FOTONIKA

Delovna verzija

Martin ČOPIČ
Andrej PETELIN
Mojca VILFAN

Recenzenti: ***

Lektor: ***

Risbe in diagrami: Andrej Petelin in Mojca Vilfan

Naslovne fotografije poglavij: Mojca Vilfan

LJUBLJANA, *** 2017

Kazalo

Predgovor

Fotonika je veda o svetlobi. Obsega izredno široka področja nastanka svetlobe in svetlobnih virov, uporabe svetlobe v različne namene, širjenja optičnih signalov in zaznavanja svetlobe. V zadnjih desetletih je zato fotonika doživela izreden razcvet v raziskavah in tehnološki uporabi.

V pričujoči knjigi bomo obravnavali osnove fotonike. Po kratki ponovitvi splošne optike bomo spoznali delovanje laserjev in lastnosti laserske svetlobe, nadaljevali z nelinearnimi optičnimi pojavi in modulacijo svetlobe ter zaključili s prenosom in detekcijo laserskih signalov. Učbenik je zato primeren predvsem za študente II. stopnje fizike, ki že imajo znanje optike in zahtevanih matematičnih prijemov, ga pa priporočamo vsakemu, ki ga področje fotonike zanima. Bralcu v razmislek smo dodali nekaj preprostih nalog, zahtevnejša podpoglavja pa so označena z zvezdico.

Prvotno gradivo za učbenik je nastalo po zapiskih za predavanja pri predmetu Elektrooptika. Gradivo smo dopolnili, posodobili in prilagodili obravnavani snovi pri predmetih Fotonika in Fizika laserjev. Za pomoč pri pripravi se najlepše zahvaljujemo prof. dr. Ireni Drevenšek Olenik ***

Avtorji

Priporočena dodatna literatura

- B. E. A. Saleh in M. C. Teich, Fundamentals of Photonics, 2nd Edition, Wiley, New Jersey, 2007.
- A. Yariv in P. Yeh, Photonics, Sixth Edition, Oxford University Press, 2007.
- W. T. Silfvast, Laser Fundamentals, Second Edition, Cambridge University Press, 2008.
- C. C. Davis, Lasers and Electro-Optics, Cambridge University Press, 2006.
- J. W. Goodman, Statistical Optics, Second Edition, Wiley, New Jersey, 2015.
- W. Demtröder, Laser Spectroscopy, Fifth Edition, Springer, Berlin, 2014.
- R. W. Boyd, Nonlinear Optics, Third Edition, Academic Press, 2008.
- K. F. Renk, Basics of Laser Physics, Second Edition, Springer, Berlin, 2017.

1. Elektromagnetno valovanje

Za začetek osvežimo osnove teorije elektromagnetnega polja in elektromagnetnega valovanja. Obnovili bomo zapis Maxwellovih enačb, opisali osnovne pojave valovanja (lom, odboj in uklon) in si ogledali razširjanje svetlobe v anizotropnih snoveh.

1.1 Maxwellove enačbe

Elektromagnetno polje v praznem prostoru opišemo z dvema vektorskima poljema, električnim in magnetnim, ki sta v splošnem funkciji prostora in časa. Vsaki točki v prostoru lahko priredimo jakost električnega polja $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ in jakost magnetnega polja $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$. Za opis elektromagnetnega polja v snovi vpeljemo dva dodatna vektorja polja. To sta gostota električnega polja $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ in gostota magnetnega polja $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Vsa ta polja povezujejo Maxwellove enačbe[1]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_e \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1.4}$$

Pri zapisu enačb smo upoštevali tudi izvore polj, to je gostoto električnega toka $\mathbf{j}_e(\mathbf{r},t)$ in gostoto naboja $\rho_e(\mathbf{r},t)$, ki pa ju bomo v nadaljevanju izpuščali.

Poleg Maxwellovih enačb veljata za vektorski polji zvezi

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{in} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}, \tag{1.6}$$

kjer $\mathbf{P}$ označuje električno polarizacijo, to je gostoto električnih dipolov, $\mathbf{M}$ pa magnetizacijo, to je gostoto magnetnega momenta. Polarizacija in magnetizacija sta odvisni od zunanjih polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$. V splošnem sta njuni odvisnosti zelo zapleteni, v izotropnih in linearnih snoveh[2] pa se zvezi poenostavita v

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu - 1)\mathbf{H}. \tag{1.7}$$

Vpeljali smo električno (χ_e) in magnetno (χ_m) susceptibilnost ter dielektričnost ε in magnetno permeabilnost μ. Ko združimo gornje enačbe, lahko zapišemo dve konstitutivni relaciji

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{in} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \tag{1.9}$$

V linearnih anizotropnih snoveh moramo namesto skalarnih vrednosti ε in μ zapisati tenzorje.

[1] Škotski fizik James Clerk Maxwell, 1831–1879.

[2] Med nelinearne snovi, za katere napisani zvezi ne veljata, sodijo na primer feroelektriki in feromagneti.

Robni pogoji

Navedene Maxwellove enačbe zadoščajo za opis elektromagnetnega polja v neomejeni snovi, kjer so vse komponente polj zvezne funkcije. Za obravnavo v omejeni snovi moramo vedeti tudi, kaj se z elektromagnetnim poljem zgodi na meji dveh sredstev. Pri prehodu iz enega dielektrika v drugega se ohranjata normalni komponenti gostote električnega in magnetnega polja ter tangentni komponenti jakosti električnega in magnetnega polja (slika 1.1)

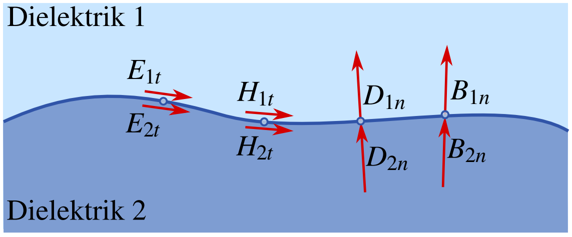
$$D_{1n} = D_{2n} \tag{1.10}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{1.11}$$

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{1.12}$$

$$H_{1t} = H_{2t}. \tag{1.13}$$

Privzeli smo, da na meji med dielektrikoma ni površinskih tokov ali nabojev, sicer bi morali robna pogoja za D_n in H_t ustrezno popraviti. Na meji dielektrika z idealnim prevodnikom (kovino, zrcalom) so robni pogoji drugačni. Za magnetno polje jih ne moremo preprosto zapisati, za električno polje pa velja, da mora biti tangentna komponenta jakosti električnega polja enaka nič. Posledica tega pogoja je, da se pri pravokotnem vpadu na zrcalo faza valovanja spremeni za π.



Slika 1.1: Na meji med dvema dielektrikoma brez površinskih tokov in nabojev so tangentna komponenta jakosti električnega in magnetnega polja ter normalna komponenta gostote električnega in magnetnega polja zvezne količine.

1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor

Večinoma bomo obravnavali elektromagnetna valovanja v izotropnih, homogenih in linearnih snoveh brez zunanjih izvorov in nosilcev naboja ($\mathbf{j}_e = 0$ in $\rho_e = 0$). Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpeljemo valovno enačbo za jakost električnega ali magnetnega polja

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in} \quad \nabla^2\mathbf{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.14}$$

Pri tem je hitrost valovanja v snovi enaka

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c_0}{n}. \tag{1.15}$$

Magnetne in dielektrične lastnosti snovi smo pospravili v lomni količnik, ki pove, kolikokrat je hitrost svetlobe v snovi manjša od hitrosti svetlobe v praznem prostoru.

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{1.16}$$

Za izotropno in nemagnetno snov ($\mu = 1$) je lomni količnik $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Vpeljimo še vektor gostote energijskega toka, to je Poyntingov vektor[3] $\mathbf{S}$

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.} \tag{1.17}$$

Kot vidimo, je smer energijskega toka vedno pravokotna na smeri $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$. Gostoto energijskega toka j, to je količino energije, ki v danem časovnem intervalu preteče skozi dano ploskev z normalo $\hat{\mathbf{n}}$, izračunamo kot časovno povprečje projekcije Poyntingovega vektorja

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle . \tag{1.18}$$

Gostoti energijskega toka, predvsem gostoti svetlobnega toka, pravimo tudi intenziteta .

Naloga 1.2.1 — Poyntingov teorem. Iz Maxwellovih enačb izpelji kontinuitetno enačbo v odsotnosti električnih tokov

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{H}^2\right) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \tag{1.19}$$

Pomagaj si z zvezo $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} - (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}$.

Opazimo, da predstavlja Poyntingov teorem izrek o ohranitvi energije. Prvi in drugi člen na desni strani Poyntingovega teorema (enačba 1.19) opišeta gostoto energije, shranjene v električnem in magnetnem polju, medtem ko tretji in četrti člen opišeta energijo, ki je shranjena v snovi (električnih in magnetnih dipolih). Za valovanje v homogeni izotropni snovi tako velja

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1.20}$$

kjer je w celotna gostota energije elektromagnetnega polja. Zapišemo jo kot

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \mu \mathbf{H}^2.} \tag{1.21}$$

Valovno enačbo in ohranitvene zakone lahko zapišemo tudi za anizotropne, nehomogene ali nelinearne snovi. Nekaj teh primerov bomo srečali v nadaljevanju in jih bomo obravnavali sproti.

1.3 Monokromatski elektromagnetni val

Reševanje valovne enačbe si navadno poenostavimo z vpeljavo kompleksnega zapisa jakosti električnega in magnetnega polja. Račun si oglejmo na primeru monokromatskega elektromagnetnega vala. Nastavek za monokromatski val s krožno frekvenco ω naj bo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) \qquad \text{in} \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}), \tag{1.22}$$

kjer sta $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ časovno neodvisna vektorja jakosti električnega in magnetnega polja s kompleksno amplitudo. Podobno lahko vpeljemo tudi kompleksne vektorje $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ in $\mathbf{B}$, ki opisujejo realne količine (polarizacijo, magnetizacijo, gostoto električnega in gostoto magnetnega polja). V nadaljevanju bomo večinoma pisali polja v kompleksni obliki, pri čemer se bomo držali gornje definicije. Zavedati pa se moramo, da je uporaba kompleksnega zapisa zgolj računski pripomoček, na koncu je treba rezultate vedno izraziti z realnimi količinami.

[3] Angleški fizik John Henry Poynting, 1852–1914.

Če vstavimo gornji nastavek za monokromatski val v valovno enačbo (enačba 1.14), dobimo Helmholtzevi enačbi[4] za kompleksna vektorja jakosti električnega in magnetnega polja. V homogenem in izotropnem sredstvu ju zapišemo kot

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.23}$$
$$\nabla^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0, \tag{1.24}$$

kjer je $k = nk_0 = n\omega/c_0$ valovno število.

Vpeljimo še kompleksni Poyntingov vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*. \tag{1.25}$$

Naloga 1.3.1 Upoštevajoč izraz za Poyntingov vektor $\mathbf{S}$ (enačba 1.17) pokaži, da lahko intenziteto valovanja j (oziroma povprečje projekcije Poyntingovega vektorja) izrazimo s kompleksnim Poyntingovim vektorjem $\mathbf{S}(\mathbf{r})$

$$j = \langle\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\rangle = \frac{1}{4}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{H}) = \Re(\mathbf{S}(\mathbf{r})). \tag{1.26}$$

1.4 Ravni val

Osnovna rešitev valovne enačbe je ravni val. Nastavek, ki predstavlja ravni val in hkrati reši Helmholtzevo enačbo (enačba 1.23), je oblike

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} \tag{1.27}$$

in podobno za magnetno polje

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}, \tag{1.28}$$

pri čemer sta vektorja $\mathbf{E}_0$ ter $\mathbf{H}_0$ od kraja in časa neodvisna. Velikost valovnega vektorja $\mathbf{k}$ je valovno število $k = nk_0$, pri čemer je n lomni količnik izotropne in homogene snovi.

Vektorja jakosti električnega in magnetnega polja zadostujeta Maxwellovim enačbam (enačbe 1.1–1.4), iz česar sledi, da sta polji vedno medsebojno pravokotni, hkrati pa pravokotni na valovni vektor $\mathbf{k}$. Elektromagnetno valovanje je torej transverzalno valovanje.

Naloga 1.4.1 Pokaži, da za ravni val vedno velja $\mathbf{D}\perp\mathbf{k}$ in $\mathbf{B}\perp\mathbf{k}$. Izpelji še pravokotnost polj in valovnega vektorja v izotropni snovi

$$\mathbf{k}\times\mathbf{H}_0 = -\omega\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}_0 \quad \text{in} \tag{1.29}$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 = \omega\mu\mu_0\mathbf{H}_0. \tag{1.30}$$

Zaradi enolične zveze med električnim in magnetnim poljem zadošča za opis ravnega vala le eno polje, navadno se odločimo za električno.

[4]Nemški zdravnik in fizik Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821–1894.

Energijski tok je pri ravnem valu v izotropni snovi vedno v smeri valovnega vektorja, pravokotno na valovne fronte. Iz definicije za gostoto svetlobnega toka (enačbi 1.26) ter Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledi

$$j = \Re\left(\frac{1}{4}E_0H_0^* + \frac{1}{4}E_0^*H_0\right) = \frac{1}{2}c\varepsilon\varepsilon_0\left|E_0\right|^2 = \frac{1}{2}c_0n\varepsilon_0\left|E_0\right|^2. \tag{1.31}$$

Gostota svetlobnega toka (intenziteta svetlobe) je torej sorazmerna s kvadratom amplitude jakosti električnega polja. Poglejmo nekaj primerov. Gostoti toka $j = 1\ \mathrm{kW/m^2}$ (približna gostota svetlobnega toka s Sonca na Zemljinem površju) tako v praznem prostoru ustreza jakost električnega polja $E_0 = 868\ \mathrm{V/m}$, gostoti $j = 1\ \mathrm{W/\mu m^2}$ (intenziteta močno fokusiranega laserskega žarka) pa $E_0 = 27\ \mathrm{MV/m}$.

Zapišimo še povprečno gostoto energije valovanja. K energiji prispevata tako magnetno kot električno polje. Oba prispevka sta enaka, zato velja

$$\langle w\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_0\left|E_0\right|^2 + \frac{1}{4}\mu\mu_0\left|H_0\right|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0\left|E_0\right|^2. \tag{1.32}$$

Povprečna gostota energije w, pomnožena s hitrostjo svetlobe v snovi, da gostoto energijskega toka j oziroma intenziteto svetlobe

$$\boxed{j = cw.} \tag{1.33}$$

Gornji izraz nazorno kaže, da je intenziteta svetlobe pravzaprav pretok energije. To si lahko predstavljamo, če vzamemo valj s prečnim presekom S in dolžino $c\Delta t$. V volumnu $Sc\Delta t$ je potem shranjene $wSc\Delta t$ energije. Energija, ki preteče skozi presek S v času Δt, je ravno cw.

Intenziteta ravnega vala je neodvisna od kraja in časa, iz česar sledi, da je povsod po prostoru enaka. Če bi hoteli izračunati energijo, ki jo nosi ravni val, bi opazili, da je ta energija neskončna. To seveda ni mogoče, zato se je vedno treba zavedati, da je ravni val le idealiziran, a nazoren in praktičen približek elektromagnetnega vala.

1.5 Polarizacija EM valovanja

Jakost električnega polja elektromagnetnega valovanja je v izotropnem sredstvu pravokotna na smer valovnega vektorja[5]. Vektor $\mathbf{E}$ torej leži v ravnini, pravokotni na smer valovnega vektorja, njegovo smer pa opiše polarizacija.

V splošnem je ravni val eliptično polariziran. Takrat vektor $\mathbf{E}$ v ravnini, pravokotni na valovni vektor, oriše elipso. Obe komponenti vektorja $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ nihata sinusno z enako frekvenco, lahko pa se razlikujeta v amplitudi in fazi. Kadar je elipsa izrojena v daljico, govorimo o linearno polariziranem valovanju, kadar pa je krog, govorimo o cirkularno polariziranem valu. Poljubno polarizacijo lahko vedno zapišemo kot vsoto dveh linearno ali dveh cirkularno polariziranih valovanj.

Polarizacijo valovanja lahko zapišemo s kompleksnim Jonesovim vektorjem[6] $\mathbf{J}$. Za monokromatski ravni val, ki se širi v smeri z in ima komponenti E_x in E_y je Jonesov vektor

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|E_0|}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

[5] V splošnem velja $\mathbf{E}\perp\mathbf{S}$ (enačba 1.17) in $\mathbf{D}\perp\mathbf{k}$ (naloga 1.4.1). To velja tudi v anizotropnih sredstvih, vendar je tam $\mathbf{E}\nparallel\mathbf{D}$ in $\mathbf{k}\nparallel\mathbf{S}$.

[6] Ameriški fizik Robert Clark Jones, 1916–2004.

Dodali smo normalizacijski faktor $|E_0| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}$, da je Jonesov vektor normaliziran in $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* = 1$. Ravni val, linearno polariziran v smeri x, tako zapišemo kot $\mathbf{J} = (1,0)$, val, ki je linearno polariziran pod kotom 45° glede na osi x in y, pa je $\mathbf{J} = (1,1)/\sqrt{2}$. Za zapis cirkularno polariziranega valovanja ni enotnega dogovora, tukaj zapišimo desno cirkularno polarizirano valovanje kot $\mathbf{J} = (1,-i)/\sqrt{2}$, levo cirkularno polarizirano pa z $\mathbf{J} = (1,i)/\sqrt{2}$. V našem zapisu je desno polariziran val tisti val, pri katerem se električna poljska jakost na danem mestu vrti v desno, če gledamo proti izvoru valovanja.

Zapis z Jonesovim vektorjem je prikladen, saj omogoča preprost izračun prehoda ravnega vala skozi optične elemente, ki spreminjajo polarizacijo, a ohranjajo obliko ravnega vala. V splošnem se pri prehodu skozi sredstvo spremeni kompleksna amplituda $\mathbf{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y})$

$$E_{2x} = A_{11}E_{1x} + A_{12}E_{1y} \tag{1.35}$$

$$E_{2y} = A_{21}E_{1x} + A_{22}E_{1y}, \tag{1.36}$$

pri čemer so komponente A_{ij} odvisne od lastnosti sredstva. Enačbi zapišemo v matrični obliki

$$\mathbf{E}_2 = A \cdot \mathbf{E}_1, \tag{1.37}$$

kjer sta $\mathbf{E}_1$ in $\mathbf{E}_2$ vstopni in izstopni val, A pa je Jonesova matrika. Jonesova matrika za prehod skozi linearni polarizator, ki polarizira v smeri x, je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.38}$$

Oglejmo si še dva zanimiva primera optičnih komponent. Jonesova matrika za ploščico $\lambda/2$, ki spremeni desno cirkularno polariziran val v levo polariziran in obratno, je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

Jonesova matrika za ploščico $\lambda/4$ pa je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \tag{1.40}$$

Ta optični element linearno polarizirano valovanje z Jonesovim vektorjem $(1,1)/\sqrt{2}$ spremeni v levo cirkularno polarizirano valovanje, cirkularno polarizirano valovanje pa nazaj v linearno.

Naloga 1.5.1 Pokaži, da je Jonesova matrika za polarizator, ki prepušča polarizacijo pod kotom ϑ glede na os x, podana s spodnjo matriko. Namig: matriko A', ki predstavlja polarizator v smeri x, zapiši v zavrtenem koordinatnem sistemu $A = R(\vartheta) \cdot A' \cdot R(\vartheta)^{\mathrm{A}}$, kjer je $R(\vartheta)$ rotacijska matrika.

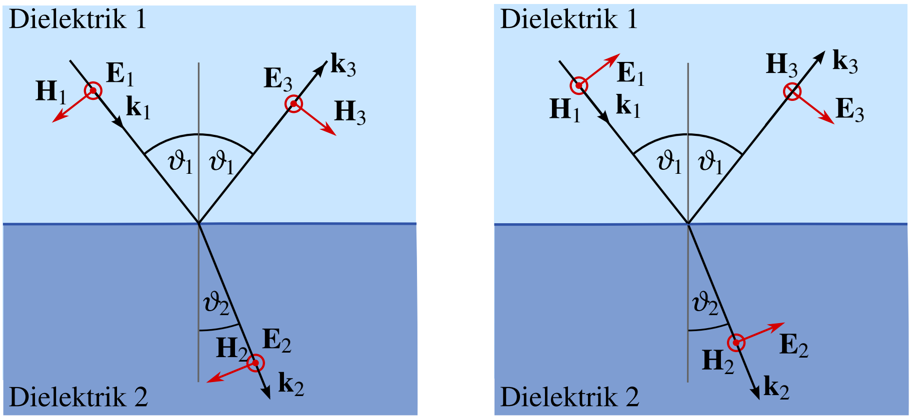
$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & \sin^2\vartheta \end{bmatrix}. \tag{1.41}$$

1.6 Lom in odboj EM valovanja

Na ravni meji med dvema izotropnima dielektrikoma se del svetlobe odbije po odbojnem zakonu, ki pravi, da je odbojni kot enak vpadnemu, del pa lomi po lomnem zakonu

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2. \tag{1.42}$$

S kotoma $\vartheta_1$in ϑ_2 smo označili vpadni in lomni kot, $n_1$in n_2 pa sta lomna količnika prve in druge snovi. Poglejmo, kaj se pri lomu in odboju zgodi s polarizacijo valovanja (slika 1.2). Dogovorimo se, da valovanje, pri katerem je električna poljska jakost vzporedna z mejno ravnino in pravokotna na vpadno ravnino, imenujemo transverzalno električno (TE) valovanje. Kadar leži v mejni ravnini jakost magnetnega polja, govorimo o transverzalnem magnetnem valovanju (TM).



Slika 1.2: Lom elektromagnetnega valovanja na meji dveh izotropnih dielektrikov. Levo: transverzalno električno (TE) valovanje. Desno: transverzalno magnetno (TM) valovanje.

Z E_1 označimo amplitudo jakosti električnega polja vpadnega valovanja, z E_2 prepuščenega in z E_3 odbitega. Nato vpeljemo prepustnost t in odbojnost r, ki pa sta odvisni od vpadne polarizacije. Zapišemo

$$E_{2\mathrm{TE}} = t_{\mathrm{TE}} E_{1\mathrm{TE}} \qquad E_{3\mathrm{TE}} = r_{\mathrm{TE}} E_{1\mathrm{TE}} \tag{1.43}$$

$$E_{2\mathrm{TM}} = t_{\mathrm{TM}} E_{1\mathrm{TM}} \qquad E_{3\mathrm{TM}} = r_{\mathrm{TM}} E_{1\mathrm{TM}}. \tag{1.44}$$

Iz robnih pogojev (enačbe 1.10–1.13) izračunamo koeficiente r in t s Fresnelovimi enačbami[7]

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{n_1 \cos\vartheta_1 - n_2 \cos\vartheta_2}{n_1 \cos\vartheta_1 + n_2 \cos\vartheta_2}, \qquad t_{\mathrm{TE}} = 1 + r_{\mathrm{TE}} = \frac{2 n_1 \cos\vartheta_1}{n_1 \cos\vartheta_1 + n_2 \cos\vartheta_2} \tag{1.45}$$

in

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{n_1 \cos\vartheta_2 - n_2 \cos\vartheta_1}{n_2 \cos\vartheta_1 + n_1 \cos\vartheta_2}, \qquad t_{\mathrm{TM}} = (1 + r_{\mathrm{TM}})\frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_2} = \frac{2 n_1 \cos\vartheta_1}{n_1 \cos\vartheta_2 + n_2 \cos\vartheta_1}. \tag{1.46}$$

V splošnem sta odbojnost r in prepustnost t kompleksni količini, saj iz lomnega zakona sledi, da je $\cos\vartheta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2\vartheta_1}$ lahko kompleksen. Velikost števila $|r|$ tako predstavlja odbojnost, argument $\arg\{r\}$ pa spremembo faze pri odboju.

[7]Francoski fizik Augustin-Jean Fresnel, 1788–1827.

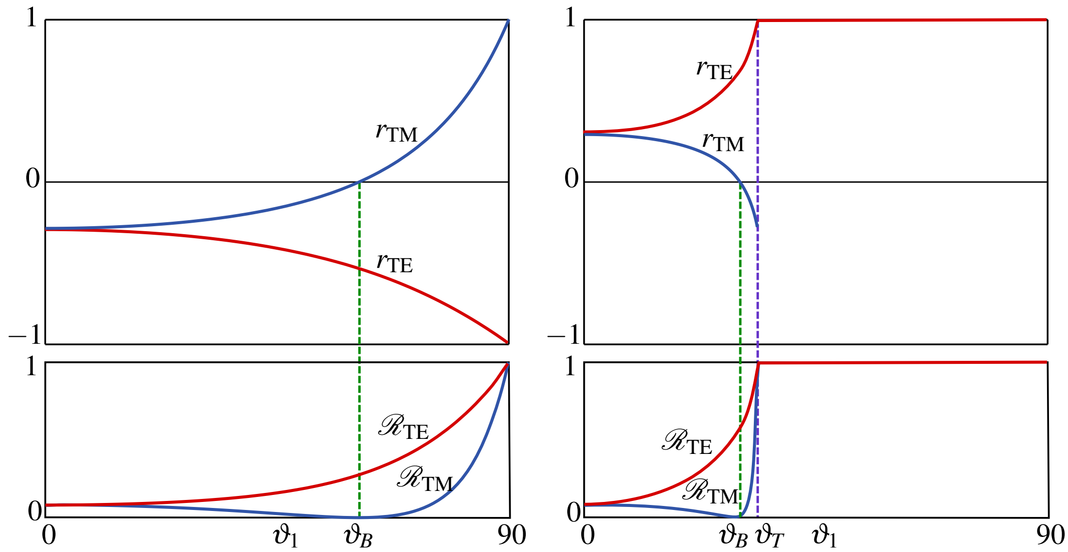
Prepustnost r in odbojnost t povesta, kako se spremeni kompleksna amplituda jakosti električnega polja. Razmerje med intenziteto odbite in vpadne svetlobe $\mathscr{R}$ oziroma razmerje med intenziteto prepuščene in vpadne svetlobe $\mathscr{T}$ izračunamo kot

$$\mathscr{R} = |r|^2 \qquad \text{in} \qquad \mathscr{T} = 1 - \mathscr{R}. \tag{1.47}$$

Slednja enačba sledi iz ohranitve energije. V splošnem $\mathscr{T}$ ni enak $|t|^2$, saj energijski tok potuje po različnih snoveh in v različnih smereh. Velja zveza

$$\mathscr{T} = \frac{n_2 \cos\vartheta_2}{n_1 \cos\vartheta_1} |t|^2 . \tag{1.48}$$

Zanimiva je odvisnost odbojnosti od vpadnega kota. Pri nekem kotu, imenujemo ga Brewsterjev kot[8], odbojnost za TM polarizirano valovanje enaka nič. Brewsterjeva okna (steklene ploščice, postavljene pod Brewsterjevim kotom) uporabljamo v resonatorjih laserjev za povečanje izgub TE in zmanjšanje izgub TM polariziranega valovanja.



Slika 1.3: Odbojnost r za obe vpadni polarizaciji (zgoraj) in razmerje med intenziteto odbite in vpadne svetlobe $\mathscr{R}$ (spodaj) v odvisnosti od vpadnega kota. Za primer na levi velja $n_1 < n_2$, za primer na desni pa $n_1 > n_2$. Pri Brewsterjevem vpadnem kotu ϑ_B je odbojnost TM polariziranega valovanja enaka nič, pri kotih nad $\vartheta_T = \arcsin(n_2/n_1)$ pa pride do totalnega odboja.

Naloga 1.6.1 — Brewsterjev kot. Pokaži, da Brewsterjev kot izračunamo kot

$$\vartheta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{1.49}$$

★ Pri prehodu skozi optične elemente se – razen TM polariziranega valovanja pri Brewsterjevem kotu – vedno nekaj svetlobe odbije. Da zmanjšamo te izgube, optične elemente navadno prekrijemo z antirefleksno plastjo, to je nanosom ene ali več primerno izbranih debelin plasti dielektrikov z ustreznimi lomnimi količniki. Zaradi destruktivne interference se količina odbite svetlobe z izbrano valovno dolžino občutno zmanjša. Ker imamo v fiziki laserjev opraviti s koherentnimi izvori s točno določeno valovno dolžino, za zmanjšanje izgub, na primer v resonatorju laserja, vedno uporabljamo optične elemente (leče, kristale, akusto-optične modulatorje ...) z ustrezno antirefleksno plastjo.

[8] Škotski fizik in znanstvenik Sir David Brewster, 1781–1868.

1.7 Uklon svetlobe

Kadar svetloba vpade na oviro, za oviro nastane senca. Nastala senca ni ostra, ampak ima zaradi uklona zabrisane robove. Obravnave uklona svetlobe na odprtinah ali zaslonkah se lotimo z uporabo skalarnega približka teorije elektromagnetnega polja. To pomeni, da vpliva polarizacije ne upoštevamo. Ta je pomemben zgolj pri zelo majhnih odprtinah, kjer je velikost odprtine po velikosti podobna valovni dolžini svetlobe $a \sim \lambda$. Vendar so tudi v tem primeru uklonske slike za različne polarizacije podobne, razlikujejo pa se po intenziteti prepuščene svetlobe.

★ **Žičnati polarizatorji**

Primer, kjer skalarni približek ne da pravih rezultatov, je uklon na mrežici, narejeni iz zelo tankih prevodnih žic. Takšna mrežica deluje kot polarizator za vpadno elektromagnetno valovanje. Elektromagnetni val s polarizacijo, ki je vzporedna žicam, pri prečkanju v žicah inducira tok in val se delno odbije in delno absorbira. Za valovanje, ki je polarizirano pravokotno na žice, je ta inducirani tok bistveno manjši, saj je smer toka omejena vzdolž žice. Posledično je prepustnost velika le za eno polarizacijo. Takšni polarizatorji se večinoma uporabljajo v mikrovalovni tehniki, vendar se v zadnjih letih z razvojem in izboljšavo litografskih postopkov vse pogosteje uporabljajo tudi v bližnjem infrardečem področju svetlobe.

Pri velikostih odprtin $a \gg \lambda$ torej uporabimo skalarno obliko valovne enačbe (enačba 1.14)

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{1.50}$$

Zapisana valovna enačba velja za vse komponente električne E in tudi magnetne poljske jakosti H. Časovna odvisnost polja E je harmonična funkcija in je sorazmerna z $e^{-i\omega t}$. Z uporabo Greenovega teorema lahko jakost polja E_P v točki P izrazimo s poljem na poljubni ploskvi, ki obkroža točko P (slika 1.4). Zvezo opisuje Kirchhoffov integral[9]

$$E_P = -\frac{1}{4\pi}\oint \left(E\,\mathbf{n}\cdot\nabla\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{n}\cdot\nabla E \right) dS, \tag{1.51}$$

kjer je $\mathbf{n}$ normala na ploskev, po kateri teče integral, r pa je oddaljenost od točke P do ploskve dS. Kirchhoffov integral velja splošno za katerokoli harmonično funkcijo, ki reši valovno enačbo (enačba 1.50), ne samo E, in torej ni vezan na obravnavo uklona svetlobe.

Vzemimo točkast izvor v točki S. Svetloba iz njega vpada na zaslon, z odprtino poljubne oblike. Izračunajmo skalarno polje v točki P na drugi strani zaslona. Vpadno svetlobo zapišemo kot

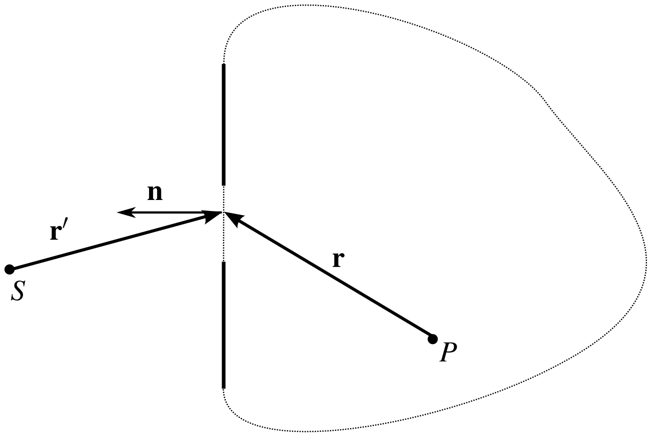
$$E = A\frac{e^{ikr'}}{r'}, \tag{1.52}$$

kjer je r' razdalja od izvora do točke na zaslonu, A pa zaradi ohranitve energije konstanta. Integracijska ploskev je lahko poljubna sklenjena ploskev, ki objema točko P. Izberemo tako, ki zajema odprtino na zaslonu, poleg tega pa naredimo še dva približka:

1. Jakost polja E in njen gradient doprineseta k integralu le na odprtini, na preostanku ploskve pa sta njuna prispevka zanemarljivo majhna.

2. Vrednost E in njen gradient sta na odprtini takšna, kot da zaslona ne bi bilo.

[9] Nemški fizik Gustav Kirchhoff, 1824–1887.



Slika 1.4: Integracijska ploskev v Kirchhoffovem integralu zajema odprtino in objema točko P.

Gornja približka sta precej groba, vendar se izkaže, da se kljub temu dobro ujemata z eksperimentalno določeno uklonsko sliko, s čimer upravičimo njuno uporabo.

Kirchhoffov integral za primer točkastega izvora svetlobe se potem zapiše kot integral, pri čemer integriramo zgolj po odprtini

$$E_P = -\frac{ikAe^{-i\omega t}}{4\pi} \int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \left[\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}')\right] dS. \tag{1.53}$$

V literaturi ga pogosto imenujejo Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral.

Naloga 1.7.1 Uporabi Kirchhoffov integral (enačba 1.51) in pokaži, da za primer krožnega vpadnega vala (enačba 1.52) polje v točki P zapišemo s Fresnel-Kirchhoffovim integralom (enačba 1.53). Pri tem privzemi, da je oddaljenost točke P od odprtine $r \gg \lambda$.

Oglejmo si poseben primer, ko leži točkast izvor svetlobe na osi okrogle odprtine. Razdalja r' je potem konstantna in polje v točki P izračunamo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi} \int E_S \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \left[\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) + 1\right] dS, \tag{1.54}$$

pri čemer E_S predstavlja kompleksno amplitudo vpadnega polja v odprtini

$$E_S = A\frac{e^{ikr'}}{r'}. \tag{1.55}$$

Zgornja oblika Fresnel-Kirchhoffovega integrala ni pravzaprav nič drugega kot matematičen zapis Huygensovega načela[10]. Spomnimo se, da Huygensovo načelo pravi, da lahko vsako točko valovne fronte obravnavamo kot izvor novega krogelnega vala. Točno to je zapisano tudi v gornjem integralu. Vpadni val E_S v vsakem od elementov dS odprtine vzbudi krogelno valovanje s kompleksno amplitudo

$$E = A_0\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{1.56}$$

polje v izbrani točki P pa je vsota prispevkov posameznih krogelnih valovanj.

[10] Nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens, 1629–1695.

Za razliko od osnovnega Huygensovega načela, v Fresnel-Kirchhoffovem integralu (enačba 1.53) nastopa še faktor $[\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1]$, ki poskrbi, da ni valovanja v smeri nazaj proti izvoru. Tudi faktor $-i$ manjka v osnovnem Huygensovem načelu, pomeni pa, da je uklonjeno valovanje fazno zakasnjeno za $\pi/2$ glede na osnovno valovanje E_S.

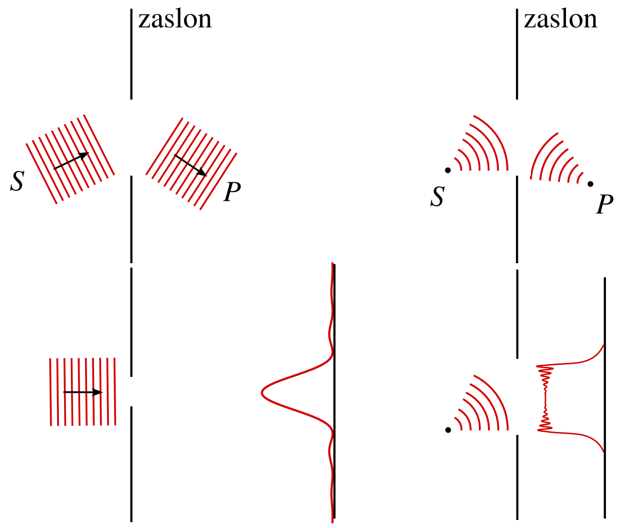
Uporabna razširitev Fresnel-Kirchhoffovega uklona je z uporabo prepustnostne funkcije odprtine T. Z njo v splošnem popišemo amplitudne in fazne spremembe, do katerih lahko pride na raznih odprtinah, lečah, uklonskih mrežicah ... Razširjen uklonski integral zapišemo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi}\int T(r)E_S(r)\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}[\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1]\,dS, \tag{1.57}$$

pri čemer smo upoštevali tudi splošno obliko vpadnega vala $E_S(r)$.

Fraunhoferjev in Fresnelov približek

Izračun Fresnel-Kirchhoffovega integrala je v splošnem zelo zapleten, zato se pogosto poslužujemo dveh približkov: Fraunhoferjevega[11] in Fresnelovega. Fraunhoferjeva uklonska slika velja za daljno polje, kadar lahko vpadni in uklonjeni val zapišemo kot ravna valova. Bolj zapleteno Fresnelovo uklonsko sliko pa moramo uporabiti, kadar obravnavamo primer bližnjega polja in ukrivljene valovne fronte.



Slika 1.5: V Fraunhoferjevem približku valovanji obravnavamo kot ravna valova in dobimo znano uklonsko sliko (levo). Fresnelov približek moramo uporabiti za obravnavno uklona v primeru bližnjega polja (desno).

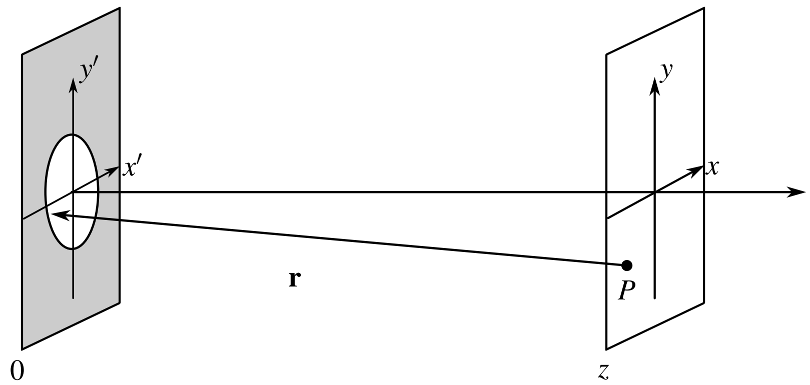
Mejo med daljnim in bližnjim poljem kvalitativno določa Fresnelovo število

$$F = \frac{a^2}{L\lambda}. \tag{1.58}$$

Pri tem je a karakteristična dimenzija odprtine, L tipična oddaljenost od odprtine ter λ valovna dolžina. V grobem velja, da lahko Fraunhoferjev približek uporabimo, kadar je $F < 1$ in je odstopanje faze od ravnega vala znotraj odprtine majhno. Sicer moramo uklon obravnavati v Fresnelovem približku ali celo v polni obliki.

[11] Nemški fizik Joseph von Fraunhofer, 1787–1826.

Zapišimo uklonske integrale za oba približka. Izhajajmo iz Fresnel-Kirchhoffovega integrala za točkast izvor (enačba 1.53) in zapišimo razdaljo r s koordinatama na zaslonu x', y' ter lego točke P s koordinatami x, y, z (slika 1.6). Privzamemo, da je oddaljenost do zaslona bistveno večja od prečnih dimenzij.



Slika 1.6: K izračunu Fraunhoferjevega in Fresnelovega uklona. Zaslon, kjer opazujemo uklonsko sliko, je od odprtine oddaljen za z.

Zapišemo

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \tag{1.59}$$

in razvijemo

$$r \approx z + \frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z}. \tag{1.60}$$

V Fraunhoferjevem približku zadošča uporaba le linearnih členov v gornjem izrazu in za Fraunhoferjev uklonski integral dobimo

$$E_P = \frac{1}{i\lambda z} e^{ik(z+(x^2+y^2)/2z)} \int\int E_S e^{-ik(xx'+yy')/z} dx'dy', \tag{1.61}$$

kar ni nič drugega kot Fouriereva transformacija polja E_S.

V Fresnelovem približku upoštevamo tudi kvadratne člene v razvoju in dobimo

$$E_P = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \int\int E_S e^{-ik((x-x')^2+(y-y')^2)/2z} dx'dy'. \tag{1.62}$$

Naloga 1.7.2 Pokaži, da je v Fraunhoferjevi uklonski sliki uklon na okrogli odprtini s premerom a podan z

$$I_P = I_0 \frac{4J_1(\pi a\rho/\lambda z)}{\pi a\rho/\lambda z}, \tag{1.63}$$

kjer je $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh

Do zdaj smo obravnavali elektromagnetno valovanje v izotropnih snoveh, v katerih je dielektričnost skalar in hitrost širjenja valovanja neodvisna od njegove smeri. V splošnem so snovi anizotropne, dielektričnost je tenzor, hitrost potovanja svetlobe skozi snov pa je odvisna od smeri razširjanja in od polarizacije valovanja.

Gostoto električnega polja v anizotropni snovi zapišemo kot

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \mathbf{E}, \tag{1.64}$$

kjer je $\underline{\varepsilon}$ tenzor drugega reda in ima v splošnem devet komponent. V dielektričnih snoveh, v katerih ne pride do optične aktivnosti ali absorpcije, je tenzor realen in simetričen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$. Tak tenzor lahko vedno diagonaliziramo, torej poiščemo koordinatni sistem, v katerem je diagonalen. V takem koordinatnem sistemu velja

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \mathbf{E} \tag{1.65}$$

in

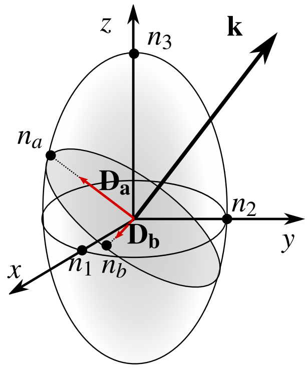
$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 \\ D_2 &= \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 \\ D_3 &= \varepsilon_0 \varepsilon_3 E_3. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Glavne osi sistema določajo smeri, vzdolž katerih sta jakost in gostota električnega polja vzporedni, lastne vrednosti pa ustrezajo trem lomnim količnikom $\varepsilon_i = \sqrt{n_i}$. Snovi, za katere so vse tri vrednosti n_i različne, imenujemo optično dvoosne snovi, medtem ko sta v optično enoosnih snoveh dve lastni vrednosti enaki $n_1 = n_2$. Če so enake vse tri lastne vrednosti, je snov izotropna.

Elipsoid lomnega količnika

Poglejmo, kako se v anizotropnih snoveh širi valovanje v odvisnosti od njegove smeri in polarizacije. Preprost primer je valovanje, ki se širi vzdolž lastne osi z, polarizirano pa je vzdolž lastne osi x. Pri prehodu skozi kristal se polarizacija valovanja ohrani, lomni količnik za tak val pa je n_1. Podobno velja za val, polariziran v smeri y, za katerega je lomni količnik enak n_2. Če se valovanje širi vzdolž lastne osi z, vendar njegova polarizacija ne sovpada z lastnima osema x ali y, nastane po prehodu skozi kristal iz vpadnega linearno polariziranega valovanja v splošnem eliptično valovanje. Lastni komponenti namreč potujeta z različnima hitrostma, zato pride med njima do faznega zamika.

Za poljubno smer širjenja valovanja ter poljubno polarizacijo je račun bolj zapleten in je treba lomne količnike še izračunati. Pri tem si pomagamo z grafično upodobitvijo, s tako imenovanim elipsoidom lomnega količnika oziroma optično indikatriso.



Slika 1.7: Elipsoid lomnega količnika oziroma optična indikatrisa. Glavne osi elipsoida sovpadajo z glavnimi osmi tenzorja ε, polosi elipsoida pa so enake lomnim količnikom n_i. V primeru optično enoosnega kristala je indikatrisa rotacijski elipsoid, v primeru izotropne snovi pa je optična indikatrisa krogla.

Optična indikatrisa je elipsoid, podan z enačbo

$$\frac{x^2}{n_1^2}+\frac{y^2}{n_2^2}+\frac{z^2}{n_3^2}=1. \tag{1.67}$$

Glavne osi elipsoida sovpadajo z glavnimi osmi tenzorja ε, polosi elipsoida pa so n_1, n_2 in n_3. Lomne količnike za val, ki se širi z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$, skozi izhodišče narišemo ravnino, pravokotno na smer valovnega vektorja (slika 1.7). Presečišče ravnine in elipsoida je elipsa, katere glavni osi podata vrednosti lomnih količnikov n_a in n_b za obe lastni polarizaciji, njuni smeri pa predstavljata lastni smeri gostote električnega polja. Ker sta to lastni osi, smer jakosti električnega polja izračunamo z enačbo (1.66).

Optično enoosni kristali

V optično enoosnih kristalih sta dve lastni vrednosti enaki in indikatrisa je rotacijski elipsoid. Po dogovoru izberemo lastne vrednosti tako, da velja $n_1=n_2\neq n_3$. Za valovanje, ki se razširja v smeri z, sta lomna količnika za obe polarizaciji enaka in os z imenujemo optična os. Hitrost valovanja, ki se širi vzdolž optične osi, je torej neodvisna od njegove polarizacije. Navadno vpeljemo tudi nove oznake: $n_1=n_2=n_o=n_\perp$, ki označuje redni (*ordinary*) lomni količnik, $n_3=n_e=n_\|$ pa izredni (*extraordinary*) lomni količnik.

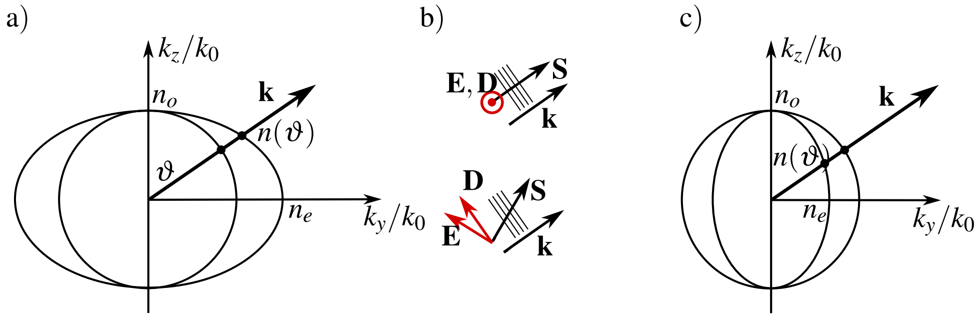
Za lažjo predstavo skiciramo ploskev valovnega vektorja, ki jo zaradi simetrije v tem primeru lahko upodobimo kar ravninsko (slika 1.8). Smer valovnega vektorja določa le kot ϑ med valovnim vektorjem $\mathbf{k}$ in optično osjo z. Dvema lastnima polarizacijama pa pripadata dva različna lomna količnika. Lomni količnik za žarek, ki je polariziran pravokotno na vpadno ravnino, je enak n_o in neodvisen od ϑ, zato narišemo krožnico. Takemu žarku pravimo redni žarek. Žarek, ki je polariziran v vpadni ravnini, je izredni žarek. Pripadajoč lomni količnik je odvisen od kota ϑ in ga izračunamo iz sledeče enačbe elipse s polosema n_o in n_e:

$$\boxed{\frac{1}{n^2(\vartheta)}=\frac{\cos^2\vartheta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{n_e^2}.} \tag{1.68}$$

Opazimo, da se krožnica in elipsa dotikata ravno na osi z. Takrat se valovanje širi vzdolž optične osi in lomna količnika sta za obe polarizaciji enaka n_o.

Snov	n_o	n_e
$CaCO_3$ (kalcit)	1,6557	1,4849
$BaTiO_3$	2,4042	2,3605
$LiNbO_3$	2,2864	2,2022
KH_2PO_4	1,5074	1,4669
tekoči kristal 5CB (25 °C)	1,5319	1,7060
telur ($\lambda = 10$ µm)	4,7969	6,2455

Tabela 1.1: Redni in izredni lomni količnik za nekaj izbranih kristalov. Razen v primeru telurja veljajo vrednosti za svetlobo z valovno dolžino 633 nm.



Slika 1.8: V optično enoosnih kristalih je lomni količnik odvisen od smeri valovnega vektorja in njegove polarizacije. a) primer pozitivno anizotropne snovi ($n_e > n_o$). b) Redni žarek je polariziran pravokotno na vpadno ravnino. Zanj velja, da je $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ in $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$. Izredni žarek je polariziran v vpadni ravnini. Smer širjenja žarka $\mathbf{S}$ ni vzporedna z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$, prav tako valovne fronte niso pravokotne nanjo. c) Primer negativno anizotropne snovi ($n_e < n_o$).

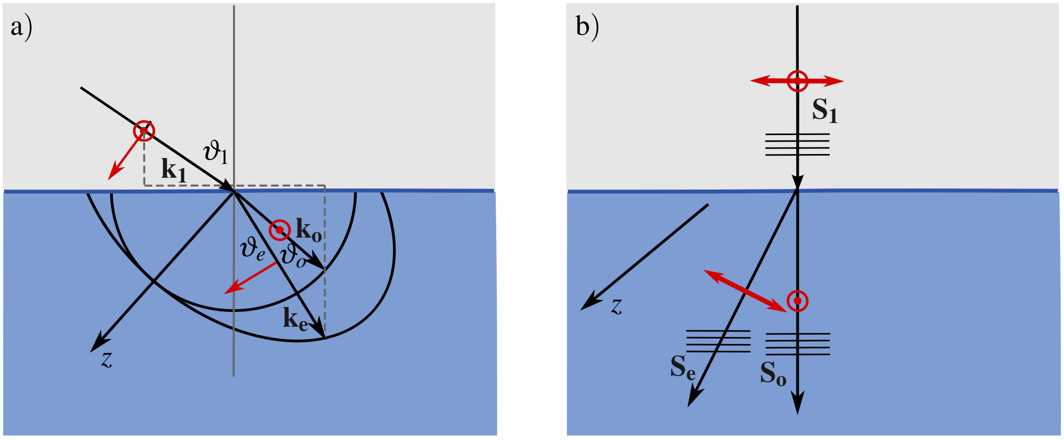
Navadno sta pri ravnem valu vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ vzporedna, prav tako $\mathbf{k}$ in $\mathbf{S}$. Žarek se širi v smeri valovnega vektorja, valovne fronte pa so pravokotne nanj. To velja tudi za redni žarek v anizotropnih snoveh. Izredni žarek pa ima, kot že ime nakazuje, "izredne" lastnosti. Vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ nista vzporedna, zato tudi valovni vektor $\mathbf{k}$ ni vzporeden toku energije oziroma Poyntingovemu vektorju $\mathbf{S}$ (slika 1.8 b). Žarek, ki ga vidimo, tako potuje v smeri, ki ni enaka smeri valovnega vektorja. Smer Poyntingovega vektorja določimo kot normalo na elipso pri kotu ϑ.

Dvojni lom

Ko vpade žarek na anizotropno snov, se lomi. Privzemimo, da je lomni količnik snovi, iz katere valovanje prehaja v anizotropen kristal, enak 1. Vemo, da je hitrost valovanja v snovi – in s tem tudi kot, pod katerim se lomi – odvisna od polarizacije valovanja. V splošnem se v anizotropnih snoveh pojavita dva lomljena žarka z različnima polarizacijama, kar da ime pojavu: dvolomnost (slika 1.9). Da zadostimo ohranitvi faze pri prehodu, moramo popraviti tudi lomni zakon (enačba 1.42).

Za redni val s TE polarizacijo (pravokotno na vpadno ravnino) velja navadni lomni zakon, pri čemer je lomni količnik snovi enak rednemu lomnemu količniku n_o

$$\sin\vartheta_1 = n_o \sin\vartheta_o. \tag{1.69}$$



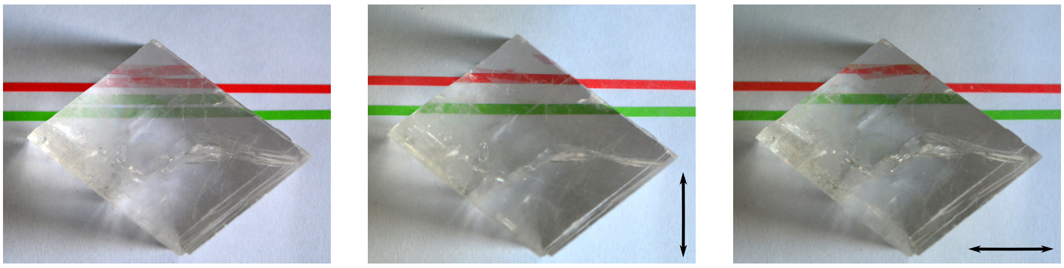
Slika 1.9: Dvojni lom. a) Pri poševnem vpadu na anizotropno snov se valovanje loči na dva različno polarizirana žarka. b) Tudi pri pravokotnem vpadu se žarka ločita, če je optična os pod poljubnim kotom glede na normalo mejne ravnine. Valovni vektorji so v tem primeru kolinearni, Poyntingovi vektorji pa imajo različne smeri.

Za izredni val s TM polarizacijo (električna poljska jakost leži v vpadni ravnini) pa velja

$$\sin\vartheta_1 = n(\vartheta_e)\sin\vartheta_e, \tag{1.70}$$

pri čemer $n(\vartheta_e)$ izračunamo iz enačbe (1.68).

Kadar vpada valovanje pravokotno na izotropno snov, se žarek ne lomi. V dvolomnih snoveh pa lahko tudi pri pravokotnem vpadu pride do razklona žarkov (slika 1.9 b). Kadar je optična os nagnjena glede na vpadnico, sta valovna vektorja obeh prepuščenih žarkov sicer vzporedna valovnemu vektorju vpadnega žarka ($\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_o \parallel \mathbf{k}_e$), razlikujejo pa se smeri Poyntingovih vektorjev ($\mathbf{S}_1 \parallel \mathbf{S}_o \nparallel \mathbf{S}_e$). Ob prehodu skozi plast anizotropne snovi tako nastaneta dva vzporedna, a razmaknjena žarka z medsebojno pravokotnimi polarizacijami. Enoosne kristale, odrezane pod primernim kotom in prave dolžine, zato lahko uporabimo kot polarizacijski delilnik žarkov.



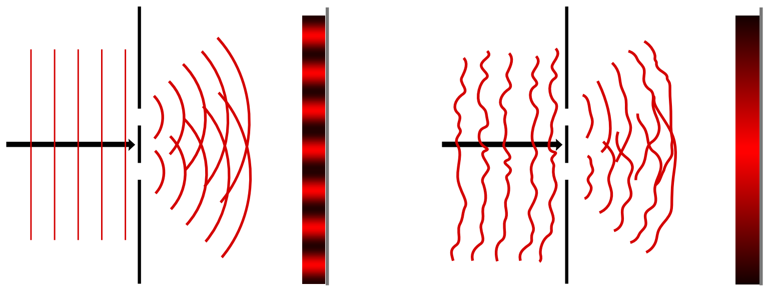
Slika 1.10: Dvojni lom v kristalu kalcita (islandski dvolomec). Z linearnimi polarizatorji pokažemo, da sta lomljena žarka različnih polarizacij.

2. Koherenca

V tem poglavju bomo spoznali koherenco. To je lastnost valovanja, ki je tesno povezana s pojavom interference. Ohlapno pravimo, da je koherentno tisto valovanje, s katerim se posrečijo interferenčni poskusi.

2.1 Youngov poskus

Interferenčnih pojavov ni mogoče opazovati z vsakim svetlobnim izvorom. Da bi to razumeli, si oglejmo interferenco valovanja, ki vpada na dve ozki reži (tako imenovani Youngov poskus[1]). Navadno predpostavimo, da sta obe reži osvetljeni z istim ravnim valom. Delni valovanji, ki izhajata iz rež, imata tako ves čas poskusa enako polarizacijo, enako frekvenco in enako fazno razliko. Zaradi različnih dolžin poti obeh delnih valovanj od reže do dane točke na zaslonu nastane na oddaljenem zaslonu interferenčni vzorec (slika 2.1). Vendar se interferenca pojavi le v primeru, ko je faza valovanja, ki vpada na reži, konstantna. Svetloba s konstantno fazo je koherentna in nastane, na primer, v kvalitetnem laserju. Svetloba iz običajnih svetil ne da interferenčnega vzorca, zato zanjo pravimo, da ni koherentna.



Slika 2.1: Youngov poskus na dveh režah. Le če je vpadno valovanje koherentno (levo), se pojavi na zaslonu interferenčni vzorec. Nekoherentno valovanje s spremenljivo fazo (desno) ne da interferenčnega vzorca.

Svetloba navadnih svetil, na primer plinskih razelektritvenih cevi, je zaradi vrste nastanka kaotične narave. Atomi sevajo neodvisno, zato se faza izsevanega valovanja spreminja. Približno konstantna je le znotraj nekega karakterističnega časa. Če je pri interferenčnem poskusu karakteristični čas spreminjanja faze krajši od zakasnitve med valovanjema, ki nastane zaradi različno dolgih poti, pride na danem mestu zaslona do izmenično konstruktivne in destruktivne interference. Ker je čas spreminjanja praviloma bistveno krajši od časa opazovanja interference, utripanje svetlobe na zaslonu ni vidno. Interferenčni poskus se ne posreči zaradi majhne časovne koherence, karakterističnemu času spreminjanja faze pa rečemo koherenčni čas t_c. Časovno koherenco bomo natančneje obravnavali v razdelku (2.3), zaenkrat povejmo le, da je časovna koherenca vezana na fazno razliko med dvema točkama, ki ležita vzdolž smeri širjenja valovanja.

[1] Angleški znanstvenik Thomas Young, 1773–1829.

Poleg časovne koherence na interferenčno sliko pomembno vpliva tudi prostorska koherenca, ki je posledica končne dimenzije svetila. Svetloba, ki vpada na reži z različnih delov svetila, ima namreč različno fazo zaradi različnih dolžin poti od svetila do rež. Ta faza se prišteje fazni razliki zaradi različno dolgih poti od rež do zaslona, zaradi česar se na zaslonu interferenčne proge nekoliko premaknejo. Če je fazna razlika žarkov iz različnih delov svetila večja od fazne razlike za režami, se celotna interferenčna slika na zaslonu izpovpreči. Interferenca se pri Youngovem poskusu pojavi, kadar sta reži razmaknjeni le toliko, da je povprečna fazna razlika manjša od 2π. Največjemu prečnemu razmiku, ki še da interferenco, rečemo prečna koherenčna razdalja d_c. Prostorska koherenca, ki jo bomo podrobneje spoznali v razdelku (2.5), je torej vezana na fazno razliko med dvema točkama, ki ležita prečno na smer širjenja valovanja.

Poudarimo še enkrat, da je pojem koherence statističen. Če je koherenčni čas t_c dolg v primerjavi s časom opazovanja, se vedno seštevajo amplitude valovanj in pojavi se interferenčna slika. Ta se slučajno spreminja z značilnim časom t_c. Če pa so razlike poti večje od ct_c ali razmik rež večji od d_c, gledamo le povprečno sliko in interferenčne proge izginejo.

2.2 Koherenca navadnih svetil

Obravnavajmo plinsko razelektritveno cev in z ustreznim filtrom izberimo eno samo spektralno črto. Ta črta naj ima osrednjo frekvenco ν_0 in končno frekvenčno širino $\delta\nu$, ki je kombinacija naravne širine in razširitve zaradi trkov med atomi ter Dopplerjevega pojava (glej poglavje 5.8). Privzemimo, da je glavni prispevek k razširitvi spektralne črte zaradi medatomskih trkov, razširitev, povezano z Dopplerjevim pojavom, pa zanemarimo.

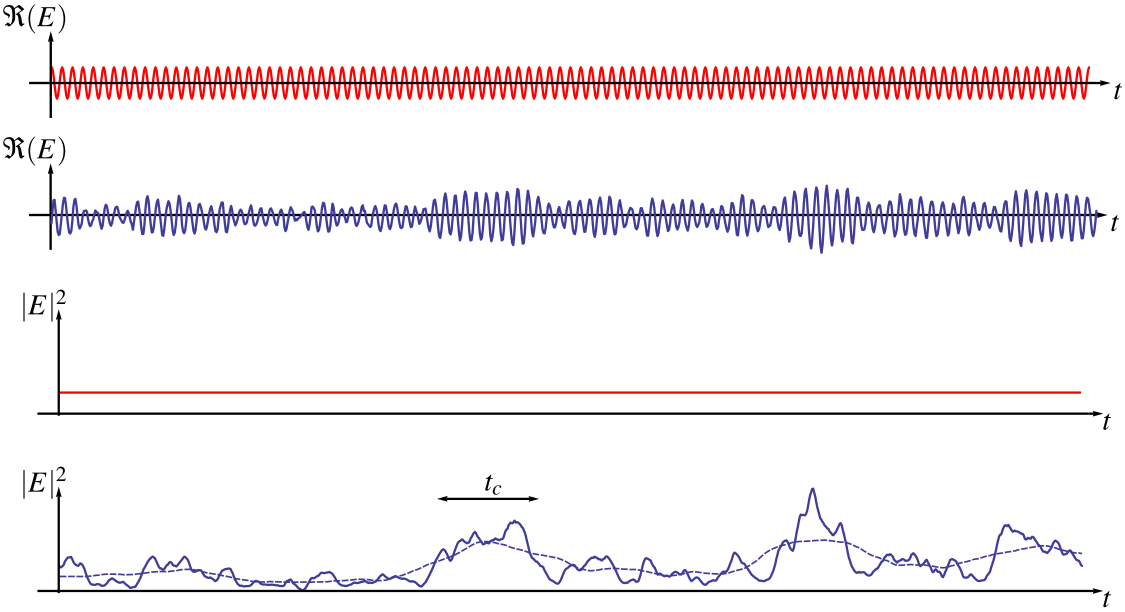
Celotna izsevana svetloba je vsota delnih valov, ki izhajajo iz posameznih atomov in so med seboj neodvisni. Vsak delni val ohranja med trkoma konstantno fazo, to je v časovnem intervalu t_c. Valovni paket dolžine t_c mora tako vsebovati frekvence v pasu $\Delta\omega$, za katerega velja $t_c\Delta\omega \sim 1$. Koherenčni čas je torej kar reda velikosti obratne vrednosti spektralne širine svetlobe. Povsem monokromatsko valovanje bil imelo neskončen koherenčni čas in bi bilo popolno koherentno.

Zapišimo še izsevano polje takega svetila. Jakost električnega polja v izbrani točki prostora je vsota delnih valov, ki izvirajo iz raznih delov izvora. Vsak atom v izvoru, naj jih bo N, seva neodvisno, zato so tudi delna valovanja med seboj neodvisna. Posamična valovanja ohranjajo konstantno fazo v času med dvema trkoma atoma, t_c. Zaradi enostavnosti privzemimo, da so amplitude E_1 in polarizacije izsevanih polj posameznih atomov enake. Električno poljsko jakost E v izbrani točki prostora lahko zapišemo kot vsoto posameznih prispevkov

$$E = E_1 \sum_{n=1}^{N} e^{i\phi_n(t)}. \tag{2.1}$$

kjer se faza polja $\phi_n(t)$, ki ga izseva posamezni atom, naključno spremeni ob trku z drugim atomom. Povprečje vsote polj je nič, povprečni kvadrat skupnega polja, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka, pa je NE_1^2. Zaradi slučajnosti faz je slučajna tudi faza celotnega polja in se gotovo povsem spremeni v času, ko se spremeni faza posameznih prispevkov, to je t_c. S tako svetlobo bomo videli interferenco na režah, če bo razlika poti delnih valovanj manjša od ct_c.

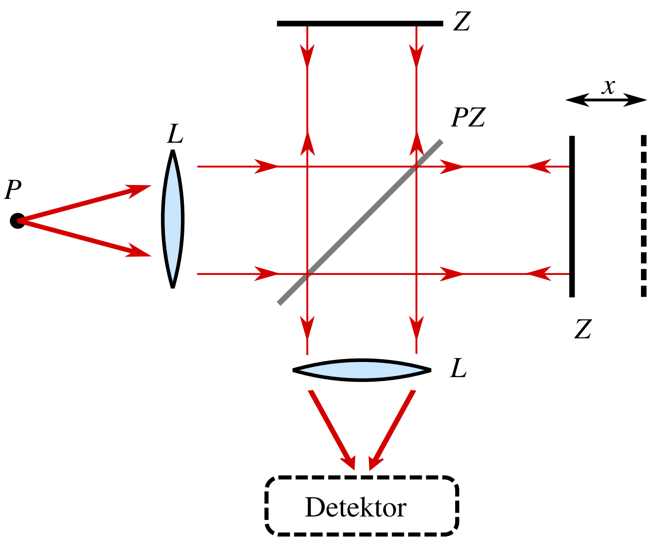
Oglejmo si izračun na primeru. Imejmo $N = 100$ neodvisnih atomov, ki se jim faza naključno spreminja s karakterističnim časom $t_c = 10/\nu$, kjer je ν frekvenca valovanja. Na sliki (2.2) sta prikazana časovna poteka amplitude E (enačba 2.1) in $|E|^2$, ki je sorazmeren z intenziteto svetlobe. Za primerjavo je prikazan tudi ravni val $E = \sqrt{N}E_1e^{-i\omega t}$ s konstantno fazo in njegova intenziteta. Intenziteta ravnega vala je konstantna, medtem ko je povprečna intenziteta svetlobe navadnega svetila približno konstantna le znotraj t_c.



Slika 2.2: Zgoraj: shematski prikaz električne poljske jakosti ravnega vala s konstantno fazo (rdeča črta) in električne poljske jakosti navadnega svetila (modra črta) kot funkcije časa. Faza polja se naključno spreminja s karakterističnim časom t_c. Spodaj: intenziteta ravnega vala (rdeča črta) in intenziteta svetlobe navadnega svetila (modra črta) kot funkciji časa. Modra črtkana črta je povprečna intenziteta $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t+t')E^*(t+t')dt'$ s časom integracije $T = t_c$.

2.3 Časovna koherenca

Časovno koherenco je najpreprosteje obravnavati z Michelsonovim interferometrom[2], ki je prikazan na sliki (2.3).



Slika 2.3: Michelsonov interferometer. Svetlobo iz izvora P usmerimo preko kolimacijske leče (L) na polprepustno zrcalo (PZ), s čimer jo razdelimo na dva snopa. S premikom enega zrcala (Z) en delni žarek zakasnimo. Interferenco opazujemo na detektorju.

[2] Ameriški fizik in nobelovec Albert Abraham Michelson, 1852–1931.

Valovanje iz točke P na polprepustnem zrcalu razdelimo na dva delna snopa, nato enega s premikanjem zrcala zakasnimo za $\tau = 2x/c$. S kolimacijsko lečo dosežemo, da je čim več žarkov, ki izhajajo iz P, vzporednih z osjo interferometra. Dokler je zakasnitev τ manjša od koherenčnega časa t_c, so na detektorju interferenčni vrhovi in doline. Pri zakasnitvah, ki so večje od koherenčnega časa, ni stalne fazne povezave, interferenčna slika se spreminja in v daljših časih izpovpreči. Zapišimo to ugotovitev še matematično.

Svetlobni tok na detektorju je sorazmeren s kvadratom električne poljske jakosti obeh delnih valovanj

$$|E_d(t)|^2 = |E(t) + E(t+\tau)|^2 = |E(t)|^2 + |E(t+\tau)|^2 + 2\Re E(t)E^*(t+\tau). \tag{2.2}$$

Zakasnitev τ je določena s premikom pomičnega zrcala, $\tau = 2x/c$. Navadno opazujemo v času T, ki je dolg v primerjavi s koherenčnim časom, zato povprečimo po času

$$\begin{aligned} \langle |E_d|^2 \rangle &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |E_d(t)|^2\, dt \\ &= 2\langle |E|^2 \rangle + 2\Re\langle E(0)E^*(\tau)\rangle = 2\langle |E|^2 \rangle + 2\Re G(\tau). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Prvi člen je vsota povprečnih svetlobnih tokov obeh delnih snopov. Privzeli smo, da je polje v povprečju stacionarno in je zato povprečje neodvisno od izbire časovnega intervala. Drugi člen opisuje interferenco. Pri tem smo vpeljali časovno avtokorelacijsko funkcijo električnega polja

$$G(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t+\tau)\, dt. \tag{2.4}$$

Za majhne zakasnitve τ je $|G(\tau)| \approx |G(0)|$ in na detektorju zaznamo interferenco. Za zakasnitve τ, ki so precej večje od koherenčnega časa t_c, sta polji $E(0)$ in $E(\tau)$ statistično neodvisni in povprečje produkta je enako produktu povprečij. Ker je $\langle E(t) \rangle = 0$, pri velikih zakasnitvah τ interferenčni člen izgine in svetlobni tok je enak vsoti tokov posameznih delnih snopov.

Priročno je vpeljati normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)}. \tag{2.5}$$

Za povsem koherentno valovanje je $|g(\tau)| = 1$, za povsem nekoherentno valovanje je $|g(\tau)| = 0$, za delno koherentna pa $0 < |g(\tau)| < 1$. Praviloma se vrednost $|g(\tau)|$ z naraščajočim τ zmanjšuje, saj postaja valovanje za velike časovne zamike vedno manj korelirano. Ohlapno povedano je koherenčni čas zakasnitev, pri kateri postane vrednost avtokorelacijske funkcije majhna. Koherenčni čas t_c pa lahko tudi bolj natančno definiramo z normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$t_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2\, d\tau. \tag{2.6}$$

Zakasnitev delnih valov je pogosto posledica različno dolgih optičnih poti, zato namesto koherenčnega časa velikokrat uporabljamo koherenčno dolžino $l_c = ct_c$. Pri tem moramo paziti, da koherenčne dolžine, ki jo izpeljemo iz časovne koherence, ne zamešamo s prečno koherenčno razdaljo, o kateri bomo govorili kasneje.

Naloga 2.3.1 Pokaži, da v navedenih avtokorelacijskih funkcijah $g(\tau)$ spremenljivka t_c ustreza koherenčnemu času, kot je definiran v enačbi (2.6), in izračunaj $|g(t_c)|$ za oba primera.

$$g(\tau) = \begin{cases} \exp\left(i\omega_0\tau - |\tau|/t_c\right), \\ \exp\left(i\omega_0\tau - \pi\tau^2/2t_c^2\right), \end{cases} \tag{2.7}$$

V razdelku (5.8) bomo spoznali, da sta to avtokorelacijski funkciji za svetlobo z Lorentzovim spektrom (razširitev spektralne črte zaradi trkov) in Gaussovim spektrom (Dopplerjeva razširitev).

Poglejmo še nekaj značilnih koherenčnih dolžin. Koherenčna dolžina svetlobe, izsevane iz črnega telesa, je $l_c = ct_c \approx \hbar c/k_B T$ (glej nalogo 2.4.3). Svetloba s Sonca ($T \approx 6000$ K) ima tako koherenčno dolžino zgolj $\sim 0,4$ µm. Svetloba, izsevana iz LED sijalk, ima koherenčno dolžino $\sim 20 - 100$ µm. Če želimo povečati koherenčno dolžino taki svetlobi, jo moramo usmeriti na ustrezne filtre in ji s tem zmanjšati spektralno območje. Ožje spektralno območje ima na primer živosrebrna svetilka, zato je koherenčna dolžina svetlobe za izbrano spektralno črto do okoli 50 cm. Koherenčna dolžina laserjev z ozko spektralno črto je tipično okoli 100 m, v nekaterih vlakenskih laserjih s širino spektralne črte nekaj kHz pa koherenčna dolžina presega 100 km.

2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom

Spoznali smo, da je monokromatski ravni val povsem koherenten in njegov korelacijski čas neskončno velik. Oglejmo si še koherenco elektromagnetnega vala, ki traja čas T in je sestavljen iz več monokromatskih valov. Jakost električnega polja valovanja razvijemo v Fourierevo vrsto

$$E(t) = \sum_n A_n e^{-in\Delta\omega t}, \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{2.8}$$

kjer amplituda A_n označuje delež polja pri frekvenci $\omega = n\Delta\omega$. Čas T, ki označuje čas opazovanja svetlobnega polja, mora biti bistveno daljši od t_c. Pravzaprav bi morali napraviti limito $T \to \infty$, da bi rezultat ne bil odvisen od konkretnega vzorca svetlobnega polja. Izračunamo amplitude A_n

$$A_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\, e^{in\Delta\omega t}\, dt. \tag{2.9}$$

Kvadrat $|A_n|^2$ je sorazmeren gostoti svetlobnega toka pri frekvenci $\omega = n\Delta\omega$. Zdaj lahko vpeljemo spekter, to je intenziteto svetlobnega toka pri frekvencah med ω in $\omega + \Delta\omega$. Spekter $S(\omega)$ torej izračunamo tako, da jakost svetlobnega toka pri ω delimo s frekvenčnim intervalom $\Delta\omega$. Spekter je potem[3]

$$S(\omega) = \frac{|A_n|^2}{\Delta\omega} = \frac{T}{2\pi}|A_n|^2. \tag{2.10}$$

Vstavimo zdaj še amplitudo A_n (enačba 2.9) in dobimo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\int\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t')\, e^{-i\omega(t'-t)}\, dt\, dt' \tag{2.11}$$

$$= \frac{1}{2\pi T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t+\tau)\, dt, \tag{2.12}$$

[3]Gostota svetlobnega toka je $j = \varepsilon\varepsilon_0 c|E|^2/2$ z enotami W/m^2. Zaradi poenostavitve bomo namesto j pogosto pisali intenziteto $I = |E|^2$, konstantne člene pa dodali le, če bomo rabili točno numerično vrednost.

kjer smo uvedli novo spremenljivko $\tau = t' - t$. Integral po t da ravno korelacijsko funkcijo $G(\tau)$. Ker je $T \gg t_c$, je korelacijska funkcija na mejah integracije po τ nič, zato lahko meje raztegnemo do neskončnosti. S tem dobimo iskano zvezo, tako imenovani Wiener-Hinčinov teorem[4]

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega.} \tag{2.13}$$

Spekter svetlobe je torej Fouriereva transformacija avtokorelacijske funkcije svetlobnega polja.

Vpeljemo lahko tudi normirani spekter

$$s(\omega) = \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega} = \frac{S(\omega)}{G(0)}, \tag{2.14}$$

za katerega seveda velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) = 1. \tag{2.15}$$

Sledi

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \iff g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega. \tag{2.16}$$

Iz Wiener-Hinčinovega teorema (enačba 2.13) neposredno sledi, da je koherenca povezana s spektrom in koherenčni čas t_c s spektralno širino svetlobe. Spektralno širino vpeljemo kot

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2\,d\omega} = \frac{1}{2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2\,d\omega}. \tag{2.17}$$

Iz gornje definicije za spektralno širino in definicije za koherenčni čas (enačba 2.6) sledi, da je spektralna širina ne glede na obliko spektra obratno sorazmerna s koherenčnim časom (glej nalogo 2.4.1)

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{t_c}.} \tag{2.18}$$

Naloga 2.4.1 Iz definicij za spektralno širino γ (enačba 2.17) in koherenčni čas t_c (enačba 2.6) pokaži, da je spektralna širina obratno sorazmerna s koherenčnim časom (enačba 2.18) ne glede na obliko spektra. Namig: Uporabi Parsevalov teorem, ki pravi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega, \tag{2.19}$$

kjer je

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \tag{2.20}$$

Fouriereva transformiranka funkcije $f(t)$.

---

[4] Ameriški matematik Norbert Wiener, 1894–1964, in ruski matematik Aleksander Jakovljevič Hinčin, 1894–1959.

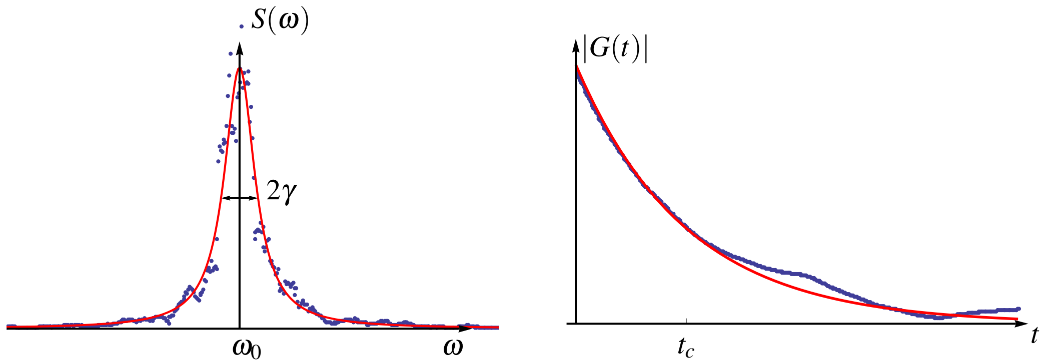
Za zgled vzemimo konkreten primer, ki je predstavljen na sliki (2.2). Na sliki (2.4) sta prikazana pripadajoč spekter in ustrezna avtokorelacijska funkcija. Ker so trki med atomi naključni, je avtokorelacijska funkcija eksponentno pojemajoča

$$G(t) = G_0 e^{-i\omega_0 t} e^{-t/t_c}, \tag{2.21}$$

spekter take svetlobe pa je Lorentzove oblike (glej nalogo 2.4.2)

$$S(\omega) = G_0 \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}, \tag{2.22}$$

kjer je $\gamma = 1/t_c$ spektralna širina in G_0 do konstante natančno intenziteta svetlobe. Točke na grafih predstavljajo spekter in izračunano avtokorelacijsko funkcijo za integracijski čas $T = 100 t_c$. Za primerjavo sta z rdečo krivuljo prikazana tudi pričakovan spekter in avtokorelacijska funkcija (enačba 2.22). Zaradi končnega časa T pri izračunu povprečja se izmerjeni spekter nekoliko razlikuje od pričakovane vrednosti.



Slika 2.4: Spekter in avtokorelacijska funkcija valovanja s slike (2.2)

Naloga 2.4.2 Imejmo dve vrsti svetlobe. Prva naj ima avtokorelacijsko funkcijo, ki je eksponentno pojemajoča, druga pa ima avtokorelacijsko funkcijo Gaussove oblike (enačbi 2.7). Pokaži, da sta njuna spektra oblike

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \quad \text{in} \quad s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\gamma} \exp\Big(-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\pi\gamma^2}\Big), \tag{2.23}$$

kjer je $\gamma = 1/t_c$ spektralna širina.

Spektralne črte atomov so pogosto Lorentzove oblike, kar je posledica eksponentnega razpada stanj (naravna širina). Dodatno se spektralne črte razširijo zaradi trkov med atomi, vendar tudi to vodi do Lorentzove oblike spektra. V plinih pa je pogosto prevladujoča razširitev črt zaradi Dopplerjevega pojava (glej razdelek 5.8). Spekter Dopplerjevo razširjene svetlobe je, kot bomo videli v nadaljevanju, Gaussove oblike. V tem primeru iz enačbe (2.13) sledi, da je tudi avtokorelacijska funkcija Gaussove oblike.

Naloga 2.4.3 Numerično pokaži, da je koherenčni čas svetlobe, ki jo oddaja črno telo s temperaturo T, približno enak $t_c \approx \hbar/k_B T$. Normaliziran spekter sevanja črnega telesa zapišemo kot Planckov spekter

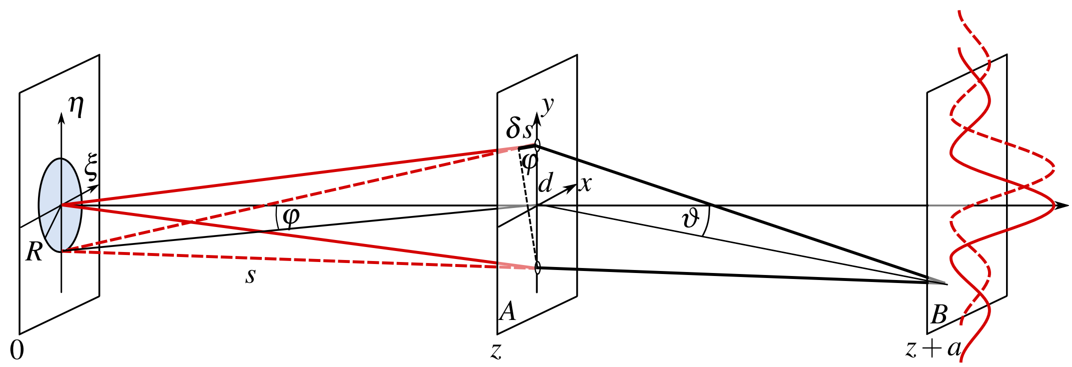
$$s(\omega) = \frac{15}{\pi^4} \frac{\hbar^4 \omega^3}{(kT)^4} / \left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right) \quad \text{za } \omega > 0, \text{ sicer } s(\omega) = 0. \tag{2.24}$$

Fouriereva spektroskopija

V prejšnjem razdelku smo videli, da časovno avtokorelacijsko funkcijo merimo z Michelsonovim interferometrom. Dobljena povezava med avtokorelacijo in spektrom je osnova za Fourierevo spektroskopijo, ki ima nekatere pomembne prednosti pred drugimi metodami in se danes precej uporablja, posebej v infrardečem področju.

2.5 Prostorska koherenca

Vrnimo se k Youngovem poskusu in obravnavi interference na dveh ozkih režah. Osvetljujmo zdaj reži s svetilom končnih razsežnosti. Svetilo naj sveti skoraj enobarvno svetlobo in naj bo na simetrali med režama, kot kaže slika (2.5).



Slika 2.5: Shema interferenčnega eksperimenta z razsežnim svetilom. Svetilo velikosti R postavimo v izhodišče koordinatnega sistema, na zaslonu B pa opazujemo sliko, ki nastane zaradi interference na dveh režah v ravnini A. Zaradi končne dimenzije svetila so interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka (označena s prekinjeno črto), premaknjene glede na proge centralnih žarkov (označena s polno črto). Če je razlika v poteh žarkov reda velikosti valovne dolžine λ, se celotna interferenčna slika na zaslonu B izpovpreči.

Žarka, ki izhajata iz sredine svetila (polna črta), opravita do rež v ravnini A enako dolgo pot in povzročita na zaslonu B interferenčne proge. Žarka, ki izhajata iz roba izvora (prekinjena črta), imata do rež različno dolgo pot, zato nastane med njima fazna razlika že do ravnine A, ki se prišteje fazni razliki do ravnine B. Interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, so premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Ker so žarki z roba pri našem svetilu statistično neodvisni od žarkov iz sredine, z njimi ne interferirajo. Celoten interferenčni vzorec je zato kar vsota interferenčnih vzorcev žarkov iz različnih delov svetila. Če je razlika poti za žarke z roba reda velikosti valovne dolžine λ, se celotna interferenčna slika na zaslonu B izpovpreči.

S slike razberemo, da velja za razdaljo med režama d, pri kateri interferenčne proge izginejo, približno

$$\delta s = d \sin \varphi \approx d \frac{R}{z} \sim \lambda \ \Rightarrow \ d_c \sim \frac{z\lambda}{R}, \tag{2.25}$$

kjer d_c imenujmo prečna koherenčna razdalja. Pogosto je v uporabi tudi pojem koherenčna ploskev, to je območje, v katerem je fazna razlika v povprečju konstantna. Velikost te ploskve je približno d_c^2. V območju koherenčne ploskve so tudi valovne fronte približno gladke.

Zapišimo gornje ugotovitve nekoliko bolj natančno. Na zaslonu B izmerimo gostoto svetlobnega toka, ki je sorazmerna povprečju kvadrata električne poljske jakosti valovanj, ki izhajata iz obeh odprtin

$$\begin{aligned} \langle |E_d|^2 \rangle &= \langle |K_1 E_1 + K_2 E_2|^2 \rangle \\ &= |K_1|^2 \langle |E_1|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |E_2|^2 \rangle + 2\Re K_1 K_2^* \langle E_1(0) E_2^*(\tau) \rangle. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Pri tem je je $\tau = d \sin \vartheta / c$ zakasnitev valovanja iz druge odprtine glede na valovanje iz prve. Faktorja K_1 in K_2 sta določena z uklonom na posameznih odprtinah. Interferenčna slika je vsebovana v podobnem členu kot pri Michelsonovem interferometru, le da nastopa v tem primeru namesto avtokorelacijske funkcije navzkrižna korelacijska funkcija polj E_1 in E_2 iz obeh odprtin.

Kako je interferenčni člen povezan z lastnostmi svetila, brez težav doženemo v izbranem primeru skoraj enobarvne svetlobe z osrednjo frekvenco ω. Tedaj lahko za zakasnitve τ, ki so krajše od koherenčnega časa, zapišemo

$$E_2(\tau) = E_2(0)\, e^{-i\omega\tau} \tag{2.27}$$

in

$$\langle E_1(0) E_2^*(\tau) \rangle = \langle E_1(0) E_2^*(0) \rangle e^{i\omega\tau} = J(P_1, P_2)\, e^{i\omega\tau}. \tag{2.28}$$

Zadnji člen $\Re e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) = \cos(kd \sin \vartheta)$ da interferenčne proge za koherentno osvetlitev zaslona A, povprečje produkta polj v odprtinah ob istem času $J(P_1, P_2) = \langle E(P_1, 0) E^*(P_2, 0) \rangle$ pa meri stopnjo prečne koherence med obema odprtinama. Od velikosti tega člena je odvisen kontrast interferenčnih prog. Izračunajmo ga.

Polje v posamezni odprtini je vsota prispevkov iz celega izvora.

$$E(P_j) = -\frac{i}{\lambda} \int E(\xi, \eta) \frac{e^{iks_j}}{s_j}\, d\xi\, d\eta. \tag{2.29}$$

Pri tem je s_j razdalja med točko (ξ, η) na izvoru in točko $P_j(x_j, y_j)$ na reži v ravnini A (glej sliko 2.5). Faktor pred integralom $-i/\lambda$ smo dobili iz uklonske teorije (enačba 1.53). Tako je

$$J(P_1, P_2) = \frac{1}{\lambda^2} \int \int \langle E(\xi, \eta) E^*(\xi', \eta') \rangle \frac{e^{ik(s_1 - s_2')}}{s_1 s_2'}\, d\xi\, d\eta\, d\xi' d\eta'. \tag{2.30}$$

V našem svetilu sevajo atomi neodvisno. Valovanji iz dveh točk svetila, ki sta razmaknjeni za več kot λ, sta tako neodvisni in povprečje njunega produkta je enako nič. Tako približno velja

$$\langle E(\xi, \eta) E^*(\xi', \eta') \rangle = \frac{\lambda^2}{\pi} \cdot \delta(\xi - \xi', \eta - \eta') \langle |E(\xi, \eta)|^2 \rangle. \tag{2.31}$$

Faktor λ^2/π poskrbi za ustrezno normalizacijo. Naj bo oddaljenost svetila od zaslona A mnogo večja od dimenzije svetila ($z \gg R$), tako da lahko imenovalec pod integralom v izrazu (2.30) nadomestimo z z^2 in postavimo pred integral. Dobimo

$$J(P_1,P_2) = \frac{1}{\pi z^2}\int \langle|E(\xi,\eta)|^2\rangle e^{ik(s_1-s_2)}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.32}$$

Dobljeni izraz lahko še nekoliko poenostavimo, če razvijemo s_1 in s_2 do drugega reda

$$s_j = \sqrt{z^2+(x_j-\xi)^2+(y_j-\eta)^2} \approx z + \frac{(x_j-\xi)^2+(y_j-\eta)^2}{2z}, \tag{2.33}$$

kjer sta (x_j,y_j) koordinati točke P_j. Pišimo še $\langle|E(\xi,\eta)|^2\rangle = I(\xi,\eta)$, ki je do konstante natančno enak intenziteti valovanja, ter $x_2-x_1=\Delta x$ in $y_2-y_1=\Delta y$. S tem dobimo znani rezultat, tako imenovani van Cittert-Zernikov teorem[5]

$$\boxed{J(\Delta x,\Delta y) = \frac{e^{-i\phi}}{\pi z^2}\int I(\xi,\eta)e^{ik\frac{\Delta x\xi+\Delta y\eta}{z}}\,d\xi\,d\eta.} \tag{2.34}$$

Faza

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda z}[(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)] \tag{2.35}$$

meri skupni premik interferenčnih prog, do katerega pride, kadar svetilo ni na isti osi kot odprtini v zaslonu. Kadar ležijo svetilo in odprtini v zaslonu A simetrično na isti osi, je faza ϕ enaka nič.

Smiselno je vpeljati še normalizirano prečno prostorsko korelacijsko funkcijo

$$j(\Delta x,\Delta y) = \frac{J(\Delta x,\Delta y)}{J(0,0)} = \frac{e^{-i\phi}\int I(\xi,\eta)\exp\left[ik(\Delta x\xi+\Delta y\eta)/z\right]d\xi\,d\eta}{\int I(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}. \tag{2.36}$$

Dobljeni rezultat si je vredno nekoliko ogledati. Prečno prostorsko korelacijsko funkcijo $J(P_1,P_2)$, ki določa kontrast interferenčnih prog, smo izrazili kot 2-D Fourierevo transformacijo intenzitete svetlobe na samem svetilu (enačba 2.34). Ob tem se spomnimo, da velja podobna zveza med električno poljsko jakostjo v osvetljeni odprtini in njeno Fraunhoferjevo uklonsko sliko (enačba 1.61), pri čemer so količine, ki nastopajo v obeh zvezah, povsem različne. Različna je tudi veljavnost obeh: medtem ko je Fraunhoferjeva uklonska formula veljavna le v veliki oddaljenosti, za bližje odprtine pa je treba uporabiti Fresnelov izraz (enačba 1.62), je rezultat za $J(P_1,P_2)$ veljaven v obeh območjih.

Ker je velikost svetila končna, $J(P_1,P_2)$ pri dovolj veliki razdalji med točkama P_1 in P_2 gotovo pade na nič. Največja razdalja, do katere je $J(P_1,P_2)$ še različna od nič, je ravno prečna koherenčna razdalja d_c, ustrezna ploskev pa je koherenčna ploskev S_c. Iz izraza za koherenčno razdaljo (enačba 2.25) jo lahko ocenimo

$$S_c \sim \frac{(\lambda z)^2}{S_0} \sim \frac{\lambda^2}{\Omega_0}, \tag{2.37}$$

kjer je S_0 površina svetila, Ω_0 pa prostorski kot, pod katerim je videti svetilo v ravnini A.

[5]Nizozemski fizik Pieter Hendrik van Cittert, 1889–1959, in nizozemski fizik in nobelovec Frits Zernike, 1888–1966.

Oglejmo si primer. Naj bo svetilo v obliki kroga s polmerom R, obe odprtini v zaslonu naj imata koordinati y enaki nič, razmik med režama v smeri x pa naj bo d. Za prečno korelacijsko funkcijo dobimo iz enačbe (2.34)

$$J(0,\Delta y) = 2\frac{R^2 I_0}{z^2}\,\frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z}\,, \tag{2.38}$$

kjer je $J_1(x)$ Besslova funkcija. V ničlah Besslove funkcije pade prečna korelacijska funkcija J na nič in interferenčnega vzorca ne vidimo. Za prečno koherenčno razdaljo je zato smiselno vzeti ravno prvo ničlo, to je pri

$$d_c \approx 3,83\frac{z}{kR} = 0,61\frac{\lambda z}{R}. \tag{2.39}$$

Doslej smo obravnavali le valovanje v središču interferenčne slike na zaslonu B, to je pri tako majhnih kotih ϑ, da je zakasnitev manjša od koherenčnega časa. Pri večjih kotih moramo upoštevati še vpliv končnega koherenčnega časa, zaradi česar se kontrast interferenčnih prog še dodatno zmanjšuje. Interferenčna slika je tako produkt časovnega in prostorskega dela.

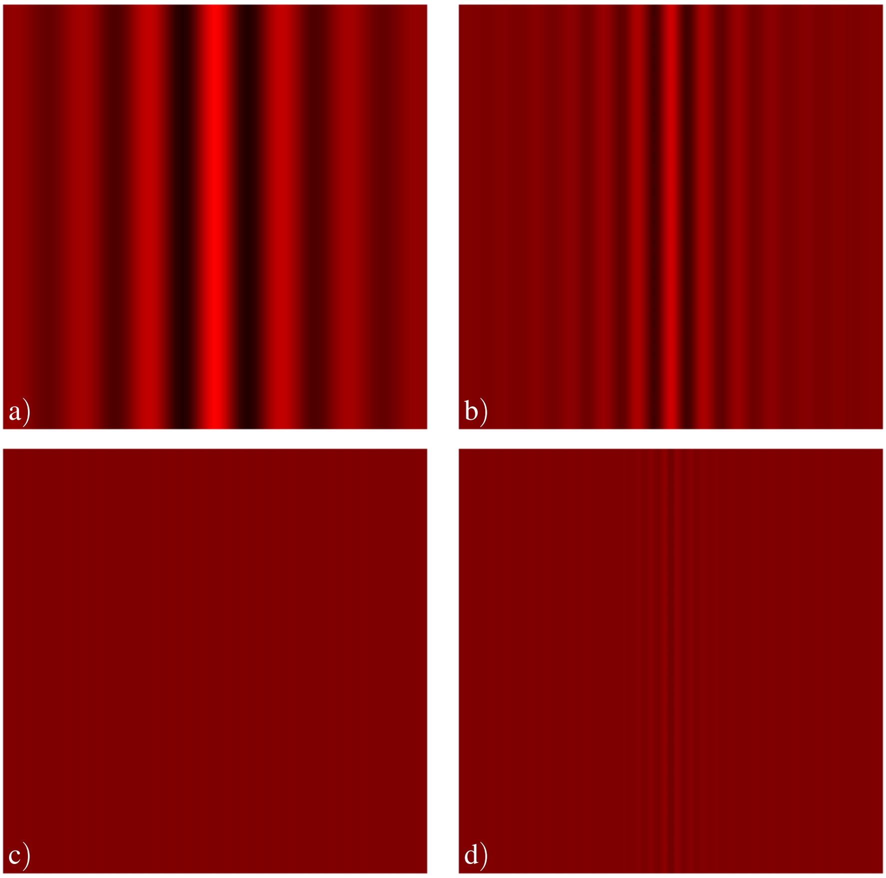
V primeru dveh zelo tankih rež z razmikom d nastanejo na zaslonu B uklonski vrhovi. Za nekaj različnih razmikov med odprtinama d je intenziteta svetlobe na zaslonu prikazana na sliki (2.6). Če je $d \ll \lambda z/R$ (slika a), je modulacija interferenčnih prog v sredini popolna in se zaradi končnega koherenčnega časa zmanjšuje le pri večjih kotih ϑ. Pri nekaj večjem razmiku (slika b) tudi v sredini kontrast ni več popoln. Obenem se interferenčne proge zgostijo. Kadar je $d \approx 3,83\,z/kR$, dosežemo prvo ničlo Besslove funkcije $J_1(x)$ in interferenčni vzorec prvič izgine (slika c). Takrat je razdalja med režama ravno enaka koherenčni razdalji valovanja. Pri še večjih razmikih (slika d) je Besslova funkcija negativna in ponovno se pojavijo interferenčne proge, vendar so slabše izražene in z nasprotno fazo, kar nam da v sredini temno progo.

★ Merjenje prečne koherenčne razdalje svetlobe zvezd je osnova za Michelsonovo metodo določanja zvezdnih premerov. Svetlobo izbrane zvezde zberejo v teleskop preko dveh manjših parov zrcal, kjer sta zunanji zrcali na pomičnih rokah, tako da jih je mogoče razmikati. Glavno zrcalo teleskopa zbere svetlobna snopa v goriščni ravnini, kjer nastanejo interferenčne proge, če le pomični zrcali nista preveč razmaknjeni. Iz razmika, pri katerem interferenčne proge izginejo, je mogoče določiti premere bližnjih svetlih zvezd. Za zvezdo s polmerom 10^6 km v razdalji 5 svetlobnih let je prečna koherenčna razdalja za zeleno svetlobo okoli 15 m, kar je z Michelsonovim zvezdnim interferometrom mogoče izmeriti. Pri zvezdah, ki so dlje od nekaj deset svetlobnih let, metoda odpove.

Naloga 2.5.1 Svetloba s frekvenco ω in koherentnim časom t_c izhaja iz svetila s polmerom R in vpada na zaslon, ki je z oddaljen od svetila. V zaslonu sta dve zelo ozki reži na razmiku d. Pokaži, da je uklonska slika za zaslonom enaka

$$I/I_0 = (1 + 2\,\frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z}\cos(\omega\tau)e^{-\tau/t_c}), \tag{2.40}$$

kjer je $\tau = d\sin\vartheta/c$ zakasnitev žarkov iz rež na zaslonu.



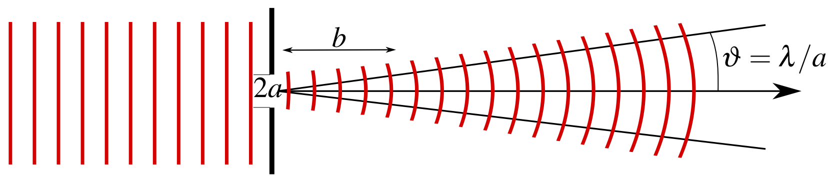
Slika 2.6: Interferenčna slika na zaslonu B za različne vrednosti razmikov med odprtinama: a) $d = z/kR$, b) $d = 2z/kR$, c) $d = 3,832z/kR$ in d) $d = 5,136z/kR$. Z večanjem razdalje med režama se proge zgostijo in kontrast se zmanjša. Koherenčni čas svetlobe je $t_c = 10/\omega$, kar še dodatno zmanjšuje modulacijo interferenčnih prog. Pri $d = 3,832z/kR$ dosežemo prvo ničlo Besslove funkcije in interferenčni vzorec popolnoma izgine. Nato se interferenčne proge zopet pojavijo, vendar z manjšim kontrastom in nasprotno fazo.

3. Koherentni snopi svetlobe

V tem poglavju bomo zapisali obosni približek valovne enačbe in spoznali njeno osnovno rešitev: Gaussov snop. Obravnavali bomo snope osnovnega in višjega reda ter se naučili računati prehode Gaussovih snopov prek optičnih elementov.

3.1 Omejen snop svetlobe

Pri obravnavi elektromagnetnega valovanja pogosto uporabljamo približek ravnih valov. Ti so v smeri pravokotno na smer širjenja neomejeni in so zato lahko le idealizacija. Čim raven val usmerimo skozi odprtino v zaslonu, nastane omejen snop svetlobe. V snopu svetlobe valovna čela niso ravna in meje snopa niso vzporedne, ampak se snop zaradi uklona širi (slika 3.1).



Slika 3.1: Omejen snop nastane ob prehodu ravnega vala skozi končno odprtino.

V veliki oddaljenosti od zaslona lahko za izračun polja uporabimo Fraunhoferjevo uklonsko teorijo (glej poglavje 1.7). Vendar za oceno kota širjenja podrobnega računa niti ne potrebujemo. Velja približno

$$\vartheta \sim \frac{\lambda}{a}, \tag{3.1}$$

kjer je a polmer odprtine v zaslonu. Opis polja v bližini zaslona je zahtevnejši, saj je treba uporabiti Fresnelov približek. S slike (3.1) ocenimo, da velja

$$\frac{a}{b} \sim \vartheta \sim \frac{\lambda}{a} \qquad \text{in tako} \qquad b \sim \frac{a^2}{\lambda}. \tag{3.2}$$

Včasih taki približni oceni zadoščata. Bolj kvantitativen opis omejenih snopov bi lahko dobili s Fraunhoferjevo in Fresnelovo uklonsko teorijo, kar pa ni najudobnejša pot. Lotimo se naloge raje preko približka obosne valovne enačbe.

Naloga 3.1.1 Pokaži, da je Fraunhoferjeva uklonska slika reže, katere prepustnost se v radialni smeri spreminja kot Gaussova funkcija $T(\xi,\eta) = e^{-(\xi^2+\eta^2)/w_0^2}$, podana z Gaussovo funkcijo oblike $E(x,y,z) \propto e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)}$ in določi odvisnost $w(z)$. Izračunaj še uklonsko sliko v bližnjem polju po Fresnelovi uklonski teoriji.

3.2 Obosna valovna enačba

Pričnimo s časovno neodvisno valovno enačbo za monokromatsko valovanje s frekvenco ω, to je Helmholtzevo enačbo (enačba 1.23)

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \tag{3.3}$$

kjer je $k = n\omega/c_0$ valovno število in n lomni količnik sredstva, po katerem se valovanje širi. Zaradi enostavnosti obravnavajmo le eno polarizacijo, tako da E pišemo kot skalar. Iščemo rešitev za omejen snop, ki se širi približno vzdolž osi z. Zapišimo jo v obliki

$$E = E_0 \psi(\mathbf{r}, z) e^{ikz}, \tag{3.4}$$

kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor v ravnini xy. Glavni del odvisnosti od koordinate z smo zapisali v faktorju e^{ikz}, tako da lahko privzamemo, da se ψ v smeri z le počasi spreminja. Vstavimo gornji nastavek v Helmholtzevo enačbo (enačba 3.3) in pri tem zanemarimo druge odvode po z, saj je zaradi počasnega spreminjanja $\partial^2\psi/\partial z^2$ majhen v primerjavi s $k\partial\psi/\partial z$ in $k^2\psi$. Zaenkrat obravnavajmo le radialno simetrične rešitve. Dobimo obosno ali paraksialno valovno enačbo

$$\boxed{\nabla_\perp^2 \psi = -2ik\frac{\partial \psi}{\partial z}.} \tag{3.5}$$

★ Opazimo, da je obosna valovna enačba enaka Schrödingerjevi enačbi za prost delec v dveh dimenzijah, v kateri ima koordinata z vlogo časa. Omejenemu snopu v kvantni mehaniki ustreza lokaliziran delec – valovni paket. Ta se s časom širi, kar v optiki ustreza pojavu uklona.

Zapišimo nastavek za ravni val v obliki

$$\psi = e^{ik_1x + ik_2y} e^{-i\beta z}. \tag{3.6}$$

Da bo gornji nastavek rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5), mora veljati

$$\beta = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \tag{3.7}$$

Ko vstavimo nastavek za ψ v izraz za polje E (enačba 3.4), dobimo ravni val, za katerega velja

$$k_3 = k - \beta = k - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}, \tag{3.8}$$

pri čemer je k_3 vzdolžna in k_1 ter k_2 prečni komponenti valovnega vektorja, k pa valovno število. Za ravni val, ki je rešitev valovne enačbe (enačba 3.3) in ne obosnega približka, velja

$$k_3 = \sqrt{k^2 - (k_1^2 + k_2^2)}. \tag{3.9}$$

Očitno dobimo enačbo (3.8) iz enačbe (3.9) z razvojem za majhne vrednosti k_1 in k_2. To pove, da je približek obosne enačbe dober, kadar je razmerje prečne in vzdolžne komponente valovnega vektorja majhno. Takrat je majhen tudi kot širjenja snopa in člene, višje od kvadratnih, lahko zanemarimo. To pa je tudi območje veljavnosti Fresnelove uklonske teorije.

★ **Fouriereva optika**

Časovno odvisnost poljubnega začetnega stanja v kvantni mehaniki navadno izračunamo tako, da v nekem začetnem trenutku paket razvijemo po lastnih stanjih energije – ravnih valovih. Rešitev v poljubnem kasnejšem trenutku je potem dana v obliki Fourierevega integrala. Ta pot je zelo uporabna tudi v optiki in je osnova sklopa računskih metod, znanih pod imenom Fouriereva optika. V našem primeru z njo brez težav pridemo nazaj do Fresnelove uklonske formule.

3.3 Osnovni Gaussov snop

Naša naloga je poiskati rešitve obosne enačbe, ki popišejo omejene snope. Iz kvantne mehanike vemo, da je najbolj lokaliziran in se najpočasneje širi valovni paket Gaussove oblike. Zato poskusimo najti rešitev obosne enačbe (3.5) z nastavkom

$$\psi(r,z) = e^{i\frac{kr^2}{2q(z)}}\, e^{-i\phi(z)}, \tag{3.10}$$

kjer funkcija $q(z)$ opisuje širjenje snopa v prečni smeri, $\phi(z)$ pa opisuje počasno spreminjanje faze snopa vzdolž osi z. Vstavimo nastavek (enačba 3.10) v obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Zaradi simetričnosti lahko računamo v cilindričnih koordinatah in zapišemo

$$\nabla_\perp^2 \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2}\right)\psi \tag{3.11}$$

in

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(-\frac{ikr^2}{2q^2} q(z)' - i\phi'\right)\psi. \tag{3.12}$$

Tako iz obosnega približka (enačba 3.5) dobimo

$$\frac{2ik}{q} - \frac{k^2r^2}{q^2} = ik\left(\frac{ikr^2}{q^2} q(z)' + 2i\phi'\right). \tag{3.13}$$

To velja pri vsakem r, zato so koeficienti pri r^2 in pri drugih členih posebej enaki na obeh straneh enačbe. Sledi

$$q(z)' = 1 \qquad \text{in} \qquad \phi' = -\frac{i}{q}. \tag{3.14}$$

Z integracijo dobimo najprej

$$q = z - iz_0, \tag{3.15}$$

kjer smo z $-iz_0$ označili integracijsko konstanto. Integriramo še enačbo za fazo

$$\phi = \int_0^z -\frac{idz}{z - iz_0} = -i\ln(1 + i\frac{z}{z_0}). \tag{3.16}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \psi &= \exp\left[i\frac{kr^2}{2(z-iz_0)}\right] \exp\left[-\ln(1+i\frac{z}{z_0})\right] = \\ &= \frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}} \exp\left[-\frac{kr^2 z_0}{2(z_0^2+z^2)} + \frac{ikr^2 z}{2(z_0^2+z^2)}\right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Najprej podrobneje poglejmo realni del eksponenta. Ta opisuje širjenje snopa in njegov polmer, ki je funkcija koordinate z, zapišemo kot

$$w^2 = \frac{2z_0}{k}\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]. \tag{3.18}$$

V izhodišču pri $z = 0$ je snop najožji in pravimo, da je tam grlo snopa. Polmer snopa v grlu označimo z w_0 in zapišemo hiperbolično odvisnost w od z

$$\boxed{w^2 = w_0^2\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right].} \tag{3.19}$$

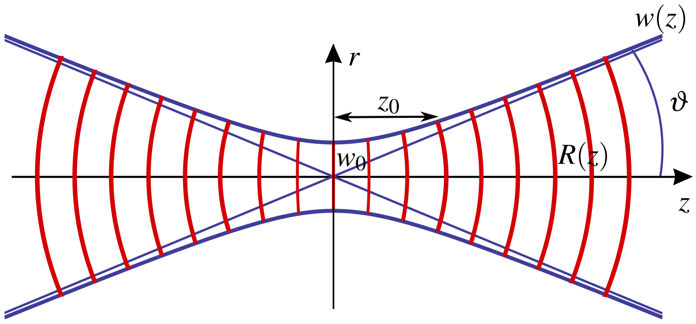
Pri tem velja

$$w_0^2 = \frac{2z_0}{k} \tag{3.20}$$

oziroma

$$\boxed{z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}.} \tag{3.21}$$

Dolžina z_0 je razdalja, pri kateri preide snop v asimptotično enakomerno širjenje in določa dolžino grla. Celotna dolžina grla je $2z_0$, območju grla pa pravimo tudi območje bližnjega polja ali Rayleighovo območje in dolžini z_0 Rayleighova dolžina[1]. Pri z_0 tudi preidemo v območje veljavnosti Fraunhoferjevega uklonskega približka.



Slika 3.2: Gaussov snop s karakterističnimi parametri

Zapišimo še kot divergence snopa v asimptotičnem območju. Polovični kot širjenja je

$$\vartheta = \lim_{z\to\infty} \frac{dw}{dz} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.22}$$

Celotna divergenca snopa pa

$$\boxed{\theta = 2\frac{w_0}{z_0} = \frac{2\lambda}{\pi w_0}.} \tag{3.23}$$

Izraza za območje bližnjega polja (enačba 3.21) in divergenco (enačba 3.22) sta v skladu z ocenami, ki smo jih napravili v začetku poglavja (enačbi 3.1 in 3.2). Faktor $1/\pi$ je značilen za Gaussov snop, ki ima od vseh mogočih oblik najmanjšo divergenco.

Za določanje kakovosti dejanskega laserskega snopa in njegovega odstopanja od idealnega snopa se pogosto vpelje faktor M^2

$$\theta = M^2 \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.24}$$

Dobri laserji dosegajo vrednost $M^2 \approx 1$, pri močnejših trdninskih ali polprevodniških laserjih pa je lahko $M^2 \sim 100$ ali več. V splošnem velja, da M^2 narašča z močjo laserja in snop močnih laserjev navadno znatno odstopa od idealnega Gaussovega snopa.

[1] Angleški fizik in nobelovec John William Strutt, 3. baron Rayleighški, 1842–1919.

Vrnimo se k imaginarnemu delu eksponenta v enačbi (3.17). Vpeljimo količino

$$R = z\left[1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right], \tag{3.25}$$

ki meri krivinski radij valovnih front snopa na razdalji z. To najlažje uvidimo, če krogelni val razvijemo po majhnih odmikih r od osi z

$$\frac{1}{R}e^{ikR} = \frac{1}{R}e^{ik\sqrt{z^2+r^2}} \approx \frac{1}{R}e^{ik(z+\frac{r^2}{2R})}. \tag{3.26}$$

Upoštevali smo, da je na osi $z = R$.

Naloga 3.3.1 Pokaži, da je največja ukrivljenost valovnih front snopa (in s tem najmanjši R) ravno pri $z = \pm z_0$. Izračunaj še ukrivljenost front v grlu in v veliki oddaljenosti od grla.

Ostane nam še faktor pred eksponentom v izrazu (3.17). Ta faktor meri zmanjševanje amplitude snopa in s tem poskrbi za ohranitev energijskega toka ob širjenju žarka, poleg tega pa da še dodatno spremembo faze. Zapišimo ga v obliki

$$\frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{z}{z_0})^2}}e^{-i\eta(z)} = \frac{w_0}{w}e^{-i\eta(z)}, \tag{3.27}$$

pri čemer je

$$\eta(z) = \arctan(\frac{z}{z_0}). \tag{3.28}$$

Dodatna faza η, imenujemo jo tudi Gouyeva faza[2] je posledica povečane fazne hitrosti valovanja, kadar je omejeno v prečni smeri. Podoben pojav srečamo tudi pri valovanju, ki je omejeno v valovode.

S tem lahko končno zapišemo izraz za električno poljsko jakost osnovnega Gaussovega snopa[3]

$$E = E_0\,\frac{w_0}{w(z)}\,e^{ikz-i\omega t}\,e^{-r^2/w^2(z)}\,e^{ikr^2/2R(z)}e^{-i\eta(z)}. \tag{3.29}$$

Intenziteta svetlobeje sorazmerna z $E(r,z)E^*(r,z)$ in zanjo velja

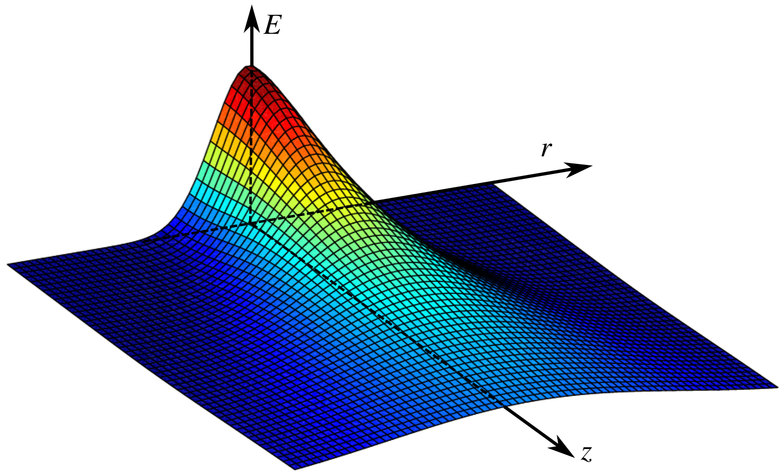
$$I(r,z) = I_0\,\frac{w_0^2}{w(z)^2}\,e^{-2r^2/w^2(z)}. \tag{3.30}$$

Naloga 3.3.2 Pokaži, da je znotraj širine snopa w približno 87 % celotnega svetlobnega toka.

Povejmo še nekaj o parametru $q(z)$, ki smo ga uporabili pri izračunu Gaussovega snopa. Spomnimo se, da parameter q narašča linearno z oddaljenostjo od grla

$$q(z) = z - iz_0. \tag{3.31}$$

[2] Francoski fizik Louis Georges Gouy, 1854–1926.
[3] Nemški matematik Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.

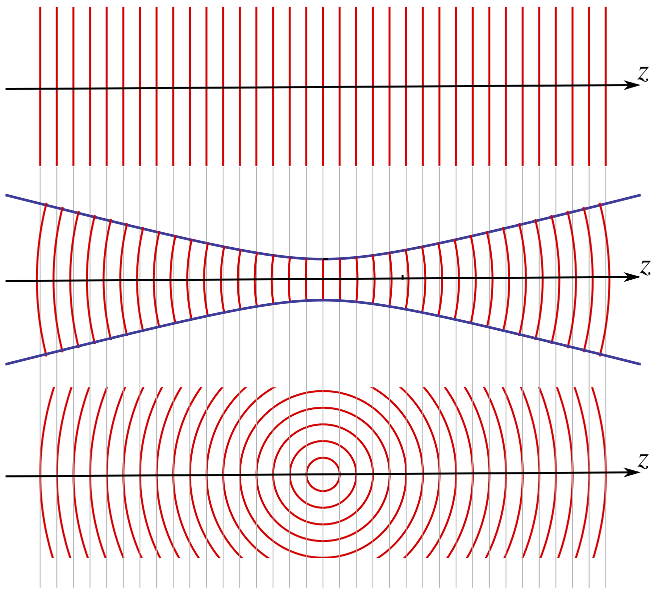


Slika 3.3: Upodobitev gostote svetlobnega toka v Gaussovem snopu za $z > 0$

Parameter q imenujemo kompleksni krivinski radij, njegov inverz pa kompleksna ukrivljenost

$$\boxed{\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} + i\frac{2}{kw^2}.} \tag{3.32}$$

Primerjajmo še Gaussov snop z drugimi valovanji. Na sliki (3.4) so shematsko prikazane valovne fronte ravnega vala, Gaussovega snopa (3.29) in krogelnega vala (3.26). Vidimo, da je za majhne oddaljenosti od grla z Gaussov snop podoben ravnemu valu (ukrivljenost front je zelo majhna in $R \to \infty$), medtem ko je za velike z podoben krogelnemu valu (krivinski radij R narašča sorazmerno z oddaljenostjo z). Faza Gaussovega snopa je pri pri $z \gg z_0$ zamaknjena za $\pi/2$ glede na ravni in krogelni val.



Slika 3.4: Ravni val, Gaussov snop ter krogelni val. Pri majhnih razdaljah od grla je Gaussov snop podoben ravnemu valu, pri velikih razdaljah pa krogelnemu valu, vendar njegova faza zaostaja za $\pi/2$.

3.4 Snopi višjega reda

Osnovna rešitev obosne valovne enačbe je Gaussov snop. Poleg te rešitve pa obstaja še veliko drugih rešitev, ki so tudi omejene v prečni smeri. V kartezičnih koordinatah tako rešijo obosno valovno enačbo tudi Hermite-Gaussovi snopi[4]

$$\psi_{n,m}(x,y) = \frac{w_0}{w} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2q} - i\eta_{n,m}\right], \tag{3.33}$$

kjer so H_n Hermitovi polinomi stopnje n (npr. $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$ ...). V to se lahko prepričamo, če izraz vstavimo v obosno valovno enačbo (enačba 3.5) in upoštevamo, da Hermitovi polinomi zadoščajo enačbi

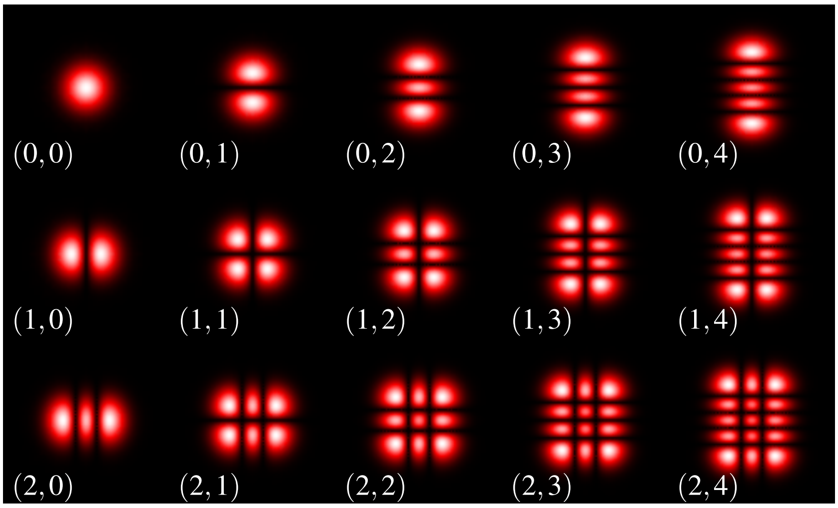
$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \tag{3.34}$$

Osnovni Gaussov snop je očitno poseben primer gornje rešitve za $m = n = 0$. Polmer snopa $w(z)$ in kompleksni krivinski radij $q(z)$ sta za vse m in n enaka kot za osnovni snop in podana z enačbama (3.19) in (3.31). Razlika je v fazi, ki je odvisna tudi od n in m

$$\eta_{n,m}(z) = (n+m+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.35}$$

To hitrejše spreminjanje faze v bližnjem polju snopov višjega reda je analogno večji fazni hitrosti valov višjega reda v valovodih.

Nekaj višjih redov Hermite-Gaussovih snopov je na sliki (3.5), kjer rišemo $|\Re\psi_{n,m}(x,y,0)|$. Indeksa n in m določata število vozlov v prečni smeri, polmer snopa pa narašča z n in m.



Slika 3.5: Prečni profil polja Hermite-Gaussovih snopov za različne vrednosti (n,m)

Naloga 3.4.1 Pokaži, da za Hermite-Gaussove snope višjih redov efektivni polmer snopa narašča sorazmerno s korenom iz števila prečnih vozlov $w_{eff} \propto w\sqrt{n+m}$. Namig: pri zapisu prečne odvisnosti polja upoštevaj le vodilni člen Hermitovih polinomov in določi, na kateri razdalji od središča snopa ima polje ψ največjo amplitudo.

[4] Francoski matematik Charles Hermite, 1822–1901.

★ Hermite-Gaussovi snopi (enačba 3.33) tvorijo popoln ortogonalen sistem funkcij koordinat x in y

$$\int \psi^*_{n,m}(x,y)\,\psi_{n',m'}(x,y)\,dxdy = \pi w_0^2\, 2^{n+m-1} n!\, m!\, \delta_{n,n'}\, \delta_{m,m'}. \tag{3.36}$$

Polje nekega valovanja, ki ga poznamo v ravnini $z = 0$, lahko pri poljubnem z dobimo z razvojem po Hermite-Gaussovih snopih. Pri tem je izbira premera grla w_0 poljubna, bo pa seveda vplivala na hitrost konvergence razvoja. Na tak način lahko obravnavamo uklon na odprtini, kjer je očitno smiselno vzeti w_0 približno enak dimenziji odprtine. Dobljeni rezultat je enako natančen kot Fresnelov uklonski integral.

Pri velikih z, kjer velja Fraunhoferjeva uklonska teorija, je polje Fouriereva transformacija polja pri $z = 0$. Hermite-Gaussovi snopi ohranjajo prečno obliko, ki pa se z naraščajočim z širi. To je v skladu s tem, da je Fouriereva transformacija Hermite-Gaussove funkcije $H_n(x)e^{-x^2/2}$ kar Hermite-Gaussova funkcija.

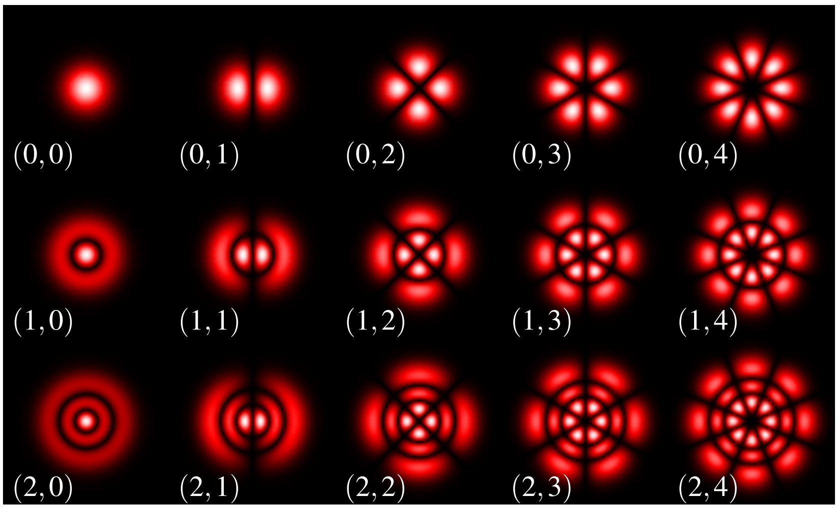
V cilindričnih koordinatah imajo snopi višjega reda obliko Laguerre-Gaussovih snopov[5]

$$\psi_{p,l}(r,\varphi,z) = \frac{w_0}{w}\left(\frac{\sqrt{2}r}{w}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) e^{\pm il\varphi} \exp\left[\frac{ikr^2}{2q} - i\eta_{p,l}\right], \tag{3.37}$$

kjer so L_p^l pridruženi Laguerrovi polinomi (npr. $L_0^l(x) = 1, L_1^l(x) = -x+l+1, L_2^l(x) = x^2/2 - (l+2)x + (l+2)(l+1)/2$ ...) in

$$\eta_{p,l}(z) = (2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.38}$$

Podobno kot je v kartezičnem primeru red polinoma določal število prečnih ničel, določata p in l v cilindričnem primeru število vozelnih črt, kjer je gostota svetlobnega toka nič. Na sliki (3.6) je prikazanih nekaj oblik amplitud $|\Re\psi_{p,l}(r,\varphi,0)|$.



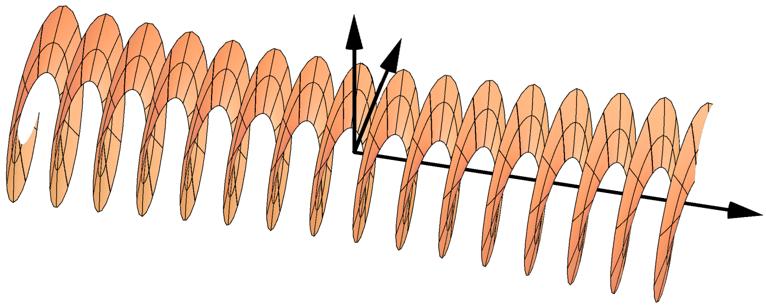
Slika 3.6: Prečni profil polja Laguerre-Gaussovih snopov za različne vrednosti (p,l)

Iz laserjev navadno želimo dobiti čim čistejši osnovni snop, vendar lahko pogosto opazimo tudi snope višjega reda. Da dobimo le osnovni snop, je treba posebej paziti pri konstrukciji laserja.

[5] Francoski matematik Edmond Nicolas Laguerre, 1834–1886.

Tirna vrtilna količina in spin

Valovne fronte Laguerre-Gaussovih snopov pri $l \neq 0$ imajo obliko vijačnic. Poyntingov vektor pri njih ni vzporeden z osjo žarka, ampak ima komponento tudi v prečni smeri. Ta spreminja smer, zato pride do pojava vrtilne količine v smeri osi snopa in snop na snov deluje z navorom. Pravimo, da Laguerre-Gaussovi snopi nosijo t.i. tirno vrtilno količino. V kvantni mehaniki funkcija $\psi_{p,l}$ predstavlja foton s tirno vrtilno količino $L = \hbar l$, medtem ko leva in desna cirkularna polarizacija predstavljata spin fotona.



Slika 3.7: Valovna fronta Laguerre-Gaussovega snopa

3.5 Besslov snop

Poglejmo si še poseben primer omejenega snopa, to je Besslov snop[6]. Kot nastavek za eksaktno rešitev valovne enačbe (enačba 3.3) izberemo

$$E = E_0 \psi(x,y) e^{i\beta z - i\omega t}, \tag{3.39}$$

kjer mora nastavek ψ zadostovati Helmholtzevi enačbi

$$\nabla_\perp^2 \psi + k_\perp^2 \psi = 0, \tag{3.40}$$

pri $k_\perp^2 = k^2 - \beta^2$. V cilindričnih koordinatah ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) se enačba prepiše v

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k_\perp^2 \psi = 0. \tag{3.41}$$

Rešitve gornje enačbe so s faznim faktorjem pomnožene Besslove funkcije

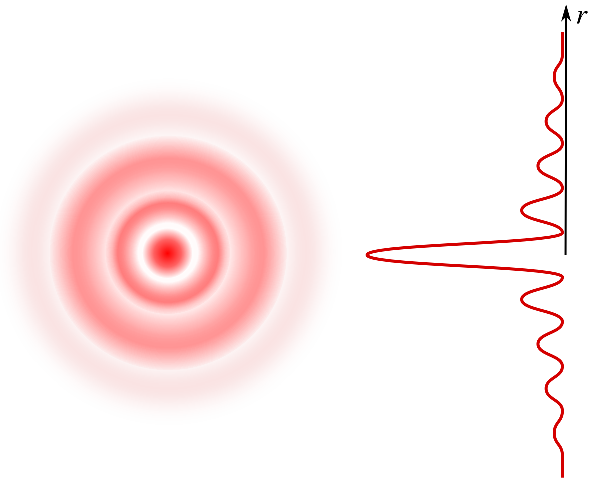
$$\psi_m(x,y) = A_m J_m(k_\perp r) e^{im\varphi}, \tag{3.42}$$

kjer je J_m Besslova funkcija in $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Za $m = 0$ ima val obliko

$$E(r,z,t) = A_0 J_0(k_\perp r) e^{i\beta z - i\omega t}, \tag{3.43}$$

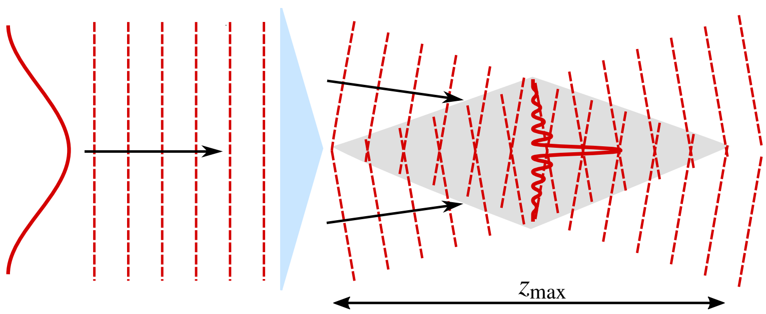
ki ga imenujemo Besslov snop. Valovne fronte takega snopa so ravne in snop nima divergence. Vendar pa Besslov snop ni omejen v pravem smislu. Za velike oddaljenosti od središča snopa r intenzitetni profil namreč pojema kot $I \propto J_0^2(k_\perp r) \sim (2/\pi k_\perp r)\cos^2(k_\perp r - \pi/4)$. Energija takega snopa ni omejena znotraj efektivnega radija, kot je to pri Gaussovih snopih. Za konstrukcijo Besslovih snopov bi (tako kot za konstrukcijo ravnega vala) potrebovali neskončno energije, kar je seveda nemogoče. Kljub temu pa lahko ustvarimo približke Besslovih snopov, ki imajo pomembne in uporabne lastnosti.

[6]Nemški astronom, matematik in fizik Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846.



Slika 3.8: Prečni presek in profil intenzitete Besslovega snopa

★ Z uporabo stožčaste leče (aksikona) lahko Gaussov snop preoblikujemo v približek Besslovega snopa (slika 3.9). Na plašču stožčaste leče se namreč Gaussov snop zlomi in valovni vektorji nastalega žarka opisujejo stožec, kar je sicer lastnost Besslovih žarkov. Dobljeni žarek je približek Besslovega snopa, vendar le na določenem območju, dolgem z_{max}. Znotraj tega območja je divergenca snopa praktično enaka nič. Poleg manjše divergence imajo ti snopi še lastnost regeneracije. To pomeni, da se snop v senčni strani za objektom, ki ga osvetljuje (na primer v optični pinceti), regenerira. Profil snopa v senčni strani (daleč stran od objekta) je tako enak profilu snopa pred objektom.



Slika 3.9: Nastanek Besslovega snopa na stožčasti leči

3.6 Transformacije snopov z lečami

Vrnimo se h Gaussovim snopom in poglejmo, kaj se zgodi z njimi pri prehodu skozi optične naprave. Začnimo z enostavno tanko lečo z goriščno razdaljo f. V geometrijski optiki je krivinski radij krogelnega vala, ki izhaja iz točke na osi, kar enak razdalji do točke. Leča točko na osi preslika v točko na osi, od tod pa sledi, da se sferični val s krivinskim radijem R_1 po prehodu skozi lečo spremeni v val s krivinskim radijem R_2. Pri tem velja zveza

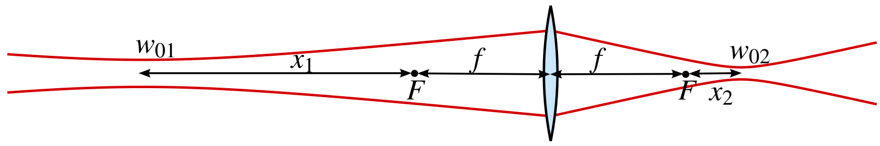
$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}. \tag{3.44}$$

Krivinski radij v točki z je pozitiven, če je središče krožnice pri $z' \leq z$.

Kako pa je z Gaussovim snopom? Polmer snopa w se pri prehodu skozi tanko lečo ne spremeni, zato velja po enačbi (3.32) za kompleksni krivinski radij tik pred lečo in tik za njo

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f}. \tag{3.45}$$

Kompleksni krivinski radij q pa je po enačbi (3.31) linearna funkcija koordinate z. To nam skupaj z enačbo (3.45) omogoča račun prehoda snopa skozi poljuben sistem leč brez aberacij. Kot primer poglejmo, kako z zbiralno lečo zberemo snop.



Slika 3.10: Prehod Gaussovega snopa skozi tanko lečo. Grlo velikosti w_{01} v oddaljenosti x_1 od gorišča leče se preslika v grlo w_{02} v oddaljenosti x_2 od gorišča leče.

Vpadni snop naj ima grlo s polmerom w_{01} in parametrom z_{01}. Lega grla je v točki, ki je za x_1 oddaljena od levega gorišča leče F (slika 3.10). Naj bosta

$$q_1^F = x_1 - iz_{01} \qquad \text{in} \qquad q_2^F = -x_2 - iz_{02} \tag{3.46}$$

kompleksna krivinska radija v levem in desnem gorišču, pri čemer je koordinatna os z usmerjena v desno, gledamo pa referenčno glede na lego grla vsakega posameznega snopa. Velja tudi

$$q_1 = q_1^F + f \qquad \text{in} \qquad q_2 = q_2^F - f. \tag{3.47}$$

Od tod dobimo z uporabo enačbe (3.45) enačbo za q v goriščih v kompaktni obliki

$$\boxed{q_1^F q_2^F = -f^2.} \tag{3.48}$$

Enačba je po obliki podobna enačbi za oddaljenost slike od gorišča v geometrijski optiki, pomen pa ima drugačen. Zapišimo posebej realni in imaginarni del

$$x_1 x_2 = f^2 - z_{01} z_{02} \qquad \text{in} \qquad \frac{x_1}{z_{01}} = \frac{x_2}{z_{02}}. \tag{3.49}$$

Dobimo enačbi za preslikavo Gaussovega snopa čez lečo z goriščno razdaljo f. Prva enačba da

$$\boxed{x_2 = \frac{x_1 f^2}{x_1^2 + z_{01}^2},} \tag{3.50}$$

ki določa lego grla na desni strani leče, druga pa povečavo

$$\boxed{\frac{w_{02}}{w_{01}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}.} \tag{3.51}$$

Enačba (3.50) se ujema z izrazom za preslikavo točke v geometrijski optiki le, kadar je $z_{01} \ll x_1$. Kadar je $z_{01} \gg f$, je val na leči pri vsakem x_1 skoraj raven in $x_2 \to 0$, kar pomeni, da leži grlo na desni strani v gorišču. V praksi dobimo Gaussove snope iz laserjev in pogosto ne velja ne prva ne druga limita, temveč je treba uporabiti izraz (3.50). Tudi povečava polmera grla na desni, podana z enačbo (3.51), je precej drugačna kot v geometrijski optiki.

Za primer vzemimo snop iz He-Ne laserja (valovna dolžina 632,8 nm), ki ima grlo s polmerom $w_{01} = 0,5$ mm na izhodnem ogledalu in je 50 cm oddaljeno od leče z goriščno razdaljo $f = 25$ cm. Za tak snop je $z_{01} = 124$ cm. Po enačbi (3.50) leži grlo za lečo v oddaljenosti 1 cm od gorišča in 26 cm za lečo, po enačbi (3.51) pa izračunamo polmer $w_{02} = 100$ µm. Enačbe geometrijske optike bi dale popolnoma napačen položaj grla 50 cm za lečo, polmer grla pa 0,5 mm. Po drugi strani bi približek, da je vpadni snop kar raven, dal grlo na desni v gorišču s približno pravim polmerom. Zakaj da približek ravnih valov bolj pravilen rezultat, lahko hitro uvidimo, če pogledamo Rayleighovo dolžino snopa: snop vpada na lečo še v območju bližnjega polja ($x_1 + f < z_{01}$), kjer je približno oblike ravnih valov.

Če postavimo grlo snopa v gorišče leče ($x_1 = 0$), je grlo na desni strani tudi v gorišču ($x_2 = 0$). Razmerje polmerov grl na eni in drugi strani leče lahko izračunamo

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{x_2}{x_1} = \frac{f^2}{z_{01}^2} \qquad \text{in} \qquad \frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f}{z_{01}}. \tag{3.52}$$

Velikost grla na desni strani je

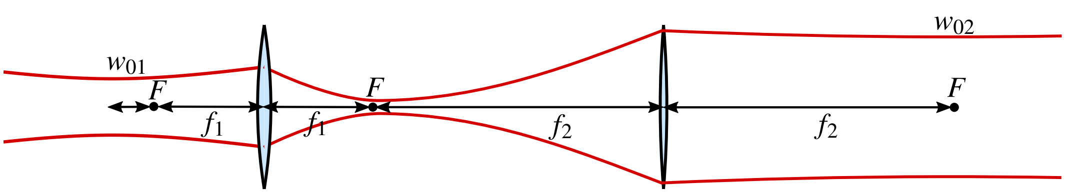
$$w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01}}. \tag{3.53}$$

Če torej želimo doseči čim manjše grlo ob prehodu skozi lečo, mora biti polmer vpadnega žarka čim večji. Vpadni žarek je tako smiselno razširiti, vendar je polmer žarka lahko največ enak polmeru leče a. Najmanjša velikost grla, ki jo še lahko dosežemo z zbiralno lečo, je tako

$$\boxed{w_{02\ \mathrm{min}} = \frac{\lambda f}{\pi a} \sim \lambda.} \tag{3.54}$$

Dobri mikroskopski in fotografski objektivi dosegajo $f/a \simeq 1$, zato je mogoče z njimi Gaussov snop zbrati v piko velikosti $\sim \lambda$.

Omenili smo, da je treba za dosego majhnega polmera grla za lečo žarek pred lečo čim bolj razširiti. Razširitev vpadnega snopa naredimo s teleskopom (slika 3.11), katerega značilnost je, da je razmik med lečama enak vsoti goriščnih razdalj leč in zato gorišči leč sovpadata. Povečava teleskopa je pri taki postavitvi leč enaka razmerju med goriščnima razdaljama (glej nalogo 3.6.1).



Slika 3.11: Prehod Gaussovega snopa skozi teleskop iz leč z goriščnima razdaljama f_1 in f_2

Naloga 3.6.1 Dve leči z goriščnima razdaljama f_1 in f_2 naj bosta na medsebojni razdalji $d = f_1 + f_2$. Pokaži, da je povečava takega teleskopa enaka

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f_2}{f_1}, \tag{3.55}$$

in je neodvisna od postavitve grla snopa x_1.

3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki

Preden se lotimo splošnejšega zapisa preslikav Gaussovega snopa, se spomnimo, kako se lotimo preslikav v geometrijski optiki. Slika nastane kot presečišče geometrijskih žarkov, ki izhajajo iz točke predmeta pred optičnim sistemom. Geometrijski žarek je pravokoten na valovne ploskve, pri čemer moramo vzeti še limito, ko gre valovna dolžina proti nič. Ukrivljenost valovne fronte je neposredno povezana s spreminjanjem naklona žarkov, pri čemer bomo privzeli, da so nakloni žarkov glede na os majhni.

Geometrijski žarek v izbrani ravnini z lahko opišemo z dvema parametroma: oddaljenostjo y od osi in naklonom θ glede na os sistema. Ti dve količini sta med seboj neodvisni in ju sestavimo v vektor

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}. \tag{3.56}$$

Preslikavo snopa bomo zapisali kot matriko, ki bo delovala na gornji vektor. Matrike bodo v splošnem oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{3.57}$$

zato jih imenujemo tudi ABCD matrike. Zapišimo nekaj primerov.

Pri premiku za d vzdolž osi se zaradi končnega naklona spremeni odmik od osi, naklon pa ostane enak

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + d\theta_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.58}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

Matrika za premik d vzdolž osi z je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

Poglejmo še matriko za prehod skozi lečo. Pri prehodu skozi tanko lečo se spremeni nagib žarka. Če je žarek pred lečo vzporeden z osjo, gre za lečo skozi gorišče, zato

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -\frac{y_1}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

Pri tem koeficientov B in D še ne poznamo. Določimo jih iz drugega pogoja, ki pravi, da ostane žarek, ki gre skozi lečo na osi, nespremenjen

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Sledi $B = 0$ in $D = 1$. Matrika za prehod skozi lečo je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.63}$$

Podobno izpeljavo kot za prehod skozi lečo lahko naredimo za odboj na sferičnem ogledalu s krivinskim radijem R. Pripadajoča matrika je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.64}$$

pri čemer je $R > 0$ za konkavna zrcala. Matrika za odboj na ravnem zrcalu je identiteta.

Matriko sestavljene optične naprave dobimo z množenjem matrik posameznih komponent. Pri tem moramo paziti na vrstni red množenja, saj množenje matrik ni komutativno. Matriko preslikave čez dva optična elementa, pri čemer žarek najprej preide element z indeksom 1 in nato element z indeksom 2, zapišemo kot

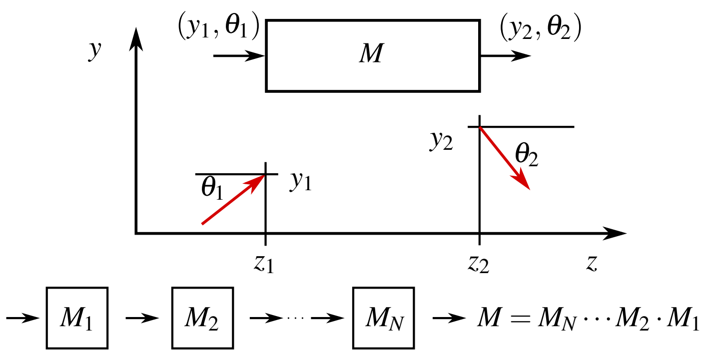
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2A_1 + B_2C_1 & A_2B_1 + B_2D_1 \\ C_2A_1 + D_2C_1 & C_2B_1 + D_2D_1 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

V sistemu z več elementi (slika 3.12) zapišemo produkt matrik za vse elemente, pri čemer ne smemo pozabiti na premike med elementi.

Poglejmo primer. Žarek naj najprej prepotuje razdaljo d, nato pa ga usmerimo na tanko lečo z goriščno razdaljo f. Matrika za celoten prehod je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix}. \tag{3.66}$$

Gornji matrični formalizem je zelo prikladen predvsem za računanje zapletenih optičnih sistemov, saj ga je prav lahko izvesti z računalnikom. Poleg tega je enolično povezan z matričnim formalizmom izračuna kompleksne ukrivljenosti Gaussovih snopov, zato da preprosto možnost prenosa rezultatov računov geometrijske optike v optiko snopov.



Slika 3.12: Preslikave žarkov lahko obravnavamo z matrikami. Optični element M preslika žarek (y_1, θ_1) v (y_2, θ_2). Matriko za prehod poljubnega zaporedja optičnih elementov dobimo z množenjem matrik.

3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija

Poskusimo zdaj zapisati podoben matrični formalizem še za kompleksne krivinske radije. Za opis Gaussovega snopa zadošča, da v izbrani ravnini z poznamo kompleksni krivinski radij q. Ugotovili smo že, da je q linearna funkcija premika po z (enačba 3.31). Vemo tudi, kako se q spremeni pri prehodu skozi tanko lečo (enačba 3.45).

Pri premiku iz ravnine z_1 v ravnino z_2, ki je premaknjena za d, se q spremeni

$$q_2 = q_1 + d. \tag{3.67}$$

Po enačbi (3.45) je pri prehodu skozi lečo

$$q_2 = \frac{q_1 f}{f - q_1} = \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1}. \tag{3.68}$$

Premik in leča dasta skupaj

$$q_2 = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1+d}{f} + 1} = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1}{f} - \frac{d}{f} + 1}. \tag{3.69}$$

V vseh treh primerih lahko transformacijo kompleksnega krivinskega radija q zapišemo v obliki ulomljene linearne preslikave

$$\boxed{q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}.} \tag{3.70}$$

Koeficiente preslikave razvrstimo v matriko

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{3.71}$$

Če iz gornjih enačb razberemo koeficiente ABCD matrik, vidimo, da so povsem enaki kot v primeru geometrijske optike. Hitro lahko tudi preverimo, da je matrika za premik in lečo enaka produktu matrike za premik in matrike za lečo (enačba 3.66).

Omenimo še eno lastnost ABCD matrik. Kadar po prehodu čez optične elemente preidemo v snov z enakim lomnim količnikom kot je bil na začetku, je determinanta ABCD matrike enaka 1. V nasprotnem primeru je determinanta matrike enaka razmerju lomnih količnikov začetne in končne snovi.

$$AD - BC = \frac{n_1}{n_2}. \tag{3.72}$$

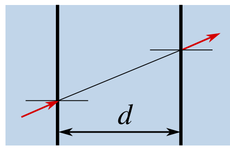
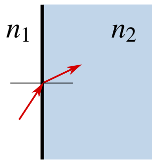
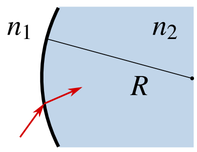
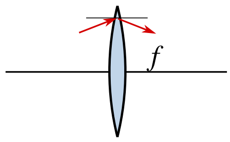
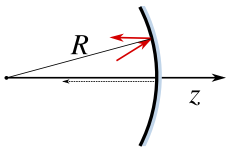
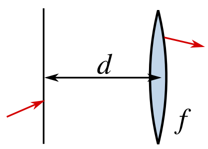
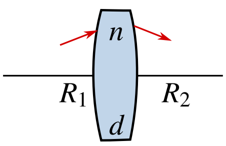
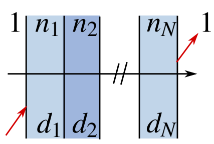
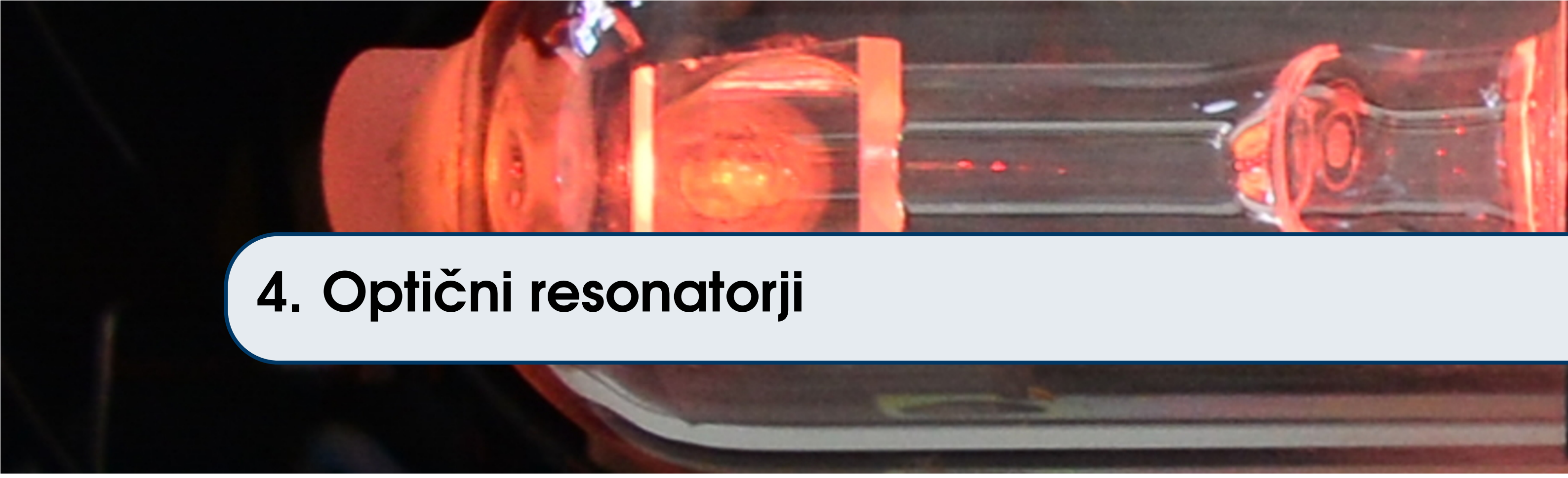
Opis prehoda	Skica	Matrika za prehod
Prehod skozi prostor za d		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Prehod preko meje dveh snovi		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod preko konveksno ukrivljene meje $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1-n_2)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod preko konveksne leče $f > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Odboj na konkavnem zrcalu $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3.1: Matrike ABCD za nekaj osnovnih preslikav, ki veljajo tako v geometrijski optiki kot tudi za izračun preslikave kompleksnega krivinskega radija q Gaussovih snopov.

Naloga 3.8.1 Pokaži, da za naslednje prehode veljajo ustrezne ABCD matrike.

Prehod skozi prostor in lečo		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d}{f} \end{bmatrix}$
Prehod preko leče z debelino d in krivinskima radijema R_1 in R_2		$\begin{bmatrix} 1-\frac{d}{nf_1} & \frac{d}{n} \\ -\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1}-\frac{d}{nf_1 f_2} & 1-\frac{d}{nf_2} \end{bmatrix}$ $f_i = \frac{R_i}{n-1}$
Prehod čez zaporedje plasti		$\begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



4. Optični resonatorji

Osnovni gradnik vsakega laserja je resonator. V njem je vzbujeno lastno valovanje, ki skozi delno prepustno steno resonatorja izhaja iz sistema. V tem poglavju bomo najprej spoznali optične resonatorje in kriterije za njihovo stabilno delovanje, nato pa izračunali lastne frekvence resonatorja ter povezali širino črt z izgubami v sistemu.

4.1 Odprti resonatorji

Optični resonatorji so votline, v katerih je mogoče vzpostaviti stoječe svetlobno valovanje. Taka stoječa valovanja so skoraj stacionarne rešitve valovne enačbe z ustreznimi robnimi pogoji v votlini in se obnašajo kot harmonska nihala. Če vzbujamo v resonatorju valovanja z različnimi frekvencami, se pojavi pri nekaterih diskretnih frekvencah resonančno obnašanje. Te frekvence imenujemo lastne frekvence resonatorja. Zaradi dušenja imajo lastne frekvence končno frekvenčno oziroma spektralno širino, pri čemer je čas dušenja mnogo daljši od nihajne periode.

Optične resonatorje uporabljamo predvsem v dva namena:

1. V resonatorjih lahko ob razmeroma šibkem zunanjem vzbujanju nastane velika električna poljska jakost pri resonančni frekvenci. Za vzdrževanje konstantne amplitude lastnega nihanja mora zunanji vir zgolj pokrivati izgube v resonatorju. Če so te majhne, je zunanji vir lahko šibek, polje v resonatorju pa vseeno veliko.

2. Resonatorji delujejo kot filtri, ki prepuščajo le polje s točno določeno frekvenco in prostorsko odvisnostjo. Primer take uporabe je Fabry-Perotov interferometer, opisan v nadaljevanju poglavja.

Resonatorje poznamo z različnih področij, na primer akustične pri glasbilih ali mikrovalovne in radijske. V mikrovalovnem področju, kjer so valovne dolžine valovanja okoli 1 cm, so resonatorji zaprte kovinske votline z dimenzijami, ki so primerljive z valovno dolžino vzbujenega valovanja. Resonančne frekvence so v takem resonatorju med seboj dobro ločene in ni težko doseči enega samega nihanja v izbranem frekvenčnem intervalu.

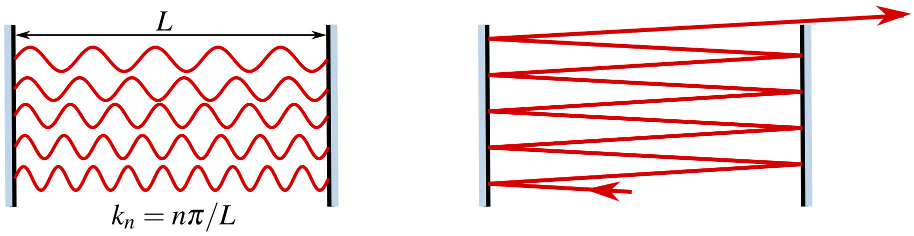
V optičnem področju je drugače, saj so resonatorji navadno mnogo večji od valovne dolžine. Vzemimo kocko s stranico $L \gg \lambda$, v kateri je vzbujeno zelo veliko število lastnih nihanj. Število lastnih nihanj N na frekvenčni interval $\Delta\nu$ zapišemo z zvezno gostoto stanj

$$N = 2\frac{1}{8}4\pi k^2 \Delta k \frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V \Delta\omega = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V \Delta\nu. \tag{4.1}$$

Do gornje enačbe smo prišli tako, da smo prešteli stoječa valovanja z velikostjo valovnega vektorja med k in $k+\Delta k$: volumen pripadajoče krogelne lupine v pozitivnem oktantu $\frac{1}{8}4\pi k^2 \Delta k$ smo delili z volumnom $(\pi/L)^3$, ki pripada enemu stanju. Upoštevali smo tudi, da ima vsako lastno nihanje lahko dve polarizaciji.

Poglejmo primer. Izberimo osrednjo frekvenco $\nu = 3 \cdot 10^{14}$ Hz, ki ustreza valovni dolžini 1 μm, in širino frekvenčnega intervala $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz, ki je tipična za Dopplerjevo razširjeno emisijsko črto v plinu. Potem je v votlini s stranico $L = 1$ cm in prostornino $V = 1$ cm^3 število lastnih nihanj na izbran interval po enačbi (4.1) enako $N = 2,5 \cdot 10^8$. Če bi bile vse stene votline idealna zrcala, bi bil čas dušenja vseh lastnih nihanj približno enako dolg in vedno bi vzbujali zelo veliko število resonanc hkrati. Tak resonator bi bil neuporaben.

Hkratnemu vzbujanju velikega števila nihanj se izognemo z zmanjšanjem odbojnosti stranskih sten votline, saj s tem povečamo dušenje stoječih valov v prečni smeri. Dušenje valov, ki so pravokotni na idealno odbojni končni steni, ostane nespremenjeno. Nazadnje lahko stranske stene povsem odstranimo, tako da stoječih valov v prečni smeri ni več. Ostane le še nekaj valov, ki so pravokotni na končni steni. Takemu resonatorju pravimo odprt resonator (slika 4.1).



Slika 4.1: Odprt resonator. Levo: lastni nihajni načini takega resonatorja imajo diskretne vrednosti valovnih vektorjev k_n. Desno: žarki, ki niso pravokotni na zrcali, uidejo iz resonatorja.

Oglejmo si odprte resonatorje podrobneje. V zaprti pravokotni votlini velikosti $a \times a \times L$ z idealno prevodnimi (zrcalnimi) stenami so dovoljene vrednosti valovnega vektorja za lastna nihanja

$$\mathbf{k}_{l,m,n} = \left(\frac{l\pi}{a}, \frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{L} \right), \tag{4.2}$$

kjer so l, m in n cela števila, L dolžina, a pa prečna dimenzija resonatorja. Lastne frekvence so

$$\omega_{l,m,n} = c|\mathbf{k}_{l,m,n}|. \tag{4.3}$$

Dolžina resonatorja L je velika v primerjavi z λ in zato je n zelo veliko število. Če prečnih sten ni, mora biti $\mathbf{k}$ približno vzporeden z osjo z, zato morata biti l in m majhna. Tedaj lahko velikost valovnega vektorja razvijemo in frekvenco zapišemo kot

$$\omega_{l,m,n} = c \left(\frac{n\pi}{L} + \frac{l^2 + m^2}{2n} \frac{L\pi}{a^2} \right). \tag{4.4}$$

Drugi člen v oklepaju je navadno le majhen popravek, tako da so lastne frekvence odprtih optičnih resonatorjev odvisne predvsem od števila vozlov v vzdolžni smeri. To število je navadno veliko, med 10^5 in 10^7. Možna so tudi lastna nihanja z nekaj vozli v prečni smeri, ki pa le malo vplivajo na lastne frekvence. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali predvsem lastna stanja brez vozlov v prečni smeri in jih označili z enim samim indeksom n.

Razlika med frekvencama dveh zaporednih lastnih nihanj n in $n+1$ je

$$\boxed{\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L}.} \tag{4.5}$$

Pri dolžini resonatorja $L = 30$ cm je v frekvenčnem intervalu s širino $3 \cdot 10^9$ Hz le še 6 nihanj, ki jih je brez težav mogoče razločiti.

V zaprtih votlinah z zrcalnimi stenami obstajajo dobro določena lastna stanja pri poljubni obliki votline. Pri odprtih resonatorjih to ne velja. Da se pojavijo lastna nihanja z majhnimi izgubami, morata biti izpolnjena dva pogoja:

1. Snop geometrijskih žarkov mora ostati po mnogih odbojih ujet med zrcaloma resonatorja.

2. Polmer zrcala mora biti večji od polmera uklonsko razširjenega snopa, ki se širi od nasprotnega zrcala.

Resonatorjem, ki zadoščajo gornjima pogojema, pravimo stabilni resonatorji. Drugi pogoj lahko zapišemo tudi z enačbami, izhajajoč iz enačbe za oceno divergence (enačba 3.1):

$$\vartheta = \frac{\lambda}{a_1} < \frac{a_2}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_1 a_2}{\lambda L} > 1, \tag{4.6}$$

kjer sta a_1 in a_2 polmera zrcal resonatorja. Izrazu $F = a_1 a_2/\lambda L$ pravimo tudi Fresnelovo število.

Fabry-Perotov interferometer

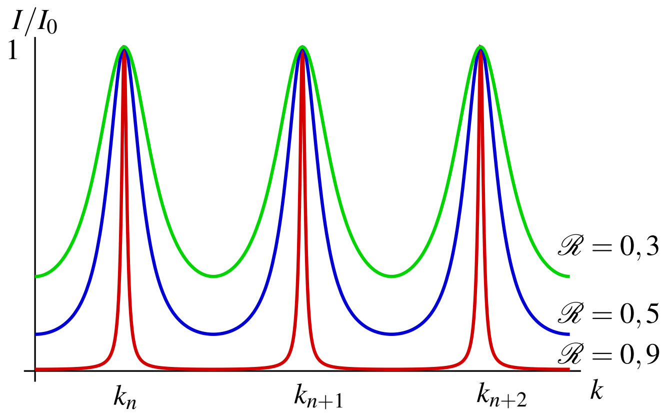
Poglejmo preprost primer resonatorja, omejenega z dvema vzporednima ravnima zrcaloma z veliko odbojnostjo. Takemu sistemu pravimo Fabry-Perotov interferometer[1]. Da nastane med zrcaloma stoječe valovanje, mora biti razdalja med zrcaloma večkratnik polovične valovne dolžine (enačba 4.2)

$$L = \frac{n\lambda}{2}. \tag{4.7}$$

Prepustnost interferometra za ravni val, ki vpada pravokotno na zrcali z odbojnostjo $\mathscr{R}$, je

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2 kL} \tag{4.8}$$

in je prikazana na sliki (4.2). Ko je frekvenca vpadnega valovanja ravno enaka lastni frekvenci resonatorja, je sistem v resonanci in $T = 1$. Širina resonance je tem manjša, čim večja je odbojnost zrcal. Ta tudi določa čas dušenja vzbujenega lastnega nihanja.



Slika 4.2: Prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v odvisnosti od valovnega vektorja k za tri različne odbojnosti zrcal $\mathscr{R}$.

[1]Francoska fizika Maurice Paul Auguste Charles Fabry, 1867–1945, in Jean-Baptiste Alfred Perot, 1863–1925.

Naloga 4.1.1 Pokaži, da je prepustnost Fabry-Perotovega interferometra, katerega zrcali imata odbojnost $\mathscr{R}$, enaka

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2\delta}, \tag{4.9}$$

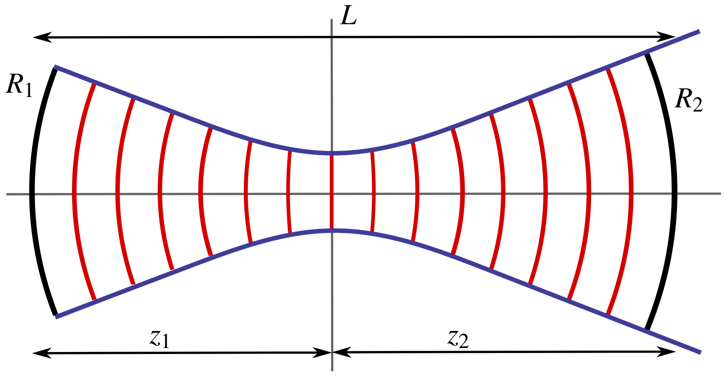
kjer je $\delta = kL\cos\vartheta$, L razmik med zrcaloma, ϑ vpadni kot, k pa valovni vektor svetlobe.

Prvemu pogoju za stabilnost ustrezajo v Fabry-Perotovem interferometru le žarki, ki so natanko pravokotni na zrcali. Čim sta zrcali le malo nevzporedni, stabilnih žarkov sploh ni več. Tako imenovani planparalelni interferometer je tako na meji stabilnosti. Z izpolnjevanjem drugega pogoja ni težav, saj morata biti pri na primer 30 cm dolgem resonatorju in valovni dolžini $0,5$ µm zrcali večji od $0,4$ mm, da zadostita pogoju, zapisanem v enačbi (4.6).

Bolj stabilni resonatorji so sestavljeni iz dveh konkavno ukrivljenih zrcal. Tedaj so žarki, ki potujejo pod majhnim kotom glede na osrednjo os, ujeti med zrcaloma in energija lastnih valovanj ostaja lokalizirana blizu osi.

4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih

V stabilnih resonatorjih s konkavnima zrcaloma pričakujemo, da so lastna valovanja omejena na bližino osrednje osi in zrcali znatno večji od polmera lastnega nihanja. Tedaj lahko za obravnavo električnega polja uporabimo obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Upoštevajmo še zahtevo, da svetloba po odboju od zrcala konstruktivno interferira sama s sabo. Od tod izhaja robni pogoj, ki pravi, da se valovna fronta stoječega valovanja na zrcalu ujema z obliko površine zrcala, električno polje na površini zrcala pa je približno enako nič.



Slika 4.3: Gaussov snop v odprtem resonatorju s konkavno ukrivljenima zrcaloma s krivinskima radijema R_1 in R_2. Krivinski radij zrcal se ujema s krivinskim radijem čela snopa. Kadar sta polmera različna, grlo ne leži na sredini med zrcaloma.

V prečni smeri omejene rešitve obosne enačbe smo našli v obliki potujočih Gaussovih snopov (enačba 3.29). Podobno kot zapišemo stoječe valovanje na vrvi kot vsoto valovanj v nasprotnih smereh lahko stoječe snope zapišemo s superpozicijo snopov, ki se širijo v različnih smereh ob osi. Da zadostimo robnim pogojem na zrcalih, se mora krivinski radij snopa ujemati s krivinskima radijema zrcal R_1 in R_2 (slika 4.3). Pri tem sta neznanki polmer grla snopa w_0, ki je povezan s parametrom z_0, in lega grla.

Postavimo izhodišče osi z v grlo, kot smo navajeni, tako da sta zrcali pri $z_1 < 0$ in $z_2 > 0$. Z uporabo enačbe za krivinski radij snopa R (enačba 3.25) dobimo

$$-R_1 = z_1\left[1+\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2\right] \quad \text{in} \tag{4.10}$$

$$R_2 = z_2\left[1+\left(\frac{z_0}{z_2}\right)^2\right]. \tag{4.11}$$

Pri tem smo upoštevali, da je krivinski radij za konkavno zrcalo glede na pozitivno smer z pozitiven. Prvo enačbo smo zapisali z negativnim predznakom pri R_1, zato da je krivinski radij pozitivno število. Veljati mora še

$$z_2 - z_1 = L. \tag{4.12}$$

Iz gornjih enačb najprej izračunamo razdaljo z_1, ki določa lego grla v resonatorju, nato pa parameter z_0, ki določa območje bližnjega polja, in preko enačbe (3.21) enolično tudi polmer grla

$$z_0^2 = \frac{L(R_1-L)(R_2-L)(R_1+R_2-L)}{(R_1+R_2-2L)^2}. \tag{4.13}$$

Da je snop realen in omejen, mora biti $z_0^2 > 0$ in zato števec gornjega izraza pozitiven. Ta pogoj lahko po kratkem računu zapišemo v obliki stabilnostnega kriterija

$$0 < \left(1-\frac{L}{R_1}\right)\left(1-\frac{L}{R_2}\right) < 1. \tag{4.14}$$

Resonatorji, ki zadoščajo gornjemu pogoju, so stabilni.

Naloga 4.2.1 Izhajajoč iz pogoja, da se na zrcalih krivinski radij valovnih front snopa ujema s krivinskim radijem zrcal (enačbi 4.10 in 4.11), izpelji kriterij za stabilno delovanje resonatorja (enačba 4.14).

Stabilnostni kriterij za resonatorje je najbolj nazorno predstaviti na diagramu, kjer na os x nanašamo L/R_1, na os y pa L/R_2. Na sliki (4.4) je stabilno območje delovanja resonatorjev, kot ga razberemo iz enačbe (4.14), označeno senčeno. Opazimo, da je možnih veliko različnih vrst stabilnih resonatorjev, ob tem da resonatorji, ki so sestavljeni iz dveh konveksnih zrcal, niso nikoli stabilni. Če je eno zrcalo ravno (plankonkavni resonatorji), je grlo Gaussovega snopa vedno na ravnem zrcalu. V primeru konveksno-konkavnega resonatorja leži grlo snopa izven resonatorja. Podrobneje si oglejmo nekaj posebnih primerov stabilnih resonatorjev.

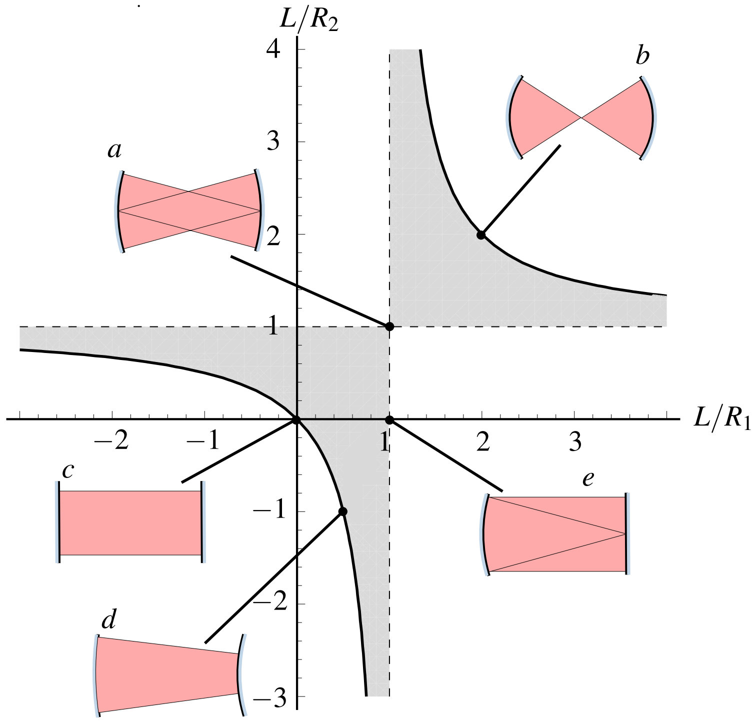
Simetrični resonatorji

Za simetrični resonator velja $R_1 = R_2 = R$. Na diagramu (slika 4.4) se taki resonatorji nahajajo na simetrali lihih kvadrantov pri $x = y$. Pri simetričnih resonatorjih je grlo v sredini resonatorja in enačba (4.13) se poenostavi v

$$z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(2R-L)L}. \tag{4.15}$$

Polmer grla v simetričnem resonatorju je enak

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\sqrt[4]{(2R-L)L}. \tag{4.16}$$



Slika 4.4: Področje stabilnih resonatorjev. Resonator je stabilen, če sta parametra L/R_1 in L/R_2 znotraj osenčenega območja: (a) konfokalni resonator, (b) koncentrični resonator, (c) planparalelni resonator (Fabry-Perot), (d) konveksno-konkavni resonator in (e) plankonkavni resonator.

Po enačbi (3.19) lahko izračunamo še polmer snopa na ogledalu

$$w_1^2 = w_0^2\left[1+\left(\frac{L}{2z_0}\right)^2\right] = \frac{\lambda}{\pi}\frac{R\sqrt{L}}{\sqrt{2R-L}}. \tag{4.17}$$

Pri izbrani dolžini simetričnega resonatorja je polmer snopa na zrcalu najmanjši, kadar je $R = L$. Tedaj sovpadata geometrijski gorišči obeh zrcal, zato imenujemo tak resonator konfokalni. Hiter račun pokaže, da velja $z_0 = L/2$, snop od grla do zrcala pa se razširi za $w_1/w_0 = \sqrt{2}$.

Naloga 4.2.2 Pokaži, da je polmer snopa na izhodnem zrcalu v simetričnem resonatorju z danima parametroma R in L najmanjši, kadar je resonator konfokalni.

Pri dejanskem načrtovanju laserjev velja dodatna omejitev, saj želimo ojačevalno sredstvo, ki je v resonatorju, čim bolj izkoristiti. Pogosto je zato polmer grla snopa razmeroma velik. Iz enačbe (4.16) sledi, da mora biti v tem primeru velik tudi krivinski radij zrcal. S tem pridobimo na ojačanju, po drugi strani pa se nekoliko poslabša stabilnost.

Poglejmo primer. Naj bo dolžina resonatorja laserja $L = 1$ m in valovna dolžina $\lambda = 633$ nm. Tedaj je v konfokalni geometriji po enačbi (4.16) polmer grla $w_0 = 0{,}32$ mm. Premer razelektritvene cevi je navadno nekaj milimetrov in približno tako debel mora biti tudi svetlobni snop, če naj dobro izkoristi ojačanje zaradi stimuliranega sevanja. Da bi pri isti dolžini laserja dobili grlo s premerom 2 mm, moramo vzeti zrcali s krivinskim radijem okoli 50 m. Primer kaže, da že majhna ukrivljenost zrcal zagotovi dokaj ozke snope.

★ Izkaže se, da so konfokalni resonatorji najmanj občutljivi na majhne zasuke zrcal. Pri zasuku zrcala se v navadnih stabilnih resonatorjih namreč premakne os, ki gre skozi krivinski središči obeh zrcal. Če želimo, da je največji odmik nove osi čim manjši, uporabimo konfokalne resonatorje.

Skrajna primera stabilnega simetričnega resonatorja sta koncentrični resonator, pri katerem sovpadata krivinski središči zrcal in $L = 2R$, in planparalelni resonator, pri katerem sta zrcali ravni. V prvem primeru gre po enačbi (4.16) polmer grla proti nič, v drugem pa raste sorazmerno z $R^{1/4}$. Pri ravnih zrcalih postanejo uklonske izgube na robovih znatne. Račun z Gaussovimi snopi tedaj ni več veljaven in treba je uporabiti pristope, ki jih bomo opisali v razdelku (4.6).

Spomnimo se, da obstajajo poleg osnovnega Gaussovega snopa še rešitve obosne enačbe z vozli v prečni smeri, to so snopi višjega reda. Imajo enak parameter z_0 in enako ukrivljenost valovnih ploskev, zato so seveda tudi dobre rešitve za polje v stabilnih resonatorjih. Pri tem je treba vedeti, da je pri enakem w_0 dejanski polmer snopa reda n za približen faktor $\sqrt{n}$ večji (glej nalogo 3.4.1). Če želimo dobiti iz laserja samo osnovni Gaussov snop (imenovan tudi TEM_{00}), ki ima od vseh snopov najbolj gladko valovno fronto in ima najmanjšo divergenco pri danem w_0, pogosto uporabimo zaslonko, ki snope višjih redov poreže, ali kakšen drug element, na primer Fabry-Perotov etalon, ki poveča izgube za snope višjega reda.

★ V praksi se včasih uporabljajo tudi nestabilni resonatorji, to je taki, za katere ne obstajajo rešitve v obliki Gaussovih snopov. Taki resonatorji imajo velike izgube na robovih zrcal, ker žarki v njih niso ujeti. Uporabni so v laserjih z velikim ojačanjem. Njihova prednost je, da je cel volumen resonatorja enakomerno pokrit s svetlobo.

4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom

V prejšnjem razdelku smo izpeljali pogoj za stabilnost resonatorja, sestavljenega iz dveh zrcal s polmeroma R_1 in R_2, ki sta med seboj oddaljeni za L. Izhajali smo iz pogoja, da se ukrivljenost valovnih front na zrcalu ujema z ukrivljenostjo zrcal. Vendar so sistemi z zgolj dvema zrcaloma razmeroma redki. Pogosto so v resonatorju druge optične komponente, ki jih je treba upoštevati pri zapisu kriterija za stabilnost. Takrat si pomagamo z matrikami ABCD.

Izhajamo iz zahteve, da se v stabilnem resonatorju snop po enem celotnem obhodu preslika sam vase. Gaussov snop na neki točki v resonatorju zapišemo s kompleksno ukrivljenostjo (enačba 3.32). V najpreprostejšem primeru resonatorja snop prepotuje dano razdaljo, se odbije od zrcala, prepotuje resonator v nasprotni smeri, se odbije od drugega zrcala in se vrne v začetno lego. V bolj zapletenih primerih dodamo še prehode skozi druge optične elemente. Matriko za celotni prehod potem zapišemo kot produkt matrik ABCD za posamezne prehode $M = M_N M_{N-1} ... M_2 M_1$. Končni produkt za celoten obhod je matrika oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

kompleksni krivinski radij po obhodu pa je enak začetnemu kompleksnemu radiju

$$q_2 = \frac{Aq + B}{Cq + D} = q. \tag{4.19}$$

Gornjo enačbo prepišemo v

$$Cq^2 + (D - A)q - B = 0. \tag{4.20}$$

Da je w realen, mora biti q kompleksen in diskriminanta negativna

$$(D-A)^2+4BC<0. \tag{4.21}$$

Upoštevamo še, da je determinanta matrike $AD-BC=1$ in dobimo pogoj za stabilnost, zapisan s koeficienti matrike M:

$$\boxed{-1<\left(\frac{A+D}{2}\right)<1.} \tag{4.22}$$

Naloga 4.3.1 Pokaži, da je za resonator z dolžino L in s konkavnima zrcaloma s krivinskima radijema R_1 in R_2 pogoj za stabilnost (enačba 4.22) ekvivalenten pogoju (4.14).

★ Podoben, a malo bolj zapleten račun lahko naredimo tudi za resonatorje, v katerih se snop ne vrne v svojo začetno obliko po enem obhodu, ampak je teh obhodov n. Potem zapišemo matriko M kot produkt elementov v enem obhodu, celotna matrika pa je enaka M^n. Iz pogoja, da matrika ne divergira za velike n, izpeljemo pogoj za stabilnost, ki je natančno enak pogoju (4.22), ki smo ga ravnokar izpeljali.

4.4 Resonančne frekvence

Doslej smo obravnavali le prostorsko obliko polja v resonatorju, ničesar pa še nismo povedali o časovni odvisnosti lastnih nihanj. Frekvence lastnih nihanj izpeljemo iz pogoja, da se mora faza snopa pri enem obhodu (preletu resonatorja v obeh smereh) spremeniti za mnogokratnik 2π. Fazo za osnovni snop zapišemo po enačbi (3.29)

$$\phi=kz+\frac{kr^2}{2R}-\eta(z)=kz-\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \tag{4.23}$$

pri čemer gledamo valovanje na osi, pri $r=0$. Razlika faze pri enem preletu je

$$\frac{\omega_n}{c}L-\left[\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right)-\arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right]=n\pi. \tag{4.24}$$

Pri tem smo zanemarili, da lahko pride do dodatne majhne spremembe faze pri odboju na zrcalu. Ta za delček valovne dolžine spremeni efektivno dolžino resonatorja, ki je niti ne poznamo tako natančno. Iz istega razloga za osnovni snop ni treba upoštevati člena v oglatem oklepaju enačbe (4.24), saj gre tudi v tem primeru za nek konstanten premik. Tako dobimo znano enačbo za resonančne frekvence

$$\omega_n=\frac{n\pi c}{L}. \tag{4.25}$$

Razmik med dvema zaporednima lastnima frekvencama je v skladu z enačbo (4.5)

$$\Delta\omega=\frac{\pi c}{L}. \tag{4.26}$$

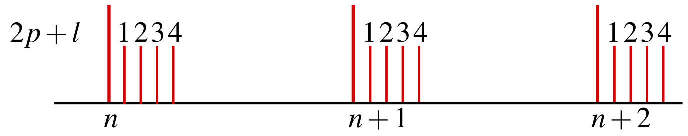
Za snope višjega reda, ki imajo vozle v prečni smeri, je fazni premik odvisen tudi od števila vozlov. Tako je na primer v cilindričnih koordinatah (enačba 3.38)

$$\eta_{p,l}(z)=(2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{4.27}$$

Resonančni pogoj zapišemo kot

$$\frac{\omega_{n,p,l}}{c}L-(2p+l+1)\left[\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right)-\arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right]=n\pi. \tag{4.28}$$

Resonančne frekvence so torej odvisne tudi od števila prečnih vozlov (slika 4.5), kar je dodaten razlog, da v laserjih vzbujamo le osnovno lastno nihanje.

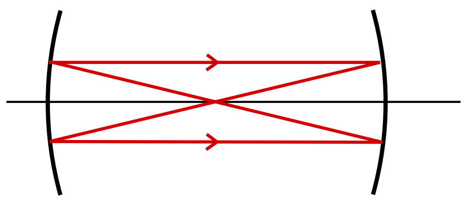


Slika 4.5: Resonančne frekvence za skoraj planparalelni ($R \gg L$) resonator.

Zanimiv in praktično pomemben je primer konfokalnega resonatorja, pri katerem je $z_0 = L/2$ in $\arctan(L/2z_0) = \arctan(1) = \pi/4$. Resonančne frekvence so

$$\omega_{n,p,l}=\frac{\pi c}{L}\left[n+\frac{1}{2}(2p+l+1)\right]. \tag{4.29}$$

Snopi, pri katerih je $2p+l$ liho število, imajo iste resonančne frekvence kot osnovni snopi, pri sodih $2p+l$ pa se pojavijo še resonance na sredini med osnovnimi. Razmik med sosednjimi frekvencami je tako $\Delta\nu = c/4L$ in konfokalni interferometer se obnaša kot dvakrat daljši planparalelni. To lahko razumemo tudi iz geometrijske slike: žarek, ki vstopi v konfokalni interferometer vzporedno z osjo, se šele po dveh preletih vrne sam vase.



Slika 4.6: V konfokalnem resonatorju se žarek šele po dveh preletih vrne sam vase.

Pri skoraj planparalelnem resonatorju je $z_0 \gg L$, $\arctan(L/2z_0)$ lahko razvijemo, upoštevamo enačbo (4.15) in dobimo

$$\omega_{n,p,l}=\frac{\pi c}{L}\left[n+(2p+l+1)\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2L}{R}}\right]. \tag{4.30}$$

Ker je L majhen v primerjavi z R, so resonance snopov nizkega prečnega reda zelo blizu resonancam osnovnih snopov, niso pa čisto enake. Poglejmo primer. Vzemimo simetrični resonator z dolžino $L = 1$ m in krivinskim radijem zrcal $R = 50$ m, valovna dolžina pa naj bo $\lambda = 500$ nm. Z uporabo enačbe (4.15) hitro lahko izračunamo $z_0 = 4{,}97$ m. Ker je pogoj $z_0 \gg L$ izpolnjen, lahko uporabimo gornji približek. Razlika med frekvencama dveh osnovnih snopov je

$$\Delta\omega_{n,p,l}=\frac{\pi c}{L}=940\ \text{MHz}, \tag{4.31}$$

medtem ko je razlika med frekvencama dveh prečnih snopov

$$\Delta\omega_{n,p,l}=\frac{c}{L}\sqrt{\frac{2L}{R}}=60\ \text{MHz}. \tag{4.32}$$

4.5 Izgube v resonatorjih

Energija lastnega nihanja odprtega resonatorja ni konstantna, ampak se počasi zmanjšuje iz več vzrokov:

1. Odbojnost ogledal ni enaka 1. Tudi če bi znali narediti popolno odbojna zrcala, tak resonator ne bi bil uporaben, saj nihanja ne bi mogli sklopiti z zunanjim poljem. Če torej hočemo dobiti nekaj svetlobe iz laserja ali filtrirati vpadajoči snop, mora biti odbojnost vsaj enega od zrcal manjša od 1.

2. Na sredstvu in na optičnih elementih v resonatorju pride do absorpcije in sipanja svetlobe. Te izgube želimo navadno čim bolj zmanjšati.

3. Uklonske izgube so odvisne od premera zrcal in premera snopa na njih. V dani geometriji imajo najmanjši polmer osnovni snopi, snopi višjega reda so širši, zato imajo večje uklonske izgube. Merilo za uklonske izgube je Fresnelovo število (enačba 4.6) $N_F = a^2/(L\lambda)$, kjer je a polmer ogledal. Pri enakem N_F je polmer snopa na izhodnem zrcalu najmanjši, če je resonator konfokalni, zato ima tak resonator tudi najmanjše uklonske izgube (glej nalogo 4.2.2). Če je N_F znatno večji od 1, kar navadno je, so uklonske izgube zanemarljive.

Vse izgube lahko popišemo z razpadnim časom za energijo

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau}W, \tag{4.33}$$

in

$$W = W_0 e^{\frac{-2t}{\tau}}, \tag{4.34}$$

pri čemer τ imenujemo življenjski ali razpadni čas nihanj. Izguba energije na celoten obhod resonatorja je

$$-dW = (1-\mathscr{R}_1)W + (1-\mathscr{R}_2)W + \Lambda_0 W = \Lambda W. \tag{4.35}$$

Z $\mathscr{R}_1$ in $\mathscr{R}_2$ smo označili odbojnosti zrcal, od katerih je navadno ena kolikor mogoče blizu 1. Parameter Λ_0 popiše absorpcijo in sipanje znotraj resonatorja ter morebitne uklonske izgube. Tipične vrednosti zanj so do nekaj stotink. Celotne izgube popišemo s parametrom Λ.

Razpadni čas nihanja lahko neposredno povežemo z izgubami, če v enačbo (4.33) vstavimo čas enega obhoda $t = 2L/c$. Zapišemo

$$\frac{dW}{W} = \Lambda = -\frac{2}{\tau}\frac{2L}{c}, \tag{4.36}$$

od koder sledi

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\Lambda c}{4L} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{c}{4L}[(1-\mathscr{R}_1) + (1-\mathscr{R}_2)], \tag{4.37}$$

kjer smo s

$$\tau_0 = \frac{4L}{\Lambda_0 c} \tag{4.38}$$

označili razpadni čas zaradi notranjih izgub.

Notranje izgube so navadno zelo majhne, odbojnost enega zrcala pa je približno enaka 1, tako da je življenjski čas nihanj približno

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{c}{4L}(1-\mathscr{R}).} \tag{4.39}$$

Zaradi dušenja se energija lastnih nihanj eksponentno zmanjšuje, prav tako tudi amplituda jakosti električnega polja. Amplituda pojema z dvakrat daljšim karakterističnim časom, ki je enak kar τ. Spekter eksponentno pojemajoče funkcije lahko izračunamo (glej nalogo 2.4.2) in dobimo Lorentzovo krivuljo s širino črte, ki ustreza ravno

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{1}{\tau}. \tag{4.40}$$

Lastne frekvence torej niso neskončno ozke, ampak imajo končno širino $2/\tau$. Poglejmo primer. Naj bodo notranje izgube na en obhod $\Lambda_0 = 0,01$, eno zrcalo naj bo idealno, drugo naj ima odbojnost $\mathscr{R} = 0,93$. Dolžina resonatorja naj bo $L = 0,5$ m, valovna dolžina pa 500 nm. Tedaj je $1/\tau = 12\cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$. Zanimivo je pogledati razmerje med razliko resonančnih frekvenc $\Delta\omega$ (enačba 4.5) in širino resonance $2/\tau$. Dobimo $\Delta\omega\tau/2 \approx 80$.

★ Namesto razpadnega časa τ se pogosto za opis izgub uporablja dobrota resonatorja, ki jo vpeljemo kot razmerje med resonančno frekvenco in širino črte

$$Q = \frac{\omega_n}{2\Delta\omega_{1/2}} = \frac{\omega_n\tau}{2}. \tag{4.41}$$

Za tipične optične resonatorje je resonančna frekvenca $\omega_n \sim 10^{15}$ Hz, širina pa reda $1/\tau \sim 10^7$ Hz. Faktor dobrote je tako $Q \sim 10^8$. Optični resonatorji imajo zelo velike faktorje dobrote!

Poglejmo še primer, ko so notranje izgube zanemarljive in sta odbojnosti obeh zrcal enaki. Potem sledi iz enačbe (4.37)

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{c}{2L}(1-\mathscr{R}).} \tag{4.42}$$

Do istega rezultata pridemo tudi z razvojem izraza za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra (enačba 4.8) okoli vrha pri ω_n

$$T = \frac{1}{1+\frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2 L\frac{(\omega-\omega_n)}{c}} \approx \frac{1}{1+\left[\frac{2}{(1-\mathscr{R})}\frac{L}{c}(\omega-\omega_n)\right]^2}, \tag{4.43}$$

kjer smo upoštevali še, da je odbojnost blizu $\mathscr{R} \approx 1$. Rezultat je znana Lorentzova krivulja oblike

$$T = \frac{(\Delta\omega_{1/2})^2}{(\omega-\omega_n)^2 + (\Delta\omega_{1/2})^2}, \tag{4.44}$$

od koder hitro razberemo

$$\frac{1}{\tau} = \Delta\omega_{1/2} = \frac{c}{2L}(1-\mathscr{R}). \tag{4.45}$$

4.6 *Obravnava z uklonskim integralom

V nestabilnih resonatorjih stacionarna rešitev v obliki stoječega Gaussovega snopa ne obstaja. Zato je v takih resonatorjih precej zahtevno poiskati rešitev za električno polje. Ker pa je problem soroden uklonu, ga lahko obravnavamo s pomočjo uklonske teorije.

Označimo jakost električnega polja v točki P_1 prvega zrcala z E_1. Polje na drugem zrcalu v točki P_2 lahko zapišemo s pomočjo Kirchhoffovega uklonskega integrala (enačba 1.54)

$$E_2 = -\frac{i}{2\lambda}\int_1 E_1(P_1)\frac{e^{ikr}(1+\cos\vartheta)}{r}\,dS_1 \tag{4.46}$$

$$= \int_1 E_1(P_1)K(P_1,P_2)dS_1, \tag{4.47}$$

kjer je r razdalja med točkama P_1 in P_2, ϑ je kot med zveznico in normalo na zrcali, druge faktorje pa smo pospravili v faktor

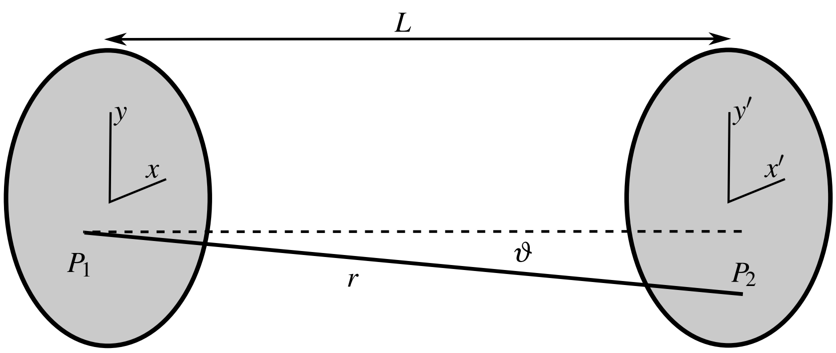
$$K(P_1,P_2) = -\frac{i}{2\lambda}\frac{e^{ikr}(1+\cos\vartheta)}{r}, \tag{4.48}$$

ki predstavlja jedro integralske enačbe. Polje na prvem zrcalu mora biti na enak način povezano s poljem na drugem. Če naj zapisano polje predstavlja lastno nihanje resonatorja, mora biti po dveh odbojih sorazmerno začetnemu polju

$$E_1(P) = \gamma\int_1\int_2 E_1(P_1)K(P_1,P_2)K(P_2,P_1)\,dS_1\,dS_2. \tag{4.49}$$

Enačba (4.49) je homogena integralska enačba, katere lastne rešitve so iskana lastna nihanja elektromagnetnega polja v resonatorju. Kompleksne lastne vrednosti γ določajo frekvenco in dušenje nihanj. V splošnem rešitev ni mogoče poiskati analitično in treba je uporabiti numerične metode. Najenostavnejša je iterativna metoda, pri kateri začnemo z nekim začetnim poljem in ponavljamo integracijo v enačbi (4.49), dokler se polje ne spreminja več.

Integralsko enačbo (4.49) je mogoče rešiti v posebnem primeru konfokalnega resonatorja. Privzemimo, da je brez izgub. Ker je resonator simetričen, se polje na obeh zrcalih lahko razlikuje kvečjemu za predznak. Vpeljimo kartezične koordinate na obeh zrcalih, kot kaže slika (4.7).



Slika 4.7: Koordinatna sistema na zrcalih resonatorja

Pričakujemo, da bo prečna razsežnost lastnega stanja majhna v primerjavi z dolžino resonatorja L, zato lahko r razvijemo

$$r \approx L - \frac{xx' + yy'}{L}. \tag{4.50}$$

Ker obravnavamo konfokalni resonator, je krivinski radij zrcal kar enak dolžini resonatorja. V imenovalcu jedra integrala (enačba 4.48) zato lahko r nadomestimo z L. Koti med zveznico točk na obeh zrcalih in normalo na zrcali so majhni, zato je $\cos\vartheta \approx 1$.

Tako iz enačbe (4.47) sledi

$$E(x',y') = \pm\frac{ie^{ikL}}{\lambda L}\int E(x,y)\exp\left[\frac{-ik(xx'+yy')}{L}\right]dx\,dy. \tag{4.51}$$

Integracija poteka po celem zrcalu. Jedro integrala je produkt dveh faktorjev, ki vsebujeta vsak le x' ali y' koordinati. Zato poiščimo rešitev enačbe (4.51) v obliki produkta $E(x',y') = E_0 f(x')g(y')$. S tem nastavkom morata biti funkciji $f(x')$ in $g(y')$ rešitvi enačbe

$$\alpha f(x') = \int f(x)\exp\left[\frac{-ikxx'}{L}\right]dx, \tag{4.52}$$

kjer je α še neznana konstanta. Meje integrala so od enega do drugega roba zrcala. Če je zrcalo dovolj veliko, pričakujemo, da je polje na robu dovolj majhno, da lahko meje vzamemo kar od $-\infty$ do ∞. Vpeljimo še brezdimenzijski koordinati

$$X' = x'\sqrt{k/L} \quad \text{in} \quad Y' = y'\sqrt{k/L} \tag{4.53}$$

in dobimo

$$\alpha f(X') = \sqrt{\frac{L}{k}}\int_{-\infty}^{\infty} f(X)e^{-iXX'}\,dX \tag{4.54}$$

ter podobno enačbo za $g(Y')$. Enačba (4.54) pravi, da mora biti $f(X)$ podobna svoji Fourierevi transformiranki. Najpreprostejša funkcija s to lastnostjo je Gaussova funkcija

$$f(X) = \exp[-\frac{1}{2}X^2]. \tag{4.55}$$

Polje na zrcalu ima tako po pričakovanju obliko Gaussovega snopa

$$E(x,y) = E_0\exp\left[-\frac{k(x^2+y^2)}{2L}\right]. \tag{4.56}$$

Poglejmo še konstanto α. Imeti mora imeti vrednost $\alpha = \sqrt{2\pi L/k} = \sqrt{\lambda L}$. Enaki izrazi veljajo tudi za smer y. Postavimo zdaj izračunano električno poljsko jakost (enačba 4.56) z ustrezno vrednostjo za α v enačbo (4.51) in upoštevajmo, da mora biti $E_2 = \pm E_1$. Sledi

$$i\alpha^2\frac{e^{ikL}}{\lambda L} = ie^{ikL} = \pm 1. \tag{4.57}$$

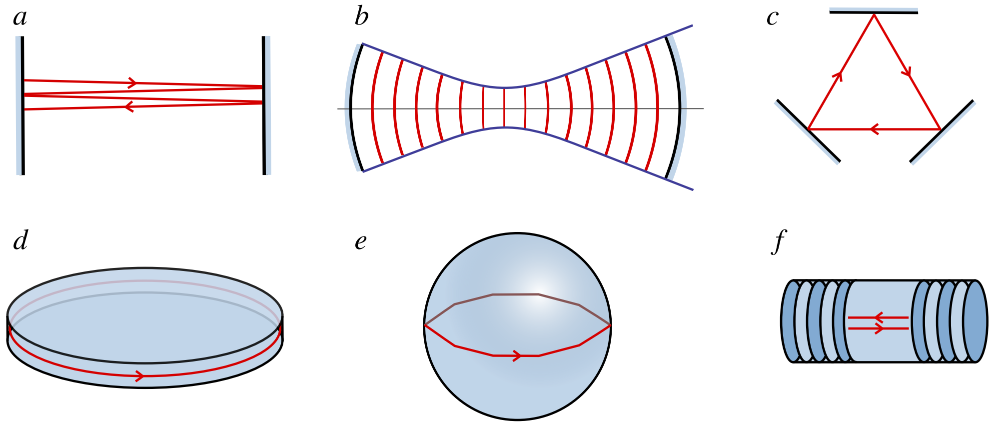
Izpeljemo resonančni pogoj za frekvenco lastnega stanja, ki ga že poznamo (enačba 4.29)

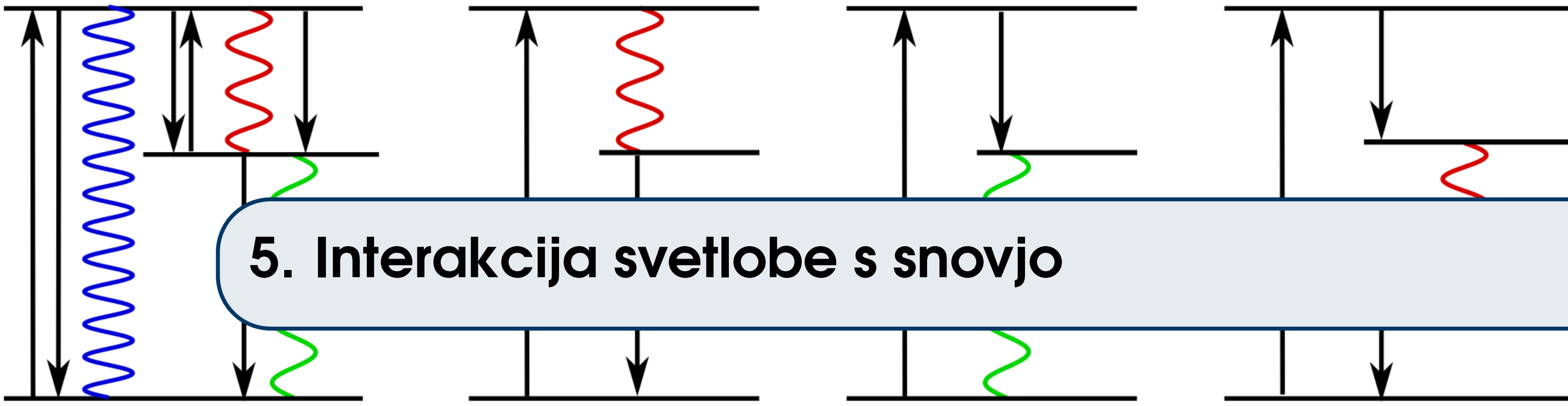
$$\omega_n = ck_n = \frac{c}{L}(2n+1)\frac{\pi}{2}. \tag{4.58}$$

Integralska enačba, dobljena iz uklonske teorije, tako da isti rezultat kot stoječe valovanje oblike Gaussovih snopov, ki so rešitve obosne valovne enačbe. To nas seveda ne preseneča, saj je obosna valovna enačba enako natančna kot Fresnelova uklonska teorija.

Naloga 4.6.1 Pokaži, da so funkcije, ki so sorazmerne svoji Fourierevi transformaciji, Hermite-Gaussove funkcije (enačba 3.33), in izračunaj lastne frekvence stanj višjega reda.

★ V tem poglavju smo obravnavali samo dva primera laserskih resonatorjev: Fabry-Perotov resonator z dvema vzporednima ravnima zrcaloma (a) in resonator z dvema sferičnima zrcaloma (b). Poleg teh dveh primerov je v uporabi še cela vrsta različnih resonatorjev. Ciklični resonator (c) je sestavljen iz več zrcal in žarek ciklično potuje med njimi. V vlakenskih laserjih je resonator optično vlakno med dvema zrcaloma ali pa sklenjeno vlakno. Kot laserski resonator lahko delujejo tudi mikroploščice (d) ali mikrokroglice (e), v katere je s totalnim odbojem ujeta svetloba. Namesto zrcal v mikroresonatorjih uporabimo tudi periodične dielektrične strukture, na katerih pride do Braggovega odboja (f).





5. Interakcija svetlobe s snovjo

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali svetlobo v praznem prostoru. Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. To je seveda zelo obširna tema in jo bomo obdelali le toliko, kolikor je treba za obravnavo ojačevanja svetlobe s stimulirano emisijo, ki je osnova za delovanje laserjev. Najprej bomo na kratko pogledali termodinamsko ravnovesje svetlobe v stiku s toplotnim rezervoarjem, torej sevanje črnega telesa, ki zahteva kvantno obravnavo elektromagnetnega polja. Nato bomo vpeljali fenomenološki Einsteinov opis mikroskopskih procesov absorpcije, spontane in stimulirane emisije in pokazali, da ti procesi niso neodvisni. Izpeljali bomo izraze za absorpcijski koeficient in koeficient ojačanja, na koncu poglavja pa bomo nakazali še kvantnomehansko izpeljavo verjetnosti za prehod atoma iz višjega energijskega stanja v nižje s sevanjem.

5.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja

Ravni valovi so enostavne in zelo prikladne rešitve valovne enačbe (enačba 1.14), zato jih pri reševanju problemov pogosto uporabimo kot bazo, po kateri razvijemo elektromagnetno polje. Možen je razvoj po celotnem prostoru, vendar je tedaj nekoliko nerodna normalizacija baznih funkcij. Če se omejimo na le del prostora, se temu problemu izognemo. Mora pa biti izbrani del prostora dovolj velik, da končni rezultat ni odvisen od izbire njegove velikosti in oblike.

Najpreprosteje je vzeti votlino v obliki velike kocke s stranico L in idealno prevodnimi stenami. Rešitve Maxwellovih enačb (enačbe 1.1 do 1.4) znotraj take votline so ob upoštevanju robnih pogojev (enačba 1.10) stoječa valovanja. Zapišemo jih v obliki

$$\begin{aligned}
E_x &= E_{x0}\cos\frac{\pi l x}{L}\sin\frac{\pi m y}{L}\sin\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t},\\
E_y &= E_{y0}\sin\frac{\pi l x}{L}\cos\frac{\pi m y}{L}\sin\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t},\\
E_z &= E_{z0}\sin\frac{\pi l x}{L}\sin\frac{\pi m y}{L}\cos\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t},
\end{aligned}\tag{5.1}$$

kjer so l, m in n cela števila. Vsako stoječe valovanje je določeno z valovnim vektorjem

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\pi l}{L}, \frac{\pi m}{L}, \frac{\pi n}{L}\right),\tag{5.2}$$

katerega velikost je povezana s frekvenco $k = \omega/c$. Iz Maxwellove enačbe za prazen prostor (enačba 1.3) $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ sledi $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$. Za vsako trojico števil l, m in n imamo tako le dve neodvisni polarizaciji.

Naloga 5.1.1 Pokaži, da stoječe valovanje, zapisano v obliki (enačba 5.1), reši valovno enačbo v kocki s stranico L in zadosti robnim pogojem idealno prevodnih sten votline.

Preštejmo, koliko je lastnih valovanj v intervalu velikosti valovnega vektorja med k in $k+dk$ – to smo na hitro naredili že pri obravnavni resonatorjev (enačba 4.1). Možni valovni vektorji tvorijo tridimenzionalno mrežo v prvem oktantu prostora vseh valovnih vektorjev. Razmik med dvema zaporednima mrežnima točkama v smeri ene od osi je π/L. Število točk v osmini krogelne plasti med k in $k+dk$ je za dovolj velike l, m in n enako volumnu plasti, deljenemu z volumnom, ki pripada posamezni mrežni točki, to je $(\pi/L)^3$. Upoštevati moramo še, da imamo pri vsakem $\mathbf{k}$ dve polarizaciji, in dobimo

$$dN = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \pi k^2\,dk. \tag{5.3}$$

Zapišemo število stanj na enoto volumna

$$\frac{dN}{V} = \frac{k^2}{\pi^2}dk \tag{5.4}$$

in ga prevedemo na frekvenčno odvisnost

$$\frac{dN}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}d\omega. \tag{5.5}$$

Vpeljemo gostoto stanj $\rho(\omega)$, to je število valovanj na frekvenčni interval in enoto volumna votline

$$\boxed{\rho(\omega) = \frac{dN}{V\,d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}.} \tag{5.6}$$

Vsote po lastnih valovanjih, to je po dovoljenih vrednostih valovnega vektorja k, lahko s pomočjo gostote stanj spremenimo v integrale po k ali po ω

$$\sum_k \ldots \quad \to \quad V\int \rho(k)\ldots dk = V\int \rho(\omega)\ldots d\omega. \tag{5.7}$$

Označimo zdaj brezdimenzijski krajevni del rešitve (enačba 5.1) z E_α, kjer α označuje trojico števil l, m in n in še obe možni polarizaciji. Pripadajoče magnetno polje izračunamo z Maxwellovo enačbo (enačba 1.2)

$$\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = i\omega \mathbf{B}_\alpha. \tag{5.8}$$

Polja $\mathbf{E}_\alpha$ in $\mathbf{B}_\alpha$ tvorijo poln ortogonalen sistem, zato lahko vsako elektromagnetno polje v votlini razvijemo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}}\sum_\alpha p_\alpha(t)\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \quad \text{in} \\
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= i\sqrt{\frac{\mu_0}{V}}c_0\sum_\alpha \omega_\alpha q_\alpha(t)\mathbf{B}_\alpha(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Postavimo splošen razvoj (enačbi 5.9) v Maxwellovi enačbi (enačba 1.2 in 1.1), upoštevamo zvezo (enačba 5.8) in njej analogno za rotor magnetnega polja in dobimo

$$p_\alpha = \dot{q}_\alpha \quad \text{in} \quad \omega_\alpha^2 q_\alpha = -\dot{p}_\alpha, \tag{5.10}$$

od koder sledi še

$$\ddot{p}_\alpha + \omega_\alpha^2 p_\alpha = 0. \tag{5.11}$$

Ta enačba da seveda pričakovano časovno odvisnost oblike $e^{-i\omega_\alpha t}$.

Naloga 5.1.2 Uporabi razvoj polja (enačbi 5.9) in iz Maxwellovih enačb izpelji enačbo (5.11).

Z upoštevanjem razvoja (enačbi 5.9) lahko zapišemo še energijo polja – Hamiltonovo funkcijo[1]

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int (\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0})\, dV = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}(p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2). \tag{5.12}$$

Gornji zapis (enačbi 5.11 in 5.12) kaže, da lahko elektromagnetno polje v votlini obravnavamo kot sistem neodvisnih harmonskih oscilatorjev. Pri tem se koeficienti razvoja p_{α} in q_{α} obnašajo kot gibalne količine in koordinate.

Prehod v kvantno mehaniko dosežemo tako, da klasičnim spremenljivkam gibalne količine in koordinate priredimo operatorje $\hat{p}_{\alpha}$ in $\hat{q}_{\alpha}$, ki morajo zadoščati komutacijskim pravilom

$$[\hat{q}_{\alpha}, \hat{p}_{\beta}] = i\hbar\delta_{\alpha,\beta}. \tag{5.13}$$

Iz kvantne mehanike vemo, da so lastne vrednosti energije harmonskega oscilatorja, opisanega s Hamiltonianom (enačba 5.12), diskretne. Njihove vrednosti so enake

$$\boxed{W_{n,\alpha} = \hbar\omega_{\alpha}(n_{\alpha} + \frac{1}{2}), \quad n_{\alpha} = 0, 1, 2\ldots} \tag{5.14}$$

Razliki energije harmonskega oscilatorja, če se n_{α} spremeni za 1, pravimo foton. Energija fotona je torej enaka $\hbar\omega$, n pa predstavlja število fotonov z dano energijo.

★ Vzemimo svetlobo z valovno dolžino 500 nm. Temu ustreza frekvenca $\omega = 3,8 \cdot 10^{15}$ Hz in energija fotona $W = 4 \cdot 10^{-19}$ J oziroma $W = 2,5$ eV.

Celotno energijo kvantiziranega elektromagnetnega polja v votlini dobimo tako, da seštejemo prispevke vseh možnih stanjih

$$W = \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha} n_{\alpha}, \tag{5.15}$$

pri čemer smo izpustili ničelno energijo. Izpuščali jo bomo tudi v nadaljevanju, saj je to energija osnovnega stanja, ki se ne more sprostiti.

5.2 Sevanje črnega telesa

Obravnavajmo sevanje v votlini, ki je v toplotnem ravnovesju s stenami s temperaturo T. Iz statistične fizike vemo, da verjetnost P, da je v izbranem stanju votline α število fotonov enako n_{α}, zapišemo z Boltzmannovo porazdelitvijo

$$P(n_{\alpha}) = \frac{e^{-W_{n,\alpha}/k_B T}}{\sum_{n_{\alpha}} e^{-W_{n,\alpha}/k_B T}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_{\alpha} n_{\alpha}}}{\sum_{n_{\alpha}} e^{-\beta\hbar\omega_{\alpha} n_{\alpha}}} = e^{-\beta\hbar\omega_{\alpha} n_{\alpha}}(1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\alpha}}), \tag{5.16}$$

pri čemer $\beta = 1/k_B T$ in k_B Boltzmannova konstanta. Povprečno število fotonov v stanju α je potem

$$\langle n_{\alpha}\rangle = \sum_{n_{\alpha}} n_{\alpha} P(n_{\alpha}) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\alpha}} - 1}. \tag{5.17}$$

[1] Irski fizik in matematik Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865.

Povprečno energijo posameznega stanja zapišemo kot produkt energije tega stanja in povprečnega števila fotonov v tem stanju

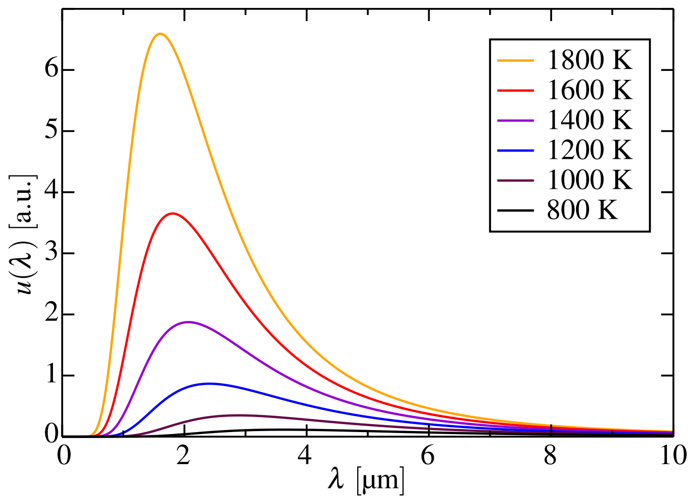
$$\langle W_\alpha \rangle = \hbar\omega \langle n_\alpha \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega_\alpha} - 1}. \tag{5.18}$$

Ravnovesno gostoto energije elektromagnetnega polja v votlini na frekvenčni interval u izračunamo tako, da povprečno energijo posameznega stanja pomnožimo še z gostoto stanj $\rho(\omega)$ (enačba 5.6). Dobimo znano formulo za energijo na enoto volumna na enoto frekvence, to je Planckov zakon[2]. Opiše spektralno gostoto energije svetlobe, izsevane iz črnega telesa, ki je v toplotnem ravnovesju z okolico s temperaturo T

$$\boxed{u(\omega) = \hbar\omega \langle n \rangle \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}.} \tag{5.19}$$

Planckov zakon lahko zapišemo tudi z valovno dolžino in dobimo energijo na enoto volumna na interval valovne dolžine

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\beta hc/\lambda} - 1}. \tag{5.20}$$



Slika 5.1: Planckov spekter za sevanje črnega telesa pri različnih temperaturah

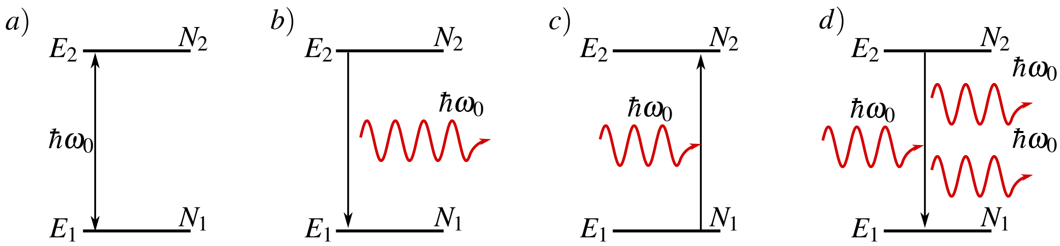
5.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje

Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. Naj bo v votlini poleg elektromagnetnega polja še N atomov, ki se med seboj ne motijo. Za začetek naj bodo atomi prav enostavni: imajo naj le dve energijski stanji z energijama E_1 in E_2 (slika 5.2 a). Stanje E_2 naj bo nad E_1, razlika med njima pa naj bo

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_0. \tag{5.21}$$

Zaradi interakcije s poljem pri frekvenci prehoda ω_0 atomi prehajajo iz nižjega stanja v višje in obratno. Prehajanje med obema stanjema opisujejo trije procesi: spontano sevanje, absorpcija in stimulirano sevanje.

[2] Nemški fizik in nobelovec Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947.



Slika 5.2: Shema energijskih nivojev dvonivojskega atoma (a) in prehodov med njima: spontano sevanje (b), absorpcija (c) in stimulirano sevanje (d).

Spontano sevanje

Vemo, da atom v vzbujenem stanju tudi brez vpliva zunanjega polja ni stabilen, temveč prej ali slej preide v nižje stanje. Temu pojavu pravimo spontano sevanje ali spontana emisija (slika 5.2 b). Pri spontanem sevanju se izseva foton v katerokoli stanje polja v bližini frekvence prehoda, pri tem sta smer in polarizacija izsevane svetlobe poljubni. Verjetnost za prehod na časovno enoto označimo z A_{21}. Za dovoljene prehode je vrednost $A_{21} \sim 10^6 - 10^8/\mathrm{s}$, za prepovedane pa okoli $\sim 10^4/\mathrm{s}$. Karakteristični (naravni) razpadni čas gornjega stanja vpeljemo kot $\tau = 1/A_{21}$.

Zaradi končnega življenjskega časa ima vzbujeno stanje končno spektralno širino. Najpogosteje je atomska spektralna črta kar Lorentzove oblike z vrhom pri ω_0 (enačba 2.22)

$$g(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \tag{5.22}$$

Funkcija $g(\omega)$ je normirana

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, d\omega = 1, \tag{5.23}$$

za grobe ocene pa funkcijo g aproksimiramo tudi s pravokotnikom širine 2γ in višine $1/2\gamma$.

Absorpcija

Absorpcija fotona je prehod, pri katerem se foton z ustrezno energijo absorbira, atom pa preide iz nižjega stanja v višje (slika 5.2 c). Verjetnost za prehod na časovno enoto r_{12} je sorazmerna spektralni gostoti energije polja $u(\omega)$, to je energiji na enoto volumna in frekvenčni interval, pri frekvenci prehoda ω_0. Sorazmernostni koeficient označimo z B_{12} in dobimo

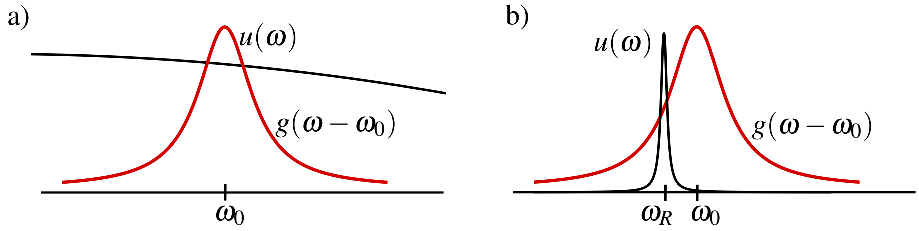
$$r_{12} = B_{12} u(\omega_0). \tag{5.24}$$

To je enostavno razumeti. Več kot je fotonov v votlini pri frekvenci, ki je v bližini frekvence prehoda, več fotonov se bo absorbiralo in večja je verjetnost za prehod atoma v višje stanje. Pri absorpciji se seveda število fotonov v enem od stanj polja pri frekvenci ω_0 zmanjša za ena.

Stimulirano sevanje

Tretji pojav je prehod atoma iz višjega stanja v nižje zaradi interakcije s poljem. Temu procesu pravimo stimulirano sevanje ali stimulirana emisija. Tudi verjetnost za stimuliran prehod na časovno enoto r_{21} je sorazmerna s spektralno gostoto energije polja pri frekvenci prehoda ω_0

$$r_{21} = B_{21} u(\omega_0). \tag{5.25}$$



Slika 5.3: Pri izračunu verjetnosti za absorpcijo in stimulirano emisijo je pomembno, ali je spekter gostote elektromagnetnega polja $u(\omega)$ bistveno širši (a) ali bistveno ožji (b) od širine atomske spektralne črte $g(\omega-\omega_0)$.

V tem primeru smo sorazmernostni koeficient označili z B_{21}. Kadar pride do stimuliranega sevanja, se število atomov v vzbujenem stanju zmanjša, število fotonov v stanju, ki je prehod povzročilo, pa se poveča za ena. Izsevana svetloba ima enako fazo, frekvenco, polarizacijo in smer potovanja kot vpadla. Tipične vrednosti parametra so $B_{21} \sim 10^{16} - 10^{20}$ m^3/Js^2.

Preden nadaljujemo, se še nekoliko pomudimo pri izrazih za absorpcijo (enačba 5.24) in stimulirano emisijo (enačba 5.25). Zapisani enačbi veljata le, kadar je spektralna gostota elektromagnetnega polja $u(\omega)$ preko celotne spektralne širine prehoda približno konstantna (slika 5.3 a). To je gotovo res, če obravnavamo sevanje v votlini, ki je v termičnem ravnovesju (črno telo).

V splošnem primeru, ko se spekter vpadne svetlobe spreminja v območju frekvence prehoda, moramo sešteti prispevke po ozkih frekvenčnih intervalih

$$r_{12} = B_{12} \int g(\omega-\omega_0)\, u(\omega)\, d\omega. \tag{5.26}$$

Gornji zapis preverimo na primeru spektra črnega telesa, ki se ne spreminja dosti v območju prehoda. Takrat $u(\omega)$ postavimo pred integral in po pričakovanju dobimo znano zvezo (enačba 5.24).

Če pa na atome svetimo s svetlobo s spektrom, ki je ozek v primerjavi s spektralno širino prehoda (na primer iz laserskega resonatorja), je verjetnost za prehod odvisna tudi od tega, kako blizu centralne frekvence prehoda je frekvenca vpadne svetlobe (slika 5.3 b). Naj bo $w_{\omega R}$ gostota energije monokromatske svetlobe s frekvenco ω_R. Verjetnost za absorpcijo na časovno enoto je potem

$$\boxed{r_{12} = B_{12} g(\omega_R-\omega_0)\, w_{\omega R}.} \tag{5.27}$$

Koeficiente A_{21}, B_{12} in B_{21}, s katerimi smo opisali spontano sevanje, absorpcijo in stimulirano emisijo je prvi vpeljal Einstein[3], zato jih imenujemo tudi Einsteinovi koeficienti. Poglejmo si jih podrobneje.

Einsteinovi koeficienti

Vpeljimo zasedenost stanj, ki pove število atomov v določenem stanju. Ker obravnavamo preproste modele atomov z zgolj dvema stanjema, zapišemo samo dve zasedenosti. Naj bo N_1 zasedenost nižjega stanja, N_2 zasedenost višjega stanja, skupno število atomov pa $N = N_1 + N_2$. V prisotnosti svetlobe se bo število atomov v spodnjem in zgornjem stanju v splošnem spreminjalo, skupno število pa se bo ohranjalo.

[3]Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.

Obravnavajmo termično ravnovesje, ko je spekter svetlobe bistveno širši od širine atomskega prehoda (slika 5.3 a), tako da lahko uporabljamo enačbi (5.24) in (5.25). Zasedenost višjega nivoja se zmanjšuje zaradi spontanih in stimuliranih prehodov v nižje stanje, povečuje pa se zaradi absorpcije. To zapišemo z enačbo

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - r_{21}N_2 + r_{12}N_1 = -A_{21}N_2 - B_{21}u(\omega_0)N_2 + B_{12}u(\omega_0)N_1. \tag{5.28}$$

Zaradi ohranitve skupnega števila atomov velja

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{-dN_2}{dt}. \tag{5.29}$$

V termičnem ravnovesju sta zasedenosti konstantni, tako da lahko zapišemo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}u(\omega_0)N_2 - B_{12}u(\omega_0)N_1 = 0. \tag{5.30}$$

Vemo tudi, da v termičnem ravnovesju za zasedenosti N_1 in N_2 velja Boltzmannova porazdelitev

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2-E_1)} = e^{-\beta\hbar\omega_0}, \tag{5.31}$$

kjer je $\beta = 1/k_BT$. Izrazimo spektralno gostoto $u(\omega)$ iz enačbe (5.30)

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}} \tag{5.32}$$

in uporabimo enačbo (5.31), da dobimo

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}/B_{12}}{e^{\beta\hbar\omega_0} - B_{21}/B_{12}}. \tag{5.33}$$

Po drugi strani pa vemo, da je v termičnem ravnovesju spektralna gostota energije sevanja $u(\omega)$ kar enaka termični Planckovi gostoti $u_T(\omega_0)$ (enačba 5.19). Iz primerjave obeh zapisov ugotovimo, da morata biti koeficienta B_{21} in B_{12} enaka, med A_{21} in B_{12} pa velja zveza

$$\boxed{A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}B_{12} \qquad \text{in} \qquad B_{12} = B_{21}.} \tag{5.34}$$

Koeficient pred B_{12} je ravno enak gostoti stanj elektromagnetnega polja $\rho(\omega)$ (enačba 5.6), pomnoženi z energijo fotona $\hbar\omega$. Videli bomo, da to ni slučaj, saj to izhaja iz verjetnosti za prehod v kvantni elektrodinamiki (poglavje 5.10). Pozoren bralec je lahko tudi opazil, da je z enačbo (5.33), ki smo jo dobili le z uporabo Boltzmannove porazdelitve za atome, že določena oblika Planckove formule, ne da bi karkoli rekli o fotonih.

★ Zveza $B_{12} = B_{21}$ velja le v primeru nedegeneriranih stanj. V realnih sistemih pa so stanja pogosto degenerirana. Takrat je treba gornje enačbe ustrezno popraviti in dobimo

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{g_1}{g_2}, \tag{5.35}$$

pri čemer g_1 in g_2 označujeta degeneriranost stanj.

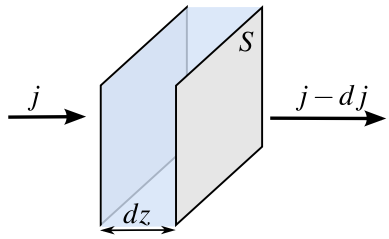
5.4 Absorpcijski koeficient

Naj na izbran volumen plina vpada snop svetlobe s frekvenco ω, ki je blizu frekvence atomskega prehoda ω_0. Gostota vpadnega energijskega toka je $j_\omega = w_\omega c$ (enačba 1.33), pri čemer je w_ω gostota energije. Obravnavajmo primer, ko je spekter vpadnega snopa ozek v primerjavi s širino atomskega prehoda (slika 5.3 b). V tej obliki zapisane enačbe bodo bolj priročne pozneje pri obravnavi laserja. Privzemimo še, da je stanje stacionarno.

Ko svetlobni snop vpade na plast plina debeline dz, se gostota energijskega toka zmanjša zaradi absorpcije in hkrati poveča zaradi stimulirane emisije (slika 5.4). Spontano sevanje, ki je seveda tudi prisotno, lahko zanemarimo, saj bo svetloba izsevana na vse strani enakomerno in le majhen del bo izsevan v smeri snopa. Sprememba energije snopa na enoto časa je enaka razliki med številom absorpcij in stimuliranih prehodov na enoto časa, pomnoženih z energijo fotona[4]

$$dP = r_{12}\frac{(N_2 - N_1)}{V}\hbar\omega S dz = B_{21} g w_\omega \frac{(N_2 - N_1)}{V}\hbar\omega S dz, \tag{5.36}$$

pri čemer smo verjetnost z prehod izrazili iz enačbe (5.27).



Slika 5.4: K absorpciji svetlobe v plasti atomov

S S smo označili presek snopa, z V pa volumen plina. Gostota toka se potem spreminja kot

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g \frac{\hbar\omega}{c} j_\omega dz. \tag{5.37}$$

Priročno je vpeljati presek za absorpcijo

$$\sigma(\omega) = \frac{B_{21} g \hbar\omega}{c}. \tag{5.38}$$

Z njim se izraz (5.37) poenostavi v

$$\boxed{\frac{dj}{dz} = \frac{N_2 - N_1}{V}\sigma(\omega) j.} \tag{5.39}$$

Navadno imamo opravka s plinom, ki je blizu termičnega ravnovesja, zato je $N_2 < N_1$ in je dj negativen. V tem primeru pride do absorpcije z absorpcijskim koeficientom μ. Zapišemo

$$\frac{dj}{j} = -\mu dz \qquad \text{in} \qquad \mu(\omega) = \frac{N_1 - N_2}{V} B_{21} g \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{N_1 - N_2}{V}\sigma(\omega). \tag{5.40}$$

Tako smo makroskopski koeficient absorpcije v plinu atomov povezali z Einsteinovim koeficientom B_{21} in presekom za absorpcijo. Tipične velikosti presekov so $\sigma \sim 10^{-22} - 10^{-16}$ m^2.

★ Energija se pri absorpciji na plinu dvonivojskih atomov seveda ne izgublja, temveč le siplje. Atom, ki je prešel v vzbujeno stanje, se s spontano emisijo vrne nazaj v osnovno, svetloba pa se izseva na vse strani – se siplje.

[4] Za poenostavitev tukaj pišemo obliko atomske spektralne črte kot g, pri čemer je to Lorentzova krivulja okoli osrednje frekvence ω_0.

5.5 Nasičenje absorpcije

Čeprav je videti izraz za zmanjševanje gostote svetlobnega toka pri prehodu skozi absorbirajoči plin (enačba 5.40) preprost, ga ni mogoče enostavno integrirati, saj je μ odvisen od gostote energijskega toka. Pri dovolj velikem svetlobnem toku namreč z absorpcijo znaten delež atomov preide v višje stanje, zato se zmanjša razlika $N_1 - N_2$, posledično se zmanjša tudi absorpcijski koeficient. Takrat se absorpcija v plinu nasiti in pojavu pravimo nasičenje absorpcije.

Naj na plin vpada snop monokromatske svetlobe. Atomi v plinu prehajajo med nivoji zaradi absorpcije, spontane in stimulirane emisije. Podobno kot smo zapisali termično ravnovesje v primeru širokega spektra (enačba 5.30), zapišemo stacionarno enačbo za naš primer

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}\,g\,(N_2 - N_1)\frac{j}{c} = 0, \tag{5.41}$$

pri čemer smo za verjetnost za prehod vzeli enačbo (5.27) in upoštevali $w = j/c$. Zasedenost višjega stanja N_2 lahko izrazimo s celotnim številom atomov N in razliko zasedenosti

$$N_2 = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}(N_2 - N_1). \tag{5.42}$$

S tem lahko izračunamo razliko zasedenosti

$$N_2 - N_1 = -\frac{N}{1 + 2\frac{Bg}{cA}j}. \tag{5.43}$$

Pri majhni gostoti toka j so praktično vsi atomi v osnovnem stanju in prispevajo k absorpciji. Pri velikih gostotah toka pa imenovalec gornjega izraza močno naraste, razlika zasedenosti gre proti nič in absorpcija se zmanjšuje. Ko drugi člen v imenovalcu (enačba 5.43) doseže vrednost 1, pravimo, da gostota energijskega toka doseže vrednost saturacijske gostote. Zapišemo jo kot

$$j_s(\omega) = \frac{cA_{21}}{2B_{21}g} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^2g}, \tag{5.44}$$

pri čemer smo upoštevali zvezo med koeficientoma A_{21} in B_{21} (enačba 5.34). Kot vidimo, je saturacijska gostota odvisna le od frekvence vpadnega valovanja in širine atomskega prehoda. Za črto z valovno dolžino 600 nm in širino 10^8 Hz znaša saturacijska gostota svetlobnega toka okoli 20 mW/cm^2. Tako veliko gostoto svetlobnega toka je v tako ozkem frekvenčnem intervalu z običajnimi svetili praktično nemogoče doseči, medtem ko jo iz laserjev dobimo z lahkoto. Izraz za razliko zasedenosti stanj lahko zdaj zapišemo v preglednejši obliki

$$N_2 - N_1 = -\frac{N}{1 + \frac{j}{j_s(\omega)}}. \tag{5.45}$$

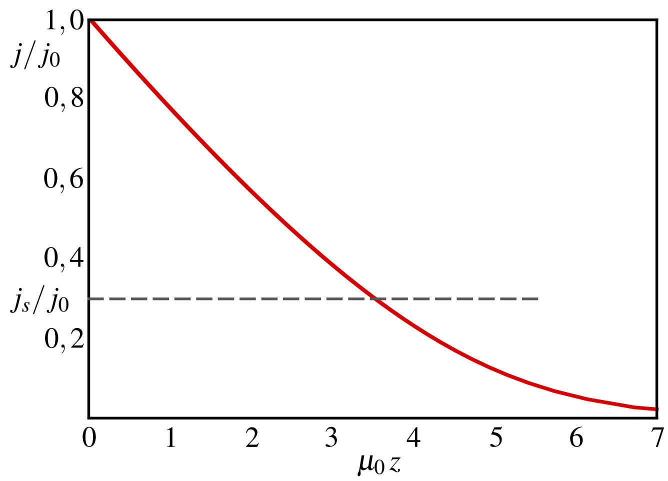
Vstavimo gornji izraz v enačbo za zmanjševanje gostote toka (enačba 5.39) in dobimo

$$\boxed{dj = -\frac{\mu_0}{1 + \frac{j}{j_s}}\,j\,dz,} \tag{5.46}$$

kjer je

$$\mu_0 = \frac{N B_{21}\,g\,\hbar\omega}{Vc} = \frac{N}{V}\sigma \tag{5.47}$$

absorpcijski koeficient pri majhnih gostotah vpadnega toka.



Slika 5.5: Pojemanje gostote svetlobnega toka v absorbirajočem plinu

Enačbo brez težav integriramo in dobimo

$$\ln\frac{j}{j_0}+\frac{1}{j_s}(j-j_0)=-\mu_0 z, \tag{5.48}$$

kjer smo z j_0 označili začetno gostoto toka.

Kadar je ta dosti manjša od j_s, lahko drugi člen v gornji enačbi zanemarimo in dobimo navadno eksponentno pojemanje

$$j=j_0 e^{-\mu_0 z}. \tag{5.49}$$

Pri zelo velikih vpadnih gostotah pa lahko zanemarimo prvi člen in pride do linearnega zmanjševanja gostote svetlobnega toka

$$j=j_0-\mu_0 j_s z=j_0-\frac{N}{2V}A\hbar\omega z. \tag{5.50}$$

V primeru močnega vpadnega toka je zasedenost osnovnega in vzbujenega nivoja skoraj enaka in absorpcija je omejena s tem, kako hitro se lahko atomi vračajo v osnovno stanje preko spontanega sevanja, kar je razvidno tudi iz zadnje oblike zapisa (enačba 5.50).

5.6 Optično ojačevanje

V prejšnjih razdelkih smo obravnavali prehod svetlobe skozi dvonivojski plin. V primeru termičnega ravnovesja je zgornji nivo manj zaseden od spodnjega in v plinu pride do absorpcije svetlobe. Če pa nekako dosežemo primer, da je $N_2>N_1$, se bo snop svetlobe pri prehodu skozi tako pripravljen plin ojačeval. Takemu primeru pravimo stanje obrnjene zasedenosti. Tako stanje seveda ni v termičnem ravnovesju in ga je treba vzdrževati z dovajanjem energije plinu. Dovajanju energije v sistem pravimo tudi črpanje. Načinov, kako dosežemo obrnjeno zasedenost s črpanjem je veliko. Oglejmo si nekaj primerov.

V plinih je najpogostejši način vzbujanja z električnim tokom. Elektroni, ki so glavni nosilci toka, se zaletavajo v atome ali ione in jih vzbujajo na višje nivoje, pri čemer lahko pride do obrnjene zasedenosti med nekim parom nivojev. Primer takega laserja je argonski ionski laser.

Pogost proces v plinih je tudi prenos energije med atomi s trki. Vzamemo mešanico dveh plinov, pri katerih se nek nivo enih atomov ujema po energiji z nekim nivojem drugih atomov. Vzbujen atom prve vrste lahko pri trku preda energijo brez sevanja atomu druge vrste, ki iz osnovnega stanja preide v ustrezen višji nivo. Če je pod tem nivojem še drugo vzbujeno stanje, bomo med njima dobili obrnjeno zasedenost, kadar je življenjski čas gornjega nivoja daljši od spodnjega. Primer takega laserja je He-Ne laser.

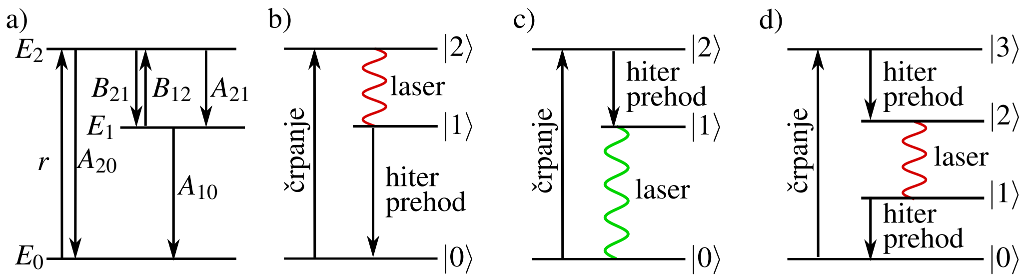
V trdnih neprevodnih kristalih sta v optičnem področju absorpcija in sevanje pri določeni valovni dolžini navadno posledica primesi. Obrnjeno zasedenost para nivojev primesi največkrat dobimo tako, da kristal obsevamo s svetlobo s frekvenco, ki ustreza prehodu na nek nivo nad izbranim parom. Primera takega laserja sta Nd:YAG in Ti:safir laser. Tak način optičnega črpanja deluje tudi v laserjih na organska barvila.

V polprevodnikih dosežemo obrnjeno zasedenost med prevodnim in valenčnim pasom z vbrizgavanjem elektronov in vrzeli v območje p-n spoja z električnim tokom v prevodni smeri. Možen mehanizem vzbujanja so tudi kemične reakcije. Po reakciji lahko produkti ostanejo v vzbujenem stanju in lahko dobimo obrnjeno zasedenost med paroma stanj.

Bolj podrobno si bomo nekaj teh mehanizmov ogledali na konkretnih laserjih (poglavje 7). Zaenkrat si kot primer oglejmo model optičnega črpanja plina atomov s tremi stanji.

5.7 Optično črpanje trinivojskega sistema

Naj imajo atomi poleg osnovnega stanja z energijo E_0, označimo ga $|0\rangle$, še dve vzbujeni stanji z energijo E_1 (stanje $|1\rangle$) in energijo $E_2 > E_1$ (stanje $|2\rangle$). Na plin svetimo s svetlobo, ki vzbuja atome iz stanja $|0\rangle$ v stanje $|2\rangle$, pri čemer je lahko spektralna gostota u_p črpalne svetlobe široka. Poleg tega naj se po plinu širi še monokromatska svetloba s frekvenco ω blizu frekvence prehoda ω_0 med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$ z gostoto energije w. Ugotoviti želimo, pri kakšnih pogojih lahko dosežemo obrnjeno zasedenost med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$ in s tem ojačevanje svetlobe okoli frekvence ω_0 (slika 5.6 b).



Slika 5.6: Shema energijskih nivojev trinivojskega sistema in oznake koeficientov prehoda med njimi (a). V plinskih laserjih imamo navadno stanje obrnjene zasedenosti med drugim in prvim vzbujenim stanjem (b), v navadnih trdninskih laserjih (npr. rubinskem) pa med prvim vzbujenim in osnovnim stanjem (c). Pogosto so laserji štirinivojski (d).

★ Trinivojski laserski sistem na sliki (5.6 b) je pravzaprav poseben primer bolj realističnega štirinivojskega sistema, pri katerem gornji črpalni nivo sovpada z gornjim laserskim nivojem. Sicer se tretji vzbujeni nivo, v katerega črpamo, praviloma zelo hitro prazni v drugega vzbujenega, od tam pa počasi v prvega vzbujenega, kot kaže slika (5.6 d). Obravnava štirinivojskih sistemov je bolj zapletena kot obravnava trinivojskih sistemov, ki za opis delovanja laserjev povsem zadošča. Podrobneje bomo štirinivojske sisteme predstavili na konkretnih laserskih primerih (poglavje 7).

Zapišimo enačbe za spreminjanje zasedenosti posameznih stanj. Osnovno stanje $|0\rangle$ se prazni zaradi absorpcije črpalne svetlobe in polni zaradi spontanih prehodov iz stanj $|1\rangle$ in $|2\rangle$, stimulirane prehode iz stanja $|2\rangle$ pa bomo zanemarili. Zasedenost stanja $|2\rangle$ se povečuje zaradi absorpcije s spodnjih nivojev in zmanjšuje zaradi spontanega in stimuliranega sevanja. Srednje stanje se polni s stimuliranimi in spontanimi prehodi iz stanja $|2\rangle$ in prazni zaradi absorpcije v $|2\rangle$ in spontanih prehodov v $|0\rangle$. Pri tem velja, da je vsota vseh treh zasedenosti enaka številu vseh atomov: $N_0+N_1+N_2=N$. Zasedbene enačbe so tako

$$\frac{dN_0}{dt} = -rN_0+A_{20}N_2+A_{10}N_1 \tag{5.51}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1+B_{21}\,g\,w\,(N_2-N_1)+A_{21}N_2 \tag{5.52}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = rN_0-A_{20}N_2-A_{21}N_2-B_{21}\,g\,w\,(N_2-N_1), \tag{5.53}$$

pri čemer predpostavili, da je $N_0 \approx N \gg N_1, N_2$ in zato lahko črpanje $B_{20}\,u_p(N_0-N_2)$, ki je praktično konstantno, zapisali s koeficientom r. Mehanizem črpanja smo tako skrili v r in prav nič ni pomembno, na kakšen način poteka.

Zanima nas stacionarno stanje, ko so vsi trije časovni odvodi enaki nič. Tako iz druge enačbe sistema (enačba 5.52) sledi

$$B_{21}\,g\,wN_2+A_{21}N_2 = B_{21}\,g\,wN_1+A_{10}N_1 \tag{5.54}$$

in

$$N_2 = \frac{B_{21}\,g\,w+A_{10}}{B_{21}\,g\,w+A_{21}}N_1. \tag{5.55}$$

Brez škode lahko zanemarimo tudi spontano sevanje iz stanja $|2\rangle$ v osnovno stanje. Tako iz prve enačbe sistema (5.51) dobimo

$$N_1 = \frac{rN}{A_{10}} \tag{5.56}$$

in zapišemo razliko zasedenosti kot

$$N_2-N_1 = \left(\frac{N_2}{N_1}-1\right)N_1 = \frac{A_{10}-A_{21}}{A_{21}+B_{21}g\,w}\,\frac{rN}{A_{10}}. \tag{5.57}$$

Iz gornje enačbe sledi, da pride do obrnjene zasedenosti, če je $A_{10} > A_{21}$, torej kadar je razpadni čas stanja $|1\rangle$ krajši kot razpadni čas stanja $|2\rangle$. Tak rezultat smo seveda lahko pričakovali.

V praktični primerih navadno velja $A_{10} \gg A_{21}$. Ob upoštevanju zveze $j = wc$ povežemo razliko zasedenosti z gostoto vpadnega svetlobnega toka

$$N_2-N_1 = \frac{rN}{A_{21}}\,\frac{1}{1+\frac{B_{21}gj}{cA_{21}}} = \frac{rN}{A_{21}}\,\frac{1}{1+j/j_s}. \tag{5.58}$$

Konstante $cA_{21}/B_{21}g$ smo pospravili v j_s, ki ga bomo imenovali saturacijska gostota svetlobnega toka.

★ Vidimo, da je dobljen izraz za saturacijsko gostoto toka v trinivojskem sistemu zelo podoben saturacijski gostoti za dvonivojski sistem (enačba 5.44), razlikujeta se le v faktorju 2. Do te razlike pride zaradi različnega števila stanj, saj pogoj $N_1+N_2=N$ v trinivojskem sistemu ne velja.

Poglejmo zdaj, kaj se ob vpadu na plast trinivojskega plina zgodi s svetlobo, ki ima frekvenco ω in gostoto svetlobnega toka $j = wc$. Račun je zelo podoben računu pri absorpciji (enačba 5.37). Zapišemo spremembo gostote toka na debelini dz

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g \frac{\hbar\omega}{c} j\, dz, \tag{5.59}$$

pri čemer gostota toka $j = wc$ nastopa tudi v izrazu za razliko zasedenosti (enačba 5.58). Če to upoštevamo, dobimo diferencialno enačbo za gostoto toka

$$\frac{1}{j}\left(1 + \frac{j}{j_s}\right) dj = G\, dz \tag{5.60}$$

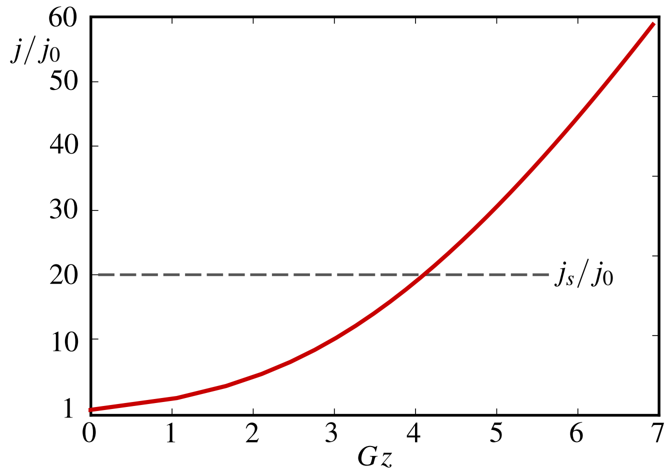
oziroma

$$\boxed{dj = \frac{G}{1 + \frac{j}{j_s}} j\, dz,} \tag{5.61}$$

ki je spet zelo podobna enačbi za absorpcijo (enačba 5.46). Z G smo označili t.i. koeficient ojačanja pri majhnih vpadnih gostotah toka. Podan je z

$$G = \frac{rNB_{21}\hbar\omega g}{VcA_{21}} = \frac{N}{V}\frac{r}{A}\sigma, \tag{5.62}$$

pri čemer smo koeficient ojačanja izrazili s presekom za stimulirano sevanje σ. Rešitev diferencialne enačbe je prikazana na sliki (5.7).



Slika 5.7: Naraščanje gostote svetlobnega toka pri optičnem ojačanju

Obnašanje gostote svetlobnega toka ima, tako kot pri absorpciji, dva režima. Pri majhnih gostotah toka $j \ll j_s$ je naraščanje eksponentno

$$j(z) = j_0 e^{Gz}. \tag{5.63}$$

Pri velikih gostotah toka pride do nasičenja in gostota svetlobnega toka linearno narašča

$$j(z) = j_0 + j_s G z. \tag{5.64}$$

V tem primeru je gostota toka dovolj velika, da vsi atomi, ki jih s črpanjem spravimo v najvišje stanje, preidejo v stanje $|1\rangle$ s stimuliranim sevanjem. Pri konstantnem črpanju je tedaj linearno naraščanje gostote toka razumljivo.

Pomudimo se še malo pri preseku za stimulirano sevanje σ (enačba 5.62). Opazimo, da je ta presek enak preseku za absorpcijo (enačba 5.38) dvonivojskega sistema. Presek za stimulirano sevanje je tako odvisen od frekvence in je sorazmeren vrednosti atomske spektralne črte pri frekvenci prehoda. Za He-Ne laser, ki deluje pri valovni dolžini 633 nm in ima širino prehoda $\Delta\omega \sim 10$ GHz, znaša tako $\sigma \sim 10^{-16}$ m^2, za Nd:YAG pri 1064 nm in širini prehoda $\Delta\omega \sim$ 900 GHz pa $\sigma \sim 10^{-22}$ m^2. Zaradi različnih presekov, različnih gostot atomov in različnih načinov črpanja se koeficienti ojačanja v večnivojskih sistemih med seboj precej razlikujejo. Primere laserjev bomo sicer podrobneje obravnavali v nadaljevanju, zaenkrat povejmo le, da je tipičen koeficient ojačanja v He-Ne laserju z dolžino $L = 0,5$ m enak $GL \sim 1,015$, v Nd:YAG laserju z dolžino ojačevalnega sredstva $L = 10$ cm pa $GL \sim 50$. Pri prvem laserju je sicer velik presek za stimulirano sevanje, vendar je gostota atomov v obrnjeni zasedenosti razmeroma majhna. V drugem primeru pa močno črpanje prevlada nad majhnim presekom in pride do močnega ojačanja.

5.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte

Doslej smo predpostavili, da svetijo vsi atomi obravnavane snovi pri isti frekvenci ω_0 in z isto spektralno širino, ki smo jo popisali s funkcijo $g(\omega - \omega_0)$, z vrhom pri ω_0. Če to drži, pravimo, da je razširitev spektralne črte homogena. Primera homogene razširitve sta naravna širina in razširitev zaradi trkov med atomi. Funkcija $g(\omega - \omega_0)$ je v tem primeru Lorentzove oblike

$$g(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \tag{5.65}$$

s širino črte $\Delta\omega_L = 2\gamma$ (glej sliko 2.4).

Spektralna črta je lahko razširjena tudi zato, ker vsi atomi ne svetijo pri povsem enaki frekvenci. Tedaj govorimo o nehomogeni razširitvi. Najpomembnejši primer nehomogene razširitve je Dopplerjeva razširitev v plinu. Atomi plina vedno sevajo pri praktično isti frekvenci, vendar jih zaradi gibanja opazovalec v mirujočem (laboratorijskem) sistemu v skladu z Dopplerjevim pojavom zazna pri različnih frekvencah. Tako so opazovane frekvence posameznih atomov ω odvisne od hitrosti v atoma glede na smer opazovanja. Zapišemo jih kot

$$\omega = \omega_0 - \frac{v}{c}\omega_0 = \omega_0 - k_0 v. \tag{5.66}$$

Označimo z $\mathcal{N}(v)$ porazdelitev gostote atomov po hitrostih, pri čemer se omejimo le na premikanje v smeri opazovanja. V termičnem ravnovesju je $\mathcal{N}(v)$ Maxwellova porazdelitev

$$\mathcal{N}(v) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, \tag{5.67}$$

kjer je m masa posameznega atoma. Porazdelitev atomov po frekvencah izračunamo tako, da hitrost izrazimo iz enačbe (5.66), pri čemer dobljeno funkcijo $g_D(\omega - \omega_0)$ normiramo. Sledi

$$g_D(\omega - \omega_0) = \frac{c}{\omega_0}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mc^2}{2k_B T}\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}}. \tag{5.68}$$

Dopplerjeva razširitev v plinu je torej Gaussove oblike. Njena širina pri polovični višini[5] je

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{mc^2}}\,\omega_0. \tag{5.69}$$

[5]To širino imenujemo FWHM – *Full width at half maximum.*

Naloga 5.8.1 Izpelji obliko nehomogeno razširjene črte za Dopplerjevo razširitev (enačba 5.68) in pokaži, da je njena širina podana z enačbo (5.69).

Izračunajmo Dopplerjevo razširitev na primeru He-Ne laserja. Za prehod atoma neona pri 632,8 nm in temperaturi 300 K dobimo $\Delta\omega_D = 8 \times 10^9$ Hz. Dejanske izmerjene vrednosti širine črte za He-Ne laser znašajo okoli 10 GHz, kar je znatno več od naravne širine črte (7,5 MHz). Še bolj izrazite so nehomogene razširitve v trdninskih laserjih. V Nd:YAG laserju je naravna širina le okoli 1 kHz, celotna širina črte pa 900 GHz. Nehomogena razširitev zaradi Dopplerjevega pojava v redkem plinu ali zaradi nehomogenosti v trdnih snoveh je tako kar nekaj redov velikosti večja od homogene naravne širine in razširitve zaradi trkov.

★ Pri nehomogenih razširitvah bi za bolj natančen izračun morali upoštevati tudi naravno širino posameznega atoma. To bi zapisali s konvolucijo Lorentzove in Gaussove funkcije in dobili tako imenovan Voigtov profil[6], ki pa ga ne moremo preprosto analitično zapisati.

5.9 *Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte

V razdelku (5.5) smo obravnavali nasičenje absorpcije pri homogeno razširjenem prehodu. Pri nasičenju absorpcije, kadar prevladuje nehomogena razširitev, nastopijo pomembni novi pojavi, zato si to podrobneje oglejmo.

Naj na dvonivojski plin vpada močan snop monokromatske svetlobe s frekvenco ω_S, ki je blizu osrednje frekvence ω_0 Dopplerjevo razširjene črte. S svetlobo lahko sodeluje le skupina atomov, pri kateri se Dopplerjevo premaknjena frekvenca od ω_S ne razlikuje več kot za homogeno širino, ki jo opisuje funkcija $g(\omega - \omega_S)$. Zato ne moremo zapisati zasedbenih enačb za vse atome hkrati, ampak le za tiste, ki imajo hitrost med v in $v + dv$ in ki absorbirajo svetlobo pri frekvenci $\omega_0 - kv$.

Naj bosta $\mathcal{N}_1(v)$ in $\mathcal{N}_2(v)$ hitrostni porazdelitvi atomov v osnovnem in vzbujenem stanju. Gostota $\mathcal{N}_2(v)$ se spreminja podobno kot celotna zasedenost v homogenem primeru (enačba 5.28)

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -A\mathcal{N}_2(v) - B\,g(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}\left[\mathcal{N}_2(v) - \mathcal{N}_1(v)\right], \tag{5.70}$$

kjer je j gostota vpadnega svetlobnega toka. Upoštevali smo, da je zaradi Dopplerjevega pojava prehod premaknjen k frekvenci $\omega_0 - kv$. Velja tudi

$$\mathcal{N}_1(v) + \mathcal{N}_2(v) = \mathcal{N}(v) \tag{5.71}$$

in

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -\frac{d\mathcal{N}_1(v)}{dt}. \tag{5.72}$$

Vpeljimo $\mathcal{Z}(v) = \mathcal{N}_1(v) - \mathcal{N}_2(v)$. Podobno kot v enačbi (5.42) zapišemo

$$\mathcal{N}_2(v) = 1/2\mathcal{N}(v) - 1/2\mathcal{Z}(v) \tag{5.73}$$

in dobimo

$$\dot{\mathcal{Z}}(v) = -A\mathcal{Z}(v) + A\mathcal{N}(v) - 2B\,g(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}\mathcal{Z}(v). \tag{5.74}$$

[6]Nemški fizik Woldemar Voigt, 1850–1919.

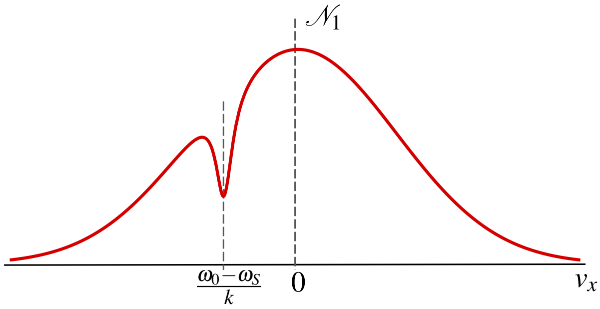
V stacionarnem stanju je

$$\mathscr{Z}(v) = \frac{\mathscr{N}(v)}{1+\frac{2B}{Ac}g(\omega_S-\omega_0+kv)j}. \tag{5.75}$$

Če je nasičenje majhno, lahko imenovalec v gornji enačbi razvijemo

$$\mathscr{Z}(v) \approx \mathscr{N}(v)\left(1-\frac{2B}{Ac}g(\omega_S-\omega_0+kv)j\right). \tag{5.76}$$

Porazdelitev $\mathscr{Z}(v)$je podobna nemoteni porazdelitvi atomov po hitrosti $\mathscr{N}(v)$, le da je pri hitrosti $v=(\omega_0-\omega_S)/k$ zmanjšana zaradi vpliva vpadne svetlobe, ki jo atomi s to hitrostjo lahko absorbirajo in s tem prehajajo v gornje stanje. V porazdelitvi atomov tako nastane vdolbina, pravimo ji tudi Bennettova vdolbina[7], (slika 5.8). Širina vdolbine je določena s homogeno širino prehoda, to je s funkcijo $g(\omega_S-\omega_0+kv)$, globina pa z gostoto vpadnega toka j.



Slika 5.8: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, kjer zaradi absorbirane svetlobe nastane Bennettova vdolbina. Podobno obliko ima tudi absorpcijski koeficient.

Zapišimo še absorpcijski koeficient za šibko vpadno valovanje pri frekvenci ω'. Upoštevati moramo, da k absorpciji prispevajo vsi atomi, katerih hitrost je taka, da je prehod dovolj blizu ω'. Absorpcijski koeficient potem izračunamo s seštevanjem po porazdelitvi $\mathscr{Z}(v)$ (enačba 5.40)

$$\mu(\omega') = \frac{\hbar\omega'}{c}\int \mathscr{Z}(v)Bg'(\omega'-\omega_0+k'v)\,dv. \tag{5.77}$$

V splošnem se funkcija g' razlikuje od funkcije g, ki nastopa v izrazu za $\mathscr{Z}$, saj sta njuni širini lahko različni. Vsekakor pa velja, da je homogena razširitev dosti manjša od Dopplerjeve širine. V prvem približku vzemimo, da lahko Lorentzovo $g'(\omega)$ nadomestimo kar z $\delta(\omega)$. Tako je absorpcijski koeficient za šibko testno svetlobo

$$\begin{aligned}\mu(\omega') &= \frac{\hbar\omega'}{k'c}B\frac{\mathscr{N}\left(\frac{\omega_0-\omega'}{k'}\right)}{1+\frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S-\omega')} \\ &\approx \hbar B\mathscr{N}\left(\frac{\omega_0-\omega'}{k'}\right)\left(1-\frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S-\omega')\right).\end{aligned} \tag{5.78}$$

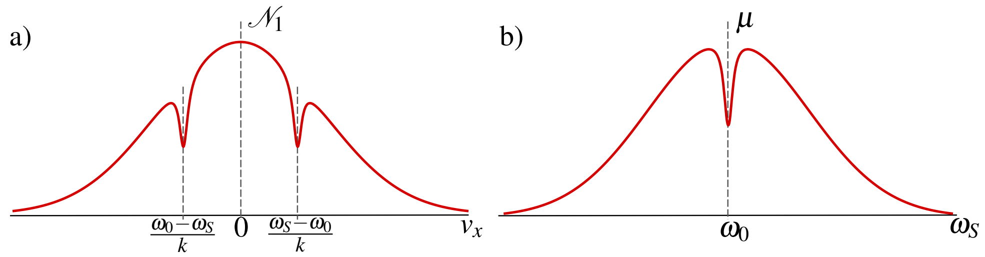
V drugi vrstici smo uporabili približek (enačba 5.76). Odvisnost $\mu(\omega')$, ki jo izmerimo tako, da spreminjamo frekvenco testnega snopa ω', je Gaussove oblike z vdolbino pri ω_S in je podobna porazdelitvi, kot jo kaže slika (5.8).

★ Merjenje nasičenja absorpcije s testnim žarkom torej omogoča opazovanje oblike homogene črte kljub mnogo večji nehomogeni Dopplerjevi razširitvi in je zato v moderni spektroskopiji velikega pomena.

[7] Ameriški fizik William Ralph Bennett Jr., 1930–2008.

Izračunajmo še absorpcijski koeficient za prvi, močan vpadni snop, tako da v gornjem izrazu vstavimo $\omega' = \omega_S$. Vodilni člen $\mathcal{N}((\omega_0 - \omega_S)/k)$ opisuje običajno Gaussovo obliko Dopplerjevo razširjene črte, izraz v oklepaju pa da zmanjšanje absorpcije zaradi nasičenja, ki je odvisno le od vrednosti $g(0)$ in zato enako za vse ω_S. Z enim samim vpadnim snopom svetlobe torej vdolbine v absorpciji ne moremo zaznati, saj je izmerjena črta kljub nasičenju Gaussove oblike.

Namesto z dvema različnima snopoma, od katerih lahko šibkemu testnemu snopu spreminjamo frekvenco, lahko vdolbino v porazdelitvi zaznamo tudi z enim samim snopom spremenljive frekvence, ki se po prvem prehodu skozi plin odbije od ogledala in vrne v nasprotni smeri. S tem se v porazdelitvi atomov v spodnjem stanju simetrično pri hitrostih $\pm(\omega_0 - \omega_S)/k$ pojavita dve Bennettovi vdolbini (slika 5.9 a). Kadar je ω_S blizu ω_0, se vdolbini vsaj delno prekrivata, stopnja nasičenja se poveča in v krivulji za absorpcijo svetlobe se pojavi vdolbina (slika 5.9 b). Imenujemo jo Lambova vdolbina[8].



Slika 5.9: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, če svetloba prehaja skozi plin v dveh smereh (a). Če frekvenca vpadne svetlobe približno sovpada s centralno frekvenco prehoda, se obe vdolbini prekrivata in absorpcija se zmanjša (b).

Zapišimo še enačbe za ta primer. Snop povzroči spremembo zasedenosti pri prehodu skozi plin v obeh smereh, zato je sedaj

$$\mathscr{Z}(v) \approx \mathcal{N}(v)\left(1 - \frac{2Bj}{Ac}\left[g(\omega_S - \omega_0 + kv) + g(\omega_S - \omega_0 - kv)\right]\right). \tag{5.79}$$

Podobno kot prej izračunamo absorpcijski koeficient za širjenje svetlobe v pozitivni smeri

$$\begin{aligned} \mu_+(\omega_S) &= \frac{\hbar\omega}{c} B \int \mathscr{Z}(v) g(\omega_S - \omega_0 + kv)\, dv \\ &\approx \hbar B \mathcal{N}\left(\frac{\omega_S - \omega_0}{k}\right)\left(1 - \frac{2Bj}{Ac}\left[g(0) + g(2(\omega_S - \omega_0))\right]\right). \end{aligned} \tag{5.80}$$

Izmerjeni absorpcijski profil je odvisen od frekvence vpadne svetlobe in ima na sredini vdolbino, ki je zopet podobna homogeno razširjeni črti. Faktor 2 v argumentu funkcije $g(2(\omega_S - \omega_0))$ je posledica našega grobega približka, ko smo v integraciji $g(\omega_S - \omega_0 + kv)$ nadomestili kar z δ funkcijo. Natančnejši račun pokaže, da je vrh pri ω_0 kar oblike $g(\omega_S - \omega_0)$.

Naloga 5.9.1 Pokaži, da je rezultat natančnejše izpeljave absorpcijskega koeficienta

$$\mu_+(\omega_S) = \hbar B \mathcal{N}\left(\frac{\omega_S - \omega_0}{k}\right)\left(1 - \frac{Bj}{Ac}\left[g(0) + g((\omega_S - \omega_0))\right]\right). \tag{5.81}$$

Pri računu privzami, da se Dopplerjeva razširitev bistveno večja in Maxwellovo porazdelitev prestavi pred integral.

[8] Ameriški fizik in nobelovec Willis Eugene Lamb Jr., 1913–2008.

5.10 *Izpeljava verjetnosti za prehod

Verjetnosti za prehod atoma iz enega stanja v drugo s sevanjem, ki smo jih opisali s fenomenološkimi Einsteinovimi koeficienti A_{21} in B_{21} (razdelek 5.3), je mogoče izpeljati tudi drugače. Pri tem se poslužimo kvantne elektrodinamike, kar pomeni kvantno obravnavo tako atoma kot elektromagnetnega polja. Povsem strog račun je zahteven in presega okvir te knjige, zato si na kratko oglejmo le, kako pridemo do rezultata s perturbacijsko metodo.

Postavimo dvonivojski atom v votlino z elektromagnetnim poljem. Izračunajmo verjetnost, da zaradi interakcije s poljem atom preide iz stanja $|2\rangle$ v stanje $|1\rangle$, pri čemer se število fotonov v izbranem stanju elektromagnetnega polja α poveča z n_α na $n_\alpha + 1$. V vseh ostalih stanjih polja naj bo število fotonov enako nič.

Med atomom in poljem privzemimo električno dipolno interakcijo

$$\hat{H}_i = -e\hat{E}(\mathbf{r},t)\hat{x}, \tag{5.82}$$

kjer je $\hat{x}$ operator koordinate elektrona v atomu. Privzeli smo, da je nihajoče polje polarizirano v smeri osi x. Stanja celotnega sistema, to je atoma in polja, zapišemo v obliki produkta atomskih stanj in stanja elektromagnetnega polja, pri čemer moramo navesti število fotonov v vsakem nihanju votline α. Zapišemo okrajšano

$$|i, n_\alpha\rangle \equiv |i\rangle|\{n_\alpha\}\rangle. \tag{5.83}$$

Začetno stanje celotnega sistem naj bo tako $|2, n_\alpha\rangle$, kar pomeni, da je atom v gornjem stanju, polje pa ima n_α fotonov v enem samem stanju α. Ustrezno končno stanje po prehodu je $|1, n_\alpha + 1\rangle$.

V prvem redu teorije motenj je verjetnost za prehod iz začetnega v končno stanje na časovno enoto enaka

$$w_{21} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle 1, n_\alpha + 1|\hat{H}_i|2, n_\alpha\rangle|^2\,\delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \tag{5.84}$$

Z delta funkcijo izberemo le prehoda, pri katerih se ohranja energija.

Operator elektromagnetnega polja lahko po enačbi (5.9) razvijemo po lastnih nihanjih votline

$$\hat{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}}\sum_\alpha \hat{p}_\alpha(t)E_\alpha(\mathbf{r}), \tag{5.85}$$

kjer je $\hat{p}_\alpha$ operator gibalne količine stanja α, E_α pa funkcija, ki popisuje krajevno odvisnost polja. Vemo, da se vsako elektromagnetno nihanje votline obnaša kot harmonski oscilator. Zato lahko vpeljemo kreacijske in anihilacijske operatorje

$$\hat{a}^\dagger_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha\hat{q}_\alpha - i\hat{p}_\alpha) \tag{5.86}$$

$$\hat{a}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha\hat{q}_\alpha + i\hat{p}_\alpha). \tag{5.87}$$

Kreacijski operatorji povečujejo, anihilacijski pa zmanjšujejo število fotonov v danem stanju

$$\hat{a}^\dagger_\alpha|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha+1}|n_\alpha+1\rangle \qquad \text{in} \tag{5.88}$$

$$\hat{a}_\alpha|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha}|n_\alpha - 1\rangle. \tag{5.89}$$

Edini od nič različni matrični elementi so tako oblike

$$\begin{aligned}\langle n_\alpha+1|\hat{a}^\dagger_\alpha|n_\alpha\rangle &= \sqrt{n_\alpha+1} \qquad \text{in}\\ \langle n_\alpha-1|\hat{a}_\alpha|n_\alpha\rangle &= \sqrt{n_\alpha}.\end{aligned} \tag{5.90}$$

Operatorje $\hat{p}_\alpha$ zdaj lahko izrazimo s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji in jih vstavimo v razvoj električnega polja (enačba 5.85). Dobimo

$$\hat{E}(\mathbf{r},t) = -i\sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}}\left(\hat{a}_\alpha^\dagger - \hat{a}_\alpha\right)E_\alpha(\mathbf{r}). \tag{5.91}$$

Nadaljujemo z izračunom potrebnega matričnega elementa. Operator koordinate $\hat{x}$ deluje le na atomski del stanja, $\hat{E}$ pa le na elektromagnetno polje, zato velja

$$\begin{aligned} \langle 1, n_\alpha+1|\hat{H}_i|2,n_\alpha\rangle &= -e\,\langle 1,n_\alpha+1|\hat{E}\hat{x}|2,n_\alpha\rangle & (5.92)\\ &= -e\,\langle 1|\hat{x}|2\rangle\langle n_\alpha+1|\hat{E}|n_\alpha\rangle. & (5.93)\end{aligned}$$

Vstavimo polje, ki smo ga izrazili s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji (enačba 5.91), upoštevamo zvezi (5.90) in dobimo

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha+1|\hat{E}|n_\alpha\rangle &= -i\sum_\beta \sqrt{\frac{\hbar\omega_\beta}{2V\varepsilon_0}}\langle n_\alpha+1|\hat{a}_\beta^\dagger - \hat{a}_\beta|n_\alpha\rangle E_\beta(\mathbf{r}) \\ &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}}\sqrt{n_\alpha+1}\,E_\alpha(\mathbf{r}). & (5.94)\end{aligned}$$

Od vseh operatorjev v razvoju polja dobimo namreč od nič različen matrični element le za kreacijski operator za stanje α.

Vpeljimo še simbol za matrični element koordinate med atomskimi stanji $\langle 1|\hat{x}|2\rangle = x_{12}$. Iskana verjetnost za prehod iz začetnega stanja, v katerem smo imeli vzbujen atom in n_α fotonov, v končno stanje z atomom v osnovnem stanju in $n_\alpha+1$ fotonov v stanju α je tako

$$w_{21} = \frac{\pi e^2\omega_\alpha x_{12}^2}{V\varepsilon_0}(n_\alpha+1)\,E_\alpha^2(\mathbf{r})\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha). \tag{5.95}$$

Verjetnost za prehod je sorazmerna z $n_\alpha+1$ in je od nič različna, tudi če je število kvantov polja enako nič. Tedaj imamo seveda spontano sevanje. Prispevek, ki je sorazmeren s številom že prisotnih fotonov, pa predstavlja stimulirano sevanje. Verjetnost za prehod vsebuje še kvadrat prostorske odvisnosti polja $E_\alpha^2(\mathbf{r})$. Če ne poznamo natančnega položaja atoma ali če imamo plin atomov, ki je enakomerno porazdeljen po votlini, lahko ta člen nadomestimo kar s povprečno vrednostjo. Kadar imamo stoječe valovanje, je to 1/2.

Najprej poglejmo verjetnost za spontano emisijo. Spontana emisija je možna v vsa elektromagnetna nihanja votline s pravo frekvenco. Celotno verjetnost za prehod atoma iz vzbujenega v osnovno stanje dobimo, če seštejemo verjetnosti za prehod z izsevanim fotonom v določenem stanju. Spomnimo se, da je ta verjetnost ravno enaka Einsteinovem koeficientu A_{21} (enačba 5.34)

$$A_{21} = \sum_\alpha w_{21} = \sum_\alpha \frac{\pi e^2\omega_\alpha x_{12}^2}{2V\varepsilon_0}\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha). \tag{5.96}$$

Za prostorsko odvisnost polja $E^2(\mathbf{r})$ smo vzeli povprečje 1/2. Vsoto po nihanjih lahko z uporabo enačbe (5.7) spremenimo v integral in upoštevamo enačbo (5.6). Dobimo

$$A_{21} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\hbar\varepsilon_0}\int \rho(\omega_\alpha)\omega_\alpha\,\delta(\omega_0-\omega_\alpha)\,d\omega_\alpha = \frac{e^2\omega_0^3 x_{12}^2}{2\pi\varepsilon_0\hbar c^3}. \tag{5.97}$$

Z $\omega_0 = (E_2-E_1)/\hbar$ smo označili frekvenco prehoda. S tem smo izpeljali vrednost Einsteinovega koeficienta A_{21}.

★ Pri gornjem izračunu Einsteinovega koeficienta A_{21} smo privzeli, da so vsi dipoli urejeni v smeri širjenja svetlobe. Če želimo rezultat izenačiti s koeficientom, ki smo ga vpeljali za izotropno sevanje črnega telesa, ga moramo pomnožiti s faktorjem $\langle \cos^2 \vartheta \rangle = 1/3$.

Zaradi spontanega sevanja vzbujeno atomsko stanje nikoli ni popolnoma stacionarno. Poleg tega pa energija stanja s končnim razpadnim časom ni natančno določena, zato moramo verjetnost za stimulirano sevanje (enačba 5.95) malo popraviti. Delta funkcijo energije nadomestimo s končno široko funkcijo $g(\omega - \omega_0)$, ki ima vrh pri ω_0. Zaradi spremembe integracijske spremenljivke dobimo še dodaten faktor $1/\hbar$. Tako imamo

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V\varepsilon_0\hbar}(n_\alpha + 1)g(\omega_\alpha - \omega_0). \tag{5.98}$$

Poglejmo še Einsteinov koeficient za stimulirano sevanje B_{21}. Lahko ga izrazimo iz enačbe (5.27), če upoštevamo, da je gostota energije polja $n_\alpha\hbar\omega_\alpha/V$. Dobimo

$$B_{21} = \frac{V w_{21}}{n_\alpha\hbar\omega_\alpha g(\omega_\alpha - \omega_0)} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\varepsilon_0\hbar^2}. \tag{5.99}$$

Poglejmo še razmerje izračunanih Einsteinovih koeficientov iz enačb (5.97) in (5.99)

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega_\alpha^3}{\pi^2 c^3}, \tag{5.100}$$

ki se ujema z razmerjem, ki smo ga izpeljali z uporabo Planckove formule (enačba 5.34). Prehojena pot jasno kaže zvezo med spontanim in stimuliranim sevanjem ter gostoto stanj elektromagnetnega polja.

6. Laser

Stoječe valovanje v optičnem resonatorju se obnaša kot dušeno harmonično nihalo. Iz nihala lahko napravimo oscilator, to je napravo, ki samostojno niha brez zunajega vzbujanja, če nam dano nihalo uspe povezati v povratno zvezo z ustreznim ojačevalnikom, ki pokriva izgube nihala zaradi dušenja. Primeri so ure z mehanskimi nihali, oscilatorji z električnim nihajnim krogom v elektroniki, pa vrsta glasbenih inštrumentov.

Ugotovili smo, da je ojačevanje svetlobe mogoče dobiti v sredstvu z obrnjeno zasedenostjo med dvema nivojema. Postavimo tako snov v optični resonator. Na začetku dobimo predvsem spontano sevano svetlobo, ki se odbija med zrcaloma resonatorja in se pri prehodu skozi snov ojačuje. Tako se vzbujajo nihanja resonatorja z nihajnimi frekvencami blizu frekvence atomskega prehoda, pri katerem snov ojačuje. Energija nihanj z dovolj majhnimi izgubami bo rasla, dokler se ojačevanje ne bo izenačilo z izgubami. Tak izvor svetlobe je laser. Beseda je nastala iz kratice za Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

Kot analogija za laser so posebno zanimiva glasbila, predvsem pihala. Vzemimo na primer klarinet. To glasbilo razdelimo na dve bistveni enoti: cev, v kateri lahko nastane stojni zvočni val, in ustnik, katerega naloga je dovajati energijo in s tem vzdrževati konstantno amplitudo nihanja.

Frekvenca stoječega vala, to je nihanja zračnega stolpca v piščali, je določena z dolžino cevi (pravzaprav le do prve odprte tonske luknjice, vendar te podrobnosti za nas niso pomembne) in s številom vozlov stoječega vala v cevi. Na gornjem koncu, pri ustniku, lahko predpostavimo, da je cev zaprta, zato imamo tam hrbet nihanja pritiska. Cev je torej zvočni resonator.

Ustnik je polobel zaključek cevi, ki ga skoraj povsem zapira ploščat, prožen jeziček. Ko glasbenik piha v ustnik, se ta trese in s tem proizvaja zvok. Če ustnik ni nataknjen na cev klarineta, je nastali zvok bolj nekakšen šum kot pa lep, dobro določen ton. Tresenje jezička je le približno periodično in vsebuje mnogo frekvenc.

Ko ustnik nataknemo na cev in pihnemo vanj, začne tresenje jezička vzbujati tiste stoječe valove v cevi, katerih frekvence so vsebovane v spektru tresenja jezička. Dokler je vzbujanje šibko, se ne zgodi nič posebnega, ko pa amplituda tlaka v cevi dovolj naraste, pride do čisto novega pojava. Nihanje tlaka v gornjem koncu cevi povratno deluje na ustnik in ga sili, da niha s frekvenco najbolj vzbujenega stoječega vala v cevi, nihanje jezička z drugimi frekvencami pa zamre. Moč pihanja gre le še v nihanje jezička s pravo frekvenco in ojačuje nihanje zračnega stolpca. S pihanjem v ustnik lahko torej zaradi povratne zveze med nihanjem jezička in nihanji zračnega stolpca v cevi vzdržujemo stoječe valovanje s konstantno amplitudo. Dovedena moč se seveda izseva kot zvok na odprtem koncu klarineta.

Vrnimo se k svetlobi in si najprej oglejmo najpreprostejši model laserja. Privzemimo, da je le eno resonatorsko nihanje tako, da njegova frekvenca sovpada s frekvenco prehoda aktivne snovi, ki jo konstantno črpamo in s tem vzdržujemo obrnjeno zasedenost. Ta privzetek v večini laserjev ni avtomatično izpolnjen, vendar je pogosto z dodatnimi elementi v resonatorju mogoče doseči, da je vzbujeno le eno nihanje, kot bomo videli nekoliko kasneje.

Slika 6.1: Osnovna shema laserja

Naj bo W energija svetlobnega valovanja v resonatorju. Zaradi izgub skozi zrcali in zaradi absorpcije in sipanja se energija na en prelet resonatorja zmanjša za

$$\Delta W_{izgube} = -\Lambda W = -[\alpha L + (1 - \frac{1}{2}\mathscr{R}_1) + \frac{1}{2}(1 - \mathscr{R}_2)]\, W \quad , \tag{6.1}$$

kjer so Λ celotne izgube, α izgube na enoto poti zaradi absoprcije in sipanja, $\mathscr{R}_1$ in $\mathscr{R}_2$ pa odbojnosti obeh zrcal. Vsaj eno od obeh zrcal mora imeti odbojnost manj od 1, če naj laser nekaj svetlobe tudi izseva.

Zaradi ojačevanja s stimuliranim sevanjem snovi z obrnjeno zasedenostjo se energija nihanja resonatorja na en prelet po enačbi 5.60 poveča za

$$\Delta W_{oj} = \frac{LGW}{1 + W/W_s} \quad . \tag{6.2}$$

Upoštevali smo, da pride pri veliki energiji svetlobe do nasičenja, pri čemer smo namesto saturacijske gostote svetlobnega toka j_s vpeljali saturacijsko energijo $W_s = V j_s/c$. Privzeli smo tudi, da je ojačenje na en prelet dovolj majhno, da nam enačbe 5.60 ni treba integrirati.

V stacionarnem stanju se morajo izgube izenačiti z ojačenjem:
$-\Delta W_{izgube} = \Delta W_{oj}$, od koder dobimo, da je ali $W = 0$ ali

$$\Lambda = \frac{LG}{1 + W/W_s} \quad . \tag{6.3}$$

Energija svetlobnega nihanja je torej

$$W = \frac{LG - \Lambda}{\Lambda} W_s \tag{6.4}$$

in je pozitivna le, če je ojačenje G večje od praga

$$G_{pr} = \frac{\Lambda}{L} \quad . \tag{6.5}$$

Ojačenje je seveda odvisno od stopnje obrnjene zasedenosti, ki jo lahko spreminjamo z močjo optičnega črpanja. Pogosto, na primer pri trinivojskem sistemu, obravnavanem v razdelku 4.7, je kar sorazmerno z močjo črpanja. Energija svetlobe v laserju je pod pragom nič, nad pragom pa je linearna funkcija ojačenja, kot kaže slika **??**.

Slika 6.2: Odvisnost energije svetlobe v laserju od ojačenja

Izhodno moč laserja dobimo tako, da delež energije, ki gre na en prelet skozi izhodno zrcalo, delimo s časom preleta preko resonatorja L/c:

$$P_{izh} = \frac{1}{2}(1-\mathscr{R}_1)\frac{c}{L}W \quad . \tag{6.6}$$

Če upoštevamo en. 6.1 in 6.4, vidimo, da je izhodna moč v primeru, da imamo le izgube skozi izhodno zrcalo, največja, če je reflektivnost čim bliže 1. Ker imamo vedno še druge izgube, je izhodna moč največja pri $\mathscr{R}_1 < 1$ (Naloga).

6.1 Zasedbene enačbe

Za podrobnejšo sliko se moramo vrniti k enačbam za zasedenost atomskih nivojev 5.53, ki jim dodamo še enačbo za energijo lastnega valovanja v resonatorju. Še naprej se omejimo na primer, ko je vzbujeno le eno resonatorsko stanje.

Zaradi enostavnosti obravnave lahko enačbe 5.53 brez škode precej poenostavimo. Privzemimo, da je razpadni čas spodnjega laserskega stanja $|1\rangle$, ki ga določa koeficient A_{10}, dosti krajši od razpadnega časa zgornjega stanja $|2\rangle$. Tedaj je $N_1 \simeq 0$, če le ni preveč stimuliranega sevanja, in lahko zasedenost atomskih stanj popišemo z eno samo spremenljivko N_2. Energijo v izbranem stanju resonatorja zapišimo s številom fotonov n, tako da je gostota energije polja $n\hbar\omega/V$, kjer je V volumen resonatorja. S tem dobimo za zasedenost

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{1}{V}\hbar\omega B_{21}g(\omega)nN_2 - N_2A_{21} + rN \tag{6.7}$$

Energija svetlobe v resonatorju se povečuje zaradi stimuliranega sevanja. Atomi z gornjega stanja prehajajo še s spontanim sevanjem, ki ga nekaj tudi gre v izbrano nihanje resonatorja. V razdelku 4.8 prejšnjega poglavja smo videli, da je verjetnost za prehod atoma z višjega na nižje stanje z izsevanjem fotona v izbrano stanje elektromagnetnega polja sorazmerno z $n+1$, kjer je n število fotonov v stanju. Od tod sledi, da upoštevamo prispevek spontanega sevanja s tem, da v prvem členu desnega dela izraza 6.7 pišemo $n+1$ namesto n. Energija resonatorja se zmanjšuje zaradi izgub skozi zrcala in absorpcije in sipanja, kar smo v tretjem poglavju opisali z razpadnim časom $\tau/2 = \Lambda c/L$. Tako imamo

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{V}\hbar\omega B_{21}g(\omega)(n+1)N_2 - \frac{2}{\tau}n \quad . \tag{6.8}$$

Dobili smo sistem dveh diferencialnih enačb za časovni razvoj števila fotonov v resonatorskem stanju in za zasedenost atomskega stanja. Enačbi sta nelinearni in ju ne znamo analitično rešiti.

Kot je pri nelinearnih diferencialnih enačbah običajno, poglejmo najprej, kakšne so stacionarne, to je, od časa neodvisne rešitve $\dot{N}_2 = 0$ in $\dot{n} = 0$. Izrazimo N_2 iz 6.7 in postavimo v 6.8. Dobimo kvadratno enačbo za število fotonov:

$$\frac{2}{V\tau}n(A_{21} + B_{21}\hbar\omega g(\omega)n) - \frac{1}{V}B_{21}\hbar\omega g(\omega)rN(n+1) = 0 \ . \tag{6.9}$$

Preden zapišemo rešitve dobljene enačbe, jo še nekoliko preoblikujmo. Ulomek $\frac{B_{21}\hbar\omega g(\omega)rN}{VcA_{21}}$ je koeficient ojačenja, ki smo ga v prejšnjem poglavju označili z G. $2/c\tau$ so izgube,ki morajo biti enake ojačenju na pragu G_{pr}. Vpeljimo še brezdimenzijsko konstanto p:

$$p = \frac{VA_{21}}{B_{21}\hbar\omega g(\omega)} = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3 g(\omega)} = \frac{VA_{21}}{B_{21}\hbar\omega g(\omega)} \simeq \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}\Delta\omega \ . \tag{6.10}$$

V zadnjem izrazu smo upoštevali, da je v maksimumu $g(\omega) \simeq= 1/\Delta\omega$. p je torej približno produkt gostote stanj elektromagnetnega polja v resonatorju in širine atomskega prehoda, torej kar število vseh stanj v frekvenčnem intervalu atomskega prehoda. To je navadno precj veliko, okoli 10^8 do 10^{10}. S primerjavo izraza 5.44 za saturacijsko gostoto toka vidimo še, da je p tudi število fotonov v resonatorju, pri katerem pride do nasičenja ojačenja, če je frekvenca nihanja resonatorja blizu centra atomske črte. S tem en. 6.9 dobi obliko

$$\frac{1}{p}n^2 - (\frac{G}{G_{pr}} - 1)n - \frac{G}{G_{pr}} = 0 \tag{6.11}$$

s pozitivno rešitvijo

$$n = \frac{p}{2}\left[(\frac{G}{G_{pr}} - 1) + \sqrt{(\frac{G}{G_{pr}} - 1)^2 + \frac{4G}{pG_{pr}}}\right] \ . \tag{6.12}$$

Ker je p veliko število, lahko koren razvijemo, če le ni ojačenje preveč blizu praga, ko je $\frac{G}{G_{pr}} \simeq 1$. Pod pragom je $G < G_{pr}$ in je

$$n \simeq \frac{p}{2}\left[(\frac{G}{G_{pr}} - 1) + (1 - \frac{G}{G_{pr}}) + \frac{2G}{p(G_{pr} - G)}\right] = \frac{G}{G_{pr} - G} \ . \tag{6.13}$$

Pri razvoju korena smo upoštevali, da mora biti pozitiven. Nad pragom je število fotonov

$$n \simeq p(\frac{G}{G_{pr}} - 1) \ . \tag{6.14}$$

Poglejmo, kaj smo dobili. Pod pragom je število fotonov v izbranem resonatorskem nihanju blizu ena do neposredne bližine praga, kjer hitro naraste in doseže takoj nad pragom red velikosti p. Moč črpanja, s katero spreminjamo koeficient ojačenja G, gre pod pragom preko spontanega sevanja skoraj vsa v veliko število stanj elektromagnetnega polja, nad pragom pa povsem prevlada stimulirano sevanje v eno samo izbrano nihanje resonatorja. Obnašanje števila fotonov n pri spreminjanju ojačenja G kaže slika **??**. Prehod preko praga je zaradi velikega p v večini laserjev tako hiter, da ga ni mogoče izmeriti; izjema so polvodniški laserji, katerih volumen je zelo majhen, zato je tudi p dovolj majhen, da je mogoče opaziti zvezen prehod preko praga.

Iz enačbe 6.8 lahko izračunamo še zasedenost gornjega atomskega nivoja v stacionarnem stanju:

$$N_2 = \frac{2V}{\tau B_{21}\hbar\omega g(\omega)}\frac{n}{n+1} \ . \tag{6.15}$$

Slika 6.3: Odvisnost števila fotonov od ojačenja

Na pragu je po enačbi 6.12 $n = \sqrt{p}$. Tako dobimo

$$N_{2pr} = \frac{2V}{\tau B_{21}\hbar\omega g(\omega)} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1} \quad . \tag{6.16}$$

Ker je tudi $\sqrt{p}$ veliko število, sledi iz gornjih enačb, da obrnjena zasedenost narašča do bližine praga, nad pragom pa je praktično konstantna in skoraj natanko enaka kot na pragu. To ni težko razumeti. Nad pragom je število fotonov v resonatorju veliko in linearno (v našem preprostem modelu) narašča s povečevanjem moči črpanja, zato se povečuje tudi hitrost praznenja gornjega atomskega stanja s stimuliranim sevanjem, kar ravno izniči učinek povečanja črpanja. V stacionarno delujočem laserju torej ni mogoče povečati obrnjene zasedenosti nad vrednost na pragu N_{2pr}, kar ima pomembne praktične posledice, kot bomo videli nekoliko kasneje.

V laserju nad pragom je število fotonov zelo veliko, zato prispevka spontanega sevanja v enačbi 6.8 v nadaljevanju ne bomo upoštevali.

Obravnava laserja z zasedbenimi enačbami je seveda zelo groba. Nismo upoštevali, da je svetloba v resonatorju valovanje, ki uboga valovno enačbo. S tem smo privzeli, da je prostorska odvisnost polja v delujočem laserju enaka kot za lastno stanje praznega resonatorja. Poleg tega smo privzeli, da so atomi lahko le v lastnih energijskih stanjih, kar je res le v primeru stacionarnih stanj brez zunanjega, časovno odvisnega polja svetlobe. Če za opis svetlobe uporabimo klasično valovno enačbo, za atome pa kvantno mehaniko, dobimo *polklasični približek* vedenja laserja, ki je mnogo zahtevnejši od zasedbenih enačb, opiše pa skoraj vse pojave v laserjih, razen vpliva spontanega sevanja. Za dosledno in podrobno obravnavo tega pa je potrebno tudi svetlobo opisati s pomočjo kvantne elektrodinamike.

Povzemimo, kaj smo z modelom zasedbenih enačb ugotovili o delovanju enofrekvenčnega laserja. Pri dovolj velikem ojačenju s stimuliranim sevanjem, ki pokriva izgube resonatorja, je v stacionarnem stanju energija in s tem amplituda izbranega lastnega nihanja resonatorja različna od nič. Del valovanja izhaja skozi eno ali obe zrcali. Frekvenca svetlobe je določena z izbranim lastnim stanjem resonatorja. To določa tudi prostorsko odvisnost valovanja v resonatorju in izhodnega snopa. Ugotovili smo, da ima v običajnem stabilnem resonatorju polje obliko zelo blizu Gaussovega snopa, zato je tak tudi izhodni snop.

Lepa prostorska odvisnost izhodnega snopa je morda najpomembnejša lastnost laserjev. Gaussov snop se najmanj širi zaradi uklona in ga je mogoče zbrati v piko približne velikosti valovne dolžine. S tem se tudi najbolj približa idealno točkastemu izvoru svetlobe. Te lastnosti so zelo pomembne za uporabo; na njih so osnovani optični komunikacijski sistemi, čitanje optičnih diskov, laserski obdelovalni stroji...

Slika 6.4: Amplituda polja v resonatorju in prispevek spontanega sevanja.

6.2 Spektralna širina enega laserskega nihanja

Spektralni širini svetlobe enofrekvenčnega laserja je treba posvetiti nekaj več pozornosti. Videli smo, da je amplituda svetlobe laserja konstantna. Spektralna širina klasičnega harmonskega nihala s stalno amplitudo je nič, frekvenca nihanja je natanko določena. Če bi se lastno stanje elektromagnetnega polja v resonatorju obnašalo povsem enako kot klasično harmonsko nihalo, bi bil tudi spekter laserja neskončno ozek. Laserji imajo seveda končno spektralno širino, v idealnem primeru zaradi kvantizacije elektromagnetnega polja, v praksi pa zaradi zunanjih motenj.

Poskusimo najprej oceniti razširitev zaradi vpliva kvantizacije. Zaradi nje imamo poleg stimuliranega tudi spontano sevanje. To je kvantni šum, ki povzroči majhno razširitev spektra. Stroga obravnava tega pojava je mogoča le z dosledno uporabo kvantne elektrodinamike, kar seže izven okvira te knjige, zato se zadovoljimo le z grobo oceno.

Amplitudo svetlobe na izbranem mestu v resonatorju predstavimo kot število v kompleksni ravnini (Slika **??**). Kot, ki ga amplituda tvori z realno osjo, je faza glede na neko izbrano začetno fazo. Energija svetlobe je sorazmerna s številom fotonov; velikost amplitude polja zato lahko merimo kar s korenom iz števila fotonov v nihanju. Velikost amplitude je praktično konstantna, vzdržuje jo stimulirano sevanje, ki ravno pokriva izgube resonatorja. Pri tem ostaja tudi faza nespremenjena. Pač pa se faza spremeni zaradi majhnega prispevka spontanega sevanja.

Pri spontani emisiji se foton izseva s poljubno fazo; prispevek k kompleksni amplitudi na sliki **??** ima torej dolžino 1 in poljubno smer. Zanima nas povprečni kvadrat spremembe faznega kota pri enem spontano izsevanem fotonu:

$$\overline{\delta\phi_1^2} = \frac{1}{\overline{n}}\overline{\cos^2\psi} = \frac{1}{2\overline{n}} \ , \tag{6.17}$$

kjer smo s ψ označili slučajno fazno razliko med celotnim poljem in spontano izsevanim fotonom, indeks 1 pa označuje, da gre za spremembo za 1 foton. Zaporedne spontane emisije so med seboj neodvisne, zato dobimo povprečni kvadrat spremembe faze pri m emisijah kar tako, da seštejemo povprečne kvadrate za posamezne fotone:

$$\overline{\delta\phi_m^2} = m\overline{\delta\phi_1^2} = \frac{m}{2\overline{n}} \ . \tag{6.18}$$

Prešteti moramo še, koliko je spontano izsevanih fotonov na enoto časa. Stimulirano sevanje ravno pokrije izgube resonatorja, zato je stimulirano izsevnih fotonov na enoto časa $2\overline{n}/\tau$. Iz razdelka 4.8, enačba 5.95 vemo, da je razmerje med verjetnostjo za stimulirano in spontano sevanje enako številu fotonov v danem stanju polja, zato je število spontanih sevanj na časovno enoto kar $2/\tau$. Tako imamo v poljubnem času $m = 2t/\tau$ in

$$\overline{\delta\phi^2(t)} = \frac{t}{\overline{n}\tau} \quad . \tag{6.19}$$

Čas t_p, v katerem se bo faza znatno spremenila, recimo za 1, je torej velikostnega reda

$$t_p \simeq 2\overline{n}\tau = \frac{W}{\hbar\omega}\tau = \frac{P}{\hbar\omega}\tau^2 \quad . \tag{6.20}$$

To lezenje faze nam seveda da spektralno širino $1/t_p$.

Število fotonov v laserskem nihanju je nad pragom zelo veliko, recimo 10^9 v majhnem He-Ne laserju. τ je reda velikosti 10^{-7}, tako da je karakteristični čas - koherenčni čas - idealnega laserja mnogo sekund. Iz enačbe 6.20 vidimo še, da je spektralna širina obratno sorazmerna z izhodno močjo laserja. V neposredni bližini praga, kjer je $\overline{n} \simeq 1$, je spektralna širina približno enaka širini nihanj praznega resonatorja.

Dejanski laserji seveda nimajo niti približno tako ozkega spektra, kot smo pravkar ocenili. Frekvenca laserja je določena z dolžino resonatorja: $\omega = n\pi c/L$, pri čemer je n zelo veliko celo število. Majhna sprememba dolžine resonatorja povzroči tudi spremembo frekvence laserja, pri znatnejši spremembi dolžine pa lahko pride tudi do preskoka vzbujenega stanja resonatorja, to je števila n. Dolžina resonatorja se lahko spreminja predvsem zaradi zunanjih mehanskih motenj in zaradi spreminjanja temperature. Zato se spreminja tudi frekvenca laserja in če se posebej ne potrudimo s konstrukcijo resonatorja, so te fluktuacije frekvence kar reda velikosti razmika med sosednimi stanji resonatorja, to je reda velikosti 100 MHz.

Tu velja opozoriti, da je narava spektralne razširitve v laserju tako v idealnem kot v praktičnem primeru drugačna kot v navadnih svetilih. V prvem poglavju smo videli, da intenziteta svetlobe navadnega svetila fluktuira na časovni skali koherenčnega časa, ki je obraten spektralni širini. Po elektrotehniško lahko rečemo, da je taka svetloba amplitudno moduliran šum. Pri enofrekvenčnem laserju je drugače. Amplituda in s tem intenziteta izhodne svetlobe je konstantna, fluktuira le frekvenca oziroma faza. Šum laserja je torej v obliki frekvenčne modulacije.

Fluktuacije dolžine in s tem frekvence laserja je mogoče zmanjšati. S skrbno konstrukcijo in uporabo materialov z majhnim toplotnim raztezkom se zmanjša vpliv vibracij in temperaturnih sprememb v okolici. Poleg tega lahko okolico temperaturno stabiliziramo in laser postavimo na vibracijsko izolirano mizo. Na tak način je mogoče dobiti laser z efektivno spektralno širino pod 1 MHz.

Še ožjo lasersko črto lahko dobimo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Ideja je taka: frekvenco svetlobe, ki izhaja iz laserja, primerjamo z nekim standardom in iz razlike ugotovimo spremembo dolžine resonatorja. Eno od obeh zrcal je nameščeno na piezoelektričnem nosilcu, ki mu z električno napetostjo lahko spreminjamo dolžino in tako popravimo dolžino resonatorja.

Pogalvitna težava je seveda, kako najti dovolj stabilen primerjalni standard za frekvenco. Ena možnost je, da izhodno svetlobo spustimo skozi konfokalni interferometer, ki je skoraj v resonanci z laserjem in ima dovolj ozek vrh prepustnosti. Majhen premik frekvence laserja bo povzročil, da se bo spremenil skozi interferometer prepuščeni svetlobni tok. Na prvi pogled je videti, da s tem nismo nič pridobili, saj bo resonančna frekvenca interferometra stabilna tudi le toliko, kot je stabilna njegova dolžina. Vendar je z izolacijo in temperaturno stabilizacijo možno držati dolžino praznega resonatorja - interferometra - mnogo natančneje kot dolžino laserja, v katerem imamo aktivno sredstvo, ki mu moramo dovajati energijo.

Slika 6.5: Zaslonke za pripravo prostorsko koherentnega snopa iz nekoherentnega svetila

Druga možnost je stabilizirati laser na primerno molekularno absorpcijsko črto. Te so lahko zelo ozke, zato je tudi spekter laserja lahko izredno ozek, pod 1 kHz. Pri tem moti Dopplerjeva razširitev absorpcijske črte, ki pa se ji je mogoče izogniti. Kako to napravimo in kako je bila s tem omogočena nova definicija metra, si bomo pogledali v razdelku ????.

6.3 Primerjava laserjev in običajnih svetil

Čas je, da povzamemo, kar smo doslej dognali o lastnostih laserjev in jih primerjamo z običajnimi svetili. Kot ves čas doslej obravnavajmo enofrekvenčni laser, v katerem je vzbujeno le eno osnovno stanje resonatorja, ki je Gaussove oblike.

Svetlobni snop, ki izhaja iz laserja, ima dve takoj očitni odliki. Je zelo usmerjen in zelo enobarven. Prva lastnost je seveda posledica tega, da je lastno stanje stabilnega resonatorja Gaussove oblike in je zato tak tudi izhodni snop. Kot smo videli v 3. poglavju, je divergenca takega snopa samo posledica uklona in je najmanjša možna. Valovne fronte so gladke in na dani razdalji ves čas enake, laserski snop je torej prostorsko idealno koherenten. Je tudi najboljši približek točkastega svetila, kar je v neposredni zvezi s prostorsko koherenco.

Koherenten Gaussov snop lahko z ustrezno optiko zberemo v piko velikosti valovne dolžine, s čimer dosežemo že pri skromni moči zelo veliko gostoto svetobnega toka. To izkoriščajo v tehnologiji za natančno in čisto obdelavo materialov in v medicini, kjer laserje uporabljajo za zahtevne kirurške posege.

Kako pa je z običajnimi svetili? V njih vsak atom sveti po svoje, zato nimamo prostorske koherence. Valovna fronta na danem mestu je nepravilna in se v koherenčnem času znatno spremeni. Svetlost površine svetila je neodvisna od smeri (Lambertov zakon). Osvetljenost slike, ki jo dobimo s poljubnim optičnim sistemom, ne more biti večja od izsevane gostote svetlobnega toka.

Tudi iz svetlobe običajnega nekoherentnega svetila lahko pripravimo koherenten snop. Na neki razdalji od svetila moramo postaviti zaslonko, ki je manjša od koherenčne ploskve na tistem mestu (glej razdelek 1.3). Ocenimo, kolikšna je moč snopa za zaslonko. Svetilo naj ima svetlost[1] B. Pri najsvetlejših nekoherentnih izvorih, to so živosrebrne svetilke, doseže B vrednost do 100

[1] Svetlost je svetilnost na enoto ploskve

W/cm^2. Moč snopa za zaslonko je (slika ??)

$$P = BS_0 \Delta\Omega = \frac{BS_0 S_c}{z^2} \simeq \frac{BS_0}{z^2} \frac{\lambda^2 z^2}{S_0} = B\lambda^2 \ . \tag{6.21}$$

Tu je S_0 površina svetila, z oddlajenost zaslonke, S_c pa velikost koherenčne ploskve, za katero smo uporabili oceno **??** iz prvega poglavja. Pri svetlosti 100 W/cm^2 dobimo, da je moč koherentnega snopa le približno $3 \cdot 10^{-7}$ W, kar je štiri rede velikost manj od prav šibkih laserjev z močjo 1 mW.

Druga odlična lastnost svetlobe iz enofrekvenčnega laserja je zelo majhna spektralna širina. Z nekaj truda je ta lahko pod 1 kHz, emisijske črte v plinu pa so zaradi Dopplerjeve razširitve široke vsaj nekaj GHz, pa še to le v razmeroma redkem in hladnem plinu, kjer je svetlost majhna.

Različne širine spektrov običajne svetilke in laserja lahko upoštevamo tako, da kot primerjalno količino vzamemo namesto celotne moči v koherentnem snopu spektralno gostoto moči. Majhen šolski He-Ne laser seva 1 mW v približno 10^7 Hz, tako da je spektralna gostota moči $dP/d\nu \simeq 10^{-10}$ W/Hz. Zelo svetla živosrebrna svetilka seva v močno razširjene spektralne črte s širino okoli 10 nm $\simeq 10^{13}$ Hz. Spektralna gostota v koherentnem snopu, ki ga pripravimo iz take svetilke, bo tako le okoli $3 \cdot 10^{-20}$ W/Hz. Majhen šolski He-Ne laser tako prekaša najmočnejše nekoherentno svetilo za skoraj 10 velikostnih redov. Z laserji je seveda mogoče doseči mnogo večje moči, v sunkih tja do 10^{12} W, tako da po spektralni gostoti moči v koherentnem snopu laserji prekašajo običajna svetila do preko 20 velikostnih redov. Za toliko je tudi večja dosegljiva gostota moči na enoto ploskve in frekvence, kar je za vrsto uporab laserjev, posebno v spektroskopiji, odločilnega pomena. Najbrž v zgodovini težko najdemo še kak drug izum, ki je prinesel tolikšno izboljšavo v neki bistveni količini in tako ni čudno, da je prihod laserjev v začetku 60-tih let povzročil novo rojstvo optike.

Med laserji in običajnimi svetili je še ena pomembna, a manj opazna razlika. Z ustreznim interferometrom lahko tudi snop iz nekoherentnega svetila filtriramo, tako da dobimo enako spektralno širino kot iz laserja, sveda z mnogo manjšo močjo. Vendar je narava spektralne razširitve različna. Šum laserja je v obliki frekvenčne modulacije, pri čemer je amplituda svetlobnega vala konstantna, šum nekohernetnega svetila pa je v obliki amplitudne modulacije.

6.4 Mnogofrekvenčni laser

Doslej smo obravnavali le laser, v katerem je bilo vzbujeno eno samo stanje resonatorja. Ojačevalna širina večine aktivnih sredstev je precej velika. V plinih je na primer zaradi Dopplerjevega pojava vsaj nekaj GHz. Lastne frekvence resonatorja so navadno mnogo manj narazen, pri 30 cm dolgem resonatorju je razmik 500 MHz. Tako se prav lahko zgodi, da je ojačenje v laserju dovolj veliko za več nihanj hkrati. Vzbujena bodo vsa tista nihanja, za katere je ojačenje večje od ojačenja na pragu G_{pr}. Svetloba iz takega mnogofrekvenčnega laserja ni več monokromatska, temveč je sestavljena iz množice ozkih črt znotraj ojačevalnega pasu in tako ni mnogo bolj monokromatska kot ustrezna spektralna komponenta svetlečega plina. Ostaja pa prostorsko koherentna.

Za holografijo, interferometrijo in nekatere spektroskopske uporabe potrebujemo ozko spektralno črt. Zato moramo poskrbeti, da bo vzbujeno le eno nihanje resonatorja, najbolje tisto, ki je najbližje vrhu ojačenja ativnega sredstva, kar napravimo tako, da povečamo izgube za vsa ostala nihanja. Ena možnost je, da v resonator postavimo še Fabry-Perotov interferometer, kot kaže slika ??. Njegova prepustnost v odvisnosti od frekvence, razmika med zrcali L_f in nagiba glede

Slika 6.6: Frekvenčna odvisnost ojačenja, položaj lastnih frekvenc resonatorja in ojačenje na pragu.

Slika 6.7: Frekvenčna odvisnost ojačenja, položaj lastnih frekvenc resonatorja in ojačenje na pragu, kadar je v resonator vgrajen Fabry-Perotov interferometer.

na os resonatorja je podana z enačbo (glej 3. poglavje)

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2} \sin^2(\frac{\omega}{c} L_f \cos\phi)} \tag{6.22}$$

in jo kaže slika ??. Izrazitost vrhov prepustnosti je odvisna od reflektivnosti zrcal interferometra. Z ustrezno izbiro razmika med zrcali in nagiba lahko dosežemo, da vrh prepustnosti ravno sovpada z izbranim stanjem resonatorja. Izgube za ostala nihanja, vsebovane v G_{pr}, so se s tem povečale in laser sveti le pri eni sami izbrani frekvenci. Na sliki ?? so prikazane povečane izgube, lastna stanja resonatorja in ojačenje aktivnega sredstva. Ker zadošča že zmerno povečanje izgub, je reflektivnost zrcal interferometra običajno dokaj nizka, pod 0,5.

Naloga: Izberi ustrezne parametre interferometra.

Nagib interferometra je potreben tudi zato, da se neprepuščena svetloba odbije ven iz smeri osi resonatorja. Če bi bila os interferometra vzporedna z osjo resonatorja, bi nastale dodatne, neželjene resonance z osnovnimi zrcali resonatorja, kar bi močno motilo delovanje laserja.

6.5 Relaksacijske oscilacije

Doslej smo obravnavali le stacionarno delovanje laserjev. Včasih želimo izhodno moč modulirati s spreminjanjem črpanja. Pogosto laserji delujejo v sunkih. V nekaterih aktivnih sredstvih je mogoče doseči obrnjeno zasedenost le za kratek čas, črpanje v sunkih je včasih enostavnješe, recimo z bliskavko pri trdnih laserjih, dostikrat pa tudi želimo dobiti iz laserja kratke in močne koherentne sunke svetlobe. Za obravnavo nestacionarnega delovanja moramo seveda reševati sistem diferencialnih enačb 6.7 in 6.8, kar gre v splošnem le numerično.

Preden se lotimo sunkov, poglejmo, kako se obnaša laser, ki je blizu stacionarnega stanja. Spet se omejimo na enofrekvenčni laser, ki ga opišemo z enačbami 6.7 in 6.8. Te zaradi preglednosti zapišimo nekoliko drugače. Vpeljimo brezdimnezijski čas $t' = tA$ in $\tau' = \tau A$, čas torej merimo v enotah življenskega časa laserskega nivoja. Upoštevajmo še, da je $VA/(B\hbar\omega g(\omega_0)) = p$, kjer je p število stanj elektromagnetnega polja v volumnu V in znotraj spektralne širine laserskega nivoja. Tako imamo

$$\frac{dN_2}{dt'} = -\frac{1}{p} nN_2 - N_2 + N_{20} \tag{6.23}$$

$$\frac{dn}{dt'} = \frac{1}{p} nN_2 - \frac{2}{\tau'} n \ . \tag{6.24}$$

Pri tem smo vpeljali konstanto $N_{20} = rN/A$, ki ima tudi nazornen pomen: je zasedenost, ki bi jo dobili pri danem stacionarnem črpanju, če v izbranem stanju ne bi bilo fotonov in s tem ne stimuliranega sevanja in torej meri moč črpanja. V enačbi za hitrost spreminjanja števila fotonov smo zanemarili prispevek spontanega sevanja, za katerega smo že ugotovili, da se pozna le do praga.

Pri nelinearnih diferencialnih enačbah lahko pogosto dobimo uporabne približke z linearizacijo. Naj laser najprej deluje stacionarno, v nekem trenutku pa ga nekoliko izmaknemo iz stacionarnega stanja, recimo tako, da spremenimo moč črpanja. Trenutno zasedenost N_2 in število fotonov n lahko zapišemo v obliki

$$N_2 = N_{2s} + x \qquad \text{in} \qquad n = n_s + y \ , \tag{6.25}$$

kjer sta N_{2s} in n_s vrednosti N_2 in n_s v stacionarnem stanju. Zanju velja

$$N_{2s} = \frac{2p}{\tau'} \tag{6.26}$$

in

$$n_s = p\frac{N_{20} - N_{2s}}{N_{2s}} = p(a-1) \ . \tag{6.27}$$

Kot smo ugotovili že v drugem razdelku, je stacionarna zasedenost enaka zasedenosti na pragu, ki je odvisna od izgub resonatorja, kar kaže tudi enačba 6.26. Razmerje $a = N_{20}/N_{2s}$ je mera za moč črpanja in mora biti v delujočem laserju večje od 1. V večini praktičnih primerov doseže a vrednosti do 3 ali 5.

Postavimo sedaj nastavka 6.25 v enačbi 6.23. Dobimo

$$\frac{dx}{dt'} = -\frac{1}{p} n_s N_{2s} - N_{2s} + N_{20} - \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - x \tag{6.28}$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{1}{p} n_s N_{2s} - \frac{2}{\tau'} n_s + \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - \frac{2}{\tau'} y \tag{6.29}$$

Slika 6.8: Relaksacijske oscilacije

Ker sta x in y majhna v primeri s stacionarnimi vrednostmi, lahko zanemarimo produkt xy. Vsi členi, ki vsebujejo le stacionarne vrednosti, dajo ravno 0, saj smo jih tako določili. Če upoštevamo še izraza 6.26 in 6.27, dobimo željeni linearizirani diferencialni enačbi za odmika od stacionarnih vrednosti

$$\frac{dx}{dt'} = -ax - \frac{2}{\tau'}y \tag{6.30}$$

$$\frac{dy}{dt'} = (a-1)x \ . \tag{6.31}$$

Kot smo pri linearnih sistemih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti vajeni, poiščemo rešitev v obliki eksponentne funkcje

$$x = x_0 e^{\lambda t'} \qquad \text{in} \qquad y = y_0 e^{\lambda t'} \ . \tag{6.32}$$

Dobljeni homogeni sistem linearnih enačb

$$(a+\lambda)x_0 + \frac{2}{\tau'}y_0 = 0 \tag{6.33}$$

$$-(a-1)x_0 + \lambda y_0 = 0 \tag{6.34}$$

bo imel netrivialno rešitev le, če bo njegova determinanta nič:

$$\lambda^2 + a\lambda + \frac{2}{\tau'}(a-1) = 0 \ . \tag{6.35}$$

Rešitvi sta

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2}{\tau'}(a-1)} \ . \tag{6.36}$$

Narava rešitve je odvisna od velikosti brezdimenzijskega relaksacijskega časa nihanja resonatorja $\tau' = A\tau$. Za $\tau' > 2$ je izraz pod korenom pozitiven pri vseh a in laser se vrača v stacionarno stanje eksponentno. Za $\tau < 2$ pa je koren v nekem območju parametra a imaginaren in laser se vrača v stacionarno stanje z dušenim nihanjem, ki mu pravimo *relaksacijske oscilacije*.

V običajnih resonatorjih je τ velikostnega reda 10^{-7} s. Razpadna konstanta laserskega nivoja A je navadno dokaj majhna, ker je le v takih primerih lahko doseči obrnjeno zasedenost, tipična vrednost je recimo 10^5 s^{-1}, lahko pa je še dosti manjša. Tedaj je $\tau' \simeq 10^{-2}$ in imamo relaksacijske oscilacije pri vseh dosegljivih vrednostih črpanja nad pragom, to je za $a > 1$. Ker a v praksi ni nikoli dosti večji od 3, je frekvenca oscilacij ω_r' v brezdimenzijskih enotah približno $1/\sqrt{\tau'}$. Če preidemo nazaj na prave enote časa, dobimo $\omega_r \simeq \sqrt{A/\tau}$. V tem primeru je torej frekvenca relaksacijskih oscilacij velikostnega reda geometrijske sredine med razpadnima konstantama nihanja resonatorja in atomskega stanja. Primer takega nihanja pri vključitvi laserja kaže slika ??.

Relaksacijske oscilacije so praktično pomembne, ker določajo gornjo mejo hitrosti, s katero lahko izhodna moč laserja sledi modulaciji črpanja. Poleg tega imamo pri tej frekvenci resonanco, pri kateri se šum črpanja ojačano prenaša v šum izhodne moči.

6.6 Delovanje v sunkih s preklopom dobrote

Veliko trenutno moč dobimo iz laserjev, kadar delujejo v kratkih sunkih. Pogosto tedaj tudi ojačevalno sredstvo črpamo v sunkih. Pri tem se pojavi težava. Ko ob močnem črpanju obrnjena zasedenost znatno preseže zasedenost praga (v nestacionarnem stanju je to mogoče), laser posveti in v kratkem času zasedenost pade nazaj pod prag. Če tedaj črpanje še traja, čez čas zasedenost zopet dovolj naraste in laser ponovno posveti. To se lahko večkrat ponovi. Razmiki med zaporednimi sunki so reda velikosti periode relaksacijskih oscilacij, so pa lahko precej nepravilni. Pri takem režimu delovanja v posameznem sunku ne dobimo razpoložljive energije črpanja v enem samem lepo oblikovanem sunku, kar je za vrsto uporab zelo pomembno.

Opisani težavi se je moč izogniti. V sistemu atomov v stanju obrnjene zasedenosti je shranjena energija, ki se preko stimuliranega sevanja lahko pretvori v koherenten svetlobni sunek. Čim večja je stopnja inverzije, tem več energije je na voljo. Ugotovili pa smo, da obrnjene zasedenosti v resonatorju z danimi izgubami ni mogoče povečati znatno nad prag. Pri velikih izgubah je prag visoko in je shranjene energije več. Zato postopamo takole. Najprej držimo izgube resonatorja velike in ustvarimo veliko obrnjeno zasedenost. Nato dovolj hitro izgube zmanjšamo. Optično ojačenje je veliko in energija svetlobe v kratkem času močno naraste. S tem se tudi obrnjena zasedenost hitro zniža na vrednost močno pod pragom. Predstavljamo si lahko, da dobimo prvi nihaj relaksacijskih oscilacij, le da je začetno stanje daleč od stacionarnega in je zato linearni približek zelo slab. Iz laserja dobimo kratek in zelo močan sunek svetlobe. Energija sunka je skoraj tolikšna kot je bila energija obrnjene zasedenosti. Elektrotehniki izgube resonatorjev podajajo z dobroto, to je razmerjem frekvence lastnega stanja in njegove širine, zato opisano tehniko imenujemo *preklop dobrote*. Dogajanje kaže slika ??.

Izgube resonatorja je mogoče spreminjati na mnogo načinov. Najenostavneje je vrteti eno od ogledal. Tedaj dobimo uglašen resonator le v kratkem trenutku, ko je ogledalo pravokotno na os. Metoda je dokaj uspešna, a zastarela. Boljši in danes največkrat uporabljani način je, da v resonator vgradimo elektrooptični ali akustooptični modulator, o katerih bomo govorili kasneje. Z njimi lahko električno krmilimo izgube.

Kot smo že povedali, nelinearnih laserskih enačb ne moremo analitično rešiti. Zato najprej napravimo nekaj ocen. Trajanje sunka je odvisno od hitrosti, s katero se izprazni gornji laserski nivo. To se ne more zgoditi hitreje kot v nekaj preletih sunka skozi resonator. Trajanje sunka je torej vsaj nekajkrat $2L/c$, to je za 15 cm dolg resonator vsaj 10 ns.

Ocenimo lahko še tudi hitrost naraščanja na začetku in upadanja na koncu sunka. Zapišimo najprej še enkrat enačbi za zasedenost in število fotonov, pri čemer upoštevajmo, da nas zanima le dogajanje v času sunka, ki je zeko kratek v primeri atomskim razpadnim časom, zato zanemarimo ustrezni člen v enačbi 6.7. Navadno je tudi črpanje prešibko, da bi med sunkom znatno vplivalo na zasedenost, zato lahko člen rN izpustimo. S črpanjem seveda ustvarimo začetno zasedenost

Slika 6.9: Obrnjena zasedenost in energija v laserju pri preklopu dobrote

N_{20}. Tako nam ostane

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{1}{V}B\hbar\omega g(\omega)\,n N_2 \tag{6.37}$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{V}B\hbar\omega g(\omega)\,n N_2 - \frac{2}{\tau}n\,. \tag{6.38}$$

Na začetku sunka se vrednost N_2 ne razlikuje dosti od začetne vrednosti N_{20}, tako da število fotonov narašča približno eksponentno:

$$n(t) = n_0 e^{\frac{1}{V}B\hbar\omega g(\omega)t} = n_0 e^{t/\tau_r}\quad . \tag{6.39}$$

Začetnega števila fotonov ne poznamo, vemo pa, da je velikostnega reda 1, saj ga dobimo zaradi spontane emisije. Da bo n narastel na znatno vrednost, recimo več od 10^{10} fotonov, je potreben čas blizu 30 τ_r.

Vzemimo za primer neodimov laser. Presek za stimulirano sevanje $\sigma(\omega) = \frac{1}{c}B\hbar\omega g(\omega)$ (razdelek 4.4) je okoli 10^{-19} cm^2. Naj bo začetna gostota zasedenosti $N_{20}/V = 10^{19}/\mathrm{cm}^3$. Tedaj je $\tau_r = 3$ ns. Proti koncu sunka pade obrnjena zasedenost precej pod prag in za grobo oceno lahko predpostavimo, da ojačevanja ni več. Število fotonov bo tedaj upadalo s krakterističnim razpadnim časom resonatorja $\tau/2 \simeq 2L/c(1-\mathscr{R})^{-1}$. V laserjih s preklopom dobrote je odbojnost izhodnega zrcala navadno dokaj nizka, recimo 0,5. Pri $L = 15$ cm je tako $\tau = 4$ ns. Celotno trajanje sunka je v izbranem primeru tako približno 10 ns, pri čemer traja okoli 100 ns od preklopa dobrote, da sunek zraste iz šuma spontanega sevanja. Energija sunka je blizu $N_{20}\hbar\omega$, to je pri aktivnem volumnu 0,5 cm^3 nekaj desetink joula. Od tod lahko ocenimo še, da je moč v vrhu sunka velikostnega reda 10 MW.

Iz enačb 6.37 sicer ne moremo izračunati časovnih odvisnosti N_2 in n, lahko pa najdemo njuno medsebojno zvezo. Izrazimo iz prve dt in ga postavimo v drugo enačbo. Dobimo

$$dn = -dN_2 + \frac{N_{2p}}{N_2} dN_2 \quad , \tag{6.40}$$

kjer smo upoštevali, da je $N_{2p} = 2V/(B\hbar\omega g(\omega)\tau)$. Enačbo brez težav integriramo:

$$n = N_{20} - N_2 + N_{2p} \ln \frac{N_2}{N_{20}} \quad . \tag{6.41}$$

Vzeli smo, da je na začetku $N_2 = N_{20}$ in $n = 0$. Iz dobljene zveze lahko najprej izračunamo, kolikšna je končna zasedenost N_{2k}. Na koncu mora biti zopet $n = 0$, kar nam da transcendentno enačbo za N_{2k}. Ima obliko $(x/a) = \exp(x-a)$, kjer je $x = N_{2k}/N_{20}$ in $a = N_{20}/N_{2p}$. Kadar je začetna zasedenost le malo nad pragom, tudi končna ne pade dosti pod prag, zato je izraba energije slabša. Pri večjih začetnih vrednostih N_{20} pa pade končna skoraj na nič. Za $a = 2$, na primer, je $x = 0,41$, medtem ko je že pri $a = 4$ x le še 0,08. S tem lahko izračunamo celotno energijo sunka: $W = \hbar\omega(N_{20} - N_{2k})$.

Trenutna moč, ki izhaja iz laserja, je dana s $P = (2\hbar\omega/\tau)n$. Največja bo v vrhu sunka, ki je določen z $dn/dN_2 = 0$. Ta enačba ima očitno rešitev pri $N_2 = N_{2p}$, vrh sunka je torej natanko tedaj, ko pade zasedenost na prag. Moč je tedaj $P_{max} = (2\hbar\omega/\tau)[N_{20} - N_{2p} - N_{2p}\ln(N_{20}/N_{2p})]$.

S preklopom dobrote dobimo zelo kratke in močne svetlobne sunke. Vendar je največja energija omejena. Če je začetna obrnjena zasedenost dovolj velika, postane ojačenje tolikšno, da se svetloba že v enem preletu aktivnega sredstva močno ojači in izprazni laserski nivo. To omejuje nadaljne črpanje. Večje moči dosežejo tako, da sunke iz laserja ojačijo s prehodom skozi enako aktivno snov, kot je v laserju. Z večstopenjskim ojačevanjem je mogoče doseči zelo velike energije v nanosekundnih sunkih, do 100 kJ. Da se ojačevalniki med seboj ne motijo, jih je treba ločiti s Faradayevimi izolatorji.

Naloga: Oceni, kolikšna je dosegljiva zasedenost pri dani dolžini Nd:YAG paličke.

6.7 Uklepanje faz

Še dosti krajše sunke kot s preklopom dobrote je mogoče dobiti na povsem drug način, ki je prav presentljiva manifestacija koherentnosti laserske svetlobe. Naj v laserju niha več nihanj hkrati. Njihove frekvence so enakomerno razmaknjene za $\Delta\omega = \pi c/L$. Celotno električno polje v neki točki v laserju je

$$E(t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} A_m e^{i[(\omega_0 + m\Delta\omega)t + \varphi_m(t)]} \quad . \tag{6.42}$$

N je število vseh vzbujenih nihanj. Upoštevali smo, da ima vsako nihanje lahko poljubno fazo $\varphi_m(t)$, ki je v splošnem predvsem zaradi zunanjih motenj slučajna funkcija časa. Zaradi tega se tudi celotno polje slučajno spreminja, kar močno zmanjšuje uporabnost takega laserja tam, kjer je potrebna časovna koherenca.

Denimo, da so faze vseh nihanj enake. Poleg tega zaradi enostavnosti računa privzemimo še, da so tudi vse amplitude A_m enake. Tedaj postane vsota 6.42 geometrijska in jo lahko brez težav seštejemo:

$$E(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} \frac{\sin(N\Delta\omega t/2)}{sin(\Delta\omega t/2)} \quad . \tag{6.43}$$

Slika 6.10: Časovna odvisnost moči mnogofrekvenčnega laserja z enakimi fazami

Slika 6.11: Prostorska odvisnost fazno uklenjenih sunkov.

Trenutna moč izhodne svetlobe ima časovno odvisnost

$$P(t) = P_0 \frac{\sin^2(N\Delta\omega t/2)}{\sin^2(\Delta\omega t/2)} \tag{6.44}$$

in jo kaže slika 6.10. Predstavlja periodično zaporedje sunkov, ki si slede s periodo $T = 2\pi/\Delta\omega = 2L/c$, kar je enako času obhoda svetlobe v resonatorju. Konstanta P_0 je moč posameznega nihanja. Moč v vrhu sunka je tako N^2P_0, povprečna moč pa NP_0. Računsko je pojav enak kot uklon na mrežici in lahko rečemo, da imamo opravka z interferenco v času. Dolžina sunkov je

$$\tau_{ML} = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_G} \quad , \tag{6.45}$$

ker je N ravno število nihanj znotraj širine ojačevanja $\Delta\omega_G$. Dolžina sunka je torej obratno sorazmerna s širino ojačevanja aktivnega sredstva.

Premislimo še, kakšna je prostorska odvisnost električnega polja v resonatorju. Polje na danem mestu opisuje enačba 6.43. Še krajevno odvisnost dobimo, če v 6.43 zamenjamo t s $(t - z/c)$. To pa predstavlja svetlobni paket, ki potuje sem in tja med ogledali resonatorja. Na izhodnem ogledalu se ga vsakič nekaj odbije, nekaj pa gre ven iz resonatorja (slika **??**). Razmik med sunki, ki izhajajo iz resonatorja, je $2L$, prostorska dolžina posameznega sunka pa $\tau_{ML}c = 2L/N$.

V našem računu predpostavka, da so vse amplitude A_m enake, ni prav nič bistvena za osnovne ugotovitve. Če vzamemo realističen primer, da so amplitude oblike $A_m = A_0 \exp[(m\Delta\omega/\Delta\omega_G)^2]$, vsote 6.42 ne znamo točno sešteti, lahko pa jo približno pretvorimo v integral, ki je Fourierova transformacija Gaussove funkcije (Pri prehodu z diskretne vsote na integral seveda izgubimo periodičnost zaporedja sunkov.). Ta je zopet Gaussova funkcija, katere širina je obratna vrednost širine prvotne funkcije, prav podobno, kot smo dobili zgoraj. Odvisnost amplitud nihanj od m vpliva torej le na točno obliko sunkov, osnovne ugotovitve pa se ne spremene. (Naloga).

Pač pa je predpostavka, da so vse faze φ_m enake, bistvena. V naši dosedanji sliki mnogofrekvenčnih laserjev so resonatorska stanja med seboj neodvisna, zato so faze poljubne in se zaradi motenj lahko še spreminjajo. Da dobijo za vsa nihanja isto vrednost, moramo poskrbeti posebej. Tako *uklepanje faz* je mogoče doseči na več načinov. Ena možnost je, da moduliramo izgube resonatorja s frekvenco, ki je ravno enaka razliki frekvenc med resonatorskimi stanji. To ni težko razložiti. Naj bo modulator tak, da je večino časa zaprt, le v razmikih $T = 2L/c$ naj bo kratek čas odprt. Postavimo ga tik ob eno ogledalo. Tedaj se v resonatorju očitno lahko uspešno ojačuje le kratek sunek, kakršen je na sliki **??**. Izgube za vsa nihanja bodo majhne le tedaj, kadar bodo vse faze enake. V praksi ni potrebno, da je modulacija tako izrazita. Običajno zadošča sinusna modulacija izgub, kjer je relativna prepustnost v minimumu za nekaj destink manjša od maksimalne.

Kako pri modulaciji pride do uklepanja faz, lahko uvidimo še drugače. Modulacija amplitude posameznega nihanja povzroči, da se v spektru nihanja pojavita še stranska pasova pri frekvencah $\omega_m \pm \Delta\omega$. Ta se ravno pokrivata z obema sosednjima nihanjema in se konstruktivno prištejeta, če imata enako fazo. S tem pa so tudi izgube manjše in ima delovanje laserja z uklenjenimi fazami najnižji prag. Zadnji razmislek nam tudi pove, da ni dobra le amplitudna modulacija, temveč tudi fazna (ali frekvenčna), saj se tudi tedaj pojavijo stranski pasovi.

Za modulacijo se najpogosteje uporabljajo akustooptični modulatorji, pri katerih izkoriščamo uklon svetlobe na stoječih zvočnih valovih v primernem kristalu (Glej 7. poglavje). Frekvenca zvočnega vala mora biti enaka polovici zahtevane modulacijske frekvence, za 1,5 m dolg laser torej 50 MHz.

Poleg opisanega aktivnega postopka je mogoče faze ukleniti tudi tako, da v resonator postavimo plast barvila, ki močno absorbira svetlobo laserja pri majhni gostoti toka, pri veliki gostoti toka pa pride do nasičenja absorpcije (glej razdelek 4.5), zato postane barvilo prozorno. Na začetku imamo v laserju predvsem spontano sevanje, ki se pri enem prehodu skozi aktivno snov deloma ojači. Barvilo najmanj absorbira največjo fluktuacijo. Pri dovolj velikem ojačenju bo ta rastla in spet dobimo fazno uklenjeni sunek. Ker mora po prehodu sunka absorpcija v barvilu zopet hitro narasti, mora biti relaksacijski čas barvila zelo kratek, v območju pikosekund.

Z uklepanjem faz je danes mogoče dobiti sunke z dolžino pod 100 fs (10^{-13} s). Tak sunek traja le še nekaj deset optičnih period. S posebnimi prijemi jih lahko še skrajšajo na okoli 10 fs. Če je potrebna večja energija sunkov, jih ojačijo, kar ne pokvari mnogo osnovnega sunka. Zelo kratke svetlobne sunke danes na široko uporabljajo za študij hitre molekularne dinamike in kratkoživih vzbujenih elektronskih stanj v polvodnikih in mnogih drugih snoveh. Z njimi se je časovna ločljivost povečala za nekaj redov velikosti [**?**].

6.8 *Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo

V drugem razdelku smo videli, da je efektivna spektralna širina enofrekvenčnega laserja odvisna od fluktuacij dolžine optične poti svetlobe pri preletu resonatorja. Na to lahko poleg spreminjanja geometrijske dolžine vpliva še spreminjanje lomnega količnika. Če se posebej ne potrudimo, laser sveti nekje blizu vrha ojačevalnega pasu, pri čemer frekvenca pleše za znaten del razmika med resonatorskimi stanji. V šolskem He-Ne laserju je to na primer nekaj deset MHz.

Slika 6.12: Odvisnost moči laserja z nasičenim absorberjem od frekvence

Bistveno manjšo širino lahko dosežemo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Pri tem je pogalvitni problem, kako dobiti primerjalni standard. S stabilizacijo na pomožni interferometer, ki smo jo na kratko opisali v drugem razdelku, lahko dobimo zelo ozko črto, ki pa ima le toliko natančno določeno frekvenco, kot poznamo dolžino interferometra. Včasih, na primer za natančna interferometrična merjenja dolžin, s tem nismo zadovoljni in potrebujemo drug, absoluten standard.

Tak standard za frekvenco so ozki prehodi v primernem razredčenem plinu. Vendar naletimo na težavo. Zaradi Dopplerjevega pojava so absorpcijske črte močno razširjene. Pomaga nam pojav nasičenja absorpcije, o katerem smo govorili v razdelku 4.9. Tam smo videli, da se pri dvakratnem prehodu monokromatskega snopa svetlobe skozi plin v nasprotnih smereh pojavi v sredini Dopplerjevo razširjene črte vdolbina, ki ima obliko homogeno razširjene črte. Homogena širina je lahko mnogo manjša od Dopplerjeve in je zato vdolbina uporabna kot frekvenčni standard.

V laserski resonator postavimo poleg aktivnega sredstva še celico s primernim plinom, ki ima absorpcijsko črto v bližini vrha ojačenja aktivnega sredstva. Za He-Ne laser pri 633 nm so to na primer pare ioda. Zaradi absorpcije se povečajo izgube v laserju in izhodna moč se zmanjša. Spreminjajmo sedaj dolžino resonatorja in s tem frekvenco laserja. Ko se ta približa na homogeno širino centru absorpcijske črte pri ω_0, se absorpcija zmanjša in s tem se moč laserja poveča. Odvisnost moči laserja z absorberjem od dolžine kaže slika **??**. Povečanje moči v vrhu običajno ni prav veliko, manj od procenta.

Shema stabilizacije na nasičeno absorpcijo je prikazana na sliki **??**. Eno od zrcal resonatorja je na piezoelektričnem nosilcu. Nanj vodimo izmenično napetost s frekvenco Ω in s tem moduliramo frekvenco laserja, da se vozi preko absorpcijske vdolbine pri ω_0. Zaradi tega se spreminja tudi izhodna moč laserja, ki jo opazujemo s fotodiodo. Kadar je srednja frekvenca laserja enaka ω_0, se moč zmanjša simetrično pri odmikih navzgor in navzdol od ω_0 in se zato spreminja z dvojno frekvenco modulacije 2Ω. Kadar pa je srednja frekvenca laserja nekoliko odmaknjena od ω_0, se izhodna moč pri odmiku v zrcala v eno stran spremeni drugače kot v drugo, kar pomeni, da je v signalu s fotodiode tudi komponenta s frekvenco Ω. Da držimo srednjo frekvenco laserja enako ω_0, moramo torej meriti komponento izhodne moči pri modulacijski frekvenci in s povratno zanko skrbeti, da je ta enaka nič.

Komponento signala s frekvenco Ω zaznamo s faznim detektorjem, ki deluje tako, da signal množi z refenčno modulacijsko napetostjo. V produktu dobimo istosmerno komponento, ki je sorazmerna signalu pri frekvenci Ω in ki jo izločimo z nizkopasovnim filtrom. Izhod iz faznega detektorja je tako sorazmeren odmiku srednje frekvence laserja od ω_0. Preko primernega

Slika 6.13: Shema stabilizacije laserja na nasičeno absoprcijo

ojačevalnika ga vodimo na piezoelektrični nosilec zrcala in tako popravljamo dolžino laserja.

Napravimo kvantitativno oceno opisane stabilizacijske sheme. Odvisnost izhodne moči od frekvence laserja ω lahko približno zapišemo v obliki

$$P(\omega) = P_0 + \frac{P_1\gamma^2}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \quad . \tag{6.46}$$

P_0 je moč laserja brez saturacijskega vrha pri ω_0, P_1 pa povečanje moči pri ω_0. Predpostavili smo, da se ojačenje laserja in nehomogeno razširjeni del absorpcije ne spreminjata mnogo preko homogene širine absorberja in je zato P_0 približno konstantna. Frekvenco laserja moduliramo:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega + a\sin\Omega t \quad . \tag{6.47}$$

Z $\Delta\omega$ smo označili odstopanje srednje frekvence laserja od centra absorpcijske črte ω_0. Če sta a in $\Delta\omega$ majhna v primeri s homogeno širino γ, lahko imenovalec v enačbi 6.46 razvijemo:

$$P(\omega) = P_0 + P_1[1 - \frac{1}{\gamma^2}\Delta\omega^2 + \frac{2}{\gamma^2}a\Delta\omega\sin\Omega t - \frac{a^2}{\gamma^2}\sin^2\Omega t] \quad . \tag{6.48}$$

Amplituda signala pri Ω je $2P_1 a\Delta\omega/\gamma^2$. Najmanjša razlika, ki jo lahko zaznamo, je določena s šumom meritve. Kot bomo videli v poglavju o detekciji svetlobe, je osnovni izvor šuma fotodiode Poissonov šum števila parov elektron-vrzel, ki nastanejo zaradi fotoefekta v p-n spoju. Najmanjša sprememba svetlobne moči, ki jo lahko izmerimo, je (glej 10??. poglavje)

$$P_N \simeq \sqrt{\hbar\omega P\frac{1}{\tau}} \, , \tag{6.49}$$

kjer je P celotna svetlobna moč, ki vpada na diodo, τ pa čas meritve, ki je v našem primeru določen s časovno konstanto nizkopasovnega filtra na izhodu faznega detektorja.

Vzemimo na primer He-Ne laser, stabiliziran na iodove pare. Povprečna moč laserja P_0 naj je 10 mW in $P_1 = 0.1$ mW. Širina absorpcijske črte $\gamma = 10^6$ s^{-1}. Izberimo amplitudo modulacije $a = 10^5$ s^{-1} in $\tau = 10^{-4}$ s. Časovna konstanta τ ne sme biti prevelika, določa namreč, kako hitro popravljamo dolžino laserja. Gornje vrednosti nam dajo za najmanjšo zaznavno moč pri Ω $P_N = 0.5 \times 10^{-8}$ W. Najmanjše merljivo odstopanje frekvence laserja je tedaj

$$\Delta\omega_N = \frac{P_N \gamma^2}{2P_1 a} = 2.5 \times 10^3\ s^{-1}\ . \tag{6.50}$$

Takšno in še boljšo stabilnost frekvence tudi zares dosežejo. Pozoren bralec bo opazil, da je $\Delta\omega_N < 0.01\gamma$, to je, položaj absorpcijskega vrha je na opisan način mogoče določiti z natančnostjo nekaj tisočink celotne širine.

Na absorpcijsko črto stabiliziranega laserja navadno ne uporabljamo direktno, temveč z njim kontroliramo drug laser. Del izhodne svetlobe iz obeh laserjev zmešamo na detekcijski fotodiodi. V signalu dobimo utripanje, ki je enako razliki frekvenc obeh laserjev. S spreminjanjem dolžine drugega laserja skrbimo, da je frekvenca utripanja konstantna. Na ta način lahko v ozkem frekvenčnem intervalu še spreminjamo frekvenco drugega laserja.

Z merjenjem utripanja med dvema stabiliziranima laserjema ugotavljajo tudi njihovo stabilnost.

6.9 *Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra

Najnatančneje merljiva količina je čas odnosno frekvenca. Frekvence laserja, ki sveti v vidnem področju seveda ni mogoče direktno prešteti. Pač pa je v začetku sedemdesetih let uspelo s heterodinsko tehniko, ki se v mikrovalovni tehniki pogosto uporablja, napraviti primerjavo stabiliziranega He-Ne laserja z osnovno cezijevo uro in tako določiti frekvenco absorpcijske črte metana pri 3.39 μm z isto natan"nostjo, kot jo ima cezijeva ura.

S heterodinsko tehniko primerjamo frekvenci dveh ali več valovanj tako, da jih zmešamo na primernem nelinearnem elementu, običajno neki diodi. Zaradi nelinearnosti dobimo v odzivu diode različne mnogokratnike vpadnih frekvenc, njihove vsote in razlike. Od teh je kaktera lahko dovolj nizka, da jo lahko direktno preštejemo.

Za primerjanje frekvenc nad mikrovalvnim področjem je potreben ustrezen mešalni element. Polvodniške diode nehajo biti uporabne pri približno 20 GHz. Za višje frekvence uporabijo diode kovina-izolator-kovina, ki jih sestavljajo oksidirana površina niklja, ki se je dotika ostra volframska konica. Taka dioda deluje kot uporaben mešalni element do frekvenc okoli 200 THz, to je skoraj do vidnega področja.

Za primerjavo He-Ne laserja, stabiliziranega na metan pri 3.39 μm, z osnovno cezijevo uro je bilo potrebno zgraditi celo verigo vmesnih primerjav, ki jo kaže slika **??**. Frekvenco CO_2 laserja dobimo na primer iz utripanja med frekvencama CO_2 laserja pri 10.2 μm in pri 9.3 μm, trikratnikom frekvence HCN laserja in še klistrona s frekvenco 20 GHz. Na ta način so izmerili, da je frekvenca CH_4 črte na katero je stabiliziran He-Ne laser, 88.376181627 THz.

Valovno dolžino laserja dobimo z interferometrično primerjavo z dolžinskim standardom, ki je bil do leta 1984 določen z neko kriptonovo črto. Iz znane frekvence in valovna dolžine določimo hitrost svetlobe. Zaradi relativno velike širine črte kriptonove svetilke je bil po starem meter definiran le z relativno natančnostjo 10^{-8}, kar je pomenilo, da tudi hitrost svetlobe ne more biti določena bolj natančno. Meritev frekvence laserja pa je dosti natančnejša. Zato je bilo smiselno opustiti meter kot osnovno enoto in raje definirati hitrost svetlobe kot pretvornik med sekundo in metrom. Z njeno vrednost so vzeli, kar so dobili z naboljšo primerjavo stabiliziranega laserja in kriptonove črte: $c = 299792458\ m/s$. Na metan ali jod stabilizirani laser je postal sekundarni standard za dolžino. Laser je pravzaprav pri tem le pomožna naprava; standard je ustrezni molekularni prehod.

Slika 6.14: Primerjalna veriga za meritev frekvence He-Ne laserja

6.10 *Semiklasični model laserja

Doslej smo laserje obravnavali le z modelom zasedbenih enačb. Ta je zelo grob, saj smo zanemarili nekaj pomembnih pojavov. Svetlobo v resonatorju smo opisali smo opisali le s celotno energijo ali številom fotonov in se za njeno valovno naravo nismo menili. Kar privzeli smo, da je frekvenca delujočega laserja in oblika polja v njem enaka kot za lastno stanje praznega resonatorja. Aktivno snov smo opisali le z zasedenostjo zgornjega in spodnjega laserskega stanja in smo s tem izpustili možnost, da se zaradi sodelovanja z elektromagnetnim poljem atomi nahajajo v nestacionarnem, mešanem stanju.

Gornje pomanjkljivosti odpravimo s tem, da elektromagnetno polje v resonatorju obravnavamo z valovno enačbo, za atome aktivne snovi pa upoštevamo, da se pokoravajo Schroedingerjevi enačbi. S tem dobimo *semiklasični model* laserja. Za še natančnejši opis pa moramo tudi svetlobo obravnavati kvantno, kar presega okvir te knjige.

Aktivna snov naj bo še naprej kar najenostavnejša, to je množica enakih dvonivojskih atomov s stanji $|1\rangle$ in $|2\rangle$, ki imata energiji W_1 in W_2. Atomi s svetlobo sodelujejo preko dipolne interakcije oblike $e\hat{x}E(t)$, kjer je $E(t)$ polje v resonatorju, ki naj bo zaradi preprostosti polarizirano v smeri osi x. Časovno odvisno stanje atomov zapišimo v obliki

$$|\psi\rangle = c_1(t)|1\rangle \exp(-iW_1t/\hbar) + c_2(t)|2\rangle \exp(-iW_2t/\hbar) \; . \tag{6.51}$$

Iz Schroedingerjeve enačbe dobimo za koeficienta $c_1(t)$ in $c_2(t)$

$$\dot{c}_1 = \frac{1}{i\hbar}E(t)v_{12}e^{-i\omega_0 t}c_2\dot{c}_2 = \frac{1}{i\hbar}E(t)v_{12}e^{i\omega_0 t}c_1 \; , \tag{6.52}$$

kjer je $\omega_0 = (W_2 - W_1)/\hbar$ in $v_{12} = e\langle 1|\hat{x}||2\rangle$.

Električni dipolni moment atoma v stanju $ket\psi$ je

$$p = -e\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = -(c_1^*c_2e^{-i\omega_0 t} + c_1c_2^*e^{i\omega_0 t})v_{12} \; . \tag{6.53}$$

Razdelimo p na dva dela:

$$p = p^+ + p^- = v_{12}[\eta(t) + \eta^*(t)] \; , \tag{6.54}$$

kjer smo vpeljali $\eta(t) = c_1^*c_2e^{-i\omega_0 t}$.

Zanima nas, kako se dipolni moment spreminja s časom. Zato s pomočjo enačb 6.52 izrazimo

$$\dot{\eta} = -i\omega_0\eta - \frac{1}{i\hbar}E(t)v_{12}(|c_2|^2 - |c_1|^2) \; . \tag{6.55}$$

$|c_i|^2$ je verjetnost za zasedenost stanja $|i\rangle$. Izraz v oklepaju na desni strani gornje enačbe torej meri razliko zasednosti obeh stanj; označimo ga z ζ. Podobno kot zgoraj izrazimo časovni odvod

$$\dot{\zeta} = \frac{2v_{12}}{i\hbar}E(t)(\eta^* - \eta) \; . \tag{6.56}$$

S tem smo iz Schroedingerjeve enačbe dobili enačbe za časovni razvoj diponega momenta in obrnjene zasedenosti, ki pa jih moramo še dopolniti. Naj bo atom na začetku v stanju $|2\rangle$ in naj bo $E(t) = 0$. Začetna vrednost $\zeta(0) = 1$ in po enačbi 6.56 naj bi bila $\zeta(t)$ konstantna. Vemo pa, da se atom, ki je v vzbujenem stanju, sčasoma vrne v osnovno stanje. Verjetnost za prehod na časovno enoto smo označili z A. Poleg tega moramo na nek način upoštevati še črpanje, s katerim vzdržujemo obrnjeno zasedenost in s tem lasersko delovanje. Za podroben opis črpanja bi morali v Hamiltonov operator dodati ustrezne člene in morda upoštevati še druga stanja atomov, vendar nas take podrobnosti na tem mestu ne zanimajo. Zaradi črpanja stacionarna vrednost ζ v odsotnosti laserskega polja $E(t)$ ni -1, temveč zavzame neko vrendost ζ_0 med -1 in 1, odvisno od moči črpanja. Tako lahko enačbo 6.56 popravimo:

$$\dot{\zeta} = A(\zeta_0 - \zeta) + \frac{2v_{12}}{i\hbar} E(t)(\eta^* - \eta) \,, \tag{6.57}$$

kjer prvi člen popisuje spontane prehode v nižje stanje in vpliv črpanja.

Podobno dopolnimo še enačbo 6.55. Pri $E(t) = 0$ da časovno odvisnost η oblike $e^{-i\omega_0 t}$, to je brez dušenja. Vema pa, da polarizacija v mešanem stanju razpada vsaj zaradi spontanega sevanja, lahko pa še zaradi drugih vplivov, na primer trkov z drugimi atomi. Označimo koeficient dušenja polarizacije z γ, ki meri tudi spektralno širino svetlobe, ki jo sevajo atomi pri prehodu $2 \to 1$. Tako imamo

$$\dot{\eta} = -(i\omega_0 \eta + \gamma) - \frac{1}{i\hbar} E(t) v_{12} \zeta \,. \tag{6.58}$$

Tej enačbi moramo dodati še konjugirano kompleksno enačbo. Enačbe 6.57 in 6.58 pogosto imenujejo Blochove enačbe. Najprej so jih uporabili za obravnavo jedrske magnetne resonance.

Potrebujemo še enačbo za polje $E(t)$. Zanj dobimo iz Maxwellovih enačb valovno enačbo, kjer moramo upoštevati, da imamo tudi od nič različno polarizacijo snovi, ki je v primeru, da so vsi atomi enakovredni, podana z

$$P = \frac{N}{V} v_{12}(\eta + \eta^*) = P^+ + P^- \,. \tag{6.59}$$

Valovna enačba je tedaj [**?**]

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \ddot{E} = \mu_0 \ddot{P} \,. \tag{6.60}$$

Namesto mikroskopske količine ζ lahko uvedemo še gostoto obrnjene zasedenosti $Z = (N/V)\zeta$, pa lahko enačbi 6.57 in 6.58 prepišemo v obliko

$$\dot{P}^{\pm} = (\mp i\omega_0 - \gamma) P^{\pm} + \frac{v_{12}^2}{i\hbar} E Z \tag{6.61}$$

$$\dot{Z} = A(Z_0 - Z) - \frac{2}{i\hbar} E (P^- - P^+) \,. \tag{6.62}$$

Prehod od enačb 6.57 in 6.58 na **??** je mogoč le, kadar so vsi atomi enakovredni, to je, kadar ni nehomogene razširitve. Kako je v primeru nehomogene razširitve, si bralec lahko ogleda v [**?**].

Enačbe 6.57, 6.58 ali **??**, skupaj z 6.60 dajejo semiklasični opis sodelovanja svetlobe in snovi. Iz izpeljave je vidno, da je v njem spontano sevanje obravnavano pomankljivo, le s fenomenološkim nastavkom, kar je moč popraviti tako, da tudi elektromagnetno polje kvantiziramo. Kljub tej pomanjkljivosti je s semiklasičnim modelom mogoče zelo podrobno obravnavati večino pojavov v laserjih in tudi druge probleme širjenja svetlobe po snovi. Reševanje zapisanega sistema nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb pa je v splošnem zelo težavno.

Da bomo semiklasične enačbe le nekoliko pobliže spoznali, na kratko poglejmo najenostavnejši primer, to je laser, v katerem je vzbujeno le eno resonatorsko stanje. Polje ima tedaj obliko

$$E(\vec{r}, t) = E_\lambda(t) u_\lambda(\vec{r}) \,, \tag{6.63}$$

kjer je $u_\lambda(\vec{r})$ krajevni del lastnega stanja resonatorja, ki zadošča enačbi

$$\nabla^2 u_\lambda - \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} u_\lambda = 0\,. \tag{6.64}$$

$E_\lambda(t)$ opisuje časovno odvisnost, ki je za laser v stacionarnem delovanju periodična, vendar frekvenca ni nujno kar enaka lastni frekvneci praznega resonatorja ω_λ, temveč jo moramo še izračunati.

Tudi polarizacijo lahko razvijemo po lastnih funkcijah $u_\lambda(\vec{r})$. Ker so te med seboj ortogonalne, preide valovna enačba 6.60 v

$$\omega_\lambda^2 E_\lambda - \ddot{E}_\lambda = \frac{1}{\varepsilon_0}\ddot{P}_\lambda\,. \tag{6.65}$$

Razstavimo $E_\lambda(t)$ na dva dela:

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^+(t) + E_\lambda^-(t) = A^+(t)e^{-i\omega_\lambda t} + A^-(t)e^{i\omega_\lambda t}\,. \tag{6.66}$$

Dejanska frekvenca laserja je blizu ω_λ, zato pričakujemo, da bosta amplitudi $A^\pm(t)$ v primerjavi z $e^{-i\omega_\lambda t}$ le počasni funkciji časa. Izračunajmo

$$\begin{aligned}\ddot{E}_\lambda^+ &= -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda \dot{A}^+ e^{-i\omega_\lambda t} + \ddot{A}^+ e^{-i\omega_\lambda t} \\ &\simeq -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda(\dot{E}_\lambda^+ + i\omega_\lambda E_\lambda^+)\end{aligned} \tag{6.67}$$

V drugi vrstici smo izpustili člen z $\ddot{A}^+$, ker pričakujemo, da je majhen. S tem smo napravili približek *počasne amplitude*.

Polarizacija snovi je približno periodična s frekvenco ω_0, z amplitudo, ki je tudi počasna funkcija časa. Zato je $\ddot{P}_\lambda^+ \simeq -\omega_0^2 P_\lambda^+$. Pri drugem odvodu polja po času smo potrebovali en člen več, ker se člen $-\omega_\lambda^2 E_\lambda^+$ na levi strani enačbe 6.60 odšteje. Z uporabo tega približka in enačb 6.64 in 6.67 preide valovna enačba 6.60 za eno nihanje v

$$\dot{E}_\lambda^+ = -i\omega_\lambda E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P_\lambda^+\,. \tag{6.68}$$

Doslej nismo upoštevali, da je polje v praznem resonatorju dušeno, zato moramo gornjo enačbo še popraviti:

$$\dot{E}_\lambda^+ = (-i\omega_\lambda - \frac{1}{\tau})E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P_\lambda^+\,. \tag{6.69}$$

Kadar v reosnatorju ni snovi, je dobljena enačba enaka kot enačba **??**.

Enačbi **??** in 6.61 sta nelinearni, zato ju n moč kar tako prepisati za primer razvoja po lastnih stanjih resonatorja. Pri enačbi za razvoj polarizacije **??** imamo v zadnjem členu na desni produkt komponente polja E_λ in obrnjene zasedenosti Z, od katere bistveno prispeva le krajevno povprečje $\bar{Z}$, ki se tudi s časom le počasi spreminja. Seveda vsebuje Z tudi krajevno odvisne komponente, ki pa so pomembne predvsem zato, ker sklaplajo različna lastna stanja resonatorja, kar presega našo trenutno obravnavo. Tako imamo

$$\dot{P}_\lambda^+ = (-i\omega_0 - \gamma)P_\lambda^+ + \frac{v_{12}^2}{i\hbar} E_\lambda^+ \bar{Z}\,. \tag{6.70}$$

Enačbo za $\bar{Z}$ dobimo iz 6.61. V zadnjem členu imamo produkte $E^{\pm}P^{\pm} = E^{\pm}_{\lambda}P^{\pm}_{\lambda}u^2_{\lambda}(\vec{r})$, kar moramo prostorsko povprečiti. Funkcije $u_{\lambda}(\vec{r})$ naj so normalizirane tako, da je $\int u^2_{\lambda}(\vec{r})\,dV = V$. Tako imamo $\overline{u^2_{\lambda}(\vec{r})} = 1$ in

$$\dot{\bar{Z}} = A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar}(E^+_{\lambda} + E^-_{\lambda})(P^-_{\lambda} - P^+_{\lambda}) \,, \tag{6.71}$$

kjer je $\bar{Z}_0$ povprečje nenasičene zasedenosti Z_0. V zadnjem členu nastopajo produkti, ki nihajo s frekvencami $\omega_{\lambda} - \omega_0$ in $\omega_{\lambda} + \omega_0$. Obe frekvenci sta si zelo blizu, zato je njuna vsota mnogo večja od razlike. Členi $E^+_{\lambda}P^+_{\lambda}$ in $E^-_{\lambda}P^-_{\lambda}$ se torej zelo hitro spreminjajo in skoraj nič ne vplivajo na valovanje blizu ω_{λ}, zato jih izpustimo. S tem je časovna odvisnost $\bar{Z}$ podana z

$$\dot{\bar{Z}} = A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar}(E^+_{\lambda}P^-_{\lambda} - E^-_{\lambda}P^+_{\lambda}) \,. \tag{6.72}$$

Enačbe 6.69, 6.70 in 6.72, skupaj s konjugirano kompleksnimi enačbami za E^-_{λ} in P^-_{λ}, so zaključen sistem, ki opisuje delovanje enofrekvenčnega laserja. Uporabimo jih za izračun frekvence izhodne svetlobe.

Naj bo stanje stacionarno. Tedaj lahko polje zapišemo v obliki $E^+_{\lambda} = E_0 e^{-i\Omega t}$, kjer je E_0 realna konstanta, frekvenca svetlobe ω pa je blizu ω_0 in ω_{λ}. V stacionarnem stanju mora imeti polarizacija enako časovno odvisnost: $P^+_{\lambda} = P_0 e^{-i\Omega t}$. Tedaj je v enačbi 6.72 drugi oklepaj konstanten in mora biti tudi $\bar{Z}$ v stacionarnem stanju od časa neodvisna. Sistem enačb 6.69, 6.70 in 6.72 nam tako da

$$\begin{aligned}
-[i(\omega_{\lambda} - \Omega) + \frac{1}{\tau}]E_0 - \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0}P_0 &= 0 \\
-[i(\omega_0 - \Omega) + \gamma]P_0 + \frac{v^2_{12}}{i\hbar}E_0\bar{Z} &= 0 \\
A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar}E_0(P^*_0 - P_0) &= 0 \,.
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Najprej izračunamo P_0 iz druge enačbe, ga postavimo v tretjo in izračunamo $\bar{Z}$:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \left[1 + \frac{v^2_{12}}{\hbar^2 A}E^2_0 \frac{2\gamma}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \gamma^2}\right]^{-1} \tag{6.74}$$

Ta izraz že poznamo. $\pi v^2_{12}/(\varepsilon_0\hbar^2)$ je Einsteinov koeficient B. E^2_0 je sorazmern gostoti energije polja v resonatorju, zadnji ulomek v oklepaju pa nam podaja obliko homogeno razširjene atomske črte:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \left[1 + \frac{2B}{A}g(\omega_0 - \Omega)w\right]^{-1} \tag{6.75}$$

To je natanko enako izrazu za nasičenje zasedenosti stanj, ki smo ga izpeljali iz zasedbenih enačb v četrtem poglavju.

Postavimo P_0 iz prve enačbe sistema 6.73 v drugo:

$$E_0[i(\Omega - \omega_{\lambda}) + \frac{1}{\tau}][i(\Omega - \omega_0) + \gamma] = -\frac{v^2_{12}\omega_0}{2\hbar\varepsilon_0}E_0\bar{Z} \,. \tag{6.76}$$

V delujočem laserju je $E_0 \neq 0$, zato lahko krajšamo. $\bar{Z}$ je realen, tako da mora biti imaginarni del leve strani enak nič:

$$(\Omega - \omega_{\lambda})\gamma + (\Omega - \omega_0)\frac{1}{\tau} = 0 \,. \tag{6.77}$$

Od tod lahko izračunamo frekvenco laserja

$$\Omega = \frac{\omega_\lambda \gamma + \omega_0 \frac{1}{\tau}}{\gamma + \frac{1}{\tau}} \,. \tag{6.78}$$

Frekvenca torej ni enaka frekvenci praznega resonatorja ω_λ, temveč je premaknjena proti centru atomske črte ω_0. Premik je odvisen od razmerja širine atomske črte in izgub resonatorja.

Bralec lahko sam iz enačbe 6.76 izračuna še energijo svetlobe v resonatorju in rezultat primerja s tistim, ki smo ga dobili z uporabo zasedbenih enačb.

Gornji primer uporabe polklasičnih enačb je zelo preprost. Prava moč modela se pokaže pri obravnavi mnogofrekvenčnega laserja, na primer pri računu uklepanja faz laserskih nihanj, kar pa presega okvir te knjige. Več bo bralec našel v [**?**].

7. Primeri laserjev

V tem poglavju bomo na kratko spoznali nekaj najpomembnejših vrst laserjev. V grobem laserje razlikujemo po aktivnem sredstvu (plinasti, trdninski, polprevodniški ...), pri čemer pa tudi pri izbranem sredstvu pogosto obstaja veliko različnih izvedb. Za vsak obravnavani primer bomo navedli osnovne karakteristike, v podrobnosti izvedbe pa se tukaj ne bomo spuščali.

7.1 Laserski sistemi

Laser je lahko dokaj preprosta naprava, z malo sestavnimi deli, lahko pa je tudi zelo velik in zapleten sistem. Večina velikih laserskih sistemov je sestavljena iz osnovnega laserja, ki ni posebno močan, daje pa kvalitetno svetlobo, in iz enega ali več ojačevalnikov. V njih se svetloba ojačuje v sredstvu, ki je enako kot v osnovnem laserju in ki je v kolikor mogoče visokem stanju obrnjene zasedenosti. V več ojačevalnih korakih se tako doseže zelo velika svetlobna moč.

Pri velikih močeh nastopi tudi vrsta novih težav. Da gostota svetlobnega toka ne povzroča poškodb optičnih komponent, mora premer ojačevanega snopa (in s tem premer vseh vmesnih ojačevalnih stopenj) naraščati. Zadnje stopnje velikega laserskega sistema (na primer v Laboratoriju za lasersko energetiko v Rochestru, New York) imajo tako premer pol metra, kar seveda pomeni, da morajo imeti tolikšno odprtino tudi vse ostale optične komponente. Polega tega je potrebno skrbno paziti, da se odbita svetloba ne vrača v prejšnji ojačevalnik ali v osnovni laser in moti njegovo delovanje. Zato so med ojačevalnimi stopnjami optični izolatorji, ki temeljijo na Faradayevem pojavu vrtenja polarizacije v snovi v magnetnem polju.

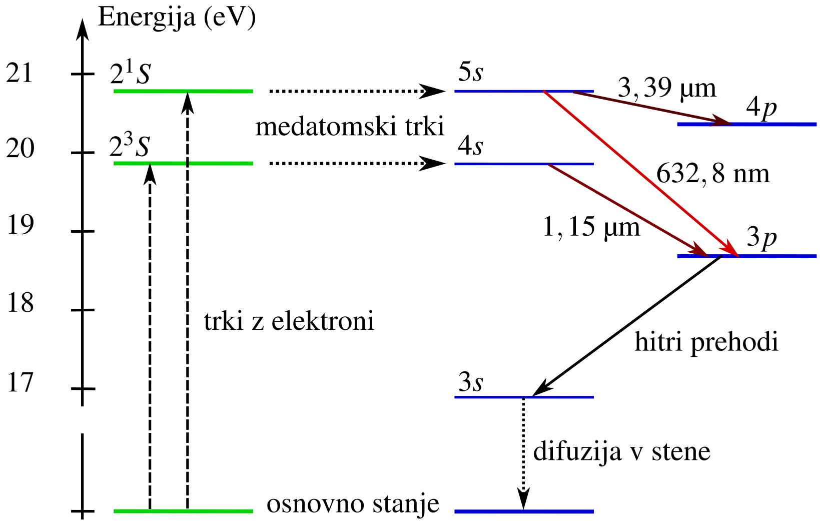
Slika 7.1: Eden najmočnejših laserskih sistemov na svetu, ki doseže 500 TW moči v sunku. Vir: National Ignition Facility.

Moči svetlobe, ki jih oddajajo najmočnejši laserski sistemi, imajo zelo velike vrednosti. Najmočnejši zvezno delujoči laserji dosegajo tako moči prek ~ 100 kW. Še bistveno večje moči pa dosegajo sunkovni laserji, saj lahko dosežejo moč tudi $\sim$ PW $= 10^{15}$ W. Vendar so sunki tako velike svetlobne moči izredno kratki, tipično reda pikosekunde, tako da znaša celotna moč v takem sunku svetlobe tako 'le' $\sim$ kJ. Dodaten parameter pri tako močnih sunkovnih laserjih je čas, ki poteče med dvema zaporednima sunkoma. Najmočnejši laserski sistemi tako lahko izsevajo največ nekaj sunkov dnevno.

7.2 He-Ne laser

Kot prvi primer si oglejmo helij-neon (He-Ne) laser, ki je bil prvi zvezno delujoči laser in je še danes zelo razširjen. Najpogosteje deluje pri valovni dolžini $632,8$ nm v rdečem delu spektra, poleg tega pa tudi pri infrardečih $1,15$ µm in $3,39$ µm ter nekaterih drugih valovnih dolžinah v oranžnem in zelenem delu spektra. Laser deluje v zveznem načinu delovanja s tipičnimi močmi $0,5-100$ mW.

Slika (7.2) kaže relevantne energijske nivoje helija in neona. Atome helija vzbudimo s trki z elektroni v eno izmed dveh dolgoživih metastabilnih stanj 2^3S ali 2^1S z razpadnima časoma $0,1$ ms in 5 µs. Ti dve stanji slučajno skoraj sovpadata z dvema stanjema neona ($4S$ in $5S$). Ko v helijev plin dodamo razmeroma majhno količino neona, se energija s trki prenese z vzbujenih helijevih atomov na atome neona, ki s tem preidejo v že omenjeni vzbujeni stanji, helijevi atomi pa se vrnejo v osnovno stanje. Majhna energijska razlika (okoli $1,2$ THz) pa preide v kinetično energijo obeh atomov.



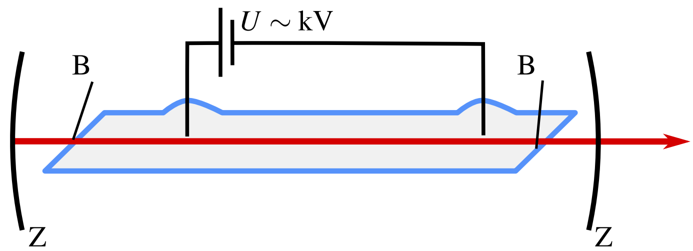
Slika 7.2: Shema energijskih nivojev v He-Ne laserju. Nivoji helija so označeni z zeleno in nivoji neona z modro.

Znano rdečo svetlobo He-Ne laserja pri $632,8$ nm dobimo pri prehodu iz $5s$ stanja v eno od $3p$ stanj. Pri tem je življenjski čas $5s$ stanja okoli 100 ns, stanja $3p$ pa okoli 10 ns. Spodnji $3p$ nivo se prazni s spontano emisijo v zelo metastabilno stanje $3s$. V njem se atomi nabirajo, saj so dipolni sevalni prehodi v osnovno stanje prepovedani, in le s trki s steno cevi prehajajo v osnovno stanje. Za dovolj hitre prehode in večje ojačanje je tako treba zmanjšati premer cevi. Zaradi gibanja atomov je spektralna črta seveda Dopplerjevo razširjena.

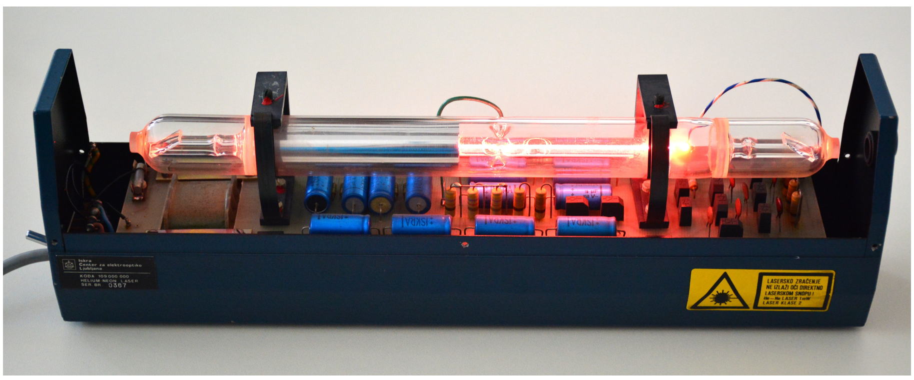
Lasersko delovanje dobimo tudi pri prehodu iz $5s$ v stanje $4p$, pri katerem se izseva svetloba z valovno dolžino $3,39$ µm. Ojačenje je za ta prehod je celo precej večje kot za prehod pri $632,8$ nm, deloma zaradi nižje frekvence (glej zvezo med Einsteinovima koeficientoma A in B, enačba 5.34), deloma pa zaradi kratke življenske dobe spodnjega laserskega nivoja $4p$. Zato bi pričakovali, da bo He-Ne laser svetil v infrardečem območju in ne vidnem. To delno prepreči absorpcija v steklu, delno pa jo povečamo s selektivno reflektivnostjo resonatorskih zrcal, ki dvigne prag delovanja za $3,39$ µm nad prag za $632,8$ nm. V nekaterih primerih v laser dodamo celico metana, ki infrardečo svetlobo močno absorbira, rdeče pa ne.

Omenimo še prehode iz stanja $4s$, v katerega pridejo neonovi atomi s trki vzbujenih helijevih atomov iz nivoja 2^3S. Prehod $4s$ v $3p$ da svetlobo pri $1,15$ µm in je bil tudi prvi opaženi prehod.

Tipičen He-Ne laser je razmeroma preprosto zgrajen (slika 7.3). V razelektritveni cevi (napetost ~ 1 kV), skozi katero teče električni tok (~ 10 mA), se nahaja mešanica helija in neona v razmerju $5:1 - 10:1$. Skupni tlak v cevi je nizek, le okoli 3 mbar, cev pa je tipično dolga okoli $0,5$ m s premerom $1-2$ mm. Cev na obeh straneh zapirata okni, ki sta nagnjeni za Brewsterjev kot (glej ***), tako da so izgube pri odboju za eno polarizacijo čim manjše. Izhodna svetloba iz laserja je zato seveda polarizirana. V manjših laserjih so namesto Brewsterjevih oken na razelektritveno cev privarjena kar resonatorska zrcala. Tak laser je nepolariziran. Razelektritvena cev je obdana z dvema ukrivljenima zrcaloma, ki imata zelo veliko odbojnost za izbrano valovno dolžino.



Slika 7.3: Shema He-Ne laserja: Z - ukrivljeni zrcali resonatorja, B - Brewsterjevi okni.



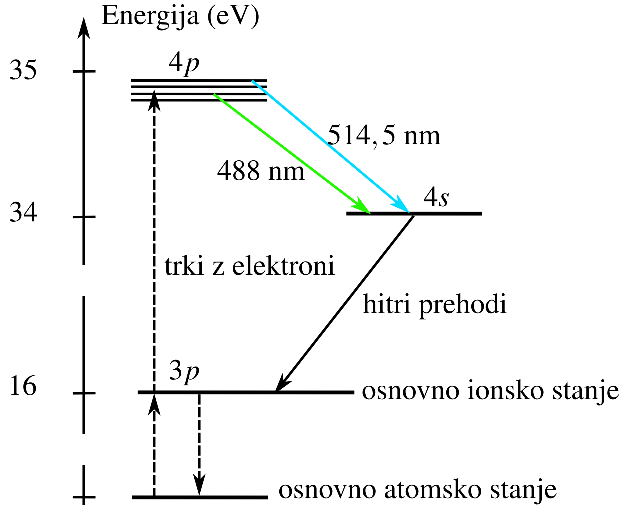
Slika 7.4: Primer starejšega He-Ne laserja, izdelanega v Sloveniji

He-Ne laserji so preprosti, stabilni, zanesljivi, poceni in dolgo služijo (do 50 000 ur). Danes jih sicer izrivajo polprevodniški laserji, vendar so še vedno v uporabi v merilnih napravah, v optičnih čitalnih sistemih, v šolah, v raziskovalnih laboratorijih za intereferometrijo, holografijo itd. Na njem je osnovan tudi sekundarni standard za meter.

7.3 Argonski ionski laser

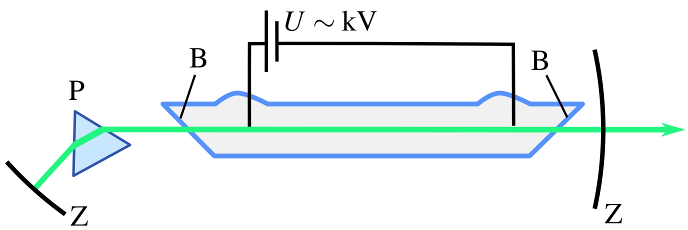
Kot drugi primer plinskega laserja obravnavajmo argonski ionski (Ar^+) laser, ki je najbolj poznan po zveznem delovanju v modrem in zelenem delu spektra pri valovnih dolžinah 488 nm in 514,4 nm, deluje pa tudi v bližnjem ultravijoličnem območju. Tipične moči delovanja Ar^+ laserja so 100 mW – 50 W.

Kot večino drugih plinskih laserjev tudi tega črpamo z električnim tokom. Atome argona vzbudimo s trki z elektroni v ione argona, ti pa z nadaljnjimi trki preidejo v vzbujena stanja. Obrnjeno zasedenost dosežemo med nivojema $4p$ in $4s$ (slika 7.5). Ta dva nivoja vsebujeta veliko podnivojev, zato je tudi prehodov med njima zelo veliko. Argonski laser tako seva pri več kot tridesetih različnih valovnih dolžinah, najznačilnejši sta že omenjeni 488 nm in 514,5 nm. Življenjski čas zgornjega nivoja $\sim 10^{-8}$ s je približno desetkrat daljši od življenjskega časa spodnjega nivoja, od koder se ioni z rekombinacijo z elektroni vrnejo v osnovno stanje atoma. Tudi pri tem laserju je poglavitni vzrok za razširitev črte Dopplerjev pojav.



Slika 7.5: Shema energijskih nivojev v Ar^+ laserju

Argonski laser je v osnovi zgrajen podobno kot He-Ne laser. V razelektritveni cevi (tipična dolžina 1 m in premer 1 – 2 mm) se nahaja argon pri pritisku okoli 10 mbar. Ker gre pri vzbujanju atomov argona za dvostopenjski proces, mora biti električni tok, s katerim dosežemo obrnjeno zasedenost, precej velik, lahko tudi nekaj deset amperov. Pri tipični napetosti nekaj kV to pomeni, da so potrebne velike električne moči, pogosto več deset kW, in močnejši argonovi laserji so zato zaradi velike količine odvečne toplote najpogosteje vodno hlajeni.



Slika 7.6: Poenostavljena shema Ar laserja s prizmo

Poleg tega ustvarimo v argonovih laserjih vzdolžno magnetno polje, ki preprečuje elektronom, da bi predčasno zapustili ojačevalno območje in trčili v steno. S tem se poveča izhodna moč,

Laser	He-Ne	Ar^+	CO_2
Valovna dolžina λ	$632,8$ nm	488 nm; $514,5$ nm	$9,6$ µm; $10,6$ µm
Verjetnost za spontani prehod A	$3,4 \times 10^6/\mathrm{s}$	$7,8 \times 10^7/\mathrm{s}$	$0,25/\mathrm{s}$
Presek za stimulirano emisijo σ	$3 \times 10^{-17}\ \mathrm{m}^2$	$2,6 \times 10^{-16}\ \mathrm{m}^2$	$3 \times 10^{-22}\ \mathrm{m}^2$
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	$1,5 \times 10^9$ Hz	$3,5 \times 10^9$ Hz	7×10^7 Hz
Obrnjena zasedenost $\Delta N/V$	$5 \times 10^{15}/\mathrm{m}^3$	$2 \times 10^{15}/\mathrm{m}^3$	$3 \times 10^{21}/\mathrm{m}^3$

Tabela 7.1: Izbrani podatki za He-Ne, Ar^+ in CO_2 laser

hkrati pa preprečuje poškodbe na stenah, ki bi jih lahko povzročili visokoenergijski elektroni. Iz istega razloga so pri močnejših laserjih zrcala izven plinske cevi.

V resonator argonskega laserja pa moramo vgraditi še en dodaten element, ki omogoči izbiro ene same spektralne črte. Najpogosteje za ta frekvenčno selektiven element uporabimo kar majhno prizmo pred enim od obeh zrcal (slika 7.6). Zaradi disperzije v prizmi se snopi različnih valovnih dolžin lomijo pod različnimi koti in le tisti snop, ki vpada pravokotno na zrcalo, bo ojačan. Z vrtenjem prizme ali zrcala lahko tako izberemo valovno dolžino ojačane svetlobe.

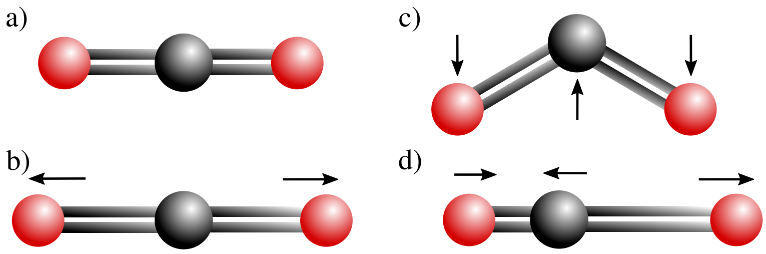
Argonski laser je zanesljiv in daje zelo kvaliteten osnovni Gaussov snop pri eni sami frekvenci. Zato se dosti uporablja v optični spektroskopiji, interferometriji, holografiji in merilni tehniki. Deluje lahko v zveznem načinu, zaradi razmeroma široke črte ojačanja pa ga uporabljamo tudi za fazno uklenjen sunkovni laser z dolžino sunkov okoli 150 ps. V kombinaciji s kriptonovim laserjem, ki deluje zelo podobno kot argonski, le v rdečem in oranžnem delu spektra, se uporablja tudi v zabavni industriji. V zadnjem času ga vse bolj izrivajo polprevodniški laserji ali pa frekvenčno podvojeni Nd:YAG.

7.4 Laser na ogljikov dioksid

Vsi do zdaj opisani laserji so delovali na elektronskih prehodih v atomih. Laser na ogljikov dioksid pa deluje na prehode med vibracijskimi stanji molekul CO_2, pri čemer elektroni ostanejo v osnovnem stanju. Zaradi majhnih energijskih razlik med vibracijskimi stanji deluje tak laser v infrardečem delu spektra, najpogosteje pri $9,6$ µm in $10,6$ µm. Laser deluje v zveznem in v sunkovnem načinu, odlikuje ga pa zelo velik izkoristek (~ 30 %) in posledično zelo velike moči, $1\ \mathrm{W} - 10\ \mathrm{kW}$.

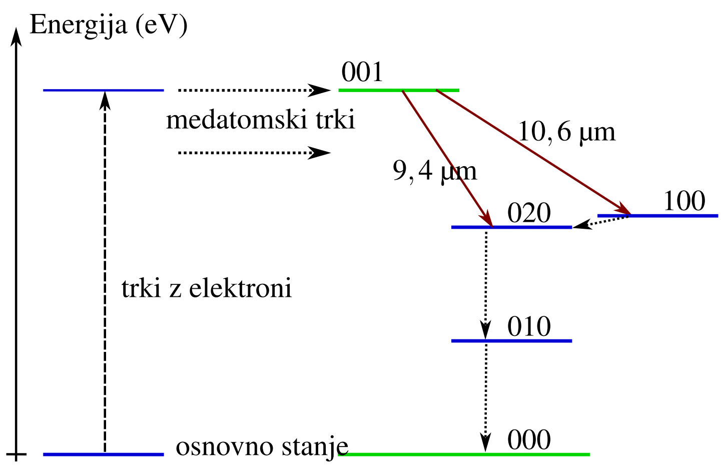
Molekula CO_2 je v osnovnem stanju linearna molekula (slika 7.7 a). Za take molekule obstajajo trije osnovni načini nihanja atomov glede na težišče: atoma kisika nihata simetrično vzdolž osi molekule, pri čemer ogljik miruje - simetrični razteg (slika 7.7 b), atomi nihajo v smeri pravokotno na os - upogib (slika 7.7 c) in atoma kisika se gibljeta v isti smeri vzdolž osi, ogljik pa v nasprotni smeri - asimetrični razteg (slika 7.7 d). Pri tem ima najvišjo frekvenco asimetrični razteg, najnižjo pa upogib. Posamezno stanje opišemo s številom energijskih kvantov v nihanju, torej s trojico celih števil (n_1, n_2, n_3). Stanje 010 tako opisuje osnovno upogibno nihanje, stanje 001 pa osnovni asimetrični razteg.

Vibracijska stanja molekule vzbudimo z električnim tokom skozi plin. Pri tem v razelektritveno cev dodamo dušik (N_2) in podobno kot pri He-Ne laserju se tudi CO_2 črpa predvsem preko trkov z dušikovimi molekulami. Dušikova molekula je dvoatomna in ima zato zgolj eno vibracijsko



Slika 7.7: Molekula CO_2 (a) in trije osnovni načini nihanja molekule: simetrični razteg (b), upogib (c) in asimetrični razteg (d)

stanje, ki po energiji praktično sovpada z energijo stanja 001 (slika 7.8). Iz tega gornjega stanja prehajajo molekule v stanje 010 (10,6 µm) ali v stanje 020 (9,6 µm). Da pospešimo prehod nazaj v osnovno stanje in povečamo obrnjeno zasedenost, plinski mešanici dodamo še helij, s katerim trkajo molekule. Razmerje parcialnih tlakov je tako navadno 1:1:8 za CO_2:N_2:He pri tlaku 1mbar. Pri tako nizkih tlakihi je poglavitna razširitev spektralne črte Dopplerjeva, ki pa je v primerjavi z ostalimi plinskimi laserji zaradi nizih frekvenc zelo majhna, le okoli 50 MHz. V laserskih sistemih, kjer je tlak plinov večji, prevlada razširitev zaradi medmolekulskih trkov. Pri tlaku pri okoli 20 bar znaša razširitev že okoli 500 GHz, kar omogoča izdelavo fazno uklenjenih sunkovnih laserjev s sunki dolžine 1 ps.

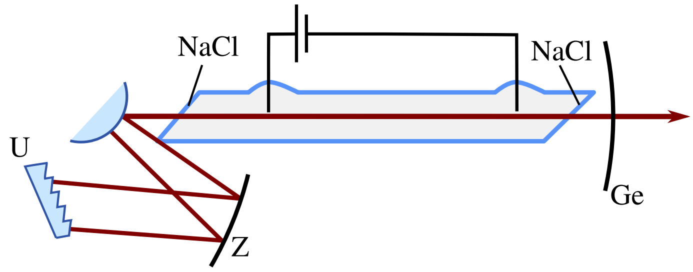


Slika 7.8: Shema vibracijskih nivojev v CO_2 laserju. Nivoji dušika so označeni z modro in nivoji CO_2 z zeleno.

Najpreprostejši laser na ogljikov dioksid je po svoji zgradbi zelo podoben do zdaj obravnavanim plinskim laserjem. Razelektritvena cev (polmer $\sim$ 1 cm in dolžina $0,5-2$ m) je na obeh koncih zaključena z Brewstrovima oknoma iz kristala NaCl, izhodno sferično zrcalo pa je iz kristalnega germanija. Ker lahko deluje laser pri zelo veliko različnih valovnih dolžinah, dodamo za izbiro posamezne črte ustrezen frekvenčno selektiven člen, na primer uklonsko mrežico (slika 7.9).

★ Pri opisu nivojev smo povsem zanemarili rotacijske nivoje, zaradi katerih so posamezne črte razcepljene v veliko nivojev. Tako je v območju okoli 10 µm delovanje laserja možno pri več sto različnih valovnih dolžinah.

V podrobnosti izdelave se ne bomo spuščali, je kar nekaj različnih pristopov, na primer običajni zaprti sistemi, laserji s vzdolžnim pretokom, laserji s prečnim pretokom, valovodni laserji ... Razlikujejo se po svojih specifikacijah in zato tudi vrsti uporabe. Največ se uporabljajo v



Slika 7.9: Poenostavljena shema najpreprostejšega CO_2 laserja z uklonsko mrežico (U).

industriji za zahtevne obdelave materialov, na primer za rezanje kovin, vrtanje, ablacijo, varjenje, pa tudi za vojaške in medicinske namene. Obdelava z laserji omogoča veliko natančnost, čistočo in je zelo fleksibilna.

7.5 Ekscimerni laser

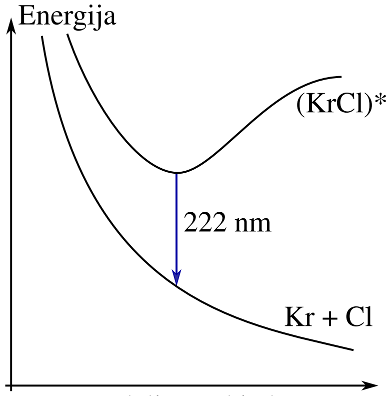
Ekscimerji (*excited dimer, excimer*) so vzbujena vezana stanja dveh atomov, ki bi se v osnovnem stanju ne vezala. Za laserje so zanimivi predvsem ekscimerji težkih žlahtnih plinov in halogenov, na primer Ar_2^* (126 nm), Kr_2^* (146 nm), Xe_2^* (172 nm), ArF (193 nm), KrF (248 nm), XeCl (308 nm), ArBr (161 nm), NeF (108 nm) ... Te molekule obstajajo samo v vzbujenem stanju, v osnovnem stanju pa je odbojna sila med atomoma prevelika in molekula neobstojna. Vsi našteti primeri oddajajo lasersko svetlobo v ultravijoličnem področju, ki ga drugi laserski sistemi le težko pokrivajo. Ekscimerni laserji delujejo v sunkih, pri čemer je tipična oddana energija v sunku ~ 1 J, dolžina sunka $10-100$ ns in repeticija ~ 100 Hz.

Vezano stanje dveh atomov dobimo, kadar je ionizacijska energija prvega atoma manjša od vsote elektronske afinitete drugega atoma in elektrostatične energije vezave obeh ionov. Vzemimo za primer klor in kripton. Ionizacijska energija kriptona v osnovnem stanju je 14 eV, v vzbujenem pa 5 eV. Elektronska afiniteta klora je 3,75 eV in elektrostatična vezavna energija KrCl okoli 7 eV. Tako je za formiranje molekule KrCl v osnovnem stanju potrebno dodati okoli 4 eV, pri tvorbi molekule v vzbujenem stanju pa se sprosti okoli 6 eV. Približno obliko celotne potencialne energije molekule KrCl v osnovnem in vzbujenem stanju kaže slika (7.10). Molekula, ki je vezana v vzbujenem stanju, po sevalnem prehodu v osnovno stanje takoj razpade, zato je zelo lahko doseči obrnjeno zasedenost. Pri tem je razpadni čas vezanega stanja $\sim$ 10 ns, spodnjega nevezanega pa okoli $0,1$ ps. Spektralna širina prehoda je precej velika, okoli 1 nm, in laser, ki ta prehod uporablja, lahko deluje v večjem delu tega intervala. Da dosežemo delovanje nad pragom, mora biti obrnjena zasedenost razmeroma velika, vendar se v sunku lahko sprosti veliko energije. Da nastanejo ekscimeri, vzbujamo mešanico plinov (žlahtnega plina ali mešanice žlahtnega in halogenega plina) v heliju. Ker je pritisk razmeroma velik (npr. 2 ali 3 bar), je vzbujanje prečno, podobno kot pri nekaterih izvedbah CO_2 laserja.

Ekscimerni laserji delujejo v sunkih s precej veliko energijo in se uporabljajo v industriji mikroprocesorjev, fotolitografiji in medicini, predvsem oftalmologiji in kirurgiji.

7.6 Neodimov laser

Druga skupina laserjev, ki jih bomo obravnavali, so trdninski laserji. Taki laserji so osnovani na elektronskih prehodih v ionih nečistoč, ki jih dodamo v kristal ali steklo, črpamo pa jih optično.



Slika 7.10: Shema energije v odvisnosti od razdalje med jedroma atomov. V vzbujenem stanju se atoma lahko povežeta v molekulo, po prehodu v nižji nivo pa zaradi velike odbojnosti atoma disociirata.

Valovna dolžina	UV del spektra
Verjetnost za spontani prehod A	$\sim 10^8/\mathrm{s}$
Presek za stimulirano emisijo σ	$3\times 10^{-20}\ \mathrm{m}^2$
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	10^{13} Hz
Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$	$10^{20}/\mathrm{m}^3$

Tabela 7.2: Tipični podatki za ekscimerne laserje

Nečistoče so praviloma ioni redkih zemelj ali prehodnih kovin, kristali pa so navadno oksidi ali fluoridi. Izdelava ojačevalnih sredstev na osnovi stekla je bistveno bolj preprosta in poceni, vendar ima steklo precej nižjo toplotno prevodnost od kristala in se zato bolj greje. Začeli bomo z opisom dveh primerov neodimovega laserja, Nd:YAG in Nd:steklo.

7.6.1 Nd:YAG

Najpomembnejši neodimov laser je Nd:YAG laser, v katerem je ojačevalno sredstvo itrij-aluminijev granat ($Y_3Al_5O_{12}$, YAG) s primesmi ionov neodima Nd^{3+}. Neodimov laser deluje pri valovni dolžini $1{,}064$ µm, vendar ga pogosto frekvenčno podvojimo na 532 nm. Laser lahko deluje v zveznem načinu pri močeh $5-100$ W ali sunkovnem s preklopom dobrote pri močeh $1-35$ W v sunkih, dolgih $5-100$ ns.

Valovna dolžina	1064 nm	1050 nm
Verjetnost za spontani prehod A	$4\times 10^3/\mathrm{s}$	$3\times 10^3/\mathrm{s}$
Presek za stimulirano emisijo σ	$3\times 10^{-23}\ \mathrm{m}^2$	$3\times 10^{-24}\ \mathrm{m}^2$
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	$1{,}3\times 10^{11}$ Hz	7×10^{12} Hz
Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$	$1{,}6\times 10^{23}/\mathrm{m}^3$	$8\times 10^{23}/\mathrm{m}^3$

Tabela 7.3: Tipični podatki za Nd:YAG laser in Nd:steklo

Neodimov laser je primer štirinivojskega laserskega sistema, pri čemer je laserski prehod med stanjema $^4F_{3/2}$ in $^4I_{11/2}$ iona neodima (slika 7.11). S svetlobo višje frekvence (tipično okoli 800 nm) črpamo elektrone v višje nivoje, ki hitro preidejo v zgornji laserski nivo. Življenjski čas višjega nivoja je okoli 230 µs, spodnjega pa precej krajši, zato je lahko doseči veliko obrnjeno zasedenost. Spodnje stanje je dovolj visoko nad osnovnim, da pri sobni temperaturi v ravnovesju ni znatno zasedeno. Zato je prag neodimovega laserja nizek in je lahko doseči zvezno stacionarno delovanje, prav tako dobro pa deluje tudi v sunkih. Razširitev črte je homogena in je predvsem posledica termičnega nihanja kristalne mreže. Laser je odličen za delovanje s preklopom dobrote, zaradi ozke črte pa z oklepanjem faz oddaja zelo kratke sunke (nekaj ps).

Slika 7.11: Shema energijskih nivojev v Nd^{3+} laserju

Aktivna snov v laserju je v obliki paličke dolžine od nekaj cm do dobrih 10 cm in širine okoli 1 cm. V kristalu YAG neodimovi ioni nadomestijo približno 1 % itrijevih, zato ojačevalno sredstvo na videz ni več prozorno, temveč rahlo rožnato. Za črpanje uporabljamo polvodniške laserje ali močne ksenonove svetilke za zvezno delovanje ter podobne bliskovne luči za sunkovno delovanje. Skupaj z aktivno paličko so svetilke vgrajene v cilindrično ali eliptično votlino z zrcalnimi ali belimi stenami, tako da se čim večji del črpalne svetlobe absorbira v laserski palički (slika 7.12).

Slika 7.12: Shema osvetlitve ojačevalnega sredstva v trdninskem laserju

Pri črpanju s ksenonovo svetilko je le manjši del izsevane svetlobe v absorpcijskih pasovih, zato je izkoristek črpanja razmeroma slab, tipično pod $0,01$ %. Za izhodno moč zvezno delujočega Nd:YAG laserja nekaj deset wattov je tako potrebna električna moč nekaj kW. Velika večina porabljene moči gre v gretje, zato je v laserjih z nekoliko večjo povprečno močjo potrebno vodno hlajenje. Gretje povzroča tudi toplotne deformacije laserske paličke, kar lahko močno spremeni lastnosti resonatorja. Toplotni učinki so ena poglavitnih praktičnih težav pri izdelavi neodimovih laserjev s klasičnimi svetilkami. V zadnjem času se je zato uveljavilo črpanje s polvodniškimi diodnimi laserji, ki svetijo v območju absorpcije Nd^{3+} (slika 7.13). Zato je izkoristek dosti boljši in je gretja manj, kar omogoča bolj kompaktno konstrukcijo, boljšo stabilnost izhodne moči in večjo zanesljivost.

Slika 7.13: Shema diodno črpanega Nd:YAG laserja

Kadar deluje laser v sunkovnem režimu, ga črpamo z bliskovico. Ob blisku se skozi luč izprazni nabit kondenzator, ki pa mora imeti precej veliko kapacitivnost, da je energija bliska zadostna, to je vsaj nekaj J. Čas trajanja bliska je določen z RC konstanto kondenzatorja in luči in je okoli $0,1$ ms. Tipična energija izhodnega sunka je ~ 1 J.

Neodimovi laserji so v osnovni in frekvenčno podvojeni različici zelo razširjeni. Najbolj uporabni so za obdelavo materialov (na primer vrtanje in varjenje, litografija) ter v medicini (dermatologija in endoskopska kirurgija). Pomemben proizvajalec Nd:YAG laserjev za medicinske namene je tudi slovensko podjetje Fotona.

★ Namesto neodima se v YAG kristalu itrijeve ione lahko nadomesti tudi z drugimi elementi, na primer iterbijem (1030 nm) ali erbijem (2940 nm).

7.6.2 Nd:steklo

Namesto v ustrezen kristal so neodimovi ioni Nd^{3+} lahko vgrajeni tudi v steklo. Tak laser deluje pri valovni dolžini $1,054$ μm v sunkovnem načinu s preklopom dobrote ali z uklenjenimi fazami. Z ojačevalniki dosežemo energije sunka nad 100 kJ.

Zaradi amorfne strukture stekla in posledično nehomogenega lokalnega polja je laserska črta nehomogeno razširjena in življenski čas gornjega nivoja je krajši kot v kristalu, okoli $0,3$ ms. Ojačanje je manjše kot v Nd:YAG in za prag laserskega delovanja je potrebna precej večja moč črpanja. Laserji Nd:steklo zato delujejo le v sunkovnem načinu, kjer pa so za velike energije celo boljši od Nd:YAG. Zaradi manjšega ojačenja pri dani obrnjeni zasedenosti je v laserju s preklopom dobrote možno doseči večjo načrpanost, ne da bi prišlo do praznenja zaradi ojačevanja spontanega sevanja v enem preletu paličke. Energija izhodnih sunkov laserjev Nd:steklo so tako do nekaj J. Problem predstavlja nizka toplotna prevodnost stekla, zaradi česar je repeticija sunkov nizka. Velika širina črte je zelo primerna za delovanje v načinu uklepanja faz, s katerim lahko dosegamo ultrakratke sunke ($\sim$ 100 fs.

★ Še večje energije sunkov je mogoče dobiti z ojačevalniki. Med največjimi je laserski sistem Nd:steklo v Rochestru v državi New York, ki ga uporabljajo za raziskave fuzije. Okoli 1 ns dolg sunek iz osnovnega laserja razdelijo na deset ojačevalnih vej, ki so dolge po 180 m. Da preprečijo poškodbe površin elementov zaradi prevelike gostote svetlobne energije, morajo snope razširiti, tako da je premer zadnjih ojačevalnih stopenj pol metra. Končna energija sunka je nad $\sim$ 1 MJ. Z njim z vseh strani posvetijo na kroglico iz devterija in tritija, ki se dovolj segreje in stisne, da pride do njunega zlivanja. Vršna moč laserskega sunka je 10^{15} W. Če laserksi skop zberemo na površino 1 mm^2, dobimo električno poljsko jakost okoli 10^{12} V/m^2, kar je približno enako polju v vodikovem atomu.

7.7 Titan-safirni laser

Titan-safirni laser je trdninski laser, pri katerem so v kristal safirja Al_2O_3 primešani ioni titana Ti^{3+}. Njegova najpomembnejša značilnost je zvezna nastavljivost valovne dolžine v zelo širokem frekvenčnem pasu ($600-1180$ nm). Deluje v zveznem načinu z močmi do 50 W in v fazno uklenjenem načinu sunkovno z dolžino sunkov 100 fs z vršnimi močmi nad 10^{12} W.

To je laser z najširšo širino črte.

Prehod Ti v bližnjem infrardečem območju je zaradi interakcije s fononi močno razširjen, Črpamo ga navadno z drugim laserjem, največkrat z argonskim.

Titan-safirni laser zelo dobro deluje v sunkih z uklepanjem faz. Zaradi velike spektralne širine ojačevanja so sunki izredno kratki, okoli 100 ps.

7.8 Laserji na organska barvila

Posebej zanimivi so sevalni prehodi z veliko spektralno širino. V frekvenčnem intervalu takega prehoda je možno spreminjati frekvenco laserja, kar je posebej za uporabo v spektroskopiji izrednega pomena. Eno možnost nudijo organska barvila.

Približno shemo energijskih nivojev molekule tipičnega organskega barvila, znan primer je rodamin 6G, prikazuje slika **??**. Vsa elektronska stanja so razcepljena v vibracijska in rotacijska podstanja. Rotacijska stanja so tako blizu skupaj, da se v raztopini zaradi trkov zlijejo med seboj v zvezen pas, ki ima tipično širino do 50 nm. Elektronska stanja so lahko singletna (S), ki imajo elektronski spin 0, in tripletna (T) z elektronskim spinom 1. Električni dipolni prehodi med tripletnimi in singletnimi stanji so prepovedani, zato je najnižje tripletno stanje metastabilno.

V toplotnem ravnovesju je molekula na dnu osnovnega elektronskega stanja S_0. Z absorpcijo vidne svetlobe primerne frekvence preide v nekam v vzbujeno stanje S_1. Preko trkov z molekulami topila vzbujena barvilna molekula zelo hitro, v času okoli pikosekunde preide na dno vzbujenega stanja, od koder s sevanjem preide nekam v osnovno stanje S_0, od koder zopet s trki hitro preide nazaj na dno osnovnega stanja, kot kaže slika **??**. Ker sta obe elektronski stanji razširjeni zaradi vibracijskih in rotacijskih stanj, sta absorpcijska in emisijska fluorescenčna črta široki. Tipična širina je blizu 50 nm. Energija izsevane svetlobe je zmanjšana za energijo prehodov s trki, zato je fluorescenčna črta premaknjena k nižjim frekvencam od absorpcijske. Absoprcijski in fluoresecenčni spekter prehoda $S_0 - S_1$ kaže slika **??**.

Absorpcijski presek med osnovnim in vzbujenim singletnim stanjem je velik, sevalni razpadni čas z dna stanja S_1 pa dolg v primeri z nesevalnimi prehodi z vibracijsko- rotacijskih nivojev stanja S_0 na njegovo dno, zato je lahko dobiti ojačenje v fluorescenčni črti. Barvilni laser črpamo s svetlobo z nekaj višjo frekvenco, ki ustreza vrhu absorpcijske črte. Pri tem večina molekul, ki so se vzbudile z absoprcijo, sodeluje pri stimulirani emisiji, zato je izkoristek pri pretvorbi črpalne svetlobe v moč laserja lahko zelo velik.

Energija tripletnega stanja T_1 se deloma prekriva s stanjem S_1, zato so možni prehodi s trki iz S_1 v T_1. Ker je tripletno stanje metastabilno, se lahko v njem nabere znatno število molekul barvila. Zaradi tega se zmanjša število molekul v singletnem stanju, poleg tega pa je možna absorpcija iz stanja T_1 v T_3, kar lahko prepreči lasersko delovanje med stanjema S_1 in S_0. Tej težavi se izognemo, če laser deluje le v sunkih, pri stacionarnem delovanju pa tako, da raztopina barvila kroži skozi laser.

Barvilni laser lahko deluje pri vseh frekvencah znotraj široke fluorescenčne črte. Zato moramo v resonator vgraditi nek frekvenčno selektiven element, s katerim lahko nastavljamo frekvenco laserja. Uporabna je prizma kot v primeru Ar laserja ali kombinacije interferometrov. Zanimiva možnost je, da eno od zrcal nadomestimo z uklonsko mrežico, ki je postavljena pod takim kotom, da se po osi resonatorja odbije svetloba željene valovne dolžine (slika **??**. To lahko spremenimo s spreminjanjem kota nagiba mrežice.

Barvilne lahko laserje črpamo z bliskovno lučjo. Danes pogosteje uporabimo drug laserjem primerne valovne dolžine, na primer Ar ali ekscimerni laser. Pri tem zaradi dobrega izkoristka barvila ne izgubimo mnogo moči, pridobimo pa možnost nastavljanja frekvence. Z menjavo barvil tako zvezno pokrijemo ves vidni del spektra.

Široko območje ojačevanja barvila nam z uklepanjem faz omogoča dobiti tudi zelo kratke svetlobne sunke. V prejšnjem poglavju smo videli, da je dolžina sunka iz fazno uklenjenega laserja obratno sorazmerna s spektralno širino ojačevalne črte. Iz barvilnega laserja zato lahko dobimo zelo kratke sunke, pod 1 ps.

7.9 Vlakovni laserji

7.10 Polvodniški laserji

8. Nelinearna optika

Pri obravnavi svetlobnega valovanja v snovi smo doslej vedno privzeli linearno zvezo med polarizacijo in jakostjo električnega polja. To je seveda približek, ki je dovolj dober le pri razmeroma majhnih jakostih polja. Kadar doseže jakost polja velike vrednosti – in v laserskih snopih jih nedvomno lahko doseže – je treba upoštevati tudi višje člene v razvoju. Takrat govorimo o nelinearni optiki, saj zveza med polarizacijo in električnim poljem ni linearna. V tem poglavju bomo spoznali zanimive pojave, ki jih povzroči nelinearni del polarizacije, med drugim optično podvajanje frekvenc, optično usmerjanje, samozbiranje laserskega snopa, optične solitone in optično fazno konjugacijo.

8.1 Nelinearna susceptibilnost

V linearnem približku odziva snovi velja, da je polarizacija snovi **P** linearna funkcija električne poljske jakosti svetlobe **E**. Takrat zapišemo (enačba 1.7)

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\underline{\varepsilon} - 1) \cdot \mathbf{E}. \tag{8.1}$$

Če uvedemo tenzor linearne susceptibilnosti

$$\chi^{(1)} = \underline{\varepsilon} - 1, \tag{8.2}$$

lahko linearni odziv snovi zapišemo strnjeno kot

$$\mathbf{P}_\mathrm{L} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E}. \tag{8.3}$$

Ta približek je dober za majhne jakosti električnega polja. Pri večjih poljih postanejo pomembni tudi členi višjega reda v razvoju polarizacije po **E**

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{P}_\mathrm{L} + \mathbf{P}_\mathrm{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots\, \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \ldots} \tag{8.4}$$

Vpeljali smo nelinearni susceptibilnosti $\chi^{(2)}$ in $\chi^{(3)}$, ki sta tenzorja tretjega in četrtega ranga. Za bolj nazorno predstavo izpišimo nelinearna dela še po komponentah

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},2})_i = \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k \tag{8.5}$$

in

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},3})_i = \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l, \tag{8.6}$$

pri čemer smo uporabili Einsteinov zapis seštevanja po indeksih. Značilne vrednosti susceptibilnosti v trdnih snoveh so $\chi^{(1)} \sim 1$, $\chi^{(2)} \sim 10^{-12}$ m/V in $\chi^{(3)} \sim 10^{-22}$ m^2/V^2. Obravnavali bomo samo snovi, v katerih ni izgub in so susceptibilnosti realne.

Naloga 8.1.1 Pokaži, da so gostote svetlobnega toka, pri katerih dosežemo znaten nelinearen prispevek k polarizaciji

$$\frac{P_{NL}}{P_L} \sim 10^{-6},$$

velikostnega reda 1 MW/cm^2. Ker so take vrednosti z navadnim svetilom povsem nedosegljive, je bilo mogoče nelinearne optične pojave opazovati šele po iznajdbi laserjev.

Tenzor $\chi^{(2)}$ je od nič različen le v snoveh, ki nimajo centra inverzije. Ker lahko v produktu (enačba 8.5) vrstni red $E_j E_k$ zamenjamo, mora biti tenzor invarianten na to zamenjavo

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj}. \tag{8.7}$$

Vpeljemo poenostavljen zapis, pri katerem prvi indeks prepišemo $(x = 1, y = 2, z = 3)$, zadnja dva indeksa pa združimo. Dogovorjene oznake so $xx = 1, yy = 2, zz = 3, yz = zy = 4, xz = zx = 5, xy = yx = 6$. Tako na primer χ_{xxz} zapišemo kot χ_{15}. Namesto splošnega tenzorja tretjega ranga smo torej uvedli matriko velikosti 3×6. Vendar koeficienti matrike niso poljubni. Zaradi simetrijskih lastnosti kristala se matrika poenostavi in navadno je le nekaj komponent različnih od nič. Kadar je v snovi absorpcija pri vseh treh frekvencah dovolj majhna, lahko matriko poenostavimo z dodatnim približkom, tako imenovano Kleinmanovo domnevo[1]. Ta pravi, da je

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj} = \chi_{kij} = \chi_{kji} = \chi_{jik} = \chi_{jki}. \tag{8.8}$$

Kristal	Grupa	Neničelne komponente tenzorja χ	Vrednosti (10^{-12} m/V)
$BaTiO_3$	4mm	$\chi_{xxz} = \chi_{yyz} = \chi_{xzx} = \chi_{yzy} = \chi_{15} = \chi_{24}$	$\chi_{15} = 42,6$
		$\chi_{zxx} = \chi_{zyy} = \chi_{31} = \chi_{32}$	$\chi_{31} = 45,2$
		$\chi_{zzz} = \chi_{33}$	$\chi_{33} = 16,0$
KDP	$\bar{4}$2m	$\chi_{xyz} = \chi_{yxz} = \chi_{xzy} = \chi_{yzx} = \chi_{14} = \chi_{25}$	$\chi_{14} = 0,88$
		$\chi_{zxy} = \chi_{zyx} = \chi_{36}$	$\chi_{36} = 1,12$
Telur	32	$\chi_{xxx} = -\chi_{xyy} = -\chi_{yyx} = -\chi_{yxy} =$	
		$= \chi_{11} = -\chi_{12} = -\chi_{26}$	$\chi_{11} = 1300$
		$\chi_{xyz} = \chi_{xzy} = -\chi_{yxz} = -\chi_{yzx} = \chi_{14} = -\chi_{25}$	$\chi_{14} \approx 0$
$LiNbO_3$	3m	$\chi_{xxz} = \chi_{yyz} = \chi_{xzx} = \chi_{yzy} = \chi_{15} = \chi_{24}$	$\chi_{15} \approx \chi_{31}$
		$\chi_{zxx} = \chi_{zyy} = \chi_{31} = \chi_{32}$	$\chi_{31} = -11,9$
		$\chi_{zzz} = \chi_{33}$	$\chi_{33} = 68,8$
		$-\chi_{xxy} = -\chi_{xyx} = \chi_{yyy} = -\chi_{yxx} =$	
		$= -\chi_{16} = \chi_{22} = -\chi_{21}$	$\chi_{22} = 5,52$

Tabela 8.1: Koeficienti nelinearne susceptibilnosti za nekaj izbranih snovi

[1] D. A. Kleinman, Phys. Rev. 126, 1977 (1962).

Poglejmo primer. Vzemimo barijev titanat ($BaTiO_3$) s točkovno grupo 4mm. To pomeni, da ima 4-števno os simetrije in dve zrcalni ravnini, od katerih ena preslika $x \to -x$ ali $y \to -y$, druga pa $x \to y$ in $y \to x$. Od nič različni elementi susceptibilnosti so tako samo:

$$\chi_{xxz} = \chi_{xzx} = \chi_{yyz} = \chi_{yzy}; \quad \chi_{zzz}; \quad \chi_{zxx} = \chi_{zyy}. \tag{8.9}$$

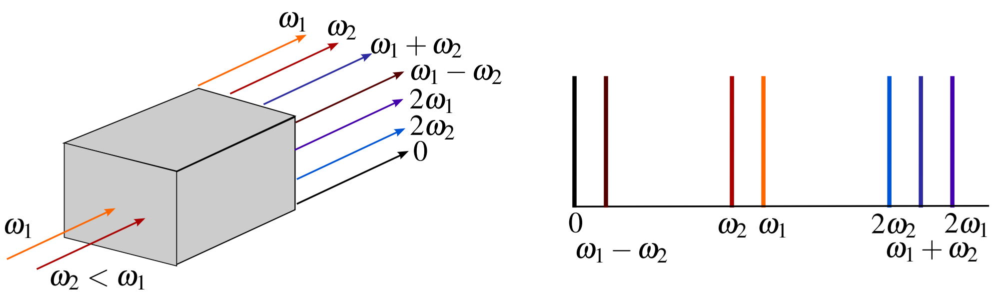
Z upoštevanjem Kleinmanove domneve se število različnih členov še zmanjša in ostaneta le dva

$$\chi_{xxz} = \chi_{xzx} = \chi_{yyz} = \chi_{yzy} = \chi_{zxx} = \chi_{zyy} \quad \text{in} \quad \chi_{zzz}. \tag{8.10}$$

V tabeli (8.1)[2] so navedene izmerjene vrednosti in vidimo, da Kleinmanova domneva ni povsem točna, ampak zgolj dober približek.

8.2 Nelinearni optični pojavi drugega reda

Vzemimo optično nelinearni kristal s $\chi^{(2)} \neq 0$. V smeri pravokotno glede na njegovo mejno ploskev naj vpadata dve valovanji s frekvencama ω_1 in ω_2. Zaradi nelinearne sklopitve nastajajo v snovi nova valovanja z različnimi kombinacijami frekvenc (glej sliko 8.1).



Slika 8.1: Shematski prikaz nastanka valovanj pri nelinearnih optičnih pojavih drugega reda in spekter izhodne svetlobe

Nastanku valovanja pri podvojeni frekvenci pravimo tudi SHG (*Second harmonic generation*), nastanku valovanja pri vsoti frekvenc SFG (*Sum frequency generation*), nastanku valovanja pri razliki frekvenc DFG (*Difference frequency generation*) in pojavu statičnega polja pri $\omega = 0$ optično usmerjanje (*Optical rectification*). Oglejmo si nekaj teh pojavov podrobneje.

Pri močnih vpadnih valovanjih navadna valovna enačba ne zadošča. Pride do pojava nelinearne polarizacije in valovanje opišemo z nelinearno valovno enačbo

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}}. \tag{8.11}$$

Naloga 8.2.1 Iz Maxwellovih enačb (1.1 do 1.4) izpelji nelinearno valovno enačbo (8.11), pri čemer upoštevaj zvezo (8.4). Pri tem si pomagaj z identiteto

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

[2] Izmerjene vrednosti, ki jih najdemo v literaturi, se med seboj pogosto znatno razlikujejo.

Nehomogene valovne enačbe v splošnem ne znamo rešiti in se moramo zateči k približkom. Prva poenostavitev, ki jo bomo naredili, je omejitev na vzporedna vpadna žarka, ki se širita v smeri osi z. Poleg tega se bomo omejili na izračun samo enega nastalega valovanja in privzeli, da je neodvisno od drugih nastalih valovanj. Ta omejitev ni huda. Dokler sta namreč amplitudi valovanj pri vsoti in razliki frekvenc majhni, ju lahko obravnavamo vsako posebej. Ni sicer nujno, da sta obe nastali amplitudi vedno majhni, vendar je lahko, kot bomo videli kasneje, le eno valovanje naenkrat po jakosti primerljivo z vpadnim.

V snovi so tako prisotna tri valovanja: dve vpadni in tretje, novo nastalo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{2}\left[A_1(z)\,e^{i(k_1z-\omega_1t)}+A_1^*(z)\,e^{-i(k_1z-\omega_1t)}\right]\\
\mathbf{E}_2 &= \frac{\mathbf{e}_2}{2}\left[A_2(z)\,e^{i(k_2z-\omega_2t)}+A_2^*(z)\,e^{-i(k_2z-\omega_2t)}\right]\\
\mathbf{E}_3 &= \frac{\mathbf{e}_3}{2}\left[A_3(z)\,e^{i(k_3z-\omega_3t)}+A_3^*(z)\,e^{-i(k_3z-\omega_3t)}\right].
\end{aligned}\tag{8.12}$$

Polja smo zapisali v realni obliki, to je s kompleksno konjugiranimi deli, saj valovna enačba (8.11) ni linearna. Upoštevali smo tudi, da so zaradi nelinearnih pojavov amplitude funkcije kraja, za katere pa lahko privzamemo, da se le počasi spreminjajo. Njihova kompleksna vrednost dopušča pojav dodatnega faznega zamika. Za valovna števila velja $k_n^2 = \varepsilon_n\omega_n^2/c_0^2$, pri čemer je ε_n dielektrična konstanta pri frekvenci ω_n in polarizaciji $\mathbf{e}_n$, indeks $n = 1\ldots3$ pa označuje valovanje. S tem vsako od treh valovanj pri konstantni amplitudi reši linearni del valovne enačbe.

Naša naloga je ugotoviti, kako se zaradi nelinearnosti spreminjajo amplitude posameznih valovanj. Nastavek za polje, ki bo rešil nelinearno valovno enačbo, je tako

$$\mathbf{E}(z,t)=\sum_{n=1}^{3}\frac{\mathbf{e}_n}{2}\left[A_n(z)\,e^{i(k_nz-\omega_nt)}+A_n^*(z)\,e^{-i(k_nz-\omega_nt)}\right].\tag{8.13}$$

Izračunajmo najprej

$$\nabla^2\mathbf{E}=-\sum_{n=1}^{3}\frac{\mathbf{e}_n}{2}\left[k_n^2A_n(z)-2ik_n\frac{dA_n(z)}{dz}\right]e^{i(k_nz-\omega_nt)}+\text{ k. k.}\tag{8.14}$$

S k. k. smo označili kompleksno konjugirani del. Upoštevali smo, da se amplituda $A_n(z)$ le počasi spreminja s krajem in smo zato njen drugi odvod zanemarili. Izračunamo še drugi odvod po času

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{3}\frac{\mathbf{e}_n}{2}\left(-\omega_n^2\right)\left[A_n(z)\,e^{i(k_nz-\omega_nt)}+\text{ k. k.}\right].\tag{8.15}$$

Nelinearna polarizacija vsebuje produkte polj, ki nihajo z vsemi možnimi vsotami in razlikami parov frekvenc ω_1, ω_2 in ω_3

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\mathrm{NL}}=\varepsilon_0\chi^{(2)}:\mathbf{E}\mathbf{E}=\varepsilon_0\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}&\left(\frac{1}{4}\chi^{(2)}:\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\right)A_n(z)A_m(z)e^{i(k_n+k_m)z-i(\omega_n+\omega_m)t}+\\
&\left(\frac{1}{4}\chi^{(2)}:\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\right)A_n(z)A_m^*(z)e^{i(k_n-k_m)z-i(\omega_n-\omega_m)t}+\text{k.k.}
\end{aligned}\tag{8.16}$$

Če želimo, da je valovna enačba (8.11) izpolnjena ob vsakem času t, se morajo ujemati izrazi pri istih časovnih odvisnostih, to je pri istih frekvencah. Izberimo najprej člene pri $\omega_n=\omega_3$ in $\omega_3=\omega_1+\omega_2$. Dobimo

$$ik_3\mathbf{e}_3\frac{dA_3}{dz}e^{ik_3z}=-\frac{\mu_0\varepsilon_0\omega_3^2}{4}\chi:\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2A_1A_2e^{i(k_1+k_2)z}.\tag{8.17}$$

Množimo še obe strani skalarno z $\mathbf{e}_3$, upoštevajmo zvezo med k_3 in ω_3 in ravnajmo podobno še za drugi dve valovanji. Tako dobimo sistem sklopljenih enačb za amplitude valovanj v optično nelinearnem sredstvu

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\omega_3\chi_{ef}}{4c_0n_3}A_1A_2\,e^{-i\Delta kz} \tag{8.18}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2\chi_{ef}}{4c_0n_2}A_1^*A_3\,e^{i\Delta kz} \tag{8.19}$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1\chi_{ef}}{4c_0n_1}A_2^*A_3\,e^{i\Delta kz}. \tag{8.20}$$

Pri tem je

$$\chi_{ef} = \mathbf{e}_3 \cdot \chi : \mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2 = \sum_{ijk} \chi_{ijk}e_{3i}e_{1j}e_{2k}. \tag{8.21}$$

Ker ni nujno, da so polarizacijski vektorji vzporedni s koordinatnimi osmi, tudi χ_{ef} niso čiste kartezične komponente tenzorja nelinearne susceptibilnosti.

Z Δk smo označili razliko valovnih vektorjev

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2. \tag{8.22}$$

Čeprav je $\omega_3 - \omega_2 - \omega_1 = 0$, je Δk navadno različen od nič zaradi frekvenčne disperzije lomnega količnika. Videli bomo, da je to ključnega pomena za vrsto nelinearnih optičnih pojavov. Dobljeni sistem sklopljenih diferencialnih enačb opisuje več pojavov, odvisno od začetnih pogojev in relativnih intenzitet valovanj. Mi si bomo ogledali le nekaj najpomembnejših primerov.

Naloga 8.2.2 Pokaži, da nastavek za polje v nelinearni snovi (enačba 8.13) reši nelinearno valovno enačbo (8.11), in pokaži, da spreminjanje amplitude posameznih valovanj ustreza enačbam (8.18-8.20).

8.3 Optično podvajanje frekvenc

Obravnavajmo optično nelinearno sredstvo, na katerega vpadata valovanji E_1 in E_2. Naj bosta frekvenci vpadnih valovanj enaki $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, valovanji pa razlikujemo zaradi možnosti dveh različnih polarizacij. Takrat je $\omega_3 = 2\omega$ in govorimo o najpreprostejšem in tudi najpomembnejšem optičnem nelinearnem pojavu – podvajanju frekvence. Pogosto ga uporabljamo za pridobivanje laserskih snopov pri krajših valovnih dolžinah, na primer pri Nd:YAG laserju, ko infrardeče izhodno valovanje (1064 nm) pretvorimo v vidno svetlobo zelene barve (532 nm).

Zanima nas, kako se $A_3(z) = A_{2\omega}(z)$ spreminja vzdolž nelinearnega kristala pri začetnem pogoju $A_{2\omega}(0) = 0$. Privzemimo še, da se pretvori le manjši del vpadnega energijskega toka, tako da sta amplitudi $A_1 = A_2 = A_0$ približno konstantni. Tedaj lahko enačbo za $A_3(z)$ (enačba 8.18) brez težav integriramo do dolžine kristala L in zapišemo

$$A_{2\omega}(L) = \frac{i\omega\chi_{ef}A_0^2}{2c_0n_{2\omega}}\,e^{-i\Delta kL/2}\,\frac{\sin\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\frac{\Delta kL}{2}}L, \tag{8.23}$$

kjer smo z $n_{2\omega}$ označili lomni količnik pri dvojni frekvenci. Iz tega izraza izračunamo izhodno gostoto svetlobnega toka pri dvojni frekvenci

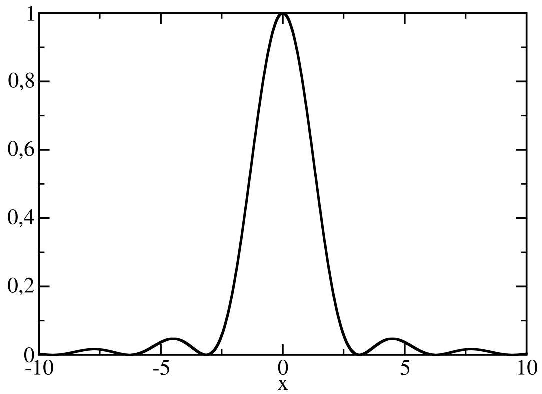
$$j_{2\omega}(L) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n_{2\omega} c_0 |A_3|^2 = \frac{\omega^2 \chi_{ef}^2}{2 n_{2\omega} n_\omega^2 c_0^3 \varepsilon_0} j_\omega^2 L^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\frac{\Delta k L}{2}} \right)^2 . \tag{8.24}$$

Gostota energijskega toka frekvenčno podvojene svetlobe torej narašča s kvadratom intenzitete vpadne svetlobe. Naj bo S presek snopa. Potem je razmerje med energijskim tokom pri podvojeni in osnovni frekvenci oziroma izkoristek pretvorbe

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^2 \chi_{ef}^2}{2 S n_{2\omega} n_\omega^2 c_0^3 \varepsilon_0} P_\omega L^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\frac{\Delta k L}{2}} \right)^2 . \tag{8.25}$$

★ Pri izpeljavi frekvenčnega podvajanja iz enačb za nelinearne pojave drugega reda (enačbe 8.18-8.20) moramo biti pazljivi. Tukaj smo uporabili splošne enačbe in tako privzeli, da je vpadno valovanje sestavljeno iz dveh ločenih valovanj s frekvenco ω z intenziteto j_ω. Lahko pa frekvenčno podvajanje obravnavamo z enim vpadnim valovanjem s frekvenco ω in intenziteto $2j_\omega$, ki nelinearno interagira samo s sabo. Takrat je zapis enačb za predfaktor drugačen, končen rezultat pa seveda enak.

V izrazih (8.24) in (8.25) nastopa faktor $\sin^2(\Delta k L/2)/(\Delta k L/2)^2$ (slika 8.2). Zaradi njega je na poti, ki je daljša od $\pi/\Delta k$, stopnja pretvorbe zelo majhna.



Slika 8.2: Izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje je sorazmeren s funkcijo $(\sin(x)/x)^2$, pri čemer je $x = \Delta k L/2$.

Poglejmo primer. Faktor Δk je različen od nič zaradi odvisnosti lomnih količnikov od frekvence. V KH_2PO_4 je redni lomni količnik pri 1000 nm 1,496, pri 500 nm pa 1,514. Vrednost, pri kateri pade intenziteta frekvenčno podvojenega valovanja na nič $L_c = \pi/\Delta k$, je tako le okoli 30 mikrometrov. Na večjih dolžinah postane stopnja pretvorbe zanemarljivo majhna.

Za visok izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje je torej pomembno, da se faze čim bolj ujemajo in da je $\Delta k = 0$. Takrat je vrednost faktorja $\sin(\Delta k L/2)/(\Delta k L/2)$ največja in izkoristek pretvorbe narašča sorazmerno s kvadratom dolžine

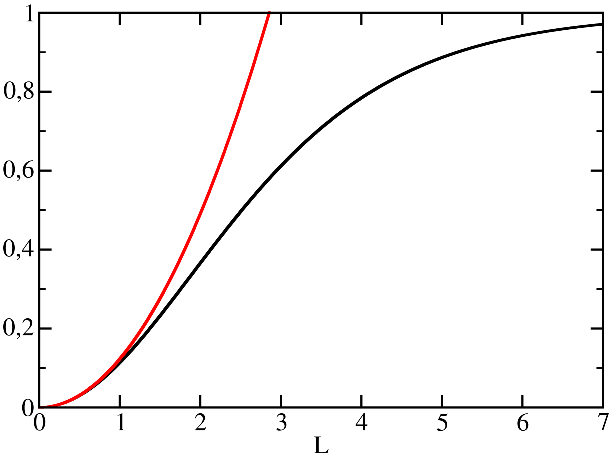
$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^2 \chi_{ef}^2}{2 S n_{2\omega} n_\omega^2 c_0^3 \varepsilon_0} P_\omega L^2 . \tag{8.26}$$

Za uporabno pretvorbo v frekvenčno podvojeno valovanje je torej treba doseči fazno ujemanje valovnih vektorjev pri osnovni in podvojeni frekvenci. Kako to naredimo, bomo spoznali v prihodnjem razdelku.

Naloga 8.3.1 Vemo, da intenziteta frekvenčno podvojenega valovanja narašča sorazmerno s kvadratom dolžine kristala. Takšna odvisnost velja le, če je intenziteta valovanja pri podvojeni frekvenci bistveno manjša od intenzitete vpadnega valovanja, oziroma $A_3 \ll A_1, A_2$. Pokaži, da v nasprotnem primeru intenziteta frekvenčno podvojenega valovanja $j_{2\omega}(L)$ narašča kot

$$j_{2\omega}(L) = j_0 \tanh^2\left(\chi_{ef}\,\omega\sqrt{\frac{j_0}{2n_3 n_1^2 c_0^3 \varepsilon_0}}L\right) = j_0 \tanh^2(\kappa L), \tag{8.27}$$

pri čemer je j_0 vpadna intenziteta valovanja pri osnovni frekvenci. Namig: upoštevaj, da se celotna energija ohranja.



Slika 8.3: Izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje. Če privzamemo, da se intenziteta osnovnega žarka ne zmanjšuje, je odvisnost parabolična (rdeča krivulja), kar je dober približek le za majhne intenzitete. Bolj natančen izračun pokaže, da je izkoristek pretvorbe sorazmeren s $\tanh^2(\kappa L)$.

Poglejmo še, kaj se zgodi, kadar pogoj ujemanja faz ni izpolnjen in $\Delta k \neq 0$. Takrat dolžino kristala L v izrazu (8.25) pokrajšamo in izkoristek pretvorbe z naraščajočim L sinusno niha med nič in neko največjo vrednostjo. Tak pojav lahko opazimo, če uporabimo klinast vzorec, ki se mu debelina spreminja, ali pa če vzorec sučemo in na ta način spreminjamo razliko faz. Ta pojav, imenujemo ga Makerjeve oscilacije[3], uporabljamo za določanje nelinearne susceptibilnosti kristalov.

Ujemanje faz

Poglejmo, kako lahko dosežemo ujemanje faz, ki je nujno za učinkovito optično podvajanje frekvenc. Spomnimo se, da je pogoj za ujemanje faz

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = k_3^{2\omega} - k_1^{\omega} - k_2^{\omega} = \frac{2\omega}{c_0}n_3 - \frac{\omega}{c_0}n_1 - \frac{\omega}{c_0}n_2 = 0. \tag{8.28}$$

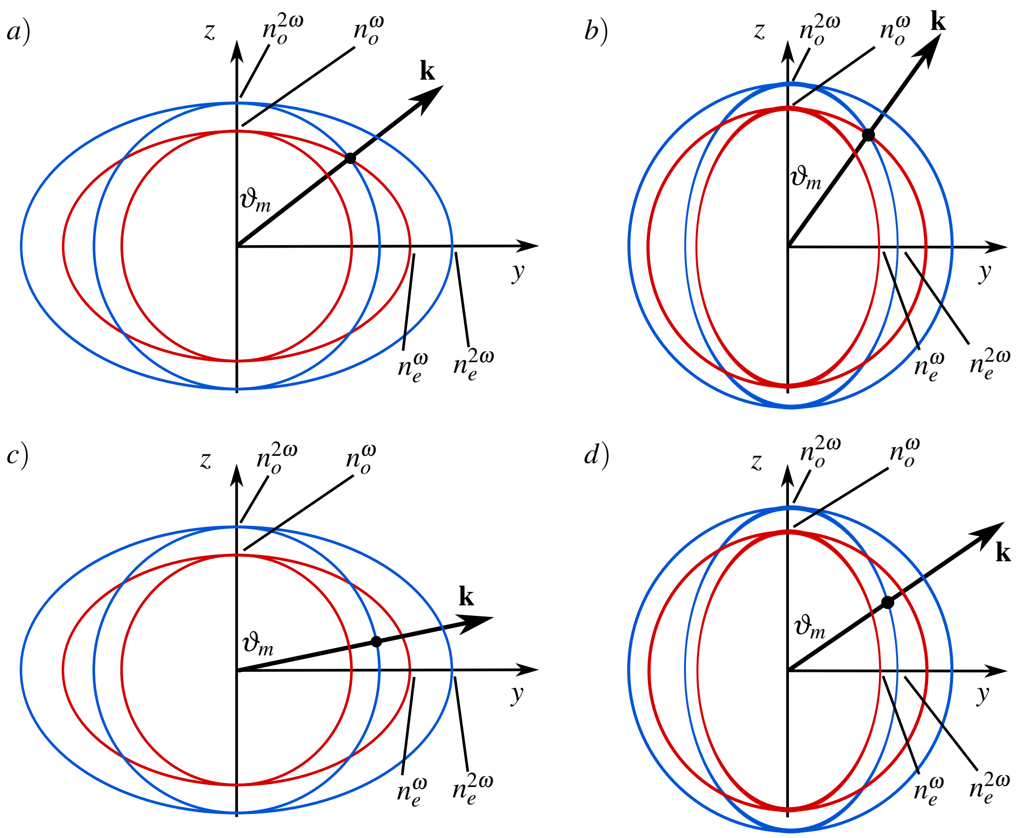
Iz tega sledi pogoj za ujemanje faz

$$\boxed{n_1^{\omega} + n_2^{\omega} = 2n_3^{2\omega}.} \tag{8.29}$$

[3] P. D. Maker et al., Phys. Rev. Lett. 8, 21 (1962).

Da lahko zadostimo gornjemu pogoju, izkoristimo dvojni lom v anizotropnih kristalih (glej poglavje 1.8), pri čemer se zaradi enostavnosti omejimo le na optično enoosne kristale. Obravnavajmo samo kristale brez absorpcije in z normalno disperzijo, to pomeni, da oba lomna količnika naraščata s frekvenco.

Za razumevanje je najbolj nazoren grafični prikaz (slika 8.4). Podrobneje poglejmo primer s slike (a). Na njem so narisane ploskve konstantne fazne hitrosti v k prostoru za pozitivno anizotropni ($n_e > n_o$) enoosni kristal pri enojni in dvojni frekvenci v odvisnosti od kota glede na optično os. Rdeča barva nakazuje lomne količnike pri vpadni frekvenci, modra pa pri podvojeni. Ekscentričnost elipse za izredni lomni količnik in frekvenčna disperzija sta zaradi večje nazornosti močno pretirani. Opazimo, da je pri nekem kotu ϑ med smerjo širjenja svetlobe $\mathbf{k}$ in optično osjo z redni lomni količnik pri dvojni frekvenci enak izrednemu količniku pri osnovni frekvenci. Če torej izberemo izredno polarizacijo vpadnega valovanja (tako, ki leži v ravnini optične osi in smeri širjenja), bo za podvojeno valovanje z redno polarizacijo (to je pravokotno na optično os) pri kotu ϑ_m izpolnjen pogoj ujemanja faz (enačba 8.29). Zapišimo to še z enačbo.



Slika 8.4: Štirje primeri, pri katerih je izpolnjen pogoj za ujemanje faz. (a) Ujemanje faz prvega reda za pozitivno anizotropno snov, (b) ujemanje faz prvega reda za negativno anizotropno snov ter ujemanje faz drugega reda za pozitivno (c) in negativno (d) anizotropno snov.

Lomni količnik za redno polarizirano valovanje pri podvojeni frekvenci mora biti enak lomnemu količniku za izredno polarizirano valovanje pri osnovni frekvenci. Pri tem je lomni količnik za izredno valovanje odvisen od kota

$$\frac{1}{(n_o^{2\omega})^2} = \frac{1}{(n^{\omega}(\vartheta))^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{(n_o^{\omega})^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{(n_e^{\omega})^2}. \tag{8.30}$$

Tako dobimo izraz

$$\cos^2\vartheta_m = \frac{(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{\omega})^{-2}}{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_e^{\omega})^{-2}}, \tag{8.31}$$

iz katerega lahko izračunamo kot ϑ_m, pri katerem pride do ujemanja faz.

Naloga 8.3.2 Pokaži, da v primeru negativne anizotropije pogoj za ujemanje faz zapišemo kot

$$\cos^2\vartheta_m = \frac{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}}{(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}}. \tag{8.32}$$

S slike (8.4 c in d) lahko razberemo, da obstaja še en primer, pri katerem je izpolnjen pogoj za ujemanje faz. Poglejmo primer (c), pri katerem sta v vpadnem valovanju prisotni obe polarizaciji, redna in izredna, podvojeno valovanje pa je redno polarizirano. Tedaj mora biti za ujemanje faz vsota rednega in izrednega lomnega količnika pri osnovni frekvenci enaka dvakratniku rednega lomnega količnika pri dvojni frekvenci. Povedano drugače: lomni količnik pri dvojni frekvenci mora biti enak povprečju rednega in izrednega lomnega količnika pri osnovni frekvenci. Za praktično uporabo je ta izbira, kadar obstaja, celo ugodnejša, ker je pri njej kot ujemanja faz bližje $\pi/2$. Ujemanje faz je zato manj občutljivo na majhna odstopanja v kotu ali na temperaturne spremembe lomnih količnikov. Račun kota ϑ_m za ta primer je bolj zahteven, saj je treba rešiti enačbo četrte stopnje.

Efektivna susceptibilnost

Na izhodno moč frekvenčno podvojenega snopa poleg faznega faktorja bistveno vpliva tudi efektivna susceptibilnost χ_{ef}, ki jo moramo izračunati za vsak primer posebej. V optično enoosnem kristalu je kriterij ujemanja faz izpolnjen na stožcu okoli optične osi, pri čemer je stožec določen z izračunanim kotom ϑ_m (enačbi 8.31 in 8.32). Drugi kot, ki določa smer širjenja v ravnini, ki je pravokotna na optično os, pa izberemo tako, da izkoristimo največje komponente nelinearne susceptibilnosti.

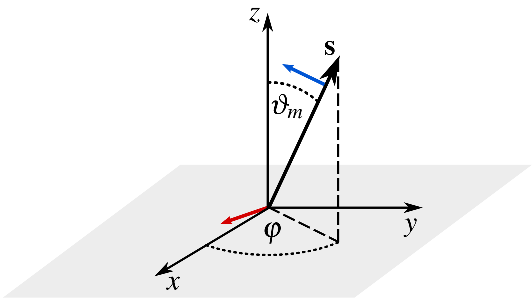
Oglejmo si kot primer spet KH_2PO_4, ki je negativno anizotropen z vrednostmi $n_o^{\omega} = 1,4942$, $n_e^{\omega} = 1,4603$, $n_o^{2\omega} = 1,5129$ in $n_e^{2\omega} = 1,4709$ (slika 8.4 b). Valovna dolžina osnovnega snopa naj bo 1064 nm. Po podatkih, navedenih zgoraj, izračunamo po enačbi (8.32) za kot ujemanja faz $\vartheta_m = 41,25°$. Nelinearna susceptibilnost ima v tetragonalni simetriji $\bar{4}2m$ od nič različne komponente χ_{xyz}, χ_{xzy} χ_{zxy}, χ_{zyx}, χ_{yzx} in χ_{yxz} (glej tabelo 8.1). Zaradi poenostavitve privzamemo, da so njihove vrednosti enake.

Naj se osnovno in frekvenčno podvojeno valovanje širita v smeri $\mathbf{s}$. Pri zapisu vektorja si pomagamo s sliko (8.5)

$$\mathbf{s} = (\cos\varphi\sin\vartheta_m, \sin\varphi\sin\vartheta_m, \cos\vartheta_m), \tag{8.33}$$

kjer je φ kot med osjo x in projekcijo $\mathbf{s}$ na ravnino xy. Naša naloga je poiskati vrednost kota φ, pri kateri je moč frekvenčno podvojenega valovanja največja. Iz pogoja za ujemanje faz vidimo, da mora biti vpadna svetloba redno polarizirana, izhodna frekvenčno podvojena pa izredno polarizirana. Redna polarizacija je pravokotna na os z (optično os) in hkrati pravokotna na smer vektorja $\mathbf{s}$. Zapišemo jo kot

$$\mathbf{e}_o = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0). \tag{8.34}$$



Slika 8.5: K izračunu efektivne susceptibilnosti. Rdeč vektor označuje polarizacijo vhodnega valovanja, moder pa polarizacijo frekvenčno podvojenega valovanja.

Izredna polarizacija leži v ravnini, ki jo tvori vektor **s** z osjo z, hkrati pa je pravokotna na vektor **s**, tako da jo zapišemo kot

$$\mathbf{e}_e = (-\cos\varphi\cos\vartheta_m, -\sin\varphi\cos\vartheta_m, \sin\vartheta_m). \tag{8.35}$$

Spomnimo se, da efektivno susceptibilnost izračunamo kot (enačba 8.21)

$$\chi_{ef} = \sum_{ijk}\chi_{ijk}e_{3i}e_{1j}e_{2k} = \sum_{ijk}\chi_{ijk}e_{ei}e_{oj}e_{ok}. \tag{8.36}$$

Krajši račun pokaže, da je zaradi oblike tenzorja nelinearne susceptibilnosti v izbranem primeru od nič različna le z komponenta nelinearne polarizacije. Zapišemo

$$\chi_{ef} = \chi_{\mathrm{zxy}}e_{ez}e_{ox}e_{oy} + \chi_{\mathrm{zyx}}e_{ez}e_{oy}e_{ox} \tag{8.37}$$

in

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{z}}^{2\omega} &= -2\varepsilon_0\chi_{\mathrm{zxy}}E_0^2\cos\varphi\sin\varphi\sin\vartheta_m \\ &= -\varepsilon_0\chi_{\mathrm{zxy}}E_0^2\sin(2\varphi)\sin\vartheta_m. \end{aligned} \tag{8.38}$$

Nelinearna polarizacija je največja, kadar je $\varphi = \pi/4$. Največji efektivni koeficient χ_{ef}, ki nastopa v izrazih za amplitudo in moč podvojene svetlobe (enačbi 8.24 in 8.25), je torej v izbranem primeru

$$\chi_{ef} = \sin\vartheta_m\chi_{\mathrm{zxy}} \approx 0,66\,\chi_{\mathrm{zxy}} \approx 0,74\ \mathrm{pm/V}. \tag{8.39}$$

Naloga 8.3.3 Izračunaj največjo možno efektivno nelinearno susceptibilnost za frekvenčno podvajanje svetlobe z valovno dolžino 10 μm v kristalu telurja s simetrijsko grupo 32 (glej tabelo 8.1). Lomni količniki: $n_o^{\omega} = 4,7969$, $n_e^{\omega} = 6,2455$, $n_o^{2\omega} = 4,8657$ in $n_e^{2\omega} = 6,3152$.

8.4 Frekvenčno podvajanje Gaussovih snopov

Doslej smo vpadni in frekvenčno podvojeni snop obravnavali kot ravni valovanji, ki sta bili razsežni v prečni smeri. Izračunali smo, da v primeru ujemanja faz ($\Delta k = 0$) moč frekvenčno podvojene svetlobe narašča s kvadratom dolžine poti po nelinearnem sredstvu. Pretvorba v frekvenčno podvojeno svetlobo je po enačbi (8.25) tem učinkovitejša, čim večja je gostota svetlobnega toka pri osnovni frekvenci. Zato v praksi vpadno svetlobo vselej fokusiramo in tako povečamo gostoto toka.

Poglejmo, kako se enačbe spremenijo, če je vpadni snop pri osnovni frekvenci Gaussove oblike. Rezultat lahko ocenimo, če vzamemo, da je efektivna dolžina za pretvorbo L kar dolžina grla; izven grla je gostota toka znatno manjša kot v grlu, s tem pa tudi izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeni snop. Dolžina grla je

$$L = 2z_0 = \frac{2n\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{nw_0^2\omega}{c_0}. \tag{8.40}$$

Tako je presek vpadnega snopa

$$S = \pi w_0^2 = \frac{\pi c_0 L}{n\omega.} \tag{8.41}$$

Daljše ko je grlo in večja dolžina L, na kateri pride do frekvenčnega podvajanja, večji je tudi presek snopa S in zato manjša intenziteta svetlobe, kar zmanjša učinek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje. Vstavimo S v enačbo (8.25), upoštevamo ujemanje faz in dobimo

$$\boxed{\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^3\chi_{ef}^2}{2\pi n_{2\omega}n_\omega c_0^4\varepsilon_0}P_\omega L.} \tag{8.42}$$

Ob optimalnem fokusiranju je torej izkoristek pretvorbe sorazmeren z dolžino kristala in ne z njenim kvadratom.

Naloga 8.4.1 Imamo 1 cm dolg kristal KH_2PO_4. Valovna dolžina vpadne svetlobe je $1,06$ μm, vhodna moč $P_\omega = 10$ kW, efektivna nelinearna susceptibilnost $\chi_{ef} = 7\cdot 10^{-13}$ m/V, $\Delta k = 0$ in $n = 1,5$. Pokaži, da je faktor pretvorbe v frekvenčno podvojeno svetlobo okoli 20 %.

Da je dolžina grla $2z_0 = 1$ cm, mora biti polmer grla okoli 40 μm. Gostota svetlobnega toka v kristalu je pri tem $2\cdot 10^8$ W/cm^2, kar je že blizu praga za poškodbe, predvsem na vstopni ali izstopni površini. Zato je pri podvajanju frekvenc zelo pomembna odpornost nelinearnega kristala proti poškodbam zaradi velike gostote svetlobnega toka. To in možnost izpolnitve kriterija ujemanja faz sta poglavitna kriterija pri izbiri snovi za frekvenčno podvajanje.

8.5 *Račun podvajanja Gaussovih snopov

V prejšnjem razdelku smo na hitro grobo ocenili vpliv oblike Gaussovih snopov na frekvenčno podvajanje. Naredimo zdaj še natančnejši izračun. Vrnimo se k valovni enačbi (8.11), vpadna snopa naj bosta pri frekvencah ω_1 in ω_2, nastajajoč snop pa pri frekvenci $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Podobno kot prej naj ima vsako od polj obliko

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{2}\left[\tilde{A}_i(r,z)\,e^{i(k_iz-\omega_it)} + \tilde{A}_i^*(r,z)\,e^{-i(k_iz-\omega_it)}\right], \tag{8.43}$$

pri čemer je $\tilde{A}(r,z)$ zdaj funkcija tako vzdolžne kot tudi prečne koordinate. Privzeli bomo, da se vzdolž z le počasi spreminja. Zaradi poenostavljenega zapisa vpeljimo novo spremenljivko

$$\psi_i = \sqrt{\frac{n_i}{\omega_i}}\tilde{A}_i. \tag{8.44}$$

Tako je nastavek za električno poljsko jakost

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{2}\sqrt{\frac{\omega_i}{n_i}}\psi_i(r,z)e^{i(k_iz-\omega_it)} + \text{ k. k.} \tag{8.45}$$

Vstavimo nastavek (8.45) v valovno enačbo (8.11) in ločimo na levi in desni člene z enako frekvenco. Zaradi počasnega spreminjanja vzdolž smeri z lahko zanemarimo tudi druge odvode ψ po z. Od tod sledi sklopljen sistem obosnih enačb

$$\begin{aligned}
\nabla_\perp^2\psi_1 + 2ik_1\psi_1' &= -\frac{k_1}{2}\kappa\psi_2^*\psi_3 e^{-i\Delta kz} && (8.46)\\
\nabla_\perp^2\psi_2 + 2ik_2\psi_2' &= -\frac{k_2}{2}\kappa\psi_1^*\psi_3 e^{-i\Delta kz} && (8.47)\\
\nabla_\perp^2\psi_3 + 2ik_3\psi_3' &= -\frac{k_3}{2}\kappa\psi_1\psi_2 e^{i\Delta kz} && (8.48)
\end{aligned}$$

s pripadajočim sistemom konjugiranih enačb. Pri tem je

$$\kappa = \frac{\chi_{ef}}{c_0}\sqrt{\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{n_1n_2n_3}}. \tag{8.49}$$

S črtico smo označili odvajanje po z. Gornji sistem enačb je očitno posplošitev sistema enačb (8.18 do 8.20) za primer, ko je valovanje odvisno tudi od prečne koordinate. Reševanje tega nelinearnega sistema parcialnih diferencialnih enačb je v splošnem zelo zapleteno.

Poglejmo le najenostavnejši primer frekvenčnega podvajanja, ko je $\omega_3 = 2\omega_1 = 2\omega$. Vpadna snopa naj bosta enaka in Gaussove oblike (enačba 3.29), njuna amplituda pa naj bo enaka A_1

$$\psi_1 = \psi_2 = A_1\frac{1}{1+iz/z_1}\exp\left(-\frac{r^2}{w_1^2(z)} + \frac{ik_1r^2}{2R_1(z)}\right). \tag{8.50}$$

Privzemimo še, da je izpolnjen pogoj za ujemanje faz, $\Delta k = 0$, in da je ψ_3 dovolj majhen, da nam zmanjševanja ψ_1 ni treba upoštevati. Tudi za podvojeni snop privzemimo Gaussovo obliko, njegova amplituda A_3 pa naj le počasi narašča. Zapišemo ga kot

$$\psi_3 = A_3(z)\psi_{3H}(z,r) = A_3(z)\frac{1}{1+iz/z_3}\exp\left(-\frac{r^2}{w_3^2(z)} + \frac{ik_3r^2}{2R_3(z)}\right), \tag{8.51}$$

pri čemer ψ_{3H} reši homogeno obosno valovno enačbo (3.5). Ko izraza za ψ_1 in ψ_3 vstavimo v tretjo enačbo sistema sklopljenih enačb (8.48), ostane na levi le člen oblike $2ik_3A_3'(z)\psi_{3H}$. Tako dobimo pogoj

$$A_3'(z)\frac{1}{1+iz/z_3}\exp\left(-\frac{r^2}{w_3^2(z)} + \frac{ik_3r^2}{2R_3(z)}\right) = \frac{i\kappa}{4}A_1^2\frac{1}{(1+iz/z_1)^2}\exp\left(-\frac{2r^2}{w_1^2(z)} + \frac{ik_1r^2}{R_1(z)}\right). \tag{8.52}$$

Poiščimo rešitev te enačbe v obliki, za katero velja $w_{30}^2 = w_{10}^2/2$. Tedaj je

$$z_3 = \frac{k_3w_{30}^2}{2} = \frac{2k_1w_{10}^2}{4} = z_1 \tag{8.53}$$

in je tudi $w_3^2(z) = w_1^2(z)/2$. Poleg tega je $R_3(z) = R_1(z)$ in lahko na obeh straneh pokrajšamo eksponentna faktorja. Ostane

$$A_3'(z) = \frac{i\kappa}{4}A_1^2\frac{1}{1+iz/z_1}. \tag{8.54}$$

Gornjo enačbo seveda brez težav integriramo. Naj bo grlo vpadnega snopa ravno na sredini nelinearnega sredstva, tako da integriramo od $-L/2$ do $L/2$

$$\begin{aligned}
A_3(L) &= \frac{i\kappa}{4}A_1^2\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{1+iz/z_1} = \frac{\kappa}{4}A_1^2z_1\ln\frac{1+i\frac{L}{2z_1}}{1-i\frac{L}{2z_1}} = \\
&= \frac{\kappa}{2}A_1^2z_1\arctan\frac{L}{2z_1}\,. && (8.55)
\end{aligned}$$

Moč Gaussovega snopa je

$$P_i = \pi w_{i0}^2 \frac{1}{2} c_0 n_i \varepsilon_0 E_{i0}^2 = \frac{\pi}{2} w_{i0}^2 \varepsilon_0 c_0 \omega_i A_i^2, \tag{8.56}$$

tako da je izkoristek pri frekvenčnem podvajanju Gaussovega snopa

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{A_3^2}{A_1^2} = \frac{\chi_{ef}^2 \omega^3 P_\omega z_1}{2\pi c_0^4 \varepsilon_0 n_1 n_3} \arctan^2\left(\frac{L}{2z_1}\right) = \frac{\chi_{ef}^2 \omega^3 P_\omega}{2\pi c_0^4 \varepsilon_0 n_1 n_3} \frac{L}{2} \arctan^2\left(\frac{L}{2z_1}\right) \frac{1}{L/2z_1}. \tag{8.57}$$

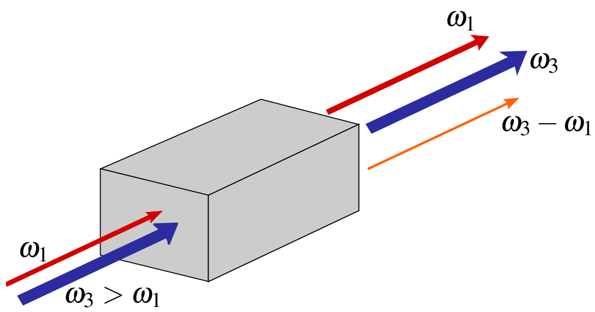
Funkcija $(\arctan^2 x)/x$ zavzame največjo vrednost 0,64 pri $x = L/2z_1 = 1,39$. Pri dani dolžini nelinearnega sredstva L je torej izkoristek največji, kadar je $z_1 = 0,36L$, kar je malo manj kot pri preprosti oceni $z_1 = 0,5L$ (enačba 8.40). Največji izkoristek frekvenčnega podvajanja Gaussovih snopov je tako

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = 0,32 \frac{\chi_{ef}^2 \omega^3}{2\pi c_0^4 \varepsilon_0 n_1 n_3} P_\omega L. \tag{8.58}$$

To je malo manj od preproste ocene, ki smo jo naredili v prejšnjem razdelku (enačba 8.42), v obeh primerih pa izkoristek narašča linearno z dolžino kristala.

8.6 Optično parametrično ojačevanje

Oglejmo si še en zelo uporaben primer mešanja treh valovanj, ki ga opisujejo enačbe (8.18) do (8.20). Gre za optično parametrično ojačevanje, pri katerem nelinearne optične pojave izkoristimo za ojačevanje optičnih signalov. Imejmo vhodni signal pri frekvenci ω_1, ki ga želimo ojačati, in močno črpalno valovanje pri frekvenci $\omega_3 > \omega_1$. Zaradi nelinearnosti v snovi se intenziteta valovanja pri ω_1 povečuje, intenziteta valovanja pri ω_3 zmanjšuje, hkrati pa zaradi ohranitve energije nastaja dodatno valovanje pri razliki frekvenc $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. Proces parametričnega ojačevanja si torej lahko predstavljamo kot pretvorbo enega fotona pri frekvenci ω_3 v dva fotona pri ω_1 in ω_2. Parametrično ojačevanje pogosto uporabljamo za ojačevanje šibkih signalov v infrardečem območju.



Slika 8.6: Shematski prikaz nastanka valovanj pri optičnem parametričnem ojačevanju

Izhajamo iz splošnih enačb za nelinearne optične pojave drugega reda (enačbe 8.18 do 8.20).

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\omega_3 \chi_{ef}}{4c_0 n_3} A_1 A_2 e^{-i\Delta kz} \tag{8.59}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2 \chi_{ef}}{4c_0 n_2} A_1^* A_3 e^{i\Delta kz} \tag{8.60}$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1 \chi_{ef}}{4c_0 n_1} A_2^* A_3 e^{i\Delta kz}. \tag{8.61}$$

Privzemimo, da je črpalno valovanje vselej dosti močnejše od drugih dveh ($A_3 \gg A_1$, A_2) in njegova jakost približno konstantna $A_3 = A_{30}$. Poskrbimo še, da je izpolnjen pogoj za ujemanje faz, $\Delta k = 0$, začetna pogoja pa zapišemo kot $A_1(z = 0) = A_{10}$ in $A_2(z = 0) = 0$. Ko vse to upoštevamo, dobimo dve sklopljeni enačbi

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1\chi_{ef}}{4c_0n_1}A_2^*A_{30} \quad \text{in} \tag{8.62}$$

$$\frac{dA_2^*}{dz} = -\frac{i\omega_2\chi_{ef}}{4c_0n_2}A_1A_{30}^*. \tag{8.63}$$

Enačbi lahko rešimo, tako da prvo odvajamo po z in vanjo vstavimo drugo enačbo. Sledi

$$\frac{d^2A_1}{dz^2} = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}A_1 = \kappa^2A_1 \tag{8.64}$$

in podobno za A_2

$$\frac{d^2A_2}{dz^2} = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}A_2 = \kappa^2A_2. \tag{8.65}$$

Ob upoštevanju začetnih pogojev izračunamo rešitev za naraščanje amplitude signalnega žarka z začetno amplitudo A_{10}

$$\boxed{A_1 = A_{10}\cosh(\kappa L).} \tag{8.66}$$

Hkrati z njim narašča tudi amplituda dodatnega nedejavnega (*idle*) žarka, ki nastane med procesom ojačanja

$$\boxed{A_2 = A_{20}\sinh(\kappa L).} \tag{8.67}$$

V gornjih enačbah je L dolžina nelinearnega sredstva,

$$\kappa^2 = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2} \tag{8.68}$$

in

$$A_{20} = i\sqrt{\frac{\omega_2n_1}{\omega_1n_2}}A_{10}. \tag{8.69}$$

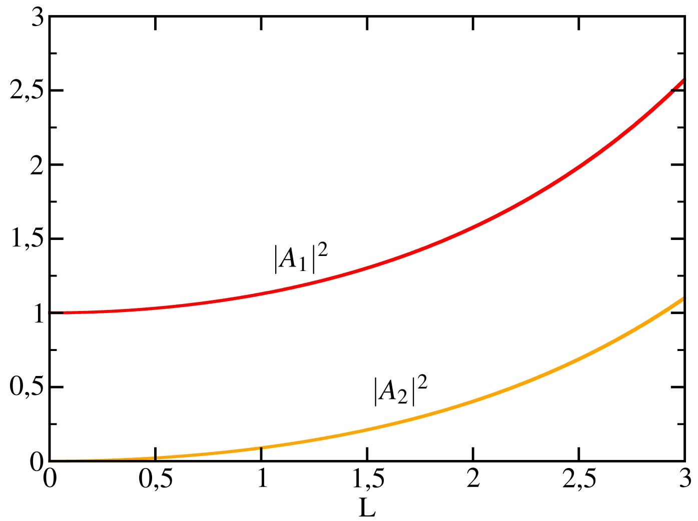
Na začetku intenziteti obeh valovanj naraščata približno eksponentno na račun črpalnega valovanja. Ko postane njuna intenziteta znatna in se začne A_3 zmanjševati, je treba to seveda tudi upoštevati pri izračunu. V tem primeru je treba rešiti bolj zahteven sistem treh sklopljenih enačb, podobno – a še bolj zapleteno – kot v nalogi (8.3.1).

Naloga 8.6.1 Pokaži, da sta izraza za amplitudi polji A_1 in A_2 (enačbi 8.66 in 8.67) rešitvi sklopljenih enačb (8.62) in (8.63) ob parametrih A_{20} in κ, kot sta zapisana v enačbah (8.68) in (8.69).

Do zdaj smo vedno privzeli, da je izpolnjen pogoj ujemanja faz in $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = 0$. Ta pogoj lahko izpolnimo na enak način kot pri podvajanju frekvence: v dvolomnem kristalu izberemo ustrezno smer glede na optično os in ustrezne polarizacije, tako da velja $\omega_3n_3 = \omega_1n_1 + \omega_2n_2$.

Lahko na primer vzamemo izredno polarizacijo za črpalno valovanje in redni polarizaciji za obe ojačevani valovanji, podobno kot pri podvajanju frekvence. Tedaj mora biti izpolnjen naslednji pogoj

$$\left[\left(\frac{\cos\vartheta_m}{n_o^{\omega_3}}\right)^2+\left(\frac{\sin\vartheta_m}{n_e^{\omega_3}}\right)^2\right]^{-1/2}=\frac{\omega_1}{\omega_3}n_o^{\omega_1}+\frac{\omega_2}{\omega_3}n_o^{\omega_2}. \tag{8.70}$$



Slika 8.7: Normirani intenziteti ojačanega žarka in dodatnega žarka, ki nastane zaradi ohranitve energije. Naraščajoči funkciji sta seveda samo približek, ki velja, dokler je ojačanje majhno in se intenziteta črpalnega žarka ne zmanjšuje znantno.

Naloga 8.6.2 Obravnavali smo optično parametrično ojačevanje, ko je bil izpolnjen kriterij za ujemanje faz. Pokaži, v primeru neujemanja faz $\Delta k \neq 0$ amplitudi ojačevanega in dodatnega žarka naraščata kot

$$A_1=A_{10}\left(\cosh(\kappa z)-\frac{i\Delta kz}{2\kappa}\sinh(\kappa z)\right)e^{\frac{i\Delta kz}{2}} \qquad A_2=A_{20}\sinh(\kappa z)e^{\frac{i\Delta k}{2}}, \tag{8.71}$$

pri čemer sta

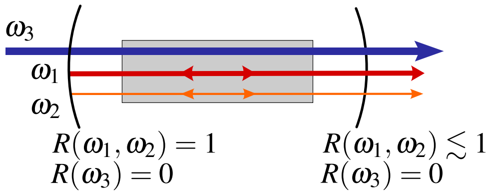
$$\kappa^2=\frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}-\frac{\Delta k^2}{4} \quad \text{in} \quad A_{20}=i\sqrt{\frac{\omega_2 n_1}{\omega_1 n_2}}\sqrt{1+\frac{\Delta k^2}{4\kappa^2}}A_{10}. \tag{8.72}$$

Hitro uvidimo, da so gornje enačbe v limitnem primeru $\Delta k=0$ enake enačbam (8.66, 8.67 in 8.68).

Za konec ocenimo koeficient ojačanja v nelinearnem kristalu $LiNbO_3$, v katerem želimo ojačati svetlobo z valovno dolžino $\lambda = 1$ µm. Črpajmo z laserjem z valovno dolžino okoli 500 nm in gostoto svetlobnega toka 5 MW/cm^2. Lomni količnik snovi je $n=2,2$, $\chi_{ef}=5$ pm/V. Vstavimo podatke v enačbo (8.68) in dobimo vrednost $\kappa \sim 0,15$ /cm. Faktor ojačanja vpadne intenzitete svetlobe v 1 cm dolgem kristalu je tako le približno 2 %.

Optični parametrični oscilator (OPO)

Gornji izračun kaže, da optično parametrično ojačevanje pri prehodu skozi kristal ni prav veliko kljub dokaj močnemu črpalnemu žarku. Zato je smiselno, da svetloba skozi ojačevalno sredstvo preide večkrat in se postopoma ojačuje. To naredimo tako, da optično ojačevalno sredstvo zapremo v optični resonator in signal se ob vsakem obhodu ojača. Sestavili smo t. i. optični parametrični oscilator.



Slika 8.8: Shematski prikaz tipičnega optičnega parametričnega oscilatorja. Ojačevalno sredstvo zapremo med resonatorja, da se signalni žarek (ω_1) ob vsakem preletu ojači.

V optičnemu resonatorju je odbojnost zrcal za črpalni žarek (ω_3) zelo majhna, odbojnost za ojačani žarek pa blizu ena. Valovanje pri ω_1, ki se v parametričnem oscilatorju ojačuje, nastane spontano, prav tako valovanje pri $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. Njuni frekvenci sta dodatno določeni s pogojem za ujemanje faz $k_3 - k_1 - k_2 = 0$, hkrati pa mora ojačevano nihanje sovpadati z lastnim nihanjem resonatorja. S sukanjem ojačevalnega kristala lahko na ta način spreminjamo ojačano frekvenco in naredili smo nastavljiv izvor svetlobe, navadno infrardeče.

Za delovanje oscilatorja mora biti jakost črpalnega žarka tako velika, da je parametrično ojačevanje na obhod večje od izgub. Izračunajmo za primer zgoraj narisanega oscilatorja. Signal z močjo P_0 se ob prehodu skozi ojačevalno sredstvo ojača (enačba 8.66)

$$P_1 = P_0 \cosh^2(\kappa L), \tag{8.73}$$

hkrati pa se zaradi izhodnega zrcala z odbojnostjo R in notranjih izgub Λ_0 intenziteta žarka zmanjšuje. Pri tem je pogoj ujemanja faz izpolnjen le v eni smeri in se svetloba ojačuje le enkrat na celoten obhod. Ob preletu v drugo smer je namreč $\Delta k \neq 0$ in žarek se ne ojačuje. Moč žarka po obhodu P_2 je enaka začetni moči P_0, saj je pri pragu ojačanje ravno enako izgubam

$$P_2 = P_1\,(1 - \Lambda_0)R = P_0\,(1 - \Lambda_0)R \cosh^2(\kappa L) = P_0 \tag{8.74}$$

oziroma

$$(1 - \Lambda_0)\,R \cosh^2(\kappa L) = 1. \tag{8.75}$$

Iz gornjega pogoja določimo parameter κ, po enačbi (8.68) pa mejno amplitudo in intenziteto črpalnega žarka. Nadaljujmo še prejšnji primer ojačanja svetlobe v 1 cm dolgem kristalu $LiNbO_3$. Če je odbojnost izhodnega zrcala $R = 0,85$, notranje izgube $\Lambda_0 = 0,05$ in prečni presek žarka 10 μm^2, je moč praga $P_{\omega_3} = 5$ W.

★ Optični parametrični oscilator torej oddaja svetlobo, podobno kot laser. Tudi sicer sta si do neke mere podobna: oba sistema potrebujeta močen črpalni mehanizem, oba sistema sta sestavljena iz resonatorja, v katerem se žarek velikokrat odbije in postopoma ojača, in oba oddajata koherentno svetlobo pri točno določeni valovni dolžini. Vendar je med parametričnim oscilatorjem in laserjem velika razlika. Pri laserju pride do ojačanja svetlobe zaradi obrnjene zasedenosti stanj, pri oscilatorju pa zaradi nelinearnega optičnega pojava. Ker pri oscilatorju energija ni shranjena v snovi, ampak se ojača sproti, je zelo pomembno, da sunek črpalnega laserja vpade na kristal istočasno kot ojačevan žarek. Velika prednost oscilatorjev pred laserji je zvezno nastavljiva frekvenca delovanja v zelo širokem frekvenčnem območju.

8.7 Optično usmerjanje in teraherčno valovanje

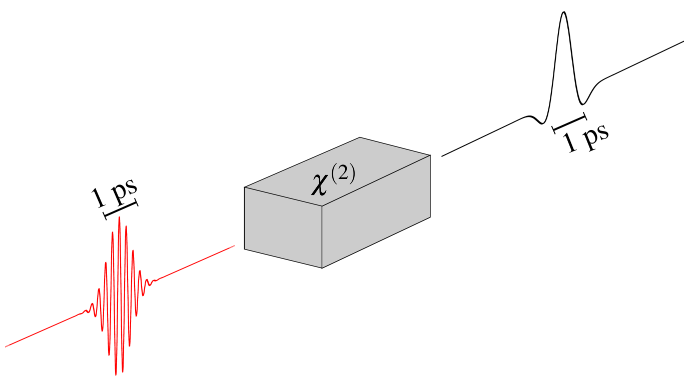
Ko smo obravnavali nelinearne optične pojave drugega reda, smo zapisali različne frekvence, ki so vsebovane v izhodnem signalu (slika 8.1). Eno izmed izhodnih valovanj ima tudi frekvenco enako nič, kar pomeni, da je to statično električno polje. Iz analogije z elektronskimi vezji, kjer izmenično napetost z usmernikom spremenimo v enosmerno napetost, pojav imenujemo optično usmerjanje, saj iz svetlobnega valovanja nastane statično polje. Tako statično polje navadno ni veliko, saj sunek svetlobe z vršno močjo nekaj MW tipično povzroči nekaj deset mV napetosti v smeri prečno na smer potovanja svetlobe.

Naloga 8.7.1 Pokaži, da je napetost, ki se pojavi pri optičnem usmerjanju, približno enaka

$$U = \frac{\chi P_0}{n^3 \varepsilon_0 c_0 a}, \tag{8.76}$$

pri čemer je P_0 moč vpadne svetlobe, n lomni količnik snovi in a širina kristala. Namig: nelinearen kristal obravnavaj kot ploščati kondenzator. Oceni še napetost, če je $\chi = 3$ pV/m, $P_0 = 1$ MW, $n = 2{,}2$ in $a = 5$ mm.

Precej bolj uporaben je pojav, ko na nelinearen kristal posvetimo z ultrakratkimi sunki svetlobe, tipično okoli ps ali krajšimi. Spomnimo se, da je povsem monokromatsko valovanje lahko samo tako, ki ima neskončnen koherenčni čas in je časovno neomejeno (2.18). Če je valovanje časovno omejeno, je njegov spekter končno širok, pri čemer imajo krajši sunki svetlobe širši spekter valovanja. Ko z ultrakratkim sunkom osvetlimo optično nelinearen kristal, v kristal vstopajo vse frekvence z danega intervala $\omega \pm \Delta\omega$. Optično usmerjanje ni več popolno, saj se frekvence ne odštejejo povsem, ampak se namesto statičnega polja pojavi valovanje pri frekvencah, ki so podobne širini spektra. Ocenimo jih.



Slika 8.9: Shematski prikaz nastanka teraherčnega valovanja v optično nelinearnem sredstvu

S sunkom, ki je dolg 1 ps, tako dobimo

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{10^{-12}\ \text{Hz}} = 1\ \text{THz}. \tag{8.77}$$

Valovanje, ki nastane pri takem kvazi optičnem usmerjanju, ima torej frekvence v teraherčnem področju in naredili smo izvor teraherčnega valovanja. Teraherčno valovanje, to je elektromagnetno valovanje s frekvencami v območju od 0,3 do 3 THz oziroma z valovnimi dolžinami med 0,1 in 1 mm, se uporablja za neinvazivno slikanje in preiskave tkiv in materialov. Kristali, ki se najpogosteje uporabljajo za nastanek teraherčnega valovanja, so ZnTe, GaP, GaSe in GaAs.

8.8 Nelinearni pojavi tretjega reda

Doslej smo obravnavali najnižji red nelinearnosti, katerega glavni učinek je mešanje treh frekvenc, na primer podvajanje frekvence ali parametrično ojačevanje. Ti pojavi so možni le v kristalih brez centra inverzije. Naslednji člen razvoja nelinearne polarizacije po električnem polju obstaja v vsaki snovi. V njem nastopa polje v tretji potenci

$$\mathbf{P}_{\mathrm{NL},3} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} \tag{8.78}$$

oziroma izpisano po komponentah

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},3})_i = \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l . \tag{8.79}$$

Pri tem je $\chi^{(3)}$ tenzor četrtega ranga, tipična velikost pa je okoli 10^{-22} m^2/V^2. V splošnem ima 81 različnih neodvisnih komponent, to število pa se lahko zelo zmanjša zaradi simetrije snovi. V izotropni snovi je tako 21 neničelnih elementov, od katerih so le trije neodvisni.

Če vsebuje vpadno polje le eno frekvenco, se zaradi nelinearnosti tretjega reda pojavi polarizacija pri 3ω in ω. Pri dveh vpadnih frekvencah ω_1 in ω_2 so možne kombinacije $2\omega_1 \pm \omega_2$ in $\omega_1 \pm 2\omega_2$, pri treh vpadnih frekvencah pa vse možne vsote in razlike frekvenc, to so ω_1, ω_2, ω_3, $3\omega_1$, $3\omega_2$, $3\omega_3$, $\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $\omega_1+\omega_2-\omega_3$, $\omega_1-\omega_2+\omega_3$, $-\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $2\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_1 \pm \omega_3$, $2\omega_2 \pm \omega_1$, $2\omega_2 \pm \omega_3$, $2\omega_3 \pm \omega_1$, $2\omega_3 \pm \omega_2$. Možnosti je torej precej več kot pri nelinearnosti drugega reda in računi so zato v splošnem precej zapletenejši.

Obravnava nastanka valovanja pri kombinaciji frekvenc je zelo podobna obravnavi podvajanja frekvence in parametričnemu ojačevanju. V enačbah za nastanek novega valovanja ali ojačevanje katerega od vpadnih snopov spet nastopi fazni faktor, ki vsebuje razliko vseh valovnih vektorjev $\Delta\mathbf{k}$. Da bo nastajanje novega valovanja znatno, mora biti $\Delta k L \simeq 0$, spet mora biti torej izpolnjen pogoj ujemanja faz. Ker v tem primeru nastopajo v splošnem štirje valovni vektorji, je seveda tudi pri izbiri geometrije in polarizacij za ujemanje faz precej več možnosti.

Vrnimo se k najpreprostejšemu primeru, ko ima vpadno valovanje le eno frekvenco. Takrat se pojavi valovanje pri potrojeni frekvenci, pa tudi pri frekvenci, ki je enaka vpadni. Pojavi se torej polarizacija pri vpadni frekvenci, ki spremeni obnašanje osnovnega žarka, in žarek vpliva sam nase. Ti pojavi, ki jih poimenujemo s predpono *samo-*, kot na primer samozbiranje, so značilni za nelinearne pojave tretjega reda.

8.9 Optični Kerrov pojav

Naj valovanje vpada na nelinearno snov, za katero velja $\chi^{(2)} = 0$. Polarizacija je potem enaka vsoti linearnega in nelinearnega dela tretjega reda (enačba 8.4)

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} . \tag{8.80}$$

Ker obravnavamo nelinearne pojave, moramo tudi v tem primeru zapisati realna električna polja. To naredimo z vsoto dveh kompleksno konjugiranih členov

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{e}}{2}\left(A e^{i(kz-\omega t)} + A^* e^{-i(kz-\omega t)}\right). \tag{8.81}$$

Podobno zapišemo tudi za polarizacijo, pri čemer nas bodo zanimali samo členi, ki nihajo s frekvenco ω

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{e}}{2}\left(P_\omega e^{i(kz-\omega t)} + P_\omega^* e^{-i(kz-\omega t)}\right). \tag{8.82}$$

Ti členi nastopijo v primeru, ko v izrazu $\mathbf{E}\,\mathbf{E}\,\mathbf{E}$ vzamemo dvakrat nekonjugirani del, enkrat pa konjugiranega. To lahko naredimo na tri možne načine in dobimo tri enake člene. Sledi

$$\frac{\mathbf{e}}{2}P_{\omega,\mathrm{NL}} = 3\frac{1}{8}AA^*\left(\varepsilon_0\chi^{(3)}\vdots\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}\right)A. \tag{8.83}$$

Celotna polarizacija je

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi^{(1)}\cdot\mathbf{E} + \frac{3}{4}|A|^2\left(\varepsilon_0\chi^{(3)}\vdots\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}\right)\mathbf{E}. \tag{8.84}$$

Z upoštevanjem zveze med amplitudo polja in povprečno gostoto energijskega toka (enačba 1.31) zapišemo

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\left(\chi^{(1)} + \frac{3}{4}\frac{2j}{\varepsilon_0\tilde{n}c_0}\chi^{(3)}\vdots\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}\right)\mathbf{E}. \tag{8.85}$$

Z $\tilde{n}$ smo označili lomni količnik pri frekvenci ω. Faktor v oklepaju ni nič drugega kot efektivna susceptibilnost, ki je neposredno povezana z lomnim količnikom snovi $\chi_{ef} = \varepsilon - 1 = n^2 - 1$. Gornja enačba torej opisuje pojav, pri katerem vpadna svetloba vpliva na lomni količnik snovi. Gre za podoben učinek kot pri Kerrovem pojavu (enačba 9.5), pri katerem se lomni količnik spremeni pod vplivom zunanjega električnega polja, zato imenujemo opisan pojav optični Kerrov pojav[4].

Poglejmo pojav podrobneje na primeru izotropne snovi. Na snov naj vpada valovanje, ki je polarizirano v smeri x, tako da ima nelinearna polarizacija le komponento

$$P_{\mathrm{NL},x} = \varepsilon_0\left(\chi_{xx} + \frac{3}{4}\chi_{xxxx}\frac{2j}{\varepsilon_0\tilde{n}c_0}\right)E = \varepsilon_0\chi_{ef}E = \varepsilon_0(n^2-1)E. \tag{8.86}$$

Ko izrazimo lomni količnik, dobimo

$$n \approx \tilde{n} + \frac{3\chi_{xxxx}}{4\varepsilon_0 c_0\tilde{n}^2}j. \tag{8.87}$$

Efektivni lomni količnik v snovi lahko torej zapišemo kot

$$\boxed{n = \tilde{n} + n_2 j,} \tag{8.88}$$

pri čemer smo vpeljali nelinearni lomni količnik

$$\boxed{n_2 = \frac{3\chi_{xxxx}}{4\varepsilon_0 c_0\tilde{n}^2}.} \tag{8.89}$$

Efektivni lomni količnik snovi je torej odvisen od intenzitete svetlobe, ki vpada nanjo. Tipične vrednosti nelinearnega lomnega količnika za vidno svetlobo so 10^{-20} m^2/W. V tekočini CS_2 je $n_2 = 3{,}2\cdot 10^{-18}$ m^2/W, v nekaterih drugih snoveh (npr. polprevodnikih) je lahko vrednost n_2 večja še za več velikostnih redov, n_2 pa je lahko tudi negativen.

Zanimivi posledici lomnega količnika, odvisnega od intenzitete svetlobe, sta samozbiranje svetlobnega snopa in širjenje solitonov po optičnih vodnikih, kar si bomo pogledali v naslednjih razdelkih.

★ Ničesar nismo povedali o ujemanju faz, ki je sicer nujno potrebno za učinkovite nelinearne optične pojave. V tem primeru vpada na snov en sam laserski žarek in pogoj ujemanja faz je vedno izpolnjen.

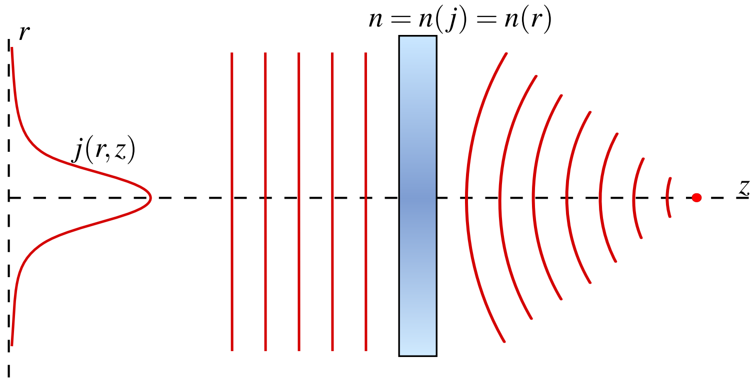
[4] Škotski fizik John Kerr, 1824–1907.

Snov	$\chi^{(3)}$ (m^2/V^2)	n_2 (m^2/W)
steklo BK7	$2{,}8 \times 10^{-22}$	$3{,}2 \times 10^{-20}$
voda	$2{,}5 \times 10^{-22}$	$4{,}1 \times 10^{-20}$
GaAs	$1{,}4 \times 10^{-18}$	$3{,}3 \times 10^{-17}$
ZnSe	$6{,}2 \times 10^{-20}$	$3{,}0 \times 10^{-18}$
CS_2	$3{,}1 \times 10^{-20}$	$3{,}2 \times 10^{-18}$
polimer 4BCMU	$-1{,}2 \times 10^{-19}$	$-1{,}5 \times 10^{-17}$

Tabela 8.2: Susceptibilnost tretjega reda in nelinearni lomni količnik za nekaj izbranih snovi

8.10 Samozbiranje

Za začetek si oglejmo pojav samozbiranja svetlobe. Osnovni Gaussov snop (enačba 3.29) naj vpada na sredstvo, v katerem je lomni količnik odvisen od intenzitete po enačbi (8.88). Vzemimo, da je $n_2 > 0$, tako da je lomni količnik v sredini snopa večji od nemotenega lomnega količnika na robu. V osi snopa se optična pot zaradi optično gostejšega sredstva podaljša in valovna fronta začne v osi zaostajati glede na fronte na robu snopa. Če je zaostajanje dovolj veliko, lahko krivinski radij valovne fronte postane negativen in snop se ne širi, temveč oži (slika 8.10). Temu pojavu pravimo samozbiranje. Samozbiranje je pri dovolj veliki moči snopa lahko tako veliko, da pride do katastrofične zožitve snopa in s tem do tolikšnega povečanja gostote svetlobnega toka, da nastanejo poškodbe v snovi.



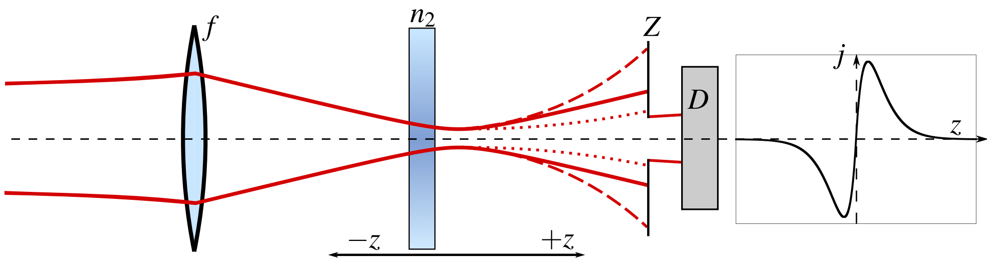
Slika 8.10: V Gaussovem snopu je intenziteta valovanja odvisna od prečne lege, zato je tudi lomni količnik nelinearnega sredstva odvisen od nje. To vodi do samozbiranja svetlobe. Na sliki so fronte Gaussovega snopa narisane kot ravni valovi.

Naloga 8.10.1 Gaussov snop svetlobe z močjo P in polmerom w naj pravokotno vpada na ploščico kristala debeline d. Pokaži, da ploščica deluje na snop kot leča z goriščno razdaljo

$$f = \frac{\pi w^4}{8 n_2 d P}, \tag{8.90}$$

pri čemer je n_2 nelinearni lomni količnik.

Eksperimentalna metoda, s katero merimo nelinearni lomni količnik, je tako imenovana metoda vzdolžnega premika (*Z-scan*). Optično nelinearno sredstvo (naj ima $n_2 > 0$) postavimo v zožan laserski snop (slika 8.11). Zaradi samozbiranja deluje vzorec kot leča, njena goriščna razdalja pa je odvisna od intenzitete snopa in od nelinearnega lomnega količnika. Ko vzorec premikamo vzdolž snopa, se skupna efektivna goriščna razdalja leče in nelinearne snovi spreminja in žarek na detektorju je enkrat bolj zbran, drugič manj. Za lege vzorca desno od prvotnega gorišča ($z > 0$), je skupna goriščna razdalja daljša od goriščne razdalje leče, snop je bolj zbran (pikčasta črta) in signal na detektorju (D) naraste. Za lege vzorca levo od prvotnega gorišča ($z < 0$) je ravno obratno, snop se razširi (črtkana črta) in signal na detektorju se zmanjša. Za snovi z negativnim nelinearnim lomnim količnikom je odziv ravno nasprotnega predznaka. Pri določanju nelinearnga lomnega količnika je ključno uporabiti zaslonko (Z), s katero omejimo premer vpadnega snopa pred vpadom na detektor. Če zaslonko odstranimo in merimo odvisnost celotne vpadne intenzitete od lege vzorca, nelinearnega lomnega količnika ne moremo meriti, lahko pa določimo nelinearni absorpcijski koeficient.



Slika 8.11: Shema metode vzdolžnega premika

Zaradi uklona se Gaussov snop navadno širi, pojav samozbiranja pa ima nasprotni učinek. Zato je pri določeni moči snopa možno doseči, da se oba pojava po velikosti ravno izenačita in snop ima v snovi konstanten polmer, valovne fronte pa so ravne. Snop na ta način samemu sebi ustvarja valovni vodnik, kjer je v sredi lomni količnik večji kot na robu, in nastane t. i. krajevni soliton.

Ocenimo, kolikšna mora biti vpadna moč svetlobe, da pride do pojava krajevnih solitonov. Vzemimo, da je na izbranem mestu valovna fronta ravna. Lahko si mislimo, da je tam grlo Gaussovega snopa. Brez samozbiranja bi bil na razdalji dolžine grla z_0 krivinski radij valovne fronte (enačba 3.25)

$$R(z_0) = z_0\left(1+\left(\frac{z_0}{z_0}\right)^2\right) = 2z_0. \tag{8.91}$$

V bližini osi lahko Gaussovo funkcijo, ki opisuje prečno odvisnost amplitude polja v snopu, razvijemo po prečni koordinati r do drugega reda. Po enačbi (8.88) je odvisnost lomnega količnika približno

$$n(r) = \tilde{n} + n_2 j_0 e^{-2r^2/w_0^2} \approx \tilde{n} + n_2 j_0\left(1-2\frac{r^2}{w_0^2}\right). \tag{8.92}$$

Razlika med lomnim količnikom na osi in pri w_0 od osi je $\Delta n = 2 j_0 n_2$. Zaradi tega je na poti od grla do z_0 razlika optičnih poti med žarkoma na osi $(r = 0)$ in pri $r = w_0$ enaka $\Delta n z_0 = 2n_2 j_0 z_0$ in valovna fronta se ukrivi na nek krivinski radij $-R$. Iz preproste geometrije velja zveza

$$\Delta n z_0 = R - R\sqrt{1-\frac{w_0^2}{R^2}} \approx \frac{w_0^2}{2R} \tag{8.93}$$

Da valovna fronta ostale ravna, morata biti krivinska radija v enačbah (8.91) in (8.93) enaka. Od tod sledi

$$\Delta n = \frac{w_0^2}{4z_0^2}. \tag{8.94}$$

Moč snopa s stacionarnim polmerom je potem

$$P_s = \frac{1}{2}\pi w_0^2 j_0 = \frac{1}{2}\pi w_0^2 \frac{\Delta n}{2n_2} = \frac{1}{2}\pi w_0^2 \frac{w_0^2}{4z_0^2}\frac{1}{2n_2} = \frac{\lambda^2}{16\pi n_2}, \tag{8.95}$$

pri čemer smo upoštevali zvezo med z_0 in w_0 (enačba 3.21).

Zanimivo je, da kritična moč, pri kateri se pojavijo solitoni, ni odvisna od začetnega polmera snopa. Pri moči, ki je manjša od kritične, se vpadli Gaussov snop širi, čeprav nekoliko počasneje kot v sredstvu s konstantnim lomnim količnikom, če pa je moč znatno večja od kritične moči, pa lahko pride do katastrofičnega samozbiranja in porušitve snovi.

Naloga 8.10.2 Nariši skico k enačbi (8.93) in izpelji izraz za moč, pri kateri pride do pojava solitonov (enačba 8.95).

Izračunaj še kritično moč za pojav solitonov v CS_2, če je valovna dolžina vpadnega valovanja 1 µm, nelinearni lomni količnik te tekočine pa je $n_2 = 3,2 \cdot 10^{-18}$ m^2/W.

8.11 *Izpeljava krajevnih solitonov

Za podrobnejšo obravnavo krajevnih solitonov moramo rešiti valovno enačbo v obosnem približku. Začnimo s krajevnim delom valovne enačbe za monokromatsko valovanje v skalarni obliki (enačba 1.23)

$$\nabla^2 E + n^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} E = 0 \tag{8.96}$$

Polje zapišimo v obliki počasi spreminjajoče se amplitude in faznega faktorja, podobno kot smo to naredili pri izpeljavi Gaussovega snopa (enačba 3.4)

$$E = \psi(\mathrm{r}, z) e^{ik_0 z} \tag{8.97}$$

kjer je $k_0 = \tilde{n}\omega/c_0$ valovno število brez upoštevanja nelinearnosti. Funkcija $\psi(\mathbf{r}, z)$ naj se v smeri osi z le počasi spreminja, tako da lahko drugi odvod po z zanemarimo in dobimo

$$\nabla_\perp^2 \psi + \frac{\omega^2}{c_0^2}(n^2 - \tilde{n}^2)\psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{8.98}$$

Upoštevajmo odvisnost lomnega količnika od intenzitete, pri čemer zanemarimo člen z n_2^2, ker je gotovo majhen, in dobimo

$$\nabla_\perp^2 \psi + 2k_0^2 \frac{n_2}{\tilde{n}} j\psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{8.99}$$

Izrazimo še gostoto svetlobnega toka z amplitudo električne poljske jakosti

$$\nabla_\perp^2 \psi + k_0^2 n_2 \varepsilon_0 c_0 |\psi|^2 \psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{8.100}$$

Preden se lotimo reševanja gornje enačbe, vpeljimo še

$$\kappa = k_0^2 n_2 \varepsilon_0 c_0 \tag{8.101}$$

in novo spremenljivko vzdolž osi z

$$\zeta = \frac{z}{2k_0}. \tag{8.102}$$

S tem preide enačba (8.100) v standardno obliko nelinearne Schrödingerjeve enačbe, le da namesto odvoda po času tukaj nastopa odvod po koordinati ζ. Sledi

$$\boxed{i\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \nabla_\perp^2 \psi + \kappa |\psi|^2 \psi = 0.} \tag{8.103}$$

V treh dimenzijah je reševanje enačbe (8.103) težavno in analitične rešitve niso znane. V dveh dimenzijah pa stacionarno rešitev znamo poiskati. Stacionarni rešitvi se vzdolž ζ lahko spreminja le faza, zato rešitev iščemo v obliki

$$\psi = e^{i\eta^2 \zeta} u(x), \tag{8.104}$$

kjer je η konstanta, katere pomen bomo videli v nadaljevanju, funkcija $u(x)$ pa naj bo realna. Uporabimo gornji nastavek v enačbi (8.103) in dobimo

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \eta^2 u - \kappa u^3. \tag{8.105}$$

Z množenjem obeh strani z u' lahko enačbo enkrat integriramo

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \eta^2 u^2 - \frac{1}{2}\kappa u^4. \tag{8.106}$$

Ločimo spremenljivki in zapišemo

$$\int_{\eta\sqrt{2/\kappa}}^{u} \frac{du}{\sqrt{\eta^2 u^2 - \frac{1}{2}\kappa u^4}} = x - x_0, \tag{8.107}$$

pri čemer smo uvedli integracijsko konstanto x_0 in integracijsko mejo postavili tako, da so vrednosti pod korenom pozitivne. Integral brez težav izračunamo

$$\frac{1}{\eta} \ln \left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{u}{\eta + \sqrt{\eta^2 - \kappa u^2/2}} \right) = x - x_0 \tag{8.108}$$

in izrazimo iskano funkcijo $u(x)$

$$u = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \frac{2\eta}{e^{\eta(x-x_0)} + e^{-\eta(x-x_0)}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \frac{\eta}{\cosh \eta (x - x_0)}. \tag{8.109}$$

Po enačbi (8.104) je rešitev

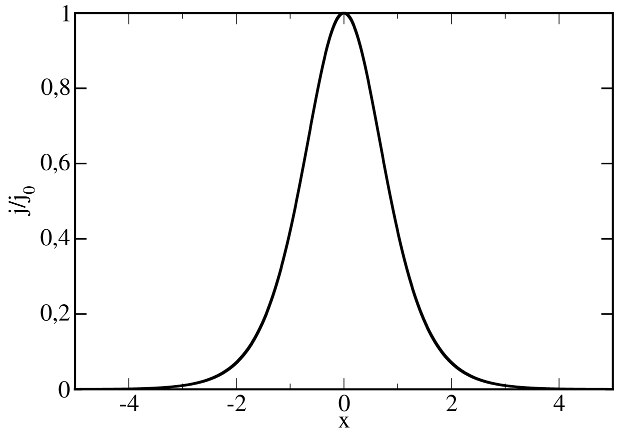
$$\psi(x,z) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \eta \frac{e^{i\eta^2 \zeta}}{\cosh \eta (x - x_0)}. \tag{8.110}$$

Vidimo, da predstavlja spremenljivka $1/\eta$ neko karakteristično širino snopa, x_0 pa je le njegov prečni premik, ki ga lahko brez škode postavimo na $x_0 = 0$. Tako lahko zapišemo celotno polje stacionarnega snopa

$$E_s(x,z) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \frac{\eta}{\cosh(\eta x)} \exp\left(ik_0 z\left(1 + \frac{\eta^2}{2k_0^2}\right)\right). \tag{8.111}$$

Intenziteta svetlobe je sorazmerna kvadratu amplitude polja, zato

$$j_s(x,z) = j_0 \frac{1}{\cosh^2(\eta x)}. \tag{8.112}$$



Slika 8.12: Prečni profil krajevnega solitona v 2D. Vzdolž koordinate z se profil ohranja.

Če se vrnemo k izrazu za električno poljsko jakost (enačba 8.111), vidimo, da je parameter η nastopa tudi v faznem faktorju. To pomeni, da je od njega odvisna tudi konstanta širjenja in s tem fazna hitrost

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\tilde{n}\left(1 + \frac{\eta^2}{2k_0^2}\right)}. \tag{8.113}$$

Fazna hitrost omejenih snopov oziroma solitonov je torej vedno manjša od fazne hitrosti ravnih valov. Bolj ko je snop omejen, manjša je fazna hitrost, za velike polmere snopa pa doseže limitno vrednost $c_0/\tilde{n}$.

Moč dvodimenzionalnega snopa je enaka integralu gostote svetlobnega toka (enačba 8.112) po x. Integriramo in zapišemo

$$P_S = \int j_s dx \propto \int |E_S|^2 dx = \frac{2}{\kappa}\eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 \eta x} = \frac{4\eta}{\kappa}. \tag{8.114}$$

Moč stacionarnega snopa – solitona – v dveh dimenzijah je torej obratno sorazmerna s širino snopa $1/\eta$. Zato tudi pri poljubno veliki moči obstaja stacionarna širina. To je bistvena razlika med obravnavanim dvo- in tridimenzionalnim primerom, kjer se snop z nadkritično močjo skrči v singularnost.

8.12 Optični solitoni

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da pojav samozbiranja svetlobnega snopa lahko izniči širjenje zaradi uklona, tako da ima pri ustrezni moči snop povsod konstantno širino in obliko. Takim snopom smo rekli krajevni solitoni. Povsem podoben pojav poznamo tudi v časovni domeni, kjer se pojavijo časovni ali optični solitoni.

Sunek svetlobe naj se širi po valovnem vodniku. Ker je lomni količnik odvisen od frekvence valovanja, se sunek svetlobe podaljšuje. Več o tem bomo spoznali pri obravnavi disperzije v optičnih vlaknih (poglavje 10.4). Ob primernih pogojih lahko odvisnost lomnega količnika od intenzitete ravno izniči odvisnost lomnega količnika od valovne dolžine in sunek ohranja obliko. Sunkom svetlobe, ki potujejo po sredstvu brez spremembe oblike, pravimo optični solitoni. Posebej so pomembni v optičnih vlaknih, kjer je disperzija izrazita in želimo njen vpliv zaradi učinkovitosti prenosa informacije čim bolj zmanjšati.

Pojava optičnih solitonov ni težko pojasniti. Naj na optično nelinearno sredstvo vpade sunek svetlobe, ki je Gaussove oblike (slika 8.13)

$$j(t) = j_0 e^{-t^2/\tau^2}. \tag{8.115}$$

Faza takega sunka je

$$\phi(t) = k_o n z - \omega_0 t = k_0(\tilde{n} + n_2 j)z - \omega_0 t = \phi_0 + k_0 n_2 z j - \omega_0 t, \tag{8.116}$$

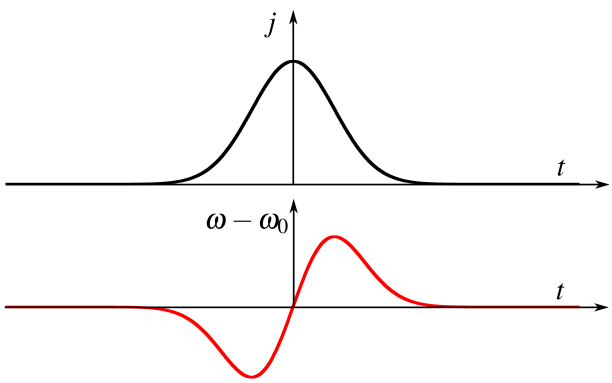
frekvenca pa

$$\omega = -\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - k_0 n_2 z \frac{dj}{dt}. \tag{8.117}$$

Če vstavimo časovno obliko sunka svetlobe (enačba 8.115), vidimo, da se frekvenca takega sunka spreminja s časom

$$\omega = \omega_0 + \frac{2k_0 n_2 z j_0}{\tau^2}\, t\, e^{-t^2/\tau^2}. \tag{8.118}$$

Začetnemu delu sunka (pri $t < 0$) se torej frekvenca zmanjša, zadnjemu delu sunka (pri $t > 0$) pa se mu poveča (slika 8.13). Ta pojav spreminjanja frekvence znotraj kratkega sunka imenujemo čričkanje sunkov (*chirping*), po podobnosti z oglašanjem čričkov.

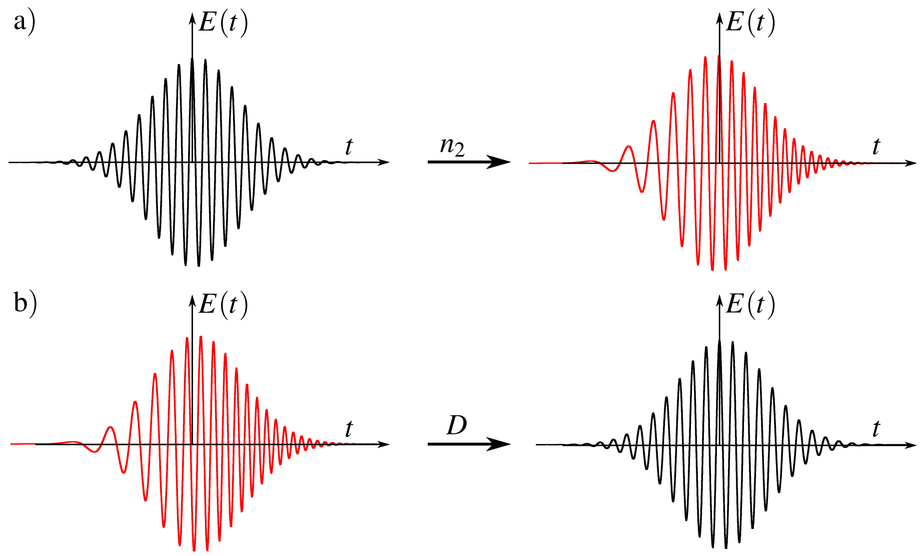


Slika 8.13: Zaradi nelinearnega lomnega količnika pride do frekvenčnega premika v sunku svetlobe.

Pri prehodu optičnega sunka z osnovno frekvenco ω_0 se torej različnim delom sunka frekvenca različno spremeni (slika 8.14 a), začetnemu delu se zmanjša, končnemu pa poveča. Po drugi strani pa v snoveh poznamo barvno disperzijo, kar pomeni, da veljajo za valovanja z različnimi frekvencami različni lomni količniki. Pojav disperzije je še bolj zapleten pri potovanju sunkov svetlobe, kar bomo podrobneje obravnavali pri optičnih vlaknih (poglavje 10.4). Zaenkrat povejmo le, da je pomemben parameter disperzija grupne hitrosti, ki je sorazmerna z drugim odvodom lomnega količnika po valovni dolžini

$$D = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2n}{d\lambda^2}. \tag{8.119}$$

Pri določenih pogojih (izbrana snov in določeno frekvenčno območje) lahko dosežemo, da potuje del valovanja z daljšo valovno dolžino počasneje kot del valovanja s krajšo valovno dolžino (slika 8.14 b). V tem primeru končni del sunka dohiteva sprednjega in učinek disperzije ravno izniči učinek nelinearnosti. Nastane signal, ki ohranja svojo obliko – soliton.



Slika 8.14: Čričkanje sunkov svetlobe zaradi nelinearnega pojava. Z ustrezno disperzijo lahko čričkanje izničimo in nastane sunek svetlobe, ki oblike ne spreminja – soliton.

8.13 *Izpeljava optičnih solitonov

Za matematični opis optičnih solitonov izhajamo iz nelinearne valovne enačbe (enačba 8.11), ki jo zapišemo v skalarni obliki

$$\nabla^2 E - \frac{n^2}{c_0^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}, \tag{8.120}$$

pri čemer je P_{NL} nelinearna polarizacija tretjega reda (enačba 8.6). Namesto v časovni domeni je enačbo prikladnejše reševati v frekvenčni domeni, zato namesto E in P_{NL} vpeljemo Fourierevi transformiranki $\tilde{E}$ in $\tilde{P}$. Sledi

$$\nabla^2 \tilde{E} + \frac{n^2}{c_0^2}\omega^2 \tilde{E} = -\mu_0 \omega^2 \tilde{P}. \tag{8.121}$$

Gornjo enačbo rešujemo z nastavkoma

$$\tilde{E} = \tilde{A}(z,\omega-\omega_0)e^{ik_0z} \quad \text{in} \quad \tilde{P} = \tilde{B}(z,\omega-\omega_0)e^{ik_0z}, \tag{8.122}$$

pri čemer je ω_0 osrednja frekvenca svetlobnega sunka in $k_0 = \omega_0 n/c_0$. Vpeljemo še $\Omega = \omega - \omega_0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\tilde{A}(z,\Omega)e^{ik_0z} = -\mu_0\omega^2\tilde{B}(z,\Omega)e^{ik_0z}. \tag{8.123}$$

Da lahko rešimo to enačbo, naredimo nekaj približkov. Ker je $\omega \approx \omega_0$, na desni strani enačbe nadomestimo frekvenco z osrednjo frekvenco. Poleg tega upoštevamo, da se amplituda glede na valovno dolžino le počasi spreminja, zato drugi odvod zanemarimo in

$$2ik_0\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z} + (k^2 - k_0^2)\tilde{A} = -\mu_0\omega_0^2\tilde{B}. \tag{8.124}$$

Če je disperzija šibka, lahko zapišemo $k^2 - k_0^2$ kot razliko kvadratov, $k(\omega_0 + \Omega)$ pa razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli osrednje frekvence ω_0 do tretjega člena. Sledi

$$k^2 - k_0^2 \approx 2k_0(k - k_0) \approx 2k_0(k'\Omega + \frac{1}{2}k''\Omega^2), \tag{8.125}$$

pri čemer $'$ označuje odvod po frekvenci, in prepišemo enačbo v

$$2ik_0\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z} + 2k_0(k'\Omega + \frac{1}{2}k''\Omega^2)\tilde{A} = -\mu_0\omega_0^2\tilde{B}. \tag{8.126}$$

Vrnimo se v časovno domeno, tako da naredimo inverzno Fourierevo transformacijo. Naj bo $A(z,t)$ kompleksna amplituda električne poljske jakosti in inverzna transformiranka funkcije $\tilde{A}(z,\Omega)$, funkcija $B(z,t)$ pa naj bo amplituda polarizacije in inverzna transformiranka funkcije $\tilde{B}(z,\Omega)$. Sledi

$$i(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t})A - \frac{1}{2}\frac{d^2k}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{\mu_0\omega_0^2}{2k_0}B, \tag{8.127}$$

pri čemer smo z $v_g = d\omega/dk = 1/k'$ označili grupno hitrost. Vpeljimo novo spremenljivko

$$\tau = t - \frac{z}{v_g}, \tag{8.128}$$

s katero opišemo obliko sunka $A_S(z,\tau)$, kot ga vidi opazovalec, ki se giblje z grupno hitrostjo skupaj s sunkom. Uporabimo pravilo verižnega odvajanja in dobimo

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A_S}{\partial z} + \frac{\partial A_S}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial z} = \frac{\partial A_S}{\partial z} - \frac{1}{v_g}\frac{\partial A_S}{\partial\tau}. \tag{8.129}$$

Podobno naredimo še za odvod po času τ, ki pa se ne razlikuje od odvoda po času t

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A_S}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\tau} + \frac{\partial A_S}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial A_S}{\partial\tau} \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A_S}{\partial\tau^2}. \tag{8.130}$$

Vstavimo še amplitudo nelinearne polarizacije (enačba 8.84)

$$B = \frac{3}{4}\varepsilon_0\chi|A|^2 A. \tag{8.131}$$

in enačba (8.127) dobi obliko

$$i\frac{\partial A_S}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{d^2k}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A_S}{\partial \tau^2} + \kappa |A_S|^2 A_S = 0, \tag{8.132}$$

pri čemer je

$$\kappa = \frac{3\omega_0 \chi}{8c_0 \tilde{n}} \tag{8.133}$$

sorazmeren nelinearnemu lomnemu količniku n_2 (enačba 8.89). Enačba (8.132) ni nič drugega kot nelinearna Schrödingerjeva enačba, ki smo jo zapisali že pri izpeljavi krajevnih solitonov (enačba 8.103). Enačbi se razlikujeta v tem, da ima vlogo prečne koordinate x tukaj čas τ in rešitve nimajo več konstantnega premera, ampak imajo konstantno dolžino sunka. Stacionarne rešitve obstajajo le v primeru, kadar je $d^2k/d\omega^2 < 0$ oziroma kadar ima drugi odvod nasprotni predznak od nelinearnega lomnega količnika n_2. Kot pri krajevnih solitonih tudi tukaj vpeljemo parameter η, ki je sorazmeren z energijo solitona (enačba 8.114). Sledi

$$A_S(z,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\eta \frac{e^{i\eta^2 z}}{\cosh\left(\eta\tau\sqrt{2\left|\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|^{-1}}\right)} \tag{8.134}$$

$$A(z,t) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\eta \frac{e^{i\eta^2 z}}{\cosh\left(\eta(t-\frac{z}{v_g})\sqrt{2\left|\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|^{-1}}\right)}. \tag{8.135}$$

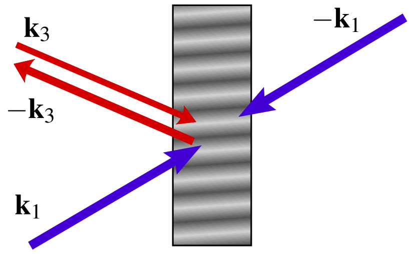
Zapisana je oblika solitona, ki potuje z grupno hitrostjo in pri tem ohranja obliko. Zaradi tega so solitoni izredno zanimivi za prenos velike gostote informacij na velike razdalje, saj se izognemo omejitvam zaradi disperzije.

★ Ena izmed snovi, ki izpolnjuje pogoj, da je k'' nasprotnega predznaka kot n_2, so kvarčna optična vlakna. Pri valovnih dolžinah vidne svetlobe to sicer ne velja, velja pa za $\lambda \gtrsim 1,3$ µm. Pogoj je torej izpolnjen pri valovnih dolžinah okoli $1,5$ µm, ki se navadno uporabljajo pri prenosu signalov po optičnih vlaknih in signal lahko potuje brez podaljševanja.

8.14 Optična fazna konjugacija

Optična fazna konjugacija je zanimiv in danes tudi praktično pomemben pojav, pri katerem nastane iz danega valovanja novo valovanje, ki ima enake valovne fronte, vendar potuje v nasprotni smeri od prvotnega valovanja. Novo valovanje je torej tako, kot bi začetnemu valovanju obrnili predznak časa in ga "zavrteli nazaj".

Vzemimo optično nelinearno snov, na katero posvetimo z dvema močnima ravnima snopoma v nasprotnih smereh. To sta črpalna snopa in njuna valovna vektorja naj bosta $\mathbf{k}_1$ in $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$. Poleg njiju naj na snov vpada še tretji, signalni snop, ki ni nujno raven val (slika 8.15). Signalni snop interferira s prvim črpalnim valom in s tem zaradi nelinearnosti tretjega reda povzroči modulacijo lomnega količnika, ki je skoraj periodična, če je signalni val podoben ravnemu valu. Na tej periodični modulaciji se drugo črpalno valovanje uklanja, pri čemer je uklonjeno valovanje enake oblike kot signalno, le potuje v nasprotni smeri, ker ima drugo črpalno valovanje nasprotno smer od prvega. Črpalni valovanji sta seveda enakovredni in ni mogoče ločiti, s katerim je signalno valovanje interferiralo in katero se uklanja.



Slika 8.15: Optična fazna konjugacija. Dva močna črpalna žarka (modra) vpadata na optično nelinearno snov v nasprotnih smereh, vpadni signal (rdeč) pa se odbije v smer, iz katere vpada.

★ Pozoren bralec je ugotovil, da je optična fazna konjugacija zelo podobna holografiji, le da pri holografiji najprej zapišemo predmetni snop, ki ga kasneje reproduciramo, pri fazni konjugaciji pa zapis začetnega valovanja in njegova reprodukcija potekata sočasno.

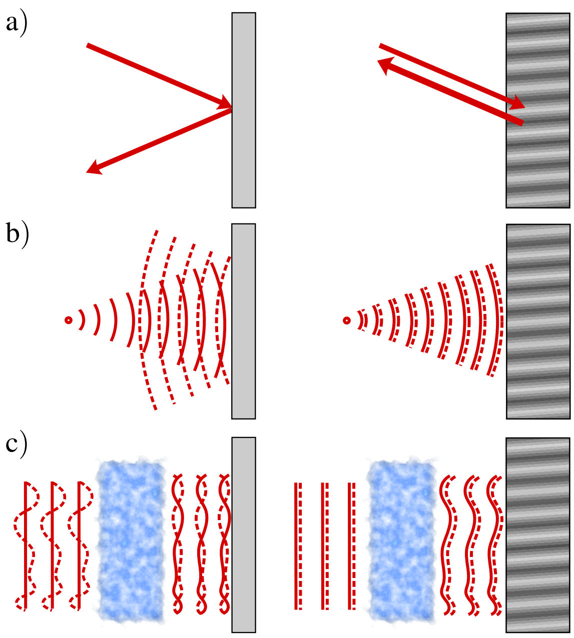
Naj se signalno valovanje razširja v smeri z. Potem ga zapišemo kot

$$E_3 = \mathrm{Re}\left(A_3\,(z)\,e^{i(kz-\omega t)}\right). \tag{8.136}$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da je novonastalo valovanje sorazmerno

$$E_4 \propto \mathrm{Re}\left(A_3^*\,(z)\,e^{i(-kz-\omega t)}\right). \tag{8.137}$$

Zaradi nasprotnega predznaka k potuje nastalo valovanje v obratni smeri od signalnega valovanja. Poleg tega je kompleksno konjugirana tudi njegova amplituda. To seveda ne vpliva na obliko valovnih front, saj so te popolnoma enake kot pri signalnem valovanju. Zaradi lastnosti, da lahko novo valovanje iz signalnega nastane tako, da krajevni del kompleksno konjugiramo, nastalemu valovanju pravimo fazno konjugirano valovanje.



Slika 8.16: Primerjava odbojev na navadnem zrcalu (levo) in faznem konjugatorju (desno): odboj ravnega vala (a), odboj krogelnega valovanja (b) in odboj popačenega vala (c).

Uporabna posledica fazne konjugacije je prikazana na sliki (8.16). Najpreprostejši primer je vpad ravnega vala (a), ki se ne odbije po lomnem zakonu (slika levo), ampak se odbije v smer, iz katere je vpadel na snov (desno). Drugi primer je krogelni val ali v približku tudi Gaussov snop (b). Ko vpade na navadno zrcalo (levo), se njegova divergenca ohranja in se žarek še naprej razširja. Na fazno konjugiranem zrcalu se kroglast val spet zbere v izvoru (desno). Tretji primer je poljubno sredstvo, ki valovanju doda naključno fazo, zato po prehodu valovne fronte niso več gladke (c). Ta popačen snop v faznem konjugatorju generira fazno konjugiran snop, ki potuje v nasprotni smeri in ima enako nepravilne valovne fronte kot vpadni val. Po prehodu skozi nepravilno sredstvo se neravnosti valovne fronte izničijo in nastanejo enake gladke valovne fronte ravnega vala, kot smo jih imeli na začetku. To lastnost popravljanja valovne fronte je mogoče koristni uporabiti, na primer namesto enega zrcala v laserskem resonatorju.

8.15 *Izpeljava optične fazne konjugacije

Poglejmo podrobneje, kako v nelinearnem sredstvu nastane fazno konjugiran val. Kot kaže slika (8.15), je celotno polje v nelinearnem sredstvu vsota štirih valovanj, dveh močnih črpalnih, signalnega in odbitega

$$E = \frac{1}{2}A_1 e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \frac{1}{2}A_2 e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \frac{1}{2}A_3(z)\,e^{ikz-i\omega t} + \frac{1}{2}A_4(z)\,e^{-ikz-i\omega t} + \text{k.k.} \quad (8.138)$$

S k.k. smo spet označili kompleksno konjugirane člene. Vsa valovanja naj imajo enako frekvenco, zaradi enostavnosti še privzemimo, da so enake tudi vse polarizacije. Račun poenostavimo še s privzetkom, da sta črpalna vala E_1 in E_2 dosti močnejša od E_3 in E_4, tako da sta njuni amplitudi konstantni, $E_3(z)$ in $E_4(z)$ pa se le počasi spreminjata.

Vstavimo E v valovno enačbo z nelinearno polarizacijo (enačba 8.11), pri čemer smo časovni odvod že izvrednotili

$$\nabla^2 E + \varepsilon\frac{\omega^2}{c_0^2}E = \mu_0\frac{\partial^2 P_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}. \quad (8.139)$$

Pri tem je $\varepsilon\,\omega^2/c_0^2 = k^2$, P_{NL} pa je po enačbi (8.78) enak $P_{\mathrm{NL}} = \varepsilon_0\chi^{(3)}E^3$, kjer je $\chi^{(3)} = \chi$ efektivna nelinearna susceptibilnost za izbrano polarizacijo vseh polj.

Ker je E zapisan kot vsota osmih različnih členov (enačba 8.138), vsebuje produkt E^3 kar 512 členov. Vendar se njihovo število znatno zmanjša, če upoštevamo le tiste z enako časovno odvisnostjo oziroma enako frekvenco. Poleg tega nas ne zanimajo različne kombinacije valovnih vektorjev, ampak k enačbi za E_3 prispevajo le tisti členi s krajevnim faznim faktorjem $\exp(ikz)$, k enačbi za E_4 pa tisti z $\exp(-ikz)$. Sledi

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{NL}\,3,4} &= \frac{1}{8}\varepsilon_0\chi\,(6A_1A_2A_4^* + 6A_1A_1^*A_3 + 6A_2A_2^*A_3 + 3A_3A_3^*A_3 + 6A_4A_4^*A_3)\,e^{ikz-i\omega t} \\ &+ (6A_1A_2A_3^* + 6A_1A_1^*A_4 + 6A_2A_2^*A_4 + 6A_3A_3^*A_4 + 3A_4A_4A_4^*)\,e^{-ikz-i\omega t}. \end{aligned} \quad (8.140)$$

Če zanemarimo še člene, v katerih nastopata A_3 in A_4 v višjih potencah, dobimo

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{NL}\,3,4} &= \frac{3}{4}\varepsilon_0\chi\left(A_1A_2A_4^* + |A_1|^2A_3 + |A_2|^2A_3\right)e^{ikz-i\omega t} \\ &+ \left(A_1A_2A_3^* + |A_1|^2A_4 + |A_2|^2A_4\right)e^{-ikz-i\omega t}. \end{aligned} \quad (8.141)$$

Vstavimo gornji izraz v valovno enačbo (enačba 8.139) in upoštevamo, da se $A_i(z)$ le počasi spreminja (kar pomeni, da zanemarimo drugi odvod po z). Dobimo enačbi

$$ik\frac{dA_3}{dz} = -\frac{3}{4}\mu_0\varepsilon_0\chi\omega^2\left(A_1A_2A_4^* + (|A_1|^2 + |A_2|^2)A_3\right) \quad (8.142)$$

in

$$-ik\frac{dA_4}{dz} = -\frac{3}{4}\mu_0\varepsilon_0\chi\omega^2\left(A_1A_2A_3^* + (|A_1|^2 + |A_2|^2)A_4\right). \tag{8.143}$$

Drugi člen na desni že poznamo: opisuje odvisnost lomnega količnika od intenzitete črpalnih valov, torej optični Kerrov pojav, in je zato le dodaten prispevek k fazi. Vpeljimo novi amplitudi, ki se od prejšnjih razlikujeta zgolj v faznem faktorju.

$$\tilde{A}_3 = A_3 \exp\left(-i\frac{3\chi\omega}{4c_0n}(|A_1|^2 + |A_2|^2)z\right) \tag{8.144}$$

in

$$\tilde{A}_4 = A_4 \exp\left(i\frac{3\chi\omega}{4c_0n}(|A_1|^2 + |A_2|^2)z\right). \tag{8.145}$$

Ko novi amplitudi vstavimo v diferencialni enačbi (enačbi 8.142 in 8.143), se Kerrov prispevek k fazi ravno odšteje in

$$\frac{d\tilde{A}_3}{dz} = i\frac{3\chi\omega}{4c_0n}A_1A_2\tilde{A}_4^* \tag{8.146}$$

in

$$\frac{d\tilde{A}_4}{dz} = -i\frac{3\chi\omega}{4c_0n}A_1A_2\tilde{A}_3^*. \tag{8.147}$$

Z vpeljavo sklopitvene konstante

$$\kappa = \frac{3\chi\omega}{4c_0n}A_1A_2 \tag{8.148}$$

se enačbi poenostavita v

$$\frac{d\tilde{A}_3}{dz} = i\kappa\tilde{A}_4^* \qquad \text{oziroma} \qquad \frac{d\tilde{A}_3^*}{dz} = -i\kappa^*\tilde{A}_4 \tag{8.149}$$

in

$$\frac{d\tilde{A}_4}{dz} = -i\kappa\tilde{A}_3^*. \tag{8.150}$$

Tako smo zelo težaven problem nelinearne valovne enačbe prevedli na linearen sistem dveh preprostih sklopljenih enačb za amplitudi signalnega in odbitega vala. Splošni rešitvi sistema enačb (8.149) in (8.150) sta

$$\tilde{A}_3^*(z) = C_1\cos(|\kappa|z) + C_2\sin(|\kappa|z) \tag{8.151}$$

$$\tilde{A}_4(z) = D_1\cos(|\kappa|z) + D_2\sin(|\kappa|z). \tag{8.152}$$

Z upoštevanjem zveze, ki izhaja neposredno iz diferencialne enačbe (enačba 8.149), zapišemo

$$C_1 = \frac{i\kappa^*}{|\kappa|}D_2 \qquad \text{in} \qquad C_2 = -\frac{i\kappa^*}{|\kappa|}D_1. \tag{8.153}$$

Potrebujemo še robne pogoje za obe valovanji. Z leve, pri $z = 0$, poznamo $\tilde{A}_3^*(0)$, pri $z = L$ pa ne more biti odbitega vala in je zato $\tilde{A}_4(L) = 0$. S tem lahko določimo konstanti D_1 in D_2

$$D_2 = -\frac{i|\kappa|}{\kappa^*}\tilde{A}_3^*(0) \qquad \text{in} \qquad D_1 = -D_2\tan(|\kappa|L). \tag{8.154}$$

Gornje enačbe združimo in lahko zapišemo amplitudi znotraj nelinearne snovi

$$\begin{aligned}\tilde{A}_3(z) &= \tilde{A}_3(0)\frac{\cos(|\kappa|(L-z))}{\cos(|\kappa|L)} \\ \tilde{A}_4(z) &= \tilde{A}_3^*(0)\frac{i\kappa}{|\kappa|}\frac{\sin(|\kappa|(L-z))}{\cos(|\kappa|L)}\end{aligned} \tag{8.155}$$

Izračunajmo še amplitudi odbitega in prepuščenega vala. Amplituda odbitega vala pri $z = 0$ je

$$\boxed{\tilde{A}_4(0) = \tilde{A}_3^*(0)\frac{i\kappa}{|\kappa|}\tan(|\kappa|L),} \tag{8.156}$$

amplituda prepuščenega pri $z = L$ pa

$$\boxed{\tilde{A}_3(L) = \frac{\tilde{A}_3^*(0)}{\cos(|\kappa|L)}.} \tag{8.157}$$

Oglejmo si gornja rezultata podrobneje. Vidimo, da je odbiti val sorazmeren kompleksno konjugirani amplitudi vpadnega vala, kar smo omenili že v prejšnjem razdelku. Poleg konjugirane amplitude ima tudi natanko nasproten valovni vektor, zato tudi ime fazno konjugiran val. Zanimiva je tudi njegova velikost. Ker je lahko $\tan(|\kappa|L) > 1$, je odbit val lahko močnejši od vpadnega. To ojačanje odbitega vala gre seveda na račun moči črpalnih valov. V našem računu bi lahko amplituda odbite svetlobe narasla proti neskončnosti, vendar ne smemo pozabiti, ta zapisane enačbe takrat niso več veljavne, ker smo privzeli, da sta signalni in odbiti žarek precej šibkejša od črpalnih.

Poglejmo še prepuščeni žarek. Ker je $\cos(x) \leq 1$, je amplituda prepuščenega žarka vedno večja od amplitude vpadnega. To pomeni, da smo na račun črpalnih žarkov dobili prepustnost, ki je vedno večja od 100 %, in odbojnost, ki je lahko večja od 100 %.

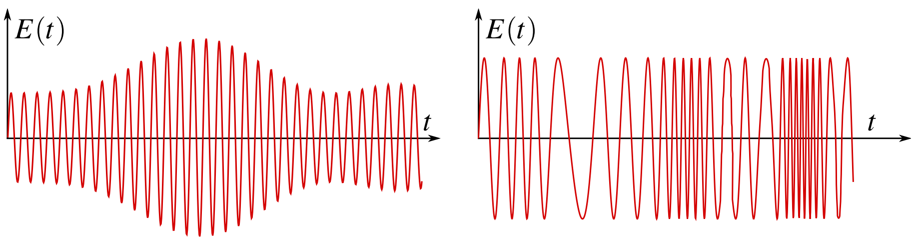
Doslej smo predpostavili, da je vpadni signal ravni val. Če je njegova amplituda odvisna še od prečne koordinate, ga lahko razvijemo po ravnih valovih in zgoraj izpeljana enačba (8.156) velja za vsako komponento posebej. Odbite komponente so sorazmerne s konjugiranimi komponentami signalnega valovanja z nasprotnim valovnim vektorjem in dajo skupaj valovno fronto enake oblike kot pri signalnem valovanju, le giblje se v nasprotni smeri, kot smo opisali že na začetku razdelka.

★ Omenili smo že, da se fazno konjugirana zrcala lahko uporabljajo v laserjih, da izničimo popačenje Gaussovega snopa. Drug primer uporabe je pri optični astronomiji ali optičnih komunikacijah skozi atmosfero. Naključne spremembe gostote v atmosferi signalu dodajo naključni fazni premik, ki signal popači. Če se signal odbije od zrcala nazaj proti izvoru, bo torej dvakratno popačen. Če pa se odbije od fazno konjugiranega zrcala, se bo vpliv nehomogenosti atmosfere ravno izničil in na prenos signala ne bo vplival, poleg tega pa bo šibek signal še dodatno ojačan.

9. Modulacija svetlobe

V optičnih napravah pogosto želimo spreminjati lastnosti svetlobnega valovanja. Tak primer smo že spoznali pri obravnavi laserja, kjer za preklop dobrote potrebujemo element, ki hitro spreminja prepustnost. Še pomembnejša je modulacija valovanja pri optičnem prenosu informacij.

Svetlobno valovanje lahko moduliramo na več načinov. Z ustreznim moduliranjem lomnega količnika lahko valovanju spreminjamo amplitudo ali frekvenco oziroma fazo .



Slika 9.1: Amplitudno (levo) in fazno oziroma frekvenčno moduliran signal (desno)

Delovanje optičnih modulatorjev temelji na različnih pojavih. V tem poglavju bomo podrobneje spoznali dva načina, to sta elektro-optični in elasto- oziroma akusto-optični pojav. Pri prvem pride do spremembe lomnega količnika snovi pod vplivom zunanjega električnega polja, pri drugem pa zaradi mehanske deformacije. Kadar mehansko deformacijo povzroči zvočno valovanje, takim modulatorjem pravimo akusto-optični. Na koncu bomo spoznali poseben zelo pomemben primer elektro-optičnih modulatorjev na osnovi tekočih kristalov.

9.1 Elektro-optični pojav

Elektro-optični pojav opisuje spremembe optičnih lastnosti snovi (dielektričnosti in lomnega količnika) pod vplivom zunanjega električnega polja. Omejimo se na statično zunanje polje oziroma na polje, katerega frekvenca je bistveno manjša od optične frekvence. Omejitev na nizko frekvenco je potrebna zato, da optično polje še lahko obravnavamo linearno. Kako je v nasprotnem primeru, ko je frekvenca polja primerljiva z optično frekvenco, smo na široko obravnavali v poglavju o nelinearni optiki (poglavje 8).

Namesto dielektričnega tenzorja navadno vpeljemo inverzni dielektrični tenzor

$$\underline{b} = \underline{\varepsilon}^{-1}. \tag{9.1}$$

Izračunajmo zvezo med spremembo inverznega tenzorja δb_{ij} in spremembo dielektričnega tenzorja $\delta\varepsilon_{ij}$. Če so spremembe majhne, velja

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\tilde{\varepsilon}} + \delta\underline{\varepsilon} = (\underline{\tilde{b}} + \delta\underline{b})^{-1} = \left(\underline{\tilde{b}}(1 + \underline{\tilde{b}}^{-1}\delta\underline{b})\right)^{-1} = (1 + \underline{\tilde{b}}^{-1}\delta\underline{b})^{-1}\underline{\tilde{b}}^{-1} \approx \underline{\tilde{b}}^{-1} - \underline{\tilde{b}}^{-1}\delta\underline{b}\,\underline{\tilde{b}}^{-1}, \tag{9.2}$$

pri čemer je $\underline{\tilde{\varepsilon}}$ označuje dielektrični in $\underline{\tilde{b}}$ inverzni dielektrični tenzor v odsotnosti zunanjega polja (nemoten tenzor).

Sprememba dielektričnega tenzorja je tako

$$\delta\underline{\varepsilon} = -\underline{b}^{-1}\delta\underline{b}\,\underline{b}^{-1} = -\underline{\tilde{\varepsilon}}\,\delta\underline{b}\,\underline{\tilde{\varepsilon}}. \tag{9.3}$$

Če je nemoten dielektrični tenzor $\underline{\tilde{\varepsilon}}$ diagonalen, velja

$$\delta\varepsilon_{ij} = -\tilde{\varepsilon}_{ik}\delta b_{kl}\tilde{\varepsilon}_{lj} = -\tilde{\varepsilon}_{ii}\tilde{\varepsilon}_{jj}\delta b_{ij}. \tag{9.4}$$

Pri elektro-optičnem pojavu so spremembe tenzorja dielektričnosti zaradi vpliva zunanjega polja razmeroma majhne. Spremembo komponente δb_{ij} lahko zato zapišemo kot potenčno vrsto zunanjega polja E, pri čemer upoštevajmo zgolj prva dva člena v razvoju

$$\delta b_{ij} = r_{ijk}E_k + q_{ijkl}E_kE_l. \tag{9.5}$$

Prvi člen, linearno sorazmeren zunanjem polju, opisuje linearni elektro-optični ali Pockelsov pojav[1]. Tenzor tretjega ranga r_{ijk}, ki je lastnost snovi, imenujemo elektro-optični tenzor ali tudi Pockelsov tenzor. Pockelsov tenzor je različen od nič v snoveh brez centra inverzije, značilne vrednosti Pockelsovega tenzorja pa so okoli $r \sim 10^{-12} - 10^{-10}$ m/V.

Kvadratnemu elektro-optičnemu pojavu pravimo Kerrov pojav[2], tenzorju q_{ijkl} pa Kerrov tenzor. Kerrov pojav je praviloma precej šibkejši od Pockelsovega, vendar je različen od nič v vseh snoveh, ne glede na njihove simetrijske lastnosti, torej tudi v tekočinah. Značilna vrednost Kerrovega tenzorja je $q \sim 10^{-24}$ m^2/V^2. Navadno ločimo dva primera Kerrovega pojava: Kerrov elektro-optični pojav pri zunanjih poljih z nizko frekvenco, in optični Kerrov pojav, ki smo ga podrobneje spoznali pri obravnavi nelinearnih optičnih pojavov (poglavje 8.9).

Za uporabo trdnih kristalov je pomemben predvsem linearni člen, zato se bomo osredotočili le nanj in zapisali

$$\delta b_{ij} = r_{ijk}E_k. \tag{9.6}$$

Elektro-optični ali Pockelsov tenzor

Simetrija snovi pomembno vpliva na obliko tenzorjev, ki opisujejo njene lastnosti. Pockelsov tenzor r je tenzor tretjega ranga, zato je lahko različen od nič le v kristalih brez centra inverzije. Simetrija kristala tudi v primeru, ko ni centra inverzije, močno zmanjša število neodvisnih komponent r_{ijk}.

Ker je inverzni dielektrični tenzor b simetričen, je v prvih dveh indeksih simetričen tudi Pockelsov tenzor

$$r_{ijk} = r_{jik}. \tag{9.7}$$

V najmanj simetričnem primeru triklinskega kristala ima tako namesto 27 zgolj 18 neodvisnih komponent, v kristalih z višjo simetrijo pa še manj.

Podobno kot pri nelinearni susceptibilnosti (poglavje 8.1) tudi elektro-optični tenzor pogosto zapišemo le z dvema komponentama. Prva dva indeksa, v katerih je r_{ijk} simetričen, združimo v enega z vrednostmi od 1 do 6 po dogovoru $xx = 1$, $yy = 2$, $zz = 3$, $yz = 4$, $zx = 5$ in $xy = 6$. Tako postane r_{ijk} matrika velikosti 6×3, simetrični tenzor drugega ranga b_{ij} pa šestdimenzionalen vektor.

[1] Nemški fizik Friedrich Carl Alwin Pockels, 1865–1913.
[2] Škotski fizik John Kerr, 1824–1907.

Naloga 9.1.1 Naj bo Q transformacijska matrika za dano simetrijsko operacijo. Potem za tenzorje tretjega ranga velja

$$r_{ijk} = Q_{ip}Q_{jq}Q_{kr}r_{pqr}. \tag{9.8}$$

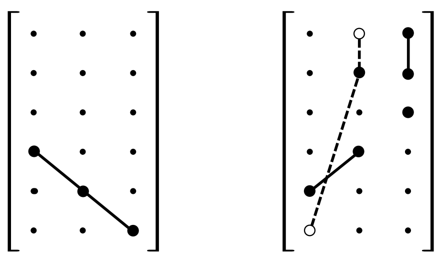
Zapiši transformacijsko matriko Q za vrtenje okoli osi z za $\pi/2$ in pokaži, da so v primeru štirištevne simetrije od nič različne le komponente $r_{xxz} = r_{yyz}, r_{zzz}, r_{yzx} = -r_{xzy}$ in $r_{xzx} = r_{yzy}$. Razmisli in izračunaj, kakšen bi bil tenzor r, če bi štirištevni simetriji dodali še zrcaljenje čez ravnino xy.

Nekaj primerov Pockelsovih tenzorjev pri različnih kristalnih simetrijah je podanih v tabeli (9.1).

Kristal	Grupa	Neničelne komponente tenzorja r	Vrednost (10^{-12} m/V)
$BaTiO_3$	4mm	$r_{xzx} = r_{yzy} = r_{zxx} = r_{zyy} = r_{51} = r_{42}$	(pri 1,55 µm) $r_{51} = 800$
		$r_{xxz} = r_{yyz} = r_{13} = r_{23}$	$r_{13} = 8$
		$r_{zzz} = r_{33}$	$r_{33} = 28$
KDP	$\bar{4}2$m	$r_{yzx} = r_{zyx} = r_{xzy} = r_{zxy} = r_{41} = r_{52}$	$r_{41} = 8,77$
		$r_{xyz} = r_{yxz} = r_{63}$	$r_{63} = -10,3$
GaAs	$\bar{4}3$m	$r_{yzx} = r_{zyx} = r_{xzy} = r_{zxy} = r_{xyz} = r_{yxz}$	(pri 10,6 µm) $r_{41} = 1,5$
ZnTe		$= r_{41} = r_{52} = r_{63}$	(pri 3,4 µm) $r_{41} = 4,2$
$LiNbO_3$	3m	$r_{xzx} = r_{zxx} = r_{yzy} = r_{zyy} = r_{51} = r_{42}$	$r_{51} = 32,6$
		$r_{xxz} = r_{yyz} = r_{13} = r_{23}$	$r_{13} = 9,6$
		$r_{zzz} = r_{33}$	$r_{33} = 30,9$
		$r_{yyy} = -r_{xxy} = -r_{xyx} = -r_{yxx} =$	
		$= r_{22} = -r_{12} = -r_{61}$	$r_{22} = 6,8$

Tabela 9.1: Koeficienti Pockelsovega tenzorja za nekaj izbranih snovi. Če ni navedeno drugače, veljajo vrednosti pri valovni dolžini okoli 600 nm.

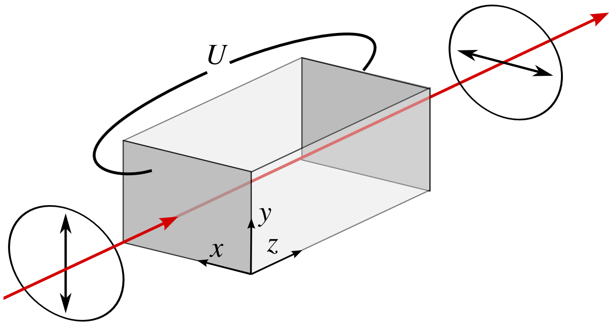
★ Komponente elektro-optičnega tenzorja zaradi nazornosti pogosto ponazarjamo grafično. V matriki 6×3 s piko označimo komponente, ki so enake nič, s polnim krožcem neničelne komponente, povezava med komponentami pomeni njihovo enakost, prazen krožec in črtkana črta pa označujeta neničelno komponento nasprotnega predznaka. Kot primer sta podana prikaza tenzorjev za GaAs (levo) in $LiNbO_3$ (desno).



9.2 Longitudinalna modulacija

Poglejmo podrobneje, kako električno polje spremeni optične lastnosti elektro-optičnega kristala in kako to vpliva na svetlobo, ki potuje skozi tak kristal. Navadno se uporabljajo kristali, ki so dvolomni že brez zunanjega polja. Kot primer vzemimo kristal KH_2PO_4 (KDP), ki ima tetragonalno simetrijo ($\bar{4}2m$). Kot razberemo iz tabele (9.1) ima elektro-optični tenzor dve neodvisni komponenti: $r_{41} = r_{52} = 8,77 \times 10^{-12}$ m/V in $r_{63} = -10,3 \times 10^{-12}$ m/V.

Kristal naj bo odrezan po kristalografskih oseh, svetloba naj skozi kristal potuje v smeri optične osi, to je smeri z, v isti smeri pa na kristal priključimo polje E_z. Ker je smer električnega polja vzporedna s smerjo širjenja svetlobe, taki postavitvi pravimo longitudinalna in pojavu longitudinalna modulacija.



Slika 9.2: Shema longitudinalne modulacije signala. Ker je polje priključeno v smeri potovanja svetlobe, morata biti elektrodi transparentni. Z uporabo polarizatorja in analizatorja sestavimo amplitudni modulator (glej poglavje 9.4).

Inverzni tenzor dielektričnosti v odsotnosti zunanjega polja zapišemo kot

$$\underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}, \tag{9.9}$$

pri čemer sta n_o in n_e redni in izredni lomni količnik. Ko priključimo polje, se tenzor dielektričnosti spremeni zaradi Pockelsovega pojava. Sprememba inverznega tenzorja dielektričnosti je po enačbi (9.6)

$$\begin{aligned}
\delta b_{xx} &= r_{xxx}E_x + r_{xxy}E_y + r_{xxz}E_z = 0, \\
\delta b_{xy} &= \delta b_{yx} = r_{xyx}E_x + r_{xyy}E_y + r_{xyz}E_z = r_{63}E_z, \\
\delta b_{xz} &= \delta b_{zx} = r_{xzz}E_z = 0, \\
\delta b_{yy} &= r_{yyz}E_z = 0, \\
\delta b_{yz} &= \delta b_{zy} = r_{yzz}E_z = 0, \\
\delta b_{zz} &= r_{zzz}E_z = 0.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Vidimo, da je večina členov enaka nič, se pa zaradi zunanjega električnega polja v smeri z pojavi izvendiagonalna komponenta

$$\underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & r_{63}E_z & 0 \\ r_{63}E_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & r_{63}E_z & 0 \\ r_{63}E_z & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \tag{9.11}$$

Če želimo izračunati, kako se po kristalu pod napetostjo širi vpadni svetlobni snop, moramo gornji dielektrični tenzor diagonalizirati. Lastne vrednosti novega tenzorja in pripadajoče nove lastne osi so

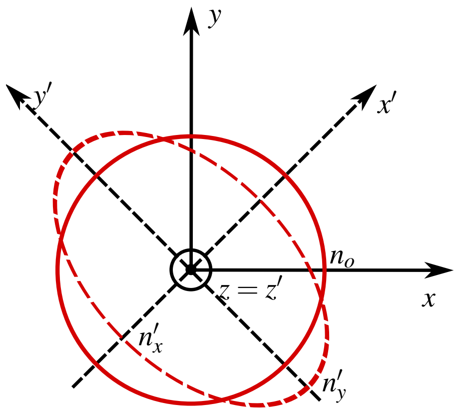
$$\lambda_1 = \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \tag{9.12}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \tag{9.13}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{n_e^2} \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1). \tag{9.14}$$

Vidimo, da so nove lastne osi zasukane za kot 45 ° glede na prvotne osi sistema. V novem koordinatnem sistemu je inverzni dielektrični tenzor diagonalen in enak

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 + r_{63}E_z & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 - r_{63}E_z & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \tag{9.15}$$



Slika 9.3: Optično enoosni kristal postane pod napetostjo dvoosen. Indikatrisa, ki je pravokotno na optično os brez polja krožnica, se pod vplivom napetosti spremeni v elipso.

Spomnimo se, da potuje svetloba skozi kristal vzdolž osi z. Brez zunanjega električnega polja je kristal enoosen z optično osjo v smeri z. Lomni količnik je torej neodvisen od polarizacije vpadnega valovanja in je enak n_o. Ko priključimo polje, postane kristal optično dvoosen, saj so vse tri lastne vrednosti tenzorja dielektričnosti različne. Za žarek, ki potuje vzdolž osi z, torej obstajata dve lastni smeri x' in y' z ustreznima novima lastnima količnikoma, ki ju izrazimo kot

$$\frac{1}{n_{x'}^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \frac{1}{n_{y'}^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z. \tag{9.16}$$

Kadar polarizacija vpadnega valovanja ne sovpada z novimi lastnimi osmi x' ali y', je svetloba po preletu kristala v splošnem eliptično polarizirana.

Za vsa eksperimentalno dosegljiva polja velja, da je $rE \ll 1/n_o^2$, zato lahko gornja izraza razvijemo za majhne popravke

$$n_{x'} = \sqrt{\frac{n_o^2}{1 + n_o^2 r_{63}E_z}} \approx n_o \sqrt{1 - n_o^2 r_{63}E_z}. \tag{9.17}$$

Sledi

$$n_{x'} \approx n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z. \tag{9.18}$$

Podobno izpeljemo še za drugo lastno vrednost

$$n_{y'} \approx n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z. \tag{9.19}$$

Različni lastni polarizaciji potujeta vzdolž osi z z različnima hitrostma. Ko prepotujeta dolžino kristala L, pride med njima do fazne razlike

$$\Delta\phi = k_0 n_{y'} L - k_0 n_{x'} L = \frac{\omega}{c_0} L n_o^3 r_{63} E_z. \tag{9.20}$$

Prelet kristala torej doda vpadnemu valovanju fazni zamik, ki je odvisen od električne poljske jakosti E_z.

Vpeljemo še karakteristično napetost U_π, pri kateri je dodatna fazna razlika enaka π in kristal deluje kot ploščica $\lambda/2$

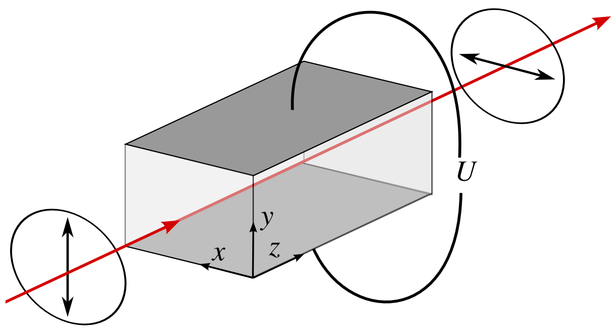
$$U_\pi = \frac{\pi c_o}{\omega n_o^3 r_{63}} = \frac{\lambda}{2 n_o^3 r_{63}}. \tag{9.21}$$

Za kristal KDP je π-vrednost napetosti pri valovni dolžini 633 nm okoli 9000 V. Izračunana napetost je precej velika. Velike delovne napetosti so značilne za kristalne elektro-optične modulatorje in so njihova glavna pomanjkljivost.

9.3 Transverzalna modulacija

Iz praktičnih razlogov je navadno preprosteje priključiti električno polje v smeri, ki je pravokotna na smer širjenja svetlobe. Taki postavitvi pravimo transverzalna in pojavu transverzalna modulacija.

Tudi to postavitev obravnavajmo na primeru. Za zgled vzemimo kristal $LiNbO_3$, ki ima trigonalno simetrijo (3m) in po tabeli (9.1) štiri neodvisne komponente: $r_{51} = r_{42}, r_{13} = r_{23}, r_{33}$ in $r_{22} = -r_{12} = -r_{61}$.



Slika 9.4: Shema transverzalne modulacije signala

Naj se svetloba širi vzdolž osi z, ki je hkrati tudi optična os, električno polje pa priključimo v smeri y (slika 9.4). Krajši račun pokaže, da je inverzni dielektrični tenzor v polju enak

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 - r_{22}E_y & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 + r_{22}E_y & r_{51}E_y \\ 0 & r_{51}E_y & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \tag{9.22}$$

Tudi v tem primeru tenzor diagonaliziramo in poiščemo nove lastne vrednosti. Ob privzetku, da je sprememba zaradi električnega polja majhna ($rE \ll 1$), zanemarimo člene, v katerih rE nastopa v kvadratni obliki, in dobimo nove lastne vrednosti

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_y \tag{9.23}$$

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y \tag{9.24}$$

$$\lambda_3 \approx \frac{1}{n_e^2}, \tag{9.25}$$

kar ustreza lomnim količnikom

$$n_{x'} \approx n_o(1 + \frac{1}{2}n_o^2 r_{22}E_y) \tag{9.26}$$

$$n_{y'} \approx n_o(1 - \frac{1}{2}n_o^2 r_{22}E_y) \tag{9.27}$$

$$n'_z \approx n_e. \tag{9.28}$$

Kako pa je z novimi lastnimi osmi? Hitro ugotovimo, da se tudi pri priključenem polju os x ohranja. Pojavi se torej zasuk okoli osi x, ki ga označimo s kotom ϑ. Račun pokaže, da je za smiselne vrednosti električnega polja ta kot zelo majhen ($\vartheta \approx r_{51}E_y/(1/n_o^2 - 1/n_e^2) \sim 1$ mrad), tako da lahko v približku rečemo, da se lastne osi ohranjajo.

Če potuje svetloba vzdolž osi z, sta torej lomna količnika za polarizaciji v smeri x in y približno enaka $n_{x'}$ in $n_{y'}$, fazna razlika med polarizacijama po preletu kristala z dolžino L pa je

$$\Delta\phi = k_0 n_{y'} L - k_0 n_{x'} L = \frac{\omega}{c_0} L n_o^3 r_{22} E_y. \tag{9.29}$$

Karakteristična π-napetost je tako

$$\boxed{U_\pi = \frac{\lambda d}{2 L n_o^3 r_{22}},} \tag{9.30}$$

pri čemer moramo ločiti med L, ki je dolžina kristala v smeri z, in d, ki je širina v prečni smeri v kateri priključimo napetost. Za izbran kristal ($d = 5$ mm, $L = 1$ cm) je π-vrednost napetosti pri valovni dolžini 633 nm okoli 2000 V.

★ Transverzalno modulacijo lahko dosežemo tudi tako, da se žarek širi vzdolž osi y, električno polje pa priključimo vzdolž optične osi z. V tem primeru se lastne osi ohranijo in kristal ostane optično enoosen. Vendar pa ima tudi ta rešitev določene slabosti. Ker je kristal že sam po sebi dvolomen, povzroči zunanje polje le majhno dodatno fazno razliko, zato je najbolje, če je dolžina kristala taka, da velja $k_0 L(n_o - n_e) = 2N\pi$. Pri tem pa nastopi težava. Pogoj je lahko zaradi temperaturnega raztezanja in odvisnosti lomnih količnikov od temperature izpolnjen le pri eni temperaturi, poleg tega se mora svetloba širiti natančno v smeri y. Zato dvolomnost nemotenega kristala navadno kompenziramo, tako da postavimo dva enako dolga kristala zapored, pri čemer sta optični osi med seboj pravokotni, modulacijska napetost na drugem kristalu pa ima nasproten predznak. Tedaj se fazna razlika med obema polarizacijama zaradi naravne dvolomnosti odšteje, zaradi modulacijske napetosti pa sešteje.

9.4 Amplitudna modulacija

Poglejmo, kako lahko elektro-optični pojav izkoristimo za modulacijo amplitude svetlobnega snopa. Pod vplivom polja pride v kristalu do faznega zamika med polarizacijama, ki je sorazmeren napetosti (enačbi 9.20 in 9.29). Če za tak kristal postavimo analizator, lahko z napetostjo spreminjamo prepuščeno moč svetlobe – amplitudno moduliramo signal.

Vrnimo se k longitudinalni modulaciji (slika 9.2). Naj bo vpadna električna poljska jakost E_0 polarizirana v smeri y. Ko priključimo napetost, os y ni več lastna os, ampak sta lastni osi zasukani za kot 45 ° glede na prvotni lastni osi (slika 9.3). Vpadno valovanje razstavimo na komponenti x' in y'

$$\mathbf{E}_0 = E_0\,\mathbf{e}_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{x'} + \mathbf{e}_{y'}\right). \tag{9.31}$$

Po prehodu skozi kristal pride med njima do fazne razlike $\Delta\phi$ (enačba 9.20), zato je polje $\mathbf{E}_1$ ob izstopu iz kristala

$$\mathbf{E}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(e^{ik_0 n_{x'} L}\mathbf{e}_{x'} + e^{ik_0 n_{y'} L}\mathbf{e}_{y'}\right) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{ik_0 n_{x'} L}\left(\mathbf{e}_{x'} + e^{i\Delta\phi}\mathbf{e}_{y'}\right). \tag{9.32}$$

Analizator na izhodni strani je obrnjen v smeri x, to je pravokotno na smer vpadne polarizacije, in prepusti le projekcijo obeh lastnih polarizacij na os x

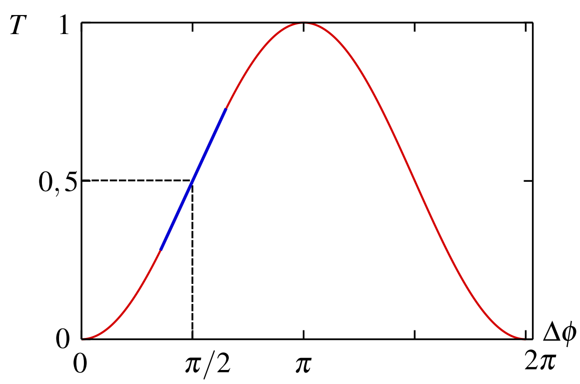
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{ik_0 n_{x'} L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Delta\phi}\right)\mathbf{e}_x. \tag{9.33}$$

Gostota prepuščenega svetlobnega toka ob vpadnem toku j_0 je tako

$$j = \frac{1}{4} j_0 \left|1 - e^{i\Delta\phi}\right|^2 = \frac{1}{2} j_0 (1 - \cos\Delta\phi). \tag{9.34}$$

Preoblikujemo izraz in zapišemo prepustnost takega modulatorja ob upoštevanju enačbe (9.20)

$$\boxed{T = \frac{j}{j_0} = \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi n_o^3 r_{63} U}{\lambda}\right)^2.} \tag{9.35}$$



Slika 9.5: Prepustnost amplitudnega modulatorja v odvisnosti od faznega zamika $\Delta\phi$, ki je sorazmeren priključeni napetosti U. Če pred vzorec dodamo ploščico $\lambda/4$, se pojavi stalni fazni zamik $\pi/2$ in odvisnost prepustnosti od priključene napetosti je približno linearna (modra črta).

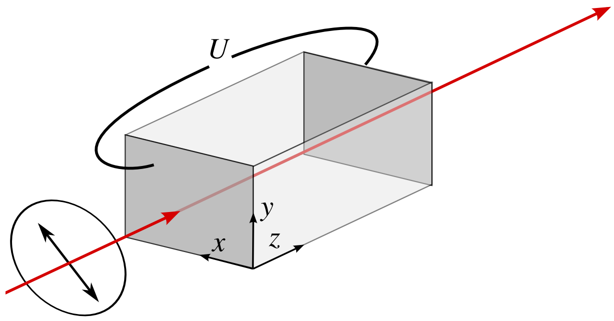
Ko je napetost na kristalu enaka nič, je $\Delta\phi = 0$ in tudi intenziteta prepuščene svetlobe $j = 0$. To je pričakovano, saj sta analizator in polarizator prekrižana, vpadni žarek pa se širi vzdolž lastne osi kristala. Prepustnost doseže največjo vrednost, ko je $\Delta\phi = \pi$, kar je ravno pri π-napetosti. Ko torej napetost povečamo z 0 na U_π, se prepustnost modulatorja spremeni z 0 na 1 (slika 9.5).

Pogosto želimo, da je zveza med modulacijsko napetostjo in izhodno gostoto toka linearna. To lahko dosežemo, če modulator deluje v okolici $\Delta\phi = \pi/2$ (slika 9.5). Ena rešitev bi bila dodati stalno visoko napetost, signal pa modulirati okoli te vrednosti. Precej bolj praktična rešitev je, da med polarizator in kristal dodamo ploščico $\lambda/4$, ki da zahtevan stalni fazni premik med rednim in izrednim valom. Potem lahko z razmeroma majhno napetostjo linearno amplitudno moduliramo svetlobo.

9.5 Fazna in frekvenčna modulacija

Svetlobo smo amplitudno modulirali, tako da smo z zunanjim poljem spremenili fazi lastnih valov, zaradi česar je postalo linearno polarizirano vpadno valovanje po prehodu kristala eliptično polarizirano. Spremembo polarizacije smo z analizatorjem prevedli v spremembo amplitude.

Včasih pa želimo modulirati fazo vpadne svetlobe. Vrnimo se k primeru longitudinalne modulacije. Fazno oziroma frekvenčno modulacijo dosežemo tako, da vhodno polarizacijo izberemo vzporedno eni od novih lastnih osi kristala, na primeri osi x', izhodni polarizator pa odstranimo (slika 9.6).



Slika 9.6: Shema fazne modulacije signala. Vpadna polarizacija je vzporedna eni od novih lastnih osi kristala, ki se pojavijo pod vplivom zunanjega polja.

Celoten fazni zamik po preletu skozi kristal zapišemo kot

$$\phi = k_0 n_{x'} L - \omega_0 t = \frac{\omega_0}{c_0} L \left(n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} \frac{U}{L} \right) - \omega_0 t, \tag{9.36}$$

pri čemer smo za lomni količnik zapisali skladno z enačbo (9.18). Opazimo, da je fazni zamik odvisen od priključene zunanje napetosti.

Obravnavajmo dva primera spreminjajoče se napetosti. V prvem primeru naj bo napetost linearna funkcija časa

$$U = U_0 + \frac{\Delta U}{\Delta t} t. \tag{9.37}$$

Celotna faza prepuščenega valovanja je potem

$$\phi = \frac{\omega_0}{c_0} L n_o - \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2 c_0} \left(U_0 + \frac{\Delta U}{\Delta t} t \right) - \omega_0 t. \tag{9.38}$$

Trenutno frekvenco valovanja izračunamo kot negativni odvod faze po času

$$\omega = -\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0}\frac{\Delta U}{\Delta t} \tag{9.39}$$

oziroma

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \Delta\omega.} \tag{9.40}$$

Linearno naraščajoča modulacijska napetost da torej konstanten frekvenčni premik, kar v optiki pogosto potrebujemo. Dosegljive spremembe frekvence so seveda dokaj majhne, do nekaj sto MHz, saj so omejene s hitrostjo spreminjanja napetosti. Napetost seveda tudi ne more neomejeno naraščati. Kadar se napetost vrača na nič, pride do frekvenčnega premika v nasprotni smeri, ki pa ga lahko zanemarimo, če je čas vračanja bistveno krajši od časa naraščanja.

Poglejmo še drug primer, pri katerem se priključena napetost periodično spreminja. Zapišemo jo kot

$$U = U_0 \sin(\omega_m t). \tag{9.41}$$

Vstavimo gornji izraz v enačbo (9.36) in zapišemo fazo izhodnega valovanja

$$\phi = \frac{\omega_0}{c_0} L n_o - \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0 \sin(\omega_m t) - \omega_0 t. \tag{9.42}$$

V primeru linearno spreminjajoče napetosti smo na tem mestu fazo odvajali in dobili hitrost, ki je bila konstantna. V tem primeru pa z odvajanjem dobimo kotno hitrost, ki se spreminja s časom. Zato se računa lotimo drugače. Konstantni člen v gornjem izrazu lahko izpustimo in zapišemo električno poljsko jakost prepuščenega valovanja

$$E = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0 \sin(\omega_m t)\right) = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta \sin(\omega_m t)\right), \tag{9.43}$$

pri čemer je

$$\delta = \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0. \tag{9.44}$$

Z uporabo Jacobi-Angerjevih[3] identitet

$$\begin{aligned} &\cos(\delta \sin x) = J_0(\delta) + 2J_2(\delta)\cos 2x + 2J_4(\delta)\cos 4x + \ldots \quad \text{in} \\ &\sin(\delta \sin x) = 2J_1(\delta)\sin x + 2J_3 \sin 3x + 2J_5 \sin 5x + \ldots \end{aligned} \tag{9.45}$$

je izhodno polje mogoče zapisati v obliki

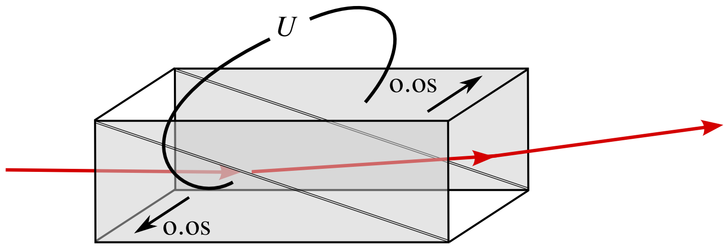
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= J_0(\delta)\cos(\omega_0 t) + \\ &+ J_1(\delta)\cos(\omega_0 + \omega_m)t - J_1(\delta)\cos(\omega_0 - \omega_m)t + \\ &+ J_2(\delta)\cos(\omega_0 + 2\omega_m)t + J_2(\delta)\cos(\omega_0 - 2\omega_m)t + \\ &+ J_3(\delta)\cos(\omega_0 + 3\omega_m)t - J_3(\delta)\cos(\omega_0 - 3\omega_m)t + \ldots \end{aligned}} \tag{9.46}$$

[3] Nemška matematika Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851, in Carl Theodor Anger, 1803–1858.

Naloga 9.5.1 Ob upoštevanju Jacobi-Angerjevih identitet (enačbi 9.45) pokaži, da električno polje izhodne svetlobe ob priključeni izmenični napetosti s frekvenco ω_m ustreza polju v enačbi (9.46).

Zaradi periodične fazne modulacije se torej v spektru pojavijo stranski pasovi, ki so od osnovne frekvence ω_0 odmaknjeni za večkratnike modulacijske frekvence ω_m. Njihova velikost je podana s kvadratom Besslovih funkcij parametra δ. Ker je ta navadno majhen, se pogosto zadovoljimo le s prvim členom.

★ Elektro-optični pojav izkoriščamo tudi za uklanjanje žarkov. Najpreprostejši primer deflektorja je trikotna prizma z elektrodama na osnovnih ploskvah. Svetloba se ob prehodu skozi prizmo lomi v odvisnosti od njenega lomnega količnika, tega pa lahko spreminjamo z napetostjo na elektrodah. Praktično je bolj uporabna dvojna prizma. Sestavljena je iz dveh enakih prizem, ki skupaj tvorita kvader, pri tem pa optični osi zgornje in spodnje prizme kažeta v nasprotnih smereh. S spreminjanjem napetosti, ki jo priključimo prečno na smer razširjanja svetlobe, lahko zelo hitro in zelo natančno spreminjamo smer izhodnega žarka. Vendar ta pristop ni splošno uveljavljen, predvsem zaradi velike napetosti, ki je potrebna za znatno uklanjanje. Veliko bolj razširjen je akusto-optični pojav, ki ga bomo spoznali v naslednjem razdelku.



Slika 9.7: Shema elektro-optičnega deflektorja

9.6 Elasto-optični in akusto-optični pojav

Pri elasto-optičnem pojavu dielektrične lastnosti snovi in njen lomni količnik spreminjamo z mehansko deformacijo. Podobno kot pri elektro-optičnem pojavu opišemo pojav s spremembo inverznega dielektričnega tenzorja

$$\underline{b} = \underline{\tilde{b}} + \Delta\underline{b}, \tag{9.47}$$

pri čemer je $\underline{\tilde{b}}$ tenzor v odsotnosti mehanske deformacije, $\Delta\underline{b}$ pa sprememba tenzorja zaradi deformacije snovi. Zapišemo jo kot

$$\boxed{\Delta b_{ij} = p_{ijkl} S_{kl}.} \tag{9.48}$$

Sorazmerna je s tenzorjem deformacije snovi oziroma Greenovim tenzorjem[4] v linearnem približku

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \tag{9.49}$$

pri čemer je $\mathbf{u}$ vektor deformacije.

[4] Angleški matematični fizik George Green, 1793–1841.

Vpeljali smo še sorazmernostni faktor p_{ijkl}, ki ga imenujemo elasto-optični tenzor. Tenzor p je različen od nič v vsaki snovi, ker povezuje dva simetrična tenzorja drugega ranga. Posledično je simetričen v prvem in drugem paru indeksov

$$p_{ijkl} = p_{jikl} = p_{ijlk} = p_{jilk}. \tag{9.50}$$

V najbolj splošnem primeru triklinske kristalne simetrije ima tako 36 neodvisnih komponent, v bolj simetričnih snoveh pa se število neodvisnih komponent še zmanjša. Če vpeljemo skrajšan zapis indeksov ($xx = 1, yy = 2, zz = 3, yz = 4, zx = 5, xy = 6$), zapišemo tenzor za primer izotropne snovi kot

$$\underline{p}_{\text{izo}} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix}, \tag{9.51}$$

pri čemer je $p_{44} = \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12})$. Koeficienti tenzorja so brezdimenzijski, njihova tipična vrednost pa je $p \sim 0,1$. Za vodo, na primer, velja $p_{11} \simeq p_{12} = 0,31$, za $LiNbO_3$ pa $p_{11} = -0,02, p_{12} = 0,08, p_{13} = 0,13, p_{14} = -0,08, p_{31} = 0,17, p_{33} = 0,07, p_{41} = -0,15, p_{44} = 0,12$.

Podobno kot pri elektro-optičnem pojavu lahko iz enačbe (9.48) izrazimo spremembo dielektričnega tenzorja

$$\Delta\varepsilon_{ij} = -\tilde{\varepsilon}_{ii}\tilde{\varepsilon}_{jj}p_{ijkl}S_{kl}, \tag{9.52}$$

kjer smo že predpostavili, da je nemoteni ε diagonalen.

Dvojni lom, ki se pojavi v deformirani snovi, izkoriščamo za študij mehanskih napetosti v modelih, ki so izdelani iz prozorne plastične snovi. Nas bo v nadaljevanju zanimal uklon svetlobe na periodični modulaciji lomnega količnika, ki nastane zaradi zvočnega valovanja v snovi. Takemu pojavu pravimo tudi akusto-optični pojav.

Naloga 9.6.1 Po izotropni snovi se širi longitudinalno valovanje vzdolž smeri z, tako da deformacijo v snovi zapišemo kot

$$\mathbf{u} = A\cos(qz - \Omega t)\mathbf{e}_z. \tag{9.53}$$

Pokaži, da je taka snov dvolomna z optično osjo vzdolž osi z, lastni lomni količniki pa so

$$n_{x'} \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{12}qA\sin(qz - \Omega t)) \tag{9.54}$$

$$n_{y'} \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{12}qA\sin(qz - \Omega t)) \tag{9.55}$$

$$n'_z \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{11}qA\sin(qz - \Omega t)), \tag{9.56}$$

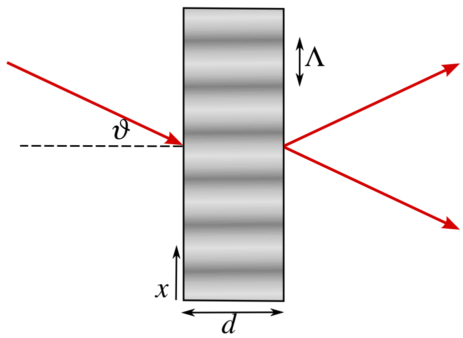
kjer je n lomni količnik v odsotnosti motnje.

9.7 Uklon svetlobe na zvočnem valovanju

Vzbudimo v plasti prozorne izotropne snovi zvočno valovanje z valovno dolžino Λ, ki potuje v smeri x. To naredimo tako, da na eno stran snovi priključimo piezoelektrik, ki se pod izmenično napetostjo periodično krči in razteza s krožno frekvenco Ω. Na drugo stran kristala damo akustični absorber ali pa reflektor, tako da lahko v snovi vzbudimo tudi stoječe valovanje. Zaradi zvočnega valovanja se v snovi periodično spreminja gostota in z njo lomni količnik

$$n = \tilde{n} + \Delta n \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x - \Omega t\right). \tag{9.57}$$

V zgoščini je lomni količnik nekoliko večji kot v razredčini, zato je optična pot na takem mestu skozi plast daljša. Ravno svetlobno valovanje, ki vpada na plast pravokotno glede na smer širjenja zvoka, po izstopu zato nima povsod enake faze, valovno čelo pa je periodično modulirano s periodo valovne dolžine zvočnega valovanja. Zvočno valovanje v snovi torej deluje kot optična fazna mrežica. Tipična frekvenca, s katero vzbujamo elastično deformacijo, je okoli $\Omega = 50$ MHz, ustrezna valovna dolžina pa okoli $\Lambda = 100$ µm. Frekvence, ki so v uporabi, navadno sežejo od nekaj MHz prek 10 GHz. Vsa ta valovanja imenujemo ultrazvočno valovanje.



Slika 9.8: Vpadna svetloba se na stoječem zvočnem valovanju v snovi uklanja.

Oglejmo si dva limitna primera. V prvem primeru je debelina plasti d, v kateri vzbujamo zvočno valovanje, zelo majhna (slika 9.9 levo). Takrat modulator deluje kot tanka uklonska mrežica in pojavi se veliko uklonskih vrhov, intenziteta posameznega žarka pa je razmeroma majhna. Kote, pod katerimi se pojavijo ojačitve, izračunamo po preprosti enačbi

$$\Lambda(\sin\vartheta - \sin\beta) = N\lambda, \tag{9.58}$$

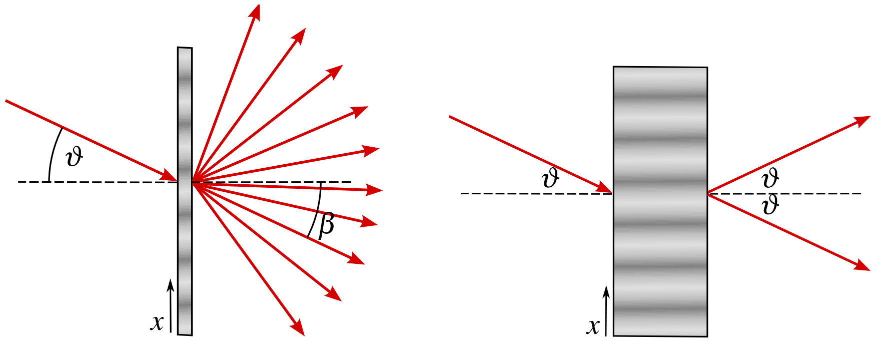
pri čemer je λ valovna dolžina svetlobe v snovi, N pa celo število. Takemu pojavu pravimo Raman-Nathov uklon[5]. Opazimo ga pri razmeroma nizkih zvočnih frekvencah (pod ~ 10 MHz) in majhnih debelinah (pod $d \sim 1$ cm) pri poljubnem vpadnem kotu ϑ.

V nasprotnem limitnem primeru se svetloba uklanja na ravnih zvočnih valovih in modulator deluje kot debela uklonska mrežica. V splošnem je delež uklonjene svetlobe na taki mrežici neuporabno majhen. Znaten postane le tedaj, kadar je izpolnjen Braggov pogoj[6]

$$2\Lambda\sin\vartheta = \pm N\lambda. \tag{9.59}$$

[5] Indijski fizik in nobelovec Sir Chandrasekhara Venkata Raman, 1888–1970, in indijski fizik N. S. Nagendra Nath.

[6] Angleška znanstvenika in nobelovca Sir William Henry Bragg, 1862–1942, in Sir William Lawrence Bragg, 1890–1971.

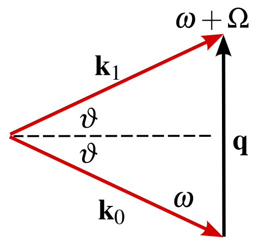


Slika 9.9: Ob vpadu svetlobe na tanko plast zvočnega valovanja se pojavi veliko uklonskih vrhov, na debeli plasti zvočnega valovanja pa je opazen zgolj en uklonjen vrh, pa še ta le ob izpolnjenem Braggovem pogoju (enačba 9.59).

Poglejmo natančneje, kako pridemo do gornjega pogoja. Zapišimo pogoj za ohranitev gibalne količine fotona pri sipanju na zvočnem valu

$$\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{q} = \mathbf{k}_1, \tag{9.60}$$

kjer je $\mathbf{k}_0$ valovni vektor vpadne svetlobe, $\mathbf{k}_1$ valovni vektor uklonjenega svetlobnega snopa, $\mathbf{q}$ pa valovni vektor zvočnega vala. Znak plus velja, kadar potuje zvok proti projekciji $\mathbf{k}_0$ na $\mathbf{q}$, negativen predznak pa ob potovanju zvoka v nasprotno smer. Ker je frekvenca zvočnega vala dosti nižja od frekvence svetlobe, se frekvenca svetlobe pri sipanju le malo spremeni in $\mathbf{k}_0$ in $\mathbf{k}_1$ sta po velikosti skoraj enaka. Tedaj je $q = 2k_0 \sin\vartheta$ (glej sliko 9.10), od koder sledi Braggov pogoj (enačba 9.59). Obenem je vpadni kot na zvočni val enak izhodnemu, kar pomeni, da se na zvočnem valu Braggovo sipana svetloba zrcalno odbije. Razmere so torej povsem analogne Braggovemu sipanju rentgenske svetlobe na kristalnih ravninah. Kot bomo pokazali v nadaljevanju, je ob izpolnjenem Braggovem pogoju mogoče doseči, da se vsa vpadna svetloba uklanja.



Slika 9.10: K izpeljavi Braggovega pogoja

★ Poskusimo še malo bolj natančno oceniti, kdaj je v veljavi Raman-Nathov in kdaj Braggov režim. Izhajajmo iz pogoja, da je razširitev žarka na debelini plasti zvočnega valovanja dovolj majhna, da se snop ne širi iz območja zgoščine v območje razredčine, da se torej ne razširi za več kot za $\Lambda/2$. Tako zapišemo divergenco kot (enačba 3.22) $\theta \sim \lambda/w_0 \sim 2\lambda/\Lambda$. Podobno velja tudi za vpadno valovanje, ki zaradi modulacije valovnih front dobi divergenco, ki je enaka $\theta \sim \lambda/(\Lambda/2)$. Divergenca valovanja ne sme presegati razširitve $\theta \sim \Lambda/2d$. Sledi kriterij za debelino d, pri kateri preidemo iz enega v drug režim

$$d \sim \frac{\Lambda^2}{4\lambda}. \tag{9.61}$$

Če svetloba z $\lambda = 1$ µm vpade na kristal, v katerem je vzbujeno zvočno valovanje z valovno dolžino $\Lambda = 0,2$ mm in frekvenco $\Omega = 150$ MHz, je mejna debelina $d \sim 1$ cm.

Če je zvočno valovanje potujoče, kar smo v gornjem razmišljanju že privzeli s tem, ko smo mu pripisali natanko določen valovni vektor **q**, se spremeni tudi frekvenca sipanega vala zaradi Dopplerjevega premika pri odboju na zvočnem valovanju, ki potuje s hitrostjo v_z. Upoštevati moramo le projekcijo na smer vpadne in odbite svetlobe, zato je

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm\frac{2v_z\sin\vartheta}{c} = \pm\frac{2\Omega\Lambda\sin\vartheta}{2\pi c} = \pm\frac{\Omega}{\omega}, \tag{9.62}$$

pri čemer smo uporabili Braggov pogoj (enačba 9.59). Sprememba frekvence sipane svetlobe je torej kar enaka frekvenci zvočnega valovanja. To je seveda v skladu z gornjo zahtevo, da se pri uklonu na zvočnem valovanju ohranja energija vpadnega fotona in kvanta zvočnega valovanja (fononа), ki se pri sipanju absorbira ali pri njem nastane.

Malenkost drugačno je obnašanje, ko v snovi vzbudimo stoječe zvočno valovanje. Takrat lahko sipanje obravnavamo kot vsoto sipanja na dveh valovanjih z valovnima vektorjema **q** in $-\mathbf{q}$. Smer Braggovo sipanega vala je obakrat enaka, frekvenca pa se enkrat poveča, drugič zmanjša za Ω. Zato se pojavi utripanje sipanega vala s frekvenco 2Ω.

Uporaba akusto-optičnih modulatorjev

Spoznali smo, da lahko z zvočnim valovanjem spreminjamo smer vpadne svetlobe. Bistvena razlika od navadnih uklonskih mrežic je dinamičnost akusto-optičnih modulatorjev, saj lahko uklonski kot svetlobe hitro spreminjamo, pri čemer pa smo omejeni s tem, da mora biti vsaj približno izpolnjen Braggov pogoj. S kombinacijo dveh med seboj pravokotnih akusto-optičnih modulatorjev lahko žarek premikamo po ravnini, kar s pridom uporabljamo v različnih optičnih napravah, na primer v optičnih pincetah, optičnih čitalcih ali optičnih litografskih zapisovalnikih.

Z vklapljanjem in izklapljanjem zvočnega valovanja, ki ga vzbujamo s piezoelektričnim elementom, na katerega pritisnemo izmenično napetost, lahko moduliramo intenziteto direktnega svetlobnega snopa. To potrebujemo na primer pri preklapljanju kvalitete laserskega resonatorja.

Tretji primer uporabe je spreminjanje frekvence svetlobe. Možne so spremembe do nekaj 100 MHz, kar je ravno primerno za uporabo v laserskih merilnikih hitrosti, kjer merimo frekvenco utripanja med referenčno svetlobo in svetlobo, odbito od merjenega predmeta. Če ima referenčna svetloba isto frekvenco kot merilni snop, ni mogoče določiti predznaka hitrosti predmeta, če pa referenčni svetlobi nekoliko spremenimo frekvenco, se pojavi utripanje tudi tedaj, ko predmet miruje. Frekvenca utripanja se poveča ali zmanjša glede na predznak hitrosti predmeta.

Naslednja pomembna uporaba je za uklepanje faz v laserskem resonatorju. Če je v Braggovem elementu prisotno stoječe zvočno valovanje, je amplituda direktnega snopa modulirana s frekvenco zvoka. Kadar je frekvenca zvoka ravno enaka razmiku frekvenc laserskih nihanj, lahko nastanejo uklenjene faze vzbujenih nihanj in s tem kratki, periodični sunki svetlobe.

Zanimiva je tudi uporaba Braggovega elementa za izdelavo hitrega frekvenčnega analizatorja električnih signalov. Piezoelektrični element vzbujamo z električnim signalom, ki ima neznan spekter. Enak spekter imajo tudi vzbujeni zvočni valovi, pri čemer vsakemu valu določene frekvence ustreza določen kot odklona svetlobnega snopa. Za Braggovim elementom postavimo lečo. Vsak delni uklonjeni snop da v goriščni ravnini svetlo točko, katere položaj je odvisen od kota odklona in torej od frekvence zvočnega vala. Spekter zaznamo z vrstičnim detektorjem. Akusto-optični element oziroma Braggova celica torej frekvenčni spekter zvočnih valov prevede v prostorski spekter prepuščene svetlobe. Prostorski spekter svetlobe pa lahko analiziramo z lečo, ki nam v goriščni ravnini da prostorsko Fourierevo transformacijo svetlobnega snopa pred lečo.

9.8 *Račun akusto-optičnega pojava

Izračunajmo intenziteto svetlobe, ki se uklanja na zvočnem valovanju. Izhajamo iz valovne enačbe v nehomogenem sredstvu, kar je dokaj težaven problem in se moramo zateči k približkom. Uporabili bomo metodo sklopljenih valov.

Naj vzporeden snop zvočnega valovanja s širino d in valovnim vektorjem $\mathbf{q}$ potuje v smeri x. Nanj pod kotom ϑ glede na os z vpada ravno svetlobno valovanje z valovnim vektorjem $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) = k(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$. Vse valovanje, vpadno na levi od zvočnega snopa in izhodno na njegovi desni, obravnavajmo znotraj snovi, da nam ni treba upoštevati še loma, ki le zaplete izraze.

Privzemimo, da se v snovi zaradi zvočnih valov spremeni le velikost dielektrične konstante. Ob upoštevanju zveze med spremembo dielektričnosti in deformacijo v zvočnem valu (enačba 9.52) lahko spremembo dielektričnosti zapišemo kot

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \Delta\varepsilon = \tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^2 p S_0 \sin(qx - \Omega t). \tag{9.63}$$

Zaradi spremembe dielektričnosti pride do pojava dodatne polarizacije ΔP

$$\Delta P = \varepsilon_0 \Delta\varepsilon E = -\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}^2 p S_0 \sin(qx - \Omega t) E. \tag{9.64}$$

Dodatna polarizacija v valovno enačbo doprinese dodaten nehomogen člen, podobno kot pri nelinearni optiki (enačba 8.11). Zapišemo

$$\nabla^2 E - \frac{\tilde{\varepsilon}}{c^2} \frac{\partial E^2}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial t^2}, \tag{9.65}$$

pri čemer smo privzeli, da je $\nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$, čeprav je ε funkcija kraja.

Enačbo (9.65) brez dodane polarizacije ΔP rešijo ravni valovi z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$ in frekvenco ω. Tej rešitvi se primešajo valovi z valovnim vektorjem $\mathbf{k} \pm n\mathbf{q}$ in frekvenco $\omega \pm n\Omega$. Zato iščemo rešitve v obliki vsote ravnih valov, torej Fouriereve vrste

$$E = \sum_n A_n(z) e^{in(qx - \Omega t)} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}. \tag{9.66}$$

Zaradi sklopitve preko ΔP smo dopustili, da so amplitude A_n funkcije z. Če je $\Delta\varepsilon$ dovolj majhen, se $A_n(z)$ le počasi spreminjajo.

Izračunajmo

$$\nabla^2 E = \sum_n \left(-[k_z^2 + (k_x + nq)^2] A_n(z) + 2ik_z A_n'(z) \right) e^{i[(k_x+nq)x + k_z z - (\omega + n\Omega)t]}. \tag{9.67}$$

Člene z A_n'' lahko izpustimo, če je le $k_z A_n' \gg A_n''$ oziroma kadar se A_n spreminjajo počasi v primerjavi z $\exp(ik_z z)$. Drugi odvod polarizacije po času da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial t^2} = &-\frac{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}^2 p S_0}{2i} \sum_n A_n(z) \exp\left(i[(k_x + nq)x + k_z z - (\omega + n\Omega)t]\right) \cdot \\ &\left(-[n\Omega + \omega + \Omega]^2 e^{i(qx - \Omega t)} + [n\Omega + \omega - \Omega]^2 e^{i(-qx + \Omega t)} \right), \end{aligned} \tag{9.68}$$

drugi odvod polja po času pa

$$\frac{\partial E^2}{\partial t^2} = -\sum_n (n\Omega + \omega)^2 A_n(z) e^{in(qx - \Omega t)} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}. \tag{9.69}$$

Vstavimo izraze (9.67), (9.68) in (9.69) v valovno enačbo (9.65) in izenačimo člene z isto časovno in prostorsko frekvenco, na primer s $k_z z + (k_x + mq)x - (\omega + m\Omega)t$. Tako dobimo

$$-[k_z^2 + (k_x + mq)^2]A_m + 2ik_z A_m' + \frac{\tilde{\varepsilon}}{c^2}(m\Omega + \omega)^2 A_m = \tag{9.70}$$

$$= \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}^2 p S_0}{2i}(\omega + m\Omega)^2 (A_{m-1} - A_{m+1}). \tag{9.71}$$

Upoštevamo, da je

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\tilde{\varepsilon}\omega^2}{c^2} \tag{9.72}$$

in naredimo približek $(\omega + m\Omega)^2 \approx \omega^2$. Sledi

$$A_m' + i\beta_m A_m + \xi(A_{m+1} - A_{m-1}) = 0, \tag{9.73}$$

kjer sta

$$\beta_m = \frac{mq}{k_z}(k_x + \frac{1}{2}mq) \quad \text{in} \quad \xi = -\frac{\tilde{\varepsilon} p S_0 k^2}{4k_z}. \tag{9.74}$$

Reševanje sistema enačb (9.73) je težavno, zato poiščimo rešitve le v treh pomembnih limitnih primerih. Amplituda vala, ki vpada z leve, naj bo $A_0(0) = A_0$, za ostale pa naj velja $A_n(0) = 0$.

Braggov uklon ob šibki pretvorbi

Najprej privzemimo, da je $L\xi \ll 1$, da je torej velikost $\Delta\varepsilon$ majhna in debelina zvočnega snopa ne prevelika. Tedaj je pri vseh z in za pozitivne m $A_{m+1} \ll A_m$ in lahko člen A_{m+1} v enačbi (9.73) izpustimo. S tem zapišemo preprost sistem enačb

$$A_m' + i\beta_m A_m = \xi A_{m-1}, \tag{9.75}$$

ki jih lahko zapored integriramo:

$$A_m(z) = \xi e^{-i\beta_m z} \int_0^z A_{m-1}(z') e^{i\beta_m z'} dz'. \tag{9.76}$$

Podobne izraze izpeljemo za negativne m.

Poglejmo posebej prvi uklonjeni val z amplitudo A_1. Po predpostavki, da je $A_{\pm 1} \ll A_0$, se le malo energije uklanja iz osnovnega vala in lahko privzamemo, da je $A_0(z)$ skoraj konstanta. Potem lahko integral v enačbi (9.76) izračunamo

$$A_1(d) = A_0 \xi d \, \frac{\sin \beta_1 d/2}{\beta_1 d/2} \, e^{-i\beta_1 d/2}\,, \tag{9.77}$$

pri čemer je d debelina plasti zvočnega valovanja. Funkcija $A_1(d)$ ima vrh pri $\beta_1 = 0$, to je po enačbi (9.74) pri

$$k_x + \frac{q}{2} = k \sin\vartheta + \frac{q}{2} = 0 \qquad \text{ali} \qquad 2\Lambda \sin\vartheta = -\lambda. \tag{9.78}$$

Vidimo, da predstavlja $\beta_1 = 0$ ravno pogoj za Braggovo sipanje vpadnega vala.

Delež moči uklonjenega vala je potem

$$\boxed{\frac{I_1}{I_0} = \left|\frac{A_1}{A_0}\right|^2 = (\xi d)^2 \left(\frac{\sin \beta_1 d/2}{\beta_1 d/2}\right)^2.} \tag{9.79}$$

Če je Braggov pogoj izpolnjen, je $I_1/I_0 = (\xi d)^2$, kar lahko velja le, dokler je $\xi d \ll 1$. Kadar intenziteta uklonjenega žarka tako naraste, da ta pogoj ni več izpolnjen, je treba v računu upoštevati tudi zmanjšanje moči vpadnega snopa.

Braggov uklon ob znatni pretvorbi

Drug primer naj bo približek, da sta le A_0 in A_1 različni od nič, opustimo pa omejitev $d\xi \ll 1$. Ta približek je smiseln, saj je Braggov pogoj hkrati lahko izpolnjen le za en uklonjen val, na primer $m = 1$. Tedaj so vse ostale amplitude $A_{m,m\neq 0,1}$ majhne in ne vplivajo na A_1. Zaradi velike pretvorbe $A_0(z)$ ne smemo več obravnavati kot konstante. Upoštevamo izpolnjen Braggov pogoj (enačba 9.78) in iz sistema enačb (9.73) dobimo

$$\begin{aligned} A_0' + \xi A_1 &= 0 \\ A_1' - \xi A_0 &= 0. \end{aligned} \tag{9.80}$$

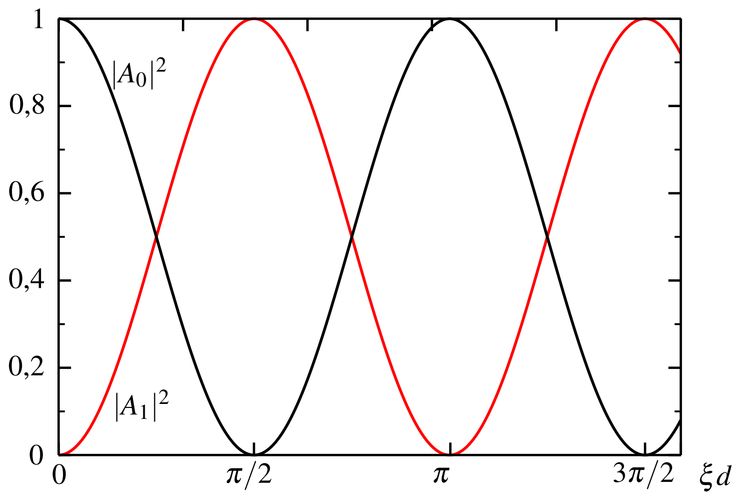
Ob začetnih pogojih $A_0(0) = A_0$ in $A_1(0) = 0$ sta rešitvi gornjih enačb

$$A_0(d) = A_0 \cos(\xi d) \tag{9.81}$$

in

$$A_1(d) = A_0 \sin(\xi d). \tag{9.82}$$

Če je izpolnjen Braggov pogoj, se moč vpadnega vala na razdalji $\pi/(2\xi)$ skoraj vsa pretoči v uklonjeni snop, nato pa zopet nazaj (slika 9.11). Za čim bolj učinkovito delovanje akusto-optičnega modulatorja seveda želimo doseči ravno take pogoje.



Slika 9.11: Intenziteta prepuščenega in uklonjenega valovanja na zvočnem valovanju v odvisnosti od debeline plasti zvočnega valovanja

V gornja izraza vstavimo še parameter ξ, ki je podan z enačbo (9.74). Razmerje med močjo uklonjenega in vpadnega snopa je tako

$$\boxed{\frac{I_1}{I_0} = \sin^2\left(\frac{\pi n_0^3 p S_0 d}{2\lambda \cos\vartheta}\right).} \tag{9.83}$$

Poiščimo še amplitudo deformacije S_0. Za longitudinalne (zvočne) valove v snovi oblike $s = s_0 \cos(kz - \omega t)$ je deformacija

$$S_{zz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial z}\right) = \frac{\partial s}{\partial z}. \tag{9.84}$$

Povprečna gostota energijskega toka je

$$j_z = \frac{1}{2}v_z\left(\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho v_z^2\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\rho v_z^3 S_0^2, \tag{9.85}$$

kjer je v_z hitrost zvoka v snovi in ρ gostota snovi. Sledi

$$S_0 = \sqrt{\frac{2j_z}{\rho v_z^3}}. \tag{9.86}$$

Praktično je vpeljati merilo uporabnosti neke snovi za akusto-optični modulator. To je koeficient

$$M = \frac{n_0^6 p^2}{\rho v_z^3}. \tag{9.87}$$

Večja kot je njegova vrednost, bolj izrazit je akusto-optični pojav v dani snovi.

Poglejmo primer. V kremenu z gostoto $\rho = 2,2\cdot 10^3$ kg/m^3 je hitrost zvoka $v_z = 6000$ m/s, $\tilde{n} = 1,46$ in $p = 0,2$. To da $M = 8\cdot 10^{-16}$ W/m^2. Pri gostoti zvočnega toka 10 W/cm^2 in valovni dolžini svetlobe 633 nm pride do popolnega prenosa moči v uklonjeni snop pri debelini $d = 3$ cm. Gornja gostota zvočnega toka je kar velika in je ni prav lahko doseči, zato so uklonski izkoristki navadno nekaj manjši od 1.

Izračunajmo še kot odklona uklonjenega vala $\theta = 2\vartheta$

$$\theta \approx \frac{q}{k} = \frac{\lambda}{\tilde{n}\Lambda} = 1,7\cdot 10^{-3}. \tag{9.88}$$

Uklonski kot je torej precej majhen.

★ Opisani račun izkoristka uklona na zvočnih valovih je uporaben tudi pri računu izkoristka holograma. V primeru faznega holograma je račun povsem enak in nam kaže tudi razliko med tankim in debelim hologramom, kako pa je z izkoristkom amplitudnega holograma, kjer je modulirana absorpcija v snovi, lahko bralec izračuna sam.[7]

Raman-Nathov uklon

Oglejmo si še tretji primer. Izhajamo iz sistema enačb (9.73), ki smo ga zaenkrat rešili za primer Braggovega odboja oziroma v njegovi bližini. Enačbe je preprosto rešiti še v primeru Raman-Nathovega približka. Vpeljimo novo neodvisno spremenljivko $\zeta = 2\xi z$. Zveza (9.73) preide v

$$2\frac{dA_m(\zeta)}{d\zeta} + A_{m+1}(\zeta) - A_{m-1}(\zeta) = \frac{\beta_m}{i\xi}A_m. \tag{9.89}$$

Člen na desni lahko izpustimo, če je

$$\frac{\beta_m}{\xi} = \left|\frac{4mq}{\tilde{\varepsilon}pS_0k}(\sin\vartheta + \frac{mq}{2k})\right| \ll 1, \tag{9.90}$$

oziroma če je valovna dolžina zvoka dovolj velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Potem v enačbi (9.89) prepoznamo rekurzijsko zvezo za Besslove funkcije

$$2J_n' + J_{n+1} - J_{n-1} = 0 \tag{9.91}$$

z rešitvijo $A_m(z) = A_0 J_m(2\xi z)$. Kadar je $2\xi d$ ničla funkcije J$_0$, prvič je to pri $2\xi d \approx 2.4$, se vsa energija ukloni iz vpadnega snopa, vendar se v tem primeru, ko Braggov pogoj ni izpolnjen, razporedi v mnogo uklonjenih snopov.

[7] Glej H. Kogelnik, Bell Syst. Tech. J. 48, 2909 (1969).

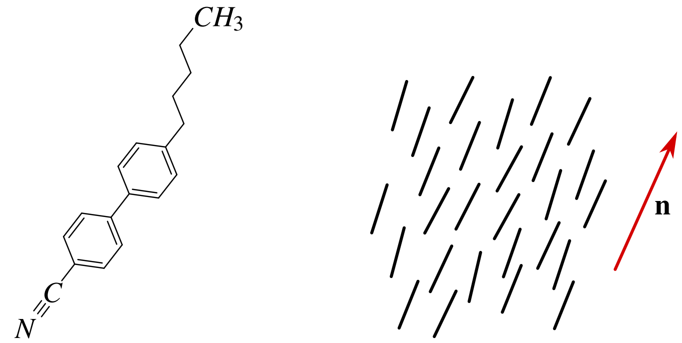
9.9 Modulacija s tekočimi kristali

Nematični tekoči kristali

Za konec opišimo še modulacijo svetlobe s tekočimi kristali. Tekoči kristali so anizotropne kapljevine. To pomeni, da so tekoči kot kapljevine, imajo pa določene anizotropne lastnosti kot trdni kristali. Tekoče kristale tvorijo podolgovate ali ploščate molekule, ki odražajo različne stopnje urejenosti.

Omejimo se najosnovnejši primer, to so podolgovate organske molekule v nematični fazi tekočega kristala. Navadno so to molekule z relativno togim jedrom iz dveh ali treh benzenovih obročev, ki imajo na koncih krajše ali daljše alifatske verige (slika 9.12). Značilnost nematične faze je, da so v njej težišča molekul neurejena, enako kot v navadni tekočini, osi molekul pa so v povprečju urejene v določeno smer. Pravimo, da imajo molekule v nematiku orientacijsko ureditev dolgega dosega. Če nematik segrejemo, preide v izotropno tekočo fazo, če pa ga ohladimo, neposredno ali prek drugih tekočekristalnih faz preide v trdno kristalno obliko.

Smer povprečne urejenosti podolgovatih molekul opišemo z enotskim vektorjem $\mathbf{n}$, ki ga imenujemo direktor. Smeri $\mathbf{n}$ in $-\mathbf{n}$ sta enakovredni, saj molekule z enako verjetnostjo kažejo v smer $+\mathbf{n}$ kot v $-\mathbf{n}$. Stopnja urejenosti v mikroskopski sliki ni prav velika, povprečen odklon molekul od $\mathbf{n}$ je nekaj deset stopinj, odvisno seveda od temperature.

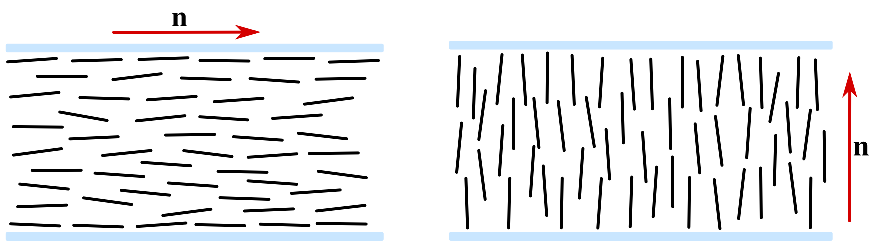


Slika 9.12: Molekula enega najbolj razširjenih tekočih kristalov, 4-ciano-4'pentil-bifenila ali 5CB (levo) in shematski prikaz nematične faze (desno)

Molekule so v nematični fazi v povprečju orientacijsko urejene, zato se nematik obnaša kot enoosen dvolomni kristal. Njegova optična os je vzporedna z $\mathbf{n}$, lastni vrednosti dielektričnega tenzorja pa sta $\varepsilon_\perp$ in $\varepsilon_\parallel$, ki ustrezata rednemu (n_o) in izrednemu (n_e) lomnemu količniku. Ker je optična polarizabilnost benzenovih obročev vzdolž osi molekul precej večja kot v prečni smeri, je razlika med rednim in izrednim lomnim količnikom v nematiku razmeroma velika, navadno med 0,1 in 0,2, seveda spet odvisno od temperature.

V povprečju so molekule urejene v smeri direktorja. Če se smer direktorja lokalno spremeni, je energija takega deformiranega stanja nekoliko večja od energije homogenega urejenega stanja. Tekoči kristal na drugače orientiran delček snovi zato deluje z navorom v smeri zmanjševanja nehomogenosti $\mathbf{n}$. To lastnost, ki je značilna za tekoče kristale, imenujemo orientacijska elastičnost. Vendar so v makroskopskem vzorcu nematičnega tekočega kristala elastični navori prešibki, da bi uredili celoten vzorec, zato se v splošnem smer direktorja $\mathbf{n}$ po vzorcu neurejeno spreminja. V optičnih napravah pa potrebujemo urejene vzorce, zato moramo ureditev vzorca vsiliti. To naredimo z zunanjim električnim ali magnetnim poljem, ali pa vzorce pripravimo dovolj tanke, da ureditev vsilijo mejne površine.

Poglejmo najprej, kako nastane urejen vzorec v tankih plasteh. Če površino, ki je v stiku s tekočim kristalom, ustrezno pripravimo (prevlečemo s posebnimi plastmi ali mehansko obdelamo), se molekule tekočega kristala tik ob površini uredijo v dani smeri (slika 9.13). Tako na primer podrgnjena tanka plast najlona uredi **n** ob površini v smeri drgnjenja vzporedno s površino. Po drugi strani pa tanka plast lecitina ali surfaktanta silana uredi direktor pravokotno na površino. Ti dve snovi imata namreč polarno glavo, ki se adsorbira na stekleno površino, in alifatsko verigo, ki stoji približno pravokotno na površino. Zato se tudi alifatski repi molekul tekočega kristala uredijo pravokotno na steklo. V obeh primerih, vzporedni (planarni) ali pravokotni (homeotropni) ureditvi ob steni, se urejenost zaradi orientacijske elastičnosti ohranja tudi stran od stene, tako da lahko brez težav naredimo urejene vzorce debeline do kakih 200 µm. Pri večjih debelinah so elastični navori prešibki in v vzorcu nastanejo defekti.



Slika 9.13: Ureditev tekočega kristala navadno vsilimo z urejevalno površino. Dva primera sta planarna ureditev (levo), kjer je direktor vzporeden z urejevalno površino, in homeotropna ureditev (desno), kjer je direktor pravokoten mejno ploskev.

Na ureditev molekul tekočega kristala vpliva zunanje električno ali magnetno polje. Zaradi urejenosti molekul električna (in magnetna) susceptibilnost nematičnega tekočega kristala ni skalar, temveč ima dve različni lastni vrednosti, eno za smer vzporedno z **n**, drugo za pravokotno nanj. Zato je elektrostatična energija odvisna od kota med zunanjim poljem **E** in direktorjem **n**. Gostoto električne energije zapišemo kot

$$w_{el} = -\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}. \tag{9.92}$$

Električno polje lahko razstavimo na del, ki je vzporeden z **n**, in del, ki je pravokoten nanj

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{E} - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})\,. \tag{9.93}$$

Potem je

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_\perp\mathbf{E} + \varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}, \tag{9.94}$$

pri čemer je $\varepsilon_a = \varepsilon_\| - \varepsilon_\perp$ anizotropni del dielektrične konstante. Anizotropni del energije je tako do konstante

$$\boxed{w_a = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})^2,} \tag{9.95}$$

Če je $\varepsilon_a > 0$, se molekule tekočega kristala uredijo v smeri zunanjega polja, v nasprotnem primeru pa pravokotno nanj.

Struktura tekočekristalnega vzorca je tako odvisna od orientacijske elastičnosti, robnih pogojev, ki jih določimo z obdelavo mejne površine, in od jakosti ter smeri zunanjega električnega ali magnetnega polja.

Tekočekristalni prikazovalnik

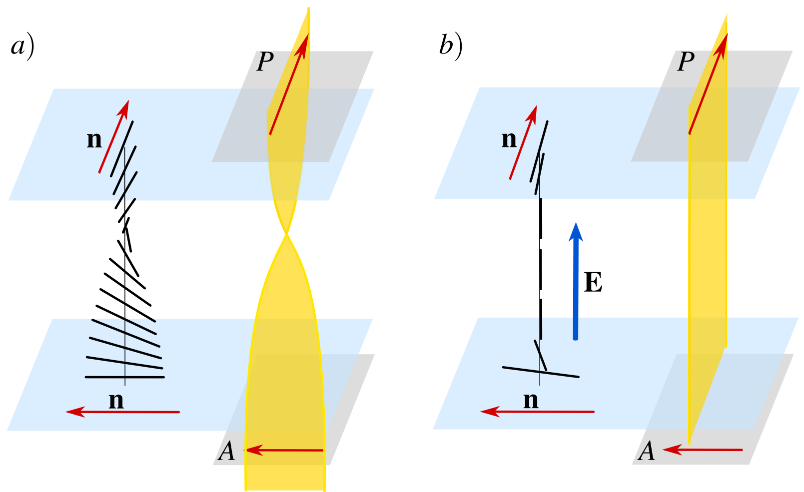
Vzemimo tanko plast tekočega kristala med dvema površinama, ki vsiljujeta vzporedno planarno ureditev. Vzorec je urejen in homogen, optična os leži v ravnini plasti. Če dodamo na površini še prozorni elektrodi, lahko z zunanjo napetostjo spreminjamo orientacijo molekul v plasti in tako tudi smer optične osi. Dovolj velika napetost zasuče **n** in optična os se postavi pravokotno na stene, razen tik ob površini. Tipično so take napetosti okoli nekaj voltov.

Ta pojav lahko izkoristimo za izdelavo preprostega optičnega preklopnika. Naj debelina plasti d ustreza debelini ploščice $\lambda/2$ za izbrano valovno dolžino svetlobe

$$d(n_e - n_o) = (2N+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{9.96}$$

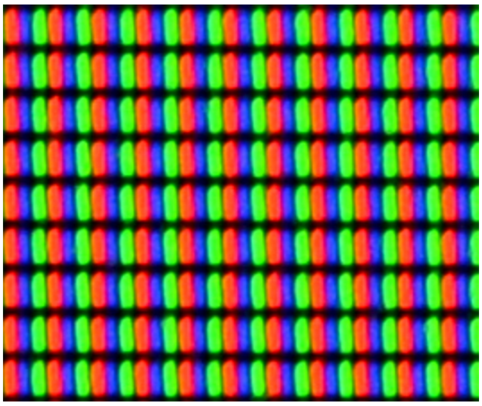
kjer je N celo število, n_e izredni in n_o redni lomni količnik. Ker je v nematikih $n_e - n_o \sim 0,1$, je ustrezna debelina d nekaj µm. Tak vzorec damo med dva prekrižana polarizatorja s prepustno smerjo pod kotom 45° glede na **n** oziroma optično os. Vzorec, ki deluje kot ploščica $\lambda/2$, polarizacijo svetlobe z izbrano valovno dolžino zasuče za 90° in svetloba prehaja skozi analizator. Ko priključimo napetost, se optična os obrne v smeri polja. Polarizacija vpadne svetlobe se pri prehodu skozi plast ohrani in analizator je ne prepusti. Z električnim poljem smo torej preklopili iz stanja, ki prepušča svetlobo, v stanje, ki svetlobe ne prepusti. Vendar ima tak preklopnik nekaj slabosti. Prepustnost je odvisna od valovne dolžine svetlobe in od temperature, poleg tega mora biti debelina plasti povsod povsem enaka. Zato se v praksi uporablja zasukan nematik.

Zasukan nematik nastane tako, da površini, ki vsiljujeta planarno ureditev, zasučemo za kot 90° eno glede na drugo (slika 9.14 a), zato se **n** v plasti zvezno zavrti. Pokazali bomo, da polarizacija svetlobe, ki je ob vstopu v plast polarizirana v smeri urejanja, pri prehodu skozi plast približno sledi **n** in je ob izstopu iz plasti pravokotna na vpadno polarizacijo. Ko priključimo električno polje, se optična os obrne v smer pravokotno na plast tekočega kristala (slika 9.14 b). V tem primeru se polarizacija ne zasuče in analizator svetlobe ne prepusti. Plast med prekrižanima polarizatorjema brez polja torej prepušča svetlobo, s poljem pa ne. Pri tem delovanje prikazovalnika ni dosti odvisno niti od debeline plasti niti od valovne dolžine.



Slika 9.14: a) Zasukana nematična celica. Polarizacija (P) približno sledi smeri zasukanega direktorja in analizator (A) prepusti svetlobo. b) Ko priključimo električno polje, se tekočekristalne molekule zasučejo v smer polja. Polarizacija svetlobe (P) se ohranja in analizator (A) je ne prepusti.

★ Tekočekristalni zasloni, ki jih uporabljamo v praksi, so precej bolj zapleteni. Najpreprostejši so črno-beli prikazovalniki, ki delujejo z odbito svetlobo (npr. v žepnih računalih), zato imajo za analizatorjem odbojno površino. Večina sodobnih prikazovalnikov (npr. računalniški ali telefonski zasloni) pa za osvetlitev uporablja LED ali fluorescenčna svetila. Barve dosežemo z barvnimi filtri (rdečim, modrim in zelenim) na vsakem pikslu posebej, natančno krmiljenje pikslov pa s tankoplastnimi tranzistorji (*Thin film transistors*, TFT). Veliko sodobnejših zaslonov ima tekoče kristale urejene planarno, tekočekristalne zaslone pa lahko z dodatnimi plastmi naredimo tudi občutljive na dotik.



Slika 9.15: Vsak piksel tekočekristalnega zaslona je sestavljen iz treh barv.

Pokazati moramo še, da polarizacija svetlobe približno sledi zasuku optične osi. Vzemimo vzorec, kakršen je na sliki (9.14 a) in ga obravnavajmo kot lokalno optično enoosno snov. Pri $z = 0$ naj bo optična os v smeri x, ko se premikamo vzdolž osi z, pa naj se optična os suče v ravnini xy. Kot med optično osjo in osjo x tako zapišemo

$$\varphi = qz. \tag{9.97}$$

Poleg zasukane nematične celice je pomemben primer snovi s takimi lastnostmi holesterični tekoči kristal, ki je zelo podoben nematičnim, le da je kiralen in se $\mathbf{n}$ spontano suče okoli smeri, pravokotne na $\mathbf{n}$. Zanimajmo se le za širjenje svetlobe v smeri z. Tedaj potrebujemo le del dielektričnega tenzorja v xy ravnini.

Naloga 9.9.1 Pokaži, da se dielektrični tenzor v zasukani nematični plasti zapiše kot

$$\varepsilon(z) = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon_a \cos(2qz) & \frac{1}{2}\varepsilon_a \sin(2qz) \\ \frac{1}{2}\varepsilon_a \sin(2qz) & \bar{\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon_a \cos(2qz) \end{bmatrix}, \tag{9.98}$$

kjer je z razdalja od plasti, v kateri je direktor obrnjen v smeri x, povprečna vrednost $\bar{\varepsilon}$ pa

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_\parallel + \varepsilon_\perp}{2}. \tag{9.99}$$

Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) hitro uvidimo, da je valovna enačba za valovanje s frekvenco ω oblike

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(z)\mathbf{E} = 0 \tag{9.100}$$

ali po komponentah, upoštevajoč tenzor dielektričnosti (enačba 9.98)

$$\frac{d^2E_x}{dz^2} + (\beta^2 + \alpha^2\cos(2qz))E_x + \alpha^2 E_y \sin(2qz) = 0 \tag{9.101}$$

in

$$\frac{d^2E_y}{dz^2} + \alpha^2 E_x \sin(2qz) + (\beta^2 - \alpha^2\cos(2qz))E_y = 0, \tag{9.102}$$

kjer je $\alpha^2 = \varepsilon_a\omega^2/(2c^2)$ in $\beta^2 = \bar{\varepsilon}\omega^2/c^2$. Dobili smo torej sistem dveh sklopljenih diferencialnih enačb.

Za reševanje je ugodno vpeljati krožni polarizaciji $E_+ = E_x + iE_y$ in $E_- = E_x - iE_y$. Enačbi (9.101) in (9.102) prepišemo v

$$-\frac{d^2E_+}{dz^2} = \beta^2E_+ + \alpha^2E_-e^{2iqz} \tag{9.103}$$

in

$$-\frac{d^2E_-}{dz^2} = \alpha^2E_+e^{-2iqz} + \beta^2E_-. \tag{9.104}$$

Lastne rešitve poiščimo v obliki

$$E_+ = Ae^{i(k+q)z} \tag{9.105}$$

in

$$E_- = Be^{i(k-q)z}. \tag{9.106}$$

Nastavek reši sistem enačb (9.103) in (9.104), natanko takrat, kadar A in B rešita sistem homogenih linearnih enačb

$$[(k+q)^2 - \beta^2]A - \alpha^2B = 0 \tag{9.107}$$

in

$$-\alpha^2A + [(k-q)^2 - \beta^2]B = 0. \tag{9.108}$$

Sistem je netrivialno rešljiv, če je determinanta koeficientov enaka nič

$$(k^2 + q^2 - \beta^2)^2 - 4k^2q^2 - \alpha^4 = 0. \tag{9.109}$$

Spomnimo se, da sta β in α sorazmerna z ω, zato dobljena enačba predstavlja disperzijsko relacijo – zvezo med ω in k – za svetlobo v zavitem sredstvu

$$(k^2 + q^2 - \frac{\bar{\varepsilon}\omega^2}{c^2})^2 - 4k^2q^2 - \frac{\varepsilon_a^2\omega^4}{4c^4} = 0. \tag{9.110}$$

V splošnem je iskanje rešitev gornje enačbe zapleten problem, vendar za razlago delovanja zasukane nematične celice zadošča približek $q \ll \beta$ in α, ko je torej perioda sukanja optične osi velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Tedaj lahko q v disperzijski zvezi (enačba 9.109) zanemarimo in dobimo

$$k^2 = \begin{cases} \beta^2 + \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel \\ \beta^2 - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp \end{cases} \tag{9.111}$$

Ti vrednosti ustrezata velikosti valovnega vektorja za izredni in redni val v navadnem enoosnem kristalu. Vstavimo ju v enačbi (9.105) ali (9.106) in za polarizaciji lastnih valov dobimo $B = \pm A$.

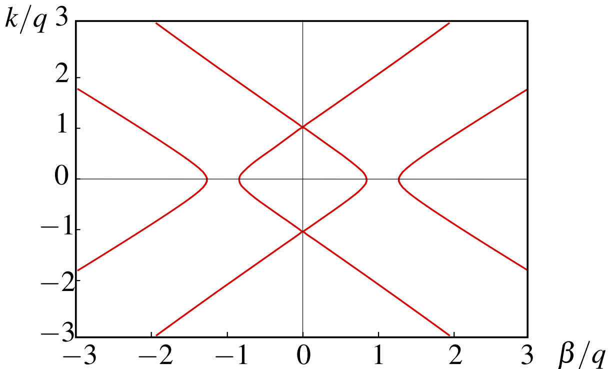
Izračunajmo še obe kartezični komponenti električnega polja za prvo rešitev

$$E_x = \frac{1}{2}(E_+ + E_-) = \frac{1}{2}Ae^{ikz}(e^{iqz} + e^{-iqz}) = Ae^{ikz}\cos qz \tag{9.112}$$

$$E_y = \frac{1}{2i}(E_+ - E_-) = \frac{1}{2i}Ae^{ikz}(e^{iqz} - e^{-iqz}) = Ae^{ikz}\sin qz. \tag{9.113}$$

Polarizacija torej res sledi optični osi. Druga rešitev da val, ki je polariziran pravokotno na lokalno optično os in se prav tako suče z njo. Pri tem se prvi val širi s fazno hitrostjo c/n_e, torej kot izredni val, drugi pa s c/n_o, to je kot redni val. Če na zasukano nematično celico vpada svetloba, ki je polarizirana ali vzporedno z optično osjo ob meji ali pravokotno nanjo, se pojavi na izhodni strani polarizacija, zasukana za enak kot, kot je zasukana optična os. V primeru, da vpadna polarizacija ne sovpada z eno od lastnih osi, jo razstavimo na obe lastni in po prehodu skozi tekoči kristal zopet sestavimo, s čemer seveda v splošnem nastane eliptična polarizacija.

★ Disperzijsko zvezo (enačba 9.109 oziroma 9.110) lahko rešimo numerično (slika 9.16). Vidimo, da pri vseh frekvencah, razen v ozkem območju – recimo mu frekvenčna reža – pri danem α obstajajo štiri realne rešitve za k, po dve za valovanji v pozitivni in v negativni smeri. V območju reže je en par rešitev imaginaren. Vsaki vrednosti k pripada neko razmerje amplitud A in B, ki ga izračunamo iz enačb (9.105) in (9.106) in ki določa polarizacijo lastnega vala. Polarizacije lastnih valov so v splošnem eliptične in pri dani frekvenci med seboj niso pravokotne, saj zapisani sistem enačb ne predstavlja čisto navadnega problema lastnih vektorjev simetrične matrike. V območju frekvenčne reže le en par rešitev predstavlja potujoč val, drug pa polje, ki eksponentno pojema v sredstvo. Zato se svetloba s frekvenco v reži in z ustrezno polarizacijo, ki vpada na holesterični tekoči kristal, totalno odbije. Pojav je povsem analogen Braggovemu odboju na kristalih in daje holesterikom značilen obarvan videz.



Slika 9.16: Rešitve disperzijske zveze (enačba 9.109) v zasukanem nematiku pri izbrani α. Razen na ozkem frekvenčnem območju obstajajo štiri rešitve za vsako frekvenco.

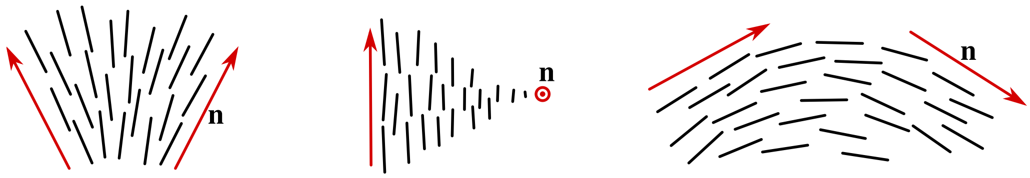
9.10 *Račun preklopa v tekočem kristalu – Frederiksov prehod

V prejšnjem razdelku smo omenili, da lahko z dovolj velikim zunanjim poljem molekule tekočega kristala, razen tik ob površini, obrnemo v smeri polja. Izračunajmo jakost polja, ki je potrebna za ta zasuk.

Energija nematičnega tekočega kristala je najnižja, kadar je direktor **n** povsod obrnjen v isto smer. Povečanje energije zaradi krajevne odvisnosti **n** v splošnem zapišemo z orientacijsko elastično energijo oziroma Frankovo prosto energijo[8]

$$F_e = \frac{1}{2}\int \left\{K_1(\nabla\cdot\mathbf{n})^2 + K_2[\mathbf{n}\cdot(\nabla\times\mathbf{n})]^2 + K_3[\mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{n})]^2\right\} dV. \tag{9.114}$$

Pri tem so K_1, K_2 in K_3 tri Frankove elastične konstante, ki so odvisne od snovi in tudi od temperature. Prvi člen predstavlja povečanje energije zaradi deformacije v obliki pahljače, drugi zaradi zasuka, tretji pa zaradi upogiba (slika 9.17).



Slika 9.17: Trije načini deformacije ureditve tekočega kristala so pahljačasta deformacija, zasuk in upogib.

V zunanjem električnem polju se energija tekočega kristala dodatno spremeni. Navadno je neodvisna električna količina električna poljska jakost, saj je polje posledica zunanje napetosti na elektrodah. Ustrezni člen v prosti energiji je tedaj (enačbi 9.92 in 9.94)

$$F_{el} = -\int \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} dV = -\frac{1}{2}\int \left(\varepsilon_0\varepsilon_\perp \mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})^2\right) dV = F_0 + F_{el,a}. \tag{9.115}$$

Prvi člen je neodvisen od **n**, zato ni pomemben pri izračunu preklopa. Prosta energija nematičnega tekočega kristala v električnem polju je tako

$$F = F_0 + F_e - \int \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})^2 dV = F_0 + F_e + F_{el,a}, \tag{9.116}$$

kjer F_0 predstavlja del proste energije, ki je neodvisen od **n**. Tekoči kristal je v ravnovesju, ko je prosta energija najmanjša. Kadar je $\varepsilon_a > 0$, se zato skuša **n** postaviti vzporedno s poljem, popoln zasuk pa onemogoča mejna urejevalna plast. Da lahko z minimizacijo F izrazimo $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, moramo torej poznati še robne pogoje.

Poglejmo primer. Naj bo nematični tekoči kristal med dvema vzporednima steklenima ploščama v razmiku d. Na obeh ploščah naj bo **n** vzporeden s površino in obrnjen v isto smer, tako da je brez zunanjega polja **n** povsod enako usmerjen. Naj bo to smer x. Na stekleni plošči dodamo elektrodi, ki ustvarjata polje pravokotno na prvotno smer direktorja, naj bo to smer z. Ko priključimo polje, je energijsko ugodnejše, če se molekule vsaj delno zasučejo v smer polja. Ta zasuk opišemo s komponento vektorja **n** v smeri z

$$\mathbf{n}(z) = (n_x(z), 0, n_z(z)). \tag{9.117}$$

Robni pogoj, kateremu mora direktor zadostiti, je $n_z(0) = n_z(d) = 0$. Približno rešitev zato iščemo z nastavkom

$$n_z(z) = a\sin(qz), \qquad q = \frac{\pi}{d}, \tag{9.118}$$

[8] Angleški fizik Sir Frederick Charles Frank, 1911–1998.

ki ni nič drugega kot prvi člen razvoja prave rešitve v Fourierevo vrsto. Ker je direktor enotski vektor, velja

$$n_x = \sqrt{1 - a^2 \sin^2(qz)} \approx 1 - \frac{a^2}{2} \sin^2(qz). \tag{9.119}$$

Vzdolž smeri x in y se direktor ne spreminja, zato velja

$$\nabla \times \mathbf{n} = (0, \frac{dn_x}{dz}, 0) \tag{9.120}$$

in

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}) = (-n_z \frac{dn_x}{dz}, 0, n_x \frac{dn_x}{dz}). \tag{9.121}$$

Površinska gostota proste energije je tako

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int \left[K_1 \left(\frac{dn_z}{dz} \right)^2 + K_3 (n_x^2 + n_z^2) \left(\frac{dn_x}{dz} \right)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_a (n_z E)^2 \right] dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^d [K_1 q^2 a^2 \cos^2(qz) + K_3 q^2 a^4 \sin^2(qz) \cos^2(qz) - \varepsilon_0 \varepsilon_a E^2 a^2 \sin^2(qz)] dz = \\ &= \frac{d}{4q} a^2 \left(K_1 q^2 + \frac{1}{4} K_3 q^2 a^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_a E^2 \right). \end{aligned} \tag{9.122}$$

V našem primeru smo integral lahko izračunali, saj smo uporabili nastavek (enačba 9.118). Sicer bi morali uporabiti Euler-Lagrangeevo metodo za minimizacijo proste energije, ki jo poznamo iz variacijskega računa.

Zdaj lahko poiščemo amplitudo deformacije a, pri kateri je prosta energija najmanjša. Tedaj mora biti a rešitev enačbe

$$2(K_1 q^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_a E) a + K_3 q^2 a^3 = 0. \tag{9.123}$$

Rešitvi sta

$$a = 0 \tag{9.124}$$

in

$$a^2 = 2 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a E^2 - K_1 q^2}{K_3 q^2}. \tag{9.125}$$

Pri majhnih poljih, ko je $\varepsilon_0 \varepsilon_a E^2 < K_1 q^2$, je fizikalno smiselna le prva rešitev, torej brez deformacije, pri velikih poljih pa je stabilna druga rešitev. Ko večamo polje, deformacija v sredini plasti hitro naraste, tako da se **n** postavi skoraj popolnoma v smer zunanjega polja. Tedaj naša rešitev seveda ni dobra, saj smo pri računu privzeli, da je $n_z \ll 1$. Prehodu iz nedeformiranega stanja v deformirano stanje pravimo tudi Frederiksov prehod[9]. Na njem temelji preklapljanje optičnih prikazovalnikov na nematične tekoče kristale.

Izračunajmo še kritično jakost električnega polja, pri kateri pride do prehoda v deformirano fazo. To se zgodi pri

$$\varepsilon_0 \varepsilon_a E_c^2 - K_1 q^2 = 0 \tag{9.126}$$

[9] Ruski fizik Vsevolod Konstantinovič Frederiks, tudi Fréedericksz, 1885–1944.

oziroma

$$\boxed{E_c = \frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon_0\varepsilon_a}}.} \tag{9.127}$$

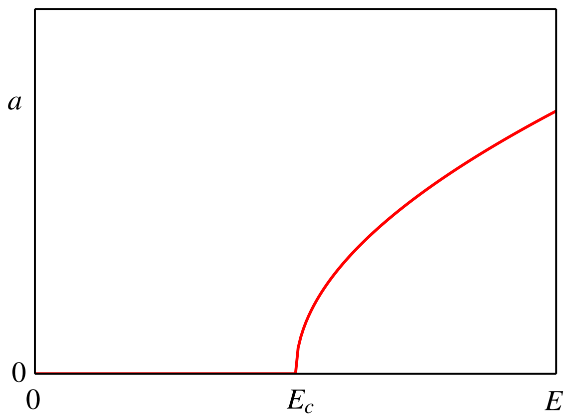
Poglejmo še, kako narašča amplituda deformacije v bližini prehoda. Iz enačbe (9.125) sledi

$$a = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_a}{K_3 q^2}(E^2 - E_c^2)}. \tag{9.128}$$

Pogosto naredimo približek enakih konstant, kjer privzamemo, da so vse Frankove elastične konstante enake vrednosti. V tem približku je

$$a \approx \sqrt{\frac{2(E^2 - E_c^2)}{E_c^2}} \tag{9.129}$$

in torej korensko narašča s naraščajočim poljem (slika 9.18). Tak prehod je torej fazni prehod drugega reda, saj količina, ki opisuje prehod (amplituda deformacije a) zvezno preide iz vrednosti $a = 0$ v končno vrednost.



Slika 9.18: Kvalitativno obnašanje amplitude deformacije ob Frederiksovem prehodu

Naloga 9.10.1 Izračunaj Frederiksov prehod v zasukani nematični celici (kot zasuka med zgornjo in spodnjo mejno ploskvijo naj bo $\pi/2$) in pokaži, da je kritično polje za prehod enako

$$E_c = \frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon_0\varepsilon_a}}\sqrt{1 + \frac{K_3 - 2K_2}{4K_1}}. \tag{9.130}$$

Namig: uporabi nastavek $\varphi = z\pi/2d$ in $\vartheta = a\sin(\pi z/d)$.

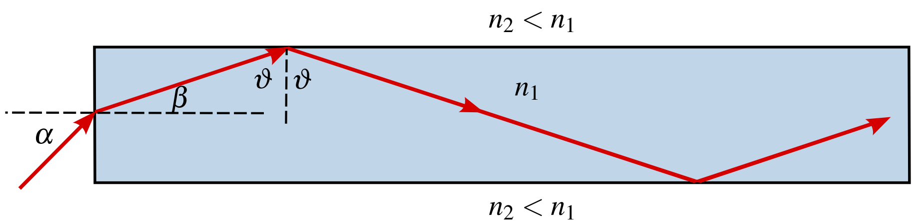
10. Optična vlakna

Moderna komunikacijska tehnologija zahteva vedno hitrejši prenos vedno večje količine informacij. Navadne kovinske vodnike so zato v računalniških in telefonskih povezavah nadomestila optična vlakna, ki jih odlikujejo majhne izgube, neobčutljivost na elektromagnetne in medsebojne motnje ter zmožnost prenosa izjemno velike količine podatkov.

10.1 Planparalelni vodnik

Klasična razlaga

Klasično lahko razložimo delovanje optičnih vlaken s totalnim odbojem na meji med dvema plastema. Kadar prehaja svetloba iz snovi z večjim lomnim količnikom v sredstvo z manjšim lomnim količnikom, se pri kotih, ki so večji od kritičnega kota, totalno odbije.



Slika 10.1: Klasična razlaga valovnega vodnika

Najpreprostejši model optičnega vodnika je planparalelna plast prozornega dielektrika z lomnim količnikom n_1, ki je večji od lomnega količnika okolice n_2 (slika 10.1). Plasti z večjim lomnim količnikom rečemo sredica, okolici pa plašč vodnika. Žarek je ujet v sredici, če je vpadni kot na mejno plast ϑ večji od kota totalnega odboja, za katerega velja

$$\sin\vartheta_c = \frac{n_2}{n_1}. \tag{10.1}$$

Količini, ki določa največji kot divergence svetlobnega snopa, ki vpada na vodnik in ostane v njem ujet, pravimo numerična odprtina vlakna. Izračunamo jo kot

$$NA = \sin\alpha = n_1 \sin\beta = n_1 \sin(\pi/2 - \vartheta_c) = n_1 \cos\vartheta_c = n_1\sqrt{1-\sin^2\vartheta_c}. \tag{10.2}$$

Upoštevajoč enačbo (10.1) sledi

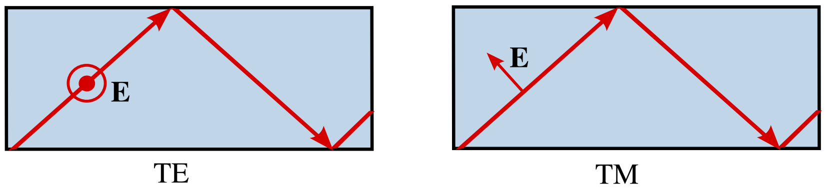
$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \tag{10.3}$$

Ker je razlika lomnih količnikov v vodnikih razmeroma majhna, tipično le nekaj stotink, je tudi numerična apertura optičnih vodnikov navadno $NA \lesssim 0,1$. Kot, pod katerim lahko vpada svetloba v vlakno, da se v njega ujame, je zato zelo majhen.

Valovni opis

Za podroben opis širjenja svetlobe po vodnikih ali vlaknih, ki imajo navadno polmer sredice od nekaj do nekaj deset mikrometrov, geometrijska optika ne zadošča. Rešiti moramo Maxwellove enačbe (enačbe 1.1–1.4) z ustreznimi robnimi pogoji (enačbe 1.10–1.13), kar je za praktična vlakna dokaj dolg račun. Zato ugotovimo najprej, kakšne so osnovne značilnosti valovanja, ki se širi po vodniku.

Glede na smer polarizacije električne poljske jakosti ločimo dva različna primera. Če leži električna poljska jakost vzporedno z mejnima ploskvama (smer y), govorimo o transverzalnem električnem (TE) valovanju. V nasprotnem primeru, ko je z mejnima ploskvama vzporedna magnetna poljska jakost in leži električna poljska jakost v ravnini xz, govorimo o transverzalnem magnetnem (TM) valovanju.



Slika 10.2: TE in TM polarizaciji v valovnem vodniku

Geometrijskemu žarku, ki pod kotom potuje po sredici in se na njeni meji odbija, ustreza v valovni sliki val, ki ima prečno komponento valovnega vektorja k_x različno od nič. Ker je valovanje v prečni smeri omejeno na sredico končne dimenzije (naj bo to debelina plasti a), ima lahko k_x le diskretne vrendosti, ki so približno enake $N\pi/a$. Pri tem je N celo število in je enako številu vozlov, ki jih ima valovanje v prečni smeri. Pravimo tudi, da vsak N določa en rod valovanj v vlaknu. Po drugi strani pa obstaja v vodniku največji k_x, ki je določen s kotom totalnega odboja

$$k_{x\max} \approx k_0 n_1 \cos\vartheta_c = k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \tag{10.4}$$

Številom možnih rešitev za k_x je torej omejeno in točno določeno, odvisno pa je od razlike lomnih količnikov in od dimenzije vodnika oziroma vlakna. V nadaljevanju bomo spoznali, da v optičnih vlaknih en rod vselej obstaja, za razliko od dielektričnih in kovinskih vodnikov, kakršne poznamo iz mikrovalovne tehnike, po katerih se pod določeno frekvenco valovanje ne more širiti. Optični vodniki, po katerih se širi en sam rod, imajo posebej lepe lastnosti za uporabo v komunikacijskih sistemih.

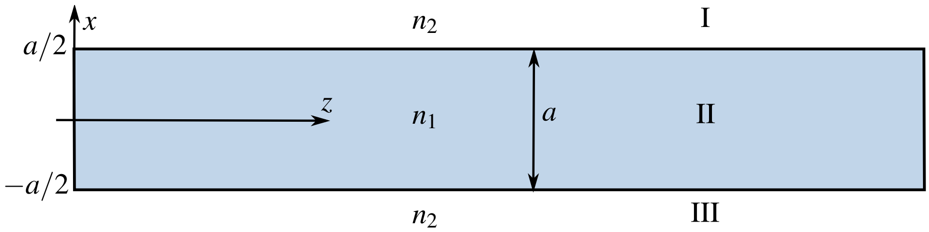
Povejmo še nekaj o hitrosti valovanja v vlaknu. Naj bo β komponenta valovnega vektorja vzdolž vlakna, recimo ji tudi valovno število, tako da je odvisnost polja od koordinate vzdolž vlakna $\exp(i\beta z)$. Po drugi strani pa velja zveza

$$n_1\frac{\omega}{c_0} = \sqrt{\beta^2 + k_x^2}. \tag{10.5}$$

Za dano vrednost k_x torej zveza med valovnim številom β in frekvenco ω ni linearna, zato je fazna hitrost $v_f = \omega/\beta$ odvisna od frekvence in pride do disperzije. Grupna hitrost $v_g = d\omega/d\beta$ je zaradi nelinearne odvisnosti različna od fazne hitrosti in tudi odvisna od frekvence, kar ima za uporabo vlaken pomembne posledice. Več o tem bomo spoznali proti koncu poglavja.

10.2 Račun lastnih rodov v planparalelnem vodniku

Poiščimo zdaj rešitve valovne enačbe v planparalelnem vodniku. To je preprost dvodimenzionalen model optičnega vlakna, ki je sestavljen iz plasti prozornega dielektrika in plašča, ki naj bo zaradi enostavnosti na obeh straneh sredice enak.



Slika 10.3: K izračunu lastnih rodov v vodniku

Krajevni del valovne enačbe, ki jo rešujemo, je

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n(x)^2 k_0^2 \mathbf{E} = 0, \tag{10.6}$$

kjer je $k_0 = \omega/c$, n pa nezvezno spremeni vrednost, ko preidemo iz sredice v plašč. Rešitev iščemo v obliki

$$\mathbf{E}(x,z) = \mathbf{e}\psi(x)\, e^{i\beta z}. \tag{10.7}$$

Omejimo se le na primer TE polarizacije (za izračun lastnih rodov TM polariziranega valovanja glej nalogo 10.2.1). Vstavimo nastavek (enačba 10.7) v valovno enačbo (10.6) in dobimo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(k_0^2 n_1^2 - \beta^2\right)\psi = 0 \qquad \text{v sredici oziroma območju II} \tag{10.8}$$

in

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(k_0^2 n_2^2 - \beta^2\right)\psi = 0 \qquad \text{v plašču oziroma območjih I in III.} \tag{10.9}$$

Ker je po enačbi (10.5) $k_0^2 n_1^2 - \beta^2 = k_x^2$, lahko rešitve prve enačbe zapišemo v obliki

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = C\cos(k_x x) + D\sin(k_x x). \tag{10.10}$$

Rešitve v plašču pa so oblike

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(-\kappa x) + B\exp(\kappa x), \qquad \psi_{\mathrm{III}}(x) = E\exp(-\kappa x) + F\exp(\kappa x), \tag{10.11}$$

pri čemer je $\kappa^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2$.

Če želimo, da je valovanje ujeto v vlakno, mora biti κ realno število. Le tako namreč dosežemo eksponentno pojemanje z oddaljenostjo od sredice, sicer je valovanje v vseh treh območjih oscilatorno in ni ujeto v vlakno. Tako dobimo pogoj za valovno število β

$$\boxed{k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1.} \tag{10.12}$$

Zahteva po končnost rešitve da pogoj, da je v območju I (pri $x > a/2$) $B = 0$, v območju III (pri $x < -a/2$) pa $E = 0$. Dodatne omejitve se pojavijo zaradi simetrije problema, saj so rešitve lahko le sode ali lihe funkcije. Tako dobimo dve vrsti rešitev, sode in lihe:

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(-\kappa x), \qquad \psi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(-\kappa x), \tag{10.13}$$
$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = C\cos(k_x x), \qquad \psi_{\mathrm{II}}(x) = D\sin(k_x x) \tag{10.14}$$
$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = A\exp(\kappa x), \qquad \psi_{\mathrm{III}}(x) = -A\exp(\kappa x). \tag{10.15}$$

Zvezo med koeficienti določimo z upoštevanjem robnih pogojev. Na meji med sredico in plaščem morata biti tangencialni komponenti električne in magnetne poljske jakosti zvezni. Iz tega takoj izluščimo pogoj, da se za TE valovanje na meji ohranja amplituda električne poljske jakosti. Drugi pogoj dobimo iz zveze $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}$, ki izhaja neposredno iz Maxwellove enačbe (1.2). Ta pogoj zahteva, da se na meji ohranja odvod električne poljske jakosti dE/dx. Tako pogoje za sode in lihe rešitve zapišemo kot

$$A\exp(-\kappa a/2) = C\cos(k_x a/2), \qquad A\exp(-\kappa a/2) = D\sin(k_x a/2). \tag{10.16}$$

in

$$-A\kappa\exp(-\kappa a/2) = -Ck_x\sin(k_x a/2), \qquad -\kappa A\exp(-\kappa a/2) = Dk_x\cos(k_x a/2). \tag{10.17}$$

Enačbo, ki določa rešitev k_x, dobimo iz zahteve, da sta gornja robna pogoja hkrati izpoljnjena. Za sode načine tako velja

$$\boxed{\frac{\kappa}{k_x} = \tan\frac{k_x a}{2},} \tag{10.18}$$

za lihe pa

$$\boxed{-\frac{k_x}{\kappa} = \tan\frac{k_x a}{2}.} \tag{10.19}$$

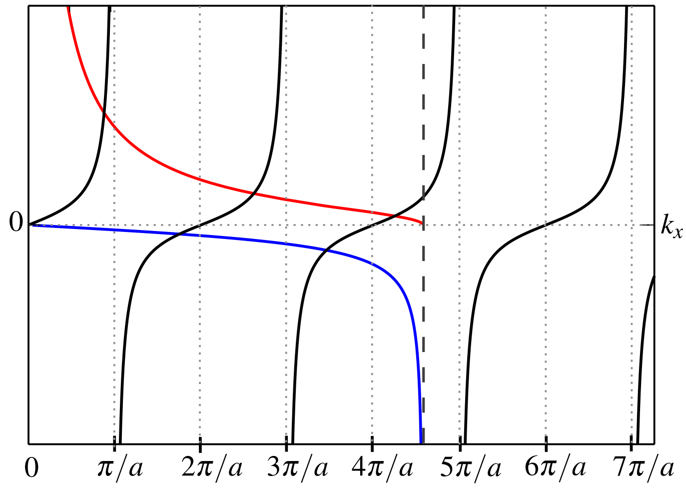
Pri tem zapišimo še zvezo med k_x in κ

$$\boxed{k_x^2 + \kappa^2 = k_0^2\left(n_1^2 - n_0^2\right).} \tag{10.20}$$

Sekularnih enačb za lastne načine nihanj ne moremo rešiti analitično. Zato jih rešujemo numerično, zelo nazorna pa je grafična predstavitev. S slike (10.4) lahko namreč hitro razberemo število rešitev in njihove vrednosti. Najprej narišemo desno stran enačb (10.18) in (10.19), to je $\tan(k_x a/2)$ (črna črta). Nato narišemo še levi strani enačb, pri čemer upoštevamo zvezo (10.20), rdeča krivulja naj bo za sode rešitve in modra za lihe rešitve. Število presečišč rdeče in modre krivulje s črno da število rodov, ki se lahko razširjajo po takem vlaknu. V našem primeru je takih rodov pet: trije sodi in dva liha. Z grafa razberemo še eno pomembno lastnost. Ne glede na to, kako tanek je vodnik, vedno bo obstajala vsaj ena rešitev za k_x, saj rdeča krivulja vedno nekje seka črno. Vlaknu, v katerem se širi samo eno valovanje, pravimo enorodnovno vlakno, sicer so vlakna večrodovna. Za tipično enorodovno vlakno velja $a \lesssim 5\ \mu$m, za večrodovno z okoli 20 rodovi pa $a \sim 50\ \mu$m.

Ocenimo število možnih rodov še z izračunom. S slike (10.4) vidimo, da je največja možna vrednost valovnega vektorja k_x, pri kateri valovanje še potuje po vlaknu, omejena z vrednostjo, pri kateri κ pade na nič. Do te vrednosti pa je po ena rešitev na vsakih π/a. Celotno število rodov je tako

$$N \approx \frac{k_{x\max}}{\pi/a} = \frac{k_0 aNA}{\pi} = \frac{V}{\pi}, \tag{10.21}$$

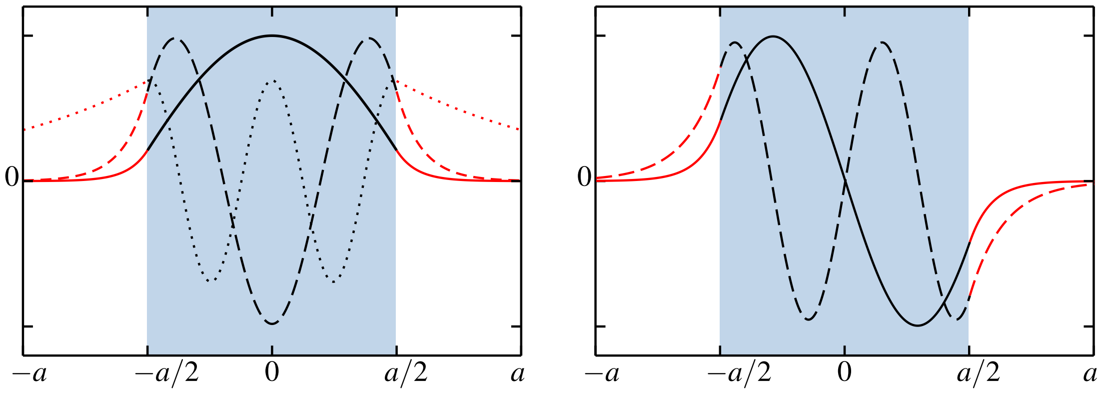


Slika 10.4: K izračunu prečnih komponent valovnega vektorja v planparalelnem valovnem vodniku za TE polarizacijo. V skiciranem primeru je vodnik petrodoven.

pri čemer smo vpeljali normirano frekvenco

$$V = k_0 a NA. \tag{10.22}$$

Ko enkrat izračunamo dovoljene vrednosti k_x, končno poznamo celotno električno poljsko jakost v vodniku in izven njega. Za primer s slike (10.4) so osnovni načini narisani na sliki (10.5).



Slika 10.5: Osnovni načini za širjenje svetlobe po valovnem vodniku, kjer modro obarvan del pomeni plast dielektrika (vodnik), bel del pa plašč. Levo so sode rešitve, desno pa lihe.

Naloga 10.2.1 Ponovi izračun za TM valovanje in pokaži, da se sekularni enačbi v primeru TM polarizacije zapišeta kot

$$\frac{\kappa}{k_x}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \tan\frac{k_x a}{2} \qquad \text{in} \qquad -\frac{k_x}{\kappa}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \tan\frac{k_x a}{2}. \tag{10.23}$$

Namig: Zapiši enačbe za magnetno poljsko jakost H in poišči ustrezne robne pogoje.

★ Če ne prej, je bralec ob slikah (10.5) zagotovo opazil podobnost s kvantnim delcem, ujetim v končni enodimenzionalni potencialni jami. Svetloba, ujeta v vlakno, ustreza vezanim stanjem delca, numerična apertura pa je tisti parameter, ki določa globino potencialne jame. Pri majhnih vrednosti bomo dobili samo eno rešitev za vezano stanje, pri globlji jami bo rešitev več. Podobno kot v kvantni mehaniki tudi v tem primeru ena rešitev za vezano stanje vedno obstaja.

10.3 Cilindrično vlakno

Do zdaj smo obravnavali ravninski valovni vodnik. V praksi svetlobo navadno usmerjamo po optičnih vlaknih, ki imajo cilindrično geometrijo. Najpreprostejša struktura, ki je analogna gornjemu primeru planparalene plasti, je cilindrično vlakno, pri katerem je lomni količnik cilindričnega jedra konstanten in nekoliko večji od lomnega količnika plašča. Pogosto se uporablja tudi bolj zapletene konstrukcije, pri katerih je sredica sestavljena iz več kolobarjev z različnimi lomnimi količniki. Zapletenejšo geometrijo izberemo zato, da zmanjšamo disperzijo v vlaknu.

Račun za širjenje svetlobe po cilindričnem vlaknu s homogeno sredico je podoben kot za planparalelni vodnik, vendar je precej bolj zapleten. V cilindrični geomteriji namreč ni delitve na čiste električne in magnente transverzalne valove in robni pogoji so sklopljeni. Rešitve se izražajo v obliki kombinacij Besslovih funkcij. Izkaže se, da je osnovni rod, ki se širi po cilindričnem vlaknu, po obliki zelo podoben Gaussovem snovu, zato je sklopitev laserskih snopov v optična vlakna zelo učinkovita. Tudi v cilindričnih vlaknih obstaja končno število vodenih valov, odvisno od premera sredice in razlike lomnih količnikov sredice in plašča. Če sta ti količini majhni, obstaja le eno vodeno valovanje in imamo enorodovno vlakno. Za njegovo valovno število velja $n_0k_0 < \beta < n_1k_0$.

Valovna enačba v cilindričnem vlaknu

Točen izračun za rodove v cilindričnem vlaknu presega okvire tega učbenika, zato si oglejmo le izhodiščne enačbe in rešitve[1] Za jakost električnega in magnetnega polja velja Helmholtzeva enačba (1.23)

$$\nabla^2\mathbf{E} + k_0^2 n(r)^2\mathbf{E} = 0, \tag{10.24}$$

pri čemer je $n(r<a) = n_1$ lomni količnik sredice in $n(r>a) = n_2$ lomni količnik plašča, ki je dovolj debel, da njegova debelina ne vpliva na potovanje svetlobe. $\mathbf{E}$ (in $\mathbf{H}$) je v splošnem vektor in ima tri komponente, ki pa so med seboj odvisne. Izračunajmo naprej E_z z nastavkom

$$E_z = R(r)e^{i\nu\varphi}e^{i\beta z}, \tag{10.25}$$

pri čemer je ν celo število zaradi zahteve po enoličnosti rešitve pri spremembi kota za 2π. Za $R(r)$ dobimo v sredici vlakna enačbo

$$r^2R(r)'' + rR(r)' + (k_s^2r^2 - \nu^2)R(r) = 0, \tag{10.26}$$

kjer je $k_s^2 = k_0^2n_1^2 - \beta^2$, in v plašču

$$r^2R(r)'' + rR(r)' + (-\kappa^2r^2 - \nu^2)R(r) = 0, \tag{10.27}$$

kjer je $\kappa^2 = \beta^2 - k_0^2n_2^2$. V gornjih enačbah prepoznamo Besslovo differencialno enačbo. Upoštevajoč le končne funkcije, dobimo v sredici rešitev

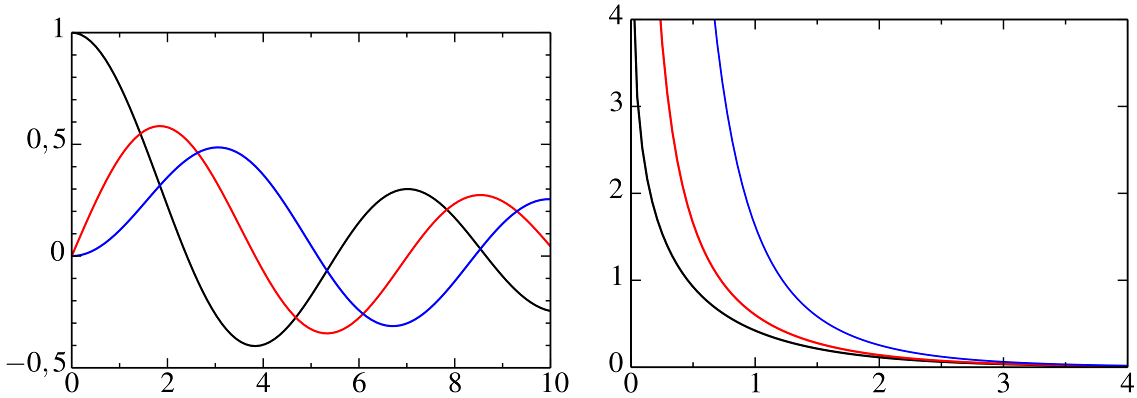
$$E_z(r,\varphi,z) = AJ_\nu(k_sr)\sin(\nu\varphi)e^{i\beta z} \quad \text{in} \quad H_z(r,\varphi,z) = BJ_\nu(k_sr)\cos(\nu\varphi)e^{i\beta z} \tag{10.28}$$

[1] Točen izračun lahko bralec poišče npr. v Davis, *Lasers and Electro-optics*.

in v plašču

$$E_z = CK_\nu(\kappa r)\sin(\nu\varphi)e^{i\beta z} \quad \text{in} \quad H_z = DK_\nu(\kappa r)\cos(\nu\varphi)e^{i\beta z}, \tag{10.29}$$

kjer je $J_\nu(x)$ Besslova funkcija prve vrste reda ν, $K_\nu(x)$ modificirana Besslova funkcija druge vrste reda ν, A,B,C in D pa so konstante.



Slika 10.6: Levo: Besslove funkcije prve vrste $J_0(x)$ (črna), $J_1(x)$ (rdeča) in $J_2(x)$ (modra). Desno: modificirane Besslove funkcije druge vrste $K_0(x)$ (črna), $K_1(x)$ (rdeča) in $K_2(x)$ (modra).

Ko enkrat poznamo komponente E_z in H_z, lahko z uporabo Maxwellovih enačb izrazimo še ostale komponente. Nato z upoštevanjem robnih pogojev dobimo štiri enačbe za pet neznank (A,B,C,D in β), tako da ostane ena spremenljivka (amplituda polja) prosta. Na ta način izračunamo celotni jakosti električnega in magnetnega polja v vodniku in podobno kot pri valovnem vodniku tudi tukaj dobimo sekularno enačbo, ki jo moramo rešiti numerično. Pri vsakem ν tako dobimo več rešitev, ki jih zato označujemo z dvema indeksoma ν,m. Pri tem m določa število vrhov v radialni smeri, 2ν pa število vrhov po kotu φ.

TE in TM rodovi

Najprej si oglejmo rešitve, pri katerih je $\nu = 0$ in so neodvisni od kota φ. V klasični sliki so to žarki, ki potujejo po osi vlakna. Iz robnih pogojev (in klasične analogije) sledi, da so to transverzalni TE rodovi, za katere velja $E_z = 0$, $E_r = 0$ in $E_\varphi \propto J_1(k_s r)$. Podobno lahko prepoznamo tudi TM rodove, pri katerih je $H_z = 0$, $H_r = 0$ in $H_\varphi \propto J_1(k_s r)$. Električna poljska jakost za TE in TM rodove potem

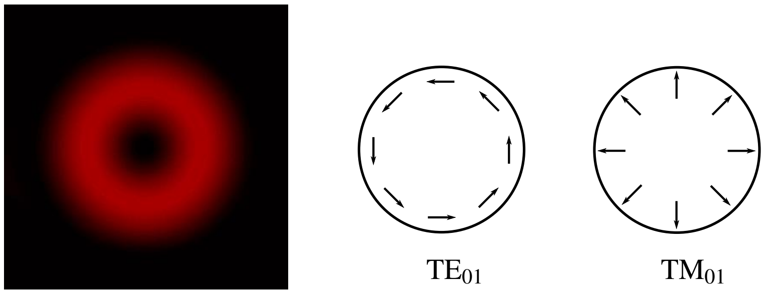
$$\mathbf{E} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_r \end{Bmatrix} J_1(k_s r), \tag{10.30}$$

in gostota svetlobnega toka v osi vlakna enaka nič (glej sliko 10.7).

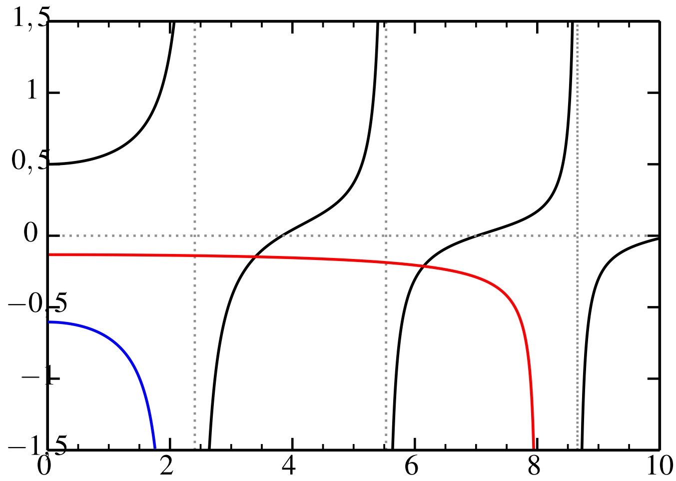
Podobno kot smo zapisali sekularno enačbo v valovnem vodniku (enačba 10.18) tudi tukaj zapišemo enačbo, s katero lahko določimo k_s. Ob približku, da se lomna količnika sredice in plašča le malo razlikujeta, je ustrezna enačba za TE valovanje

$$\frac{J_1(k_s r)}{k_s r J_0(k_s r)} + \frac{K_1(\kappa r)}{\kappa r K_0(\kappa r)} = 0, \tag{10.31}$$

pri čemer velja zveza $\kappa^2 + k_s^2 = (NA)^2 k_0^2$. Zaporedne rešitve enačbe, ki jih označimo z indeksom m, ustrezajo rodovom TE_{0m}. V enačbi za TM rodove moramo členu na levi dodati še faktor



Slika 10.7: Gostota svetlobnega toka (levo) in smeri električne poljske jakosti za TE_{01} in TM_{01} rod



Slika 10.8: K izračunu prečnih komponent valovnega vektorja za TE polarizacijo v cilindričnem vlaknu. Leva stran sekularne enačbe (enačba 10.31) je narisana s črno, desna pa z rdečo in modro za dve različno debeli vlakni.

$(n_1/n_2)^2$ in dobimo rešitve za rodove TM_{0m}. Ker se v praksi lomna količnika sredice in plašča le malo razlikujeta, so rešitve za TM rodove skoraj enake kot za TE.

Zapisano enačbo je treba rešiti numerično. Lahko pa narišemo levo in desno stran enačbe in poiščemo presečišča (slika 10.8). S črno je narisana leva stran enačbe, z rdečo in modro črto pa sta narisani desni strani enačbe za dve vlakni različnih debelin. Če izrazimo parametre vlakna z normirano frekvenco

$$V = NA\,2\pi r/\lambda, \tag{10.32}$$

je rdeča črta narisana pri $V = 8$ in modra pri $V = 2$. Vidimo, da obstaja nek najmanjši polmer vlakna, pri katerem se TE (ali TM) valovanje sploh širi po vlaknu. Meja je določena s prvo ničlo Besslove funkcije J_0: valovanje se širi po vlaknu, le če je $V > 2{,}405$. Iz tega (in tudi oblike rešitve) lahko sklepamo, da TE in TM nista osnovna načina za širjenje svetlobe po vlaknu.

Hibridni HE in EH rodovi

Poglejmo zdaj še rešitve, pri katerih $\nu \neq 0$. Iz robnih pogojev sledi, da je vseh šest komponent električnega in magnetnega polja valovanja različnih od nič in imajo vsi rodovi tudi komponento v smeri z. Take rodove imenujemo hibridni rodovi in jih označimo s HE, če je E_z razmeroma velik ali vsaj primerljiv z E_r in E_φ, oziroma z EH, če je H_z po velikosti primerljiv s H_r in H_φ ali večji od njiju.

Sekularna enačba za hibridne rodove je precej bolj zapletena in je ne bomo zapisali. Oglejmo si le njihovo obliko. Najpomembnejši hibridni rod je HE_{11} (slika 10.9), ki je sorazmeren z $J_0(k_s a)$ in zato v središču različen od nič. To je osnovni rod, za katerega rešitev sekularne enačbe vedno obstaja in se zato širi po še tako tankem vlaknu. Po obliki je zelo podoben Gaussovi funkciji $\exp(-r^2/w^2)$, zato ga lahko razmeroma dobro opišemo s takim približkom, pri čemer efektivni polmer snopa w izračunamo po Marcusejevi formuli[2]

$$w = (0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6})\,a. \tag{10.33}$$

Njegova podobnost z Gaussovo funkcijo omogoča zelo dobro sklopitev med Gaussovimi snopi, ki izhajajo iz laserja, in cilindričnimi vlakni.

Na sliki (10.9) je poleg osnovnega HE_{11} roda še nekaj primerov višjih rodov. Opazimo, da imajo vsi rodovi, razen osnovnega, v izhodišču ničlo. Poleg tega opazimo tudi podobnost med oblikami posameznih rodov, do katere pride zaradi majhne razlike med lomnima količnikoma sredice in plašča ($n_1 \approx n_2$). V takem primeru se sekularne enačbe poenostavijo, nekateri rodovi so med seboj degenerirani in dajo enako rešitev. Poleg rodov enake oblike in različne polarizacije so med seboj degenerirani $HE_{\nu+1,m}$ in $EH_{\nu-1,m}$ rodovi. Degenerirane rodove lahko združimo v linearne kombinacije teh valov in dobimo pretežno linearno polarizirane rodove.

LP rodovi

Za praktično uporabo so najpomembnejši linearno polarizirani rodovi. Taki rodovi niso točne rešitve valovne enačbe v cilindričnih vlaknih, ampak jih zapišemo kot linearno kombinacijo lastnih rodov, ki so zaradi majhne razlike med lomnima količnikoma sredice in plašča degenerirani.

Osnovni LP_{01} je kar približno enak osnovnemu HE_{11} rodu. Električna poljska jakost v njem je sorazmerna

$$\mathbf{E}_{(LP01)} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_0(k_s a), \tag{10.34}$$

odvisno od polarizacije. Podobno so LP_{0m} približno enaki rodovom HE_{1m} z $m-1$ ničlami v radialni smeri. Dodatne višje rodove, na primer LP_{11} sestavimo kot linearno kombinacijo TE_{01} oziroma TM_{01} in HE_{21}. Električna poljska jakost v LP_{11} je tako

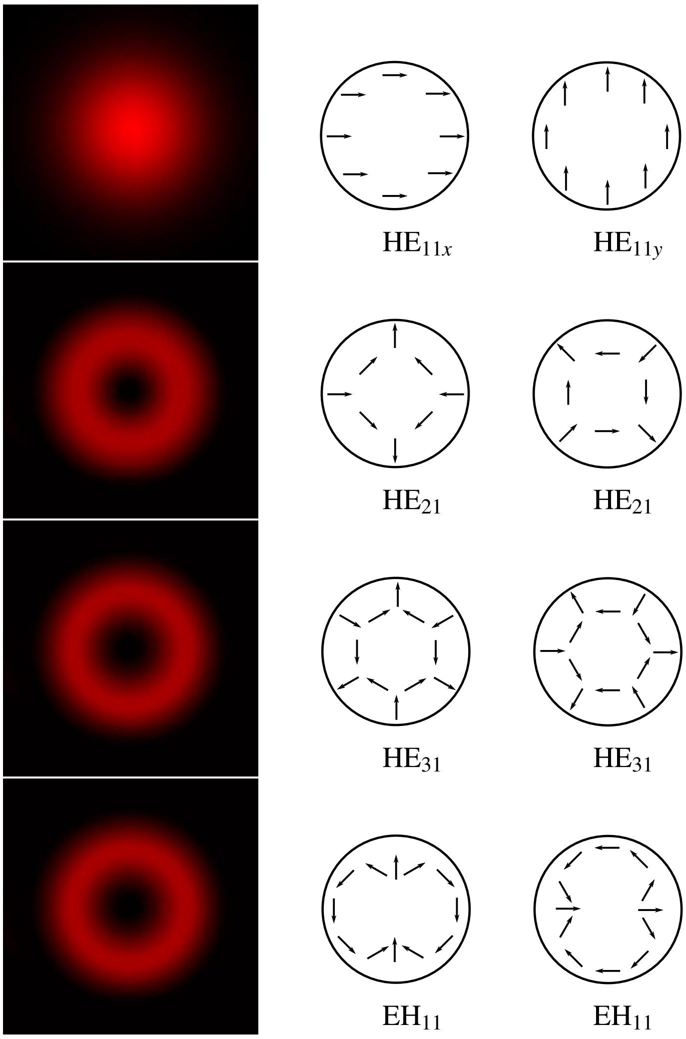
$$\mathbf{E}_{(LP11)} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_1(k_s a) \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix}, \tag{10.35}$$

v LP_{21} pa

$$\mathbf{E}_{(LP21)} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_2(k_s a) \begin{Bmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{Bmatrix}. \tag{10.36}$$

Linearno polarizirani LP rodovi imajo precejšno uporabno vrednost. To so namreč rodovi, ki jih v vlaknu vzbudimo, ko nanj posvetimo s polarizirano lasersko svetlobo. Zavedati pa se moramo, da to niso lastni rodovi vlakna, ampak njihove linearne kombinacije, ki po vlaknu potujejo z malenkost različnimi hitrostmi. Polarizacija svetlobe se bo zato vzdolž vlakna rahlo spreminjala.

[2] D. Marcuse, Bell Syst. Tech. J. 56, 703 (1977).



Slika 10.9: Gostota svetlobnega toka in smeri električne poljske jakosti za hibridne rodove: HE_{11}, HE_{21}, HE_{31} in EH_{11}.

Naloga 10.3.1 Pokaži, da je približno število dovoljenih rodov v cilindričnem vlaknu pri izbrani normalizirani frekvenci V enako

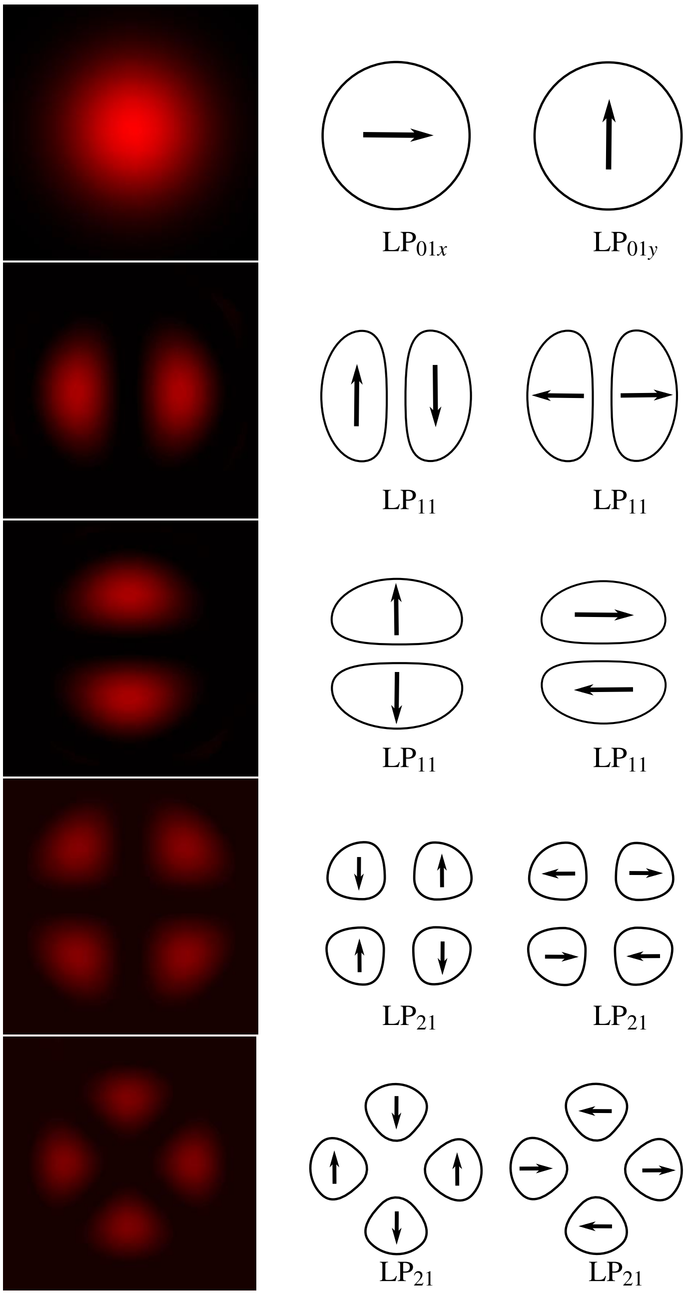
$$N = \frac{4V^2}{\pi^2}. \tag{10.37}$$

Namig: Upoštevaj asimptotični razvoj Besslovih funkcij za velike argumente

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{10.38}$$

Cilindrično vlakno s paraboličnim profilom lomnega količnika

Čeprav je račun lastnih načinov v cilindričnem vlaknu zapleten, lahko razmeroma enostavno poiščemo rešitve za vlakno, v katerem je dielektrična konstanta kvadratna funkcija radialne

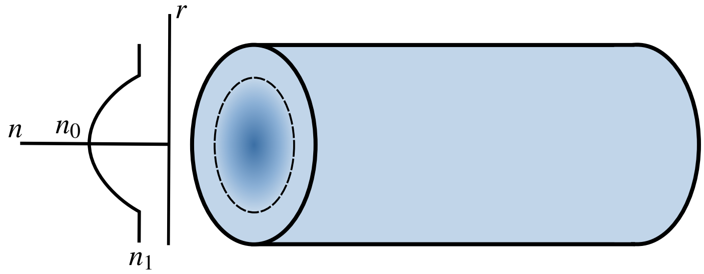


Slika 10.10: Gostota svetlobnega toka in smeri električne poljske jakosti za približno linearne rodove: LP_{01}, LP_{11} in LP_{21}.

koordinate r

$$n^2(r) = n_0^2 - n_2^2 \frac{r^2}{a^2}. \tag{10.39}$$

Parameter n_2 je v praksi vselej majhen, zato ima za vse smiselne vrednosti r tudi lomni količnik paraboličen profil. Parabolična sredica je seveda biti omejena, okoli nje je plašč s konstantnim lomnim količnikom $n_1 \approx n_0 - n_2^2/2n_0$ (slika 10.11). Tipičen polmer sredice a je nekaj deset mikrometrov.



Slika 10.11: Parabolični profil lomnega količnika sredice zmanjša disperzijo v vlaknu.

Komponento polja za izbrano polarizacijo napišimo v obliki

$$E = E_0 \psi(x,y)\, e^{i\beta z} e^{-i\omega t} \tag{10.40}$$

Zanemarili smo, da zaradi odvisnosti od prečnih koordinat in pogoja $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ polje ne more imeti povsod iste smeri; če hočemo biti natančni, moramo v gornji obliki zapisati vektorski potencial. Vstavimo približni nastavek (enačba 10.40) in krajevno odvistnost lomnega količnika (enačba 10.39) v valovno enačbo (1.14) in dobimo

$$\nabla_\perp^2 \psi + \left[k_0^2 \left(n_0^2 - n_2^2 \frac{r^2}{a^2} \right) - \beta^2 \right] \psi = 0, \tag{10.41}$$

Rešitve lahko zapišemo v obliki

$$\psi(x,y) = X(x)Y(y) \tag{10.42}$$

in dobimo dve neodvisni enačbi

$$X'' - \frac{k_0^2 n_2^2}{a^2} X x^2 - \lambda_1 X = 0 \qquad \text{in} \qquad Y'' - \frac{k_0^2 n_2^2}{a^2} Y y^2 - \lambda_2 Y = 0, \tag{10.43}$$

pri čemer sta λ_1 in λ_2 konstanti. Opazimo, da sta enačbi popolnoma enaki enačbama za krajevni del lastnih funkcij harmonskega oscilatorja v kvantni mehaniki. Rešitev posamezne enačbe je tako produkt Gaussove in Hermitove funkcije

$$X_n(x) = e^{-\xi^2 x^2/2} H_n(\xi x), \tag{10.44}$$

pri čemer je $\xi = \sqrt{k_0 n_2/a}$.

Naloga 10.3.2 Uporabi nastavek (10.44) in pokaži, da reši enačbo (10.43). Pri tem si pomagaj z diferencialno enačbo za Hermitove polinome

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n \right) H_n(x) = 0. \tag{10.45}$$

Lastne vrednosti enačbe so oblike

$$\beta_{mn}^2 = n_0^2 k_0^2 \left(1 - \frac{2n_2}{k_0 n_0^2 a} (m+n+1) \right). \tag{10.46}$$

Drugi člen v oklepaju je navadno zelo majhen, zato lahko izraz razvijemo in

$$\beta_{mn} = n_0 k_0 \left(1 - \frac{n_2}{k_0 n_0^2 a} (m+n+1) \right) = n_0 k_0 - \frac{n_2 (m+n+1)}{n_0 a}. \tag{10.47}$$

Ob privzetku, da je n_2 neodvisen od frekvence, je grupna hitrost

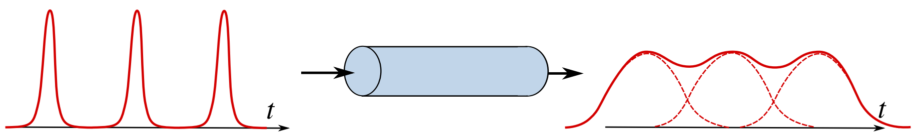
$$v_g = \left(\frac{d\beta_{mn}}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c_0}{n_0} \tag{10.48}$$

enaka za vse rodove. To je pomembna značilnost vlakna s kvadratnim profilom lomnega količnika. V dejanskem vlaknu je seveda taka odvisnost možna le v omejenem območju sredice, zato je tudi gornja analiza le približna in velja dobro za tiste rodove, ki se ne raztezajo dosti izven sredice.

Neodvisnost grupne hitrosti od roda je praktično zelo pomembna. Grupna hitrost namreč določa čas potovanja svetlobnega sunka, ki lahko predstavlja en bit informacije. Če se po vlaknu širi več rodov z različno grupno hitrostjo, se sunek po prehodu skozi vlakno razširi, kar – kot bomo podrobneje videli v naslednjem razdelku – omejuje uporabno dolžino vlakna. Temu se sicer lahko izognemo z uporabo enorodovnih vlaken, ki pa so dražja, poleg tega morata divergenca in polmer svetlobnega snopa natančno ustrezati značilnostim enorodovnega vlakna, da se izognemo izgubam. Zato se za krajše zveze uporabljajo mnogorodovna vlakna, ki imajo sredico s približno paraboličnim profilom lomnega količnika.

10.4 Disperzija

Pri prenosu velike količine podatkov na daljavo je zelo pomembno, da se oblika svetlobnih sunkov, ki prenašajo informacijo, čim manj spremeni. Na obliko sunka močno vpliva disperzija, to je odvisnost fazne in grupne (skupinske) hitrosti valovanja od frekvence. Zaradi disperzije se kratki sunki podaljšujejo in količino informacije, ki jo lahko prenašamo po vlaknu dane dolžine, se zmanjšuje.



Slika 10.12: Zaradi disperzije se širina sunkov svetlobe, ki potujejo skozi vlakno, močno poveča, zato jih na izhodu iz vlakna ne moremo več ločiti.

V splošnem ločimo tri vrste disperzije: rodovno, materialno in valovodno. Rodovna disperzija se pojavi, ker različni rodovi v vlaknu potujejo z različno hitrostjo. Do materialne pride zaradi odvisnosti lomnega količnika vlakna od valovne dolžine svetlobe, do valovodne pa zaradi nelinearne zveze med valovnim vektorjem β in frekvenco valovanja. Poglejmo si vse tri vrste disperzije podrobneje.

Materialna disperzija

Vzemimo najprej enorodovno vlakno in naj bo svetloba v vlaknu modulirana v obliki kratkih sunkov, ki nosijo informacijo. Sunki dolžine t_0 potujejo z grupno hitrostjo

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c_0}{n_g}, \tag{10.49}$$

pri čemer smo vpeljali grupni lomni količnik n_g. Ker je sunek končno dolg, ima tudi neko končno spektralno širino $\lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \Delta\lambda$. Zaradi materialne disperzije je lomni količnik vlakna odvisen od valovne dolžine svetlobe, zato različne spektralne komponente potujejo po vlaknu z različnimi hitrostmi. Dolžino sunka τ po prehodu skozi vlakno dolžine L zapišemo kot

$$\tau_m = \frac{L}{v_g(\lambda_{\max})} - \frac{L}{v_g(\lambda_{\min})} = \frac{L}{c_0}(n_g(\lambda_{\max}) - n_g(\lambda_{\max})) = \frac{L}{c_0}\frac{\Delta n_g}{\Delta\lambda}\Delta\lambda. \tag{10.50}$$

Za enorodovno vlakno približno velja $k_x \approx 0$ in $\beta \approx n_1\omega/c_0$. Sledi

$$n_g = c_0\frac{d\beta}{d\omega} = n_1 + \omega\frac{dn_1}{d\omega} = n_1 - \lambda\frac{dn_1}{\lambda} \tag{10.51}$$

in

$$\frac{dn_g}{d\lambda} = -\lambda\frac{d^2n_1}{d\lambda}. \tag{10.52}$$

To vstavimo v izraz za dolžino sunka (enačba 10.50) in dobimo

$$\tau_m = -\left(\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2n_1}{d\lambda^2}\right)L\Delta\lambda = D_m L\Delta\lambda, \tag{10.53}$$

pri čemer je D_m koeficient materialne disperzije

$$D_m = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2n_1}{d\lambda^2}. \tag{10.54}$$

Navadno ga izrazimo v enotah ps/(nm km), njegova vrednost pa je lahko pozitivna ali negativna. V snoveh, ki jih uporabljamo za optična vlakna, je D_m reda 10 ps/nm km, lahko pa seže tudi do več 100 ps/nm km, odvisno seveda od valovne dolžine.

Materialno disperzijo lahko zmanjšamo na več načinov. Lahko uporabimo čim bolj enobarven vir svetlobe, da zmanjšamo $\Delta\lambda$. Za snovi, ki so v uporabi, lahko celo izberemo tako valovno dolžino, pri kateri je koeficient materialne disperzije enak nič. Pri SiO_2 je to okoli $1300-1500$ nm, odvisno od dopiranja stekla. Še najbolj uporabna pa je rešitev, pri kateri z materialno disperzijo izničimo vplive drugih disperzij in na ta način zmanjšamo skupno disperzijo v vlaknu.

Valovodna disperzija

Spomnimo se, da v vlaknu velja zveza med prečno k_s in vzdolžno komponento β valovnega vektorja

$$\beta^2 + k_s^2 = k_0^2 n_1^2 = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 n_1^2. \tag{10.55}$$

Pri tem moramo k_s izračunati numerično iz sekularne enačbe rešitev je odvisna od valovne dolžine svetlobe. Valovno število

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 n_1^2 - k_s(\omega)^2}. \tag{10.56}$$

je tako nelinearna funkcija frekvence, zaradi česar pride do disperzije. Če naredimo podoben račun kot pri materialni disperziji, je razširitev začetnega kratkega sunka enaka

$$\tau_v = \frac{L}{v_g(\omega_{\max})} - \frac{L}{v_g(\omega_{\min})} = L\frac{d\beta}{d\omega}(\omega_{\max}) - L\frac{d\beta}{d\omega}(\omega_{\min}) = L\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\Delta\omega = -\frac{2\pi c_0}{\lambda^2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}L\Delta\lambda.$$

(10.57)

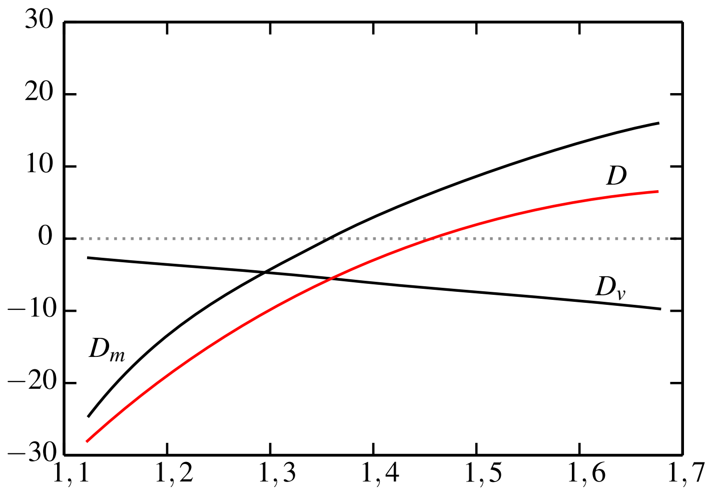
Zapišemo

$$\tau_v = D_v L \Delta\lambda, \tag{10.58}$$

pri čemer je D_v koeficient valovodne disperzije

$$D_v = -\frac{2\pi c_0}{\lambda^2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}. \tag{10.59}$$

Prispevek valovodne disperzije je praviloma najmanjši, reda 1 – 10 ps/nm km. Znaten postane v enorodovnih vlaknih v območju, kjer je materialna disperzija zelo majhna ali celo enaka nič. V vlaknih s homogeno sredico se valovodni disperziji ne moremo izogniti, lahko pa jo izničimo z materialno (slika 10.13).



Slika 10.13: Disperzija v enorodovnem vlaknu

Na valovodno disperzijo je mogoče vplivati tudi s konstrucijo vlakna. V idealnem primeru je profil parabolični in takrat smo že pokazali, da disperzije ni. V praksi je sredica sestavljena iz več plasti z različnimi lomnimi količniki in različnimi debelinami, s čimer se prispevek valovodne disperzije spremeni in položaj ničle celotne disperzije se premakne k valovni dolžini izvora oziroma k valovni dolžini, pri kateri je najmanj izgub.

Količina podakov, ki jih lahko prenašamo po takem vlaknu je kar približno obratno sorazmerna s širino izhodnih sunkov svetlobe. Pri celotni disperziji 5 ps/nm km in spektralni širini 1 nm je tako v 100 km dolgem vlaknu najvišja frekvenca modulacije okoli 2 GHz. Videli bomo, da je omejitev disperzije v vlaknih precej hujša kot omejitev prenosa zaradi izgub. Največja možna razdalja in najvišje frekvenca modulacije sta danes nekaj sto kilometrov in nekaj deset GHz.

Rodovna disperzija

Do zdaj smo obravnavali samo disperzijo v enodorovnih vlaknih. V večrodovnih vlaknih je poglavitni vzrok širjenja sunkov rodovna disperzija. Do nje pride zaradi razlike v hitrostih posameznih rodov. Obravnavajmo vlakno, v katerem se širi več rodov. Osnovni rod ima najmanjšo vrednost $k_s \approx 0$ in $\beta \approx k_0 n_1$. Zadnji še dovoljeni rod ima največjo vrednost $k_s \approx NA\, k_0$ in $\beta \approx k_0 n_2$. Grupna lomna količnika sta tako

$$n_{g0} = c_0 \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_0 = c_0 \frac{d(k_0 n_1)}{d\omega} = n_1 + \omega \frac{dn_1}{d\omega} \tag{10.60}$$

in

$$n_{gN} = c_0 \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)_0 = c_0 \frac{d(k_0 n_2)}{d\omega} = n_1 + \omega \frac{dn_2}{d\omega}. \tag{10.61}$$

Razširitev sunka je

$$\tau_r = \frac{L}{v_{g0}} - \frac{L}{v_{gN}} = \frac{L}{c_0}(n_{g0} - n_{gN}) \approx \frac{L}{c_0}(n_1 - n_2). \tag{10.62}$$

Za 1 km dolgo vlakno z razliko lomnih količnikov $\Delta n = 0,05$ dobimo največjo frekvenco modulacije okoli 10 MHz, kar je znatno nižje od enorodovnih vlaken. Čeprav lahko disperzijo zmanjšamo s paraboličnim profilom lomnega količnika, so večrodovna vlakna za prenos informacije na dolge razdalje praktično neuporabna.

V večrodovnem vlaknu je treba upoštevati prispevke vseh treh disperzij. Materialna in valovodna sta obe odvisni od valovni dolžini in zato korelirani, rodovna pa je predvsem odvisna od zgradbe vlakna in je od prvih dveh praktično neodvisna. Ko na tako vlakno posvetimo s sunkom, katerega spekter je Gaussove oblike, bo dolžina sunka po prehodu skozi vlakno

$$\boxed{\tau = \sqrt{(\tau_m + \tau_v)^2 + \tau_r^2}.} \tag{10.63}$$

10.5 Izgube v optičnih vlaknih

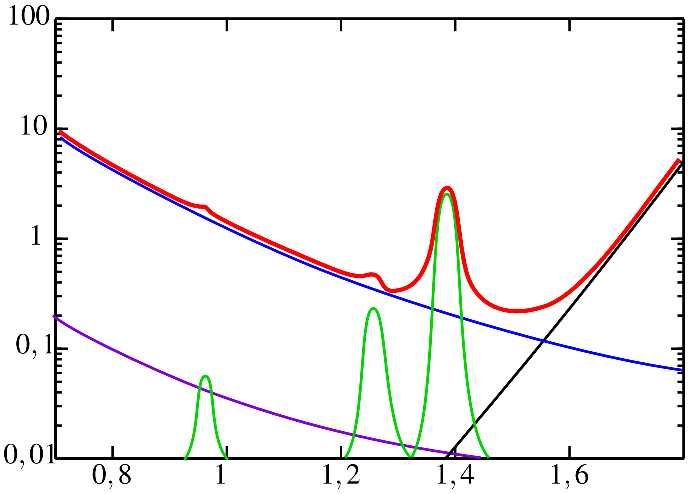
Pri prenosu informacij z optičnimi vlakni je zelo pomembno, da so izgube čim manjše. Izgube so predvsem posledica absorpcije svetlobe v snovi, Rayleighovega sipanja na termičnih fluktuacijah gostote, sipanja na nečistočah, izgub na stiku med vlakni in izgub zaradi upognjenosti vlakna. Po drugi strani pa vhodni signal ne sme biti premočan, saj lahko v vlaknu pride do nelinearnih optičnih pojavov.

Pri izdelavi optičnih vlaken se najpogosteje uporablja kremenovo steklo, ki ima najmanjšo absorpcijo svetlobe v bližnjem infrardečem območju (1300 do 1500 nm). Navadno mu dodamo še druge snovi, s čemer dosežemo izbran lomni količnik in zmanjšanje disperzije. Za merilo izgub v vlaknu vpeljemo atenuacijski koeficient

$$A[dB] = -10 \log_{10} \frac{j(z)}{j(0)}. \tag{10.64}$$

Najboljša vlakna danes imajo pri valovni dolžini 1,55 μm izgube okoli 0,2 dB/km. Za primerjavo: navadno steklo ima atenuacijo okoli 1000 dB/km.

Slika (10.14) prikazuje značilno odvisnost izgub od valovne dolžine za dobro enorodovno vlakno iz kremenovega stekla (črna črta). Pri tem gre za vrsto različnih pojavov. Pri kratkih valovnih dolžinah (UV) je absorbcija velika zaradi elektronskih prehodov v steklu (vijolična črta). Širina reže za SiO_2 je namreč okoli 8,9 eV, kar ustreza valovni dolžini okoli 140 nm. Pri velikih valovnih dolžinah (IR) pride do absorpcije zaradi vibracijskih prehodov (črna črta). Čeprav so ti prehodi pri nižjih frekvencah, so vrhovi zelo široki in segajo do okoli 1500 nm. Absorpcijo na nečistočah lahko s pazljivo izdelavo tako zmanjšajo, da postane skoraj v celotnem območju praktično zanemarljiva. Najbolj problematična nečistoča je voda oziroma OH^- ioni, ki imajo velik dipolni moment in izrazito absorpcijo pri 1380 nm (zelena črta). Zelo pomemben prispevek k absorpciji, posebej pri krajših valovnih dolžinah, je sipanje na fluktuacijah gostote (Rayleighovo sipanje), saj je sorazmerno z λ^{-4} (modra črta).

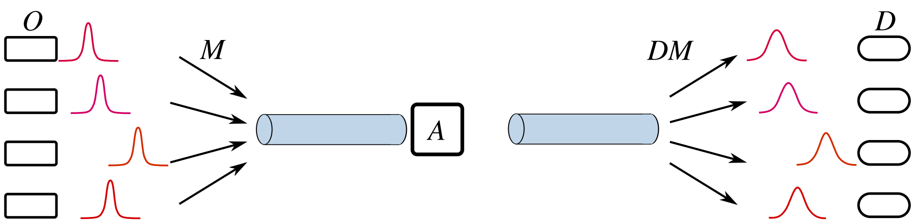


Slika 10.14: Absorpcija v vlaknu v odvisnosti od valovne dolžine

S slike je razvidno, da so izgube najmanjše okoli 1,55 μm, zato se to območje največ uporablja za prenos na velike razdalje. Izgube so tako majhne, da omogočajo prenos signala do nekaj sto kilometrov brez vmesnega ojačevanja. Teh izgub na vlaknih se tudi v prihodnosti ne bo dalo več kaj dosti izboljšati, saj so že zdaj izgube na spodnji meji, določeni s termičnimi fluktuacijami. Pri dolžini optičnih zvez tako izgube niso več glavna omejitev, ampak je to popačitev signala zaradi disperzije.

★ Pri prenosu signalov z optičnimi vlakni vpeljemo različne pasove, ki ustrezajo različnim valovnim dolžinam. Pri valovnih dolžinah 1260 – 1360 nm je tako imenovani pas O (O - *original*), ki so ga sprva uporabljali zaradi razpoložljivih virov svetlobe in nizke disperzije. Sledita pas E (1360 – 1460 nm) in pas S (1460 – 1530 nm). Najširše uporabljan je pas C (C - *conventional*) pri valovnih dolžinah 1530 – 1565 nm, sledita mu še pas L (1565 – 1625 nm) in pas U (1625 – 1675 nm).

V posameznem vlaknu lahko prenašamo več informacij, če za vsako posebej uporabimo drugo valovno dolžino. Temu procesu pravimo multipleksiranje po valovni dolžini (*wavelength-division multiplexing, WDM*). Na ta način dosežemo vzporeden prenos podatkov in hitrosti do 100 Tb/s. Shematsko je prenos podatkov na sliki (10.15). Oddajniki (O) oddajo sunke svetlobe. Z multiplekserjem (M) zberemo signale iz različnih kanalov in jih usmerimo v enorodovno vlakno. Vlakno prenaša signal, vmes ga po potrebi ojačamo (A), nato z demultiplekserjem (DM) signal razstavimo na posamezne kanale, ki jih zaznamo z ločenimi detektorji (D).



Slika 10.15: Shematski prikaz prenosa signalov z enorodovnim vlaknom

Mehanske izgube

Do zdaj smo opisali izgube, do katerih pride v vlaknu zaradi absorpcije ali sipanja. Pri optičnih zvezah pa se pojavijo izgube tudi na spojih vlaken. Tako naprimer izgubljamo pri prenosu med vlaknoma, katerih sredici nista povsem enako veliki. Signal izgubljamo, kadar sta vlakni nagnjeni pod nekim kotom eno glede na drugo, ali pa je med njima prečen ali vzdolžen premik. Na tipičnem spoju vlaken je okoli $0,2-0,5$ dB izgub.

Naloga 10.5.1 Imamo dve vlakni z efektivnima polmeroma snopov w_1 in w_2, katerih osi sta poravnani, vlakni pa se stikata. Pokaži, da je faktor sklopitve (prepustnost)

$$\eta=\left(\frac{2w_1w_2}{w_1^2+w_2^2}\right)^2. \tag{10.65}$$

Naloga 10.5.2 Imamo dve vlakni z enakima efektivnima polmeroma snopov w. Osi vlaken sta vzporedni, vendar izmaknjeni za Δ. Pokaži, da je faktor sklopitve (prepustnost)

$$\eta=\exp\left(-\frac{\Delta^2}{w^2}\right). \tag{10.66}$$

V optičnem vlaknu nastanejo izgube tudi, kadar je vlakno ukrivljeno, saj takrat valovanje uhaja v plašč. Te izgube tipično postanejo znantne, kadar je krivinski radij vlakna centimeter ali manj. Poglejmo si pojav podrobneje na planparalelnem vodniku.

Naj bo vodnik dvodimenzionalna plast debeline $2a$ z lomnim količnikom n_1, ki je obdana s snovjo z lomnim količnikom n_2. Vodnik naj zdaj ne bo raven, temveč ukrivljen s krivinskim radijem R, tako da tvori del kolobarja z notranjim radijem $R-a$ in zunanjim radijem $R+a$, pri čemer je $\dot{R}\gg a$ (slika **??**).

Slika 10.16: K izračunu izgub v ukrivljenem vodniku

Zapišimo valovno enačbo za dve dimenziji v cilindrični geometriji. Pri tem ne pozabimo, da r ni več radialna koordinata vlakna, ampak

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial\phi^2}+k_0^2n^2(r)\,E=0 \tag{10.67}$$

kjer ima $n(r)$ vrednost n_1 v sredici in n_0 drugje. Zanimajo nas rešitve oblike

$$E=\psi(r)\,e^{im\phi} \tag{10.68}$$

kjer je $\psi(r)$ znatna le v sredici. Ker je valovna dolžina svetlobe dosti manjša od R, je m veliko število, ki je povezano z valovnim številom β: naj bo $z=R\phi$ dolžina loka vzdolž sredine sredice. Tedaj je $m\phi=(m/R)z$ in je torej $\beta=m/R$. ψ zadošča enačbi

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}+\left[k_0^2n^2(r)-\frac{m^2}{r^2}\right]\psi=0 \tag{10.69}$$

Rešitve za ψ so kombinacije Besslovih funkcij reda m, kar pa zaradi velikosti m ni posebno zanimivo. Dosti več bomo izvedeli, če primerno preoblikujemo valovno enačbo 10.67. Namesto r in ϕ vpeljimo koordinati $x=r-R$ in $z=R\phi$. S tem smo prešli nazaj na koordinate planparelelne plasti in iščemo popravke valovne enacbe 10.9 reda $1/R$. Tako je $1/r\simeq 1/R$ in

$$\frac{m^2}{r^2}=\frac{m^2}{(R+x)^2}\simeq\frac{m^2}{R^2}\left(1-2\frac{x}{R}\right)=\beta^2\left(1-2\frac{x}{R}\right) \tag{10.70}$$

S tem dobimo iz enačbe 10.69 približno enačbo za prečno obliko polja

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[k_0^2 n^2(r) - \beta^2\right] \psi + \frac{1}{R}\left(\frac{d\psi}{dr} - 2\beta^2 x\,\psi\right) = 0 \tag{10.71}$$

10.6 Sklopitev v optična vlakna

10.7 *Potovanje sunka po enorodovnem vlaknu

Poglejmo si nekoliko podrobneje, kako po enorodovnem vlaknu ali drugem sredstvu z disperzijo potuje sunek valovanja z dano začetno obliko. Denimo, da smo poiskali lastna valovanja in da torej poznamo zvezo med valovnim številom β in frekvenco ω. Zapišimo sunek v obliki

$$E(z,t) = a(z,t)\;\psi(x,y) \tag{10.72}$$

kjer je $\psi(x,y)$ lastna rešitev prečenega dela valovne enačbe, ki določa tudi $\beta(\omega)$. Funkcijo $a(z,t)$, ki opisuje širjenje sunka in njegovo obliko v z smeri, lahko zapišemo s Fourierovim integralom po frekvencah

$$a(z,t) = \int a(\omega,z)\,e^{-i\omega t}d\omega \tag{10.73}$$

Sunek naj bo približno monokromatičen s frekvenco ω_0, to pomeni, da je mnogo daljši od optične periode. Pri določeni ω ima Fourierova amplituda krajevno odvisnost $\exp[i\beta(\omega)\,z]$, zato zadošča enačbi

$$\frac{\partial a(z,\omega)}{\partial z} = i\beta(\omega)\,a(z,\omega) \tag{10.74}$$

Privzeli smo, da je spekter sunka ozek, zato lahko $\beta(\omega)$ razvijemo okoli ω_0:

$$\frac{\partial a(z,\omega)}{\partial z} = i\left[\beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega-\omega_0)^2\right] a \tag{10.75}$$

Vpeljimo novo amplitudno funkcijo, ki ne bo vsebovala osnovne odvisnosti $\exp[i\beta(\omega_0)\,z]$

$$a(z,\omega) = A(z,\omega-\omega_0)\,e^{i\beta(\omega_0)z} \tag{10.76}$$

Ker je spkter različen od nič le okoli ω_0, je prikladno A pisati kot funkcijo $\omega-\omega_0$. Napravimo obratno Fourierovo transformacijo zadnjega izraza:

$$\begin{aligned} a(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z,\omega-\omega_0)\,e^{i[\beta(\omega_0)z-\omega t]}\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z,\omega-\omega_0)\,e^{-i(\omega-\omega_0)t}d(\omega-\omega_0)\;e^{i[\beta(\omega_0)z-\omega_0 t]} \\ &= A(z,t)\;e^{i[\beta(\omega_0)z-\omega_0 t]} \end{aligned} \tag{10.77}$$

Funkcija $A(z,t)$, katere Fourierova transformacija je $A(z,\omega)$, očitno predstavlja prostorsko in časovno odvisnost ovojnice sunka. Postavimo definicijo 10.76 v enačbo 10.75:

$$\frac{\partial A(z,\omega-\omega_0)}{\partial z} = i\left[\frac{d\beta}{d\omega}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega-\omega_0)^2\right] A(z,\omega-\omega_0) \tag{10.78}$$

Z obratno Fourierovo transformacijo dobimo

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t}\right)A\left(z,t\right)=-\frac{i}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A\left(z,t\right)}{\partial t^2} \tag{10.79}$$

Upoštevali smo, da je

$$\int\left(i\omega\right)^n A\left(z,\omega\right)e^{-i\omega t}\,d\omega=\frac{\partial^n}{\partial t^n}A\left(z,t\right) \tag{10.80}$$

in da je $d\beta/d\omega=1/v_g$.

Enačba 10.79 opisuje razvoj oblike sunka pri širjenju po vlaknu. Če ni disperzije grupne hitrosti, to je, če je desna stran enačbe nič, je rešitev poljubna funkcija $f\left(z-v_g t\right)$. Sunek poljubne začetne oblike potuje po vlaknu nepopačen z grupno hitrostjo. Disperzija pa povzroči, da se spreminja tudi oblika. Enačbo lahko še nekoliko poenostavimo z vpeljavo novih neodvisnih spremenljivk

$$\begin{aligned}\tau &= t-\frac{z}{v_g}\\ \zeta &= z\end{aligned} \tag{10.81}$$

Za vrh sunka, ki naj ima pri $t=0$ koordinato $z=0$ in se giblje z grupno hitrostjo, je vselej $\tau=0$. Spremenljivka predstavlja τ torej čas v točki $z=\zeta$, merjen od trenutka, ko tja prispe center sunka. Z novima spremenljivkama se enačba 10.79 zapiše

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\tau^2}+2i\frac{\partial A}{\partial\zeta}=0 \tag{10.82}$$

Ta enačba ima isto obliko kot obosna valovna enačba, ki smo jo v drugem poglavju uporabili za obravnavo koherentnih snopov. Podobnost seže dlje od formalne oblike. Pri snopih, ki so omejeni v prečni smeri, disperzija fazne in grupne hitrosti po prečnih komponentah valovnega vektorja povzroča spreminjanje prečnega preseka snopa, pri časovno omejenih sunkih v sredstvu s frekvenčno disperzijo pa se spreminja vzdolžna oblika sunka. Kot se morda bralec spominja, je tudi v praznem prostoru pri širjenju snopa v okolici grla fazna hitrost funkcija frekvence. Zato se kratek sunek, ki je omejen v prečni smeri, tudi v praznem prostoru razširi tako v prečni kot v vzdolžni smeri. (Naloga)

Obosno valovno enačbo rešijo Gaussovi snopi. V en. 10.82 ima vlogo prečne koordinate τ. Po analogiji s snopi se bo zaradi disperzije najmanj širil sunek z Gaussovo časovno odvisnostjo. Računa nam ni treba ponavljati, kar v izrazu za Gaussove snope napravimo ustrezno zamenjavo črk. Valovnemu številu k pri snopih na primer ustreza parameter $\mu=\left(d^2\beta/d\omega^2\right)^{-1}$. Tako dobimo

$$A\left(\tau,\zeta\right)=\frac{A_0}{\sigma_0\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right)\exp\left(-i\frac{\mu\tau^2}{2b}\right)e^{i\phi(\zeta)} \tag{10.83}$$

kjer je σ trajanje sunka, za katerega velja enaka zveza kot za polmer Gaussovega snopa:

$$\sigma^2=\sigma_0^2\left(1+\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}\right) \tag{10.84}$$

Tu je σ_0 trajanje sunka pri $\zeta=0$, to je na mestu, kjer je sunek najkrajši. Dodatna skupna faza $\phi\left(\zeta\right)$ ni posebno pomembna, pač pa je zanimiv drugi eksponentni faktor v enačbi 10.83. V njem smo z $b = \zeta\left(1+\zeta_0^2/\zeta^2\right)$ označili količino, ki je analogna krivinskemu radiju valovnih front v primeru Gaussovih snopov. Odvod faze po τ predstavlja spremembo frekvence glede na centralno frekvenco sunka ω_0:

$$\omega - \omega_0 = \frac{\mu\tau}{b} \tag{10.85}$$

Za pozitivno disperzijo μ je frekvenca na prednji strani sunka, to je pri $\tau < 0$, večja in se linearno zmanjšuje proti koncu sunka. Pri $\zeta = 0$ je sunek toliko kratek, kolikor je možno pri dani spektralni širini. Pri potovanju po vlaknu se zaradi disperzije sunek razširi, spektralna širina pa ostaja enaka, zato se je del pojavi kot spreminjanje frekvence znotraj sunka. Lahko si mislimo tudi, da je sunek najkrajši, to je omejen z Fourierovo transformacijo spektra, tedaj, kadar se vse frekvenčne komponente seštejejo z isto fazo, to je pri $\zeta = 0$. Da dobimo najkrajše sunke, kadar je faza vseh delnih valov enaka, smo srečali že pri fazno uklenjenih sunkih iz mnogofrekvenčnih laserjev. Pri potovanju sunka se zaradi disperzije faze frekvenčnih komponent različno spreminjajo in sunek se podaljša. Zanimivo je, da je pri tem pomemben šele drugi odvod fazne hitrosti po frekvenci, ki je sorazmeren z μ, linearno spreminjanje faze pa ne povzroči razširitve.

Naloga: Pokaži, da je spekter sunka nespremenjen.

Naloga: Pokaži, da je za sunek poljubne začetne oblike razširitev mogoče zapisati z uklonskim integralom.

Naloga: Pokaži, da iz en. 10.84 sledi podobna ocena za maksimalno frekvenco modulacije (minimalno razširitev sunka) pri dani dolžini vlakna, kot jo da en. **??**.

Razširitev sunka zaradi disperzije je pri $\mu > 0$ mogoče kompenzirati s parom paralelnih uklonskih mrežic, kot kaže slika **??**. Prva mrežica različne frekvenčna komponente razkloni, druga pa zopet zbere, vendar dolžine optičnih poti za različne komponente niso enake. celoten učinek je enak kot pri razširjanju sunka po sredstvu z negativno disperzijo. Račun je nekoliko preglednejši, rezultat pa povsem enak, če namesto refleksijskih mrežic vzamemo transmisijski, kot kaže slika **??**. Naj na par vpada raven val pod kotom α. Pred prvo mrežico je fazni faktor $\exp(ik_1x)$, kjer je $k_1 = \omega/c\sin\alpha$. Pri prehodu skozi mrežico se polje pomnoži s kompleksno prepustnostjo mrežice, ki povzroči razcep vala na uklonjene valove. Pri tem se faza za prvi uklonski red poveča za qx, kje je $q = 2\pi/\Lambda$ in je Λperioda mrežice. Premik do druge mrežice poveča fazo za k_3L. Za komponento valovnega vektorja v smeri z velja seveda $k_3 = \sqrt{(\omega/c)^2 - (k_1+q)^2}$. Po prehodu skozi drugo mrežico nas zanima prvi negativni uklonski red, ki da val v smeri prvotnega vala. Za ta red se faza spremeni za $-qx$, tako da je celotna sprememba faze

$$\Phi = L\sqrt{(\omega/c)^2 - (k_1+q)^2} = \frac{L}{c}\sqrt{\omega^2 - (\omega\sin\alpha + qc)^2} \tag{10.86}$$

Disperzija, ki jo povzroči par mrežic, je določena zdrugim odvodom faze po frekvenci:

$$\frac{d^2\Phi}{d\omega^2} = -\frac{Lq}{\left[\omega^2 - (\omega\sin\alpha + qc)^2\right]^{3/2}} \tag{10.87}$$

Drugi odvod je vselej negativen. Par mrežic torej deluje kot sredstvo z negativno disperzijo. Sunek, ki se je razširil zaradi potovanja po sredstvu s pozitivno disperzijo, lahko ponovno skrajšamo do meje, določene s širino spektra. Postopek se uporablja za pridobivanje zelo kratkih sunkov. Sunku iz fazno uklenjenega barvilnega ali Ti:safirnega laserja najprej v nelinearnem sredstvu razširijo spekter, pri čemer se sunek tudi časovno podaljša. O tem najde bralec nekaj več v poglavju o nelinearni optiki. Razširjen sunek nato s parom mrežic skrajšajo za faktor 10-100 glede na prvotno dolžino sunka. Tako dobijo sunke dolge le okoli 10 fs, kar je le še nekaj optičnih period.

11. Detektorji svetlobe

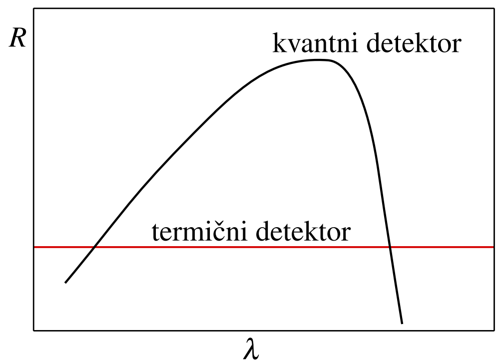
Za konec bomo spoznali še detektorje svetlobe, ki so nepogrešljivi pri kvantitativni obravnavi optičnih pojavov. Detektorji se med seboj razlikujejo po svojih specifikacijah, ki jih bomo opisali v nadaljevanju, in po načinu delovanja. Nazadnje bomo spoznali šum, ki omejuje uporabnost naprav.

11.1 Osnovne karakteristike detektorjev

Osnovna naloga optičnih detektorjev je pretvoriti vpadni svetlobni signal v nek drug signal, ki ga lahko natančno merimo. Navadno sta to električni tok ali električna napetost, ki sta sorazmerna z močjo vpadne svetlobe (in ne z amplitudo električne poljske jakosti). V grobem delimo detektorje v dve skupini, na termične in kvantne. Prvi pretvorijo energijo vpadne svetlobe v toploto, drugi pa temeljijo na fotoefektu, kjer vpadli foton izbije elektron ali ustvari par elektron-vrzel.

Pri termičnih detektorjih zaznamo svetlobo tako, da merimo povečanje temperature senzorja zaradi absorbirane svetlobe in taki detektorji zaznavajo energijo vpadle svetlobe. Njihov odziv je razmeroma počasen, zato jih uporabljamo predvsem za merjenje optične moči, lahko tudi zelo velike. Po drugi strani pa je odziv termičnih detektorjev neodvisen od valovne dolžine vpadne svetlobe, zaradi česar so termični detektorji uporabni na širokem območju od globoke ultravijolične do daljne infrardeče svetlobe. Uporaba prevlada predvsem v infrardrečem, teraherčnem ali celo mikrovalovnem območju, kjer so drugi detektorji bistveno manj občutljivi. Primeri termičnih detektorjev so bolometer, termočlen in piroelektrični detektor.

Druga skupina so kvantni detektorji, v katerih se fotoni absorbirajo in povzročijo pojav prostih nosilcev naboja. Taki detektorji torej zaznavajo število vpadlih fotonov. Odlikuje jih zelo hiter odziv (tipično pod μs) in velika občutljivost. Njihova slabost je omejen obseg valovnih dolžin, pri katerih zaznavajo svetlobo, poleg tega jih je za optimalno delovanje treba hladiti. Primeri so vakuumske, polprevodniške in plazovne fotodiode.



Slika 11.1: Primerjava spektralnega odziva termičnega in kvantnega detektorja

Osnovne karakteristike, ki omogočajo primerjavo med detektorji in določajo njihovo uporabnost, so občutljivost, spektralni odziv, odzivni čas in prag detekcije.

1. Občutljivost detektorja R pove, koliko signala dobimo na enoto vpadnega svetlobnega toka. Enota za občutljivost je tako A/W ali V/W.
2. Spektralni odziv pove, kako se občutljivost spreminja z valovno dolžino $R(\lambda)$. Pri termičnih detektorjih je $R(\lambda)$ konstanta, medtem ko kvantni detektorji delujejo le v določenem območju valovnih dolžin, ki je odvisen od snovi, iz katere je detektor narejen.
3. Odzivni čas pove, kako hitro se detektor odzove na spremembo optičnega signala.
4. Prag detekcije pove, pri kolikšni vpadni svetlobni moči postane razmerje med signalom (S) in šumom (N, *noise*) enako $S/N = 1$.

11.2 Termični detektorji

Termične detektorje se zaradi njihovega razmeroma počasnega odziva uporablja predvsem za merjenje vpadne moči in za detekcijo svetlobe tistih valovnih dolžin, za katere ni drugih preprostih ali učinkovitih detektorjev. Pogosto se uporabljajo za termografske kamere in v astronomiji.

Delovanje termičnih detektorjev temelji na spremembi temperature zaradi absorpcije svetlobe (energije), detektorji pa se med seboj razlikujejo predvsem v načinu pretvorbe spremembe temperature v električni signal. Tipalo termičnih detektorjev mora biti pri vseh vrstah dobro počrnjeno, da absorbira svetlobo v čim širšem spektralnem območju. Čeprav je njihova občutljivost načeloma neodvisna od valovne dolžine vpadne svetlobe, se v praksi pojavijo omejitve zaradi prepustnosti okna in absorpcijskega spektra črnega nanosa. Tipala so majhna, zato da dosežemo čim hitrejši odziv, ki pa je kljub temu navadno počasnejši od 1 ms. Sodobnejši detektorji se po odzivnem času že približujejo kvantnim, saj dosegajo odzivne čase tudi do ~ 10 μs. Termične detektorje uporabljamo pri sobni temperaturi, za zahtevne meritve pa jih hladimo na nekaj K.

Obravnavajmo termični detektor, katerega tipalo naj ima toplotno kapaciteto C. Toplota se s tipala odvaja v nek toplotni rezervoar s temperaturo T_0, toplotne izgube pa označimo z Λ. Ko na tipalo vpada svetloba moč P, začne temperatura tipala T zaradi absorpcije svetlobe naraščati, hkrati pa se tipalo ohlaja zaradi odtekanja toplote:

$$\frac{dW}{dt} = C\frac{dT}{dt} = P - \Lambda(T - T_0). \tag{11.1}$$

V stacionarnem stanju, ki ga dosežemo pri konstantnem vpadnem svetlobnem toku, se temperatura tipala ne spreminja in razlika temperature tipala in rezervoarja je

$$T - T_0 = \frac{P}{\Lambda}. \tag{11.2}$$

Občutljivost detektorja, ki je sorazmerna z razliko temperatur, je torej obratno sorazmerna z močjo, s katero se tipalo hladi. Za večjo občutljivost moramo torej toplotne izgube detektorja kar se da zmanjšati.

Po enačbi (11.1) se temperatura približuje stacionarni vrednosti s časovno konstanto

$$\tau = \frac{C}{\Lambda}, \tag{11.3}$$

ki je ključni parameter za določanje odzivnega časa detektorja. Odzivni čas je sorazmeren s kapaciteto senzorja, zato so tipala praviloma zelo majhna. Vidimo, da moramo za dosego čim krajšega odzivnega časa toplotne izgube kar se da povečati. Če velike izgube skrajšajo odzivni čas, pa po drugi strani zmanjšajo občutljivost (enačba 11.2), zato pri termičnih detektorjih ne moremo imeti hkrati velikega in hitrega odziva. Če želimo toplotne izgube povečati, da s tem skrajšamo odzivni čas, detektorje hladimo z zrakom ali celo z vodo, majhne toplotne izgube pa so omejene s sevanjem.

Podrobneje poglejmo odziv termičnega detektorja od vpadne moči. Naj se vpadna moč spreminja s časom, temperatura na detektorju pa temu sledi z določeno zakasnitvijo. Odziv najlepše izračunamo v Fourierevem prostoru. Vpadno moč in temperaturo izrazimo kot

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\omega e^{i\omega t} d\omega \quad \text{in} \quad T = T_0 + \int_{-\infty}^{\infty} T_\omega e^{i\omega t} d\omega. \tag{11.4}$$

To vstavimo v enačbo (11.1) in dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} i\omega T_\omega e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} (P_\omega - \Lambda T_\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{11.5}$$

Enačbi zadostimo, če izenačimo člene pred vsako spektralno komponento posebej

$$i\omega T_\omega = \frac{1}{C}\left(P_\omega - \Lambda T_\omega\right). \tag{11.6}$$

Če vpeljemo odzivni čas τ (enačba 11.3), sledi

$$T_\omega = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{1}{1+i\omega\tau}\right) P_\omega. \tag{11.7}$$

Naloga 11.2.1 Pokaži, da je odziv termičnega detektorja na zelo kratek svetlobni sunek oblike $P(t) = P_0\delta(t-t_0)$ enak

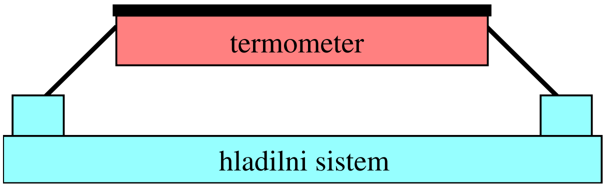
$$T(t) = \frac{iP_0}{\Lambda} e^{-(t-t_0)/\tau}. \tag{11.8}$$

Bolometer

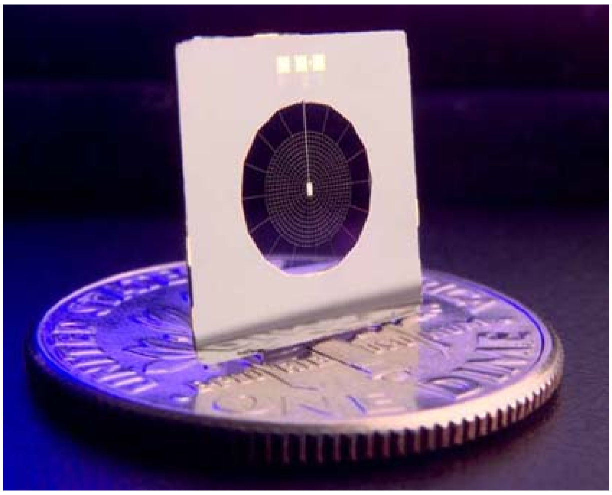
Bolometer je termični detektor, pri katerem zaznavamo spremembo električne upornosti zaradi spremembe temperature tipala[1]. Tipalo je praviloma počrnjena tanka ploščica, navadno je narejena iz termistorja, polprevodnika ali superprevodnika. Tipalo preko referenčnega upora priključimo na napetost, preko kondenzatorja pa merimo napetost na njem. Za meritve konstantega svetlobnega toka tipalo navadno vežemo v Wheatstonov mostiček. V obeh primerih za referenčni upor vzamemo kar enako tipalo, ki ga zaščitimo pred vpadno svetlobo, tako da postane sistem neobčutljiv na morebitne spremembe temperature okolice.

Prednost bolometrov bolometrih s termistorjem je približno linearna zveza med upornostjo in temperaturo. Uporabljamo jih predvsem za merjenje večjih vpadnih moči, saj taki detektorji niso zelo občutljivi ($R \sim 100$ V/W). So pa robustni, stabilni in delujejo pri sobni temperaturi. Odzivni časi so okoli $\tau \sim 1-20$ ms. Pri polprevodniških bolometrih upornost narašča eksponentno s temperaturo. Primerni so za detekcijo teraherčnih valovanj, vendar mora biti za ta namen bolometer (npr. germanijev) hlajen s tekočim helijem. Tako lahko dosežemo občutljivosti večje od $R \sim 10^8$ V/W. Zelo občutljivi so tudi detektorji s superprevodnimi tipali, saj je odvisnost upornosti od temperature v bližini prehoda v superprevodno stanje zelo velika ($R \sim 10^3$ V/W).

[1]Prvi bolometer je leta 1881 naredil ameriški fizik, astronom in letalski inženir Samuel Pierpont Langley, 1834–1906.



Slika 11.2: Shema bolometra



Slika 11.3: Bolometer za merjenje prasevanja. Premer kovanca za primerjavo je 18 mm. Vir: NASA/JPL-Caltech.

Termočlen

Termočlen je sestavljen iz dveh različnih vodnikov. En spoj vodnikov počrnimo, drugega, referenčnega, pa zaščitimo pred svetlobo. Zaradi vpadne svetlobe se počrnjeni spoj segreje, med obema spojema nastane temperaturna razlika in zaradi termoelektričnega pojava tudi električna napetost, ki jo lahko merimo. Pri tem pazimo, da je prevodnost vodnikov čim večja, toplotna prevodnost pa čim manjša. Odzivni čas termočlenov je okoli $\tau \sim 10-20$ ms, občutljivost pa okoli $R \sim 10$ V/W. Ker so napetosti, ki se pojavijo med stikoma, razmeroma majhne (le okoli $\sim 10\ \mu\mathrm{V/K}$) pogosto vežemo več termočlenov zaporedno v termobaterijo, navadno nekaj deset. Občutljivost s tem naraste na $R \sim 200$ V/W, podaljša pa se časovna konstanta $\tau \sim 10-2000$ ms.

Piroelektrični detektor

Piroelektriki so snovi brez centra inverzije, v katerih je lastna električna polarizacija odvisna od temperature (npr. $LiTaO_3$, triglicin sulfat TGS, polivinilidenfluorid PVDF in vsi feroelektriki). Piroelektrični detektor je narejen iz ploščice piroelektrične snovi med dvema elektrodama oziroma ploščama kondenzatorja. Ko se ploščica zaradi absorbirane svetlobe segreje, se ji spremeni polarizacija in med elektrodama se pojavi premikalni tok, ki ga merimo na merilnem uporniku.

Zveza med spremembo temperature in spremembo polarizacije je

$$dP = a dT, \tag{11.9}$$

kjer je a piroelektrični koeficient.

Med obema elektrodama s površino S preteče naboj

$$de = Idt = SdP = SadT. \tag{11.10}$$

Tok skozi tipalo je tako

$$I = Sa\frac{dT}{dt}. \tag{11.11}$$

Piroelektrični detektor je torej občutljiv na časovni odvod temperature detektorja, s tem pa tudi na spreminjanje vpadne svetlobne moči. V stacionarnem stanju detektor ne proizvaja električnega toka, zato moramo za merjenje konstantnega svetlobnega toka vpadno svetlobo najprej modulirati. Navadno to naredimo kar z mehanskim zaklopom. Piroelektrični detektorji se večinoma uporabljajo kot preprosti infrardeči detektorji. Njihova občutljivost je $R \sim 1\ \mu\text{A/W}$, odzivni čas pa odvisen od upornika v vezju, ampak lahko doseže vrednosti $\tau \sim 10\ \mu\text{s}$.

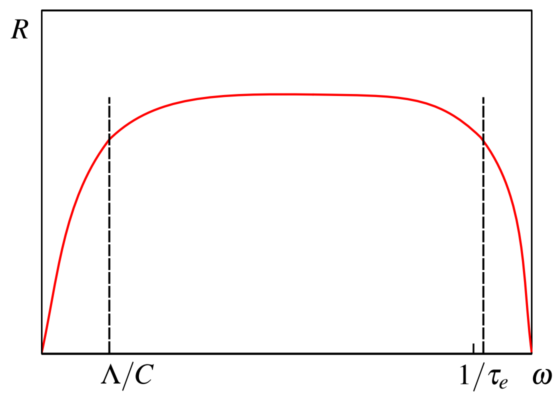
Poglejmo temperaturni odziv na tipalu. Izhajamo iz enačb (11.4), (11.7) in (11.11) in izračunajmo tok I v odvisnosti od frekvence modulacije.

$$I = Sa\frac{dT}{dt} = Sa\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} T_\omega e^{i\omega t} d\omega = Sa\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{P_\omega}{1+i\omega\tau}\right) i\omega e^{i\omega t} d\omega. \tag{11.12}$$

Sledi

$$I_\omega = \frac{i\omega SaP_\omega/\Lambda}{1+i\omega\tau}. \tag{11.13}$$

Vidimo, da pri majhnih frekvencah tok narašča, pri velikih frekvencah pa postane neodvisen od frekvence modulacije vpadne svetlobe. Vendar to še ne pomeni, da lahko moduliramo s poljubno veliko frekvenco. Poleg relaksacijskega časa detektorja ima namreč karakteristični čas tudi elektronsko vezje, ki določa zgornjo mejo za frekvenco. Ta je enak $\tau_e = R_eC_e$, pri čemer sta R_e upornost sistema in C_e električna kapaciteta detektorja.

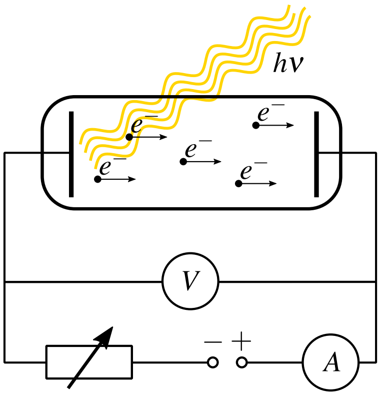


Slika 11.4: Spektralni odziv piroelektričnega detektorja na eni strani določajo toplotne izgube Λ in toplotna kapaciteta detektorja C, navzgor pa odziv omejuje odziv elektronskega vezja τ_e.

Naloga 11.2.2 Piroelektrični detektor naredimo iz kristala $LiTaO_3$ s koeficientom piroelektričnosti $a = 2{,}3\times10^{-4}\ \text{As/m}^2\text{K}$ in povprečno dielektričnostjo $\varepsilon = 50$. Izračunaj dovoljeno električno upornost sistema, če želimo, da detektor deluje za frekvence do 1 MHz. Dimenzija detektorja je $S = 1\ \text{cm}^2$ in debelina $d = 1$ mm.

11.3 Fotoefekt

Delovanje kvantnih detektorjev temelji na fotoefektu, pri katerem vpadli foton iz kovine izbije elektrone (fotoelektrone). Pri fotoefektu s svetlobo dane valovne dožine osvetlimo kovinsko katodo, nato pa merimo tok, ki teče med katodo in anodo pri dani napetosti. S spreminjanjem napetosti lahko izmerimo kinetično energijo fotoelektronov, ki izstopajo iz kovine. Izkaže se, da pri določenih valovnih dolžinah svetlobe tok fotoelektronov povsem izgine, ne glede na moč vpadne svetlobe. Fotoelektroni nastanejo le, če je energija vpadnih fotonov večja od izstopnega dela kovine. Fotoefekt je prvič opazil Hertz[2] leta 1887, za njegovo razlago leta 1905 pa je Einstein[3] dobil nobelovo nagrado.



Slika 11.5: Shema fotocelice, v kateri poteka fotoefekt. Vpadna svetloba iz katode izbije elektrone, da med katodo in anodo steče tok.

Poglejmo uporabnost fotoefekta za optično detekcijo. Glavno merilo je izstopno delo snovi, na katero vpada svetloba. Za kovine je izstopno delo Φ od okoli 2 eV za cezij pa do okoli 6 eV za platino. Ustrezna valovna dolžina svetlobe, ki še povzroči fotoefekt, je tako

$$\lambda \leq \frac{hc}{\Phi}, \tag{11.14}$$

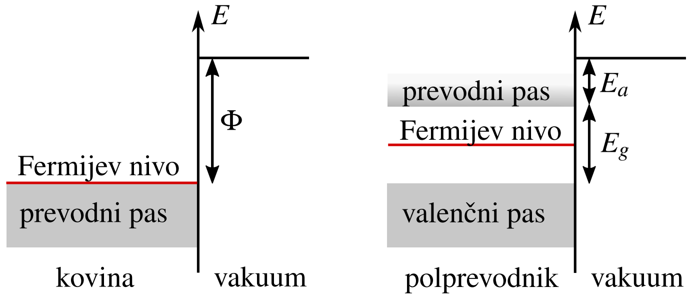
kar je 580 nm za primer cezija in samo okoli 200 nm za platino. Če želimo fotoefekt izkostisti za detektorje, območje občutljivosti povečamo z uporabo drugih snovi, na primer Cs-Te, Cs-Sb, Na-K-Sb-Cs ali GaAs:Cs. Potrebno energijo s tem zmanjšamo na $\Phi \sim 0,7$ eV, tako da lahko zaznavamo fotone z valovnimi dolžinami od ultravijolične svetlobe pa vse do infrardeče.

Ključen parameter pri detekciji svetlobe je kvantni izkoristek η. Ta nam pove verjetnost, da vpadli foton z valovno dolžino λ iz snovi izbije elektron. Električni tok, ki steče pri vpadni svetlobni moči P, je tako

$$\boxed{I = \eta e N = \eta \frac{eP}{h\nu}.} \tag{11.15}$$

Kvantni izkoristek je močno odvisen od valovne dolžine vpadne svetlobe in seveda od snovi, na katero svetloba vpada. Za fotone z energijo, ki je manjša od izstopnega dela oziroma energijske reže, je kvatni izkoristek enak nič, nato pa strmo naraste in za dane valovne dolžine lahko doseže vrednosti, večje od 90 %. Podrobneje ga bomo obravnavali pri posameznih primerih detektorjev.

[2]Nemški fizik Heinrich Hertz, 1857–1894.
[3]Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.



Slika 11.6: Shema energijskih nivojev v kovini (levo) in polprevodniku (desno). Φ označuje izstopno delo pri kovini, E_g energijo med valenčnim in prevodnim pasom poprevodnika, E_a pa elektronsko afiniteto.

★ V praksi ločimo dve vrsti kvantega izkoristka: zunanji in notranji. Zunanji je vpeljan kot razmerje števila izbitih elektronov in fotonov, ki vpadejo na detektor. Ker pa se ob vpadu na detektor vedno nekaj fotonov odbije ali siplje, vpeljemo še notranji kvatni izkoristek kot razmerje števila elektronov in fotonov, ki se dejansko absorbirajo v detektorju. Zunanji izkoristek je vedno manjši od notranjega in je neke vrste efektivni izkoristek.

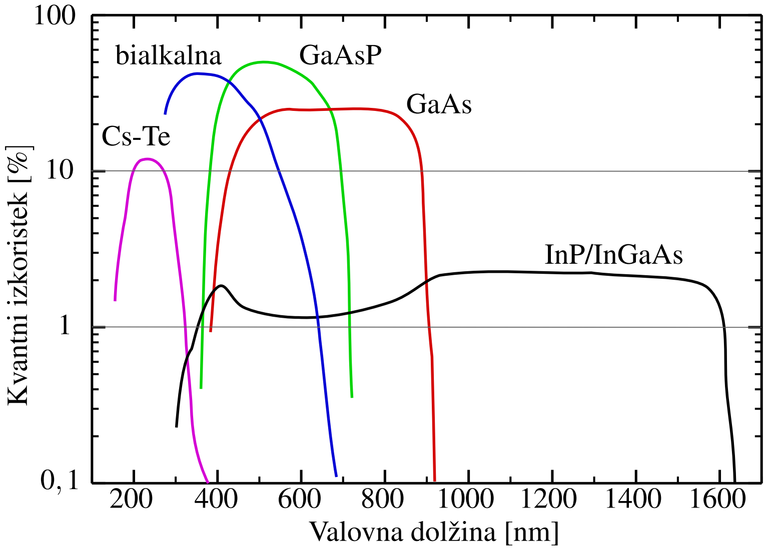
Beseda fotoefekt je prvotno označevala izbijanje elektronov iz snovi. Pojem pa lahko razširimo na pojav, pri katerem izbiti elektron ne zapusti snovi, ampak zgolj preide iz enega energijskega pasu v drugega. Pri tem zaradi absorpcije fotona nastane par elektron-vrzel, prag za nastanek para pa je določen z režo med energijskima nivojema. Prvemu pojavu zato pravimo zunanji fotoefekt, drugemu pa notranji fotoefekt. Primeri detektorjev, ki temeljijo na zunanjem fotoefektu, so fotocelice in fotopomnoževalke, detektorjev, ki temeljijo na notranjem fotoefektu, pa fotoprevodniki, polprevodniške in plazovne fotodiode.

11.4 Vakuumska fotodioda in fotopomnoževalka

Najpreprostejši kvantni detektor na zunanji fotoefekt je fotocelica ali vakuumska fotodioda (slika 11.5). Svetloba vpada na fotokatodo, ki je zaprta v vakuumirani stekleni bučki, in tam povzroči fotoefekt. Fotoelektrone, ki zapustijo katodo, z zunanjo napetostjo pospešimo do anode in merimo električni tok, ki je sorazmeren s številom vpadlih fotonov.

Območje detekcije je določeno s snovjo, iz katere izbijamo elektrone, in z njenim izstopnim delom oziroma širino reže v primeru polprevodnika. Potrebno energijo fotona lahko precej zmanjšamo, če namesto čistih kovin uporabimo kombinirane bi- ali večalkalne katode (npr. Na_2KSbCs), ali pa polprevodnike, na katere nanesemo tanko plast Cs ali Cs_2O. Na ta način ustvarimo negativno elektronsko afiniteto in izstopno delo je kar enako energijski reži polprevodnika. Z GaAs:Cs_2O ali InGaAs:Cs katodami lahko tako zaznavamo svetlobo do valovnih dolžin okoli 900 – 1000 nm, z InP/InGaAs pa celo do okoli 1600 nm. Na ultravijoličnem območju je delovanje omejeno na okoli 160 nm zaradi neprepustnosti stekla, iz katerega je narejena bučka.

Čas odziva vakuumske fotodiode je odvisen od časa preleta elektronov od katode do anode. Da je ta čas čim krajši, je napetost na fotocelici pogosto več kV. Tedaj lahko dosežemo zelo kratke odzivne čase, tudi do 0,1 ns. Enostavnost in hitrost so torej prednosti fotocelice, njena glavna pomanjkljivost pa je majhna občutljivost oziroma nizek kvantni izkoristek. Izkoristek je seveda močno odvisen od valovne dolžine vpadlega valovanja in snovi, iz katere je katoda. Največje vrednosti, ki jih dosega, so okoli 40 %, pogosto pa precej manj. Vrednosti so razmeroma nizke, saj se izbiti elektroni gibljejo v vse smeri in se pogosto sipljejo, preden sploh dosežejo površino.

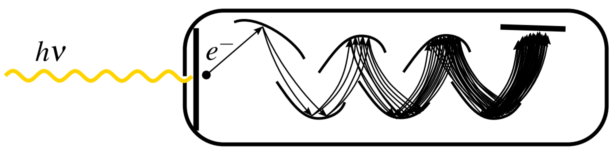


Slika 11.7: Kvantni izkoristek fotodiod za različne snovi. Povzeto po Hamamatsu Photonics.

Za primer vzemimo svetlobo z energijo $h\nu = 2$ eV ($\lambda = 620$ nm). S slike (11.7) odčitamo, da je kvantni izkoristek GaAs katode okoli 20 %. Občutljivost je tako $R = e_0\eta/h\nu = 100$ mA/W.

Pri vakuumskih fotodiodah pride pri končnih temperaturah tudi do spontane oddaje elektrona, zato nekaj toka teče, tudi če je detektor v popolni temi. Ta tok imenujemo temni tok in tipično dosega vrednosti okoli 10^{-15} A, lahko pa tudi do več nA, odvisno seveda od katode, velikosti detektorja in temperature. Za občutljive meritve je treba vakuumsko fotodiodo hladiti.

Fotopomnoževalke so fotocelice z vgrajenim ojačevanjem. Ojačevanje dosežemo tako, da izbit fotoelektron najprej pospešimo z napetostjo $100 - 150$ V na vmesno elektrodo, tako imenovano dinodo, iz katere izbije več ($\sim 5 - 10$, redkeje tudi do 40) sekundarnih elektronov. Ti elektroni potujejo do naslednje dinode, ki je pod višjo pozitivno napetostjo (tipično okoli 100 V višjo), kjer ponovno izbijejo elektrone, ki vpadejo na naslednjo dinodo ... To pomnoževanje se večkrat ponovi (navadno okoli desetkrat), število elektronov eksponentno narašča in na en vpadli foton lahko dobimo 10^9 elektronov na anodi. Občutljivost fotopomnoževalk je tako precej večja od občutljivosti vakuumske fotodiode in dosega odzivnost na anodi do $R \sim 10^6$ A/W. Fotopomnoževalka tako omogoča štetje posameznih fotonov, po drugi strani pa moramo pri običajnih osvetlitvah paziti, da fotopomnoževalke ne osvetlimo preveč.



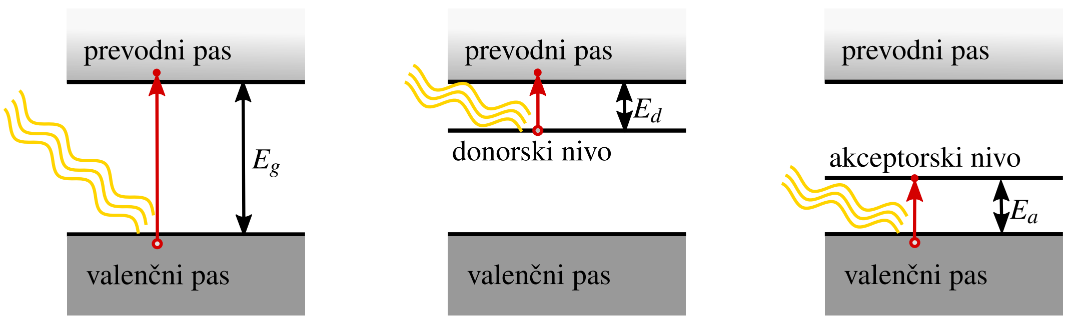
Slika 11.8: Shema fotopomnoževalke. Vpadna svetloba iz katode izbije elektrone, ti pa iz dinod izbijajo dodatne elektrone in izhodni signal se močno ojača.

Fotopomnoževalke imajo zelo kratek odzivni čas, ki je odvisen od postavitve dinod. Posamezni elektroni do anode potujejo različno dolgo, zato je sunek na izhodu razširjen, tipično okoli $\sim 0,1 - 20$ ns. Za manj zahtevne aplikacije pogosto merimo kar povprečni tok z anode. Kadar pa opazujemo posamezne fotone, zaznamo na izhodu zaporedje sunkov. Takrat lahko amplituda izhodnega signala močno niha, saj je koeficient ojačanja odvisen od števila izbitih elektronov, kar pa je statistični proces.

11.5 Fotoprevodni detektorji

Fotoprevodni detektorji[4] so detektorji, katerih delovanje temelji na notranjem fotoefektu. Vpadli foton z dovolj veliko energijo se absorbira, pri tem pa ne izbije elektronov v prostor, ampak povzroči nastanek para elektron-vrzel. Ob priključeni napetosti se nosilci naboja začnejo premikati in steče tok, ki ga merimo. Z naraščajočim številom fotonov se prevodnost fotoprevodnika manjša, zato lahko z merjenjem upornosti določimo intenziteto vpadle svetlobe. Tipično so fotoprevodniki iz polprevodnikov, lahko pa so tudi iz izolatorjev.

Da foton lahko vzbudi elektron iz valenčnega v prevodni pas, mora biti njegova energija dovolj velika. V čistih (nedopiranih) polprevodnikih to pomeni, da mora biti energija fotona večja od širine reže. Za silicij, na primer, je širina reže 1,1 eV, kar ustreza valovni dolžini do okoli $1,1$ µm, za germanij 0,67 eV ($1,8$ µm) in za PbS 0,37 eV ($3,4$ µm). Za detekcijo daljših valovnih dolžin pa ne uporabljamo polprevodnikov z manjšo energijsko režo, ampak dopirane polprevodnike (slika 11.9), s čimer občutno zmanjšamo potrebno vpadlo energijo fotonov. Vendar je tem primeru prispevek termično vzbujenih elektronov že tako velik, da je treba detektorje hladiti, navadno s tekočim dušikom ali celo tekočim helijem. Tak primer je germanij, dopiran s cinkom, s katerim lahko zaznavamo svetlobo do okoli 40 µm. Pri tem ga hladimo na 4 K, da zmanjšamo pojav termično vzbujenih nosilcev naboja.



Slika 11.9: Shema prehoda elektrona v fotoprevodniku. Levo je čisti polprevodik, v sredini n-dopiran polprevodnik in desno p-dopiran polprevodnik. Z dopiranjem povečamo območje delovanja detektorja v infra-rdeče območje.

Izračunajmo električni tok, ki steče, ko posvetimo na fotoprevodnik. Spomnimo se, da je gostota električnega toka j enaka vsoti prispevkov elektronov in vrzeli

$$j = e_0 n_v v_v + e_0 n_e v_e, \tag{11.16}$$

pri čemer n_v in n_e pomenita gostoto vrzeli in elektronov v snovi, v_v in v_e pa hitrost vrzeli in elektronov. Ta je sorazmerna z električno poljsko jakostjo E, ki je priključena na vzorec, sorazmernostni faktor pa je gibljivost β. Ko posvetimo na vzorec, se n_v in n_e povečata

$$n_v = \tilde{n}_v + \Delta n_v \quad \text{in} \quad n_e = \tilde{n}_e + \Delta n_e, \tag{11.17}$$

gostota električnega toka pa naraste za

$$\Delta j = e_0 \Delta n_v v_v + e_0 \Delta n_e v_e. \tag{11.18}$$

V stacionarnem primeru se število nosilcev naboja ne spreminja in velja

$$0 = \frac{dn_v}{dt} = \frac{\eta_v P}{h\nu(Sl)} - \frac{\Delta n_v}{\tau_v} \tag{11.19}$$

[4]Fotoprevodne detektorje včasih imenujejo tudi fotouporniki.

in podobno za elektrone. Pri tem je η kvatni izkoristek, P moč vpadne svetlobe, Sl prostornina detektorja in τ življenjski čas vrzeli. Ko stacionarno vrednost Δn_v in Δn_e vstavimo v enačbo (11.18), dobimo

$$\Delta j = e_0 \frac{\eta_v P \tau_v}{h\nu(Sl)} \beta_v E + e_0 \frac{\eta_e P \tau_e}{h\nu(Sl)} \beta_e E. \tag{11.20}$$

Če vpeljemo še napetost $U = E/l$, zapišemo celotni tok skozi fotoprevodnik zaradi vpadle svetlobe kot

$$\Delta I = \Delta j S = \frac{e_0 U P}{h\nu l^2} \left(\eta_v \tau_v \beta_v + \eta_e \tau_e \beta_e\right). \tag{11.21}$$

Pogosto je gibljivost elektronov znatno večja od gibljivosti vrzeli (npr. $0,135\ \mathrm{m^2/V\,s}$ proti $0,048\ \mathrm{m^2/V\,s}$ za silicij), zato prvi člen v oklepaju zanemarimo in zapišemo

$$\Delta I = G \left(\frac{e_0 \eta_e}{h\nu}\right) P, \tag{11.22}$$

pri čemer je koeficient ojačanja

$$G = \frac{\beta_e \tau_e U}{l^2} = \frac{\tau_e}{\tau}. \tag{11.23}$$

Vpeljali smo še čas preleta $\tau = v_e/l = \beta_e E/l = \beta_e U/l^2$.

Koeficient G opiše ojačanje signala. Njegova vrednost je odvisna od vrste snovi (in gibljivosti nosilcev naboja v njej), velikosti detektorja in tudi priključene napetosti, zato lahko G zavzame vrednosti od manj kot ena pa vse do 10^6.

Naloga 11.5.1 Izračunali smo spremembo toka, če fotoprevodnik osvetlimo s konstantno vpadno močjo. Pokaži, da je v primeru spremenljive konstante moči odziv enak

$$\Delta I_\omega = G \left(\frac{e_0 \eta_e}{h\nu}\right) \frac{P_\omega}{1 + i\omega\tau_e}. \tag{11.24}$$

Fotoprevodniki so uporabni na širokem spektralnem območju, od ultravijolične do daljne infrardeče svetlobe. V vidnem in bližnjem infrardečem omočju se uporablja pretežno silicijeve fotoprevodnike, germanijeve pa za valovne dolžine do $1,8\ \mu\mathrm{m}$. Za zaznavanje valovnih dolžin med okoli $2\ \mu\mathrm{m}$ in $7\ \mu\mathrm{m}$ so najprimernejši InAs, InSb in PbS detektorji, pri še daljših valovnih dolžinah pa se uporablja germanij, dopiran z zlatom, bakrom, cinkom, borom ... Kvatni izkoristek takih detektorjev je razmeroma velik ($\eta = 0,5$ za Ge:Cu), vendar je lahko faktor $G \ll 1$ (npr. $G = 0,03$ za Ge:Hg).

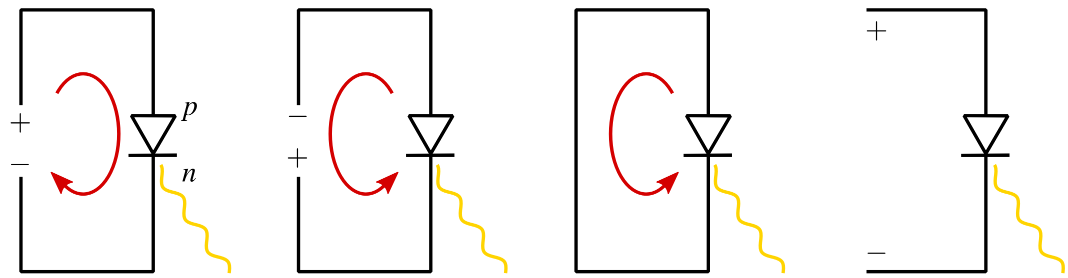
Hitrost odziva fotoprevodnika je odvisna od časa preleta nosilcev naboja, ki je določen z geometrijo detektorja, in od karakterističnega časa elektronskega vezja. Tipični odzivni časi, ki jih dosegajo detektorji, so okoli mikrosekunde, vendar lahko sežejo tudi do desetin milisekund, ali pa v izjemnih primerih do nanosekund za zelo majhne detektorje. S skrajšanjem rekombinacijskega časa lahko sicer skrajšamo odzivni čas detektorja, vendar hkrati zmanjšamo njegovo občutljivost.

★ Fotoprevodni detektorji so narejeni iz zelo tankih plasti fotoprevodnika, saj močno absorbira svetlobo. Tako za absorpcijo $70-90\%$ svetlobe zadošča le $1-2\ \mu\mathrm{m}$ debela plast. Elektrode se pogosto prepletajo, da se zmanjša dolžina preleta l in poveča ojačanje G.

11.6 PN in PIN fotodiode

Drugi primer detektorjev, ki temeljijo na notranjem fotoefektu, so polprevodniške diode. Te so danes najpogostejši in najbolj razširjen detektor svetlobe, uporabljamo jih med drugim v fotoaparatih in sončnih celicah. Fotodiode so sestavljene iz p- in n-dopiranega polprevodnika (PN fotodiode) ali pa je med njima še plast nedopiranega (intrinzičnega) polprevodnika (PIN fotodioda). Ko svetloba vpade na PN (ali PIN) stik, povzroči nastanek para elektron-vrzel in nosilca naboja zaradi električnega polja na stiku potujeta v različnih smereh. Spektralni odziv fotodiod je seveda odvisen od energijske reže polprevodnika. Silicijeve fotodiode so tako uporabne za zaznavanje valovnih dolžin do okoli $1,1$ µm, za večje valovne dolžine (do $1,6$ µm) uporabljamo InGaAs. Izkoristek fotodiod je navadno zelo velik in presega 50 %. Za razliko od fotoprevodnikov fotodiode signala ne ojačujejo, imajo pa praviloma hitrejši odziv, tipično nanosekunde.

Dioda lahko deluje v različnih načinih (slika 11.10). Lahko jo priključimo v prevodni smeri, najpogosteje jo priključimo v zaporni smeri, saj je v tem primeru tok skozi diodo linearno sorazmeren z intenziteto vpadne svetlobe, lahko je dioda kratko sklenjena, lahko pa je dioda v odprtem električnem krogu, v t.i. fotovoltaičnem načinu. V nadaljevanju bomo vse primere podrobneje spoznali.

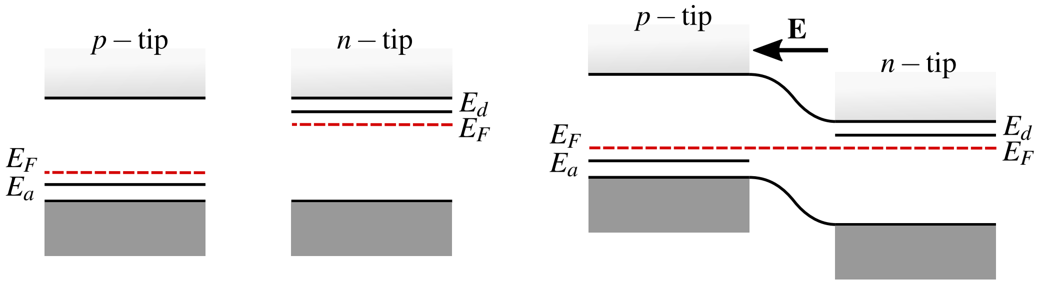


Slika 11.10: Različne vezave fotodiode: v prevodni smeri, v zaporni smeri, kratko sklenjena in v fotovoltaičnem načinu

Stik p-n in p-i-n

Fotodiode zgrajene iz stika p-n, kar pomeni stik dveh različno dopiranih polprevodnikov. Pri tem tip p označuje polprevodnike, dopirane s trivalentnimi akceptorskimi primesmi, ki v snovi ustvarijo vrzeli. Njihov energijski nivo je malo nad vrhom valenčnega pasu, zato se Fermijeva energija premakne proti valenčnem pasu (slika 11.11). Po drugi strani n tip označuje polprevodnike s petvalentnimi donorskimi primesmi, ki v snov prinesejo dodatne elektrone. Njihov energijski nivo pa je malo pod prevodnim pasom, Fermijeva energija pa je pomaknjena navzgor proti prevodnemu pasu.

Ko staknemo polprevodnik tipa p in polprevodnik tipa n, elektroni z območja z višjo koncentracijo (tip n) difundirajo v območje z nižjo koncentracijo (tip p), kjer se rekombinirajo z vrzelmi. Ob stiku tako nastane ozek pas, t.i. izpraznjeni sloj, kjer ni več prostih nosilcev naboja. Ostanejo pa pozitivno nabiti donorski atomi na strani n in analogno negativno nabiti akceptorski atomi na strani p. Zato se pojavi električno polje, ki kaže od n proti p in zaustavi rekombinacijo, saj odbija elektrone in vrzeli od stika. V ravnovesju se Fermijeva energija izenači, potencialni skok pa je približno enak $\Delta E \approx E_d - E_a$, kar je le malo manj od širine reže E_g.



Slika 11.11: Shema energijskih nivojev v p in n tipu polprevodnika ter na p-n stiku, ko se Fermijevi energiji izenačita. Med obema polprevodnikoma nastane izpraznjeni sloj, kar povzroči nastanek električnega polja.

Ko na diodo priključimo napetost, se potencialna razlika med p in n stranjo spremeni. Napetost U je pozitivna,Takrat pravimo, da smo diodo priključili v prevodni smeri. V nasprotnem primeru, ko torej pozitivni pol priključimo na n in negativni na p, pa pravimo, da smo priključili napetost v zaporni smeri.

Naj bo dioda priključena v prevodni smeri. To pomeni, da smo na p stran diode priključili pozitivni pol, na n stran pa negativnega. S priključeno napetostjo spremenimo potencialno razliko med p in n stranjo in sicer skok napetosti zmanjšamo.

PIN larger sensitive volume, faster response time.

Fotovoltaični način

Dioda v zaporni smeri reverse-biased

Spektralna občutljivost obojih je odvisna od velikosti energijske reže emd valenčnim in prevodnim pasom. Silicij z energijsko režo 1 eV je uporaben do valovne dolžine 1,2 mikron, germanij pa do 1,6 mikron. V vidnem in bližnjem infrardečem področju deluje še GaAs, CdS in PbS, zadnja dva le kot fotoprevodnika. Pri energiji fotonov blizu energijske reže imajo polvodniški detektorji zelo velik kvantni izkoriste, kar blizu 1.

Fotodiode zaznajo le pare elektron-vrzel v območju izpraznjenega sloja p-n spoja. Električno polje v tem sloju povzroči, da elektron odteče na eno stran, vrzel pa na drugo. Fotodopda tako generira tok, ki je sorazmeren z vpadlo svetlobno močjo. Zaradi nelinearne zveze med tokom in napetostjo na diodi je treba skrbeti, da je napetost na diodi vselej 0 ali celo v zaporni smeri, kar lahko dosežemo z zunanjo napetostjo v zaporni smeri. S tem tudi dosežemo hitrejši odziv, ker se zmajša kapacitivnost p-n spoja.

Da se bo svetloba absorbirala ravno v p-n spoju, mora biti seveda spoj pri površini dopde, obenem pa mora biti spoj čim debelejši, kar dosežejo s tem, da je med p in n stranjo še plast čistega polvodnika. Takim diodam pravimo pin diode.

V pn spoju je mooče doseči tudi pomnoževanje nastalih elektronov in vrzeli, če je zaporna napetost dovolj velika, da lahko fotoelektron dobi toliko energije, preden zapusti izpraznjeni sloj, da tvori nove pare. Taka pomnoževalna dioda je zelo občutljiva, vendar ima tudi večji šum.

11.7 Plazovne fotodiode

11.8 CCD in CMOS detektorji

11.9 Šum pri optični detekciji

Sama občutljivost nekega detektorja, to je količina A/W za neko fotodiodo, nam ne pove, kolikšen je najmanjši signal, ki ga je mogoče meriti. Ta je določen s šumom detektorja in pa s časom meritve, to je s frekvenčno širino modulacije svetlobe, ki jo želimo meriti. Največja možna frekvencčna širina je seveda določena s hitrostjo odziva detektorja.

Ocenimo fluktuacije, torej šum, toka nekega detektorja, na primer fotodiode. V času meritve τ steče n elektronov. Tok je torej

$$I = ne/\tau. \tag{11.25}$$

Povprečni tok je seveda

$$\bar{I} = \bar{n}e/\tau. \tag{11.26}$$

Napravimo mnogo meritev, vse dolge τ. Ker so posamezni foto dogodki med seboj neodvisni, lahko predpostavimo, da je porazdelitev pretečenih elektronov Poissonova: pa lahko izračunamo povprečni kvadrat fluktuacij toka

$$\sigma^2 = \overline{(I-\bar{I})^2} = \frac{e^2}{\tau^2}\overline{(n-\bar{n})^2} = \frac{e^2}{\tau^2}\bar{n} = \frac{e\bar{I}}{\tau}. \tag{11.27}$$

Tokovni šum je obratno sorazmeren korenu iz časa merjenja, oziroma sorazmeren s korenom iz širine merjenjega frekvenčnega intervala. Najmanjši povprečni tok diode je tok zaradi termičnega vzbujanja, s tem je seveda po enačbi določen tudi osnovni termični šum diode. Temni tok diode je sorazmeren s površino diode in eksponentno odvisen od temperature in energijske reže polvodnika;

$$I_0 = Sj_0e^{-E_g/kT} \tag{11.28}$$

Tipičen temni tok silicijeve fotodiode s površino 1 mm^2 je pri sobni temperaturi 1 nA. Tokovni šum je torej po gornji enačbi

$$I_N = \sqrt{eI_0\Delta\nu} \approx 10^{-15}\, A/\sqrt{Hz}\sqrt{\Delta\nu}. \tag{11.29}$$

Svetlobni tok, označen pogosto z NEP (noise equivalent power), ki da enak signal, je 10^4 fotonov na sekundo ali 10^{-14} W. Še beseda o enoti za NEP. Navadno je podan na enoto frekvenčnega intervala, to je po enačbi .. na $\sqrt{Hz}$.

Stvarno kazalo