{i}{\hbar}E(t)v_{12}\left(|c_2|^2 - |c_1|^2\right). \tag{6.65}$$

Spomnimo, da je $|c_i|^2$ verjetnost za zasedenost stanja $|i\rangle$. Izraz v oklepaju na desni strani gornje enačbe torej meri razliko zasednosti obeh stanj, ki jo označimo s ζ. Podobno kot zgoraj izrazimo spreminjanje razlike zasedenosti s časovni odvodom

$$\dot{\zeta} = -\frac{2i}{\hbar}E(t)v_{12}(\eta^* - \eta). \tag{6.66}$$

S tem smo iz Schrödingerjeve enačbe dobili enačbi za časovni razvoj dipolnega momenta in obrnjene zasedenosti, ki pa ju moramo še dopolniti.

Naj bo atom na začetku v vzbujenem stanju $|2\rangle$ in naj bo $E(t) = 0$. Začetna vrednost obrnjene zasedenosti je tako $\zeta(0) = 1$. Po enačbi (6.66) naj bi bil odvod obrnjene zasedenosti enak nič in ζ konstantna. Vemo pa, da se atom, ki je v vzbujenem stanju, sčasoma vrne v osnovno stanje. Verjetnost za tak spontan prehod na časovno enoto smo označili z A (glej poglavje 5.3).

Poleg tega moramo upoštevati še črpanje, s katerim vzdržujemo obrnjeno zasedenost in s tem lasersko delovanje. Za podroben opis črpanja bi morali v Hamiltonov operator dodati ustrezne člene in morda upoštevati še druga stanja atomov, vendar nas take podrobnosti na tem mestu ne zanimajo. Če bi ne bilo črpanja, bi bila stacionarna vrednost v odsotnosti laserskega polja

$$\zeta_{\mathrm{stac}} = |c_2|^2 - |c_1|^2 = -1. \tag{6.67}$$

Zaradi črpanja zavzame obrnjena zasedenost neko vrednost $-1 < \zeta_0 < 1$, odvisno od moči črpanja. Enačbi (6.66) dodamo ustrezen člen

$$\dot{\zeta} = A(\zeta_0 - \zeta) - \frac{2i}{\hbar} E(t) v_{12} (\eta^* - \eta), \tag{6.68}$$

ki popisuje vpliv črpanja in spontane prehode v nižje stanje.

Podobno dopolnimo še enačbo za časovno spreminjanje električnega dipola (enačba 6.65). Pri $E(t) = 0$ da zapisana oblika enačbe časovno odvisnost $\eta \propto e^{-i\omega_0 t}$, to je brez dušenja. Vendar vemo, da polarizacija v mešanem stanju razpada vsaj zaradi spontanega sevanja, lahko pa še zaradi drugih vplivov, na primer trkov z drugimi atomi. Označimo koeficient dušenja polarizacije, ki meri tudi spektralno širino svetlobe, ki jo sevajo atomi pri prehodu $2 \to 1$, z γ. Zapišemo dopolnjeno enačbo

$$\dot{\eta} = -(i\omega_0 + \gamma)\eta + \frac{i}{\hbar} E(t) v_{12} \zeta \tag{6.69}$$

in kompleksno konjugirano enačbo

$$\dot{\eta}^* = -(-i\omega_0 + \gamma)\eta^* - \frac{i}{\hbar} E(t) v_{12} \zeta. \tag{6.70}$$

Tako smo dobili sklopljene diferencialne enačbe, ki popisujejo časovno spreminjanje obrnjene zasedenosti in dipolnega momenta atoma.

★ Enačbe (6.68), (6.69) in (6.70) pogosto imenujemo Maxwell-Blochove ali optične Blochove enačbe[5]. Osnovne Blochove enačbe opisujejo gibanje jerdskega magnetnega momenta v elektromagnetnem polju, zato so jih najprej uporabili za opis jedrske magnetne in elektronske spinske resonance.

Za opis potrebujemo še enačbo za polje $E(t)$. To naredimo klasično, tako da električna poljska jakost zadošča valovni enačbi. Upoštevati moramo, da imamo tudi od nič različno tudi polarizacijo snovi. Valovna enačba v skalarni obliki je tedaj

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \tag{6.71}$$

pri čemer je v primeru, da so vsi atomi enakovredni, polarizacija enaka

$$P = \frac{N}{V} p = -\frac{N}{V} v_{12} (\eta + \eta^*) = P^+ + P^-. \tag{6.72}$$

[5] Švicarsko-ameriški fizik in nobelovec Felix Bloch, 1905–1983.

Namesto mikroskopske količine ζ lahko uvedemo še gostoto obrnjene zasedenosti $Z = (N/V)\zeta$ in enačbe (6.68), (6.69) in (6.70) prepišemo v obliko

$$\frac{dZ}{dt} = A(Z_0 - Z) + \frac{2i}{\hbar}E\left(P^- - P^+\right), \tag{6.73}$$

$$\frac{dP^+}{dt} = (-i\omega_0 - \gamma)P^+ - \frac{i}{\hbar}Ev_{12}^2 Z, \tag{6.74}$$

$$\frac{dP^-}{dt} = (i\omega_0 - \gamma)P^- + \frac{i}{\hbar}Ev_{12}^2 Z. \tag{6.75}$$

Opozorimo še, da je prehod z enačb (6.68–6.70) na (6.73–6.75) mogoč le, kadar so vsi atomi enakovredni, to je, kadar ni nehomogene razširitve spektra.[6]

Enačbe (6.73–6.75), skupaj z valovno enačbo (enačba 6.71) podajajo semiklasični opis interakcij svetlobe s snovjo. Iz izpeljave je vidno, da je v semiklasičnem opisu spontano sevanje obravnavano pomanjkljivo, le s fenomenološkim nastavkom. To je moč popraviti tako, da tudi elektromagnetno polje kvantiziramo. Kljub tej pomanjkljivosti je s semiklasičnim modelom mogoče zelo podrobno opisati večino pojavov v laserjih in tudi druge probleme širjenja svetlobe po snovi. Reševanje zapisanega sistema nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb je pa na splošno zelo težavno.

Primer enofrekvenčnega laserja

Semiklasične enačbe pobliže spoznajmo na najenostavnešjem primeru. To naj bo laser, v katerem je vzbujeno le eno resonatorsko stanje. Polje ima tedaj obliko

$$E(\mathbf{r},t) = E_\lambda(t)u_\lambda(\mathbf{r}), \tag{6.76}$$

kjer je $u_\lambda(\mathbf{r})$ krajevni del lastnega stanja resonatorja, ki zadošča enačbi

$$\nabla^2 u_\lambda + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2}u_\lambda = 0. \tag{6.77}$$

Funkcija $E_\lambda(t)$ opisuje časovno odvisnost. Za laser v stacionarnem delovanju je periodična, vendar njena krožna frekvenca Ω ni nujno enaka lastni krožni frekvenci praznega resonatorja ω_λ. Krožno frekvenco Ω moramo še izračunati.

Najprej razvijmo po lastnih funkcijah $u_\lambda(\mathbf{r})$ še polarizacijo. Ker so lastne funkcije med seboj ortogonalne, preide valovna enačba (6.71) ob upoštevanju enačbe (6.77) v

$$\omega_\lambda^2 E_\lambda + \frac{d^2E_\lambda}{dt^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{d^2P_\lambda}{dt^2}. \tag{6.78}$$

Razstavimo $E_\lambda(t)$ na dva dela:

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^+(t) + E_\lambda^-(t) = A^+(t)e^{-i\omega_\lambda t} + A^-(t)e^{i\omega_\lambda t}. \tag{6.79}$$

Dejanska krožna frekvenca laserja je blizu ω_λ, zato pričakujemo, da se bosta amplitudi $A^\pm(t)$ v primerjavi z $e^{-i\omega_\lambda t}$ le počasi spreminjali s časom. Izračunajmo

$$\frac{d^2E_\lambda^+}{dt^2} = -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda\frac{dA^+}{dt}e^{-i\omega_\lambda t} \approx -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda\left(\frac{dE_\lambda^+}{dt} + i\omega_\lambda E_\lambda^+\right). \tag{6.80}$$

[6] Kako je v primeru nehomogene razširitve, lahko bralec poišče npr. v H. Haken, Laser Theory, Springer Verlag.

Izpustili smo drugi odvod A po času in s tem napravili približek počasno spreminjajoče se amplitude.

Polarizacija snovi je približno periodična s krožno frekvenco ω_0, ki je približno enaka ω_λ. Tudi amplituda polarizacije se le počasi spreminja, zato lahko privzamemo, da je $\ddot{P}_\lambda^+ \approx -\omega_\lambda^2 P_\lambda^+$. Z uporabo tega približka in enačbe (6.80) preide valovna enačba (enačba 6.71) za eno nihanje v

$$\frac{dE_\lambda^+}{dt} = -i\omega_\lambda E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P_\lambda^+. \tag{6.81}$$

Doslej še nismo upoštevali, da je polje v praznem resonatorju dušeno, zato moramo gornjo enačbo še popraviti

$$\frac{dE_\lambda^+}{dt} = \left(-i\omega_\lambda - \frac{1}{\tau}\right) E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P_\lambda^+. \tag{6.82}$$

Kadar v resonatorju ni snovi, je dobljena enačba enaka enačbi (4.63).

Enačbe (6.73–6.75) so nelinearne, zato jih ni moč kar tako prepisati za primer razvoja po lastnih stanjih resonatorja. Pri enačbah za razvoj polarizacije (enačbi 6.74 in 6.75) v zadnjem členu na desni nastopa produkt komponente polja E_λ in obrnjene zasedenosti Z. Bistveno prispeva le krajevno povprečje $\overline{Z}$, ki se s časom le počasi spreminja. Seveda vsebuje Z tudi krajevno odvisne komponente, ki pa so pomembne predvsem zato, ker sklapljajo različna lastna stanja resonatorja, vendar to presega našo trenutno obravnavo. Tako iz enačbe (6.74) dobimo

$$\frac{dP_\lambda^+}{dt} = (-i\omega_0 - \gamma) P_\lambda^+ - \frac{iv_{12}^2}{\hbar} E_\lambda^+ \overline{Z}. \tag{6.83}$$

Enačbo za $\overline{Z}$ dobimo iz (6.73). V zadnjem členu nastopajo produkti $E^\pm P^\pm = E_\lambda^\pm P_\lambda^\pm u_\lambda^2(\mathbf{r})$, ki jih moramo prostorsko povprečiti. Funkcije $u_\lambda(\mathbf{r})$ so normirane, tako da je $\int u_\lambda^2(\mathbf{r})\, dV = V$ in $\overline{u_\lambda^2(\mathbf{r})} = 1$. Sledi

$$\frac{d\overline{Z}}{dt} = A\left(\overline{Z}_0 - \overline{Z}\right) + \frac{2i}{\hbar}\left(E_\lambda^+ + E_\lambda^-\right)\left(P_\lambda^- - P_\lambda^+\right), \tag{6.84}$$

kjer je $\overline{Z}_0$ povprečje nenasičene zasedenosti Z_0. V zadnjem členu nastopajo produkti, ki nihajo s frekvencami $\omega_\lambda - \omega_0$ in $\omega_\lambda + \omega_0$. Frekvenci sta si zelo blizu, zato je njuna vsota znatno večja od razlike. Hitro spreminjajoče se člene $E_\lambda^+ P_\lambda^+$ in $E_\lambda^- P_\lambda^-$ izpustimo, saj skoraj nič ne vplivajo na valovanje blizu ω_λ. Časovno odvisnost $\overline{Z}$ tako zapišemo

$$\frac{d\overline{Z}}{dt} = A\left(\overline{Z}_0 - \overline{Z}\right) + \frac{2i}{\hbar}\left(E_\lambda^+ P_\lambda^- - E_\lambda^- P_\lambda^+\right). \tag{6.85}$$

Enačbe (6.82), (6.83) in (6.85), skupaj s konjugirano kompleksnimi enačbami za E_λ^- in P_λ^-, so zaključen sistem, ki opisuje delovanje enofrekvenčnega laserja. Uporabimo jih za izračun frekvence izhodne svetlobe.

Naj bo stanje stacionarno. Tedaj lahko polje zapišemo v obliki $E_\lambda^+ = E_0 e^{-i\Omega t}$, kjer je E_0 realna konstanta, krožna frekvenca svetlobe Ω pa je blizu ω_0 in ω_λ. V stacionarnem stanju ima polarizacija enako časovno odvisnost in $P_\lambda^+ = P_0 e^{-i\Omega t}$. Tedaj je v enačbi (6.85) drugi oklepaj konstanten in povprečna gostota obrnjene zasedenosti $\overline{Z}$ je v stacionarnem stanju od časa neodvisna. Sistem enačb (6.82), (6.83) in (6.85) tako da

$$\left(i\left(\Omega-\omega_{\lambda}\right)-\frac{1}{\tau}\right)E_0+\frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0}P_0 = 0 \tag{6.86}$$

$$\left(i\left(\Omega-\omega_0\right)-\gamma\right)P_0-\frac{iv_{12}^2}{\hbar}E_0\overline{Z} = 0 \tag{6.87}$$

$$A\left(\overline{Z}_0-\overline{Z}\right)+\frac{2i}{\hbar}E_0\left(P_0^*-P_0\right) = 0. \tag{6.88}$$

Najprej iz druge enačbe izrazimo P_0, ga vstavimo v tretjo in izračunamo $\overline{Z}$. Dobimo

$$\overline{Z}=\overline{Z}_0\left[1+\frac{v_{12}^2}{\hbar^2 A}E_0^2\frac{2\gamma}{\left(\omega_0-\Omega\right)^2+\gamma^2}\right]^{-1} \tag{6.89}$$

Ta izraz že poznamo. $\pi v_{12}^2/\left(\varepsilon_0\hbar^2\right)$ je Einsteinov koeficient B. E_0^2 je sorazmern gostoti energije polja v resonatorju, zadnji ulomek v oklepaju pa podaja obliko homogeno razširjene atomske črte (5.67)

$$\overline{Z}=\overline{Z}_0\left[1+\frac{2B}{A}g\left(\omega_0-\Omega\right)w\right]^{-1} \tag{6.90}$$

To je natanko enako izrazu za nasičenje zasedenosti stanj, ki smo ga izpeljali iz zasedbenih enačb v četrtem poglavju.

Postavimo P_0 iz prve enačbe sistema 6.86 v drugo:

$$E_0[i\left(\Omega-\omega_{\lambda}\right)+\frac{1}{\tau}][i\left(\Omega-\omega_0\right)+\gamma]=-\frac{v_{12}^2\omega_0}{2\hbar\varepsilon_0}E_0\overline{Z}\,. \tag{6.91}$$

V delujočem laserju je $E_0\neq 0$, zato lahko krajšamo. $\overline{Z}$ je realen, tako da mora biti imaginarni del leve strani enak nič:

$$\left(\Omega-\omega_{\lambda}\right)\gamma+\left(\Omega-\omega_0\right)\frac{1}{\tau}=0\,. \tag{6.92}$$

Od tod lahko izračunamo frekvenco laserja

$$\Omega=\frac{\omega_{\lambda}\gamma+\omega_0\frac{1}{\tau}}{\gamma+\frac{1}{\tau}}\,. \tag{6.93}$$

Frekvenca torej ni enaka frekvenci praznega resonatorja ω_{λ}, temveč je premaknjena proti centru atomske črte ω_0. Premik je odvisen od razmerja širine atomske črte in izgub resonatorja.

Bralec lahko sam iz enačbe 6.91 izračuna še energijo svetlobe v resonatorju in rezultat primerja s tistim, ki smo ga dobili z uporabo zasedbenih enačb.

Gornji primer uporabe polklasičnih enačb je zelo preprost. Prava moč modela se pokaže pri obravnavi mnogofrekvenčnega laserja, na primer pri računu uklepanja faz laserskih nihanj, kar pa presega okvir te knjige. Več bo bralec našel v [**?**].

Stvarno kazalo