

# FOTONIKA

Martin ČOPIČ  
Mojca VILFAN

Recenzenti: \*\*\*

Lektor: \*\*\*

Risbe in diagrami: Mojca Vilfan in Andrej Petelin

Oblikovanje, postavitev in prelom: Mojca Vilfan

Naslovne slike poglavij: Mojca Vilfan, Martin Rigler (str. 120 in 176), Andrej Petelin (str. 37), ESO (str. 93), Irena Drevenšek (str. 140), in NASA (str. 238)

©Kopiranje in razmnoževanje besedila ali njegovih delov ter slik je dovoljeno samo z odobritvijo avtorjev knjige.

LJUBLJANA, 2019

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Elektromagnetno valovanje .....</b>	<b>8</b>
1.1	Maxwellove enačbe	8
1.2	Valovna enačba in Poyntingov vektor	9
1.3	Monokromatski elektromagnetični val	10
1.4	Ravni val	11
1.5	Polarizacija EM valovanja	12
1.6	Lom in odboj EM valovanja	14
1.7	Uklon svetlobe	16
1.8	EM valovanje v anizotropnih snoveh	20
<b>2</b>	<b>Koherenca .....</b>	<b>24</b>
2.1	Youngov poskus	24
2.2	Koherenca navadnih svetil	25
2.3	Časovna koherenca	26
2.4	Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom	28
2.5	Prostorska koherenca	31
<b>3</b>	<b>Koherentni snopi svetlobe .....</b>	<b>36</b>
3.1	Omejen snop svetlobe	36
3.2	Obosna valovna enačba	37
3.3	Osnovni Gaussov snop	38
3.4	Snopi višjega reda	42
3.5	Besslov snop	44
3.6	Transformacije snopov z lečami	45
3.7	Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki	48
3.8	Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija	50
<b>4</b>	<b>Optični resonatorji .....</b>	<b>52</b>
4.1	Odprti resonatorji	52
4.2	Gaussovi snopi v resonatorjih	55
4.3	Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom	59

<b>4.4</b>	<b>Resonančne frekvence</b>	<b>60</b>
<b>4.5</b>	<b>Izgube v resonatorjih</b>	<b>61</b>
<b>4.6</b>	<b>*Obravnava resonatorjev z uklonskim integralom</b>	<b>63</b>
<b>4.7</b>	<b>*Sklopitev resonatorja z okolico</b>	<b>65</b>
<b>4.8</b>	<b>*Sklopitev dveh resonatorjev</b>	<b>69</b>
<b>5</b>	<b>Interakcija svetlobe s snovjo</b>	<b>70</b>
<b>5.1</b>	<b>Kvantizacija elektromagnetskega polja</b>	<b>70</b>
<b>5.2</b>	<b>Sevanje črnega telesa</b>	<b>72</b>
<b>5.3</b>	<b>Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje</b>	<b>73</b>
<b>5.4</b>	<b>Absorpcijski koeficient</b>	<b>77</b>
<b>5.5</b>	<b>Nasičenje absorpcije</b>	<b>78</b>
<b>5.6</b>	<b>Optično ojačevanje</b>	<b>80</b>
<b>5.7</b>	<b>Optično črpanje trinivojskega sistema</b>	<b>80</b>
<b>5.8</b>	<b>Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte</b>	<b>83</b>
<b>5.9</b>	<b>*Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte</b>	<b>84</b>
<b>5.10</b>	<b>*Izpeljava verjetnosti za prehod</b>	<b>87</b>
<b>5.11</b>	<b>*Rabijeve oscilacije</b>	<b>90</b>
<b>6</b>	<b>Laser</b>	<b>92</b>
<b>6.1</b>	<b>Laser</b>	<b>92</b>
<b>6.2</b>	<b>Zasedbene enačbe</b>	<b>95</b>
<b>6.3</b>	<b>Spektralna širina enega laserskega nihanja</b>	<b>97</b>
<b>6.4</b>	<b>Primerjava laserjev in navadnih svetil</b>	<b>99</b>
<b>6.5</b>	<b>Večfrekvenčni laser</b>	<b>101</b>
<b>6.6</b>	<b>Relaksacijske oscilacije</b>	<b>102</b>
<b>6.7</b>	<b>Sunkovni laserji</b>	<b>104</b>
<b>6.8</b>	<b>Delovanje v sunkih s preklopom dobrote</b>	<b>105</b>
<b>6.9</b>	<b>Uklepanje faz</b>	<b>109</b>
<b>6.10</b>	<b>Frekvenčni glavnik</b>	<b>111</b>
<b>6.11</b>	<b>*Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo</b>	<b>111</b>
<b>6.12</b>	<b>*Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra</b>	<b>114</b>
<b>6.13</b>	<b>*Semiklasični model laserja</b>	<b>117</b>
<b>7</b>	<b>Primeri laserjev</b>	<b>122</b>
<b>7.1</b>	<b>Laserski sistemi</b>	<b>122</b>
<b>7.2</b>	<b>He-Ne laser</b>	<b>123</b>

---

<b>7.3</b>	<b>Argonov ionski laser</b>	<b>125</b>
<b>7.4</b>	<b>CO<sub>2</sub> laser</b>	<b>126</b>
<b>7.5</b>	<b>Ekscimerni laser</b>	<b>128</b>
<b>7.6</b>	<b>Neodimov laser</b>	<b>129</b>
7.6.1	Nd:YAG .....	129
7.6.2	Nd:steklo .....	131
<b>7.7</b>	<b>Ti:safir laser</b>	<b>131</b>
<b>7.8</b>	<b>Laserji na organska barvila</b>	<b>132</b>
<b>7.9</b>	<b>Vlakenski laserji</b>	<b>133</b>
<b>7.10</b>	<b>Polprevodniški laserji</b>	<b>135</b>
7.10.1	Svetlobne diode - LED .....	143
<b>8</b>	<b>Modulacija svetlobe .....</b>	<b>144</b>
<b>8.1</b>	<b>Elektro-optični pojav</b>	<b>144</b>
<b>8.2</b>	<b>Longitudinalna modulacija</b>	<b>147</b>
<b>8.3</b>	<b>Transverzalna modulacija</b>	<b>149</b>
<b>8.4</b>	<b>Amplitudna modulacija</b>	<b>151</b>
<b>8.5</b>	<b>Fazna in frekvenčna modulacija</b>	<b>152</b>
<b>8.6</b>	<b>Elasto-optični in akusto-optični pojav</b>	<b>154</b>
<b>8.7</b>	<b>Uklon svetlobe na zvočnem valovanju</b>	<b>156</b>
<b>8.8</b>	<b>*Račun akusto-optičnega pojava</b>	<b>159</b>
<b>8.9</b>	<b>Modulacija s tekočimi kristali</b>	<b>163</b>
<b>8.10</b>	<b>*Račun prehoda svetlobe skozi zasukan nematik</b>	<b>166</b>
<b>8.11</b>	<b>Račun preklopa v tekočem kristalu – Frederiksov prehod</b>	<b>169</b>
<b>9</b>	<b>Optična vlakna .....</b>	<b>172</b>
<b>9.1</b>	<b>Planparalelni vodnik</b>	<b>172</b>
<b>9.2</b>	<b>Račun lastnih rodov v planparalelnem vodniku</b>	<b>174</b>
<b>9.3</b>	<b>Cilindrično vlakno</b>	<b>178</b>
<b>9.4</b>	<b>Disperzija</b>	<b>185</b>
<b>9.5</b>	<b>*Potovanje kratkega sunka po enorodovnem vlaknu</b>	<b>189</b>
<b>9.6</b>	<b>Izgube in ojačenje v optičnih vlaknih</b>	<b>193</b>
<b>9.7</b>	<b>Sklopitev svetlobe v optične vodnike</b>	<b>197</b>
<b>9.8</b>	<b>Sklopitev med optičnimi vodniki</b>	<b>198</b>
<b>9.9</b>	<b>*Vpliv spremembe lomnega količnika vlakna na širjenje svetlobe</b>	<b>202</b>
<b>9.10</b>	<b>Nelinearni pojavi v optičnih vlaknih</b>	<b>204</b>

# Predgovor

Fotonika je veda o svetlobi. Obsega izredno široka področja nastanka svetlobe in svetlobnih virov, uporabe svetlobe v različne namene, širjenja optičnih signalov in njihovega spreminjanja ter zaznavanja svetlobe. V zadnjih desetletjih je zato fotonika doživela izreden razcvet v raziskavah in tehnološki uporabi.

V pričajoči knjigi bomo obravnavali osnove fotonike. Po kratki ponovitvi splošne optike bomo spoznali delovanje laserjev in lastnosti laserske svetlobe, nadaljevali z nelinearnimi optičnimi pojavni in modulacijo svetlobe ter zaključili s prenosom in detekcijo laserskih signalov. Knjiga je zato zelo primerna predvsem za študente II. stopnje fizike, ki že imajo znanje optike in zahtevanih matematičnih prijemov, ga pa priporočava vsakemu, ki ga področje fotonike zanima, naj bo to ljubiteljsko ali profesionalno. Bralcu v razmislek sva dodala nekaj nalog, zahtevnejša podoglavlja pa so označena z zvezdico.

Prvotno gradivo za to knjigo je nastalo po zapisih s predavanj pri predmetu Elektrooptika in kasneje Fotonika ter Fizika laserjev. Gradivo sva dopolnila, posodobila in prilagodila obravnavani snovi pri predmetih Fotonika I in Fotonika II. Za pomoč pri pripravi se najlepše zahvaljujeva prof. dr. Ireni Drevenšek Olenik, ki je kot dolgoletna predavateljica Fotonike znatno pripomogla k oblikovanju te knjige, in Andreju Petelinu za pomoč pri delu ter ostalim sodelavcem z Odseka za kompleksne snovi Instituta "Jožef Stefan" za sodelovanje pri pripravi.

Avtorja

## Priporočena dodatna literatura

- A. Yariv in P. Yeh, Photonics, Sixth Edition, Oxford University Press, 2007.
- B. E. A. Saleh in M. C. Teich, Fundamentals of Photonics, 2nd Edition, Wiley, New Jersey, 2007.
- G. A. Reider, Photonics, An Introducion, Springer, Berlin, 2016.
- V. Degiorgio in I. Cristiani, Photonics, A Short Course, Springer International, 2016.
- W. T. Silfvast, Laser Fundamentals, Second Edition, Cambridge University Press, 2008.
- C. C. Davis, Lasers and Electro-Optics, Cambridge University Press, 2006.
- O. Svelto, Principles of Lasers, Fifth Edition, Springer, New York, 2010
- K. F. Renk, Basics of Laser Physics, Second Edition, Springer, Berlin, 2017.
- J. W. Goodman, Statistical Optics, Second Edition, Wiley, New Jersey, 2015.
- W. Demtröder, Laser Spectroscopy, Fifth Edition, Springer, Berlin, 2014.
- G. New, Introduction to Nonlinear Optics, Cambridge University Press, 2011.
- R. W. Boyd, Nonlinear Optics, Third Edition, Academic Press, 2008.

# 1. Elektromagnetno valovanje

Za začetek bomo osvežili osnove teorije elektromagnetnega polja in elektromagnetnega valovanja. Obnovili bomo zapis Maxwellovih enačb in valovne enačbe, opisali osnovne pojave valovanja (lom, odboj in uklon) in si na kratko ogledali razširjanje svetlobe v anizotropnih snoveh.

## 1.1 Maxwellove enačbe

Elektromagnetno polje v praznem prostoru opišemo z dvema vektorskima poljem, električnim in magnetnim, ki sta na splošno funkciji lege  $\mathbf{r}$  in časa  $t$ . Vsaki točki v prostoru lahko priredimo jakost električnega polja  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  in gostoto magnetnega polja  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Za opis elektromagnetnega polja v snovi vpeljemo dve dodatni količini. To sta gostota električnega polja  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  in jakost magnetnega polja  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . Vse te količine povezujejo Maxwellove enačbe<sup>1</sup>

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_e \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

Pri zapisu enačb smo upoštevali tudi izvore polj, to je gostoto električnega toka  $\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t)$  in gostoto naboja  $\rho_e(\mathbf{r}, t)$ , ki pa ju bomo v nadaljevanju izpuščali.

Poleg Maxwellovih enačb veljata zvezi

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{in} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}, \quad (1.6)$$

kjer  $\mathbf{P}$  označuje električno polarizacijo, to je gostoto električnih dipolov,  $\mathbf{M}$  pa magnetizacijo, to je gostoto magnetnega momenta. Polarizacija in magnetizacija sta odvisni od zunanjih polj  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$ . Na splošno sta njuni odvisnosti zelo zapleteni, v izotropnih in linearnih snoveh<sup>2</sup> pa se zvezi poenostavita v

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \mathbf{E} \quad \text{in} \quad \mathbf{M} = \frac{(\mu - 1)}{\mu \mu_0} \mathbf{B} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu - 1) \mathbf{H}. \quad (1.7)$$

Vpeljali smo električno  $\chi_e$  in magnetno  $\chi_m$  susceptibilnost ter dielektričnost  $\epsilon$  in magnetno permeabilnost  $\mu$ . Ko združimo gornje enačbe, lahko zapišemo dve konstitutivni relaciji

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad \text{in} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu}. \quad (1.8)$$

V linearnih anizotropnih snoveh moramo namesto skalarnih vrednosti  $\epsilon$  in  $\mu$  zapisati tenzorje.

<sup>1</sup>Škotski fizik James Clerk Maxwell, 1831–1879.

<sup>2</sup>Med nelinearne snovi, za katere napisani zvezi ne veljata, sodijo na primer feroelektrični in feromagneti.

### Robni pogoji

Navedene Maxwellove enačbe zadoščajo za opis elektromagnetnega polja v neomejeni snovi, kjer so vse komponente polj zvezne funkcije. Za obravnavo v omejeni snovi moramo vedeti tudi, kaj se z elektromagnetnim poljem zgodi na meji dveh sredstev. Pri prehodu iz enega dielektrika v drugega se ohranjata normalni komponenti gostote električnega in magnetnega polja ter tangentni komponenti jakosti električnega in magnetnega polja (slika 1.1)

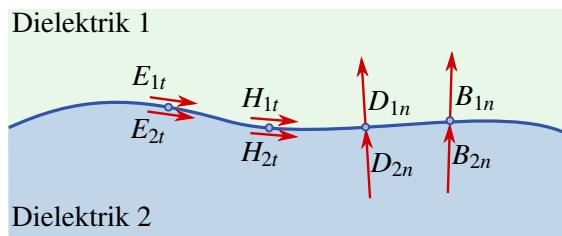
$$D_{1n} = D_{2n} \quad (1.9)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (1.10)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1.11)$$

$$H_{1t} = H_{2t}. \quad (1.12)$$

Privzeli smo, da na meji med dielektrikoma ni površinskih tokov ali nabojev, sicer bi morali robna pogoja za  $D_n$  in  $H_t$  ustreznno popraviti. Na meji dielektrika z idealnim prevodnikom (kovino, zrcalom) so robni pogoji drugačni. Za magnetno polje jih ne moremo preprosto zapisati, za električno polje pa velja, da mora biti tangentna komponenta jakosti električnega polja enaka nič. Posledica tega pogoja je, da se pri pravokotnem vpisu na zrcalo faza valovanja spremeni za  $\pi$ .



Slika 1.1: Na meji med dvema dielektrikoma brez površinskih tokov in nabojev se ohranjata tangentni komponenti  $E_t$  in  $H_t$  ter normalni komponenti  $D_n$  in  $B_n$ .

## 1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor

Večinoma bomo obravnavali elektromagnetna valovanja v izotropnih, homogenih in linearnih snoveh brez zunanjih izvorov in nosilcev naboja ( $\mathbf{j}_e = 0$  in  $\rho_e = 0$ ). Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpeljemo valovni enačbi za jakost električnega in gostoto magnetnega polja

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in} \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.13)$$

Pri tem je hitrost valovanja v snovi enaka

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c_0}{n}. \quad (1.14)$$

Magnetne in dielektrične lastnosti snovi smo pospravili v lomni količnik  $n$ , ki pove, kolikokrat je hitrost svetlobe v snovi manjša od hitrosti svetlobe v praznem prostoru. Velja

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (1.15)$$

Za izotropno in nemagnetno snov ( $\mu = 1$ ) je lomni količnik  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

Vpeljimo še vektor gostote energijskega toka, to je Poyntingov vektor<sup>3</sup>  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (1.16)$$

Iz lastnosti vektorskega produkta sledi, da je smer energijskega toka vedno pravokotna na smeri  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{H}$ . Gostoto energijskega toka  $j$ , to je količino energije, ki v danem času preteče skozi dano ploskev z normalo  $\hat{\mathbf{n}}$ , izračunamo kot časovno povprečje projekcije Poyntingovega vektorja

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle. \quad (1.17)$$

Gostoto energijskega toka  $j$  imenujemo tudi gostota svetlobnega toka.

Poyntingov izrek, ki ga lahko izpeljemo neposredno iz Maxwellovih enačb in konstitutivnih relacij, predstavlja izrek o ohranitvi energije. Za valovanje v homogeni izotropni snovi tako velja

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.18)$$

kjer je  $w$  celotna gostota energije elektromagnetnega polja. Zapišemo jo kot

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_0 \mathbf{B}^2. \quad (1.19)$$

Valovno enačbo in ohranitvene zakone lahko zapišemo tudi za anizotropne, nehomogene ali nelinearne snovi. Nekaj teh primerov bomo srečali v nadaljevanju in jih bomo obravnavali sproti.

### 1.3 Monokromatski elektromagnetični val

Reševanje valovne enačbe navadno poenostavimo s kompleksnim zapisom električnega in magnetnega polja. Račun si oglejmo na primeru monokromatskega elektromagnetnega vala. Nastavek za monokromatski val s krožno frekvenco  $\omega$  naj bo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}) \quad \text{in} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re(\mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}), \quad (1.20)$$

kjer sta  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  in  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  časovno neodvisna vektorja jakosti električnega in gostote magnetnega polja s kompleksno amplitudo. Podobno lahko vpeljemo tudi kompleksne vektorje  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  in  $\mathbf{H}$ , ki opisujejo realne količine (polarizacijo, magnetizacijo, gostoto električnega in jakost magnetnega polja). V nadaljevanju bomo večinoma pisali polja v kompleksni obliki, pri čemer se bomo držali gornje definicije. Zavedati pa se moramo, da je uporaba kompleksnega zapisa zgolj računski pripomoček, na koncu je treba rezultate vedno izraziti z realnimi količinami.

Če vstavimo nastavka za monokromatski val (enačbi 1.20) v valovni enačbi (enačbi 1.13), dobimo Helmholtzevi enačbi<sup>4</sup> za kompleksna vektorja jakosti električnega in gostote magnetnega polja. V homogenem in izotropnem sredstvu ju zapišemo kot

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.22)$$

kjer je  $k = nk_0 = n\omega/c_0$  valovno število. Vpeljemo lahko tudi kompleksni Poyntingov vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}). \quad (1.23)$$

<sup>3</sup>Angleški fizik John Henry Poynting, 1852–1914.

<sup>4</sup>Nemški fiziolog in fizik Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821–1894.

**Naloga 1.3.1** Upoštevajoč izraz za Poyntingov vektor  $\mathbf{S}$  (enačba 1.16) pokaži, da lahko gostoto svetlobnega toka  $j$  (ozziroma povprečje projekcije Poyntingovega vektorja) izrazimo s kompleksnim Poyntingovim vektorjem  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \Re(\mathbf{S}(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.24)$$

## 1.4 Ravni val

Osnovna rešitev valovne enačbe (enačba 1.13) je ravni val. Nastavek, ki predstavlja ravni val in hkrati reši Helmholtzevo enačbo (enačba 1.21), je oblike

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \quad (1.25)$$

in podobno za magnetno polje

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \quad (1.26)$$

pri čemer sta vektorja  $\mathbf{E}_0$  ter  $\mathbf{B}_0$  od kraja in časa neodvisna. Velikost valovnega vektorja  $\mathbf{k}$  je valovno število  $k = nk_0$ , kjer je  $n$  lomni količnik izotropne in homogene snovi.

Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledijo zveze o ortogonalnosti količin električnega in magnetnega polja. Vedno sta med seboj pravokotna vektorja jakosti električnega  $\mathbf{E}$  in magnetnega polja  $\mathbf{H}$  (naloge 1.4.1), ki sta po definiciji tudi vedno pravokotna na Poyntingov vektor  $\mathbf{S}$  (enačba 1.16). V izotropnih snoveh je Poyntingov vektor vzporeden valovnemu vektorju, zato sta v izotropnih snoveh  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{H}$  hkrati pravokotna na valovni vektor  $\mathbf{k}$ . Elektromagnetno valovanje je torej transverzalno valovanje. Zaradi enolične zveze med električnim in magnetnim poljem zadošča za opis ravnega vala le eno polje, navadno se odločimo za električno.

**Naloga 1.4.1** Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) pokaži, da za ravni val vedno velja

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}. \quad (1.27)$$

Izpelji še zvezi

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad \text{in} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mu \mu_0 \mathbf{H}_0, \quad (1.29)$$

iz katerih izhaja, da v izotropni snovi velja  $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k}$ .

Energijski tok je pri ravnem valu v izotropni snovi vedno v smeri valovnega vektorja, pravokotno na valovne fronte. Iz definicije za gostoto svetlobnega toka (enačba 1.24) ter Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledi

$$j = \frac{1}{4} E_0 H_0^* + \frac{1}{4} E_0^* H_0 = \frac{1}{2} c_0 n \epsilon_0 |E_0|^2. \quad (1.30)$$

Gostota svetlobnega toka je torej sorazmerna s kvadratom amplitude jakosti električnega polja. Poglejmo nekaj primerov. Gostoti toka  $j = 1 \text{ kW/m}^2$  (približna gostota svetlobnega toka s Sonca na Zemljinem površju) v praznem prostoru ustreza jakost električnega polja  $E_0 = 868 \text{ V/m}$ , gostoti  $j = 1 \text{ W}/\mu\text{m}^2$  (močno zbran laserski žarek) pa  $E_0 = 27 \text{ MV/m}$ .

Zapišimo še povprečno gostoto energije valovanja. K energiji prispevata tako magnetno kot električno polje. Oba prispevka sta enaka, zato velja

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \epsilon \epsilon_0 |E_0|^2 + \frac{1}{4} \frac{|B_0|^2}{\mu \mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 |E_0|^2. \quad (1.31)$$

Povprečna gostota energije  $w$ , pomnožena s hitrostjo svetlobe v snovi, da gostoto energijskega oziroma svetlobnega toka  $j$

$$j = cw = \frac{1}{2} c \epsilon \epsilon_0 |E_0|^2 = \frac{1}{2} c_0 n \epsilon_0 |E_0|^2. \quad (1.32)$$

Prva enakost nazorno kaže, da je gostota svetlobnega toka pravzaprav pretok energije. To si lahko predstavljamo, če vzamemo valj s prečnim presekom  $S$  in dolžino  $c\Delta t$ . V volumnu  $Sc\Delta t$  je potem shranjene  $wSc\Delta t$  energije. Energija, ki preteče skozi presek  $S$  v času  $\Delta t$ , je ravno  $cw$ .

Gostota svetlobnega toka ravnega vala je neodvisna od kraja in časa, iz česar sledi, da je povsod po prostoru enaka. Če bi hoteli izračunati energijo, ki jo nosi ravni val, bi opazili, da je ta energija neskončna. To seveda ni mogoče, zato se je vedno treba zavedati, da je ravni val le idealiziran, a nazoren in praktičen približek elektromagnetnega vala.

## 1.5 Polarizacija EM valovanja

Jakost električnega polja elektromagnetnega valovanja je v izotropnem sredstvu vedno pravokotna na smer valovnega vektorja<sup>5</sup>. Vektor  $\mathbf{E}_0$  tako leži v ravnini, ki je pravokotna na smer valovnega vektorja, njegovo smer pa opiše polarizacija.

Električno polje ravnega vala lahko razstavimo na dve medsebojno pravokotni komponenti vektorja  $\mathbf{E}_0$ . Ti dve komponenti nihata sinusno z enako frekvenco, lahko pa se razlikujeta v amplitudi in fazi. Na splošno je ravni val eliptično polariziran in vrh vektorja električne poljske jakosti  $\mathbf{E}_0$  v ravnini, ki je pravokotna na smer širjenja, orisuje elipso. Kadar je elipsa izrojena v daljico, govorimo o linearu polariziranem valu, kadar pa je krog, govorimo o cirkularno polariziranem valu. Poljubno polarizacijo lahko vedno zapišemo kot vsoto dveh linearu ali dveh cirkularno polariziranih valovanj.

Priročen zapis polarizacije je s kompleksnim Jonesovim vektorjem<sup>6</sup>  $\mathbf{J}$ . Za monokromatski ravni val, ki se širi v smeri  $z$  in ima komponenti  $E_x$  in  $E_y$ , je Jonesov vektor

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|E_0|} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Dodali smo normalizacijski faktor  $|E_0| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}$ , da je Jonesov vektor normiran in  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* = 1$ . Ravni val, linearu polariziran v smeri  $x$ , tako zapišemo kot  $\mathbf{J} = (1, 0)$ , val, ki je linearu polariziran pod kotom  $45^\circ$  glede na osi  $x$  in  $y$ , pa je  $\mathbf{J} = (1, 1)/\sqrt{2}$ . Za zapis cirkularno polariziranega valovanja ni enotnega dogovora, tukaj zapišimo desno cirkularno polarizirano valovanje kot  $\mathbf{J} = (1, -i)/\sqrt{2}$ , levo cirkularno polarizirano pa z  $\mathbf{J} = (1, i)/\sqrt{2}$ . V našem zapisu je desno polariziran val tisti val, pri katerem se električna poljska jakost na danem mestu vrti v desno, če gledamo proti izvoru valovanja.

<sup>5</sup>Na splošno velja  $\mathbf{E} \perp \mathbf{S}$  (enačba 1.16) in  $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$  (nalogi 1.4.1). To velja tudi v anizotropnih sredstvih, vendar je tam  $\mathbf{E} \nparallel \mathbf{D}$  in  $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{S}$ .

<sup>6</sup>Ameriški fizik Robert Clark Jones, 1916–2004.

Zapis z Jonesovim vektorjem je prikladen, saj omogoča preprost izračun prehoda ravnega vala skozi optične elemente, ki spreminja polarizacijo, a ohranjajo njegovo obliko. Na splošno se pri prehodu skozi optični element spremeni kompleksna amplituda  $\mathbf{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y})$

$$E_{2x} = A_{11}E_{1x} + A_{12}E_{1y} \quad (1.34)$$

$$E_{2y} = A_{21}E_{1x} + A_{22}E_{1y}, \quad (1.35)$$

pri čemer so komponente  $A_{ij}$  odvisne od lastnosti elementa. Enačbi zapišemo v matrični obliki  $\mathbf{E}_2 = A \cdot \mathbf{E}_1$  oziroma z Jonesovimi vektorji  $\mathbf{J}_2 = A \cdot \mathbf{J}_1$ , kjer  $\mathbf{J}_1$  in  $\mathbf{J}_2$  opisujeta polarizaciji vstopnega in izstopnega vala,  $A$  pa je Jonesova matrika. Jonesova matrika za prehod skozi linearni polarizator, ki polarizira v smeri  $x$ , je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

za polarizator, orientiran pod kotom  $45^\circ$  glede na os  $x$ , pa

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Oglejmo si še dva zanimiva primera. Jonesova matrika za optični element, ki eni komponenti doda fazni zamik  $\pi$  (tak element imenujemo ploščica  $\lambda/2$ ), je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Ploščica  $\lambda/2$  tako spremeni desno cirkularno polariziran val v levo polariziran in obratno, linearno polariziran val pa prezrcali čez koordinatno os. Podobno je Jonesova matrika za element, ki eni komponenti doda fazni zamik  $\pi/2$  (imenujemo ga ploščica  $\lambda/4$ ), enaka

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Ploščica  $\lambda/4$  linearno polarizirano valovanje z Jonesovim vektorjem  $(1, 1)/\sqrt{2}$  spremeni v levo cirkularno polarizirano valovanje, cirkularno polarizirano valovanje pa nazaj v linearne.

---

**Naloga 1.5.1** Pokaži, da je Jonesova matrika za polarizator, ki prepušča polarizacijo pod kotom  $\vartheta$  glede na os  $x$ , podana z matriko

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Namig: matriko  $A'$ , ki opisuje polarizator v smeri  $x$ , zapiši v zasukanem koordinatnem sistemu  $A = R(\vartheta) \cdot A' \cdot R(\vartheta)^T$ , kjer je  $R(\vartheta)$  rotacijska matrika.

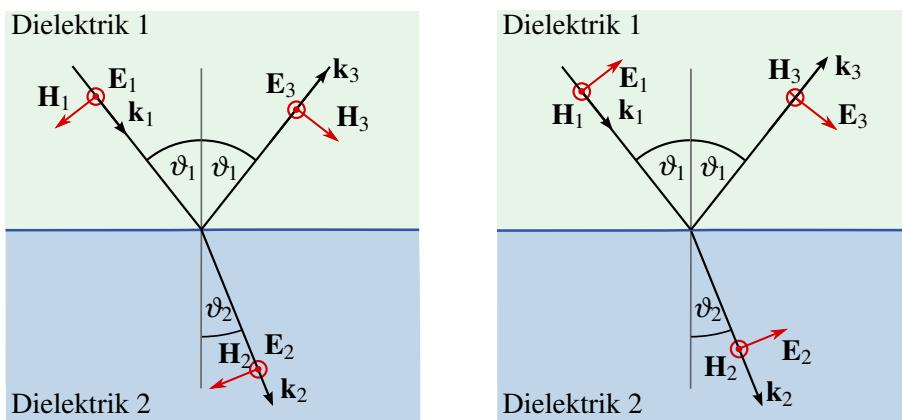
---

## 1.6 Lom in odboj EM valovanja

Na ravni meji med dvema izotropnima dielektrikoma se del svetlobe odbije po odbojnem zakonu, ki pravi, da je odbojni kot enak vpadnemu, del pa lomi po lomnem zakonu

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2. \quad (1.41)$$

S kotoma  $\vartheta_1$  in  $\vartheta_2$  smo označili vpadni in lomni kot,  $n_1$  in  $n_2$  pa sta lomna količnika prve in druge snovi (slika 1.2). Poglejmo, kaj se pri lomu in odboju zgodi s polarizacijo valovanja. Dogovorimo se, da valovanje, pri katerem je električna poljska jakost pravokotna na vpadno ravnino, imenujemo transverzalno električno (TE) valovanje. Kadar leži jakost električnega polja v vpadni ravnini in je na vpadno ravnino pravokotna jakost magnetnega polja, govorimo o transverzalnem magnetnem valovanju (TM).



Slika 1.2: Lom elektromagnetnega valovanja na meji dveh izotropnih dielektrikov. Levo: transverzalno električno (TE) valovanje. Desno: transverzalno magnetno (TM) valovanje.

Z  $E_1$  označimo amplitudo jakosti električnega polja vpadnega valovanja, z  $E_2$  prepuščenega in z  $E_3$  odbitega. Nato vpeljemo amplitudno prepustnost  $t$  in amplitudno odbojnost  $r$ , ki pa sta odvisni od vpadne polarizacije. Zapišemo

$$E_{2\text{TE}} = t_{\text{TE}} E_{1\text{TE}} \quad (1.42)$$

$$E_{2\text{TM}} = t_{\text{TM}} E_{1\text{TM}}. \quad (1.43)$$

Koeficiente  $r$  in  $t$  izračunamo iz robnih pogojev (enačbe 1.9–1.12). Enačbe, ki opisujejo odvisnost odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota za različni vpadni polarizaciji, imenujemo Fresnelove enačbe<sup>7</sup>. Za TE polarizacijo velja

$$r_{\text{TE}} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \quad \text{in} \quad t_{\text{TE}} = 1 + r_{\text{TE}} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \quad (1.44)$$

in za TM polarizacijo

$$r_{\text{TM}} = \frac{n_1 \cos \vartheta_2 - n_2 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1} \quad \text{in} \quad t_{\text{TM}} = (1 + r_{\text{TM}}) \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}. \quad (1.45)$$

<sup>7</sup>Francoski fizik in inženir Augustin Jean Fresnel, 1788–1827.

Na splošno sta odbojnost  $r$  in prepustnost  $t$  kompleksni količini, saj iz lomnega zakona sledi, da je  $\cos \vartheta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \vartheta_1}$  lahko kompleksen. Velikost števila  $|r|$  tako predstavlja odbojnost, argument  $\arg(r)$  pa spremembo faze pri odboju.

Amplitudna odbojnost  $r$  in amplitudna prepustnost  $t$  povesta, kako se spremeni kompleksna amplituda jakosti električnega polja pri odboju oziroma lomu. Razmerje med gostoto energijskega toka odbite in vpadne svetlobe  $\mathcal{R}$  oziroma prepuščene in vpadne svetlobe  $\mathcal{T}$  izračunamo kot

$$\mathcal{R} = |r|^2 \quad \text{in} \quad \mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}. \quad (1.46)$$

Slednja enačba sledi iz ohranitve energije. Na splošno  $\mathcal{T}$  ni enak  $|t|^2$ , saj energijski tok potuje po različnih snoveh in v različnih smereh. Velja zveza

$$\mathcal{T} = \frac{n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1} |t|^2. \quad (1.47)$$

Najpreprostejši primer je pravokotni vpad svetlobe na mejo dveh sredstev. Zaradi simetrije sta v tem primeru odbojnost in prepustnost neodvisni od polarizacije. Sledi

$$r_{\text{TE}} = r_{\text{TM}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{in} \quad t_{\text{TE}} = t_{\text{TM}} = \frac{4n_1 n_2}{n_1 + n_2}. \quad (1.48)$$

Ob pravokotnem vpodu iz zraka na steklo ( $n_1 = 1$  in  $n_2 \approx 1,5$ ) je tako odbojnost

$$\mathcal{R} = \left( \frac{1 - n_2}{1 + n_2} \right) \approx 0,04. \quad (1.49)$$

Poglejmo še odvisnost odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota (slika 1.3). Pri tem je pomembno, ali se svetloba lomi v optično gostejše ( $n_1 < n_2$ ) ali v optično redkejše sredstvo ( $n_1 > n_2$ ). Najprej obravnavajmo primer loma v optično gostejšo snov (sliki a in c). Vidimo, da je pri nekem kotu, imenujemo ga Brewstrov kot<sup>8</sup>, odbojnost za TM polarizirano valovanje enaka nič. Posledično je ob vpodu pod Brewstrovim kotom odbito valovanje vedno TE polarizirano. Vse TM valovanje je prepuščeno, zato pri Brewstrovem kotu velja  $\mathcal{T}_{\text{TM}} = 1$  in  $\mathcal{T}_{\text{TE}} < 1$ .

---

**Naloga 1.6.1** Pokaži, da Brewstrov kot izračunamo kot

$$\vartheta_B = \arctan \left( \frac{n_2}{n_1} \right). \quad (1.50)$$

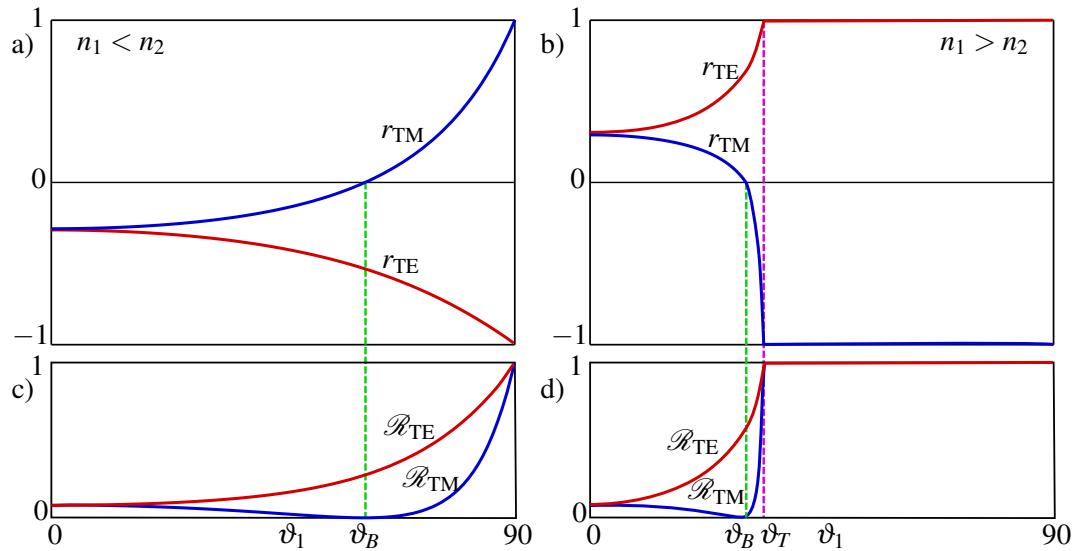

---

Negativen predznak odbojnosti  $r_{\text{TE}}$  pomeni, da ima odbiti TE polarizirani val pri vpodu na optično gostejše sredstvo nasprotno fazo od vpadnega. Za TM val je faza pri vpadnih kotih, manjših od Brewstrovega, nasprotna, pri večjih vpadnih kotih pa ima odbita svetloba enako fazo kot vpadna.

Pri vpodu na optično redkejše sredstvo (sliki 1.3 b in d) je pomemben še en kot, to je mejni kot totalnega odboja  $\vartheta_T = \arcsin(n_2/n_1)$ . Pri vpadnih kotih, ki so večji od  $\vartheta_T$ , se svetloba v celoti odbije in govorimo o totalnem ali popolnem odboju. Kljub temu električna poljska jakost v optično redkejšem sredstvu ni enaka nič, saj se tam pojavi evanescentno polje. To je polje, ki se širi v smeri mejne ravnine, njegova amplituda pa pojema eksponentno z oddaljenostjo od nje. Vdorna globina je odvisna od valovne dolžine valovanja, lomnega količnika snovi in tudi od vpadnega kota. Čeprav se v optično redkejši snovi pojavi električno polje, je Poyntingov vektor v smeri pravokotno na mejno ploskev v povprečju enak nič in zato ne pride do prenosa energije v drugo snov.

---

<sup>8</sup>Škotski fizik in znanstvenik Sir David Brewster, 1781–1868.



Slika 1.3: Amplitudna odbojnost  $r$  za obe vpadni polarizaciji (a, b) in razmerje med gostoto energijskega toka odbite in vpadne svetlobe  $\mathcal{R}$  za obe polarizacije (c, d) v odvisnosti od vpadnega kota. Za primer na slikah (a) in (c) velja  $n_1 < n_2$ , za primer na slikah (b) in (d) pa  $n_1 > n_2$ . Z zeleno je označen Brewstrov kot  $\vartheta_B$ , z vijolično pa mejni kot totalnega odboja  $\vartheta_T$ .

★ Prozorne ploščice, ki so postavljene pod Brewstrovim kotom glede na smer vpadne svetlobe, imenujemo Brewstrova okna. Njihova značilnost je, da eno polarizacijo (TM) prepustijo v celoti, druge polarizacije (TE) pa se del odbije, del pa prepusti. Brewstrova okna so zelo uporabna pri izdelavi resonatorjev plinskih laserjev, saj so izgube za izbrano polarizacijo zelo majhne, za drugo pa razmeroma velike.

★ Pri prehodu skozi optične elemente se – razen TM polariziranega valovanja pri Brewstrovem kotu – vedno nekaj svetlobe odbije. Da zmanjšamo te izgube, optične elemente navadno prekrijemo z antirefleksno plastjo, to je nanosom ene ali več primerno debelih plasti dielektrikov z ustreznimi lomnimi količniki. Zaradi destruktivne interference valovanj, odbitih na posameznih plasteh, se količina odbite svetlobe z izbrano valovno dolžino občutno zmanjša. Ker so laserji koherentni izvori svetlobe s točno določeno valovno dolžino, za zmanjšanje izgub, na primer v resonatorju laserja, uporabljamo optične elemente (leče, kristale, modulatorje ...) z ustrezeno antirefleksno plastjo.

## 1.7 Uklon svetlobe

Kadar svetloba vpade na oviro, za oviro nastane senca. Nastala senca ni ostra, ampak ima zaradi uklona zbrisane robeve. Obravnave uklona svetlobe na odprtinah ali zaslonkah se lotimo z uporabo skalarnega približka teorije elektromagnetnega polja. To pomeni, da vpliva polarizacija ne upoštevamo. Ta je pomemben zgolj pri zelo majhnih odprtinah, kjer je velikost odprtine  $a$  po velikosti podobna valovni dolžini svetlobe  $a \sim \lambda$ . Vendar so tudi v tem primeru uklonske slike za različne polarizacije podobne, razlikujejo pa se po jakosti uklonjene svetlobe.

★ Primer, kjer skalarni približek ne da pravih rezultatov, je uklon na mrežici, narejeni iz zelo tankih prevodnih žic. Takšna mrežica deluje kot polarizator za vpadno elektromagnetno valovanje. Elektromagnetni val s polarizacijo, ki je vzporedna žicam, pri prečkanju v žicah inducira tok in val se delno odbije in delno absorbira. Za valovanje, ki je polarizirano pravokotno na žice, je inducirani tok bistveno manjši, saj je tok omejen na smer vzdolž žice. Posledično je val, polariziran pravokotno na žice, prepuščen, val, polariziran vzporedno z žicami, pa ne. Takšni polarizatorji se večinoma uporabljajo v mikrovalovni tehniki, vendar se v zadnjih letih z razvojem in izboljšavo litografskih postopkov vse pogosteje uporablja tudi v bližnjem infrardečem delu svetlobe.

Pri velikostih odprtin  $a \gg \lambda$  torej uporabimo skalarno obliko valovne enačbe (enačba 1.13)

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (1.51)$$

Časovna odvisnost polja  $E$  je harmonična funkcija in je sorazmerna z  $e^{-i\omega t}$ . Z uporabo Greenovega izreka jakost polja  $E_P$  v točki prostora  $P$  izrazimo s poljem na poljubni ploskvi, ki to točko obkroža. Zvezo opisuje Kirchhoffov integral<sup>9</sup>

$$E_P = -\frac{1}{4\pi} \oint \left( E \mathbf{n} \cdot \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \cdot \nabla E \right) dS, \quad (1.52)$$

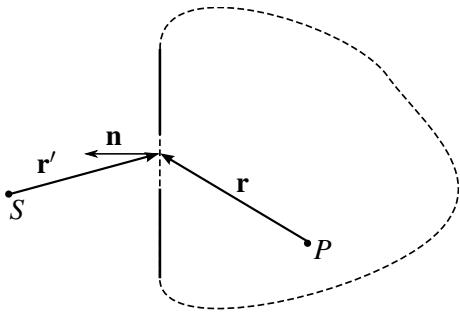
kjer je  $\mathbf{n}$  normala na ploskev, po kateri teče integral,  $r$  pa oddaljenost od  $P$  do dela ploskve  $dS$ .

Naj svetloba iz točkastega izvora v točki  $S$  (slika 1.4) vpada na zaslonsko ploskvo z odprtino poljubne oblike. Izračunajmo skalarno polje v točki  $P$  na drugi strani zaslona. Vpadno svetlubo zapišemo kot

$$E = A \frac{e^{ikr'}}{r'}, \quad (1.53)$$

kjer je  $r'$  razdalja od izvora do točke na zaslunu,  $A$  pa zaradi ohranitve energije konstanta.

Integracijska ploskev je lahko poljubna sklenjena ploskev, ki objema točko  $P$ . Izberemo ploskev, ki zajema odprtino na zaslunu, poleg tega pa naredimo še dva približka: jakost polja  $E$  in njen gradient doprineseta k integralu le na odprtini, na preostanku ploskve pa sta njuna prispevka zanemarljivo majhna; vrednost  $E$  in njen gradient sta na odprtini takšna, kot da zaslona ne bi bilo. Približka sta precej groba, vendar se izkaže, da se kljub temu dobro ujemata z eksperimentalno uklonsko sliko, s čimer upravičimo njuno uporabo.



Slika 1.4: Integracijska ploskev v Kirchhoffovem integralu zajema odprtino in objema točko  $P$ .

Kirchhoffov integral za točkast izvor svetlobe se zapiše kot integral po odprtini

$$E_P = -\frac{ikAe^{-i\omega t}}{4\pi} \int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} (\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')) dS. \quad (1.54)$$

Imenujemo ga Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral.

**Naloga 1.7.1** Uporabi Kirchhoffov integral (enačba 1.52) in pokaži, da za primer krožnega vpadnega vala (enačba 1.53) polje v točki  $P$  zapišemo s Fresnel-Kirchhoffovim integralom (enačba 1.54). Pri tem privzemi, da je oddaljenost točke  $P$  od odprtine  $r \gg \lambda$ .

<sup>9</sup>Nemški fizik Gustav Robert Kirchhoff, 1824–1887.

Oglejmo si poseben primer, ko leži točkast izvor svetlobe na osi okrogle odprtine. Polje v točki  $P$  izračunamo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi} \int E_S \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1) dS, \quad (1.55)$$

pri čemer  $E_S$  predstavlja kompleksno amplitudo vpadnega polja v odprtini

$$E_S = A \frac{e^{ikr'}}{r'}. \quad (1.56)$$

Zgornja oblika Fresnel-Kirchhoffovega integrala ni pravzaprav nič drugega kot matematičen zapis Huygensovega načela<sup>10</sup>. Spomnimo se, da Huygensovo načelo pravi, da lahko vsako točko valovne fronte obravnavamo kot izvor novega krogelnega vala. Točno to je zapisano tudi v gornjem integralu. Vpadni val  $E_S$  v vsakem od elementov odprtine  $dS$  vzbudi krogelno valovanje s kompleksno amplitudo

$$E = A_0 \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (1.57)$$

polje v izbrani točki  $P$  pa je vsota prispevkov posameznih krogelnih valovanj. Za razliko od osnovnega Huygensovega načela, v Fresnel-Kirchhoffovem integralu (enačba 1.55) nastopa še faktor  $(\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1)$ , ki poskrbi, da ni valovanja v smeri nazaj proti izvoru. Tudi faktor  $-i$  manjka v osnovnem Huygensovem načelu, pomeni pa, da je uklonjeno valovanje fazno zakasnjenjo za  $\pi/2$  glede na osnovno valovanje  $E_S$ .

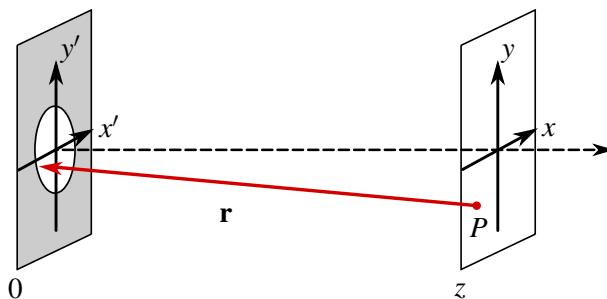
Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral uporabno razširimo z dodatkom prepustnostne funkcije odprtine  $T$ . Z njo na splošno popišemo amplitudne in fazne spremembe, do katerih pride na raznih odprtinah, lečah, uklonskih mrežicah ... Razširjen uklonski integral zapišemo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi} \int T(r') E_S(r') \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1) dS, \quad (1.58)$$

pri čemer smo upoštevali tudi splošno obliko vpadnega vala  $E_S(r')$ .

### Fraunhoferjev in Fresnelov približek

Izračun Fresnel-Kirchhoffovega uklonskega integrala (enačba 1.54) je na splošno zelo zapleten, zato se pogosto poslužujemo dveh približkov: Fraunhoferjevega<sup>11</sup> in Fresnelovega.



Slika 1.5: K izračunu Fraunhoferjevega in Fresnelovega uklona

<sup>10</sup>Nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens, 1629–1695.

<sup>11</sup>Nemški fizik Joseph von Fraunhofer, 1787–1826.

Izhajamo iz Fresnel-Kirchhoffovega integrala za točkast izvor (enačba 1.54) in zapišemo lego točke  $P$  s koordinatami  $x, y$  in  $z$ , razdaljo  $r$  pa s koordinatami točke  $P$  in koordinatama na zaslonu  $x'$  in  $y'$  (slika 1.5). Privzamemo, da je oddaljenost zaslona  $z$  bistveno večja od prečnih dimenzij  $x$  in  $y$ . Zapišemo razdaljo  $r$  in jo razvijemo

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \approx z + \frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z}. \quad (1.59)$$

Vstavimo razvoj v uklonski integral (enačba 1.55), pri čemer  $r$  v imenovalcu nadomestimo kar z  $z$ . Pridemo do Fresnelovega uklonskega približka

$$E_P(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \int \int E_S e^{ik((x-x')^2 + (y-y')^2)/2z} dx' dy'. \quad (1.60)$$

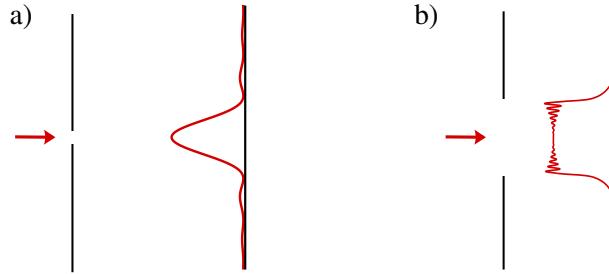
Kadar je oddaljenost zaslona dovolj velika oziroma so prečne dimenzije dovolj majhne, da zadošča razvoj do linearnih členov, govorimo o Fraunhoferjevem uklonu in uklonski integral je

$$E_P(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ik(z+(x^2+y^2)/2z)} \int \int E_S e^{-ik(xx'+yy')/z} dx' dy'. \quad (1.61)$$

V njem prepoznamo Fourierovo transformacijo polja  $E_S$ . Fraunhoferjeva uklonska slika velja za razmeroma velike oddaljenosti zaslona od uklonske odprtine, ko lahko uklonjeni val dovolj dobro opišemo z ravnim valom. Bolj zapleteno Fresnelovo uklonsko sliko moramo uporabiti, kadar obravnavamo primer bližnjega polja. Mejo med Fraunhoferjevim in Fresnelovim režimom kvalitativno določa Fresnelovo število

$$F = \frac{a^2}{L\lambda}. \quad (1.62)$$

Pri tem je  $a$  karakteristična dimenzija odprtine,  $L$  tipična oddaljenost zaslona od odprtine ter  $\lambda$  valovna dolžina svetlobe. V grobem velja, da lahko Fraunhoferjev približek uporabimo, kadar je  $F < 1$  in je odstopanje faze od ravnega vala znotraj odprtine majhno. Sicer moramo uklon obravnavati v Fresnelovem približku ali celo v polni obliki.



Slika 1.6: Značilna uklonska slika odprtine v Fraunhoferjevem (a) in Fresnelovem režimu (b)

**Naloga 1.7.2** Pokaži, da je v Fraunhoferjevi uklonski sliki uklon na okrogli odprtini podan z

$$I_P = I_0 \frac{4J_1(kap/z)}{kap/z}, \quad (1.63)$$

kjer je  $a$  polmer odprtine,  $J_1(x)$  je Besslova funkcija in  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

## 1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh

Do zdaj smo obravnavali elektromagnetno valovanje v izotropnih snoveh, v katerih je dielektričnost skalar in hitrost valovanja neodvisna od smeri. Na splošno so snovi anizotropne, dielektričnost je tenzor, hitrost potovanja svetlobe skozi snov pa je odvisna od smeri širjenja in od polarizacije valovanja.

Gostoto električnega polja v anizotropni snovi zapišemo kot

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \underline{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \mathbf{E}, \quad (1.64)$$

kjer je  $\underline{\epsilon}$  tenzor drugega ranga in ima na splošno devet komponent.

V dielektričnih snoveh, v katerih ne pride do optične aktivnosti ali absorpcije, je tenzor realen in simetričen  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$ . Tak tenzor lahko vedno diagonaliziramo, torej poiščemo koordinatni sistem, v katerem je diagonalen. V takem koordinatnem sistemu velja

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \mathbf{E} \quad (1.65)$$

in

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_0 \epsilon_1 E_1, \\ D_2 &= \epsilon_0 \epsilon_2 E_2, \\ D_3 &= \epsilon_0 \epsilon_3 E_3. \end{aligned} \quad (1.66)$$

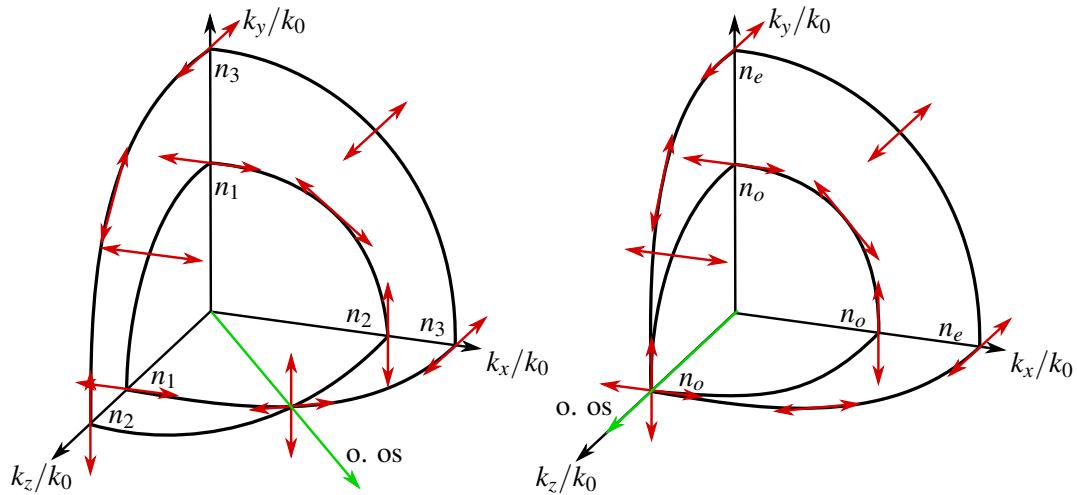
Glavne osi novega koordinatnega sistema določajo smeri, vzdolž katerih sta jakost in gostota električnega polja vzporedni, iz lastnih vrednosti pa izračunamo tri lomni količnike  $n_i = \sqrt{\epsilon_i}$ . Snovi, za katere so vse tri vrednosti  $n_i$  različne, imenujemo optično dvoosne snovi, medtem ko sta v optično enoosnih snoveh dve lastni vrednosti enaki  $n_1 = n_2$ . Če so enake vse tri lastne vrednosti, je snov izotropna.

### Ploskev valovnega vektorja

V anizotropnih snoveh je lomni količnik odvisen od smeri širjenja svetlobe in izkaže se, da tudi od njene polarizacije. Poglejmo najprej preprost primer, ko se svetloba širi vzdolž lastne osi, naj bo to os  $z$ . Če je vpadno valovanje polarizirano vzdolž lastne osi  $x$ , se pri prehodu skozi kristal polarizacija valovanja ohrani, lomni količnik za tak val je  $n_1$ . Podobno velja za val, polariziran v smeri  $y$ , za katerega je lomni količnik enak  $n_2$ . Če polarizacija valovanja, ki se širi vzdolž lastne osi  $z$ , ne sovpada z lastnima osema  $x$  ali  $y$ , nastane po prehodu skozi kristal iz vpadnega linearne polariziranega valovanja na splošno eliptično valovanje. Lastni komponenti namreč potujeta različno hitro, zato pride med njima do faznega zamika.

Za poljubno smer širjenja valovanja in poljubno polarizacijo je račun razmeroma zapleten. Formalen pristop izhaja iz valovne enačbe (enačba 1.13), v kateri moramo upoštevati tudi električno polarizacijo  $\mathbf{P} = \epsilon_0(\underline{\epsilon} - I)\mathbf{E}$ . Iz nje sledi sistem enačb za komponente valovnega vektorja in električne poljske jakosti.

Rešitev tega sistema najbolj nazorno predstavimo s ploskvijo valovnega vektorja, ki je sklenjena dvolistna ploskev (slika 1.7). Dvolistnost ploskve vodi pri vsakem valovnem vektorju  $\mathbf{k}$  do dveh rešitev in dveh različnih lomnih količnikov, od katerih vsak ustreza eni od ortogonalnih polarizacij. Točke, v katerih se ploskev dotika sama sebe in sta lomna količnika za obe polarizacije enaka, določajo smeri optičnih osi.



Slika 1.7: Dvolistna ploskev valovnega vektorja, pri čemer zaradi nazornosti rišemo le presečišča ploskve z geometrijskimi ravninami v prvem oktantu. V dvoosnem kristalu (levo) sta dve optični osi. Druga os ni narisana, leži pa simetrično glede na os  $z$ . Privzeli smo, da velja  $n_1 < n_2 < n_3$ . V optično enoosnem kristalu (desno) je le ena optična os, po dogovoru je to os  $z$ . Rdeče puščice označujejo ustrezeno polarizacijo.

### Optično enoosni kristali

V optično enoosnih kristalih sta dve lastni vrednosti enaki. Lastne vrednosti izberemo tako, da velja  $n_1 = n_2 \neq n_3$ . Navadno vpeljemo nove oznake:  $n_1 = n_2 = n_o = n_{\perp}$ , ki ga imenujemo redni (*ordinary*) lomni količnik, in  $n_3 = n_e = n_{\parallel}$ , ki je izredni (*extraordinary*) lomni količnik. V eni smeri sta lomna količnika za obe polarizacije enaka in tisti smeri pravimo optična os. Po dogovoru je to os  $z$ . Hitrost valovanja, ki se širi vzdolž optične osi, je tako neodvisna od njegove polarizacije. Ker je optična os samo ena, imenujemo kristal optično enoosen.

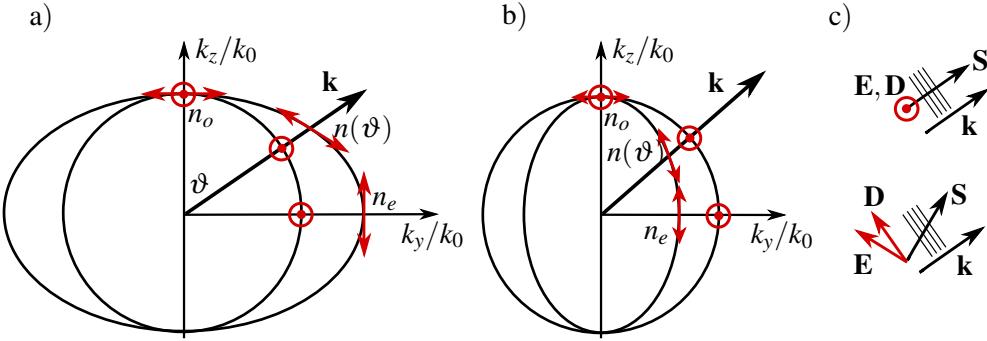
Za lažjo predstavo si oglejmo ploskev valovnega vektorja (slika 1.7, desno). V tem primeru ni treba obravnavati celotne ploskve, ampak zaradi rotacijske simetrije zadošča, da narišemo presek ploskve valovnega vektorja z vpadno ravnino, ki jo določata optična os in valovni vektor  $\mathbf{k}$ . Pomemben je le kot  $\vartheta$  med valovnim vektorjem  $\mathbf{k}$  in optično osjo  $z$ , zato si lahko drugo koordinatno os poljubno izberemo. Tukaj izberemo os  $y$  (slika 1.8).

Za vsako smer valovnega vektorja, torej za vsak kot  $\vartheta$ , obstajata dve rešitvi, ki pripadata dvema lastnima polarizacijama z ustreznima lomnima količnikoma. Lomni količnik za žarek, ki je polariziran pravokotno na vpadno ravnino, je neodvisen od  $\vartheta$ . To je redni žarek, njegov lomni količnik pa je vedno  $n_o$ , ne glede na vpadni kot. Na skici temu žarku ustreza krožnica.

Žarek, katerega polarizacija leži v vpadni ravnini, je izredni žarek. Pripadajoč lomni količnik je odvisen od kota  $\vartheta$  in ga izračunamo iz sledeče enačbe elipse s polosema  $n_o$  in  $n_e$ :

$$\frac{1}{n^2(\vartheta)} = \frac{\cos^2 \vartheta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{n_e^2}. \quad (1.67)$$

Navadno sta pri ravnem valu vektorja  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{D}$  vzporedna, prav tako  $\mathbf{k}$  in  $\mathbf{S}$ . Žarek se širi v smeri valovnega vektorja, valovne fronte pa so pravokotne nanj. To velja tudi za redni žarek v anizotropnih snoveh. Izredni žarek pa ima, kot že ime nakazuje, "izredne" lastnosti. Vektorja  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{D}$  nista vzporedna, zato tudi valovni vektor  $\mathbf{k}$  ni vzporen energetskemu toku oziroma Poyntingovemu vektorju  $\mathbf{S}$  (slika 1.8 c). Smer energijskega toka, ki ni enaka smeri valovnega vektorja, določimo z normalo na elipso pri kotu  $\vartheta$ .



Slika 1.8: V optično enoosnih kristalih je lomni količnik odvisen od smeri valovnega vektorja  $\mathbf{k}$  in polarizacije. Poznamo pozitivno anizotropne snovi, pri katerih je  $n_e > n_o$  (a) in negativno anizotropne snovi, kjer velja  $n_e < n_o$  (b). V obeh primerih je redni žarek polariziran pravokotno na vpadno ravnino. Zanj velja, da je  $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$  in  $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$  (c, zgornji). Polarizacija izrednega žarka leži v vpadni ravnini. Smer  $\mathbf{S}$  ni vzporedna z valovnim vektorjem  $\mathbf{k}$ , prav tako valovne fronte niso pravokotne nanjo (c, spodaj). Primer je narisani za pozitivno anizotropno snov.

### Dvojni lom

Ko vpade žarek na snov, se lomi. Hitrost valovanja – in s tem tudi kot, pod katerim se lomi – je v anizotropnih snoveh odvisna od polarizacije. Pri zapisu lomnega zakona (enačba 1.41) v anizotropnih snoveh moramo biti zato pazljivi. Na splošno se pojavita dva lomljena žarka z različnima polarizacijama, kar da ime pojavi: dvolomnost (slika 1.9).

Za redni val s TE polarizacijo (pravokotno na vpadno ravnino) velja navadni lomni zakon, pri čemer je lomni količnik snovi enak rednjemu lomnemu količniku  $n_o$

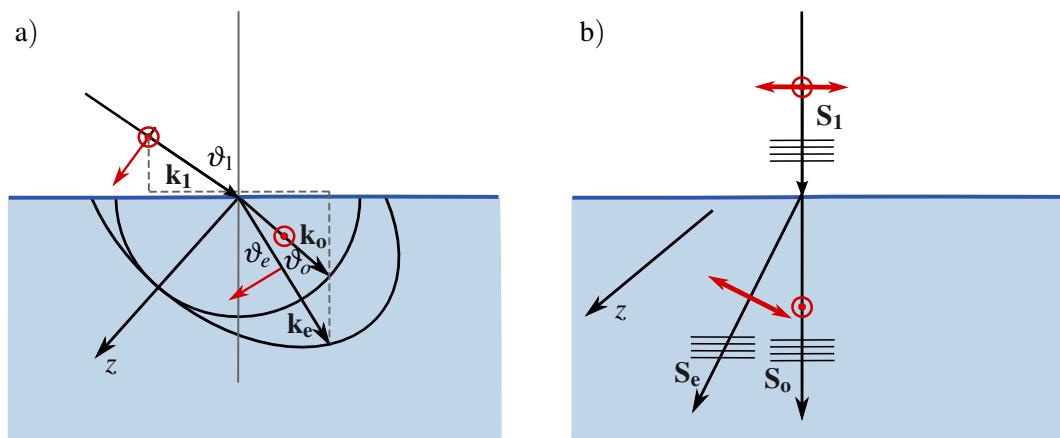
$$\sin \vartheta_1 = n_o \sin \vartheta_o. \quad (1.68)$$

Pri zapisu smo privzeli, da je lomni količnik snovi, iz katere valovanje prehaja v anizotropno snov, enak 1. Za izredni val s TM polarizacijo (električna poljska jakost leži v vpadni ravnini) prav tako zapišemo lomni zakon

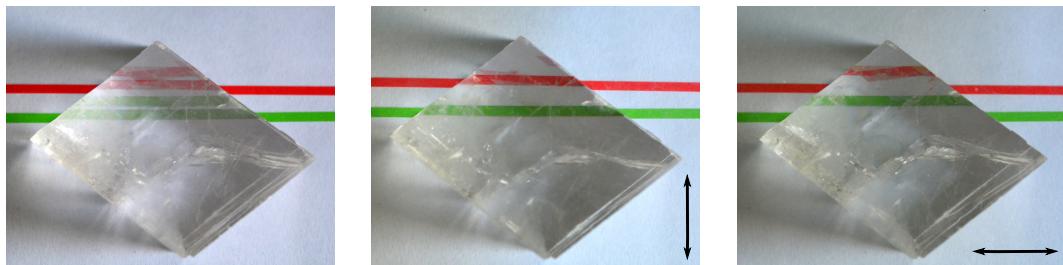
$$\sin \vartheta_1 = n(\vartheta_e) \sin \vartheta_e, \quad (1.69)$$

Ie da je lomni količnik  $n(\vartheta_e)$  odvisen od smeri širjenja valovanja in je določen z enačbo elipse (enačba 1.67).

Kadar vpada valovanje pravokotno na izotropno snov, se žarek ne lomi. V dvolomnih snoveh pa lahko tudi pri pravokotnem vpodu pride do razklona svetlobe (slika 1.9 b). Kadar je optična os nagnjena glede na vpadnico, sta valovna vektorja obih prepuščenih žarkov sicer vzporedna valovnemu vektorju vpadnega žarka ( $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_o \parallel \mathbf{k}_e$ ), razlikujeta pa se smeri Poyntingovih vektorjev ( $\mathbf{S}_1 \parallel \mathbf{S}_o \not\parallel \mathbf{S}_e$ ). Ob prehodu skozi plast anizotropne snovi tako svetloba potuje v dveh smereh in nastaneta dve sliki z medsebojno pravokotnima polarizacijama (slika 1.10).



Slika 1.9: Dvojni lom. Pri poševnem vpadu na anizotropno snov se valovanje loči na dva različno polarizirana žarka (a). Če je optična os usmerjena pod poljubnim kotom glede na normalo mejne ravnine, pride do razklona svetlobe tudi pri pravokotnem vpadu. Valovna vektorja sta tudi v tem primeru kolinearna, Poyntingova vektorja pa imata različne smeri (b).



Slika 1.10: Dvojni lom v kristalu kalcita (islandski dvolomec). Po prehodu skozi kristal nastaneta dve razmazknjeni sliki in z linearnim polarizatorjem pokažemo, da imata sliki različni polarizaciji.

Snov	$n_o$	$n_e$
CaCO <sub>3</sub> (kalcit)	1,6557	1,4849
BaTiO <sub>3</sub>	2,4042	2,3605
LiNbO <sub>3</sub>	2,2864	2,2022
KH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> (KDP)	1,5074	1,4669
tekoči kristal 5CB (25 °C)	1,5319	1,7060
telur ( $\lambda = 10 \mu\text{m}$ )	4,7969	6,2455

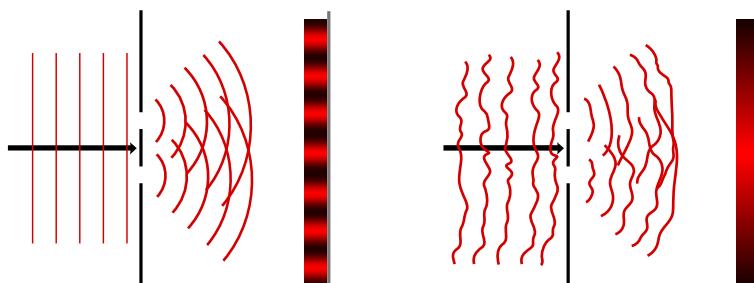
Tabela 1.1: Redni in izredni lomni količniki za nekaj izbranih optično enoosnih kristalov. Razen v primeru telurja veljajo vrednosti za svetlobo z valovno dolžino 633 nm.

## 2. Koherenca

V tem poglavju bomo spoznali koherenco. To je lastnost valovanja, ki je tesno povezana s pojavom interference. Ohlapno pravimo, da je koherentno tisto valovanje, s katerim se posrečijo interferenčni poskusi.

### 2.1 Youngov poskus

Interferenčnih pojavov ni mogoče opazovati z vsakim svetlobnim izvorom. Da bi to razumeli, si oglejmo interferenco valovanja, ki vpada na dve ozki reži (tako imenovani Youngov poskus<sup>1</sup>). Navadno predpostavimo, da sta obe reži osvetljeni z istim ravnim valom. Delni valovanji, ki izhajata iz rež, imata tako ves čas poskusa enako polarizacijo, enako frekvenco in enako fazo. Zaradi različnih dolžin poti obeh delnih valovanj od rež do dane točke na zaslolu nastane na oddaljenem zaslolu interferenčni vzorec (slika 2.1). Vendar se interference pojavi le v primeru, ko je faza valovanja, ki vpada na reži, konstantna. Svetloba s konstantno fazo je koherentna in nastane, na primer, v kvalitetnem laserju. Svetloba iz običajnih svetil ima spremenljivo fazo in zato ne da interferenčnega vzorca. Zanjo pravimo, da ni koherentna.



Slika 2.1: Youngov poskus na dveh režah. Le če je vpadno valovanje koherentno (levo), se pojavi na zaslolu interferenčni vzorec. Nekoherentno valovanje s spremenljivo fazo (desno) ne da interferenčnega vzorca.

Svetloba navadnih svetil, na primer plinskih razelektritvenih cevi, je zaradi vrste nastanka kaotične narave. Atomi sevajo neodvisno, zato se faza izsevanega valovanja spreminja. Približno konstantna je le znotraj nekega karakterističnega časa. Če je pri interferenčnem poskusu karakteristični čas spreminjanja faze krajsi od zakasnitve med valovanjem zaradi različno dolgih poti, pride na danem mestu zaslona izmenično do konstruktivne in destruktivne interference. Čas spreminjanja je praviloma bistveno krajsi od časa opazovanja, zato utripanja ne vidimo in zaznamo povprečno razmazano sliko. Interferenčni poskus se ne posreči zaradi majhne časovne koherence, karakterističnemu času spreminjanja faze pa rečemo koherenčni čas  $t_c$ . Časovno koherenco bomo natančneje obravnavali v razdelku (2.3), zaenkrat povejmo le, da je časovna koherenca vezana na fazno razliko med točkami, ki ležijo vzdolž smeri širjenja valovanja.

<sup>1</sup>Angleški znanstvenik Thomas Young, 1773–1829.

Poleg časovne koherence na interferenčno sliko pomembno vpliva tudi prostorska koherenca, ki je posledica končne dimenzijske svetlobe. Svetloba, ki na reži vpada iz različnih delov svetila, ima namreč različno fazo zaradi razlike v dolžini poti od svetila do rež. Ta faza se prišteje fazni razliki zaradi različno dolgi poti od rež do zaslona, zato se interferenčne proge na zaslono nekoliko premaknejo. Če je fazna razlika žarkov iz različnih delov svetila večja od fazne razlike za režami, se celotna interferenčna slika na zaslono izpopreči. Interferenca se pri Youngovem poskusu pojavi, kadar sta reži razmakeni le toliko, da je povprečna fazna razlika manjša od  $2\pi$ . Največjemu prečnemu razmiku, ki še da interferenco, rečemo prečna koherenčna razdalja  $d_c$ . Prostorska koherenca, ki jo bomo podrobnejše spoznali v razdelku (2.5), je torej vezana na fazno razliko med točkami, ki ležijo prečno na smer širjenja valovanja.

Poudarimo še enkrat, da je pojem koherenčnosti statističen. Če je koherenčni čas  $t_c$  dolg v primerjavi s časom opazovanja, se seštevajo amplitudo valovanj in pojavi se interferenčna slika. Ta se slučajno spreminja z značilnim časom  $t_c$ . Če pa so razlike poti večje od  $ct_c$  ali razmik rež večji od  $d_c$ , gledamo le povprečno sliko in interferenčne proge izginejo.

## 2.2 Koherenca navadnih svetil

Obravnavajmo plinsko razelektritveno cev in z ustreznim filtrom izberimo eno samo spektralno črto. Ta črta naj ima osrednjo frekvenco  $v_0$  in končno frekvenčno širino  $\Delta v$ . Privzemimo, da je glavni prispevek k razširitvi spektralne črte posledica medatomskih trkov.

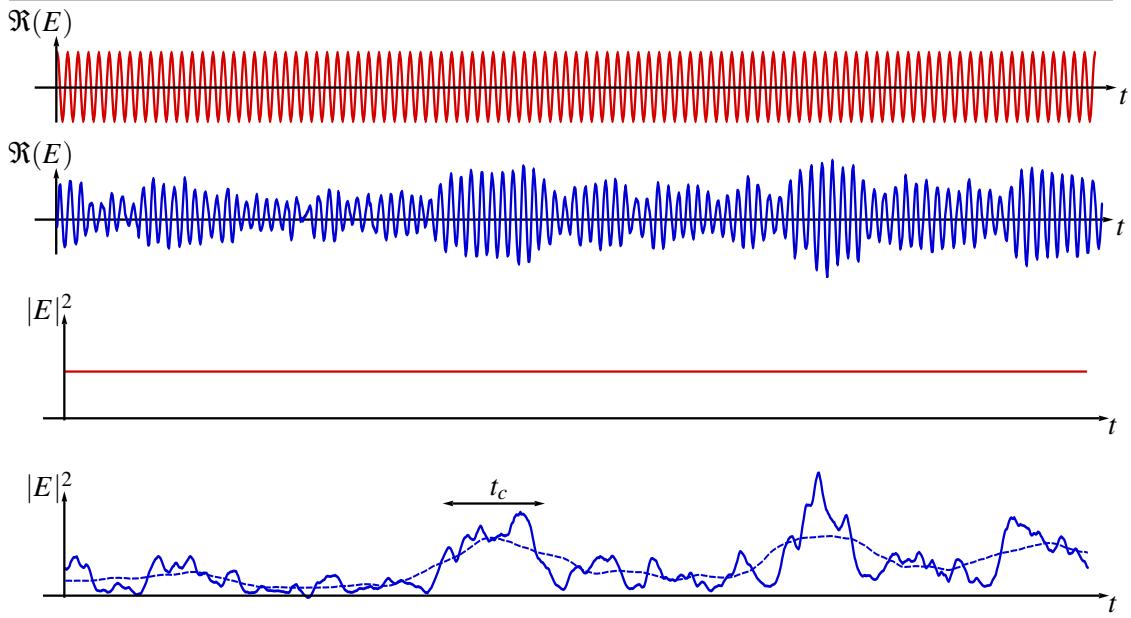
Celotna izsevana svetloba je vsota delnih valov, ki izhajajo iz posameznih atomov in so med seboj neodvisni. Vsak delni val ohranja konstantno fazo med dvema trkoma, to je v intervalu dolžine  $t_c$ . Valovni paket dolžine  $t_c$  tako vsebuje frekvence v pasu  $\Delta v$ , za katerega velja  $t_c \Delta v \sim 1$ . Koherenčni čas je torej kar reda velikosti obratne vrednosti spektralne širine svetlobe. Povsem monokromatsko valovanje bil imelo neskončen koherenčni čas in bi bilo popolno koherentno.

Zapišimo še izsevano polje takega svetila. Jakost električnega polja v izbrani točki prostora je vsota delnih valov, ki izvirajo iz raznih delov izvora. Vsak atom v izvoru, naj jih bo  $N$ , seva neodvisno, zato so tudi delna valovanja med seboj neodvisna. Posamična valovanja ohranjajo konstantno fazo v času med dvema trkoma atoma  $t_c$ . Zaradi enostavnosti privzemimo, da so amplitudo  $E_1$  in polarizacija izsevanih polj posameznih atomov enake. Električno poljsko jakost  $E$  v izbrani točki prostora potem zapišemo kot vsoto posameznih prispevkov

$$E = E_1 \sum_{n=1}^N e^{i\phi_n(t)}. \quad (2.1)$$

kjer se faza polja  $\phi_n(t)$ , ki ga izseva posamezni atom, naključno spremeni ob trku z drugim atomom. Povprečje vsote polj je nič, povprečni kvadrat skupnega polja, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka, pa je  $NE_1^2$ . Zaradi slučajnosti faz je slučajna tudi faza celotnega polja in se gotovo povsem spremeni v času, ko se spremeni faza posameznih prispevkov, to je  $t_c$ . S tako svetlobo bomo videli interferenco na režah, če bo razlika poti delnih valovanj manjša od  $ct_c$ .

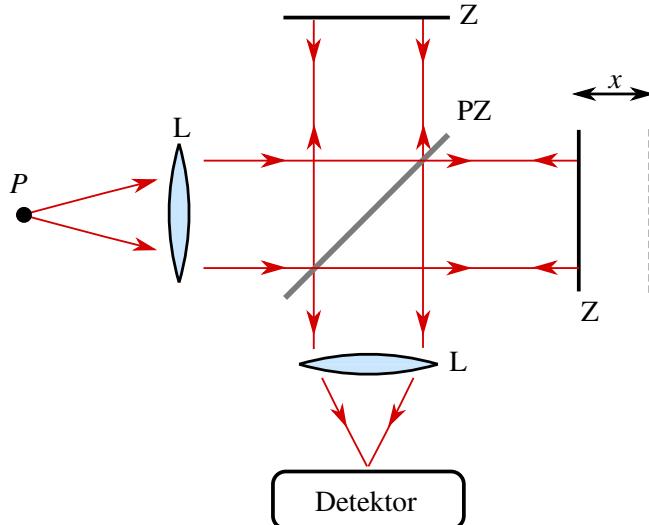
Oglejmo si izračun na primeru. Imejmo  $N = 100$  neodvisnih atomov, ki se jim faza naključno spreminja s karakterističnim časom  $t_c = 10/v$ , kjer je  $v$  frekvencia valovanja. Na sliki (2.2) sta prikazana časovna poteka amplitude  $E$  (enačba 2.1) in  $|E|^2$ . Za primerjavo je prikazan tudi raven val  $E = \sqrt{N}E_1 e^{-i\omega t}$  s konstantno fazo in pripadajoč  $|E|^2$ , ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka. Ta je v primeru ravnega vala konstantna, medtem ko je povprečna gostota svetlobnega toka iz navadnega svetila približno konstantna le znotraj  $t_c$ .



Slika 2.2: Zgoraj: shematski prikaz električne poljske jakosti ravnega vala s konstantno fazo (rdeča črta) in električne poljske jakosti navadnega svetila (modra črta) kot funkcije časa. Spodaj: pripadajoča vrednost  $|E|^2$  v primeru ravnega vala (rdeča črta) in v primeru svetlobe iz navadnega svetila (modra črta) kot funkcija časa. Modra črtkana črta je povprečna vrednost  $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t + t')E^*(t + t')dt'$  s časom integracije  $T = t_c$ .

### 2.3 Časovna koherenca

Časovno koherenco je najpreprosteje obravnavati z Michelsonovim interferometrom<sup>2</sup>, ki je prikazan na sliki (2.3).



Slika 2.3: Michelsonov interferometer. Svetlubo iz izvora  $P$  usmerimo preko kolimacijske leče (L) na polprepustno zrcalo (PZ), s čimer jo razdelimo na dva snopa. S premikanjem enega zrcala (Z) spreminjamo zakasnitev enega delnega snopa. Interferenco opazujemo na detektorju.

<sup>2</sup>Ameriški fizik in nobelovec Albert Abraham Michelson, 1852–1931.

Valovanje iz točke  $P$  na polprepustnem zrcalu razdelimo na dva delna snopa, nato enega s premikanjem zrcala zakasnimo za  $\tau = 2x/c$ . Dokler je zakasnitev  $\tau$  manjša od koherenčnega časa  $t_c$ , snopa med seboj interferirata. S spremjanjem lege zrcala se tako na detektorju izmenično pojavijo ojačitve in oslabitve. Pri zakasnitvah, ki so večje od koherenčnega časa, ni stalne fazne povezave in interferenčna slika se izpovpreči.

 S kolimacijsko lečo dosežemo, da je čim več žarkov, ki izhajajo iz  $P$ , vzporednih z osjo interferometra. V eksperimentih snop svetlobe ni nikoli povsem vzporen in dolžine poti posameznih žarkov se med seboj malo razlikujejo. Na detektorju tako za  $\tau < t_c$  nastanejo jasno vidni interferenčni krogi. Pri večjih vrednostih  $\tau$  se kontrast interferenčnih prog zmanjšuje in pri zakasnitvah, ki so daljše od koherenčnega časa, se slika povsem zabriše.

Zapišimo ugotovitev še matematično. Gostota svetlobnega toka na detektorju je sorazmerna s kvadratom električne poljske jakosti obeh delnih valovanj

$$|E_d(t)|^2 = |E(t) + E(t + \tau)|^2 = |E(t)|^2 + |E(t + \tau)|^2 + 2\Re(E(t)E^*(t + \tau)). \quad (2.2)$$

Zakasnitev  $\tau$  je določena s premikom pomičnega zrcala  $\tau = 2x/c$ . Navadno opazujemo v času  $T$ , ki je dolg v primerjavi s koherenčnim časom svetlobe, zato izraz povprečimo po času

$$\begin{aligned} \langle |E_d(t)|^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |E_d(t)|^2 dt \\ &= 2\langle |E(t)|^2 \rangle + 2\Re\langle E(t)E^*(t + \tau) \rangle = 2\langle |E(t)|^2 \rangle + 2\Re G(\tau). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Prvi člen je vsota povprečnih prispevkov obeh delnih snopov. Prizeli smo, da je polje v povprečju stacionarno in je zato povprečje neodvisno od izbire časovnega intervala. Drugi člen opisuje interferenco. Za opis smo vpeljali časovno avtokorelacijsko funkcijo električnega polja

$$G(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t + \tau) dt. \quad (2.4)$$

Za zakasnitve  $\tau$ , ki so manjše od koherenčnega časa  $t_c$ , je avtokorelacijska funkcija različna od nič in na detektorju zaznamo interferenco. Pri zakasnitvah, ki so precej večje od koherenčnega časa  $t_c$ , pa sta polji  $E(t)$  in  $E(t + \tau)$  statistično neodvisni in povprečje produkta je enako produktu povprečij. Ker je  $\langle E(t) \rangle = 0$ , pri velikih zakasnitvah  $\tau$  interferenčni člen izgine.

Priročno je vpeljati normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)}. \quad (2.5)$$

Za povsem koherentno valovanje je  $|g(\tau)| = 1$ , za povsem nekoherentno valovanje je  $|g(\tau)| = 0$ , za delno koherentna pa  $0 < |g(\tau)| < 1$ . Praviloma se vrednost  $|g(\tau)|$  z naraščajočim  $\tau$  zmanjšuje, saj postaja valovanje za velike časovne zamike vedno manj korelirano. Ohlapno povedano je koherenčni čas zakasnitev, pri kateri postane vrednost avtokorelacijske funkcije majhna. Koherenčni čas  $t_c$  lahko tudi bolj natančno definiramo z normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$t_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 d\tau. \quad (2.6)$$

Zakasnitev delnih valov je pogosto posledica različno dolgih optičnih poti, zato namesto koherenčnega časa  $t_c$  pogosto uporabljamo koherenčno dolžino  $l_c = c t_c$ .

**Naloga 2.3.1** Pokaži, da v navedenih avtokorelacijskih funkcijah  $g(\tau)$  spremenljivka  $t_c$  ustreza koherenčnemu času, kot je definiran v enačbi (2.6), in izračunaj  $|g(t_c)|$  za oba primera.

$$g(\tau) = \begin{cases} \exp(i\omega_0\tau - |\tau|/t_c), \\ \exp(i\omega_0\tau - \pi\tau^2/2t_c^2), \end{cases} \quad (2.7)$$

Ob nalogi (2.4.2) in v razdelku (5.8) bomo spoznali, da sta to avtokorelacijski funkciji za svetlobo z Lorentzovim spektrom (razširitev spektralne črte zaradi medatomskih trkov) in Gaussovim spektrom (Dopplerjeva razširitev).

Poglejmo nekaj značilnih vrednosti koherenčnih dolžin. Koherenčna dolžina svetlobe, izsevana iz črnega telesa, je  $l_c = c t_c \approx \hbar c / k_B T$  (glej nalogo 2.4.3). Svetloba s Sonca ( $T \approx 6000$  K) ima tako koherenčno dolžino zgolj  $\sim 0,4$  μm, kar ustreza koherenčnemu času  $t_c \sim 1$  fs. Svetloba, izsevana iz LED sijalk, ima koherenčno dolžino  $\sim 20\text{--}100$  μm. Živosrebrna svetilka ima za izbrano spektralno črto koherenčno dolžino do okoli 50 cm, kar ustreza koherenčnemu času  $t_c \sim 1,6$  ns. Koherenčna dolžina laserjev je tipično okoli 100 m, v nekaterih vlakenskih laserjih pa koherenčna dolžina presega 100 km.

## 2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom

Spoznali smo, da je monokromatski ravni val povsem koherenten in njegov korelacijski čas neskončen. Obravnavajmo zdaj koherenco poljubnega valovanja, ki je v povprečju stacionarno. To pomeni, da se povprečna gostota svetlobnega toka v času zajemanja, ki traja čas  $T$ , ne spreminja. Vzorec valovanja razvijemo v Fourierovo vrsto

$$E(t) = \sum_n A_n(\omega) e^{-in\Delta\omega t}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.8)$$

Amplitude  $A_n(\omega)$  so slučajne spremenljivke, ki predstavljajo delež polja pri krožni frekvenci  $\omega = n\Delta\omega$ , čas opazovanja  $T$  pa naj bo bistveno daljši od  $t_c$ . Zapišimo amplitudo  $A_n$

$$A_n(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.9)$$

Kvadrat  $|A_n(\omega)|^2$ , ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka pri krožni frekvenci  $\omega$ , imenujmo intenziteta valovanja<sup>3</sup>. Potem vpeljemo spekter  $S(\omega)$ , ki podaja intenziteto svetlobe pri  $\omega$ , deljeno z intervalom  $\Delta\omega$

$$S(\omega) = \frac{|A_n(\omega)|^2}{\Delta\omega} = \frac{T}{2\pi} |A_n(\omega)|^2. \quad (2.10)$$

Vstavimo še amplitudo  $A_n$  (enačba 2.9) in dobimo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \int \int_{-T/2}^{T/2} E(t) E^*(t') e^{-i\omega(t' - t)} dt dt'. \quad (2.11)$$

Uvedemo novo spremenljivko  $\tau = t' - t$  in zapišemo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-T/2}^{T/2} E(t) E^*(t + \tau) dt. \quad (2.12)$$

<sup>3</sup>Intenziteto valovanja na splošno vpeljemo kot  $I = |E|^2$ , gostota svetlobnega toka pa je  $j = \epsilon\epsilon_0 c |E|^2 / 2$  z enotami W/m<sup>2</sup> (enačba 1.32). Kadar predfaktorji niso pomembni, pogosto uporabljamo krajevi izraz.

Integral po  $t$  je ravno enak korelacijski funkciji  $G(\tau)$  (enačba 2.4). Privzeli smo, da velja  $T \gg t_c$ , zato je korelacijska funkcija na mejah integracije po  $\tau$  praktično enaka nič in meje integracije smo lahko raztegnili do neskončnosti. Zveza, ki smo jo dobili, je Wiener-Hinčinov izrek<sup>4</sup>

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.13)$$

Spekter svetlobe je torej Fourierova transformiranka avtokorelacijske funkcije svetlobnega polja. Pri tem ne pozabimo, da je spekter, ki smo ga zapisali z enačbo (2.12), zapisan za izbran vzorec valovanja, ki traja čas  $T$ , in je tudi slučajna spremenljivka. Povprečni spekter dobimo tako, da naredimo limito  $T \rightarrow \infty$ .

$$\langle S(\omega) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} S(\omega). \quad (2.14)$$

 Zaradi priročnosti smo zapisali spekter in Wiener-Hinčinov izrek s krožno frekvenco. Podobno lahko vpeljemo tudi spekter na frekvenčni interval in Wiener-Hinčinov izrek se prepiše v

$$S(v) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i2\pi v\tau} d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(v) e^{i2\pi v\tau} dv. \quad (2.15)$$

Iz Wiener-Hinčinovega izreka (enačba 2.13) neposredno sledi, da je koherenca nekega valovanja tesno povezana z njegovim spektrom. Koherenčni čas  $t_c$  je tako povezan s spektralno širino svetlobe  $\gamma$ , za katero velja (glej nalogu 2.4.1)

$$\gamma = \frac{1}{t_c}. \quad (2.16)$$

Valovanje z dolgim  $t_c$  ima tako zelo majhno spektralno širino (ozek spekter), valovanje s kratkim  $t_c$  pa ima širok spekter. To je v skladu s primeri, navedenimi na koncu prejšnjega razdelka: svetloba s Sonca ima širok spekter in zelo kratek koherenčni čas, svetloba iz laserjev pa ima praviloma ozko spektralno črto in dolg koherenčni čas. Ugotovimo tudi, da lahko valovanju podaljšamo koherenčni čas z ustreznim spektralnim filtriranjem.

**Naloga 2.4.1** Formalno lahko vpeljemo spektralno širino kot

$$\gamma = \frac{1}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2 d\omega}; \quad \text{kjer je} \quad s(\omega) = \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} = \frac{S(\omega)}{G(0)} \quad (2.17)$$

normirani spekter. Z uporabo enačbe za koherenčni čas  $t_c$  (enačba 2.6) pokaži, da je spektralna širina obratno sorazmerna s koherenčnim časom (enačba 2.16) ne glede na obliko spektra.

Namig: Uporabi Parsevalov izrek, ki pravi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.18)$$

kjer je

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} d\tau \quad (2.19)$$

Fouriereva transformiranka funkcije  $f(t)$ .

---

<sup>4</sup>Ameriški matematik Norbert Wiener, 1894–1964, in ruski matematik Aleksander Jakovljevič Hinčin, 1894–1959.

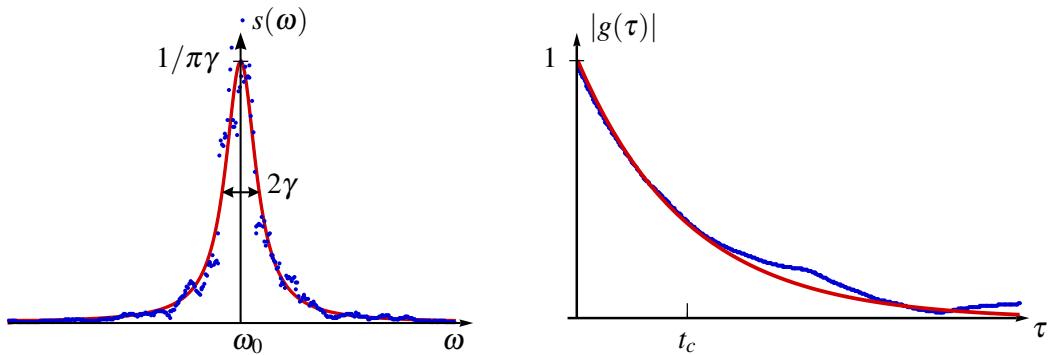
Za zgled Wiener-Hinčinovega izreka vzemimo primer, ki je predstavljen na sliki (2.2). Ker so trki med atomi naključni, je avtokorelacijska funkcija eksponentno pojemajoča

$$g(\tau) = e^{i\omega_0\tau} e^{-\tau/t_c}, \quad (2.20)$$

spekter take svetlobe pa je Lorentzove oblike (glej nalogo 2.4.2)

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \quad (2.21)$$

pri čemer je  $\gamma = 1/t_c$  spektralna širina. Normirani spekter  $s(\omega)$  in ustreznata avtokorelacijska funkcija  $g(\tau)$  sta prikazana na sliki (2.4). Točke na grafih predstavljajo spekter in izračunano avtokorelacijsko funkcijo za integracijski čas  $T = 100t_c$ . Za primerjavo sta z rdečo krivuljo prikazana tudi pričakovani spekter (enačba 2.21) in avtokorelacijska funkcija (enačba 2.20). Zaradi končnega časa  $T$  pri izračunu povprečja se spekter iz simulacije nekoliko razlikuje od pričakovanega.



Slika 2.4: Spekter in avtokorelacijska funkcija valovanja s slike (2.2)

---

**Naloga 2.4.2** Imejmo dve vrsti svetlobe. Prva naj ima avtokorelacijsko funkcijo, ki je eksponentno pojemajoča, druga pa ima avtokorelacijsko funkcijo Gaussove oblike (enačbi 2.7). Pokaži, da sta njuna spektra oblike

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad \text{in} \quad s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\pi\gamma^2}\right), \quad (2.22)$$

kjer je  $\gamma = 1/t_c$  spektralna širina.

---

Spektralne črte atomov so pogosto Lorentzove oblike, kar je posledica eksponentnega razpada stanj (naravna širina). Dodatno se spektralne črte razširijo zaradi trkov med atomi, vendar tudi to vodi do približno Lorentzove oblike spektra. V plinih je pogosto prevladujoča razširitev črt zaradi Dopplerjevega pojava (glej razdelek 5.8). Spekter Dopplerjevo razširjene svetlobe je, kot bomo videli v nadaljevanju, Gaussove oblike. V tem primeru iz enačbe (2.13) sledi, da je tudi avtokorelacijska funkcija Gaussove oblike.

**Naloga 2.4.3** Numerično pokaži, da je koherenčni čas svetlobe, ki jo oddaja črno telo s temperaturo  $T$ , približno enak  $t_c \approx \hbar/k_B T$ . Normirani spekter sevanja črnega telesa zapišemo kot Planckov spekter

$$s(\omega) = \frac{15}{\pi^4} \frac{\hbar^4 \omega^3}{(kT)^4} / \left( e^{\hbar\omega/kT} - 1 \right) \quad \text{za } \omega > 0, \text{ sicer } s(\omega) = 0. \quad (2.23)$$

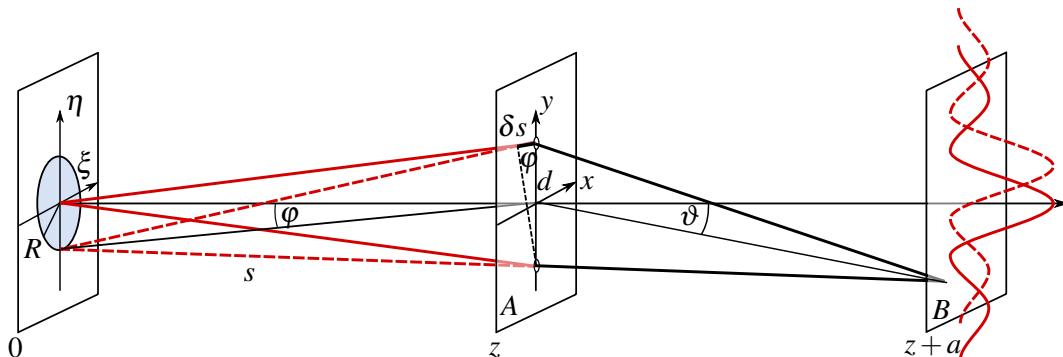


V prejšnjem razdelku smo videli, da časovno avtokorelacijsko funkcijo merimo z Michelsonovim interferometrom. Dobljena povezava med merjeno avtokorelacijo in izračunanim spektrom je osnova za Fourierovo spektroskopijo<sup>5</sup>, pri kateri določimo absorpcijski ali emisijski spekter snovi iz izmerjene avtokorelacijske funkcije. Tak pristop ima nekatere pomembne prednosti pred drugimi metodami in se danes precej uporablja, posebej v infrardečem delu EM valovanja (tako imenovana metoda FTIR - *Fourier-transform infrared spectroscopy*).

## 2.5 Prostorska koherenca

Vrnimo se k Youngovemu poskusu in obravnavi interference na dveh ozkih režah. Osvetljujmo zdaj zaslon z dvema odprtinama s svetilom končnih razsežnosti. Svetilo naj sveti skoraj enobarvno svetlobo in naj bo na simetrali med odprtinama, kot kaže slika (2.5).

Žarka, ki izhajata iz sredine svetila (polna rdeča črta), opravita do odprtin v ravnini A enako dolgo pot in povzročita na zaslonu B interferenčne proge. Žarka, ki izhajata iz roba izvora (prekinjena rdeča črta), imata do odprtin različno dolgo pot, zato nastane med njima fazna razlika že do ravnine A, ki se prišteje fazni razliki do ravnine B. Interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, so premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Ker so žarki z roba statistično neodvisni od žarkov iz sredine, z njimi ne interferirajo. Celotni interferenčni vzorec je zato kar vsota interferenčnih vzorcev žarkov iz različnih delov svetila. Če je razlika poti za žarke iz različnih delov velikosti valovne dolžine  $\lambda$ , se celotna interferenčna slika na zaslonu B izpovpreči.



Slika 2.5: Shema interferenčnega eksperimenta z razsežnim svetilom

Razdaljo med odprtinama  $d_c$ , pri kateri interferenčne proge izginejo, imenujemo prečna koherenčna razdalja. Zanjo velja približno

$$\delta s = d_c \sin \varphi \approx d_c \frac{R}{z} \sim \lambda \Rightarrow d_c \sim \frac{z\lambda}{R}. \quad (2.24)$$

<sup>5</sup>Francoski matematik in fizik Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830.

 Pogosto je v uporabi pojem koherenčna ploskev, to je območje, v katerem je fazna razlika v povprečju konstantna. Velikost te ploskve je približno  $d_c^2$ . V območju koherenčne ploskve so tudi valovne fronte približno gladke. Vsekakor pa moramo paziti, da koherenčne razdalje  $d_c$  ne zamenjamo s koherenčno dolžino  $l_c$ , ki smo jo vpeljali pri časovni koherenci valovanja.

Zapišimo gornje ugotovitve nekoliko bolj natančno. Na zaslonu  $B$  izmerimo povprečno gostoto svetlobnega toka, ki je sorazmerna povprečju kvadrata električne poljske jakosti valovanj, ki izhajata iz obeh odprtin

$$\begin{aligned}\langle |E_d|^2 \rangle &= \langle |K_1 E_1 + K_2 E_2|^2 \rangle \\ &= |K_1|^2 \langle |E_1|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |E_2|^2 \rangle + 2\Re(K_1 K_2^* \langle E_1(t) E_2^*(t + \tau) \rangle).\end{aligned}\quad (2.25)$$

Pri tem je  $\tau = d \sin \vartheta / c$  zakasnitev valovanja iz druge odprtine glede na valovanje iz prve, faktorja  $K_1$  in  $K_2$  pa sta določena z uklonom na posameznih odprtinah. Interferenčna slika je vsebovana v podobnem členu kot pri Michelsonovem interferometru (enačba 2.3), le da nastopa v tem primeru namesto avtokorelacijske funkcije navzkrižna korelacijska funkcija polj  $E_1$  in  $E_2$  iz obeh.

Kako je interferenčni člen povezan z lastnostmi svetila, brez težav doženemo v izbranem primeru skoraj enobarvne svetlobe z osrednjo krožno frekvenco  $\omega$ . Tedaj lahko za zakasnите  $\tau$ , ki so krajše od koherenčnega časa, zapišemo

$$E_2(\tau) = E_2(0) e^{-i\omega\tau} \quad (2.26)$$

in

$$\langle E_1(t) E_2^*(t + \tau) \rangle = \langle E_1(t) E_2^*(t) \rangle e^{i\omega\tau} = J(P_1, P_2) e^{i\omega\tau}. \quad (2.27)$$

Faktor  $\Re e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) = \cos(kd \sin \vartheta)$  da interferenčne proge za koherentno osvetlitev zaslona, povprečje produkta polj v odprtinah ob istem času  $J(P_1, P_2) = \langle E(P_1, t) E^*(P_2, t) \rangle$  pa meri stopnjo prečne koherence med obema odprtinama. Od velikosti tega člena je odvisen kontrast interferenčnih prog. Izračunajmo ga.

Polje v posamezni odprtini je vsota prispevkov iz celega izvora.

$$E(P_j) = -\frac{i}{\lambda} \int E(\xi, \eta) \frac{e^{iks_j}}{s_j} d\xi d\eta. \quad (2.28)$$

Pri tem je  $s_j$  razdalja med točko na izvoru s koordinato  $(\xi, \eta)$  in točko  $P_j(x_j, y_j)$  v odprtini na ravnini A (glej sliko 2.5). Faktor pred integralom  $-i/\lambda$  izhaja iz uklonske teorije (enačba 1.54). Tako je

$$J(P_1, P_2) = \frac{1}{\lambda^2} \int \int \langle E(\xi, \eta) E^*(\xi', \eta') \rangle \frac{e^{ik(s_1 - s'_2)}}{s_1 s'_2} d\xi d\eta d\xi' d\eta'. \quad (2.29)$$

V izbranem svetilu sevajo atomi neodvisno. Valovanji iz dveh točk svetila, ki sta razmaznjeni za več kot  $\lambda$ , sta neodvisni in povprečje njunega produkta je enako nič. Tako približno velja

$$\langle E(\xi, \eta) E^*(\xi', \eta') \rangle = \frac{\lambda^2}{\pi} \cdot \delta(\xi - \xi', \eta - \eta') \langle |E(\xi, \eta)|^2 \rangle. \quad (2.30)$$

Faktor  $\lambda^2/\pi$  poskrbi za ustrezno normalizacijo. Naj bo oddaljenost svetila od zaslona A veliko večja od dimenzije svetila ( $z \gg R$ ), tako da lahko imenovalec pod integralom v izrazu (2.29) nadomestimo z  $z^2$  in postavimo pred integral. Sledi

$$J(P_1, P_2) = \frac{1}{\pi z^2} \int \langle |E(\xi, \eta)|^2 \rangle e^{ik(s_1 - s'_2)} d\xi d\eta. \quad (2.31)$$

Izraz lahko še nekoliko poenostavimo, če razvijemo  $s_1$  in  $s_2$

$$s_j = \sqrt{z^2 + (x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2} \approx z + \frac{(x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2}{2z}. \quad (2.32)$$

Pri tem sta  $(x_j, y_j)$  koordinati točke  $P_j$ . Pišimo še  $\langle |E(\xi, \eta)|^2 \rangle = I(\xi, \eta)$  ter  $x_2 - x_1 = \Delta x$  in  $y_2 - y_1 = \Delta y$ . S tem dobimo tako imenovani van Cittert-Zernikov izrek<sup>6</sup>

$$J(\Delta x, \Delta y) = \frac{e^{-i\phi}}{\pi z^2} \int I(\xi, \eta) e^{ik(\Delta x \xi + \Delta y \eta)/z} d\xi d\eta. \quad (2.33)$$

Faza

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda z} [(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)] \quad (2.34)$$

meri skupni premik interferenčnih prog, do katerega pride, kadar svetilo ne leži na isti osi kot odprtini v zaslonu. Kadar ležita odprtini v ravnini  $A$  simetrično glede na os svetila, je faza  $\phi$  enaka nič.

Dobljeni rezultat si je vredno nekoliko ogledati. Prečno prostorsko korelacijsko funkcijo  $J(P_1, P_2)$ , ki določa kontrast interferenčnih prog, smo izrazili kot 2-D Fourierovo transformiranko intenzitete svetlobe na samem svetilu (enačba 2.33).



Ob tem se spomnimo, da velja podobna zveza med električno poljsko jakostjo v osvetljeni odprtini in njeno Fraunhoferjevo uklonsko sliko (enačba 1.61), pri čemer so količine, ki nastopajo v obeh zvezah, povsem različne. Različna je tudi veljavnost obeh izrazov: medtem ko je Fraunhoferjeva uklonska formula veljavna le v veliki oddaljenosti, za opis uklonske slike v bližnjem polju pa je treba uporabiti Fresnelov izraz (enačba 1.60), je rezultat za  $J(P_1, P_2)$  (enačba 2.33) veljaven v obeh območjih.

Pri velikih razdaljah med točkama  $P_1$  in  $P_2$  vrednost  $J(P_1, P_2)$  gotovo pade na nič. Največja razdalja, do katere je  $J(P_1, P_2)$  še različna od nič, je ravno prečna koherenčna razdalja  $d_c$ , ustreznata ploskev pa je koherenčna ploskev  $S_c$ . Iz izraza za koherenčno razdaljo (enačba 2.24) jo lahko ocenimo

$$S_c \sim \frac{(\lambda z)^2}{S_0} \sim \frac{\lambda^2}{\Omega_0}, \quad (2.35)$$

kjer je  $S_0$  površina svetila,  $\Omega_0$  pa prostorski kot, pod katerim je videti svetilo v ravnini  $A$ .

Oglejmo si primer. Naj bo svetilo v obliki kroga s polmerom  $R$ , obe odprtini v zaslonu naj imata koordinati  $y$  enaki nič, razmak med njima v smeri  $x$  pa naj bo  $d$ . Prečno korelacijsko funkcijo izračunamo iz enačbe (2.33) in dobimo (glej nalogu 2.5.1)

$$J(0, \Delta y) = 2 \frac{R^2 I_0}{z^2} \frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z}, \quad (2.36)$$

kjer je  $J_1(x)$  Besslova funkcija. V ničlah prve Besslove funkcije pade prečna korelacijska funkcija  $J$  na nič in interferenčnega vzorca ne vidimo. Za prečno koherenčno razdaljo je zato smiselno vzeti ravno prvo ničlo Besslove funkcije  $J_1$ , to je pri

$$d_c \approx 3,83 \frac{z}{kR} = 0,61 \frac{\lambda z}{R}. \quad (2.37)$$

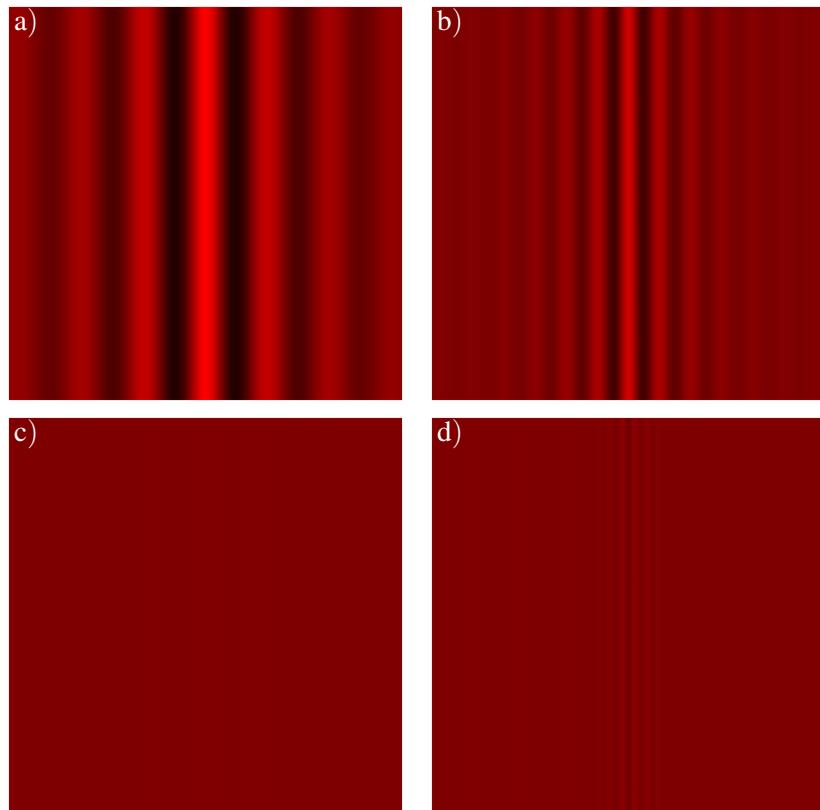
---

<sup>6</sup>Nizozemski fizik Pieter Hendrik van Cittert, 1889–1959, in nizozemski fizik in nobelovec Frits Zernike, 1888–1966.

**Naloga 2.5.1** Pokaži, da prečno korelacijsko funkcijo za okroglo svetilo s polmerom  $R$ , pri čemer odprtini na zaslonu ležita simetrično na osi  $y$  v razmiku  $d$ , zapišemo z enačbo (2.36).

Doslej smo obravnavali le valovanje v središču interferenčne slike na zaslonu  $B$ , to je pri tako majhnih kotih  $\vartheta$ , da je zakasnitev manjša od koherenčnega časa. Pri večjih kotih moramo upoštevati še vpliv končnega koherenčnega časa, zaradi česar se kontrast interferenčnih prog še dodatno zmanjšuje. Interferenčna slika je tako produkt časovnega in prostorskega dela.

Poglejmo še primer dveh zelo tankih vzporednih rež. Za nekaj različnih razmikov med režama  $d$  je intenziteta svetlobe na zaslonu prikazana na sliki (2.6). Če je  $d \ll \lambda z/R$  (slika a), je modulacija interferenčnih prog v sredini popolna in se zaradi končnega koherenčnega časa zmanjšuje le pri večjih kotih  $\vartheta$ . Pri nekaj večjem razmiku (slika b) tudi v sredini kontrast ni več popoln. Obenem se interferenčne proge zgostijo. Kadar je  $d \approx 3,83z/kR$ , dosežemo prvo ničlo Besslove funkcije  $J_1(x)$  in interferenčni vzorec prvič izgine (slika c). Takrat je razdalja med režama ravno enaka prečni koherenčni razdalji valovanja. Pri še večjih razmikih (slika d) je Besslova funkcija negativna in ponovno se pojavijo interferenčne proge, vendar so slabše izražene in z nasprotno fazo, kar da v sredini temno progo.



Slika 2.6: Interferenčna slika na zaslonu za različne vrednosti razmikov med režama: a)  $d = z/kR$ , b)  $d = 2z/kR$ , c)  $d = 3,832z/kR$  in d)  $d = 5,136z/kR$ . Z večanjem razdalje med režama se proge zgostijo in kontrast se zmanjša. Koherenčni čas svetlobe je  $t_c = 10/\omega$ , kar še dodatno zmanjšuje modulacijo interferenčnih prog. Pri  $d = 3,832z/kR$  je prva ničla Besslove funkcije in interferenčni vzorec popolnoma izgine. Pri večjih  $d$  se interferenčne proge zopet pojavijo, vendar z manjšim kontrastom in nasprotno fazo.



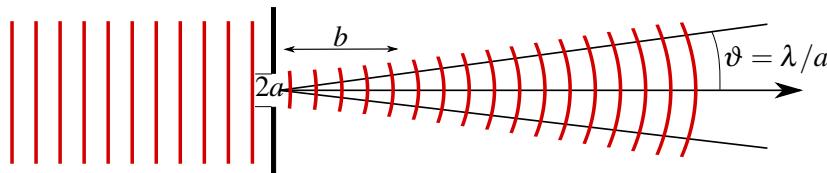
Merjenje prečne koherenčne razdalje svetlobe iz zvezd je osnova za Michelsonovo metodo določanja zvezdnih premerov. Svetlobo iz izbrane zvezde zberejo v teleskop preko dveh manjših parov zrcal, kjer sta zunanjji zrcali na pomičnih rokah, tako da ju je mogoče razmikati. Glavno zrcalo teleskopa zbere svetlobna snopa v goriščni ravnini, kjer nastanejo interferenčne proge, če le pomični zrcali nista preveč razmakenjeni. Iz razmika, pri katerem interferenčne proge izginejo, je mogoče določiti premere bližnjih svetlih zvezd. Za zvezdo s polmerom  $10^6$  km v razdalji 5 svetlobnih let je prečna koherenčna razdalja za zeleno svetobo okoli 15 m, kar je z Michelsonovim zvezdnim interferometrom mogoče izmeriti. Pri zvezdah, ki so dlje od nekaj deset svetlobnih let, metoda odpove.

### 3. Koherentni snopi svetlobe

V tem poglavju bomo zapisali obosni približek valovne enačbe in spoznali njeno osnovno rešitev: Gaussov snop. Obravnavali bomo snope osnovnega in višjega reda ter se naučili računati prehode Gaussovih snopov skozi optične elemente.

#### 3.1 Omejen snop svetlobe

Pri obravnavi elektromagnetnega valovanja pogosto uporabljamo približek ravnih valov. Ti so v smeri pravokotno na smer širjenja neomejeni in so zato lahko le idealizacija. Čim raven val usmerimo skozi odprtino v zaslonu, nastane omejen snop svetlobe. V snopu svetlobe valovna čela niso ravna in meje snopa niso vzporedne, ampak se snop zaradi uklona širi (slika 3.1).



Slika 3.1: Omejen snop nastane ob prehodu ravnega vala skozi končno odprtino.

V veliki oddaljenosti od zaslona polje izračunamo s Fraunhoferjevo uklonsko teorijo (glej poglavje 1.7). Vendar za oceno kota širjenja računa niti ne potrebujemo. Velja približno

$$\vartheta \sim \frac{\lambda}{a}, \quad (3.1)$$

kjer je  $a$  polmer odprtine v zaslonu. Opis polja v bližini zaslona je zahtevnejši, saj je treba uporabiti Fresnelov približek (enačba 1.60). Območje bližnjega polja seže do  $b$ , ki ga lahko ocenimo s slike (3.1)

$$\frac{a}{b} \sim \vartheta \sim \frac{\lambda}{a} \quad \text{in tako} \quad b \sim \frac{a^2}{\lambda}. \quad (3.2)$$

Včasih taki približni oceni zadoščata. Bolj kvantitativen opis omejenih snopov bi lahko dobili s Fraunhoferjevo in Fresnelovo uklonsko teorijo, kar pa ni najudobnejša pot (glej nalogo 3.1.1). Lotimo se problema raje z uporabo približka obosne valovne enačbe.

---

**Naloga 3.1.1** Pokaži, da je Fraunhoferjeva uklonska slika na odprtini, katere prepustnost se v radialni smeri spreminja kot Gaussova funkcija  $T(\xi, \eta) = e^{-(\xi^2 + \eta^2)/w_0^2}$ , podana z Gaussovo funkcijo oblike  $E(x, y, z) \propto e^{-(x^2 + y^2)/w^2(z)}$  in določi odvisnost  $w(z)$ . Izračunaj še uklonsko sliko v bližnjem polju po Fresnelovi uklonski teoriji.

---

### 3.2 Obosna valovna enačba

Obravnavo začnemo z valovno enačbo in monokromatskim valovanjem s krožno frekvenco  $\omega$ . Ustrezna Helmholtzeva enačba je (enačba 1.21)

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad (3.3)$$

kjer je  $k = n\omega/c_0$  valovno število in  $n$  lomni količnik sredstva, po katerem se valovanje širi. Zaradi enostavnosti obravnavamo le eno polarizacijo, tako da  $E$  pišemo kot skalar. Iščemo rešitev za omejen snop, ki se širi približno vzdolž osi  $z$ . Uporabimo nastavek

$$E = E_0 \psi(\mathbf{r}, z) e^{ikz}, \quad (3.4)$$

kjer je  $\mathbf{r}$  krajevni vektor v ravnini  $xy$ , prečni na smer širjenja svetlobe. Glavni del odvisnosti od koordinate  $z$  smo zapisali v faktorju  $e^{ikz}$ , tako da lahko privzamemo, da se  $\psi$  v smeri  $z$  le počasi spreminja. Vstavimo gornji nastavek v Helmholtzevo enačbo (enačba 3.3) in pri tem zanemarimo druge odvode  $\psi$  po  $z$ , saj je zaradi počasnega spreminjanja  $\partial^2 \psi / \partial z^2$  majhen v primerjavi s  $k \partial \psi / \partial z$  in  $k^2 \psi$ . Dobimo obosno ali paraksialno valovno enačbo za  $\psi$

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = -2ik \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (3.5)$$

 Opazimo, da je obosna valovna enačba enaka Schrödingerjevi enačbi za prost delec v dveh dimenzijah, v kateri ima koordinata  $z$  vlogo časa. Omejenemu snopu v kvantni mehaniki ustreza lokaliziran delec – valovni paket. Ta se s časom širi, kar v optiki ustreza pojavi uklona.

Zapišimo nastavek za ravni val v obliki

$$\psi = e^{ik_1 x + ik_2 y} e^{-i\beta z}. \quad (3.6)$$

Da bo gornji nastavek rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5), mora veljati

$$\beta = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \quad (3.7)$$

Ko vstavimo nastavek za  $\psi$  v izraz za polje  $E$  (enačba 3.4), dobimo ravni val, za katerega velja

$$k_3 = k - \beta = k - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \quad (3.8)$$

Pri tem  $k_3$  označuje vzdolžno in  $k_1$  ter  $k_2$  prečni komponenti valovnega vektorja,  $k$  pa je valovno število. Za ravni val, ki je rešitev Helmholtzeve enačbe (enačba 3.3) in ne obosnega približka (enačba 3.5), velja

$$k_3 = \sqrt{k^2 - (k_1^2 + k_2^2)}. \quad (3.9)$$

Vidimo, da sledi enačba (3.8) iz enačbe (3.9) z razvojem za majhne vrednosti  $k_1$  in  $k_2$ . To pove, da je približek obosne enačbe dober, kadar je razmerje prečne in vzdolžne komponente valovnega vektorja majhno. Takrat je majhen tudi kot širjenja snopa in člene, višje od kvadratnih, lahko zanemarimo. To pa je tudi območje veljavnosti Fresnelove uklonske teorije.

 Časovno odvisnost poljubnega začetnega stanja v kvantni mehaniki navadno izračunamo tako, da v nekem začetnem trenutku paket razvijemo po lastnih stanjih energije – ravnih valovih. Rešitev v poljubnem kasnejšem trenutku je potem dana v obliki Fourierevega integrala. Ta pot je zelo uporabna tudi v optiki in je osnova sklopa računskih metod, znanih pod imenom Fourierova optika. V našem primeru z njo brez težav pridemo nazaj do Fresnelove uklonske formule.

### 3.3 Osnovni Gaussov snop

Naša naloga je poiskati rešitve obosne enačbe, ki popišejo omejene snope. Iz kvantne mehanike vemo, da je najbolj lokaliziran in se najpočasneje širi valovni paket Gaussove oblike. Zato poskusimo najti rešitev obosne enačbe (enačba 3.5) z nastavkom

$$\psi(r, z) = e^{ikr^2/2q(z)} e^{-i\phi(z)}, \quad (3.10)$$

kjer funkcija  $q(z)$  opisuje širjenje snopa v prečni smeri,  $\phi(z)$  pa opisuje počasno sprememinjanje faze snopa vzdolž osi  $z$ . Vstavimo nastavek (enačba 3.10) v obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Zaenkrat se omejimo le na radialno simetrične rešitve in v cilindričnih koordinatah zapišemo

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left( \frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} \right) \psi \quad (3.11)$$

in

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left( -\frac{ikr^2}{2q^2} q(z)' - i\phi' \right) \psi. \quad (3.12)$$

Tako iz obosnega približka (enačba 3.5) sledi

$$\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} = ik \left( \frac{ikr^2}{q^2} q(z)' + 2i\phi' \right). \quad (3.13)$$

Gornja zveza mora veljati pri vsakem  $r$ , zato sta koeficienta pri  $r^2$  na obeh straneh enačbe enaka in člena brez odvisnosti od  $r$  prav tako. Sledi

$$q(z)' = 1 \quad \text{in} \quad \phi' = -\frac{i}{q}. \quad (3.14)$$

Z integracijo dobimo najprej

$$q = z - iz_0, \quad (3.15)$$

kjer smo z  $-iz_0$  označili integracijsko konstanto. Integriramo še enačbo za fazo

$$\phi = \int_0^z -\frac{idz}{z - iz_0} = -i \ln(1 + i \frac{z}{z_0}). \quad (3.16)$$

Sledi

$$\begin{aligned} \psi &= \exp \left( i \frac{kr^2}{2(z - iz_0)} \right) \exp \left( -\ln(1 + i \frac{z}{z_0}) \right) = \\ &= \frac{1}{1 + i \frac{z}{z_0}} \exp \left( -\frac{kr^2 z_0}{2(z_0^2 + z^2)} + \frac{ikr^2 z}{2(z_0^2 + z^2)} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Najprej podrobnejše poglejmo realni del eksponenta, ki opisuje širjenje snopa. Polmer snopa  $w$ , ki je funkcija koordinate  $z$ , opišemo z enačbo

$$w^2 = \frac{2z_0}{k} \left( 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right). \quad (3.18)$$

V izhodišču pri  $z = 0$  je snop najožji in pravimo, da je tam grlo snopa. Polmer snopa v grlu označimo z  $w_0$  in zapišemo hiperbolično zvezo  $w(z)$

$$w^2 = w_0^2 \left( 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right). \quad (3.19)$$

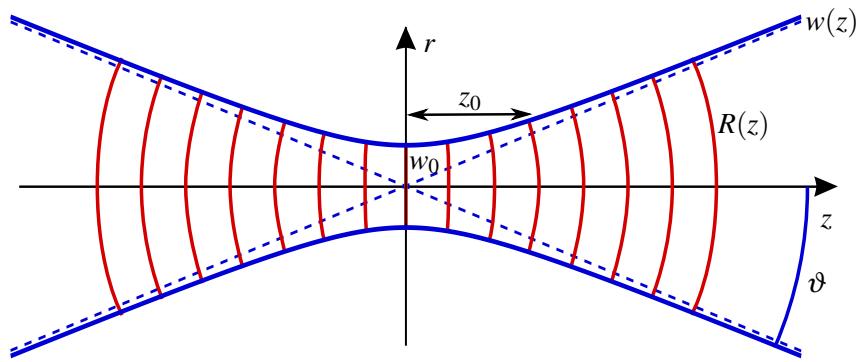
Pri tem velja

$$w_0^2 = \frac{2z_0}{k} \quad (3.20)$$

oziroma

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (3.21)$$

Parameter  $z_0$  označuje oddaljenost od grla, pri kateri preide snop v asimptotično enakomerno širjenje, in tako omejuje območje, znotraj katerega se snop ne razširi znatno. Imenujemo ga Rayleighova dolžina<sup>1</sup>, območje približno konstantne širine snopa pa območje bližnjega polja ali Rayleighovo območje. Celotna dolžina območja bližnjega polja je zaradi simetričnosti Gaussovega snopa enaka  $2z_0$ . Vrednost  $z_0$  označuje tudi oddaljenost od grla, pri kateri začne veljati Fraunhoferjev uklonski približek.



Slika 3.2: Gaussov snop s karakterističnimi parametri

Zapišimo še kot divergenco snopa v velikih oddaljenostih. Polovični kot širjenja je

$$\vartheta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dw}{dz} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.22)$$

Celotna divergencia snopa pa

$$\theta = 2 \frac{w_0}{z_0} = \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.23)$$

Izraza za območje bližnjega polja (enačba 3.21) in divergenco (enačba 3.22) sta v skladu z ocenama, ki smo ju napravili v začetku poglavja (enačbi 3.1 in 3.2). Faktor  $\pi$  oziroma  $1/\pi$  je značilen za Gaussov snop, ki ima od vseh možnih oblik najmanjšo divergenco.

 Za določanje kakovosti dejanskega laserskega snopa in njegovega odstopanja od idealnega Gaussovega snopa se pogosto vpelje faktor  $M^2$

$$\theta = M^2 \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.24)$$

Dobili laserji dosegajo vrednost  $M^2 \sim 1$ , pri močnejših trdninskih ali polprevodniških laserjih pa je lahko  $M^2 \sim 30$  ali več. V grobem velja, da  $M^2$  narašča z močjo laserja in obliko snopa močnih laserjev navadno znatno odstopa od oblike idealnega Gaussovega snopa.

<sup>1</sup>Angleški fizik in nobelovec John William Strutt, 3. baron Rayleighski; lord Rayleigh, 1842–1919.

Vrnimo se k imaginarnemu delu eksponenta v enačbi (3.17). Vpeljemo količino

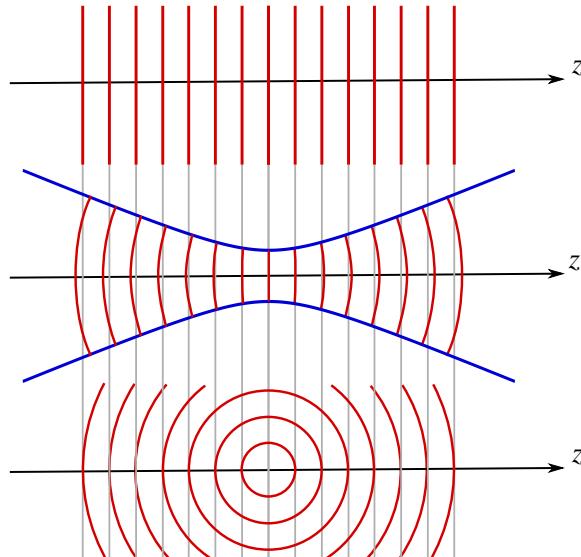
$$R = z \left( 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right), \quad (3.25)$$

ki meri krivinski radij valovnih front pri oddaljenosti od grla  $z$ . To najlažje uvidimo, če zapis imaginarnega dela primerjamo z zapisom za krogelni val, razvit po majhnih odmikih  $r$  od osi  $z$

$$\frac{1}{R} e^{ikR} = \frac{1}{R} e^{ik\sqrt{z^2+r^2}} \approx \frac{1}{R} e^{ikz+ikr^2/2R}. \quad (3.26)$$

**Naloga 3.3.1** Pokaži, da je največja ukrivljenost valovnih front snopa (in s tem najmanjši  $R$ ) ravno pri  $z = \pm z_0$ . Izračunaj še ukrivljenost front v grlu in v veliki oddaljenosti od grla.

Na sliki (3.3) so prikazane valovne fronte ravnega vala, Gaussovega snopa (enačba 3.29) in krogelnega vala (enačba 3.26). Vidimo, da je v bližini grla Gaussov snop podoben ravnemu valu (ukrivljenost front je zelo majhna in  $R \rightarrow \infty$ ). Za velike oddaljenosti krivinski radij valovnih front postaja kar enak oddaljenosti  $z$ . Snop je tako podoben delu krogelnega vala, le da je faza Gaussovega snopa zamaknjena za  $\pi/2$  glede na krogelni val.



Slika 3.3: Ravn val, Gaussov snop ter krogelni val. V bližini grla je Gaussov snop podoben ravnemu valu, pri velikih oddaljenostih od grla pa krogelnemu valu.

Ostane še faktor pred eksponentom v izrazu (3.17). Ta faktor meri zmanjševanje amplitудe električne poljske jakosti v snopu in s tem poskrbi za ohranitev energijskega toka ob širjenju žarka, poleg tega pa še dodatno spremeni fazo. Zapišemo ga v obliki

$$\frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{z}{z_0})^2}} e^{-i\eta(z)} = \frac{w_0}{w} e^{-i\eta(z)}, \quad (3.27)$$

pri čemer je

$$\eta(z) = \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (3.28)$$

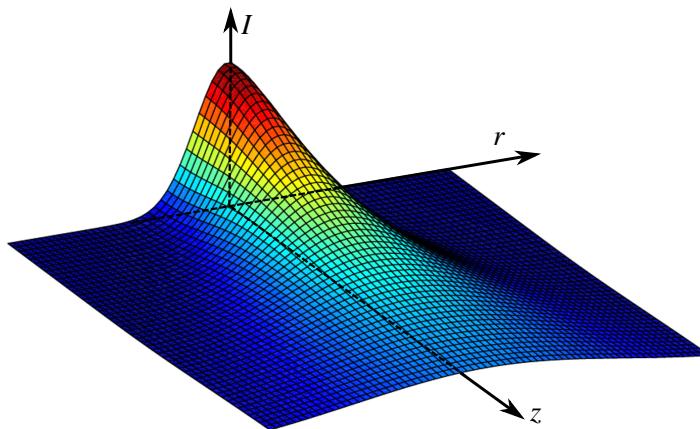
Dodatna faza  $\eta$ , imenujemo jo Gouyeva faza<sup>2</sup>, je posledica povečane fazne hitrosti valovanja, kadar je valovanje omejeno v prečni smeri. Podoben pojav bomo srečali tudi pri valovanju, ki je omejeno v valovode (poglavlje 9).

S tem lahko končno zapišemo izraz za električno poljsko jakost osnovnega Gaussovega snopa<sup>3</sup>

$$E(r, z, t) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{ikz - i\omega t} e^{-r^2/w^2(z)} e^{ikr^2/2R(z)} e^{-i\eta(z)}. \quad (3.29)$$

Intenziteta svetlobe, ki je enaka  $E(r, z, t)E^*(r, z, t)$ , je potem

$$I(r, z) = I_0 \frac{w_0^2}{w^2(z)} e^{-2r^2/w^2(z)}. \quad (3.30)$$



Slika 3.4: Upodobitev intenzitete svetlobe v Gaussovem snopu za  $z > 0$

---

**Naloga 3.3.2** Pokaži, da je celotna svetlobna moč v Gaussovem snopu enaka

$$P = \frac{1}{2} c_0 \epsilon_0 I_0 \left( \frac{1}{2} \pi w_0^2 \right). \quad (3.31)$$


---

Povejmo še nekaj o parametru  $q(z)$ , ki smo ga uporabili pri izračunu Gaussovega snopa v nastavku (enačba 3.10). Spomnimo se, da parameter  $q$  narašča linearno z oddaljenostjo od grla

$$q(z) = z - iz_0. \quad (3.32)$$

Parameter  $q$  imenujemo kompleksni krivinski radij, njegov inverz pa kompleksna ukrivljenost

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} + i \frac{2}{kw^2}. \quad (3.33)$$


---

**Naloga 3.3.3** Uporabi enačbi (3.21 in 3.25) in izpelji gornji izraz za kompleksno ukrivljenost.

---

Kompleksni krivinski radij je zelo uporaben pri obravnavi preslikav Gaussovin snopov z lečami.

<sup>2</sup>Francoski fizik Louis Georges Gouy, 1854–1926.

<sup>3</sup>Nemški matematik, fizik in astronom Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.

### 3.4 Snopi višjega reda

Osnovna rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5) je Gaussov snop (enačba 3.29), ki ga imenujemo tudi  $\text{TEM}_{00}$  snop<sup>4</sup>. Poleg te rešitve obstaja še veliko drugih rešitev, prav tako omejenih v prečni smeri. V kartezičnih koordinatah tako rešijo obosno valovno enačbo Hermite-Gaussovi snopi<sup>5</sup>, imenovani tudi  $\text{TEM}_{n,m}$ ,

$$\psi_{n,m}(x,y) = \frac{w_0}{w} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left(\frac{ik(x^2+y^2)}{2q} - i\eta_{n,m}\right), \quad (3.34)$$

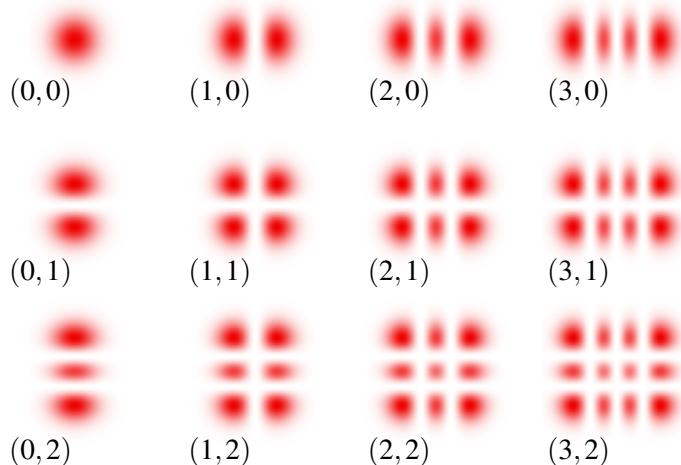
kjer so  $H_n$  Hermitovi polinomi stopnje  $n$  (npr.  $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x \dots$ ). V to se lahko prepričamo, če izraz vstavimo v obosno valovno enačbo (enačba 3.5) in upoštevamo zvezo med Hermitovimi polinomi

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \quad (3.35)$$

Osnovni Gaussov snop je očitno poseben primer gornje rešitve za  $n = m = 0$ . Polmer snopa  $w(z)$  in kompleksni krivinski radij  $q(z)$  sta za vse  $n$  in  $m$  enaka kot za osnovni snop in podana z enačbama (3.19) in (3.32). Razlika je v fazi, ki je odvisna tudi od  $n$  in  $m$

$$\eta_{n,m}(z) = (n+m+1) \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \quad (3.36)$$

Na sliki (3.5) so intenzitetni profili Hermite-Gaussovih snopov višjih redov  $|\psi_{n,m}(x,y,0)|^2$ . Indeks  $n$  in  $m$  določata število vozlov v prečnih smereh  $x$  in  $y$ , širina snopa pa narašča z  $n$  in  $m$ .



Slika 3.5: Prečni profil intenzitete Hermite-Gaussovih snopov v grlu za različne vrednosti  $(n, m)$

**Naloga 3.4.1** Pokaži, da za Hermite-Gaussove snope višjih redov efektivni polmer snopa narašča sorazmerno s korenom iz števila prečnih vozlov  $w_{eff} \propto w\sqrt{n+m}$ .

Namig: pri zapisu prečne odvisnosti polja upoštevaj le vodilni člen Hermitovih polinomov in določi razdaljo od središča snopa, pri kateri je amplituda polja  $\psi$  največja.

<sup>4</sup>TEM – Transverse Electromagnetic Mode, transverzalno elektromagnetno valovanje.

<sup>5</sup>Francoski matematik Charles Hermite, 1822–1901.



Hermite-Gaussovi snopi (enačba 3.34) tvorijo popoln ortogonalen sistem funkcij koordinat  $x$  in  $y$

$$\int \psi_{n,m}^*(x,y) \psi_{n',m'}(x,y) dx dy = \pi w_0^2 2^{n+m-1} n! m! \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}. \quad (3.37)$$

Polje nekega valovanja, ki ga poznamo v ravnini  $z = 0$ , lahko pri poljubnem  $z$  izračunamo z razvojem po Hermite-Gaussovih snopih. Pri tem je izbira polmera grla  $w_0$  poljubna, bo pa seveda vplivala na hitrost konvergenco razvoja. Na tak način lahko obravnavamo uklon na odprtini, kjer je očitno smiselno vzeti  $w_0$  približno enak dimenziji odprtine. Dobljeni rezultat je enako natančen kot Fresnelov uklonski integral.

Pri velikih  $z$ , kjer velja Fraunhoferjeva uklonska teorija, je polje Fourierjeva transformiranka polja pri  $z = 0$ . Hermite-Gaussovi snopi ohranjajo prečno obliko, ki pa se z naraščajočim  $z$  širi. To je v skladu s tem, da je Fourierjeva transformiranka Hermite-Gaussove funkcije  $H_n(x)e^{-x^2/2}$  kar Hermite-Gaussova funkcija.

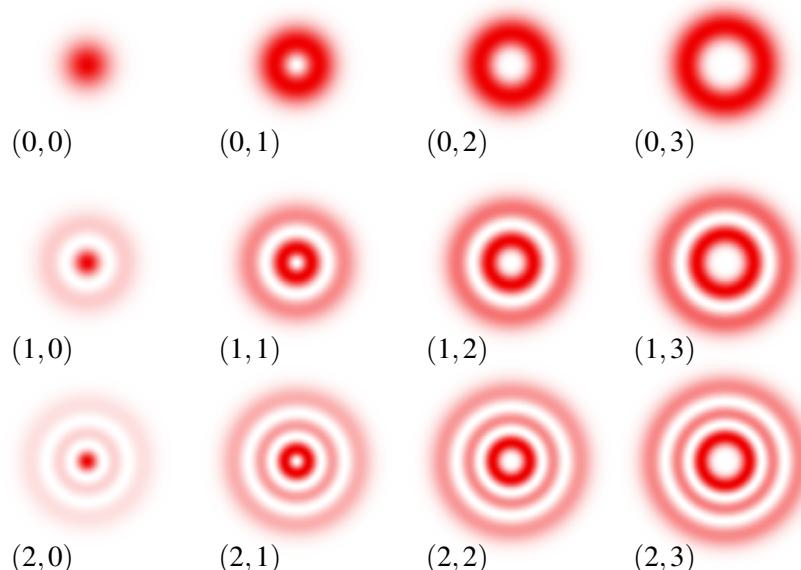
V cilindričnih koordinatah imajo snopi višjega reda obliko Laguerre-Gaussovih snopov<sup>6</sup>

$$\psi_{p,l}(r, \varphi, z) = \frac{w_0}{w} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w^2} \right) e^{\pm il\varphi} \exp \left( \frac{ikr^2}{2q} - i\eta_{p,l} \right), \quad (3.38)$$

kjer so  $L_p^l$  pridruženi Laguerrovi polinomi (npr.  $L_0^l(x) = 1, L_1^l(x) = -x + l + 1, L_2^l(x) = x^2/2 - (l+2)x + (l+2)(l+1)/2 \dots$ ) in

$$\eta_{p,l}(z) = (2p + l + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (3.39)$$

Podobno kot v kartezičnem primeru red polinoma določa število prečnih ničel, določa  $p$  v cilindričnem primeru število vozelnih črt, kjer je gostota svetlobnega toka enaka nič. Na sliki (3.6) je prikazanih nekaj intenzitetnih profilov Laguerre-Gaussovih snopov višjih redov  $|\psi_{p,l}(r, \varphi, 0)|^2$ . Ker nastopa odvisnost od kota le v fazi, so intenzitetni profili snopa radialno simetrični. Opazimo, da je pri vseh snopih z  $l \neq 0$  v središču snopa minimum.

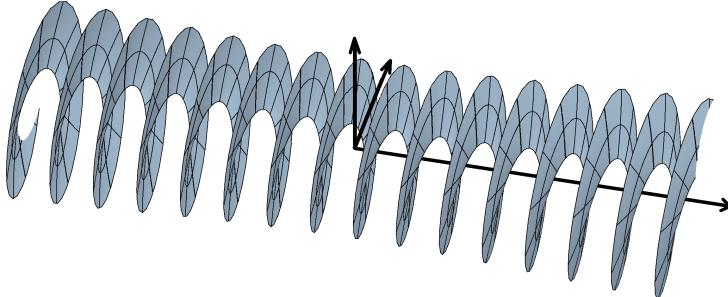


Slika 3.6: Prečni profil intenzitete Laguerre-Gaussovih snopov v grlu za različne vrednosti  $(p, l)$

<sup>6</sup>Francoski matematik Edmond Nicolas Laguerre, 1834–1886.

Navadno želimo, da iz laserja izhaja čim čistejši osnovni snop, vendar pogosto opazimo tudi snope višjega reda. Da dobimo le osnovni snop, je treba posebej paziti pri konstrukciji laserja.

 Valovne fronte Laguerre-Gaussovih snopov imajo pri  $l \neq 0$  obliko vijačnic. Poyntingov vektor pri njih ni vzporeden z osjo žarka, ampak ima komponento tudi v prečni smeri. Ta spreminja smer, zato pride do pojava vrtilne količine v smeri osi snopa in snop na snov deluje z navorom. Pravimo, da Laguerre-Gaussovi snopi nosijo t.i. tirno vrtilno količino. V kvantni mehaniki funkcija  $\psi_{p,l}$  predstavlja foton s tirno vrtilno količino  $L = \hbar l$ , medtem ko leva in desna cirkularna polarizacija predstavlja spin fotona.



Slika 3.7: Valovna fronta Laguerre-Gaussovega snopa

### 3.5 Besslov snop

Poglejmo še poseben primer omejenega snopa, to je Besslov snop<sup>7</sup>. Nastavek za eksaktno rešitev valovne enačbe (enačba 1.13), pri čemer obravnavamo polje skalarno, naj bo

$$E = E_0 \psi(x, y) e^{i\beta z - i\omega t}. \quad (3.40)$$

Funkcija  $\psi$  mora zadoščati Helmholtzovi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + k_{\perp}^2 \psi = 0 \quad (3.41)$$

pri  $k_{\perp}^2 = k^2 - \beta^2$ . V cilindričnih koordinatah ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) se enačba prepiše v

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k_{\perp}^2 \psi = 0. \quad (3.42)$$

Rešitve gornje enačbe so s faznim faktorjem pomnožene Besslove funkcije

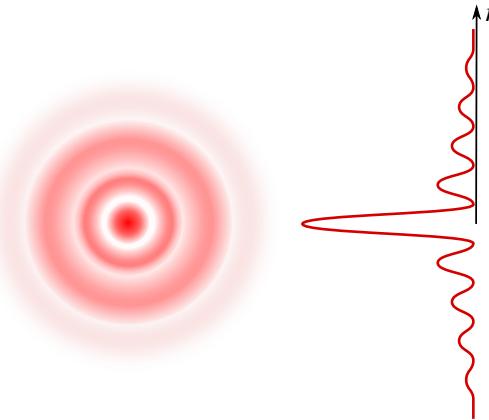
$$\psi_m(r, \varphi) = J_m(k_{\perp} r) e^{im\varphi}, \quad (3.43)$$

kjer je  $J_m$  Besslova funkcija,  $m$  pa celo število. Za  $m = 0$  je rešitev osnovi Besslov snop

$$E(r, z, t) = E_0 J_0(k_{\perp} r) e^{i\beta z - i\omega t}. \quad (3.44)$$

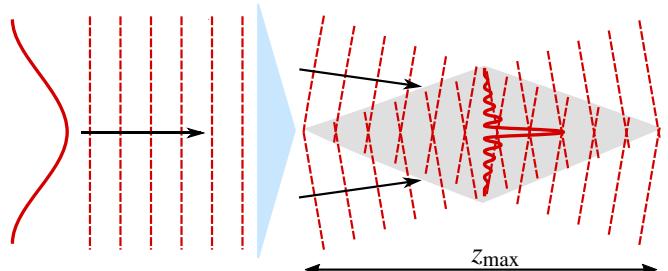
Valovne fronte Besslovega snopa so ravne in snop nima divergencijo. Vendar pa Besslov snop ni omejen v pravem smislu. Za velike oddaljenosti od osi snopa  $r$  intenzitetni profil namreč pojema kot  $I \propto J_0^2(k_{\perp} r) \sim (2/\pi k_{\perp} r) \cos^2(k_{\perp} r - \pi/4)$ . Energija takega snopa ni omejena znotraj efektivnega radija, kot je to pri Gaussovih snopih. Za konstrukcijo Besslovinih snopov bi (tako kot za konstrukcijo ravnega vala) potrebovali neskončno energije, kar je seveda nemogoče. Lahko pa ustvarimo dobre približke Besslovinih snopov, ki imajo pomembne in uporabne lastnosti.

<sup>7</sup>Nemški astronom, matematik in fizik Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846.



Slika 3.8: Prečni presek in profil intenzitete Besslovega snopa

 Z uporabo stožaste leče (aksikona) lahko Gaussov snop preoblikujemo v približek Besslovega snopa (slika 3.9). Na plašču stožaste leče se namreč Gaussov snop zlomi in valovni vektorji nastalega snopa opisujejo stožec, kar je sicer lastnost Besslova snopov. Dobljeni snop je približek Besslovega snopa, vendar le na določenem območju, dolgem  $z_{max}$ . Znotraj tega območja je divergenca snopa praktično enaka nič. Poleg manjše divergence imajo ti snopi še lastnost regeneracije. To pomeni, da se snop v senčni strani za objektom, ki ga osvetljuje (na primer v optični pinceti), regenerira. Profil snopa v senčni strani (daleč stran od objekta) je tako enak profilu snopa pred objektom.



Slika 3.9: Nastanek približka Besslovega snopa na stožasti leči

### 3.6 Transformacije snopov z lečami

Vrmimo se k osnovnim Gaussovim snopom in poglejmo, kaj se zgodi z njimi pri prehodu skozi optične elemente. Začnemo z enostavno tanko lečo z goriščno razdaljo  $f$ . V geometrijski optiki je krivinski radij krogelnega vala, ki izhaja iz točke na osi, kar enak razdalji do točke. Leča točko na optični osi preslika v točko na osi, od tod pa sledi, da se krogelni val s krivinskim radijem  $R_1$  po prehodu skozi lečo spremeni v val s krivinskim radijem  $R_2$ . Pri tem velja zveza

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}. \quad (3.45)$$

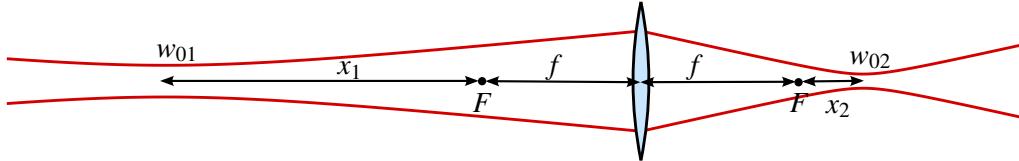
Dogovorimo se, da je krivinski radij v točki  $z$  pozitiven, če je središče krožnice pri  $z' \leq z$ .

Kako pa je z Gaussovim snopom? Polmer snopa  $w$  se pri prehodu skozi tanko lečo ne spremeni, zato velja po enačbah (3.33) in (3.45) za kompleksni krivinski radij tik pred lečo in tik za njo

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f}. \quad (3.46)$$

Kompleksni krivinski radij  $q$  je po enačbi (3.32) linearna funkcija koordinate  $z$  in za opis Gaussovega snopa zadošča, da v neki točki  $z$  poznamo  $q$ . Iz realnega dela parametra  $q$  določimo ukrivljenost front, iz imaginarnega pa polmer snopa. Enačba (3.46) torej zadošča za račun prehoda snopa skozi poljuben sistem leč brez aberacij, če le poznamo njegovo goriščno razdaljo.

Kot primer poglejmo, kako z zbiralno lečo zberemo Gaussov snop.



Slika 3.10: Prehod Gaussovega snopa skozi tanko lečo. Grlo velikosti  $w_{01}$  v oddaljenosti  $x_1$  od gorišča leče  $F$  se preslikava v grlo velikosti  $w_{02}$  v oddaljenosti  $x_2$  od gorišča leče  $F$ .

Vpadni snop naj ima grlo s polmerom  $w_{01}$  in parametrom  $z_{01} = \pi w_{01}^2 / \lambda$ . Lega grla je v točki, ki je za  $x_1$  oddaljena od levega gorišča leče  $F$  (slika 3.10). Naj bosta

$$q_1^F = x_1 - iz_{01} \quad \text{in} \quad q_2^F = -x_2 - iz_{02} \quad (3.47)$$

kompleksna krivinska radija v levem in desnem gorišču, pri čemer je koordinatna os  $z$  usmerjena v desno, gledamo pa referenčno glede na lego grla vsakega posameznega snopa. Za vrednosti  $q$  tik pred lečo in tik za njo velja tudi

$$q_1 = q_1^F + f \quad \text{in} \quad q_2 = q_2^F - f. \quad (3.48)$$

Od tod z uporabo enačbe (3.46) izpeljemo zvezo za  $q$  v goriščih v kompaktni obliki

$$q_1^F q_2^F = -f^2. \quad (3.49)$$

Enačba je po obliki podobna enačbi za oddaljenost slike od gorišča v geometrijski optiki, pomen pa ima drugačen. Uporabimo enačbi (3.47) in zapišimo posebej realni in imaginarni del

$$x_1 x_2 = f^2 - z_{01} z_{02} \quad \text{in} \quad \frac{x_1}{z_{01}} = \frac{x_2}{z_{02}}. \quad (3.50)$$

Dobimo enačbi za preslikavo Gaussovega snopa z lečo z goriščno razdaljo  $f$ . Prva enačba

$$x_2 = \frac{x_1 f^2}{x_1^2 + z_{01}^2} \quad (3.51)$$

določa lego grla preslikanega snopa na desni strani leče, druga pa povečavo

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}. \quad (3.52)$$

Enačba (3.51) se ujema z izrazom za preslikavo točke v geometrijski optiki le, kadar je  $z_{01} \ll x_1$ . Kadar je  $z_{01} \gg f$ , je val na leči skoraj raven in  $x_2 \rightarrow 0$ , kar pomeni, da leži grlo na desni strani v gorišču. V praksi za Gaussove snope, ki izhajajo iz laserjev, pogosto ne velja ne prva ne druga limita, zato je treba uporabiti zapisani izraz (enačba 3.51). Tudi velikost polmera grla na desni, podana z enačbo (3.52), je precej drugačna kot v geometrijski optiki.

Za primer vzemimo snop iz He-Ne laserja z valovno dolžino 632,8 nm. Grlo s polmerom  $w_{01} = 0,5$  mm naj bo na izhodu iz laserja in 50 cm oddaljeno od leče z goriščno razdaljo  $f = 25$  cm. Za tak snop je  $z_{01} = 124$  cm. Po enačbi (3.51) leži grlo za lečo v oddaljenosti 1 cm od gorišča in torej 26 cm za lečo, po enačbi (3.52) pa izračunamo polmer  $w_{02} = 100 \mu\text{m}$ . Enačbe geometrijske optike bi dale popolnoma napačen položaj grla 50 cm za lečo, polmer grla pa 0,5 mm. Po drugi strani bi približek, da je vpadni snop kar raven, dal grlo na desni v gorišču s približno pravim polmerom. Zakaj da približek ravnih valov bolj pravilen rezultat, lahko hitro uvidimo, če pogledamo Rayleighovo dolžino snopa  $z_{01}$ : snop vpada na lečo še v območju bližnjega polja ( $x_1 + f < z_{01}$ ), kjer je približno oblike ravnih valov.

Če postavimo gorišče leče v grlo snopa ( $x_1 = 0$ ), je grlo na desni strani tudi v gorišču ( $x_2 = 0$ ). Razmerje polmerov grl na eni in drugi strani leče lahko izračunamo

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_2}{x_1} = \frac{f^2}{z_{01}^2} \quad \text{in} \quad \frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f}{z_{01}}. \quad (3.53)$$

Velikost grla na desni strani je tako

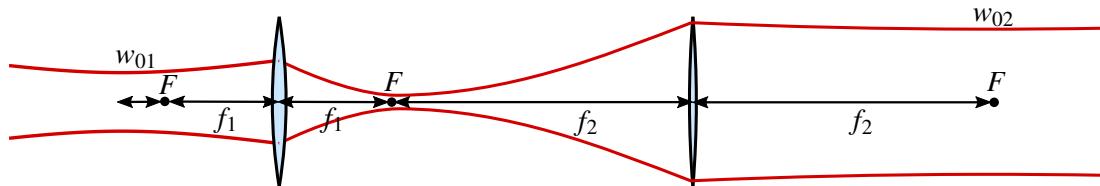
$$w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01}}. \quad (3.54)$$

Če želimo doseči kar se da majhno grlo po prehodu skozi leč, mora biti polmer vpadnega snopa kar se da velik. Vpadni snop je tako smiseln razširiti, vendar je polmer snopa lahko največ enak polmeru leče  $a$ . Najmanjša velikost grla, ki jo še lahko dosežemo z zbiralno lečo, je tako

$$w_{02 \min} = \frac{\lambda f}{\pi a} \sim \lambda. \quad (3.55)$$

Dobi mikroskopski in fotografiski objektivi dosegajo  $f/a \simeq 1$ , zato je mogoče z njimi Gaussov snop zbrati v piko velikosti  $\sim \lambda$ .

Omenili smo, da je treba za dosego majhnega polmera grla za leč snop pred lečo čim bolj razširiti. Razširitev vpadnega snopa naredimo s teleskopom (slika 3.11), katerega značilnost je, da je razmik med lečama enak vsoti goriščnih razdalj leč in zato gorišči leč sovpadata. Povečava teleskopa je pri taki postavitvi leč enaka razmerju med goriščima razdaljama (glej nalogu 3.6.1).



Slika 3.11: Prehod Gaussovega snopa skozi teleskop iz leč z goriščnima razdaljama  $f_1$  in  $f_2$ . Pri teleskopu gorišči leč sovpadata.

**Naloga 3.6.1** Dve leči z goriščnima razdaljama  $f_1$  in  $f_2$  naj bosta na medsebojni razdalji  $d = f_1 + f_2$ . Pokaži, da je povečava takega teleskopa enaka

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f_2}{f_1}. \quad (3.56)$$

### 3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki

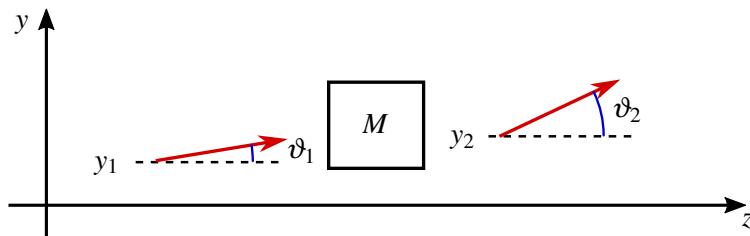
Preden se lotimo splošnejšega zapisa preslikav Gaussovega snopa, se spomnimo, kako obravnavamo preslikave v geometrijski optiki. Slika nastane kot presečišče žarkov, ki izhajajo iz točke predmeta pred optičnim sistemom. Žarek je pravokoten na valovne ploskve, pri čemer moramo vzeti še limito zelo majhne valovne dolžine. Ukrivljenost valovne fronte je neposredno povezana s spremjanjem naklona žarkov, pri čemer bomo privzeli, da so nakloni žarkov glede na os majhni.

Žarek v izbrani ravnini  $z$  lahko opišemo z dvema parametrom: oddaljenostjo  $y$  od osi in naklonom  $\vartheta$  glede na os sistema. Ti dve količini sta med seboj neodvisni in ju sestavimo v vektor

$$\begin{bmatrix} y \\ \vartheta \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Preslikavo žarka zapišemo kot matriko, ki deluje na vpadni vektor in ga preslika v izhodni vektor (slika 3.12)

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$



Slika 3.12: Preslikave žarkov lahko obravnavamo z matrikami. Optični element, ki ga predstavlja matrika  $M$ , preslika žarek  $(y_1, \vartheta_1)$  v  $(y_2, \vartheta_2)$ .

Matrike  $M$  so na splošno oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

zato jih imenujemo matrike ABCD. Poglejmo nekaj primerov.

Pri premiku za  $d$  vzdolž osi se zaradi končnega naklona spremeni odmik od osi, naklon pa ostane enak

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + d\vartheta_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

To lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Matrika za premik  $d$  vzdolž osi  $z$  je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Poglejmo še matriko za prehod skozi lečo. Pri prehodu skozi tanko lečo se spremeni nagib žarka. Če je žarek pred lečo vzporeden z osjo, gre za lečo skozi gorišče, zato

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -\frac{y_1}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Pri tem koeficientov  $B$  in  $D$  še ne poznamo. Določimo jih iz drugega pogoja, ki pravi, da se žarek, ki gre skozi lečo na osi, ne spremeni

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Sledi  $B = 0$  in  $D = 1$ . Matrika za prehod skozi lečo je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Podobno izpeljavo kot za prehod skozi lečo naredimo za odboj na sferičnem zrcalu s krivinskim radijem  $R$ . Pripadajoča matrika je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

pri čemer je  $R > 0$  za konkavna zrcala. Matrika za odboj na ravnem zrcalu je identiteta.

Matriko sestavljenih optičnih naprav zapišemo kot produkt matrik posameznih komponent. Pri tem moramo paziti na vrstni red množenja, saj množenje matrik ni komutativno. Matriko preslikave z dvema optičnima elementoma, pri čemer žarek najprej preide element z indeksom 1 in nato element z indeksom 2, zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2A_1 + B_2C_1 & A_2B_1 + B_2D_1 \\ C_2A_1 + D_2C_1 & C_2B_1 + D_2D_1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

V sistemu z več elementi zapišemo produkt matrik za vse elemente, pri čemer ne smemo pozabiti na premike med posameznimi elementi.

Poglejmo primer. Žarek naj najprej prepotuje razdaljo  $d$ , nato pa ga usmerimo na tanko lečo z goriščno razdaljo  $f$ . Matrika za celoten prehod je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$



Opisani matrični formalizem je zelo prikladen predvsem za računanje prehoda svetlobe skozi zapletene optične sisteme, saj ga je prav lahko izvesti z računalnikom. Poleg tega je enolično povezan z matričnim formalizmom za izračun kompleksne ukrivljenosti Gaussovih snopov, zato omogoča preprost prenos rezultatov geometrijske optike v optiko Gaussovih snopov.

### 3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija

Poskusimo zdaj zapisati podoben matrični formalizem še za kompleksne krivinske radije. Za opis Gaussovega snopa zadošča, da v izbrani ravnini  $z$  poznamo kompleksni krivinski radij  $q$ . Vemo, da je  $q$  linearna funkcija premika po  $z$  (enačba 3.32). Izračunali smo tudi že, kako se  $q$  spremeni pri prehodu skozi tanko lečo (enačba 3.46).

Pri premiku iz ravnine  $z_1$  v ravnino  $z_2$ , ki je premaknjena za  $d$ , se  $q$  spremeni

$$q_2 = q_1 + d. \quad (3.69)$$

Po enačbi (3.46) je pri prehodu skozi lečo

$$q_2 = \frac{q_1 f}{f - q_1} = \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1}. \quad (3.70)$$

Premik in leča dasta skupaj

$$q_2 = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1 + d}{f} + 1} = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1}{f} - \frac{d}{f} + 1}. \quad (3.71)$$

V vseh treh primerih lahko transformacijo kompleksnega krivinskega radija  $q$  zapišemo v obliki ulomljene linearne oziroma Möbiusove preslikave<sup>8</sup>

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}. \quad (3.72)$$

Ko koeficiente preslikave razvrstimo v matriko

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

in iz gornjih enačb razberemo koeficiente matrik za opisane preslikave, vidimo, da so povsem enaki koeficientom matrik ABCD, ki jih poznamo iz geometrijske optike (3.59). Hitro lahko tudi preverimo, da je matrika za premik in lečo, ki jo dobimo iz preslikave (enačba 3.71), enaka produktu matrike za premik in matrike za lečo (enačba 3.68).

Omenimo še eno lastnost matrik ABCD. Kadar po prehodu skozi optične elemente snop svetlobe preide v snov z enakim lomnim količnikom, kot je bil na začetku, je determinanta matrike ABCD enaka 1. V nasprotnem primeru je determinanta matrike enaka razmerju lomnih količnikov začetne in končne snovi.

$$\det(M) = AD - BC = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.74)$$

---

<sup>8</sup>Nemški matematik in astronom August Ferdinand Möbius, 1790–1868.

Opis prehoda	Skica	Matrika za prehod
Prehod skozi prostor za $d$		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Prehod skozi mejo dveh snovi		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod skozi konveksno ukrivljeno mejo $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1-n_2)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod skozi konveksno lečo $f > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Odboj na konkavnem zrcalu $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3.1: Matrike ABCD za nekaj osnovnih preslikav, ki veljajo tako v geometrijski optiki kot tudi za izračun preslikave kompleksnega krivinskega radija  $q$  Gaussovih snopov.

**Naloga 3.8.1** Pokaži, da za naslednje prehode veljajo ustrezne matrike ABCD.

Prehod skozi prostor in lečo		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{bmatrix}$
Prehod skozi lečo z debelino $d$ in krivinskima radijema $R_1$ in $R_2$		$\begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{n f_1} & \frac{d}{n} \\ -\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{d}{n f_1 f_2} & 1 - \frac{d}{n f_2} \end{bmatrix} f_i = \frac{R_i}{n-1}$
Prehod skozi zaporedje plasti		$\begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



## 4. Optični resonatorji

Osnovni gradnik vsakega laserja je resonator. V njem je vzbujeno lastno elektromagnetno nihanje, ki skozi delno prepustno steno resonatorja kot valovanje izhaja iz sistema. V tem poglavju bomo najprej spoznali optične resonatorje in kriterije za njihovo stabilno delovanje, nato pa izračunali lastne frekvence resonatorjev ter povezali spektralno širino črt izsevane svetlobe z izgubami v laserskem resonatorju.

### 4.1 Odprtii resonatorji

Optični resonatorji so votline, v katerih je mogoče vzpostaviti stoječe svetlobno valovanje. Če vzbujamo v resonatorju valovanja z različnimi frekvencami, se pri nekaterih diskretnih frekvencah pojavi resonančno obnašanje. Te frekvence imenujemo lastne frekvence resonatorja. Zaradi dušenja imajo lastne frekvence končno frekvenčno oziroma spektralno širino, pri čemer je čas dušenja mnogo daljši od nihajne periode.

Optične resonatorje uporabljamo predvsem v dva namena:

1. V resonatorjih lahko ob razmeroma šibkem zunanjem vzbujanju nastane velika električna poljska jakost pri resonančni frekvenci. Za vzdrževanje konstantne amplitude lastnega nihanja mora zunanji vir zgolj pokrivati izgube v resonatorju. Če so te majhne, je zunanji vir lahko šibek, polje v resonatorju pa vseeno veliko.
2. Resonatorji delujejo kot filtri, ki prepuščajo le polje s točno določeno frekvenco in izbrano prostorsko odvisnostjo. Primer take uporabe je Fabry-Perotov interferometer, opisan v nadaljevanju.



Resonatorje poznamo z različnih področij, na primer akustične pri glasbilah ali mikrovalovne in radijske. V mikrovalovnem področju, kjer so valovne dolžine valovanja okoli 1 cm, so resonatorji zaprte kovinske votline z dimenzijami, ki so primerljive z valovno dolžino vzbujenega valovanja. Resonančne frekvence so v takem resonatorju med seboj dobro ločene in ni težko doseči enega samega lastnega nihanja v izbranem frekvenčnem intervalu.

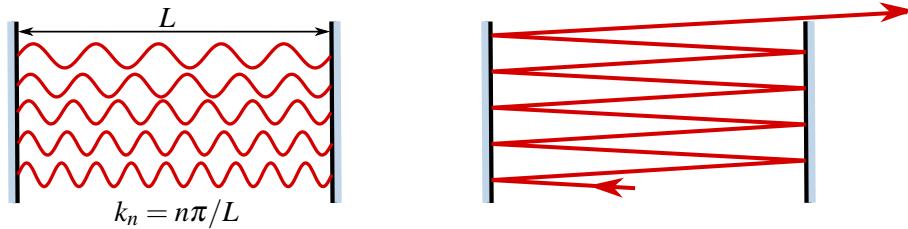
V optiki so resonatorji navadno veliko večji od valovne dolžine svetlobe. Vzemimo kocko s stranico  $L \gg \lambda$ , v kateri je vzbujeno zelo veliko število lastnih nihanj. Število lastnih nihanj  $N$  na frekvenčni interval  $\Delta\nu$  zapišemo z zvezno gostoto stanj

$$N = 2 \frac{1}{8} 4\pi k^2 \Delta k \frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V \Delta \omega = \frac{8\pi v^2}{c^3} V \Delta \nu. \quad (4.1)$$

To gornje enačbe smo prišli tako, da smo prešteli stoječa valovanja z velikostjo valovnega vektorja med  $k$  in  $k + \Delta k$ : volumen pripadajoče krogelne lupine v pozitivnem oktantu  $\frac{1}{8} 4\pi k^2 \Delta k$  smo delili z volumnom  $(\pi/L)^3$ , ki pripada enemu stanju. Upoštevali smo tudi, da ima vsako lastno nihanje lahko dve polarizaciji.

Poglejmo primer. Izberimo osrednjo frekvenco  $\nu = 3 \cdot 10^{14}$  Hz, ki ustreza valovni dolžini  $1 \mu\text{m}$ , in širino frekvenčnega intervala  $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9$  Hz, ki je značilna za Dopplerjevo razširjeno emisijsko črto v plinu. Potem je v votlini s stranico  $L = 1 \text{ cm}$  in prostornino  $V = 1 \text{ cm}^3$  število lastnih nihanj na izbran frekvenčni interval po enačbi (4.1) enako  $N = 2,5 \cdot 10^8$ . Če bi bile vse stene votline idealna zrcala, bi bil čas dušenja vseh lastnih nihanj približno enako dolg in vedno bi vzbujali zelo veliko število resonanc hkrati. Tak resonator bi bil neuporaben.

Hkratnemu vzbujanju velikega števila nihanj se izognemo z zmanjšanjem odbojnosti stranskih sten votline, saj tako povečamo dušenje stoječih valov v prečni smeri. Dušenje valov, ki so pravokotni na idealno odbojni končni steni, ostane nespremenjeno. Nazadnje lahko stranske stene povsem odstranimo, tako da stoječih valov v prečni smeri sploh ni več. Ostane le še nekaj valov, ki so pravokotni na končni steni. Takemu resonatorju pravimo odprtih resonator (slika 4.1).



Slika 4.1: Levo: lastni nihajni načini odprtih resonatorja imajo diskretne vrednosti velikosti valovnih vektorjev  $k_n$ . Desno: žarki, ki niso pravokotni na zrcali, iz odprtih resonatorja uidejo.

Obravnavajmo odprte resonatorje podrobneje. V zaprti pravokotni votlini velikosti  $a \times a \times L$  z idealno odbojnimi stenami so dovoljene vrednosti valovnega vektorja za lastna nihanja

$$\mathbf{k}_{l,m,n} = \left( \frac{l\pi}{a}, \frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{L} \right), \quad (4.2)$$

kjer so  $l$ ,  $m$  in  $n$  cela števila,  $L$  dolžina,  $a$  pa prečna dimenzija resonatorja. Lastne krožne frekvence so

$$\omega_{l,m,n} = c |\mathbf{k}_{l,m,n}|. \quad (4.3)$$

Dolžina resonatorja  $L$  je velika v primerjavi z  $\lambda$ , zato je  $n$  zelo veliko število. Če prečnih sten ni, je  $\mathbf{k}$  približno vzporeden z osjo  $z$  in števili  $l$  in  $m$  sta majhni. Tedaj lahko velikost valovnega vektorja razvijemo in krožno frekvenco zapišemo kot

$$\omega_{l,m,n} = c \left( \frac{n\pi}{L} + \frac{l^2 + m^2}{2n} \frac{L\pi}{a^2} \right). \quad (4.4)$$

Drugi člen v oklepaju je navadno le majhen popravek, tako da so lastne frekvence odprtih optičnih resonatorjev odvisne predvsem od števila vozlov v vzdolžni smeri. To število je navadno veliko, med  $10^5$  in  $10^7$ . Možna so tudi lastna nihanja z nekaj vozli v prečni smeri, ki pa le malo vplivajo na lastne frekvence. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali predvsem lastna nihanja brez vozlov v prečni smeri in jih označili z enim samim indeksom  $n$ .

Razlika med frekvencama dveh zaporednih lastnih nihanj  $n$  in  $n+1$  je

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \quad \text{ozziroma} \quad \Delta\nu_n = \frac{c}{2L}. \quad (4.5)$$

Pri dolžini resonatorja  $L = 30 \text{ cm}$  je v frekvenčnem intervalu  $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$  le še  $\Delta\nu/\Delta\nu_n = 6$  lastnih nihanj, ki jih je brez težav mogoče razločiti.

V zaprtih votlinah z zrcalnimi stenami obstajajo dobro določena lastna stanja pri poljubni obliki votline. To ne drži za odprte resonatorje. Da se pojavi lastna nihanja z majhnimi izgubami, morata biti izpolnjena dva pogoja:

1. Snop žarkov mora po mnogih odbojih ostati ujet med zrcaloma resonatorja.
2. Polmer zrcala mora biti večji od polmera uklonsko razširjenega snopa, ki se širi od nasprotnega zrcala.

Resonatorje, ki zadoščajo gornjima pogojem, imenujemo stabilni resonatorji. Drugi pogoj lahko zapišemo tudi z enačbami, izhajajoč iz enačbe za oceno divergencije (enačba 3.1):

$$\vartheta = \frac{\lambda}{a_1} < \frac{a_2}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1 a_2}{\lambda L} > 1, \quad (4.6)$$

kjer sta  $a_1$  in  $a_2$  polmera zrcala. Izrazu  $F = a_1 a_2 / \lambda L$  pravimo Fresnelovo število (enačba 1.62) in resonator je stabilen pri  $F > 1$ . Laserji imajo pogosto  $F \gg 1$ , lahko tudi  $F \sim 100$ .

### Fabry-Perotov interferometer

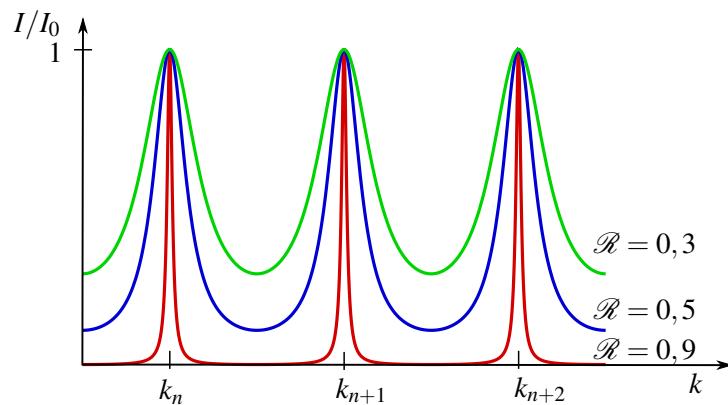
Poglejmo resonator, omejen z dvema vzporednima ravnima zrcaloma z veliko odbojnostjo. Takemu sistemu pravimo Fabry-Perotov interferometer<sup>1</sup>. Da nastane med zrcaloma stoječe valovanje, mora biti razdalja med zrcaloma večkratnik polovične valovne dolžine (enačba 4.2)

$$L = \frac{n\lambda}{2}. \quad (4.7)$$

Prepustnost interferometra za ravni val, ki vpada pravokotno na zrcali z odbojnostjo  $\mathcal{R}$ , lahko izračunamo (glej nalogo 4.1.1). Prepustnost je enaka

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2 kL} \quad (4.8)$$

in je prikazana na sliki (4.2) za tri različne vrednosti  $\mathcal{R}$ .



Slika 4.2: Prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v odvisnosti od valovnega števila  $k$  pri različnih odbojnostih zrcal  $\mathcal{R}$ .

Ko je frekvence vpadnega valovanja ravno enaka lastni frekvenci resonatorja, je sistem v resonanci in  $T = 1$ . Širina resonance se z naraščajočo odbojnostjo zrcal  $\mathcal{R}$  zmanjšuje. Spoznali bomo, da odbojnost zrcal določa tudi čas dušenja vzbujenega lastnega nihanja.

<sup>1</sup>Francoska fizika Maurice Paul Auguste Charles Fabry, 1867–1945, in Jean-Baptiste Alfred Perot, 1863–1925.

**Naloga 4.1.1** Pokaži, da je prepustnost Fabry-Perotovega interferometra, katerega zrcali imata odbojnost  $\mathcal{R}$ , enaka

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2 \delta}, \quad (4.9)$$

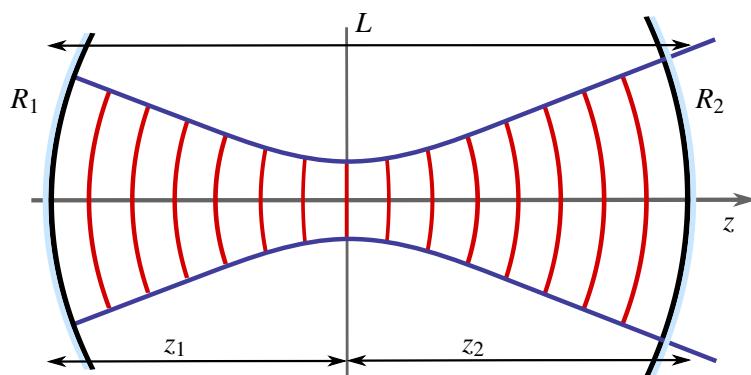
kjer je  $\delta = kL \cos \vartheta$ ,  $L$  razmik med zrcaloma,  $\vartheta$  vpadni kot,  $k$  pa valovno število.

Prvemu pogoju za stabilnost ustrezajo v Fabry-Perotovem interferometru le žarki, ki so natanko pravokotni na zrcali. Čim sta zrcali le malo nevzporedni, stabilnih žarkov sploh ni več. Tak planparallelni interferometer torej deluje na meji stabilnosti. Z izpolnjevanjem drugega pogoja ni težav, saj morata biti pri na primer 30 cm dolgem resonatorju in valovni dolžini 0,5 μm zrcali večji od 0,4 mm, da zadostita pogoju, zapisanem v enačbi (4.6).

Bolj stabilni resonatorji so sestavljeni iz dveh konkavno ukrivljenih zrcal. Tedaj so žarki, ki potujejo pod majhnim kotom glede na osrednjo os, ujeti med zrcaloma in energija lastnih nihanj ostaja lokalizirana blizu osi.

## 4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih

V stabilnih resonatorjih s konkavnima zrcaloma pričakujemo, da so lastna nihanja omejena na bližino osrednje osi in zrcali znatno večji od polmera lastnega nihanja. Tedaj lahko za obravnavo električnega polja uporabimo obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Stopeče valovanje se pojavi, kadar svetloba po odboju od zrcala konstruktivno interferira sama s sabo. Od tod izhaja robeni pogoj, ki pravi, da se oblika valovne fronte stopečega valovanja na zrcalu ujema z obliko zrcala, električno polje na površini zrcala pa je približno enako nič.



Slika 4.3: Gaussov snop v odprtem resonatorju s konkavno ukrivljenima zrcaloma s krivinskimi radijema  $R_1$  in  $R_2$ . V stabilnem resonatorju se krivinski radij čela snopa ujema s krivinskim radijem zrcal. Kadar  $R_1 \neq R_2$ , grlo snopa ne leži na sredini resonatorja.

V prečni smeri omejene rešitve obosne enačbe smo našli v obliki potupočnih Gaussovih snopov (enačba 3.29). Podobno kot lahko zapišemo stopeče valovanje z vsoto valovanj, ki se širita v nasprotnih smereh, lahko stopeče snope zapišemo s superpozicijo snopov, ki se širita v različnih smereh ob osi. Da zadostimo robnim pogojem na zrcalih, se mora krivinski radij valovnih front snopa na zrcalih ujemati s krivinskima radijema zrcal  $R_1$  in  $R_2$  (slika 4.3). Pri tem sta neznanki polmer grla snopa  $w_0$ , ki je povezan s parametrom  $z_0$ , in lega grla.

Postavimo izhodišče osi  $z$  v grlo, kot smo navajeni, tako da sta zrcali pri  $z_1 < 0$  in  $z_2 > 0$ . Uporabimo enačbo za krivinski radij snopa  $R$  (enačba 3.25) in zapišemo

$$-R_1 = z_1 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z_1} \right)^2 \right] \quad \text{in} \quad (4.10)$$

$$R_2 = z_2 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z_2} \right)^2 \right]. \quad (4.11)$$

Pri tem smo upoštevali, da je krivinski radij za konkavno zrcalo glede na pozitivno smer  $z$  pozitiven. Prvo enačbo smo zapisali z negativnim predznakom pri  $R_1$ , zato da je krivinski radij pozitivno število. Veljati mora še

$$z_2 - z_1 = L. \quad (4.12)$$

Iz gornjih enačb najprej izračunamo razdaljo  $z_1$ , ki določa lego grla v resonatorju, nato pa parameter  $z_0$ , ki določa območje bližnjega polja in preko enačbe (3.21) enolično tudi polmer grla

$$z_0^2 = \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}. \quad (4.13)$$

Da je snop realen in omejen, mora biti  $z_0^2 > 0$  in zato števec gornjega izraza pozitiven. Ta pogoj lahko po kratkem računu zapišemo v obliki stabilnostnega kriterija

$$0 < \left( 1 - \frac{L}{R_1} \right) \left( 1 - \frac{L}{R_2} \right) < 1. \quad (4.14)$$

Resonatorji, ki zadoščajo gornjemu pogoju, so stabilni.

---

**Naloga 4.2.1** Izhajajoč iz pogoja, da se na zrcalih krivinski radij valovnih front snopa ujema s krivinskim radijem zrcal (enačbi 4.10 in 4.11), izpelji kriterij za stabilno delovanje resonatorja (enačba 4.14).

---

Stabilnostni kriterij za resonatorje je najbolj nazorno predstaviti na diagramu, kjer na os  $x$  nanašamo  $L/R_1$ , na os  $y$  pa  $L/R_2$ . Na sliki (4.4) je stabilno območje delovanja resonatorjev, kot ga razberemo iz enačbe (4.14), označeno senčeno. Opazimo, da je možnih veliko različnih vrst stabilnih resonatorjev, ob tem da resonatorji, ki so sestavljeni iz dveh konveksnih zrcal, niso nikoli stabilni. Če je eno zrcalo ravno (plankonkavni resonatorji), je grlo Gaussovega snopa vedno na ravnem zrcalu. V primeru konveksno-konkavnega resonatorja leži grlo snopa izven resonatorja. Podrobnejše si oglejmo nekaj posebnih primerov stabilnih resonatorjev.

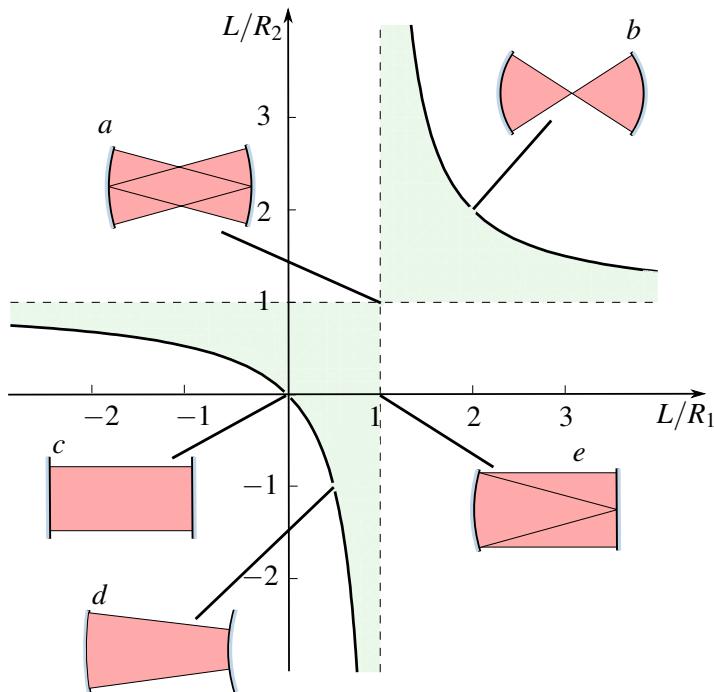
### Simetrični resonatorji

Za simetrični resonator velja  $R_1 = R_2 = R$ . Na diagramu (slika 4.4) se taki resonatorji nahajajo na simetrali lihih kvadrantov pri  $x = y$ . V simetričnih resonatorjih je grlo v sredini resonatorja in enačba (4.13) se poenostavi v

$$z_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(2R - L)L}. \quad (4.15)$$

Polmer grla v simetričnem resonatorju je enak

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \sqrt[4]{(2R - L)L}. \quad (4.16)$$



Slika 4.4: Laserski resonator je stabilen, če sta parametra  $L/R_1$  in  $L/R_2$  znotraj obarvanega območja: (a) konfokalni resonator, (b) koncentrični resonator, (c) planparalelni resonator (Fabry-Perot), (d) konveksno-konkavni resonator in (e) plankonkavni resonator.

Po enačbi (3.19) lahko izračunamo še polmer snopa na ogledalu

$$w_1 = w_0 \sqrt{\left(1 + \left(\frac{L}{2z_0}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \frac{R\sqrt{L}}{\sqrt{2R-L}}}. \quad (4.17)$$

Pri izbrani dolžini simetričnega resonatorja je polmer snopa na zrcalu najmanjši, kadar je  $R = L$ . Tedaj sovpadata geometrijski gorišči obeh zrcal, zato imenujemo tak resonator konfokalni. Hiter račun pokaže, da velja  $z_0 = L/2$ . Dolžina območja bližnjega polja je torej enaka dolžini resonatorja, snop pa se na razdalji od grla do zrcala razširi za  $w_1/w_0 = \sqrt{2}$ .

**Naloga 4.2.2** Pokaži, da je polmer snopa na izhodnem zrcalu v simetričnem resonatorju z danima parametroma  $R$  in  $L$  najmanjši, kadar je resonator konfokalni.

Pri dejanskem načrtovanju laserjev velja dodatna omejitev, saj želimo ojačevalno sredstvo, ki je v resonatorju, čim bolj izkoristiti. Pogosto je zato polmer grla snopa razmeroma velik. Iz enačbe (4.16) sledi, da mora biti v tem primeru velik tudi krivinski radij zrcal. S tem pridobimo na ojačenju, vendar nekoliko poslabšamo stabilnost resonatorja.

Poglejmo primer. Naj bo dolžina resonatorja laserja  $L = 1$  m in valovna dolžina  $\lambda = 633$  nm. Tedaj je v konfokalni geometriji po enačbi (4.16) polmer grla  $w_0 = 0,32$  mm. Premer razelektrične cevi, v kateri pride do ojačanja svetlobe, je navadno nekaj milimetrov in približno tako debel mora biti tudi svetlobni snop, da dobro izkoristi ojačenje zaradi stimuliranega sevanja. Da bi pri isti dolžini laserja dobili grlo s premerom 2 mm, bi morali uporabiti zrcali s krivinskimi radijem okoli 50 m. Primer kaže, da že majhna ukrivljenost zrcal zagotovi dokaj ozke snope.

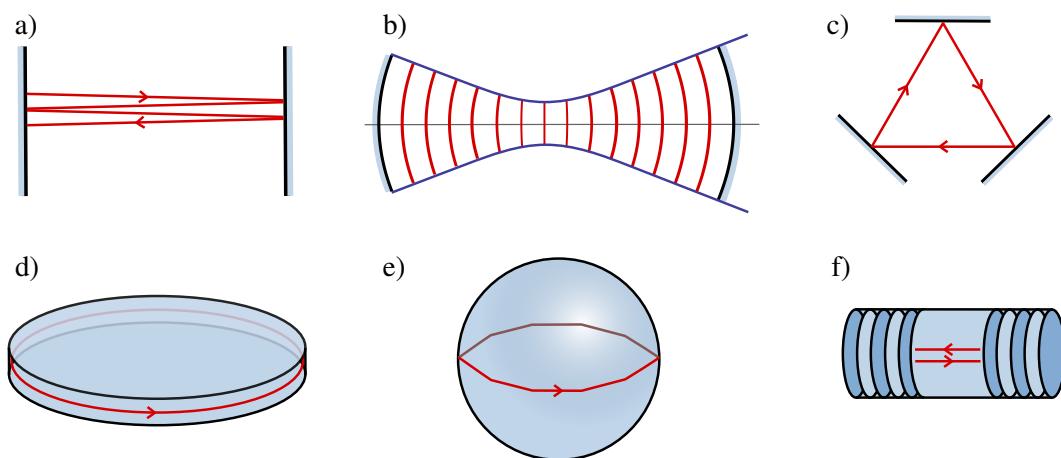
 Izkaže se, da so konfokalni resonatorji najmanj občutljivi na majhne zasuke zrcal. Pri zasušku zrcala se v navadnih stabilnih resonatorjih namreč premakne os, ki gre skozi krivinski središči obeh zrcal. Če želimo, da je največji odmik nove osi kar se da majhen, uporabimo konfokalne resonatorje.

Skrajna primera stabilnega simetričnega resonatorja sta koncentrični resonator, pri katerem sovpadata krivinski središči zrcal in  $L = 2R$ , in planparalelni resonator, pri katerem sta zrcali ravni. V prvem primeru gre po enačbi (4.16) polmer grla proti nič, v drugem pa raste sorazmerno z  $R^{1/4}$ . Pri ravnih zrcalih postanejo uklonske izgube na robovih znatne. Račun z Gaussovimi snopi tedaj ni več veljaven in treba je uporabiti pristope, ki jih bomo opisali v razdelku (4.6).

Poleg osnovnega Gaussovega snopa rešijo obosno enačbo tudi snopi višjega reda. Ti imajo enak parameter  $z_0$  in enako ukrivljenost  $R$ , zato tudi taki snopi predstavljajo rešitve za polje v stabilnih resonatorjih. Vendar je pri enakem  $w_0$  polmer snopa reda  $n$  za približno  $\sqrt{n}$ -krat večji od polmera osnovnega snopa (glej nalogo 3.4.1). Če želimo, da iz laserja izhaja samo osnovni Gaussov snop (ki ima najmanjšo divergenco pri danem  $w_0$ ), pogosto uporabimo zaslonko, ki snope višjih redov poreže, ali kakšen drug element, npr. Fabry-Perotov etalon<sup>2</sup>, ki poveča izgube za snope višjega reda.

 Včasih se uporablja tudi nestabilni resonatorji, za katere ne obstajajo rešitve v obliki Gaussovih snopov. Taki resonatorji imajo velike izgube na robovih zrcal, ker žarki v njih niso ujeti. Uporabni so predvsem v laserjih z velikim ojačanjem. Njihova prednost je, da je cel volumen resonatorja enakomerno pokrit s svetlobo.

Do zdaj smo obravnavali dva primera laserskih resonatorjev: Fabry-Perotov resonator z dvema vzporednima ravnima zrcaloma (slika 4.5 a) in resonator z dvema sferičnima zrcaloma (b). Poleg teh dveh primerov je v uporabi še cela vrsta različnih resonatorjev. Ciklični resonator (c) je sestavljen iz več zrcal in žarek ciklično potuje med njimi. V vlakenskih laserjih je resonator optično vlakno med dvema zrcaloma ali pa sklenjeno vlakno. Kot laserski resonator lahko delujejo tudi mikroploščice (d) ali mikrokroglice (e), v katere je s totalnim odbojem ujeta svetloba. Namesto zrcal se v mikroresonatorjih uporablja periodične dielektrične strukture, na katerih pride do Braggovega odboja valovanja (f).



Slika 4.5: Nekaj primerov različnih oblik resonatorjev

<sup>2</sup>Razlika med Fabry-Perotovim interferometrom in etalonom je v tem, da je interferometer sestavljen iz premičnih zrcal, etalon pa je ploščica z nespremenljivo debelino. Pri izrazu za prepustnost etalona je treba upoštevati še lomni količnik ploščice.

### 4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom

V prejšnjem razdelku smo izpeljali pogoj za stabilnost resonatorja, sestavljenega iz dveh zrcal s krivinskima radijema  $R_1$  in  $R_2$ , ki sta med seboj oddaljeni za  $L$ . Izhajali smo iz pogoja, da se ukrivljenost valovnih front na zrcalu ujema z ukrivljenostjo zrcala. Vendar so sistemi z zgolj dvema zrcaloma razmeroma redki. Pogosto so v resonatorju druge optične komponente, ki jih je treba upoštevati pri zapisu kriterija za stabilnost. Takrat si pomagamo z matrikami ABCD.

Izhajamo iz zahteve, da se v stabilnem resonatorju snop po celotnem obhodu preslika sam vase. Gaussov snop na neki točki v resonatorju zapišemo s kompleksno ukrivljenostjo  $q$  (enačba 3.33). V najpreprostejšem primeru resonatorja snop prepotuje razdaljo do zrcala, se na njem odbije, prepotuje resonator v nasprotni smeri, se odbije od drugega zrcala in se vrne v izhodišče. V bolj zapletenih primerih je treba upoštevati še prehode skozi druge optične elemente. Matriko za celoten prehod zapišemo kot produkt matrik ABCD za posamezne prehode  $M = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1$ . Končni produkt za celoten obhod je matrika oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

kompleksni krivinski radij po obhodu pa je enak začetnemu

$$q_2 = \frac{Aq + B}{Cq + D} = q. \quad (4.19)$$

Gornjo enačbo prepišemo v

$$Cq^2 + (D - A)q - B = 0. \quad (4.20)$$

Da je  $w$  realen, mora biti  $q$  kompleksen (enačba 3.33) in zato diskriminanta kvadratne enačbe negativna

$$(D - A)^2 + 4BC < 0. \quad (4.21)$$

Upoštevamo še, da je determinanta matrike  $AD - BC = 1$  in pogoj za stabilnost zapišemo s koeficienti matrike  $M$

$$-1 < \left( \frac{A+D}{2} \right) < 1. \quad (4.22)$$

**Naloge 4.3.1** Pokaži, da je za resonator z dolžino  $L$  in s konkavnima zrcaloma s krivinskima radijema  $R_1$  in  $R_2$  pogoj za stabilnost (enačba 4.22) ekvivalenten pogoju (4.14).



Podoben, a malo bolj zapleten račun lahko naredimo tudi za resonatorje, v katerih se snop ne vrne v svojo začetno obliko po enem obhodu, ampak je teh obhodov  $n$ . V tem primeru zapišemo matriko  $M$  kot produkt elementov v enem obhodu, celotna matrika pa je enaka  $M^n$ . Iz pogoja, da matrika ne divergira za velike  $n$ , izpeljemo pogoj za stabilnost, ki je natančno enak pogoju (4.22).

#### 4.4 Resonančne frekvence

Doslej smo obravnavali le prostorsko obliko polja v resonatorju, ničesar pa še nismo povedali o časovni odvisnosti lastnih nihanj. Frekvence lastnih nihanj izpeljemo iz pogoja, da se krajevni del faze lastnega nihanja po enem obhodu<sup>3</sup> spremeni za mnogokratnik  $2\pi$ . Krajevni del faze za osnovni snop zapišemo po enačbi (3.29)

$$\phi = kz + \frac{kr^2}{2R} - \eta(z) = kz - \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (4.23)$$

pri čemer smo se omejili na valovanje na osi pri  $r = 0$ . Razlika faze po obhodu je

$$\frac{\omega_n}{c} 2L - 2 \left( \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \right) = 2n\pi. \quad (4.24)$$

Člen v oklepaju je enak za vsa nihanja in le za delček valovne dolžine spremeni efektivno dolžino resonatorja. Ker dolžine resonatorja niti ne poznamo tako natančno, lahko ta prispevek zanemarimo. Iz istega razloga lahko izpustimo tudi spremembo faze na zrcalu. Od tod sledi znana enačba za resonančne frekvence

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{in} \quad v_n = \frac{nc}{2L}. \quad (4.25)$$

Konstantni členi, ki jih pri zapisu frekvence nismo upoštevali, ne vplivajo na razmik med dvema zaporednima lastnima frekvencama. Razlika med zaporednima lastnima frekvencama je tako v skladu z enačbo (4.5)

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \quad \text{in} \quad \Delta v_n = \frac{c}{2L}. \quad (4.26)$$

Za snope višjega reda, ki imajo vozle v prečni smeri, je fazni premik odvisen tudi od števila vozlov. Tako je na primer v cilindričnih koordinatah (enačba 3.39)

$$\eta_{p,l}(z) = (2p+l+1) \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \quad (4.27)$$

Resonančni pogoj zapišemo kot

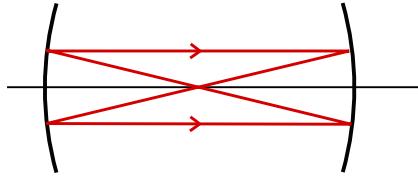
$$\frac{\omega_{n,p,l}}{c} 2L - 2(2p+l+1) \left( \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \right) = 2n\pi. \quad (4.28)$$

Resonančne frekvence so torej odvisne od števila prečnih vozlov (slika 4.7), kar je dodaten razlog, zakaj v laserjih vzbujamo le osnovno lastno nihanje.

Zanimiv in praktično pomemben je primer konfokalnega resonatorja, pri katerem je  $z_0 = L/2$  in  $\arctan(L/2z_0) = \arctan(1) = \pi/4$ . Resonančne frekvence so

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L} \left( n + \frac{1}{2}(2p+l+1) \right) \quad \text{in} \quad v_{n,p,l} = \frac{c}{2L} \left( n + \frac{1}{2}(2p+l+1) \right). \quad (4.29)$$

Snopi, pri katerih je  $2p+l$  liho število, imajo iste resonančne frekvence kot osnovni snopi, pri sodih  $2p+l$  pa se pojavijo še resonance na sredini med osnovnimi. Razmik med sosednjimi frekvencami je tako  $\Delta v = c/4L$  in konfokalni interferometer se obnaša kot dvakrat daljši



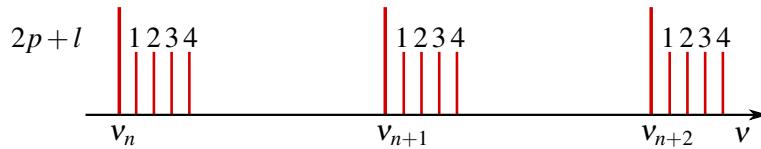
Slika 4.6: V konfokalnem resonatorju se žarek šele po dveh obhodih vrne sam vase.

planparalelni. To lahko razumemo tudi iz geometrijske slike: žarek, ki vstopi v konfokalni resonator ali interferometer vzporedno z osjo, se šele po dveh obhodih vrne sam vase.

Pri skoraj planparalelnem simetričnem resonatorju je  $z_0 \gg L$ . Takrat lahko arctan( $L/2z_0$ ) razvijemo, upoštevamo enačbo (4.15) in zapišemo

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L} \left( n + (2p+l+1) \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2L}{R}} \right). \quad (4.30)$$

Ker je  $L$  majhen v primerjavi z  $R$ , so resonance snopov nizkega prečnega reda zelo blizu resonancam osnovnih snopov. Poglejmo primer. Vzemimo simetrični resonator z dolžino  $L = 1$  m in  $R = 50$  m, valovna dolžina naj bo  $\lambda = 500$  nm. Z uporabo enačbe (4.15) hitro lahko izračunamo  $z_0 = 4,97$  m. Ker je pogoj  $z_0 \gg L$  izpolnjen, lahko uporabimo gornji približek. Razlika med frekvencama dveh osnovnih snopov je  $\Delta\nu_{n,p,l} = 150$  MHz, medtem ko je razlika med frekvencama dveh prečnih snopov  $\Delta\nu_{n,p,l} = 9,5$  MHz.



Slika 4.7: Resonančne frekvence za skoraj planparalelni ( $R \gg L$ ) resonator

## 4.5 Izgube v resonatorjih

Energija lastnega nihanja odprtrega resonatorja ni konstantna, ampak se počasi zmanjšuje. Razlogov je več:

1. Odbojnost zrcal ni enaka 1. Tudi če bi znali narediti popolno odbojna zrcala, tak resonator ne bi bil uporaben, saj nihanja ne bi mogli sklopiti z zunanjim poljem. Če naj torej laser oddaja svetlobo, mora biti odbojnost vsaj enega od zrcal manjša od 1.
2. Na sredstvu in na optičnih elementih v resonatorju pride do absorpcije in sipanja svetlobe. Te izgube želimo navadno kar se da zmanjšati.
3. Uklonske izgube so odvisne od velikosti zrcal in velikosti snopa na njih. Pri dani geometriji imajo najmanjši polmer osnovni snopi. Snopi višjega reda so širši, zato imajo večje uklonske izgube. Merilo za uklonske izgube je Fresnelovo število (enačba 4.6)  $F = a^2/(L\lambda)$ , kjer je  $a$  polmer ogledal. Pri enakem  $F$  je polmer snopa na izhodnem zrcalu najmanjši, če je resonator konfokalni, zato ima tak resonator tudi najmanjše uklonske izgube (glej nalogo 4.2.2). Navadno je  $F$  znatno večji od 1 in so uklonske izgube zanemarljive.

<sup>3</sup>Prelet resonatorja je prehod svetlobe od enega zrcala do drugega, obhod pa imenujemo prelet v obe smeri.

Celotne izgube popišemo z razpadnim časom za energijo

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau} W, \quad (4.31)$$

in

$$W = W_0 e^{-2t/\tau}, \quad (4.32)$$

pri čemer  $\tau$  imenujemo življenjski ali razpadni čas nihanj. Izguba energije na celoten obhod resonatorja je sestavljena iz izgub na zrcalih in drugih (predvsem notranjih) izgub

$$\Delta W = -(1 - \mathcal{R}_1)W - (1 - \mathcal{R}_2)W - \Lambda_0 W = -\Lambda W. \quad (4.33)$$

Z  $\mathcal{R}_1$  in  $\mathcal{R}_2$  smo označili odbojnosti zrcal, od katerih je navadno ena kolikor mogoče blizu 1. Parameter  $\Lambda_0$  popiše absorpcijo in sipanje znotraj resonatorja ter morebitne uklonske izgube. Tipične vrednosti  $\Lambda_0$  so do nekaj stotink. Celotne izgube združimo v parameter  $\Lambda$ .

Razpadni čas nihanja lahko neposredno povežemo z izgubami, če v enačbo (4.31) vstavimo čas enega obhoda  $t = 2L/c$ . Zapišemo

$$\frac{\Delta W}{W} = -\Lambda = -\frac{2}{\tau} \frac{2L}{c}, \quad (4.34)$$

od koder sledi

$$\frac{2}{\tau} = \frac{\Lambda c}{2L} = \frac{2}{\tau_0} + \frac{c}{2L} ((1 - \mathcal{R}_1) + (1 - \mathcal{R}_2)), \quad (4.35)$$

kjer smo s

$$\tau_0 = \frac{4L}{\Lambda_0 c} \quad (4.36)$$

označili razpadni čas zaradi notranjih izgub. Notranje izgube  $\Lambda_0$  so navadno zelo majhne  $\Lambda_0 \sim 0$ , odbojnost enega zrcala je  $\mathcal{R}_1 \sim 1$ , tako da za življenjski čas nihanj približno velja

$$\frac{2}{\tau} = \frac{c}{2L} (1 - \mathcal{R}_2). \quad (4.37)$$

Zaradi dušenja se energija lastnih nihanj eksponentno zmanjšuje, prav tako tudi amplituda jakosti električnega polja, ki pojema s karakterističnim časom  $\tau$ . Spekter eksponentno pojemajoče funkcije lahko izračunamo (glej nalogo 2.4.2) in dobimo Lorentzovo krivuljo s celotno širino črte, ki ustreza ravno

$$2\gamma = \frac{2}{\tau}. \quad (4.38)$$

Lastne krožne frekvence torej niso neskončno ozke, ampak imajo končno širino  $2/\tau$ . Poglejmo primer. Naj bodo notranje izgube na obhod  $\Lambda_0 = 0,01$ , eno zrcalo naj bo idealno, drugo naj ima odbojnost  $\mathcal{R} = 0,93$ . Dolžina resonatorja naj bo  $L = 0,5$  m, valovna dolžina pa 500 nm. Tedaj je  $1/\tau = 12 \cdot 10^6$  s<sup>-1</sup>. Zanimivo je pogledati razmerje med razliko krožnih frekvenc  $\Delta\omega_n$  (enačba 4.5) in širino resonance  $2/\tau$ . Za opisani primer velja  $\Delta\omega_n\tau/2 \approx 80$ .

 Namesto razpadnega časa  $\tau$  se za opis izgub pogosto uporablja dobrota resonatorja, ki jo vpeljemo kot razmerje med resonančno krožno frekvenco in širino črte

$$Q = \frac{\omega_n}{2\gamma} = \frac{\omega_n \tau}{2}. \quad (4.39)$$

Za tipične optične resonatorje je resonančna krožna frekvence  $\omega_n \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$ , širina pa reda  $1/\tau \sim 10^7 \text{ s}^{-1}$ . Faktor dobreote je tako  $Q \sim 10^8$ . Optični resonatorji imajo zelo velike faktorje dobreote!

Poglejmo še primer, ko so notranje izgube zanemarljive in sta odbojnosti obeh zrcal enaki. Potem sledi iz enačbe (4.35)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{2L}(1 - \mathcal{R}). \quad (4.40)$$

Do istega rezultata pridemo tudi z razvojem izraza za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra (enačba 4.8) okoli vrha pri  $\omega_n$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2 L \frac{(\omega - \omega_n)}{c}} \approx \frac{1}{1 + \left( \frac{2}{(1-\mathcal{R})} \frac{L}{c} (\omega - \omega_n) \right)^2}, \quad (4.41)$$

kjer smo upoštevali še, da je odbojnost  $\mathcal{R} \approx 1$ . Rezultat je znana Lorentzova krivulja oblike

$$T = \frac{\gamma^2}{(\omega - \omega_n)^2 + \gamma^2}, \quad (4.42)$$

od koder hitro razberemo znani rezultat (enačba 4.40)

$$\frac{1}{\tau} = \gamma = \frac{c}{2L}(1 - \mathcal{R}). \quad (4.43)$$

## 4.6 \*Obravnavanje resonatorjev z uklonskim integralom

V nestabilnih resonatorjih stacionarna rešitev v obliki stoječega Gaussovega snopa ne obstaja. Zato je v takih resonatorjih rešitev za električno polje precej zahtevno poiskati. Ker pa je problem soroden uklonu, ga lahko obravnavamo z uklonsko teorijo.

Označimo jakost električnega polja v točki  $P_1$  na prvem zrcalu z  $E_1$ . Polje na drugem zrcalu v točki  $P_2$  lahko zapišemo s Kirchhoffovim uklonskim integralom (enačba 1.55)

$$E_2 = -\frac{i}{2\lambda} \int_1 E_1(P_1) \frac{e^{ikr}(1 + \cos \vartheta)}{r} dS_1 \quad (4.44)$$

$$= \int_1 E_1(P_1) K(P_1, P_2) dS_1. \quad (4.45)$$

Integriramo po celotni prvi ploskvi,  $r$  je razdalja med točkama  $P_1$  in  $P_2$ ,  $\vartheta$  pa je kot med zveznicami in normalo na zrcali v osi. Vpeljemo faktor

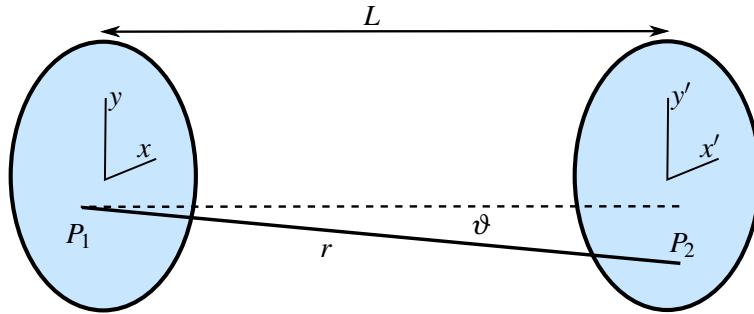
$$K(P_1, P_2) = -\frac{i}{2\lambda} \frac{e^{ikr}(1 + \cos \vartheta)}{r}, \quad (4.46)$$

ki predstavlja jedro integralske enačbe. Polje na prvem zrcalu je na enak način povezano s poljem na drugem. Če naj zapisano polje predstavlja lastno nihanje resonatorja, mora biti po dveh odbojih sorazmerno začetnemu polju

$$E_1(P) = \gamma \int_1 \int_2 E_1(P_1) K(P_1, P_2) K(P_2, P_1) dS_1 dS_2. \quad (4.47)$$

Enačba (4.47) je homogena integralska enačba, katere rešitve so iskana lastna nihanja elektromagnetnega polja v resonatorju. Kompleksne lastne vrednosti  $\gamma$  določajo frekvenco in dušenje nihanj. Na splošno rešitev ni mogoče poiskati analitično in treba je uporabiti numerične metode. Najenostavnejša je iterativna metoda, pri kateri začnemo z nekim začetnim poljem in ponavljamo integracijo v enačbi (4.47), dokler se polje ne spreminja več.

Integralno enačbo (enačba 4.47) je mogoče rešiti v posebnem primeru konfokalnega resonatorja. Privzemimo, da je brez izgub. Resonator je simetričen, zato se polje na obeh zrcalih lahko razlikuje kvečjemu za predznak.



Slika 4.8: Koordinatna sistema na zrcalih resonatorja

Vpeljemo kartezične koordinate na obeh zrcalih, kot kaže slika (4.8). Pričakujemo, da bo prečna razsežnost lastnega nihanja majhna v primerjavi z dolžino resonatorja  $L$ , zato lahko  $r$  razvijemo, pri čemer se kvadratni členi ravno odštejejo zaradi ukrivljenosti zrcal. Ostaneta le še mešana člena

$$r \approx L - \frac{xx' + yy'}{L}. \quad (4.48)$$

V konfokalnem resonatorju je krivinski radij zrcal kar enak dolžini resonatorja. V imenovalcu jedra integrala (enačba 4.46) zato lahko  $r$  nadomestimo z  $L$ . Koti med zveznico točk na obeh zrcalih in normalo na zrcali so majhni, zato je  $\cos \vartheta \approx 1$ .

Tako iz enačbe (4.45) sledi

$$E(x', y') = \pm \frac{ie^{ikL}}{\lambda L} \int E(x, y) \exp\left(\frac{-ik(xx' + yy')}{L}\right) dx dy. \quad (4.49)$$

Integracija poteka po celiem zrcalu. Jedro integrala je produkt dveh faktorjev, ki vsebujejo vsak le  $x'$  ali  $y'$  koordinati. Zato poiščemo rešitev enačbe (4.49) v obliki produkta  $E(x', y') = E_0 f(x') g(y')$ . S tem nastavkom mora funkcija  $f(x')$  zadoščati enačbi

$$\alpha f(x') = \int f(x) \exp\left(\frac{-ikxx'}{L}\right) dx, \quad (4.50)$$

kjer je  $\alpha$  še neznana konstanta. Meje integrala so od enega do drugega roba zrcala. Če je zrcalo dovolj veliko, pričakujemo, da je polje na robu dovolj majhno, da lahko meje vzamemo kar od  $-\infty$  do  $\infty$ . Vpeljemo še brezdimenjski koordinati

$$X = x\sqrt{k/L} \quad \text{in} \quad X' = x'\sqrt{k/L} \quad (4.51)$$

in dobimo

$$\alpha f(X') = \sqrt{\frac{L}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} f(X) e^{-iXX'} dX. \quad (4.52)$$

Enačba (4.52) pravi, da mora biti  $f(X)$  podobna svoji Fourierovi transformiranki. Najpreprostejša funkcija s to lastnostjo je Gaussova funkcija

$$f(X) = \exp\left(-\frac{1}{2}X^2\right). \quad (4.53)$$

Povsem podobno napravimo tudi za  $g(Y')$ . Polje na zrcalu ima tako po pričakovanju obliko Gaussovega snopa

$$E(x, y) = E_0 \exp\left(-\frac{k(x^2 + y^2)}{2L}\right). \quad (4.54)$$

Poglejmo še konstanto  $\alpha$ . Iz enačbe (4.52) sledi, da je njena vrednost  $\alpha = \sqrt{2\pi L/k} = \sqrt{\lambda L}$ . Postavimo izračunano električno poljsko jakost (enačba 4.54) z ustrezeno vrednostjo za  $\alpha$  v enačbo (4.49) in upoštevajmo, da mora biti  $E_2 = \pm E_1$ . Sledi

$$i\alpha^2 \frac{e^{ikL}}{\lambda L} = ie^{ikL} = \pm 1. \quad (4.55)$$

Iz gornjega izraza izpeljemo resonančni pogoj za frekvenco lastnega nihanja in izračunamo razliko med dvema lastnima krožnima frekvencama, ki jo že poznamo (enačba 4.26)

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L}. \quad (4.56)$$

Integralska enačba iz uklonske teorije tako da isti rezultat kot obosna valovna enačba. To nas seveda ne preseneča, saj je obosna valovna enačba enako natančna kot Fresnelova uklonska teorija.

---

**Naloga 4.6.1** Pokaži, da so funkcije, ki so sorazmerne svoji Fourierovi transformaciji, Hermite-Gaussove funkcije (enačba 3.34), in izračunaj lastne frekvence nihanj višjega reda.

---

## 4.7 \*Sklopitev resonatorja z okolico

Na začetku poglavja smo omenili, da resonatorjev ne uporabljamo le pri izdelavi laserjev, ampak lahko služijo tudi kot frekvenčni in prostorski filtri za svetlobno valovanje. Povezano med lastnimi nihanji resonatorja in prepustnostjo ter odbojnostjo za valovanje, ki na resonator vpada, bomo poiskali s formalizmom sklapljanja valovanj, ki je neke vrste perturbacijska analiza in je pogosto zelo uporaben.

Začnimo z resonatorjem z idealno odbojnimi stenami brez notranjih izgub. Stojče lastno valovanje v resonatorju zapišemo kot produkt krajevnega in časovnega dela

$$E(\mathbf{r}, t) = f(t)g(\mathbf{r}). \quad (4.57)$$

Krajevni del  $g(\mathbf{r})$  naj bo normiran tako, da je  $\int g^2 dV = 1$ . Iz valovne enačbe (enačba 1.13) sledi, da mora časovni del zadoščati nihajni enačbi drugega reda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_n^2 f = \ddot{f} + \omega_n^2 f = 0. \quad (4.58)$$

Vpeljemo novo kompleksno spremenljivko  $a$ , ki je kombinacija funkcije  $f$  in njenega časovnega odvoda

$$a = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}(f + \frac{i}{\omega_n}\dot{f}). \quad (4.59)$$

Izbira predfaktorja bo razvidna v nadaljevanju. Z odvajanjem in uporabo nihajne enačbe (enačba 4.58) ugotovimo, da za  $a$  velja diferencialna enačba

$$\dot{a} = -i\omega_n a. \quad (4.60)$$

Funkcija  $a$  ima preprosto časovno odvisnost  $e^{-i\omega_n t}$ .

Poglejmo elektromagnetno energijo v resonatorju. Električni del energije polja, ki je ravno polovica celotne energije, zapišemo kot

$$W_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int E^2 dV = \frac{1}{2}\epsilon_0 f^2 \int g^2 dV = \frac{1}{4}(a + a^*)^2. \quad (4.61)$$

V spremenljivki  $a$  in konjugirani spremenljivki  $a^*$  prepoznamo klasično obliko anihilacijskih in kreacijskih operatorjev v kvantno-mehanskem opisu harmonskega oscilatorja.

Celotna energija lastnega nihanja resonatorja je po analogiji iz kvantne mehanike enaka

$$W = |a|^2. \quad (4.62)$$

Vpeljana nova spremenljivka  $a(t)$  je sorazmerna z  $e^{-i\omega_n t}$ , zato ji pravimo tudi komponenta amplitude s pozitivno frekvenco. Prednost uporabe spremenljivke  $a$  je v preprostejših enačbah, ki so le prvega reda.

Izgube v resonatorju opišemo z dodatnim členom v enačbi (4.60)

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a. \quad (4.63)$$

V taki obliki lahko zapišemo enačbo le, kadar so izgube majhne. Če niso, je treba uporabiti navadno nihajno enačbo drugega reda. Gornji približek namreč ne vsebuje zmanjšanja nihajne frekvence pri velikem dušenju. Prehod na dve nesklopljeni enačbi prvega reda za  $a$  in  $a^*$  je točen le, kadar ni izgub. Izgube sklopijo enačbi za  $a$  in  $a^*$ , vendar smo v našem približku to sklopitev zanemarili.

Naj bo odbojnosc enega zrcala resonatorja nekoliko manjša od 1. Izgube v resonatorju potem opišemo kot (enačba 4.37)  $1/\tau = (1 - \mathcal{R})c/(4L)$ . Druga posledica zmanjšane odbojnosti je sklopitev resonatorja z okolico. To pomeni, da valovanje izhaja iz resonatorja, po drugi strani pa to pomeni tudi, da je lastno nihanje mogoče vzbujati z valovanjem, ki na resonator vpada.

Naj  $s_+$  opiše snop valovanja, ki vpada na resonator. Amplituda  $s_+$  naj bo izbrana tako, da je  $|s_+|^2$  enako moči vpadnega valovanja. Zaenkrat tudi zanemarimo notranje izgube resonatorja. Potem lahko zapišemo

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a + \kappa s_+, \quad (4.64)$$

kjer je  $\kappa$  sklopitveni koeficient med vpadnim valovanjem in amplitudo lastnega nihanja. Koeficient  $\kappa$  je določen s prepustnostjo zrcala, ki pa je vsebovana tudi v  $1/\tau$ . Koeficient  $\kappa$  torej ni neodvisen in poiščimo zvezo med  $\kappa$  in  $1/\tau$ .

Naj ima vpadno valovanje krožno frekvenco  $\omega$ . Tedaj lahko iz enačbe (4.64) izračunamo amplitudo nihanja v stacionarnem stanju. Upoštevamo, da mora imeti v stacionarnem stanju nihanje enako frekvenco kot vpadni val. Sledi

$$a = \frac{\kappa s_+}{i(\omega_n - \omega) + 1/\tau}. \quad (4.65)$$

Označimo del valovanja, ki se od resonatorja odbije ali iz njega izvira, s  $s_-$ . Če vpadnega vala ni, energija nihanja pojema zaradi odtekanja v  $s_-$ . Ohranitev energije da

$$-\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}|a|^2 = \frac{2}{\tau}|a|^2 = |s_-|^2 \quad (4.66)$$

ali

$$|s_-| = \sqrt{\frac{2}{\tau}}|a|, \quad (4.67)$$

kjer smo fazo  $s_-$  priredili z izbiro referenčne ravnine, v kateri opazujemo  $s_-$ .

Ob prisotnosti vpadnega vala  $s_+$  lahko izhajajoči val zapišemo kot vsoto direktnega odboja vpadnega vala  $s_+$  in prispevka iz resonatorja

$$s_- = rs_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau}}a, \quad (4.68)$$

kjer  $r$  zaenkrat še ne poznamo. Ker ni notranjih izgub, mora biti v stacionarnem stanju vpadna moč enaka izhajajoči

$$|s_+|^2 = |s_-|^2. \quad (4.69)$$

Uporabimo še izraz za stacionarno vrednost  $a$  (enačba 4.65) in zapišemo enakost

$$r^2 + \frac{2(\tau\kappa^2 + r\kappa\sqrt{2\tau})}{1 + \tau^2(\omega_n - \omega)^2} = 1. \quad (4.70)$$

Gornja enačba mora veljati pri vsaki krožni frekvenci  $\omega$ , to je pri vsaki vrednosti imenovalca ulomka. Zato mora biti  $r^2 = 1$  in  $\tau\kappa = -r\sqrt{2\tau}$ . Ker sta  $\tau$  in  $\kappa$  pozitivna, je  $r = -1$  in

$$\kappa = \sqrt{\frac{2}{\tau}}. \quad (4.71)$$

Odbito valovanje lahko torej zapišemo

$$s_- = -s_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau}}a. \quad (4.72)$$

Z upoštevanjem notranjih izgub (enačba 4.36) se amplituda nihanja spremeni v

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau} \right) a + \sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+. \quad (4.73)$$

Enačbi (4.72) in (4.73) sta osnovna izraza za sklapljanje resonatorjev z enim vhodom. Za primer uporabe izračunajmo odbojnost resonatorja  $s_-/s_+$  kot funkcijo frekvence vpadnega vala. V enačbo (4.72) vstavimo izraz za stacionarno vrednost amplitude nihanja

$$a = \frac{\sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+}{i(\omega_n - \omega) + (\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau})}. \quad (4.74)$$

Sledi

$$\frac{s_-}{s_+} = \frac{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} - i(\omega_n - \omega)}{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_0} + i(\omega_n - \omega)}. \quad (4.75)$$

Daleč od resonance je odbojnost -1. V resonanci (pri  $\omega_n = \omega$ ) odboja ni, kadar je  $\tau = \tau_0$ . Takrat je moč, ki gre iz vpadnega valovanja v vzbujanje resonatorja, največja in je sklopitev, ki jo meri  $\tau$ , popolnoma prilagojena izgubam. Taka prilagoditev je analogna zahtevi, da mora biti impedanca bremena na koncu valovoda ali koaksialnega kabla enaka impedanci valovoda oziroma kabla.

Če sta obe zrcali resonatorja delno prepustni, kot na primer pri Fabry-Perotovem interferometru, je enačba za amplitudo nihanja

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) a + \kappa_1 s_{+1} + \kappa_2 s_{+2}, \quad (4.76)$$

kjer sta  $s_{+1}$  in  $s_{+2}$  valovanji, ki vpadata z ene in druge strani. Izgube zaradi končne prepustnosti so

$$\frac{1}{\tau_{1,2}} = \frac{c}{4L} (1 - \mathcal{R}_{1,2}). \quad (4.77)$$

S podobnim razmislekom kot prej, s tem da postavimo najprej eno, nato drugo vpadno valovanje na nič, dobimo

$$\kappa_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{\tau_{1,2}}}. \quad (4.78)$$

Prepustnost resonatorja – oziroma razmerje med močjo vpadnega valovanja na eni strani in izhodnega na drugi – je

$$T = \frac{|s_{-2}|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{2}{\tau_2} \frac{|a|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{4\tau_c^2 / \tau_1 \tau_2}{1 + \tau_c^2 (\omega_n - \omega)^2}, \quad (4.79)$$

kjer je  $1/\tau_c = 1/\tau_0 + 1/\tau_1 + 1/\tau_2$ . Če ni notranjih izgub, je prepustnost v resonanci

$$T = \frac{4/\tau_1 \tau_2}{(1/\tau_1 + 1/\tau_2)^2}. \quad (4.80)$$

Prepustnost je v resonanci popolna, če sta obe zrcali enaki in  $\tau_1 = \tau_2$ . Gornja izraza se ujemata z znanim izrazom za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v bližini resonanc, če so izgube in prepustnost zrcal majhne (enačbi 4.8 in 4.42).

Resonatorji imajo mnogo lastnih nihanj. Očitno veljajo gornji izrazi za vsako lastno nihanje posebej in celoten odziv resonatorja na poljubno vpadno valovanje zapišemo kot vsoto po vseh lastnih nihanjih. Pri tem ne smemo pozabiti, da mora vpadno valovanje, ki se sklaplja z izbranim lastnim nihanjem, imeti prostorsko odvisnost, ki ustrezha lastnemu stanju. V primeru stabilnih resonatorjev iz prejšnjih razdelkov mora torej biti vpadni snop Gaussov z enakim  $w_0$  in istega prečnega reda kot resonatorsko stanje. Če vpadno valovanje ni tako, ga najprej razvijemo po Gaussovih snopih, ki ustrezajo resonatorju. Pri zahtevnejših interferometričnih meritvah je treba za vzbujanje le ene resonance vpadni snop prilagoditi resonatorju, tako da je polmer na vhodnem zrcalu enak polmeru lastnega nihanja, krivinski radij vpadne valovne fronte pa enak krivinskemu radiju zrcala.

Resonator pa ne deluje le kot frekvenčni filter, ampak tudi kot prostorski. Če ima vpadno valovanje isto frekvenco kot eno od nihanj resonatorja, ima prepuščeno valovanje obliko Gaussovega snopa, kot jo določa resonator, ne glede na obliko vpadnega snopa.

Gornji način obravnave resonatorjev in sklopitve z vpadnim valovanjem je posebej prikladen za račun nestacionarnega obnašanja in za primer, ko je resonator napolnjen z nelinearnim sredstvom.

## 4.8 \*Sklopitev dveh resonatorjev

Podobno kot sklopitev z zunanjim valovanjem lahko obravnavamo tudi sklopitev med dvema resonatorjema. Naj bosta dva resonatorja brez izgub sklopljena z delno prepustnim zrcalom. Sklopitev naj bo šibka, tako da lahko zapišemo

$$\dot{a}_1 = -i\omega_1 a_1 + \kappa_{12} a_2 \quad (4.81)$$

$$\dot{a}_2 = -i\omega_2 a_2 + \kappa_{21} a_1. \quad (4.82)$$

Zaradi ohranitve energije sklopitvena koeficijenta  $\kappa_{12}$  in  $\kappa_{21}$  nista neodvisna. Vsota energij obeh resonatorjev mora biti konstantna, zato

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(|a_1|^2 + |a_2|^2) &= a_1 \dot{a}_1^* + a_1^* \dot{a}_1 + a_2 \dot{a}_2^* + a_2^* \dot{a}_2 \\ &= a_1^* \kappa_{12} a_2 + a_1 \kappa_{12}^* a_2^* + a_2^* \kappa_{21} a_1 + a_2 \kappa_{21}^* a_1^* \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Veljati mora torej

$$\kappa_{12} + \kappa_{21}^* = 0. \quad (4.84)$$

Poglejmo primer dveh sklopljenih resonatorjev, pri čemer je v drugem resonatorju vzbujeno stoeče valovanje. Moč tistega dela, ki potuje proti prvemu resonatorju, je polovica energije, deljena s časom preleta od enega zrcala do drugega

$$|s_+|^2 = \frac{1}{2} |a_2|^2 \frac{c}{L}. \quad (4.85)$$

Sledi

$$\kappa_{12} a_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau}} s_+ = \sqrt{\frac{c}{\tau L}} a_2, \quad (4.86)$$

tako da je

$$\kappa_{12} = \frac{c}{2L} \sqrt{1 - \mathcal{R}} \quad \text{in} \quad \kappa_{21} = -\kappa_{12}. \quad (4.87)$$

Zaradi sklopitve se spremenijo lastne frekvence resonatorjev. Poglejmo dva enaka sklopljena resonatorja

$$\dot{a}_1 = -i\omega_0 a_1 + \kappa_{12} a_2 \quad (4.88)$$

$$\dot{a}_2 = -i\omega_0 a_2 - \kappa_{12} a_1. \quad (4.89)$$

Iščemo rešitve oblike  $A_i e^{-i\omega t}$ . Če uporabimo ta nastavek v gornjih diferencialnih enačbah, dobimo homogen linearen sistem za  $A_1$  in  $A_2$ , ki je netrivialno rešljiv, če je determinanta sistema enaka nič. Ta pogoj da enačbo za krožno frekvenco

$$(\omega - \omega_0)^2 = \kappa_{12}^2 \quad (4.90)$$

in

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \kappa_{12}. \quad (4.91)$$

Zaradi sklopitve sta se prej enaki frekvenci resonatorjev razcepili v dve, kot smo lahko pričakovali. Velikost razcepa je odvisna od odbojnosti zrcala in časa preleta resonatorja (enačba 4.87).

## 5. Interakcija svetlobe s snovjo

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali svetlobo v praznem prostoru. Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. To je seveda zelo obširna tema in jo bomo obdelali le v obsegu, potrebnem za razumevanje ojačevanja svetlobe s stimulirano emisijo, kar je osnova za delovanje laserjev. Najprej bomo na kratko pogledali termodinamsko ravnovesje svetlobe v stiku s toplotnim zalogovnikom, torej sevanje črnega telesa, ki zahteva kvantno obravnavo elektromagnetnega polja. Nato bomo vpeljali fenomenološki Einsteinov opis mikroskopskih procesov absorpcije, spontane in stimulirane emisije in pokazali, da ti procesi niso neodvisni. Izpeljali bomo izraze za absorpcijski koeficient in koeficient ojačenja, na koncu poglavja pa bomo nakazali še kvantomehansko izpeljavo verjetnosti za prehod atoma iz višjega energijskega stanja v nižje s sevanjem.

### 5.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja

Ravni valovi so enostavne in zelo prikladne rešitve valovne enačbe (enačba 1.13), zato jih pogosto uporabimo za bazo, po kateri razvijemo elektromagnetno polje. Možen je razvoj po celotnem prostoru, vendar je tedaj nekoliko nerodna normalizacija baznih funkcij. Če se omejimo na le del prostora, se temu problemu izognemo. Mora pa biti izbrani del prostora dovolj velik, da končni rezultat ni odvisen od izbire njegove velikosti in oblike.

Najpreprosteje je vzeti votlino v obliki velike kocke s stranico  $L$  in idealno prevodnimi stenami. Rešitve Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) znotraj take votline so ob upoštevanju robnih pogojev (enačbe 1.9–1.12) stoječa valovanja. Zapišemo jih v obliki

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos \frac{\pi l x}{L} \sin \frac{\pi m y}{L} \sin \frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t} \\ E_y &= E_{y0} \sin \frac{\pi l x}{L} \cos \frac{\pi m y}{L} \sin \frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t} \\ E_z &= E_{z0} \sin \frac{\pi l x}{L} \sin \frac{\pi m y}{L} \cos \frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

kjer so  $l, m$  in  $n$  cela števila. Vsako stoječe valovanje je določeno z valovnim vektorjem

$$\mathbf{k} = \left( \frac{\pi l}{L}, \frac{\pi m}{L}, \frac{\pi n}{L} \right), \quad (5.2)$$

katerega velikost je povezana s krožno frekvenco  $|\mathbf{k}| = k = \omega/c$ . Iz Maxwellove enačbe za prazen prostor  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  (enačba 1.3) sledi  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ . Za vsako trojico števil  $l, m$  in  $n$  obstajata tako dve neodvisni polarizaciji.

---

**Naloga 5.1.1** Pokaži, da stoječe valovanje, zapisano z enačbami (5.1), reši valovno enačbo (enačba 1.13) v kocki s stranico  $L$  in zadosti robnim pogojem idealno prevodnih sten votline.

---

Preštejmo, koliko je stoječih valovanj oziroma lastnih nihanj v intervalu velikosti valovnega vektorja med  $k$  in  $k + dk$  – to smo na hitro naredili že pri obravnavni resonatorjev (enačba 4.1). Možni valovni vektorji tvorijo tridimenzionalno mrežo v prvem oktantu prostora vseh valovnih vektorjev. Razmik med dvema zaporednima mrežnima točkama v smeri ene od osi je  $\pi/L$ . Število točk v osmini krogelne lupine med  $k$  in  $k + dk$  je za dovolj velike  $l, m$  in  $n$  enako prostornini lupine, deljeni s prostornino, ki pripada posamezni mrežni točki, to je  $(\pi/L)^3$ . Upoštevati moramo še, da sta pri vsakem  $\mathbf{k}$  dovoljeni dve polarizaciji, zato

$$dN = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \pi k^2 dk. \quad (5.3)$$

Zapišemo število lastnih nihanj na enoto volumna

$$\frac{dN}{V} = \frac{k^2}{\pi^2} dk \quad (5.4)$$

in ga prevedemo na frekvenčno odvisnost

$$\frac{dN}{V} = \frac{8\pi v^2}{c^3} dv = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \quad (5.5)$$

Vpeljemo gostoto stanj  $\rho(\omega)$ , to je število lastnih nihanj na frekvenčni interval<sup>1</sup> na enoto volumna votline

$$\rho(\omega) = \frac{dN}{V d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (5.6)$$

Vsote po lastnih nihanjih, to je po dovoljenih vrednostih valovnega števila  $k$ , lahko z uporabo gostote stanj spremenimo v integrale po  $k$  ali po  $\omega$

$$\sum_k \dots \Rightarrow V \int \rho(k) \dots dk = V \int \rho(\omega) \dots d\omega. \quad (5.7)$$

Označimo brezdimenzijski krajevni del rešitve (enačbe 5.1) z  $\mathbf{E}_\alpha$ , kjer  $\alpha$  označuje trojico števil  $l, m$  in  $n$  in še obe možni polarizaciji. Pripadajoče magnetno polje izračunamo z Maxwellovo enačbo (enačba 1.2)

$$\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = i\omega_\alpha \mathbf{B}_\alpha. \quad (5.8)$$

Polja  $\mathbf{E}_\alpha$  in  $\mathbf{B}_\alpha$  tvorijo poln ortogonalen sistem, zato jih lahko uporabimo za razvoj poljubnega elektromagnetskega polja v votlini

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\sqrt{V\epsilon_0}} \sum_\alpha p_\alpha(t) \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \quad \text{in} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\frac{\mu_0}{V}} c_0 \sum_\alpha \omega_\alpha q_\alpha(t) \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{r}). \quad (5.10)$$

Vstavimo splošen razvoj (enačbi 5.9 in 5.10) v Maxwellove enačbe (enačbi 1.1 in 1.2), upoštevamo zvezo (enačba 5.8) in njej analogno za rotor magnetnega polja. Sledi

$$p_\alpha = \dot{q}_\alpha \quad \text{in} \quad \omega_\alpha^2 q_\alpha = -\dot{p}_\alpha, \quad (5.11)$$

od koder sledi še

$$\ddot{p}_\alpha + \omega_\alpha^2 p_\alpha = 0. \quad (5.12)$$

Ta enačba da seveda pričakovano časovno odvisnost oblike  $e^{-i\omega_\alpha t}$ .

---

<sup>1</sup>V tem poglavju bomo ohlapno uporabljali besedo frekvenca tudi za krožno frekvenco. Iz zapisa bo vedno jasno, za katero frekvenco gre.

**Naloga 5.1.2** Uporabi razvoj polja (enačbi 5.9 in 5.10) in iz Maxwellovih enačb izpelji enačbo (5.12).

Z upoštevanjem razvoja (enačbi 5.9 in 5.10) in ob ustreznji normalizaciji zapišemo energijo polja ali Hamiltonovo funkcijo<sup>2</sup>

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}) dV = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2). \quad (5.13)$$

Gornji zapis (enačbi 5.12 in 5.13) kaže, da lahko elektromagnetno polje v votlini obravnavamo kot sistem neodvisnih enodimenzionalnih harmonskih oscilatorjev. Pri tem se koeficienti razvoja  $p_{\alpha}$  in  $q_{\alpha}$  obnašajo kot gibalne količine in koordinate.

Prehod v kvantno mehaniko dosežemo tako, da klasičnim spremenljivkam gibalne količine in koordinate priredimo operatorje  $\hat{p}_{\alpha}$  in  $\hat{q}_{\alpha}$ , ki morajo zadoščati komutacijskim pravilom

$$[\hat{q}_{\alpha}, \hat{p}_{\beta}] = i\hbar \delta_{\alpha, \beta}. \quad (5.14)$$

Iz kvantne mehanike vemo, da so lastne vrednosti energije posameznega harmonskega oscilatorja, opisanega s Hamiltonovo funkcijo (enačba 5.13), diskretne. Njihove vrednosti so enake

$$W_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (5.15)$$

**Razlici energije harmonskega oscilatorja, če se  $n$  spremeni za 1, pravimo foton.** Energija fotona je tako enaka  $\hbar\omega$ ,  $n$  pa predstavlja število fotonov. Celotna energija kvantiziranega elektromagnetnega polja v votlini je vsota prispevkov posameznih oscilatorjev, pri čemer ničelno energijo zanemarimo

$$W = \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha} n_{\alpha}. \quad (5.16)$$

Tudi v nadaljevanju bomo ničelno energijo izpuščali, saj je to energija osnovnega stanja, ki se ne more sprostiti.

 Vidna svetloba z valovno dolžino 500 nm ima frekvenco  $v = 6 \cdot 10^{14}$  Hz. Ustrezna energija fotona je  $W = 4 \cdot 10^{-19}$  J oziroma  $W = 2,5$  eV. To vrednost si velja zapomniti.

## 5.2 Sevanje črnega telesa

Obravnavajmo sevanje v votlini, ki je v toplotnem ravovesju s stenami s temperaturo  $T$ . Iz statistične fizike vemo, da verjetnost  $P$ , da je v izbranem lastnem stanju votline število fotonov enako  $n$ , zapišemo z Boltzmannovo porazdelitvijo

$$P(n) = \frac{e^{-W_n/k_B T}}{\sum_n e^{-W_n/k_B T}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega n}}{\sum_n e^{-\beta\hbar\omega n}} = e^{-\beta\hbar\omega n}(1 - e^{-\beta\hbar\omega}), \quad (5.17)$$

pri čemer je  $\beta = 1/k_B T$  in  $k_B$  Boltzmannova konstanta.

<sup>2</sup>Irski matematik Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865.

Povprečno število fotonov v tem stanju je potem

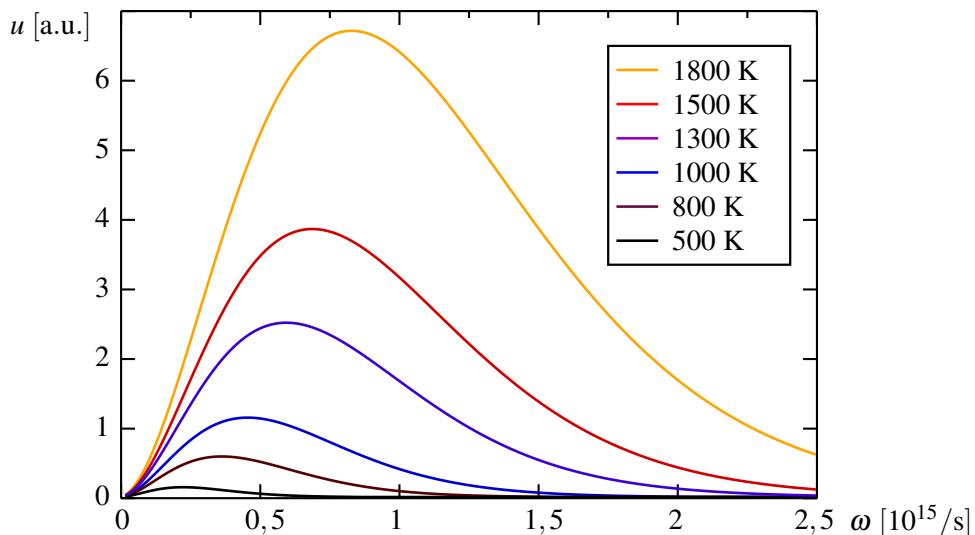
$$\langle n \rangle = \sum_n n P(n) = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}. \quad (5.18)$$

Povprečno energijo izbranega lastnega stanja zapišemo kot produkt energije enega fotona in povprečnega števila fotonov

$$\langle W \rangle = \hbar \omega \langle n \rangle = \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}. \quad (5.19)$$

Ravnovesno gostoto energije elektromagnetnega polja v votlini na frekvenčni interval izračunamo tako, da povprečno energijo posameznega stanja pomnožimo z gostoto stanj  $\rho(\omega)$  (enačba 5.6). Dobimo znan izraz za energijo na enoto volumna na enoto frekvence, to je Planckov zakon<sup>3</sup>. Planckov zakon opiše spektralno gostoto energije svetlobe  $u$ , izsevane iz črnega telesa, ki je v toplotnem ravovesju z okolico s temperaturo  $T$

$$u(\omega) = \hbar \omega \langle n \rangle \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}. \quad (5.20)$$



Slika 5.1: Planckov spekter za sevanje črnega telesa pri različnih temperaturah

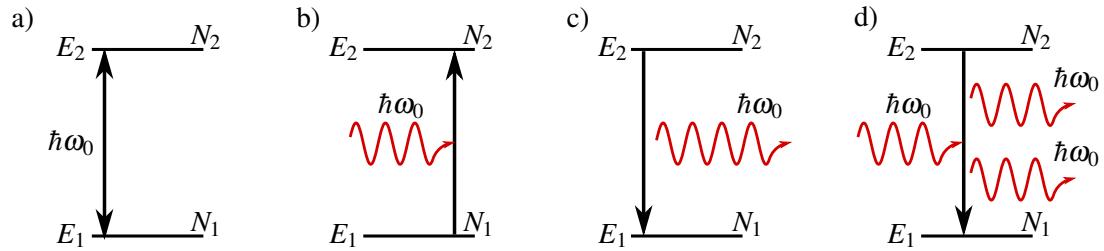
### 5.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje

Oglejmo si osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. Naj bo v votlini poleg elektromagnetnega polja še  $N$  atomov, ki se med seboj ne motijo. Za začetek naj bodo atomi prav enostavnii: imajo naj le dva energijska nivoja z energijama  $E_1$  in  $E_2$  (slika 5.2 a). Pri tem naj bo  $E_2$  višja energija od  $E_1$ , razlika med njima pa naj bo

$$E_2 - E_1 = \hbar \omega_0. \quad (5.21)$$

Zaradi interakcije s poljem atomi prehajajo iz nižjega nivoja v višji in obratno. Prehajanje med nivojema opisujejo trije procesi: absorpcija, spontano sevanje in stimulirano sevanje.

<sup>3</sup>Nemški fizik in nobelovec Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947.



Slika 5.2: Shema energijskih nivojev dvonivojskega atoma (a) in treh vrst prehodov med njima: absorpcija (b), spontano sevanje (c) in stimulirano sevanje (d).

### Absorpcija fotona

Absorpcija fotona je prehod, pri katerem se foton z ustrezeno energijo absorbira, atom pa preide iz nižjega energijskega nivoja v višje (slika 5.2 b). Verjetnost za prehod na časovno enoto, ki jo označimo z  $r_{12}$ , je sorazmerna spektralni gostoti energije polja  $u(\omega)$ , to je energiji na enoto volumna in frekvenčni interval, pri frekvenci prehoda  $\omega_0$ . Sorazmernostni koeficient označimo z  $B_{12}$  in zapišemo

$$r_{12} = B_{12}u(\omega_0). \quad (5.22)$$

To je enostavno razumeti. Več kot je fotonov v votlini pri frekvenci prehoda, več fotonov se lahko absorbira in večja je verjetnost za prehod. Pri absorpciji se seveda število fotonov v enem od lastnih stanj polja pri frekvenci  $\omega_0$  zmanjša za ena.

### Spontano sevanje

Atom v vzbujenem stanju ni stabilen, temveč prej ali slej spontano preide v osnovni nivo. Temu pojavu pravimo spontano sevanje ali spontana emisija (slika 5.2 c).

Pri spontanem sevanju je foton izsevan v katerokoli stanje polja v bližini frekvence prehoda. Smer izsevane svetlobe je poljubna, v odsotnosti zunanjega polja pa je poljubna tudi polarizacija izsevane svetlobe. Verjetnost za prehod na časovno enoto označimo z  $A_{21}$ . Za dovoljene prehode je vrednost  $A_{21} \sim 10^6\text{--}10^8/\text{s}$ , za prepovedane pa okoli  $\sim 10^4/\text{s}$ . Karakteristični (naravni) razpadni čas vzbujenega stanja vpeljemo kot  $\tau = 1/A_{21}$ .

Zaradi končnega življenjskega časa ima vzbujeno stanje končno spektralno širino. Če ni Dopplerjeve razširitve, je atomska spektralna črta  $g$  najpogosteje kar Lorentzove oblike z vrhom pri  $\omega_0$  (enačba 2.21)

$$g(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \quad (5.23)$$

Funkcija  $g(\omega)$  je normirana

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = 1, \quad (5.24)$$

za grobe ocene pa se funkcijo  $g$  pogosto nadomesti s pravokotnikom širine  $2\gamma$  in višine  $1/2\gamma$ .

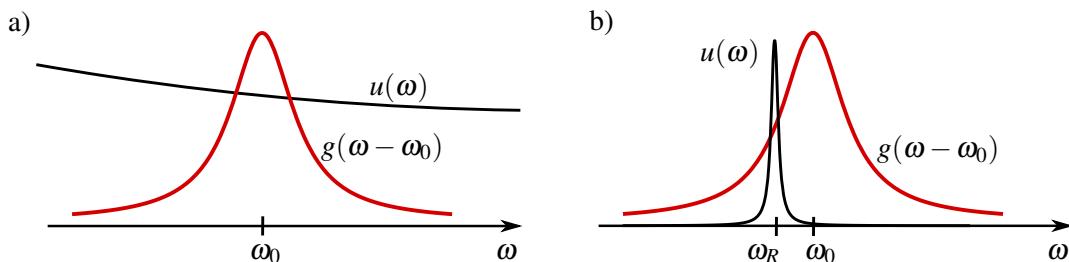
### Stimulirano sevanje

Tretji pojav je prehod atoma iz višjega nivoja v nižjega zaradi interakcije s poljem. Temu procesu pravimo stimulirano sevanje ali stimulirana emisija. Tudi verjetnost za stimuliran prehod na časovno enoto  $r_{21}$  je sorazmerna s spektralno gostoto energije polja pri frekvenci prehoda  $\omega_0$

$$r_{21} = B_{21}u(\omega_0). \quad (5.25)$$

V tem primeru smo sorazmernostni koeficient označili z  $B_{21}$ . Kadar pride do stimuliranega sevanja, se število atomov v vzbujenem stanju zmanjša, število fotonov v stanju, ki je prehod povzročilo, pa se poveča. Izsevana svetloba ima enako fazo, frekvenco, polarizacijo in smer potovanja kot vpadna. Tipične vrednosti parametra so  $B_{21} \sim 10^{16}\text{--}10^{20} \text{ m}^3/\text{Js}^2$ .

Pomudimo se še nekoliko pri izrazih za absorpcijo (enačba 5.22) in za stimulirano emisijo (enačba 5.25). Zapisani enačbi veljata le, kadar je spektralna gostota elektromagnetnega polja  $u(\omega)$  preko celotne spektralne širine prehoda približno konstantna (slika 5.3 a). To je gotovo res, če obravnavamo sevanje v votlini, ki je v termičnem ravnovesju z okolico (črno telo).



Slika 5.3: Pri izračunu verjetnosti za absorpcijo in stimulirano emisijo je pomembna oblika spektralne gostote vpadnega elektromagnetnega polja  $u(\omega)$ . V prvem primeru je bistveno širša (a), v drugem pa bistveno ožja (b) od širine atomske spektralne črte  $g(\omega - \omega_0)$ .

V splošnem primeru, ko se spekter vpadne svetlobe spreminja v območju atomske spektralne črte, moramo seštevati prispevke po ozkih frekvenčnih intervalih

$$r_{12} = B_{12} \int g(\omega - \omega_0) u(\omega) d\omega. \quad (5.26)$$

Gornji zapis preverimo na primeru spektra črnega telesa, ki se ne spreminja dosti v območju prehoda. Takrat  $u(\omega_0)$  postavimo pred integral in po pričakovovanju dobimo znano zvezo (enačba 5.22).

Če na atome svetimo s svetljbo s spektrom, ki je ozek v primerjavi s spektralno širino prehoda (na primer iz laserskega resonatorja), je verjetnost za prehod odvisna tudi od tega, kako blizu osrednje frekvence prehoda je frekvanca vpadne svetlobe (slika 5.3 b). Naj bo  $w_R$  gostota energije skoraj monokromatske vpadne svetlobe s frekvenco  $\omega_R$ . Verjetnost za absorpcijo na časovno enoto je potem

$$r_{12} = B_{12}g(\omega_R - \omega_0) w_R. \quad (5.27)$$

Koeficiente  $A_{21}$ ,  $B_{12}$  in  $B_{21}$ , s katerimi smo opisali spontano sevanje, absorpcijo in stimulirano emisijo, je prvi vpeljal Einstein<sup>4</sup>, zato jih imenujemo tudi Einsteinovi koeficienti. Poglejmo si jih podrobnejše.

<sup>4</sup>Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.

### Einsteinovi koeficienti

Število atomov v določenem atomskem stanju imenujemo zasedenost stanj. Ker zaenkrat obravnavamo preproste modele atomov z zgolj dvema stanjema, zapišemo samo dve zasedenosti. Naj bo  $N_1$  zasedenost nižjega stanja,  $N_2$  zasedenost višjega stanja, skupno število atomov pa  $N_1 + N_2 = N$ . V prisotnosti svetlobe se število atomov v spodnjem in zgornjem stanju lahko spreminja, skupno število pa se ohranja.

Obravnavajmo termično ravnovesje, ko je spekter svetlobe bistveno širši od širine atomskega prehoda (slika 5.3 a). Verjetnosti za prehoda potem zapišemo z enačbama (5.22) in (5.25). Zasedenost višjega nivoja se zmanjšuje zaradi spontanih in stimuliranih prehodov v nižje stanje, povečuje pa se zaradi absorpcije. To zapišemo z enačbo

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - r_{21}N_2 + r_{12}N_1 = -A_{21}N_2 - B_{21}u(\omega_0)N_2 + B_{12}u(\omega_0)N_1. \quad (5.28)$$

Zaradi ohranitve skupnega števila atomov velja

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}. \quad (5.29)$$

V termičnem ravnovesju sta zasedenosti konstantni, tako da lahko zapišemo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}u(\omega_0)N_2 - B_{12}u(\omega_0)N_1 = 0. \quad (5.30)$$

Vemo tudi, da v termičnem ravnovesju za zasedenosti  $N_1$  in  $N_2$  velja Boltzmannova porazdelitev

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2 - E_1)} = e^{-\beta\hbar\omega_0}, \quad (5.31)$$

kjer je  $\beta = 1/k_B T$ . Izrazimo spekralno gostoto  $u(\omega_0)$  iz enačbe (5.30)

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}} \quad (5.32)$$

in z uporabo enačbe (5.31) dobimo

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}/B_{12}}{e^{\beta\hbar\omega_0} - B_{21}/B_{12}}. \quad (5.33)$$

Po drugi strani vemo, da v termičnem ravnovesju spekralno gostoto energije sevanja  $u(\omega_0)$  opišemo s Planckovim zakonom (enačba 5.20). Iz primerjave obeh zapisov ugotovimo, da morata biti koeficienta  $B_{21}$  in  $B_{12}$  enaka in določimo zvezo med koeficientoma  $A_{21}$  in  $B_{12}$

$$A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B_{12} \quad \text{in} \quad B_{12} = B_{21}. \quad (5.34)$$

Koeficient pred  $B_{12}$  v prvi enačbi je ravno enak gostoti stanj elektromagnetnega polja  $\rho(\omega)$  (enačba 5.6), pomnoženi z energijo fotona  $\hbar\omega$ . Videli bomo, da to ni slučaj, saj to izhaja iz verjetnosti za prehod v kvantni elektrodinamiki (poglavlje 5.10). Pozoren bralec je lahko tudi opazil, da je z enačbo (5.33), ki smo jo dobili le z uporabo Boltzmannove porazdelitve za atome, že določena oblika Planckove formule, ne da bi kar koli rekli o fotonih.

 Zveza  $B_{12} = B_{21}$  velja le v primeru nedegeneriranih stanj. V realnih sistemih so stanja pogosto degenerirana in je treba gornjo enačbo ustrezno popraviti v

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{g_1}{g_2}, \quad (5.35)$$

pri čemer  $g_1$  in  $g_2$  označujeta degeneriranost stanj.

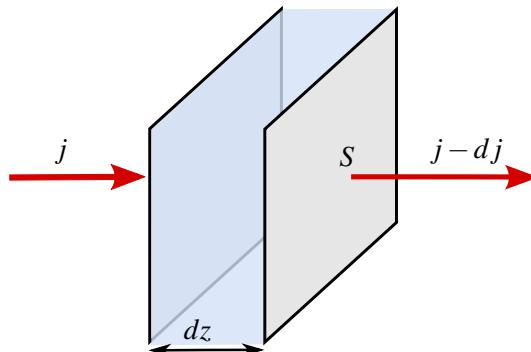
## 5.4 Absorpcijski koeficient

Zasedenost osnovnega stanja v plinu dvonivojskih atomov naj bo  $N_1$ , zasedenost vzbujenega pa  $N_2$ . Izbran volumen takega plina osvetlimo s snopom svetlobe s frekvenco  $\omega$ , ki je blizu frekvence atomskega prehoda  $\omega_0$ . Gostota vpadnega energijskega toka je  $j = w_\omega c$  (enačba 1.32), pri čemer je  $w_\omega$  gostota energije. Obravnavajmo primer, ko je spekter vpadnega snopa ozek v primerjavi s širino atomskega prehoda (slika 5.3 b). V tej obliki je zapis enačb sicer bolj zapleten, a hkrati bolj priročen pozneje pri obravnavi laserja. Privzemimo še, da je stanje stacionarno.

Ko svetlobni snop vpade na plast plina debeline  $dz$ , se gostota energijskega toka zmanjša zaradi absorpcije in hkrati poveča zaradi stimulirane emisije (slika 5.4). Spontano sevanje, ki je seveda tudi prisotno, lahko zanemarimo, saj je svetloba izsevana na vse strani enakomerno in le majhen del je izsevan v smeri snopa. Sprememba energije snopa v časovni enoti je enaka razliki med številom absorpcij in stimuliranih prehodov v tem času, pomnoženih z energijo fotona<sup>5</sup>

$$dP = r_{12} \frac{(N_2 - N_1)}{V} S dz \hbar \omega = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g w_\omega \hbar \omega S dz, \quad (5.36)$$

pri čemer smo verjetnost za prehod izrazili iz enačbe (5.27).



Slika 5.4: K absorpciji svetlobe v plasti atomov

Pri tem  $S$  označuje presek snopa,  $V$  pa volumen plina. Sledi

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g \hbar \omega \frac{j}{c} dz. \quad (5.37)$$

Priročno je vpeljati presek za absorpcijo

$$\sigma(\omega) = \frac{B_{21} g \hbar \omega}{c}. \quad (5.38)$$

Z njim se izraz (5.37) poenostavi v

$$\frac{dj}{dz} = \frac{\Delta N}{V} \sigma(\omega) j, \quad (5.39)$$

kjer  $\Delta N$  označuje  $N_2 - N_1$ . Navadno obravnavamo pline, ki so blizu termičnega ravnovesja. V tem primeru je  $N_2 < N_1$  in  $dj$  negativen, zato pride do absorpcije svetlobe z absorpcijskim koeficientom  $\mu$ . Zapišemo

$$\frac{dj}{j} = -\mu dz \quad (5.40)$$

<sup>5</sup>Zaradi preglednosti tukaj pišemo obliko atomske spektralne črte kot  $g$ , pri čemer je to vrednost Lorentzove krivulje z osrednjo frekvenco  $\omega_0$  pri  $\omega$ , torej  $g(\omega - \omega_0)$ .

in

$$\mu = \frac{\Delta N}{V} \sigma(\omega) = \frac{\Delta N}{V} B_{21} g \frac{\hbar \omega}{c}. \quad (5.41)$$

Makroskopski koeficient absorpcije svetlobe v plinu atomov smo povezali z Einsteinovim koeficientom  $B_{21}$ . Povejmo še, da so tipične velikosti presekov za absorpcijo  $\sigma \sim 10^{-24}\text{--}10^{-16} \text{ m}^2$ .

 Energija se pri absorpciji v plinu dvonivojskih atomov seveda ne izgublja. Atom, ki je prešel v vzbujeno stanje, se s spontano emisijo vrne nazaj v osnovno, svetloba pa se izseva na vse strani – se siplje.

## 5.5 Nasičenje absorpcije

Čeprav je videti izraz za zmanjševanje gostote svetlobnega toka pri prehodu skozi absorbirajoči plin (enačba 5.40) preprost, ga ni mogoče enostavno integrirati, saj je absorpcijski koeficient  $\mu$  odvisen od gostote energijskega toka. Pri dovolj velikem svetlobnem toku namreč z absorpcijo znaten delež atomov preide v višje stanje, zato se zmanjša razlika  $\Delta N$  in posledično se zmanjša tudi absorpcijski koeficient  $\mu$ . Takrat se absorpcija v plinu nasiti in pojavu pravimo nasičenje absorpcije.

Naj na dvonivojski plin vpada snop monokromatske svetlobe. Atomi v plinu prehajajo med nivojem za zaradi absorpcije, spontane in stimulirane emisije. Podobno kot smo zapisali termično ravnovesje v primeru širokega spektra (enačba 5.30), zapišemo stacionarno enačbo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21} g \Delta N \frac{j}{c} = 0, \quad (5.42)$$

pri čemer smo za verjetnost za prehod uporabili enačbo (5.27) in upoštevali  $w = j/c$ . Zasedenosť višjega stanja  $N_2$  lahko izrazimo s celotnim številom atomov  $N$  in razliko zasedenosnosti  $\Delta N$

$$N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) + \frac{1}{2}(N_2 - N_1) = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\Delta N. \quad (5.43)$$

S tem lahko izračunamo razliko zasedenosnosti

$$\Delta N = -\frac{N}{1 + 2\frac{B_{21}g}{cA_{21}}j}. \quad (5.44)$$

Pri majhni gostoti toka  $j$  so praktično vsi atomi v osnovnem stanju in prispevajo k absorpciji. Pri velikih gostotah toka pa imenovalec gornjega izraza močno naraste, razlika zasedenosnosti gre proti nič in absorpcija se zmanjšuje. Ko drugi člen v imenovalcu (enačba 5.44) doseže vrednost 1, pravimo, da gostota energijskega toka doseže vrednost saturacijske gostote. Zapišemo jo kot

$$j_s(\omega) = \frac{cA_{21}}{2B_{21}g} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^2 g}, \quad (5.45)$$

pri čemer smo upoštevali zvezo med koeficientoma  $A_{21}$  in  $B_{21}$  (enačba 5.34). Kot vidimo, je saturacijska gostota odvisna le od krožne frekvence vpadnega valovanja in vrednosti  $g(\omega - \omega_0)$ , ki je približno obratna vrednost širine atomskega prehoda. Za črto z valovno dolžino 600 nm in širino  $10^8 \text{ s}^{-1}$  znaša saturacijska gostota svetlobnega toka okoli  $20 \text{ mW/cm}^2$ . Tako veliko gostoto svetlobnega toka je v tako ozkem frekvenčnem intervalu z navadnimi svetili praktično nemogoče doseči, medtem ko jo z laserji z lakkoto.

Izraz za razliko zasedenosti stanj zapišemo v preglednejši obliki

$$\Delta N = -\frac{N}{1 + j/j_s(\omega)}. \quad (5.46)$$

Vstavimo gornji izraz v enačbo za zmanjševanje gostote toka (enačba 5.39) in dobimo

$$dj = -\frac{\mu_0}{1 + j/j_s} j dz, \quad (5.47)$$

kjer je

$$\mu_0 = \frac{N}{V} \sigma = \frac{N B_{21} g \hbar \omega}{V c} \quad (5.48)$$

absorpcijski koeficient pri majhnih gostotah vpadnega toka.

Enačbo (5.47) brez težav integriramo

$$\ln \frac{j}{j_0} + \frac{j - j_0}{j_s} = -\mu_0 z. \quad (5.49)$$

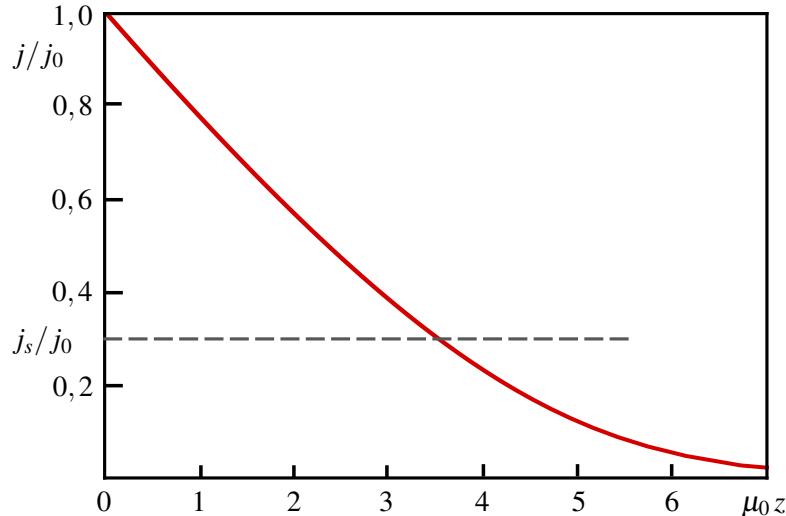
Z  $j_0$  smo označili začetno gostoto svetlobnega toka. Kadar je ta dosti manjša od  $j_s$ , lahko drugi člen v gornji enačbi zanemarimo in gostota svetlobnega toka eksponentno pojema

$$j = j_0 e^{-\mu_0 z}. \quad (5.50)$$

Pri zelo velikih vpadnih gostotah, ko pride do nasičenja absorpcije, lahko prvi člen v izrazu zanemarimo in pride do linearnega zmanjševanja gostote svetlobnega toka

$$j = j_0 - \mu_0 j_s z. \quad (5.51)$$

V primeru močnega vpadnega toka je zasedenost osnovnega in vzbujenega nivoja skoraj enaka in absorpcija je omejena s tem, kako hitro se lahko atomi vrčajo v osnovno stanje preko spontanega sevanja.



Slika 5.5: Pojemanje gostote svetlobnega toka v absorbirajočem plinu (enačba 5.49)

## 5.6 Optično ojačevanje

V prejšnjih razdelkih smo obravnavali prehod svetlobe skozi dvonivojski plin. V termičnem ravnovesju je zasedenost zgornjega nivoja manjša od zasedenosti spodnjega in svetloba, ki vpada na plin, se absorbira. Če uspemo doseči stanje obrnjene zasedenosti, za katerega velja  $N_2 > N_1$ , se bo snop svetlobe pri prehodu skozi plin ojačeval. Ta pojav je osnova za delovanje laserjev.

Stanje obrnjene zasedenosti seveda ni v termičnem ravnovesju in ga je treba vzdrževati z dovajanjem energije plinu – črpanjem. Načinov črpanja za dosego obrnjene zasedenosti je veliko. Zaenkrat opišimo le nekaj osnovnih mehanizmov, podrobnejše jih bomo spoznali na konkretnih primerih laserjev v poglavju (7).

V plinih je najpogosteji način črpanja vzbujanje z električnim tokom. Elektroni, ki so glavni nosilci toka, se zaletavajo v atome ali ione plina in jih vzbujajo v višje nivoje, pri čemer lahko pride do obrnjene zasedenosti med nekim parom nivojev. Tako črpanje uporabljamo na primer v argonovem laserju.

Pogost proces v plinih je tudi prenos energije med atomi s trki. V mešanici dveh plinov, pri katerih se nek nivo enih atomov ujema po energiji z nekim nivojem drugih atomov, lahko vzbujen atom prve vrste pri trku preda energijo brez sevanja atomu druge vrste, ta pa iz osnovnega stanja preide v ustrezni višji nivo. Če je pod tem nivojem še drugo vzbujeno stanje, katerega življenjski čas je krajiš od življenjskega časa zgornjega nivoja, pride do obrnjene zasedenosti. Primer uporabe takega črpanja je He-Ne laser.

V trdnih neprevodnih kristalih sta v optičnem področju absorpcija in sevanje pri določeni valovni dolžini navadno posledica primesi. Obrnjeno zasedenost para nivojev primesi največkrat dosežemo tako, da kristal obsevamo s svetlobo s frekvenco, ki ustreza prehodu na nek nivo nad izbranim parom. Tako črpanje uporabljamo na primer v Nd:YAG in Ti:safir laserjih.

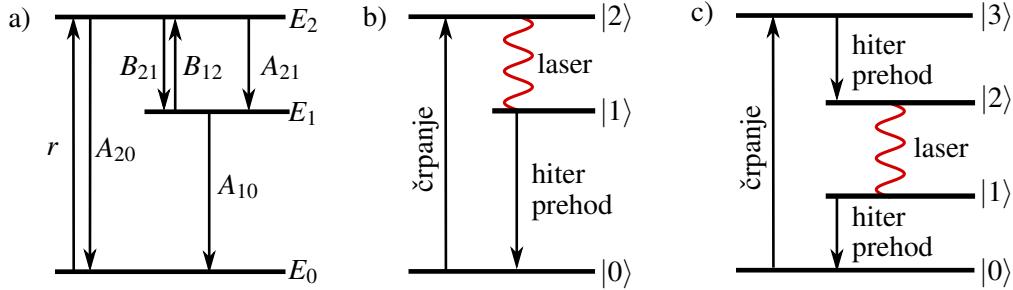
V polprevodnikih dosežemo obrnjeno zasedenost med prevodnim in valenčnim pasom z vbrizgavanjem elektronov in vrzeli v območje  $p$ - $n$  spoja z električnim tokom v prevodni smeri.

## 5.7 Optično črpanje trinivojskega sistema

Kot primer optičnega ojačevanja si oglejmo najpreprostejši model optičnega črpanja. Gre za plin atomov s tremi nivoji, tako imenovani trinivojski sistem. Osnovno stanje, ki ga označimo z  $|0\rangle$ , naj ima energijo  $E_0$ . Poleg tega naj imajo atomi še dve vzbujeni stanji z energijo  $E_1$  (stanje  $|1\rangle$ ) in energijo  $E_2 > E_1$  (stanje  $|2\rangle$ ), tako da je energijska razlika med vzbujenima nivojema  $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$  (slika 5.6 a).

Na tak trinivojski plin svetimo s črpalno svetobo, ki vzbuja atome iz osnovnega stanja  $|0\rangle$  v stanje  $|2\rangle$ , pri čemer je lahko spektralna gostota  $u_p$  črpalne svetlobe široka. Po plinu naj se širi še monokromatska svetloba z gostoto energije  $w$  in frekvenco  $\omega$ , ki je blizu frekvence prehoda  $\omega_0$  med stanjema  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$ . Ugotoviti želimo, pri katerih pogojih lahko dosežemo obrnjeno zasedenost med stanjema  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$  in s tem ojačevanje svetlobe okoli frekvence  $\omega_0$  (slika 5.6 b).

 Trinivojski laserski sistem na sliki (5.6 b) je pravzaprav poseben primer bolj realističnega štirinivojskega sistema, pri katerem gornji črpalni nivo sovpada z gornjim laserskim nivojem. Sicer se tretji vzbujeni nivo, v katerega črpamo, praviloma zelo hitro prazni v drugega vzbujenega, od tam pa počasi v prvega vzbujenega, kot kaže slika (5.6 c). Obravnavo štirinivojskih sistemov je bolj zapletena od obravnave trinivojskih sistemov, ki pa za opis delovanja laserjev povsem zadošča. Podrobnejše bomo večnivojske sisteme obravnavali na konkretnih laserskih primerih (poglavlje 7).



Slika 5.6: Shema energijskih nivojev trinivojskega sistema in oznake koeficientov za prehode med njimi (a). V plinskih laserjih je stanje obrnjene zasedenosti navadno med vzbujenima stanjema (b), pogosto pa so laserji štiri- ali večnivojski (d).

Zapišimo enačbe za spreminjanje zasedenosti posameznih stanj. Osnovno stanje  $|0\rangle$  se prazni zaradi absorpcije črpalne svetlobe in polni zaradi spontanih prehodov iz stanja  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$ , stimulirane prehode iz stanja  $|2\rangle$  pa bomo zanemarili. Zasedenost stanja  $|2\rangle$  se povečuje zaradi absorpcije s spodnjih nivojev in zmanjšuje zaradi spontanega in stimuliranega sevanja. Srednje stanje se polni s stimuliranimi in spontanimi prehodi iz stanja  $|2\rangle$  in prazni zaradi absorpcije in spontanih prehodov. Pri tem velja, da je vsota vseh treh zasedenosti enaka številu vseh atomov in  $N_0 + N_1 + N_2 = N$ . Zasedbene enačbe so tako

$$\frac{dN_0}{dt} = -rN_0 + A_{20}N_2 + A_{10}N_1, \quad (5.52)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1 + B_{21}gw(N_2 - N_1) + A_{21}N_2 \quad \text{in} \quad (5.53)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = rN_0 - A_{20}N_2 - A_{21}N_2 - B_{21}gw(N_2 - N_1). \quad (5.54)$$

Pri zapisu smo predpostavili, da je  $N_0 \approx N \gg N_1, N_2$ , zato smo lahko črpanje  $B_{20}u_p(N_0 - N_2)$ , ki je praktično konstantno, zapisali s koeficientom  $r$ . Mehanizem črpanja smo tako skrili v  $r$  in prav nič ni pomembno, na kakšen način poteka. S tem smo obravnavo posplošili z optičnega črpanja na druge sisteme.

Zanima nas stacionarno stanje, ko so vsi trije časovni odvodi enaki nič. Tako iz druge enačbe sistema (enačba 5.53) sledi

$$B_{21}gwN_2 + A_{21}N_2 = B_{21}gwN_1 + A_{10}N_1 \quad (5.55)$$

in

$$N_2 = \frac{B_{21}gw + A_{10}}{B_{21}gw + A_{21}}N_1. \quad (5.56)$$

Brez škode lahko zanemarimo tudi spontano sevanje iz stanja  $|2\rangle$  v osnovno stanje. Tako iz prve enačbe sistema (enačba 5.52) dobimo

$$N_1 = \frac{rN}{A_{10}} \quad (5.57)$$

in zapišemo razliko zasedenosti kot

$$N_2 - N_1 = \left( \frac{N_2}{N_1} - 1 \right) N_1 = \frac{A_{10} - A_{21}}{A_{21} + B_{21}gw} \frac{rN}{A_{10}}. \quad (5.58)$$

Iz gornje enačbe sledi, da pride do obrnjene zasedenosti, kadar je  $A_{10} > A_{21}$ , torej kadar je razpadni čas stanja  $|1\rangle$  krajši od razpadnega časa stanja  $|2\rangle$ . Tak rezultat smo seveda lahko pričakovali.

V praktičnih primerih navadno velja  $A_{10} \gg A_{21}$ . Ob upoštevanju zveze  $j = wc$  povežemo razliko zasedenosti z gostoto vpadnega svetlobnega toka

$$N_2 - N_1 = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + \frac{B_{21}gj}{cA_{21}}} = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + j/j_s}. \quad (5.59)$$

Konstante smo pospravili v saturacijsko gostoto svetlobnega toka

$$j_s = \frac{cA_{21}}{B_{21}g}. \quad (5.60)$$

 Vidimo, da je izraz za saturacijsko gostoto toka v trinivojskem sistemu (enačba 5.60) zelo podoben izrazu za saturacijsko gostoto v dvonivojskem sistemu (enačba 5.45), razlikujeta se le v faktorju 2. Do te razlike pride zaradi različnega števila stanj, saj pogoj  $N_1 + N_2 = N$  v trinivojskem sistemu ne velja.

Poglejmo, kaj se zgodi s svetlobo ob vpodu na plast trinivojskega plina. Naj ima vpadna svetloba krožno frekvenco  $\omega$  in gostoto svetlobnega toka  $j = wc$ . Račun je zelo podoben računu za absorpcijo (enačba 5.37). Sprememba gostote toka na debelini  $dz$  je enaka

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21}g \frac{\hbar\omega}{c} j dz, \quad (5.61)$$

pri čemer gostota toka  $j$  nastopa tudi v izrazu za razliko zasedenosti (enačba 5.59). Če to upoštevamo, dobimo diferencialno enačbo za gostoto toka

$$\frac{1}{j} \left( 1 + \frac{j}{j_s} \right) dj = G dz \quad (5.62)$$

ozioroma

$$dj = \frac{G}{1 + j/j_s} j dz, \quad (5.63)$$

ki je spet zelo podobna enačbi za absorpcijo (enačba 5.47). Z  $G$  smo označili t.i. koeficient ojačenja pri majhni gostoti vpadnega toka. Podan je z

$$G = \frac{N}{V} \frac{r}{A_{21}} \sigma = \frac{rNB_{21}\hbar\omega g}{VcA_{21}}, \quad (5.64)$$

pri čemer smo koeficient ojačenja izrazili s presekom za stimulirano sevanje  $\sigma$ . Rešitev diferencialne enačbe (enačba 5.63) je prikazana na sliki (5.7).

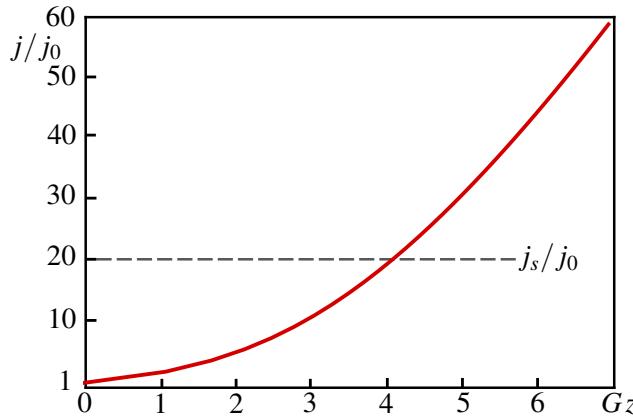
Obnašanje gostote svetlobnega toka ima, tako kot pri absorpciji, dva režima. Pri majhnih gostotah toka  $j \ll j_s$  je naraščanje eksponentno

$$j(z) = j_0 e^{Gz}. \quad (5.65)$$

Pri velikih gostotah toka pride do nasičenja in gostota svetlobnega toka narašča linearно

$$j(z) = j_0 + j_s G z. \quad (5.66)$$

V tem primeru je gostota toka tako velika, da vsi atomi, ki jih s črpanjem spravimo v najvišje stanje, preidejo v stanje  $|1\rangle$  s stimuliranim sevanjem. Pri konstantnem črpanju je tedaj linearno naraščanje gostote toka razumljivo.



Slika 5.7: Naraščanje gostote svetlobnega toka pri optičnem ojačevanju

Vrnimo se k preseku za stimulirano sevanje  $\sigma$  (enačba 5.64). Opazimo, da je enak preseku za absorpcijo (enačba 5.38) dvonivojskega sistema in tako odvisen od frekvence in sorazmeren vrednosti atomske spektralne črte pri frekvenci prehoda. Za He-Ne laser ( $\lambda = 633$  nm in  $\Delta\nu \sim 1,5$  GHz) znaša  $\sigma \sim 10^{-16}$  m<sup>2</sup>, za Nd:YAG (1064 nm in  $\Delta\nu \sim 150$  GHz) pa  $\sigma \sim 10^{-22}$  m<sup>2</sup>. Zaradi različnih presekov, različnih gostot atomov in različnih načinov črpanja se koeficienti ojačanja v večnivojskih sistemih med seboj precej razlikujejo. Tipičen koeficient ojačenja v He-Ne laserju z dolžino  $L = 0,5$  m je  $GL \sim 1,015$ , v Nd:YAG laserju z dolžino ojačevalnega sredstva  $L = 10$  cm pa  $GL \sim 50$ . Pri prvem laserju je sicer velik presek za stimulirano sevanje, vendar je gostota atomov v obrnjeni zasedenosti razmeroma majhna. V drugem primeru pa močno črpanje prevlada nad majhnim presekom in pride do velikega ojačenja.

## 5.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte

Doslej smo privzeli, da svetijo vsi atomi obravnavane snovi pri isti krožni frekvenci  $\omega_0$  in z isto spektralno širino, ki smo jo popisali s funkcijo  $g(\omega - \omega_0)$ , z vrhom pri  $\omega_0$ . Če to velja, je razširitev spektralne črte homogena. Funkcija  $g(\omega - \omega_0)$  je v tem primeru Lorentzove oblike

$$g_L(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (5.67)$$

s širino črte  $\Delta\omega_L = 2\gamma$  (glej sliko 2.4). Primera homogene razširitve sta naravna širina in razširitev zaradi trkov med atomi. Homogena razširitev je pogosto večja od obratne vrednosti razpadnega časa nivoja. V plinu namreč prihaja do trkov, ki lahko zmotijo le fazo sevanja, ne da bi povzročili prehod, razširijo pa spektralno črto. V trdni snovi homogeno razširitev brez prehoda povzročajo termična nihanja lokalnega polja.

Spektralna črta je lahko razširjena tudi zato, ker svetloba, izhajajoča iz različnih atomov, nima povsem iste frekvence. Tedaj govorimo o nehomogeni razširitvi. Najpomembnejši primer nehomogene razširitve je Dopplerjeva razširitev v plinu. Atomi plina vedno sevajo pri praktično isti frekvenci  $\omega_0$ , vendar jih zaradi gibanja opazovalec v mirujočem (laboratorijskem) sistemu v skladu z Dopplerjevim pojavom zazna pri različnih frekvencah.

Naj se atom giblje s hitrostjo  $v$  glede na smer opazovanja. Potem opazovane krožne frekvence posameznih atomov zapišemo kot

$$\omega = \omega_0 - \frac{v}{c} \omega_0 = \omega_0 - k_0 v. \quad (5.68)$$

Označimo z  $\mathcal{N}(v)$  porazdelitev gostote atomov po hitrostih, pri čemer se omejimo le na premikanje v smeri opazovanja. V termičnem ravnovesju je  $\mathcal{N}(v)$  Maxwellova porazdelitev

$$\mathcal{N}(v) = \frac{N}{V} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, \quad (5.69)$$

kjer je  $m$  masa posameznega atoma. Porazdelitev atomov po frekvencah izračunamo tako, da hitrost izrazimo iz enačbe (5.68), poleg tega funkcijo  $g_D(\omega - \omega_0)$  normiramo. Sledi

$$g_D(\omega - \omega_0) = \frac{c}{\omega_0} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{mc^2}{2k_B T} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2} \right). \quad (5.70)$$

Dopplerjeva razširitev v plinu je torej Gaussove oblike. Njena širina pri polovični višini<sup>6</sup> je

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{mc^2}} \omega_0. \quad (5.71)$$

---

**Naloga 5.8.1** Izpelji obliko nehomogeno razširjene črte za Dopplerjevo razširitev (enačba 5.70) in pokaži, da je njena širina podana z enačbo (5.71).

---

Izračunajmo Dopplerjevo razširitev na primeru He-Ne laserja. Za prehod atoma neonja pri 632,8 nm in temperaturi 300 K je izračunana vrednost  $\Delta\omega_D = 8 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$  oziroma  $\Delta\nu = 1,4 \text{ GHz}$ . Dejanske izmerjene vrednosti širine črte za He-Ne laser znašajo okoli 1,5 GHz, kar je znatno več od naravne širine črte (1,2 MHz). Še bolj izrazite so razširitve zaradi nehomogenosti v trdninskih laserjih, na primer v Nd:YAG laserju, v katerem je širina črte  $\Delta\nu = 150 \text{ GHz}$ . Nehomogena razširitev zaradi Dopplerjevega pojava v redkem plinu ali zaradi nehomogenosti v trdnih snoveh je tako kar nekaj redov velikosti večja od homogene naravne širine in razširitve zaradi trkov.



Pri nehomogenih razširitvah bi za bolj natančen izračun morali upoštevati tudi naravno širino posameznega atoma. To bi zapisali s konvolucijo Lorentzove in Gaussove funkcije in dobili tako imenovan Voigtov profil<sup>7</sup>, ki pa ga ne moremo preprosto analitično zapisati.

## 5.9 \*Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte

V razdelku (5.5) smo obravnavali nasičenje absorpcije pri homogeno razširjenem prehodu. Pri nasičenju absorpcije, kadar prevladuje nehomogena razširitev, nastopijo pomembni novi pojavi.

Začnimo z dvonivojskim plinom, na katerega vpada močan snop monokromatske svetlobe s frekvenco  $\omega_S$ , ki je blizu osrednje frekvence  $\omega_0$  Dopplerjevo razširjene črte. S svetlobo lahko sodeluje le skupina atomov, pri kateri se Dopplerjevo premaknjena frekvanca od  $\omega_S$  ne razlikuje več kot za homogeno širino, ki jo opisuje funkcija  $g(\omega - \omega_S)$ . Zato ne moremo zapisati zasedbenih enačb za vse atome hkrati, ampak le za tiste, ki imajo hitrost med  $v$  in  $v + dv$  in ki absorbirajo svetlobo pri frekvenci  $\omega_0 - kv$ .

<sup>6</sup>Celotno širino na polovični višini imenujemo FWHM – Full width at half maximum.

<sup>7</sup>Nemški fizik Woldemar Voigt, 1850–1919.

Naj bosta  $\mathcal{N}_1(v)$  in  $\mathcal{N}_2(v)$  hitrostni porazdelitvi atomov v osnovnem in vzbujenem stanju. Gostota  $\mathcal{N}_2(v)$  se spreminja podobno kot celotna zasedenost v homogenem primeru (enačba 5.28)

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -A\mathcal{N}_2(v) - Bg(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}(\mathcal{N}_2(v) - \mathcal{N}_1(v)), \quad (5.72)$$

kjer je  $j$  gostota vpadnega svetlobnega toka. Upoštevali smo, da je zaradi Dopplerjevega pojava prehod premaknjen k frekvenci  $\omega_0 - kv$ . Velja tudi

$$\mathcal{N}_1(v) + \mathcal{N}_2(v) = \mathcal{N}(v) \quad (5.73)$$

in

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -\frac{d\mathcal{N}_1(v)}{dt}. \quad (5.74)$$

Vpeljimo  $\mathcal{Z}(v) = \mathcal{N}_1(v) - \mathcal{N}_2(v)$ . Podobno kot v enačbi (5.43) zapišemo

$$\mathcal{N}_2(v) = \frac{1}{2}\mathcal{N}(v) - \frac{1}{2}\mathcal{Z}(v) \quad (5.75)$$

in dobimo

$$\dot{\mathcal{Z}}(v) = -A\mathcal{Z}(v) + A\mathcal{N}(v) - 2Bg(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}\mathcal{Z}(v). \quad (5.76)$$

V stacionarnem stanju je

$$\mathcal{Z}(v) = \frac{\mathcal{N}(v)}{1 + \frac{2B}{Ac}g(\omega_S - \omega_0 + kv)j}. \quad (5.77)$$

Če je gostota vpadnega svetlobnega toka majhna, lahko imenovalec razvijemo

$$\mathcal{Z}(v) \approx \mathcal{N}(v) \left(1 - \frac{2B}{Ac}g(\omega_S - \omega_0 + kv)j\right). \quad (5.78)$$

Porazdelitev  $\mathcal{Z}(v)$  je podobna nemoteni porazdelitvi atomov po hitrosti  $\mathcal{N}(v)$ , le da je pri hitrosti  $v = (\omega_0 - \omega_S)/k$  zmanjšana zaradi vpliva vpadne svetlobe. Atomi s to hitrostjo namreč svetlobo absorbirajo in s tem prehajajo v gornje stanje. V porazdelitvi atomov tako nastane vdolbina, ki jo imenujemo Bennettova vdolbina<sup>8</sup> (slika 5.8). Širina vdolbine je določena s homogeno širino prehoda, to je s funkcijo  $g(\omega_S - \omega_0 + kv)$ , globina pa z gostoto vpadnega toka  $j$ .

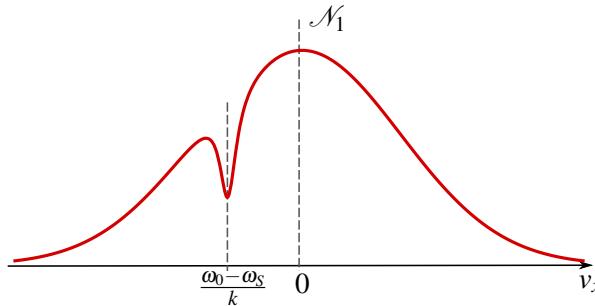
Naj na snov poleg močnega vpadnega žarka pri  $\omega_S$  vpada še šibko valovanje pri frekvenci  $\omega'$ . Izračunajmo absorpcijski koeficient za valovanje pri  $\omega'$ . Upoštevati moramo, da k absorpciji prispevajo vsi atomi, katerih hitrost je taka, da je prehod dovolj blizu  $\omega'$ . Absorpcijski koeficient potem izračunamo s seštevanjem po porazdelitvi  $\mathcal{Z}(v)$  (enačba 5.41)

$$\mu(\omega') = \frac{\hbar\omega'}{c} \int \mathcal{Z}(v)Bg(\omega' - \omega_0 + k'v)dv. \quad (5.79)$$

Homogena razširitev je dosti manjša od Dopplerjeve širine, zato v prvem približku Lorentzovo funkcijo  $g$  v enačbi (5.79) nadomestimo kar z  $\delta(\omega)$ , v izrazu za  $\mathcal{Z}$  (enačba 5.77) pa jo pustimo. Tako je absorpcijski koeficient za šibko testno svetlobo

$$\begin{aligned} \mu(\omega') &= \frac{\hbar\omega'}{k'c} B \frac{\mathcal{N}(\frac{\omega_0 - \omega'}{k'})}{1 + \frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S - \omega')} \\ &\approx \hbar B \mathcal{N} \left( \frac{\omega_0 - \omega'}{k'} \right) \left( 1 - \frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S - \omega') \right). \end{aligned} \quad (5.80)$$

<sup>8</sup>Ameriški fizik William Ralph Bennett Jr., 1930–2008.



Slika 5.8: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, kjer zaradi absorbirane svetlobe nastane Bennetova vdolbina. Podobno obliko ima tudi absorpcijski koeficient.

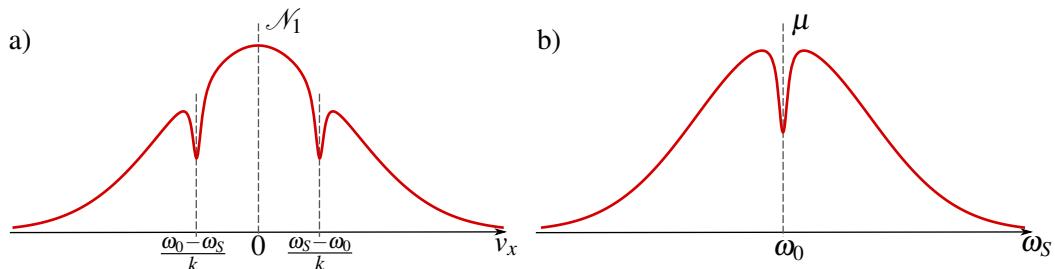
V drugi vrstici smo uporabili približek (enačba 5.78). Vidimo, da je odvisnost  $\mu(\omega')$  Gaussove oblike z vdolbinami pri  $\omega_S$  in je tako podobna porazdelitvi, kot jo kaže slika (5.8). Odvisnost  $\mu(\omega')$  lahko tudi izmerimo, tako da spremojmo frekvenco testnega snopa  $\omega'$ .

 Merjenje absorpcije s testnim žarkom omogoča opazovanje oblike homogene črte kljub mnogo večji nehomogeni Dopplerjevi razširitvi. V moderni spektroskopiji ima zato ta metoda velik pomen.

Izračunajmo še absorpcijski koeficient za prvi, močan vpadni snop, tako da v gornjem izrazu vstavimo  $\omega' = \omega_S$ . Vodilni člen  $\mathcal{N}((\omega_0 - \omega_S)/k)$  opisuje običajno Gaussovo obliko Dopplerjevo razširjene črte, izraz v oklepaju pa da zmanjšanje absorpcije zaradi nasičenja, ki je odvisno le od vrednosti  $g(0)$  in zato enako za vse  $\omega_S$ . Z enim samim vpadnim snopom svetlobe torej vdolbine v absorpciji ne moremo zaznati, saj je izmerjena črta kljub nasičenju Gaussove oblike.

Namesto z dvema različnima snopoma, od katerih lahko šibkemu testnemu snopu spremojmo frekvenco, lahko vdolbino v porazdelitvi zaznamo tudi z enim samim snopom spremenljive frekvence, ki se po prvem prehodu skozi plin odbije od zrcala in vrne v nasprotni smeri. S tem se v porazdelitvi atomov v spodnjem stanju simetrično pri hitrostih  $\pm(\omega_0 - \omega_S)/k$  pojavit dve Bennetovi vdolbini (slika 5.9 a). Kadar je  $\omega_S$  blizu  $\omega_0$ , se vdolbini vsaj delno prekrivata, stopnja nasičenja se poveča in v krivulji za absorpcijo svetlobe se pojavi vdolbina (slika 5.9 b).

Imenujemo jo Lambova vdolbina<sup>9</sup>.



Slika 5.9: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, če svetloba prehaja skozi plin v dveh smereh (a). Če frekvenca vpadne svetlobe približno sovpada s centralno frekvenco prehoda, se vdolbini prekrivata in absorpcija se zmanjša (b).

Zapišimo enačbe za ta primer. Vpadni snop svetlobe povzroči spremembo zasedenosti pri prehodu skozi plin v obeh smereh, zato je zdaj

$$\mathcal{Z}(v) \approx \mathcal{N}(v) \left( 1 - \frac{2Bj}{Ac} (g(\omega_S - \omega_0 + kv) + g(\omega_S - \omega_0 - kv)) \right). \quad (5.81)$$

<sup>9</sup>Ameriški fizik in nobelovec Willis Eugene Lamb Jr., 1913–2008.

Podobno kot prej izračunamo absorpcijski koeficient za širjenje svetlobe v pozitivni smeri

$$\begin{aligned}\mu_+(\omega_S) &= \frac{\hbar\omega}{c}B \int \mathcal{Z}(v)g(\omega_S - \omega_0 + kv) dv \\ &\approx \hbar B \mathcal{N}\left(\frac{\omega_S - \omega_0}{k}\right) \left(1 - \frac{2Bj}{Ac}(g(0) + g(2(\omega_S - \omega_0)))\right).\end{aligned}\quad (5.82)$$

Izmerjeni absorpcijski profil je odvisen od frekvence vpadne svetlobe  $\omega_S$  in ima pri  $\omega_0$  vdolbino, ki je zopet podobna homogeno razširjeni črti. Faktor 2 v argumentu funkcije  $g(2(\omega_S - \omega_0))$  je posledica našega grobega približka, ko smo v integraciji  $g(\omega_S - \omega_0 + kv)$  nadomestili kar z  $\delta$  funkcijo. Natančnejši račun pokaže, da je vrh pri  $\omega_0$  kar oblike  $g(\omega_S - \omega_0)$ .

**Naloga 5.9.1** Pokaži, da je rezultat natančnejše izpeljave absorpcijskega koeficiente

$$\mu_+(\omega_S) = \hbar B \mathcal{N}\left(\frac{\omega_S - \omega_0}{k}\right) \left(1 - \frac{Bj}{Ac}(g(0) + g(\omega_S - \omega_0))\right). \quad (5.83)$$

Pri računu privzemi, da je širina Dopplerjeve porazdelitve bistveno večja od širine homogene razširitve (enačba 5.67) in Maxwellovo porazdelitev postavi pred integral.

## 5.10 \*Izpeljava verjetnosti za prehod

Verjetnosti za prehod atoma iz enega stanja v drugo s sevanjem, ki smo jih opisali s fenomenološkimi Einsteinovimi koeficienti  $A_{21}$  in  $B_{21}$  (razdelek 5.3), je mogoče izpeljati tudi drugače. Pri tem se poslužimo kvantne elektrodinamike, kar pomeni kvantno obravnavo tako atoma kot elektromagnetnega polja. Povsem strog račun je zahteven in presega okvir te knjige, zato si na kratko oglejmo le, kako pridemo do rezultata z uporabo Fermijevega zlatega pravila.

Postavimo dvonivojski atom v votlino z elektromagnetskim poljem. Izračunajmo verjetnost, da zaradi interakcije s poljem atom preide iz stanja  $|2\rangle$  v stanje  $|1\rangle$ , pri čemer se število fotonov v izbranem stanju elektromagnetnega polja  $\alpha$  poveča z  $n_\alpha$  na  $n_\alpha + 1$ . V vseh ostalih stanjih polja naj bo število fotonov enako nič.

Med atomom in poljem privzemimo električno dipolno interakcijo

$$\hat{H}_i = -e\hat{E}(\mathbf{r}, t)\hat{x}, \quad (5.84)$$

kjer je  $\hat{x}$  operator koordinate elektrona v atomu. Privzeli smo, da je nihajoče polje polarizirano v smeri osi  $x$ . Stanja celotnega sistema, to je atoma in polja, zapišemo v obliki produkta atomskih stanj in stanja elektromagnetnega polja, pri čemer moramo navesti število fotonov v posameznih lastnih nihanjih votline  $\alpha$ . Zapišemo okrajšano

$$|i, n_\alpha\rangle \equiv |i\rangle |\{n_\alpha\}\rangle. \quad (5.85)$$

Začetno stanje celotnega sistema naj bo tako  $|2, n_\alpha\rangle$ , kar pomeni, da je atom v gornjem stanju (stanju 2), polje pa ima  $n_\alpha$  fotonov v enem samem stanju  $\alpha$ . Ustrezno končno stanje po prehodu je  $|1, n_\alpha + 1\rangle$ .

V prvem redu teorije motenj je verjetnost za prehod iz začetnega v končno stanje na časovno enoto, pri čemer z delta funkcijo izberemo le prehod, pri katerem se ohranja energija, enaka

$$w_{21} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle 1, n_\alpha + 1 | \hat{H}_i | 2, n_\alpha \rangle|^2 \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \quad (5.86)$$

Operator elektromagnetnega polja lahko po enačbi (5.10) razvijemo po lastnih nihanjih votline

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}} \sum_{\alpha} \hat{p}_{\alpha}(t) E_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (5.87)$$

kjer je  $\hat{p}_{\alpha}$  operator gibalne količine stanja  $\alpha$ ,  $E_{\alpha}$  pa funkcija, ki popisuje krajevno odvisnost polja. Vemo, da se vsako lastno elektromagnetno nihanje votline obnaša kot harmonski oscilator. Vpeljemo kreacijske in anihilacijske operatorje

$$\hat{a}_{\alpha}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\alpha}}} (\omega_{\alpha}\hat{q}_{\alpha} - i\hat{p}_{\alpha}) \quad \text{in} \quad (5.88)$$

$$\hat{a}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\alpha}}} (\omega_{\alpha}\hat{q}_{\alpha} + i\hat{p}_{\alpha}). \quad (5.89)$$

Kreacijski operatorji povečujejo, anihilacijski pa zmanjšujejo število fotonov v danem stanju

$$\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}|n_{\alpha}\rangle = \sqrt{n_{\alpha}+1}|n_{\alpha}+1\rangle \quad \text{in} \quad (5.90)$$

$$\hat{a}_{\alpha}|n_{\alpha}\rangle = \sqrt{n_{\alpha}}|n_{\alpha}-1\rangle. \quad (5.91)$$

Edini od nič različni matrični elementi so tako oblike

$$\langle n_{\alpha}+1|\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}|n_{\alpha}\rangle = \sqrt{n_{\alpha}+1} \quad \text{in} \quad (5.92)$$

$$\langle n_{\alpha}-1|\hat{a}_{\alpha}|n_{\alpha}\rangle = \sqrt{n_{\alpha}}. \quad (5.93)$$

Operatorje  $\hat{p}_{\alpha}$  lahko izrazimo s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji in jih vstavimo v razvoj električnega polja (enačba 5.87). Dobimo

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = -i \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\alpha}}{2V\varepsilon_0}} (\hat{a}_{\alpha}^{\dagger} - \hat{a}_{\alpha}) E_{\alpha}(\mathbf{r}). \quad (5.94)$$

Nadaljujemo z izračunom matričnega elementa. Operator koordinate  $\hat{x}$  deluje le na atomski del stanja,  $\hat{E}$  pa le na elektromagnetno polje, zato velja

$$\langle 1, n_{\alpha}+1 | \hat{H}_i | 2, n_{\alpha} \rangle = -e \langle 1, n_{\alpha}+1 | \hat{E} \hat{x} | 2, n_{\alpha} \rangle \quad (5.95)$$

$$= -e \langle 1 | \hat{x} | 2 \rangle \langle n_{\alpha}+1 | \hat{E} | n_{\alpha} \rangle. \quad (5.96)$$

Vstavimo polje, ki smo ga izrazili s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji (enačba 5.94), upoštevamo zvezi (5.92) in (5.93) in zapišemo

$$\begin{aligned} \langle n_{\alpha}+1 | \hat{E} | n_{\alpha} \rangle &= -i \sum_{\beta} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\beta}}{2V\varepsilon_0}} \langle n_{\alpha}+1 | \hat{a}_{\beta}^{\dagger} - \hat{a}_{\beta} | n_{\alpha} \rangle E_{\beta}(\mathbf{r}) \\ &= -i \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\alpha}}{2V\varepsilon_0}} \sqrt{n_{\alpha}+1} E_{\alpha}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.97)$$

Od vseh operatorjev v razvoju polja je namreč od nič različen matrični element le za kreacijski operator za stanje  $\alpha$ .

Vpeljimo še simbol za matrični element koordinate med atomskima stanjema  $\langle 1 | \hat{x} | 2 \rangle = x_{12}$ . Iskana verjetnost za prehod iz začetnega stanja, v katerem je v votlini vzbujen atom in  $n_{\alpha}$  fotonov, v končno stanje, v katerem je atom v osnovnem stanju in  $n_{\alpha}+1$  fotonov v stanju  $\alpha$ , je tako

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_{\alpha} x_{12}^2}{V\varepsilon_0} (n_{\alpha}+1) E_{\alpha}^2(\mathbf{r}) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_{\alpha}). \quad (5.98)$$

Verjetnost za prehod je sorazmerna z  $n_\alpha + 1$  in je od nič različna, tudi če je število kvantov polja enako nič. To opisuje spontano sevanje. Prispevek, ki je sorazmeren s številom že prisotnih fotonov, predstavlja stimulirano sevanje. Verjetnost za prehod vsebuje še kvadrat prostorske odvisnosti polja  $E_\alpha^2(\mathbf{r})$ . Če ne poznamo natančnega položaja atoma ali če je plin atomov enakomerno porazdeljen po votlini, lahko ta člen nadomestimo s povprečno vrednostjo. Za stojče valovanje je to  $1/2$ .

Kolikšna pa je verjetnost za spontano emisijo? Spontana emisija je možna v vsa elektromagnetna nihanja votline s pravo frekvenco. Celotno verjetnost za prehod atoma iz vzbujenega stanja v osnovno izračunamo tako, da seštejemo verjetnosti za prehod z izsevanim fotonom v določenem stanju. Spomnimo se, da je ta verjetnost ravno enaka Einsteinovem koeficientu  $A_{21}$  (enačba 5.34)

$$A_{21} = \sum_{\alpha} w_{21} = \sum_{\alpha} \frac{\pi e^2 \omega_{\alpha} x_{12}^2}{2V\epsilon_0} \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_{\alpha}). \quad (5.99)$$

Za prostorsko odvisnost polja  $E^2(\mathbf{r})$  smo vzeli povprečje  $1/2$ . Vsoto po nihanjih lahko z uporabo enačbe (5.7) spremenimo v integral in upoštevamo enačbo (5.6). Dobimo

$$A_{21} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\hbar\epsilon_0} \int \rho(\omega_{\alpha}) \omega_{\alpha} \delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) d\omega_{\alpha} = \frac{e^2 \omega_0^3 x_{12}^2}{\epsilon_0 h c^3}, \quad (5.100)$$

pri čemer smo z  $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$  označili frekvenco prehoda. S tem smo izpeljali vrednost Einsteinovega koeficiente  $A_{21}$ .

 Pri gornjem izračunu Einsteinovega koeficiente  $A_{21}$  smo privzeli, da so vsi dipoli urejeni v smeri svetlobe. Če želimo rezultat izenačiti s koeficientom, ki smo ga vpeljali za izotropno sevanje črnega telesa, ga moramo pomnožiti s faktorjem  $\langle \cos^2 \vartheta \rangle = 1/3$ .

Zaradi spontanega sevanja vzbujeno atomske stanje nikoli ni popolnoma stacionarno. Poleg tega energija stanja s končnim razpadnim časom ni natančno določena, zato moramo verjetnost za stimulirano sevanje (enačba 5.98) malo popraviti. Delta funkcijo energije nadomestimo s končno široko funkcijo  $g(\omega - \omega_0)$ , ki ima vrh pri  $\omega_0$ . Zaradi spremembe integracijske spremenljivke nastopi še dodaten faktor  $1/\hbar$  in zapišemo

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_{\alpha} x_{12}^2}{2V\epsilon_0\hbar} (n_{\alpha} + 1) g(\omega_{\alpha} - \omega_0). \quad (5.101)$$

Poglejmo še Einsteinov koeficient za stimulirano sevanje  $B_{21}$ . Lahko ga izrazimo iz enačbe (5.27), če upoštevamo, da je gostota energije polja  $n_{\alpha}\hbar\omega_{\alpha}/V$

$$B_{21} = \frac{V w_{21}}{n_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} g(\omega_{\alpha} - \omega_0)} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\epsilon_0 \hbar^2}. \quad (5.102)$$

Razmerje Einsteinovih koeficientov izračunamo z uporabo enačb (5.100) in (5.102) in dobimo

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2 c^3}, \quad (5.103)$$

ki se ujema z razmerjem, ki smo ga izpeljali z uporabo Planckove formule (enačba 5.34). Prehojena pot jasno kaže zvezo med spontanim in stimuliranim sevanjem ter gostoto stanj elektromagnetnega polja.

### 5.11 \*Rabijeve oscilacije

Če je svetloba, ki vpada na dvonivojski sistem, zelo močna, lahko v primeru, da je frekvenca vpadne svetlobe  $\omega$  blizu frekvence prehoda  $\omega_0$ , pride do periodične izmenjave energije med svetlobnim poljem in dvonivojskim sistemom. Oscilacije števila fotonov oziroma pričakovane vrednosti zasedenosti nivojev imenujemo Rabijeve oscilacije<sup>10</sup>.

Obravnavajmo sklopitev dvonivojskega sistema z elektromagnetnim valovanjem v semiklasičnem modelu. To pomeni, da dvonivojski sistem obravnavamo kvantno, svetlobo, ki vpada nanj, pa kot klasično skalarno polje. V odsotnosti električnega polja zapišemo Hamiltonian za elektron kot

$$H_0 = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2|, \quad (5.104)$$

pri čemer je  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0$  frekvenca prehoda. V prisotnosti svetlobnega polja moramo dodati še člen, ki opisuje dipolno interakcijo. Celoten Hamiltonian postane časovno odvisen in ga zapišemo kot

$$H = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2| - e\hat{x}E_0 \cos(\omega t). \quad (5.105)$$

Schrödingerjevo enačbo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \quad (5.106)$$

rešujemo z nastavkom

$$|\psi\rangle = c_1(t)e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + c_2(t)e^{-i\omega_2 t}|2\rangle, \quad (5.107)$$

saj je valovna funkcija, ki popisuje stanje sistema, na splošno kombinacija obih stanj. Nastavek (enačba 5.107) in Hamiltonian (enačba 5.105) vstavimo v enačbo (5.106), ki jo enkrat pomnožimo z  $\langle 1|$ , drugič pa z  $\langle 2|$  in izpeljemo sistem dveh sklopljenih enačb

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{\hbar}V \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} c_2 \quad \text{in} \quad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{\hbar}V \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t} c_1, \quad (5.108)$$

pri čemer je  $V = -\langle 1|e\hat{x}E_0|2\rangle$ . Zapišemo še  $\cos(\omega t)$  kot kompleksno število in zanemarimo hitro spremenljajočo se komponento pri  $\omega_0 + \omega$ , tako da enačbi prepišemo v

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}Ve^{-i\Delta t} c_2 \quad \text{in} \quad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}Ve^{i\Delta t} c_1, \quad (5.109)$$

kjer je  $\Delta = \omega_0 - \omega$ . Dodajmo še začetni pogoj, da je sistem v osnovnem stanju in torej  $c_1(0) = 1$  in  $c_2(0) = 0$ . Rešitvi enačb (5.109) sta tako

$$c_1(t) = e^{-i\Delta t/2} \left( \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right) \quad \text{in} \quad (5.110)$$

$$c_2(t) = \frac{V}{i\hbar\Omega} e^{i\Delta t/2} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \quad (5.111)$$

Pri tem smo vpeljali krožno frekvenco

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{V}{\hbar}\right)^2} = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\langle 1|\hat{x}|2\rangle eE_0}{\hbar}\right)^2} = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \Omega_R^2}. \quad (5.112)$$

Krožno frekvenco  $\Omega_R = V/\hbar$  imenujemo Rabijeva krožna frekvenca.

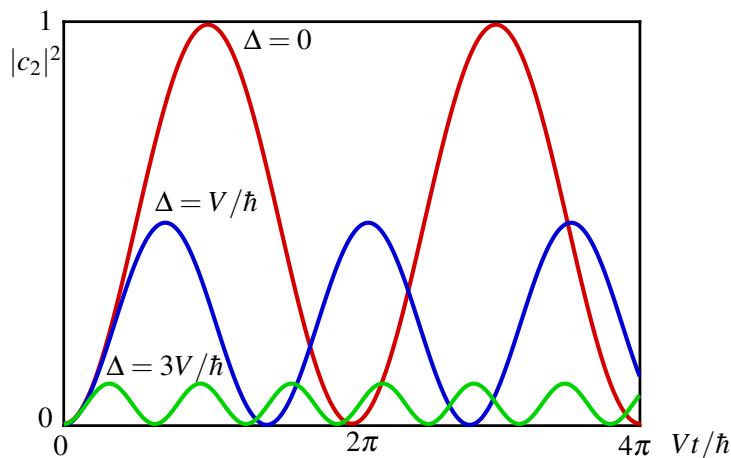
<sup>10</sup>Ameriški fizik in nobelovec Isidor Isaac Rabi, 1898–1988.

**Naloga 5.11.1** Pokaži, da enačbi (5.110) in (5.111) rešita sistem enačb (5.109) ob izbranih začetnih pogojih.

Poglejmo rezultat podrobneje. Verjetnost, da najdemo atom v stanju  $|2\rangle$ , je enaka

$$P_2(t) = |c_2(t)|^2 = \frac{V^2}{\hbar^2 \Omega^2} \sin^2(\Omega t/2). \quad (5.113)$$

Če je frekvenca vpadne svetlobe točno enaka frekvenci prehoda, je  $\Delta = 0$  in  $\Omega = \Omega_R = V/\hbar$ . Tako je amplituda nihanja zasedenosti vzbujenega stanja kar enaka 1 in sistem v celoti periodično prehaja iz osnovnega stanja v vzbujeno in nazaj. To pomeni, da prihaja izmenično do popolne absorpcije svetlobe in do popolne stimulirane emisije. Pri odstopajoči vpadni frekvenci se amplituda nihanja zmanjša, hkrati se poveča frekvenca oscilacij. Frekvenca oscilacij ni odvisna zgolj od frekvence vpadnega valovanja, ampak tudi od amplitude električne poljske jakosti. Groba ocena Rabijeve frekvence je  $\Omega \sim \text{MHz}$ .



Slika 5.10: Rabijeve oscilacije za tri različne vrednosti odstopanja frekvence vpadne svetlobe od frekvence prehoda  $\Delta = \omega_0 - \omega$ . Z naraščajočim odstopanjem se amplituda oscilacij zmanjšuje, njihova frekvenca pa povečuje.

Omenjeno velja, kadar je vpadna svetloba zelo močna, povsem koherentna in v sistemu ni motenj. V realnih sistemih so prisotni relaksacijski pojavi, kot na primer trki med atomi ali spontana emisija, zato so Rabijeve oscilacije dušene. Zaznamo jih tako lahko le v času, ki je krajši od obratne vrednosti širine spektralne črte ( $\sim 10^{-10} \text{ s}$ ).



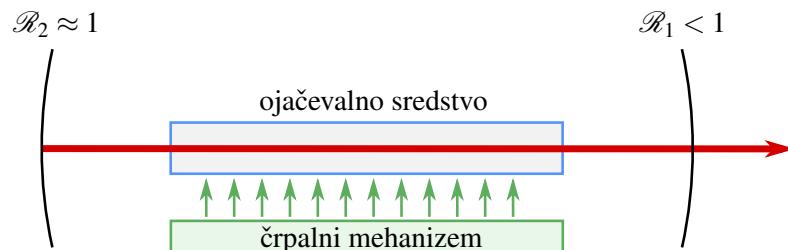
Rabijeve oscilacije niso omejene samo na optične prehode, ampak se pojavijo pri vrsti dvonivojskih sistemov, ki interagirajo z močnim spremenljajočim se zunanjim poljem. Poznamo jih na primer pri jedrski magnetni resonanci (NMR) ali kvantnih logičnih vezjih.

# 6. Laser

V prejšnjih poglavjih smo spoznali resonatorje, pojasnili proces ojačevanja svetlobe in opisali črpanje, ki je potrebno za ojačevanje optičnega signala. V tem poglavju bomo vsa ta spoznanja združili in komponente sestavili v eno samo napravo – laser. Zapisali bomo zasedbene enačbe in razložili delovanje laserjev. Spoznali bomo prednosti laserske svetlobe pred svetlogo iz navadnih svetil. Opisali bomo način delovanja sunkovnih laserjev in na koncu predstavili še semiklasični model laserja.

## 6.1 Laser

Spoznali smo, da se v sredstvu, v katerem med dvema nivojema dosežemo obrnjeno zasedenost, svetloba z ustreznou valovno dolžino ojačuje. Postavimo tako sredstvo v optični resonator. Na začetku nastaja predvsem spontano izsevana svetloba, ki se med zrcalom resonatorja odbija. V resonatorju se vzbujajo nihanja z nihajnimi frekvencami blizu frekvence atomskega prehoda, pri kateri snov ojačuje. V začetku je ojačenje za izbrana nihanja veliko, z naraščajočim intenzitetom pa se ojačenje zmanjšuje, dokler se ne izenači z izgubami. Sistem preide v stacionarno stanje in seva močno koherentno svetlobo. Tak izvor svetlobe imenujemo laser. Beseda laser je nastala iz kratice za *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* – ojačenje svetlobe s stimuliranim sevanjem.



Slika 6.1: Shema laserja s ključnimi deli: ojačevalno sredstvo, črpalni mehanizem in resonator



Kot klasično analogijo za laser vzemimo klarinet, ki je sestavljen iz cevi in ustnika. Cev deluje kot resonator, v katerem nastane stojni zvočni val, pri čemer je frekvenca stoječega vala določena z dolžino cevi in s številom vozlov. Naloga ustnika je dovajanje energije in s tem vzdrževanje konstantne amplitудe nihanja. To glasbenik doseže s pihanjem v ustnik in tresenjem prožnega jezička, ki s tresljaji proizvaja zvok. Tresenje jezička je približno periodično in vsebuje mnogo različnih frekvenc, tudi take, ki ustrezojo frekvenci stoječih valov v cevi. Ko amplituda tlaka v cevi naraste nad neko mejo, pride do zanimivega pojava. Nihanje tlaka v gornjem koncu cevi povratno deluje na ustnik in ga sila, da niha s frekvenco najmočneje vzbujenega stoječega vala v cevi, druge frekvence pa zamrejo. Moč pihanja gre le še v nihanje jezička s pravo frekvenco in ojačuje nihanje zračnega stolpca. Tako se s povratno zvezo med nihanjem jezička in stoječim valovanjem v cevi vzdržuje stoječe valovanje s konstantno amplitudo.

V grobem ima laser tri ključne sestavne dele: ojačevalno sredstvo, črpalni mehanizem in resonator, ki je v najpreprostejšem primeru sestavljen iz dveh ukrivljenih zrcal (slika 6.1). Črpalni mehanizem vzdržuje obrnjeno zasedenost v ojačevalnem sredstvu, resonator pa omogoča, da se svetloba med številnimi prehodi skozi ojačevalno sredstvo dovolj ojači. Odbojnost vsaj enega od zrcal mora biti manjša od 1, da skozenj lahko izhaja svetloba.

Zaenkrat se omejimo na najpreprostejši model laserja in privzemimo, da frekvenca le enega resonatorskega lastnega nihanja sovпадa s frekvenco prehoda aktivne snovi. Ta privzetek v večini laserjev ni avtomatično izpolnjen, vendar ga je pogosto mogoče doseči z dodatnimi elementi v resonatorju. Aktivno snov ozioroma ojačevalno sredstvo v laserju stalno črpamo in s tem vzdržujemo obrnjeno zasedenost.

Naj bo  $W$  energija svetlobnega valovanja v resonatorju. Zaradi izgub skozi zrcali in zaradi absorpcije ter sisanja v resonatorju se energija na en obhod resonatorja zmanjša za (enačba 4.33)

$$\Delta W_{\text{izgube}} = -\Lambda W = -(1 - \mathcal{R}_1 + 1 - \mathcal{R}_2 + 2\alpha L)W, \quad (6.1)$$

kjer so  $\Lambda$  celotne izgube,  $\alpha$  so izgube na enoto poti zaradi absoprcije in sisanja,  $L$  je dolžina resonatorja,  $\mathcal{R}_1$  in  $\mathcal{R}_2$  pa sta odbojnosti zrcal. V ojačevalnem sredstvu, v katerem vzdržujemo obrnjeno zasedenost, pride do ojačevanja s stimuliranim sevanjem. Energija nihanja resonatorja se tako na en obhod po enačbi (5.63) poveča za

$$\Delta W_{\text{ojačenje}} = \frac{G}{1 + W/W_s} W 2L'. \quad (6.2)$$

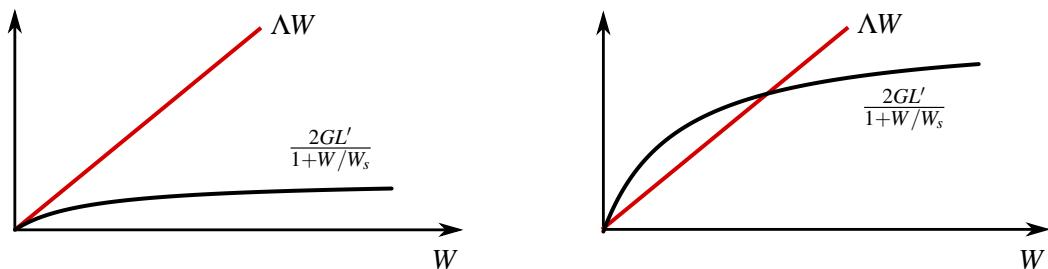
Vpeljali smo saturacijsko energijo  $W_s = V j_s / c$ . Dolžino ojačevalnega sredstva, ki se v splošnem razlikuje od dolžine resonatorja  $L$ , smo označili z  $L'$ . Zapis sicer pogosto poenostavimo in vzamemo  $L' = L$ , vendar tukaj zaradi jasnosti obdržimo ločen zapis. Privzeli smo tudi, da je ojačenje na en obhod dovolj majhno, da enačbe (5.63) ni treba integrirati.

V stacionarnem stanju se zmanjšanje energije zaradi izgub ravno izenači s povečanjem energije zaradi ojačenja. Zapišemo

$$|\Delta W_{\text{izgube}}| = |\Delta W_{\text{ojačenje}}|, \quad (6.3)$$

od koder sledi

$$\Lambda W = \frac{G 2L'}{1 + W/W_s} W. \quad (6.4)$$



Slika 6.2: Za majhne vrednosti ojačenja  $G$  ima enačba (6.4) eno samo rešitev pri  $W = 0$ , pri večjih ojačenjih pa ima tudi neničelno rešitev.

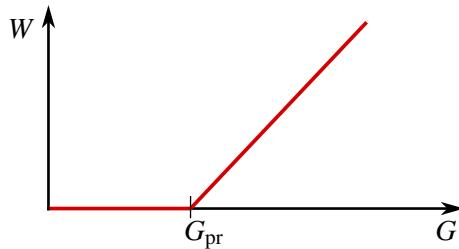
Enačba (6.4) ima pri majhnem ojačenju  $G$  eno samo rešitev, to je  $W = 0$ , pri večjih vrednostih ojačenja  $G$  pa obstaja še druga rešitev za energijo svetlobnega nihanja

$$W = W_s \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right), \quad (6.5)$$

pri čemer je

$$G_{\text{pr}} = \frac{\Lambda}{2L'}. \quad (6.6)$$

Združimo obe rešitvi: energija svetlobe v laserju je pod določeno vrednostjo ojačenja, imenujemo jo ojačenje na pragu delovanja  $G_{\text{pr}}$ , enaka nič, nad pragom pa linearno narašča z ojačenjem  $G$  (slika 6.3). Ojačenje je seveda odvisno od stopnje obrnjene zasedenosti, ta pa je povezana z močjo črpanja.



Slika 6.3: Odvisnost energije svetlobe v laserju od ojačenja

Izhodna moč laserja je enaka energiji, ki zapusti resonator skozi izhodno zrcalo, deljeni s časom obhoda resonatorja  $2L/c$

$$P = (1 - \mathcal{R}_1) \frac{c}{2L} W. \quad (6.7)$$

Ker so vsi predfaktorji v gornji enačbi konstantni, je izhodna moč kar sorazmerna z energijo svetlobe v resonatorju. Odvisnost izhodne moči laserja od črpanja je tako do konstante enaka, kot je prikazana na sliki (6.3).

Gostoto svetlobnega toka, ki izhaja iz laserja, potem zapišemo

$$j = \frac{P}{S} = \frac{1}{2} (1 - \mathcal{R}_1) j_s \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right). \quad (6.8)$$

Gornja enačba seveda velja za ojačenja  $G > G_{\text{pr}}$ .

---

**Naloga 6.1.1** Izračunaj izhodno moč iz laserja pri dani dolžini resonatorja ( $L = L'$ ), odbojnosti enega zrcala  $\mathcal{R}_2 = 1$ , notranjih izgubah na enoto dolžine  $\alpha$  in ojačenju  $G$ . Pokaži, da je izhodna moč največja pri odbojnosti izhodnega zrcala

$$\mathcal{R}_1 = 1 - 2\alpha L \left( \sqrt{\frac{G}{\alpha}} - 1 \right). \quad (6.9)$$


---

## 6.2 Zasedbene enačbe

Za podrobnejši opis delovanja laserja zapišemo zasedbene enačbe. Enačbam za zasedenost atomskih nivojev v trinivojskem sistemu (enačbe 5.52–5.54) dodamo še enačbo za energijo lastnega nihanja v resonatorju. Še naprej obravnavajmo primer, ko je vzbujeno le eno lastno resonatorsko stanje, opazujemo pa prehode med prvim in drugim vzbujenim atomskim stanjem (slika 5.6 b).

Preden zapišemo enačbe, napravimo še nekaj poenostavitev. Najprej privzamemo, da je razpadni čas spodnjega atomskega stanja  $|1\rangle$ , ki ga določa koeficient  $A_{10}$ , dosti krajši od razpadnega časa zgornjega stanja  $|2\rangle$ . Tedaj vsi atomi iz spodnjega stanja zelo hitro preidejo v osnovno stanje in  $N_1 \approx 0$ , če le ni preveč stimuliranega sevanja. Zanemarimo tudi spontano sevanje iz drugega vzbujenega nivoja  $A_{20} \approx 0$ . Celoten sistem potem opišemo z dvema spremenljivkama: prva je  $N_2$ , ki označuje zasedenost drugega vzbujenega stanja in hkrati približno obrnjeno zasedenost; druga je število fotonov  $n$ , ki opisuje energijo v izbranem lastnem stanju resonatorja. Energija polja v resonatorju je  $W = \hbar\omega n$  (enačba 5.15), ustrezna gostota energije pa  $w = \hbar\omega n/V$ , pri čemer je  $V$  volumen resonatorja.

Zasedbeni enačbi sta

$$\frac{dN_2}{dt} = rN - A_{21}N_2 - B_{21}gN_2 \frac{\hbar\omega}{V} n = rN - A_{21}N_2 - \frac{\sigma c}{V} N_2 n \quad (6.10)$$

in

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma c}{V} N_2 (n+1) - \frac{2}{\tau} n. \quad (6.11)$$

Prva enačba sledi neposredno iz enačbe (5.54) ob upoštevanju zgoraj navedenih poenostavitev. Drugo pa dobimo s sledečim razmislekom. Energija svetlobe oziroma število fotonov v resonatorju se povečuje predvsem zaradi stimuliranega sevanja, ki predstavlja zadnji člen v enačbi (6.10). Vemo pa, da je verjetnost za prehod atoma iz višjega v nižje stanje z izsevanjem fotona v izbrano stanje elektromagnetnega polja sorazmerna z  $n+1$  (enačba 5.101), kjer je  $n$  število fotonov v izbranem stanju. Če torej namesto  $n$  v zadnjem členu enačbe (6.10) pišemo  $n+1$ , opišemo poleg stimuliranega sevanja tudi prispevek spontanega sevanja. Dodamo še člen, s katerim popišemo zmanjševanje energije svetlobe v resonatorju zaradi izgub, kar opišemo z razpadnim časom  $\tau/2$  (enačba 4.31).

Gornji enačbi predstavljata sistem dveh sklopljenih diferencialnih enačb za časovni razvoj števila fotonov v resonatorskem stanju in za zasedenost zgornjega atomskega stanja. Enačbi sta nelinearni in nimata analitične rešitve. Vseeno pa lahko nekaj povemo o takem sistemu.

Poglejmo najprej stacionarne rešitve, za katere velja  $\dot{N}_2 = 0$  in  $\dot{n} = 0$ . Iz enačbe (6.10) izrazimo  $N_2$  in ga vstavimo v enačbo (6.11). Sledi

$$\frac{2}{\tau} n (A_{21}V + \sigma c n) = \sigma c r N (n+1). \quad (6.12)$$

Enačbo zapišemo še bolj pregledno, če vpeljemo koeficient ojačenja  $G$  (enačba 5.64) in ojačenje na pragu  $G_{\text{pr}}$  (enačbi 4.35 in 6.6)

$$G_{\text{pr}} n \left( 1 + \frac{\sigma c}{VA_{21}} n \right) = G(n+1). \quad (6.13)$$

Vpeljemo še brezdimenzijsko konstanto  $p$ , pri čemer upoštevamo zvezo med Einsteinovimi koeficienti (enačba 5.34)

$$p = \frac{VA_{21}}{\sigma c} = \frac{VA_{21}}{B_{21}\hbar\omega g} = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3 g} \approx \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \Delta\omega. \quad (6.14)$$

V zadnjem izrazu smo privzeli, da je  $g \approx 1/\Delta\omega$ . Parameter  $p$  je približno enak produktu gostote stanj elektromagnetnega polja v resonatorju (enačba 5.6), širine atomskega prehoda in volumna, torej kar številu vseh stanj v frekvenčnem intervalu atomskega prehoda. To število je navadno precej veliko  $p \sim 10^8\text{--}10^{10}$ .

**Naloga 6.2.1** Primerjaj izraz za  $p$  (enačba 6.14) z izrazom za saturacijsko gostoto toka  $j_s$  (enačba 5.60). Pokaži, da velja

$$p = \frac{W_s}{\hbar\omega} \quad (6.15)$$

in je torej  $p$  enako številu fotonov v resonatorju, pri katerem pride do nasičenja ojačenja, če je frekvenca nihanja resonatorja blizu centra atomske črte.

Enačbo (6.13) prepisemo

$$\frac{n^2}{p} - \left(\frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1\right)n - \frac{G}{G_{\text{pr}}} = 0 \quad (6.16)$$

s pozitivno rešitvijo

$$n = \frac{p}{2} \left( \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right) + \sqrt{\left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right)^2 + \frac{4G}{pG_{\text{pr}}}} \right). \quad (6.17)$$

Ker je  $p$  zelo veliko število, lahko koren razvijemo, če le ni ojačenje preveč blizu praga, ko je  $G/G_{\text{pr}} \sim 1$ .

Pod pragom je  $G < G_{\text{pr}}$  in

$$n \approx \frac{p}{2} \left( \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{G}{G_{\text{pr}}} \right) + \frac{2G}{p(G_{\text{pr}} - G)} \right) = \frac{G}{G_{\text{pr}} - G}. \quad (6.18)$$

Pri razvoju korena smo upoštevali, da mora biti pozitiven.

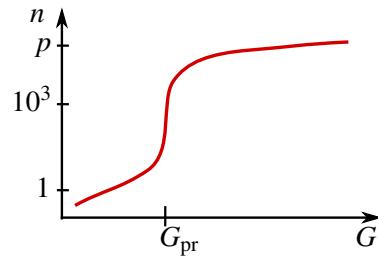
Nad pragom je število fotonov

$$n \approx p \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right) = \frac{W_s}{\hbar\omega} \left( \frac{G}{G_{\text{pr}}} - 1 \right). \quad (6.19)$$

Rezultat, ki je po pričakovanju skladen z enačbo (6.5), si oglejmo podrobneje. Pod pragom so izgube večje od črpanja in gre praktično vsa moč, ki jo dovedemo v sistem, preko spontanega sevanja v veliko število stanj elektromagnetnega polja. Število fotonov v izbranem resonatorskem nihanju je tako okoli ena do neposredne bližine praga, kjer hitro naraste (slika 6.4), nad pragom je reda velikosti  $p$ . Nad pragom povsem prevlada stimulirano sevanje v eno samo izbrano nihanje resonatorja. Prehod preko praga je zaradi velikega  $p$  tako hiter, da ga ni mogoče izmeriti. Izjema so polprevodniški laserji, katerih volumen – in posledično tudi  $p$  – je tako majhen, da je mogoče opaziti zvezen prehod preko praga.

Izračunjamo še stacionarno zasedenost zgornjega atomskega nivoja. Iz enačbe (6.11) sledi

$$N_2 = \frac{2V}{\tau\sigma c} \frac{n}{n+1} \approx \frac{2V}{\tau\sigma c}. \quad (6.20)$$



Slika 6.4: Odvisnost števila fotonov v resonatorju od ojačenja za  $p = 10^5$ .

Na pragu je po enačbi (6.17)  $n = \sqrt{p}$ . Sledi

$$N_{2\text{pr}} = \frac{2V}{\tau\sigma c} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + 1}. \quad (6.21)$$

Ker je  $p$  zelo veliko število, iz gornjih enačb sledi, da zasedenost višjega nivoja (oziroma obrnjena zasedenost) narašča do bližine praga, nad pragom pa je praktično konstantna in skoraj natanko enaka kot na pragu. To ni težko razumeti. Nad pragom je število fotonov v resonatorju veliko in linearno narašča z močjo črpanja. S tem se povečuje hitrost praznjenja gornjega atomskega stanja s stimuliranim sevanjem, kar ravno izniči učinek povečanja črpanja. V stacionarno delujočem laserju obrnjene zasedenosti torej ni mogoče povečati nad vrednost na pragu  $N_{2\text{pr}}$ . To ima pomembne praktične posledice, kot bomo videli v nadaljevanju.

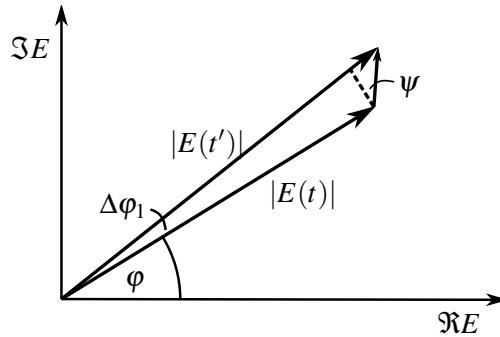
 Obravnava laserja z zasedbenimi enačbami je seveda zelo groba. Nismo upoštevali, da je prostorska odvisnost polja v delujočem laserju drugačna od lastnega stanja praznega resonatorja. Poleg tega smo privzeli, da so atomi lahko le v lastnih energijskih stanjih, kar je res le v primeru stacionarnih stanj brez zunanjega, časovno odvisnega polja svetlobe. Bolj podroben pristop je semiklasični model, pri katerem za opis svetlobe uporabimo klasično valovno enačbo, za atome pa kvantno mehaniko (glej poglavje 6.13). Ta model zadošča za opis skoraj vseh pojavov v laserjih razen vpliva spontanega sevanja. Za dosledno obravnavo tega je treba svetlobo opisati s pomočjo kvantne elektrodinamike, kar presega okvir te knjige.

Povzemimo na kratko, kaj smo spoznali o delovanju enofrekvenčnega laserja. Pri dovolj velikem ojačenju, ki ravno pokriva izgube resonatorja, je v stacionarnem stanju energija in s tem amplituda izbranega lastnega nihanja resonatorja različna od nič. Frekvenca svetlobe je določena z izbranim lastnim stanjem resonatorja, ki določa tudi prostorsko odvisnost valovanja v resonatorju in obliko izhodnega snopa. V navadnem stabilnem resonatorju je polje po obliki zelo blizu Gaussovemu snopu, zato je tak tudi izhodni snop. Gaussova prostorska odvisnost izhodnega snopa je morda najpomembnejša lastnost laserjev. Gaussov snop se, kot vemo, najmanj širi zaradi uklona in ga je mogoče zbrati v piko približne velikosti valovne dolžine. Laser se tako najbolj približa idealno točkastemu izvoru svetlobe.

### 6.3 Spektralna širina enega laserskega nihanja

Povejmo še nekaj o spektralni širini svetlobe enofrekvenčnega laserja. Če bi se lastno stanje elektromagnetnega polja v resonatorju obnašalo kot klasično harmonsko nihalo, bi bil spekter laserja neskončno ozek. Vendar imajo laserji končno spektralno širino – v idealnem primeru zaradi kvantizacije elektromagnetnega polja, v praksi pa zaradi zunanjih motenj. Poskusimo oceniti razširitev zaradi vpliva kvantizacije. Zaradi nje je poleg stimuliranega sevanja vedno prisotno tudi spontano sevanje. To predstavlja kvantni šum, ki vodi do razširitve spektra.

Predstavimo amplitudo nihanja  $E(t)$  na izbranem mestu v resonatorju kot kompleksno število, ki ga v kompleksni ravnini določata dolžina  $|E(t)|$  in faza  $\varphi$  (slika 6.5). Pri tem fazo določimo glede na neko začetno izbrano fazo. Ker je energija svetlobe sorazmerna s številom fotonov, je dolžina  $|E(t)|$  sorazmerna s korenem iz števila fotonov v izbranem lastnem nihanju. Stimulirano sevanje, ki ravno pokriva izgube resonatorja, vzdržuje dolžino  $|E(t)|$  praktično konstantno, nespremenjena ostaja tudi faza. Spontano sevanje velikosti amplitude nihanja ne spreminja dosti, vendar stohastična narava spontano izsevanih fotonov vpliva na njeno fazo. Majhen prispevek spontanega sevanja preko spreminjačoče se faze skrajša koherenčni čas in določa spodnjo mejo za širino spektralne črte.



Slika 6.5: Amplituda polja v resonatorju in njena spremembra zaradi spontanega sevanja

Pri spontani emisiji se izseva en foton s poljubno fazo. Prispevek h kompleksni amplitudi ima torej dolžino 1 in poljubno smer (slika 6.5). Zanima nas povprečje kvadrata spremembe faznega kota pri enem spontano izsevanem fotonu

$$\overline{(\Delta\varphi_1)^2} = \overline{\left(\frac{\cos\psi}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1}{2\bar{n}}, \quad (6.22)$$

kjer  $\psi$  označuje kot med fazo celotnega polja in spontano izsevanega fotona. Zaporedne spontane emisije so med seboj neodvisne, zato izračunamo povprečni kvadrat spremembe faze pri  $m$  emisijah tako, da seštejemo povprečne kvadrate za posamezne fotone

$$\overline{\Delta\varphi_m^2} = m\overline{\Delta\varphi_1^2} = \frac{m}{2\bar{n}}, \quad (6.23)$$

Ocenimo število spontano izsevanih fotonov na časovno enoto. Vemo, da stimulirano sevanje ravno pokrije izgube resonatorja, zato je stimulirano izsevanih fotonov na časovno enoto  $2\bar{n}/\tau$ . Vemo tudi, da je razmerje med verjetnostjo za stimulirano in spontano sevanje enako številu fotonov v danem stanju polja (enačba 5.98), zato je število spontanih sevanj na časovno enoto kar  $2/\tau$ . Tako je število spontano izsevanih fotonov v času  $t$  enako  $m = 2t/\tau$  in

$$\overline{\Delta\varphi^2(t)} = \frac{t}{\bar{n}\tau}. \quad (6.24)$$

Čas  $t_p$ , v katerem se faza znatno spremeni, je torej velikostnega reda

$$t_p \sim \bar{n}\tau = \frac{W}{\hbar\omega} \tau = \frac{P}{\hbar\omega} \tau^2. \quad (6.25)$$

Ker je število fotonov v nihanju nad pragom zelo veliko ( $\sim 10^9$  v majhnem He-Ne laserju),  $\tau$  pa je  $\sim 10^{-7}$ , je karakteristični čas za fazno razširitev idealnega laserja  $t_p \sim 100$  s.

Iz enačbe (6.25) vidimo tudi, da je spektralna širina, ki je podana z  $1/t_p$ , obratno sorazmerna z izhodno močjo laserja. Spodnjo mejo za spektralno širino pri dani izhodni moči laserja podaja Schawlow-Townseva limita<sup>1</sup>

$$\Delta\nu_{\min} = \frac{\pi h\nu}{P} \Delta\nu_R^2, \quad (6.26)$$

pri čemer  $\Delta\nu_R$  predstavlja širino nihanja praznega resonatorja.<sup>2</sup> V neposredni bližini praga, kjer je  $\bar{n} \sim 1$ , je spektralna širina približno enaka širini nihanj praznega resonatorja.

Dejanski laserji seveda nimajo niti približno tako ozkega spektra, kot smo ga pravkar ocenili. Vemo, da je frekvenca laserja določena z dolžino resonatorja ( $\nu = Nc/2L$ ), pri čemer je  $N$  zelo veliko celo število. Že majhna sprememba dolžine resonatorja povzroči spremembo frekvence laserja, pri znatnejši spremembi dolžine pa lahko pride tudi do preskoka vzbujenega stanja resonatorja, to je števila  $N$ . Dolžina resonatorja se spreminja predvsem zaradi zunanjih mehanskih motenj in zaradi spremjanja temperature. Če se posebej ne potrudimo s konstrukcijo resonatorja, so fluktuacije frekvence kar reda velikosti razmika med sosednimi stanji resonatorja, to je reda velikosti  $\sim 100$  MHz. Fluktuacije dolžine je mogoče zmanjšati s skrbno konstrukcijo, temperaturno stabilizacijo in uporabo materialov z majhnim topotnim raztezkom. Na tak način je mogoče dobiti laser z efektivno spektralno širino pod  $\sim 1$  MHz.

 Zapisali smo, da lahko s posebno konstrukcijo laserjev dosežemo spektralno širino pod  $\sim 1$  MHz. Vendar najmanjša dosežena spektralna širina znaša  $\sim 10$  mHz, kar je še 8 velikostnih redov manj! Gre za prav poseben laser iz monokristalov silicija, hlajenega na  $-150$  °C. Fluktuacije dolžine resonatorja so pogojene s termičnimi fluktuacijami v odbojnih plasteh, ki znašajo okoli  $10^{-17}$  m. Koherenčna dolžina takega laserja je več milijonov kilometrov<sup>3</sup>.

Velja opozoriti, da je narava spektralne razširitve v laserju drugačna kot v navadnih svetilih. V drugem poglavju smo videli, da intenziteta svetlobe navadnega svetila fluktuirata na časovni skali koherenčnega časa, ki je obraten spektralni širini (poglavlje 2.2). Šum navadnih svetil je torej amplitudno moduliran šum. Pri enofrekvenčnem laserju je drugače. Amplituda in intenziteta izhodne svetlobe sta konstantni, fluktuirata le frekvenca oziroma faza. Šum laserja je torej v obliki frekvenčne modulacije.

## 6.4 Primerjava laserjev in navadnih svetil

Primerjajmo enofrekvenčni laser, v katerem je vzbujeno le eno osnovno stanje resonatorja Gaussove oblike, z navadnim nekoherentnim izvorom svetlobe.

Svetlobni snop iz laserja ima dve takoj očitni odliki: je zelo usmerjen in zelo enobarven. Prva lastnost je posledica tega, da je lastno stanje stabilnega resonatorja Gaussove oblike in je zato tak tudi izhodni snop. Divergenca Gaussovega snopa je posledica uklona in je najmanjša možna. Valovne fronte izhodne svetlobe so gladke in na dani razdalji ves čas enake, zato je laserski snop prostorsko idealno koherenten. Koherenten Gaussov snop lahko z ustrezno optiko zberemo v piku velikosti valovne dolžine, s čimer dosežemo že pri razmeroma majhni izhodni moči zelo veliko gostoto svetobnega toka. To je zelo uporabno v tehnologiji, na primer za natančno in čisto obdelavo materialov, ter v medicini za zahtevne kirurške posege.

<sup>1</sup>Ameriška fizika in nobelovec Arthur Leonard Schawlow, 1921–1999, in Charles Hard Townes, 1915–2015.

<sup>2</sup>Natančnejši izračun odstopa od preprosto izpeljanega za faktor 2. V zapisanem izrazu je že upoštevan pravilen predfaktor.

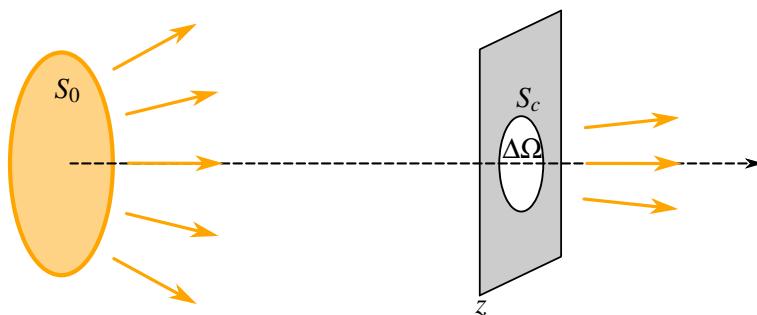
<sup>3</sup>Phys. Rev. Lett. **118**, 263202 (2017).

Kako pa je z navadnimi svetili? V njih atomi sevajo neodvisno, zato izsevana svetloba ni prostorsko koherentna. Valovna fronta na danem mestu je nepravilna in se v koherenčnem času znatno spremeni. Vendar tudi iz svetlobe navadnega nekoherentnega svetila lahko pridobimo koherenčen snop, če na dano razdaljo od svetila postavimo zaslонko, ki je manjša od koherenčne ploskve na tistem mestu (glej razdelek 2.5). Ocenimo moč tako dobljenega koherentnega snopa za zaslonko.

Svetilo naj ima svetlost  $B^4$ . Moč koherentnega snopa za zaslonko, ki prepušča svetlobo skozi prostorski kot  $\Delta\Omega$ , je (slika 6.6)

$$P = BS_0\Delta\Omega = \frac{BS_0S_c}{z^2} \sim \frac{BS_0}{z^2} \frac{\lambda^2 z^2}{S_0} = B\lambda^2. \quad (6.27)$$

Pri tem je  $S_0$  površina svetila,  $z$  oddaljenost zaslonke od svetila,  $S_c$  pa velikost koherenčne ploskve, za katero smo uporabili oceno (enačba 2.35). Da iz  $S_0 = 1 \text{ mm}^2$  velikega svetila dosežemo koherenčen snop svetlobe z valovno dolžino okoli 550 nm, mora biti premer zaslonke, ki jo postavimo 1 m od izvora, okoli 0,6 mm. V tem primeru znaša moč, ki prehaja skozi zaslonko, pri svetlosti  $100 \text{ W/cm}^2$  le približno  $3 \cdot 10^{-7} \text{ W}$ . Pri podobni divergenci žarka je močno navadno svetilo torej štiri redne velikosti šibkejše od zelo šibkih laserjev z močjo 1 mW.



Slika 6.6: K izračunu moči koherentnega snopa svetlobe iz nekoherentnega svetila

Druga odlična lastnost svetlobe iz enofrekvenčnega laserja je njena zelo majhna spektralna širina. Z nekaj truda je ta lahko pod 1 kHz, emisijske črte v plinu pa so zaradi Dopplerjeve razširitve široke vsaj nekaj GHz, pa še to le v razmeroma redkem in hladnem plinu, kjer je svetlost majhna. Primerjajmo spektralno gostoto moči laserja in navadnih svetil. Majhen He-Ne laser seva 1 mW v približno  $10^7$  Hz in spektralna gostota moči je  $dP/d\nu \sim 10^{-10} \text{ W/Hz}$ . Po drugi strani zelo svetla živosrebrna svetilka seva v močno razširjene spektralne črte s širino okoli 10 nm, kar ustreza  $\sim 10^{13} \text{ Hz}$ . Spektralna gostota v koherentnem snopu, ki smo ga pripravili iz navadne svetilke, je tako le okoli  $3 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$ . Šolski He-Ne laser torej prekaša najmočnejše nekoherentno svetilo za 10 velikostnih redov. Z laserji je seveda mogoče doseči znatno večje moči, v sunkih tipično do okoli  $10^{12} \text{ W}$ , tako da po spektralni gostoti moči v koherentnem snopu laserji prekašajo običajna svetila 20–25 velikostnih redov. Verjetno v zgodovini težko najdemosé kak drug izum, ki je prinesel tolikšno izboljšavo v neki bistveni količini in tako ni nenavadno, da je prihod laserjev v začetku 60-ih let povzročil preporod optike.

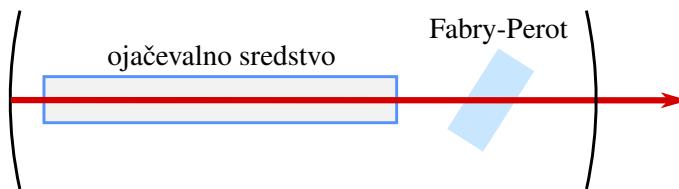
<sup>4</sup>Svetilnost je moč, izsevana v dan prostorski kot  $I = dP/d\Omega$ ; svetlost pa je svetilnost na enoto ploskve  $B = I/S = dP/Sd\Omega$ .

## 6.5 Večfrekvenčni laser

Do zdaj smo obravnavali laserje, v katerih je bilo vzbujeno eno samo stoječe valovanje. Vendar je ojačevalna širina večine aktivnih (ojačevalnih) sredstev navadno večja od razlike med frekvencami posameznih stanj resonatorja. V plinih, na primer, je ojačevalna širina zaradi Dopplerjevega pojava vsaj nekaj GHz, lastne frekvence resonatorja pa so pri 30 cm dolgem resonatorju razmagnjene za 500 MHz. Tako se lahko zgodi, da ojačenje v laserju za več lastnih nihanj hkrati presega ojačenje na pragu. Takrat je v resonatorju vzbujenih več lastnih nihanj in svetloba iz takega večfrekvenčnega laserja ni monokromatska, temveč je sestavljena iz množice ozkih črt znotraj ojačevalnega pasu. Izsevana svetloba ni bistveno bolj monokromatska od ustrezne spektralne komponente svetlečega plina. Ostaja pa seveda prostorsko koherentna.

Za holografijo, interferometrijo in nekatere spektroskopske uporabe potrebujemo ozko spektralno črto. Zato moramo poskrbeti, da je v laserju vzbujeno le eno samo lastno nihanje resonatorja, najbolje tisto, ki je najbliže vrhu ojačenja aktivnega sredstva. To dosežemo tako, da za vsa ostala nihanja povečamo izgube, na primer s Fabry-Perotovim etalonom, ki ga vstavimo v laserski resonator (slika 6.7). Njegova prepustnost je odvisna od krožne frekvence svetlobe  $\omega$ , debeline ploščice  $L$ , lomnega količnika  $n$ , odbojnosti na stenah  $\mathcal{R}$  in nagiba glede na os resonatorja  $\varphi$  (slika 4.2). Zapišemo jo z enačbo (4.9)

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2(\frac{n\omega}{c} L \cos \varphi)}. \quad (6.28)$$



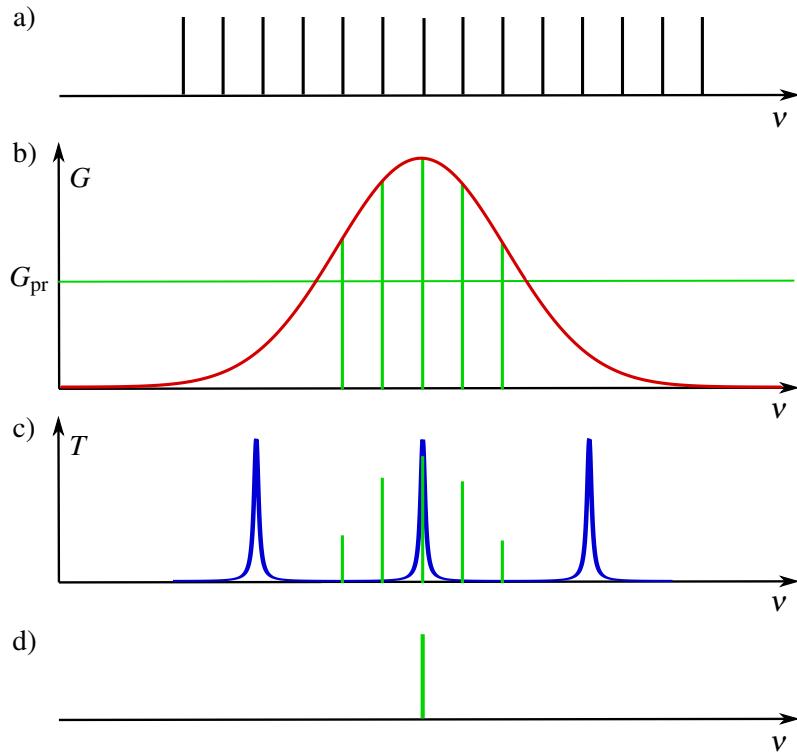
Slika 6.7: Shema laserja s Fabry-Perotovim etalonom

Debelino etalona in njegov nagib izberemo tako, da vrh prepustnosti sovпадa z izbranim lastnim stanjem resonatorja. Izgube za ostala nihanja, ki bi sicer bila ojačena, se tako povečajo in laser sveti le pri eni sami izbrani frekvenci. Ta proces je shematsko prikazan na sliki (6.8): izmed vseh možnih stanj v resonatorju (a) svetlo le tista, za katere je ojačenje nad pragom (b). Ko v resonator dodamo Fabry-Perotov etalon z razmeroma velikim razmikom med sosednjimi vrhovi prepustnosti (c), je ojačeno eno samo nihanje (d). Ker zadošča že zmerno povečanje izgub, je odbojnost sten etalona navadno dokaj nizka, pod 0,5.



Nagib etalona omogoča natančno spremicanje izbrane frekvence, poleg tega pa je nujen, da se neprepuščena svetloba odbije ven iz smeri osi resonatorja. Če bi bila os etalona vzporedna z osjo resonatorja, bi se pojavile dodatne resonance, kar bi močno motilo delovanje laserja. Namesto Fabry-Perotovega etalona se uporablajo tudi prizme in uklonske mrežice.

Opisali smo, kako v laserju dosežemo delovanje pri enem samem longitudinalnem nihaju. Poleg tega je treba omejiti tudi ojačenje višjih prečnih nihanj. To navadno dosežemo z zaslonkami, saj so snopi višjih redov bolj razširjeni od osnovnega.



Slika 6.8: Lastne frekvence resonatorja (a) in frekvenčna odvisnost ojačenja z označenim pragom delovanja (b). Z zeleno so označene tiste lastne frekvence, ki se v laserju ojačujejo. Ko dodamo Fabry-Perotov etalon z dano prepustnostjo (c), povečamo izgube za vse načine, ki bi sicer bili ojačeni, razen za enega. Tako dosežemo delovanje laserja pri eni sami frekvenci (d).

## 6.6 Relaksacijske oscilacije

Stacionarno delovanje laserjev smo že dobila spoznali. Za obravnavo nestacionarnega delovanja se moramo vrniti k obravnavi zasedbenih enačb (6.10) in (6.11). Na splošno je treba zapisati sistem diferencialnih enačb reševati numerično, vseeno pa lahko nekaj povemo o obnašanju laserja v bližini stacionarnega delovanja.

Spet se omejimo na enofrekvenčni laser, v katerem zasedenost vzbujenega stanja in število fotonov v njem opišemo z enačbama (6.10) in (6.11). Najprej zaradi preglednosti vpeljemo brezdimnezijski čas  $t' = tA$  in  $\tau' = \tau A$ , kar pomeni, da merimo čas v enotah življenjskega časa laserskega nivoja. Ponovno uporabimo parameter  $p = VA/(B\hbar\omega g)$  (enačba 6.14), ki pomeni število lastnih stanj elektromagnetnega polja v volumnu  $V$  in znotraj spektralne širine laserskega prehoda. Enačbi zapišemo

$$\frac{dN_2}{dt'} = -\frac{nN_2}{p} - N_2 + N_{20} \quad (6.29)$$

$$\frac{dn}{dt'} = \frac{nN_2}{p} - \frac{2}{\tau'} n. \quad (6.30)$$

Pri tem smo vpeljali konstanto  $N_{20} = rN/A$ , ki ima tudi nazornen pomen. Predstavlja zasedenost, ki bi jo dobili pri danem stacionarnem črpanju, če v izbranem stanju ne bi bilo fotonov in s tem ne stimuliranega sevanja. Meri torej moč črpanja. V enačbi za hitrost sprememjanja števila fotonov smo zanemarili prispevek spontanega sevanja, za katerega smo že ugotovili, da se pozna le do praga.

Poščimo približne rešitve sistema sklopljenih diferencialnih enačb z linearizacijo. Naj laser najprej deluje stacionarno, v nekem trenutku pa se nekoliko izmakne iz stacionarnega stanja. To se lahko zgodi, na primer, če v nekem trenutku spremenimo moč črpanja. Trenutno zasedenost  $N_2$  in število fotonov  $n$  lahko zapišemo v obliki

$$N_2 = N_{2s} + x \quad \text{in} \quad n = n_s + y, \quad (6.31)$$

kjer sta  $N_{2s}$  in  $n_s$  vrednosti v stacionarnem stanju. Zanju velja

$$N_{2s} = \frac{2p}{\tau'} \quad (6.32)$$

in

$$n_s = p \frac{N_{20} - N_{2s}}{N_{2s}} = p(a - 1). \quad (6.33)$$

Enačba (6.32) je v skladu s tem, da je stacionarna zasedenost enaka zasedenosti na pragu, ta pa je odvisna od izgub resonatorja. Razmerje  $a = N_{20}/N_{2s}$  je mera za moč črpanja in mora biti v delajočem laserju večje od 1. V večini praktičnih primerov doseže vrednosti  $a \sim 5$ .

Vstavimo nastavka (enačbi 6.31) v enačbi (6.29 in 6.30). Dobimo sistem enačb

$$\frac{dx}{dt'} = -\frac{n_s N_{2s}}{p} - N_{2s} + N_{20} - \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - x \quad (6.34)$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{n_s N_{2s}}{p} - \frac{2}{\tau'} n_s + \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - \frac{2}{\tau'} y. \quad (6.35)$$

Ker sta  $x$  in  $y$  majhna v primerjavi s stacionarnimi vrednostmi, lahko mešan produkt  $xy$  zanemarimo. Vsi členi, ki vsebujejo le stacionarne vrednosti, dajo ravno 0, saj smo jih tako določili. Če upoštevamo še izraza za stacionarni vrednosti (enačbi 6.32 in 6.33), sta linearizirani diferencialni enačbi za odmika od stacionarnih vrednosti

$$\frac{dx}{dt'} = -ax - \frac{2}{\tau'} y \quad \text{in} \quad \frac{dy}{dt'} = (a - 1)x. \quad (6.36)$$

Linearni sistemi diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti rešimo tako, da poiščemo rešitev v obliki eksponentne funkcije

$$x = x_0 e^{\lambda t'} \quad \text{in} \quad y = y_0 e^{\lambda t'}. \quad (6.37)$$

Dobljeni homogeni sistem linearnih enačb

$$(a + \lambda)x_0 + \frac{2}{\tau'} y_0 = 0 \quad (6.38)$$

$$-(a - 1)x_0 + \lambda y_0 = 0 \quad (6.39)$$

ima netrivialno rešitev le, če je njegova determinanta enaka nič

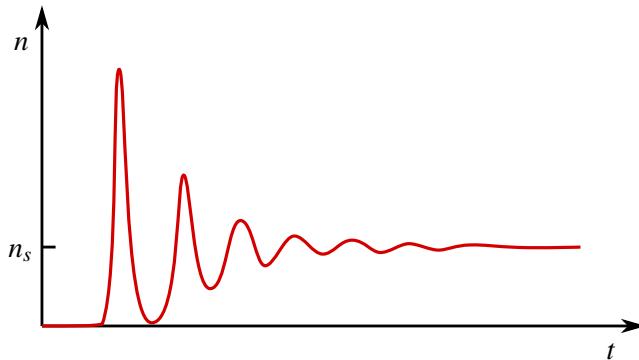
$$\lambda^2 + a\lambda + \frac{2}{\tau'}(a - 1) = 0. \quad (6.40)$$

Rešitvi sta

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2}{\tau'}(a - 1)}. \quad (6.41)$$

Obnašanje rešitve je odvisno od velikosti brezdimenzijskega relaksacijskega časa nihanja resonatorja  $\tau' = A\tau$ .

Kratek račun pokaže, da je za  $\tau' > 2$  izraz pod korenom za vse vrednosti  $a$  pozitiven in laser se vrača v stacionarno stanje eksponentno. Za  $\tau' < 2$  pa je koren v določenem območju parametra  $a$  imaginaren in laser se vrača v stacionarno stanje z dušenim nihanjem, ki mu pravimo relaksacijske oscilacije. Primer takega nihanja pri vključitvi laserja kaže slika (6.9). Opazimo, da sta tako frekvenca relaksacijskih oscilacij kot tudi karakteristični čas dušenja oscilacij odvisna od parametra  $a$ , torej od moči črpanja.



Slika 6.9: Relaksacijske oscilacije števila fotonov laserja po vklopu

Poglejmo še primer. Vzemimo vrednost  $\tau \sim 10^{-7}$  s in razpadno konstanto laserskega nivoja  $A \sim 10^5$ /s. Tedaj je  $\tau' \sim 10^{-2}$  in relaksacijske oscilacije se pojavijo pri vseh dosegljivih vrednostih črpanja nad pragom, to je za  $a > 1$ . Ker  $a$  v praksi ni nikoli dosti večji od 3–5, je krožna frekvenca oscilacij v brezdimenzijskih enotah približno enaka  $\omega_r' \sim 1/\sqrt{\tau'}$ . Ko preidemo nazaj na prave enote časa, dobimo  $\omega_r \sim \sqrt{A/\tau}$ . Krožna frekvenca relaksacijskih oscilacij je v tem primeru velikostnega reda geometrijske sredine med razpadnima konstantama nihanja resonatorja in atomskega stanja. Tipične vrednosti frekvence relaksacijskih oscilacij so  $\sim 10^5$  Hz, karakteristični čas dušenja pa  $\sim 10^{-5}$  s.



Relaksacijske oscilacije so praktično pomembne, saj določajo zgornjo mejo hitrosti, s katero lahko izhodna moč laserja sledi modulaciji črpanja. Poleg tega se pri tej frekvenčni pojavi rezonanca, pri kateri se šum črpanja ojačeno prenaša v šum izhodne moči.

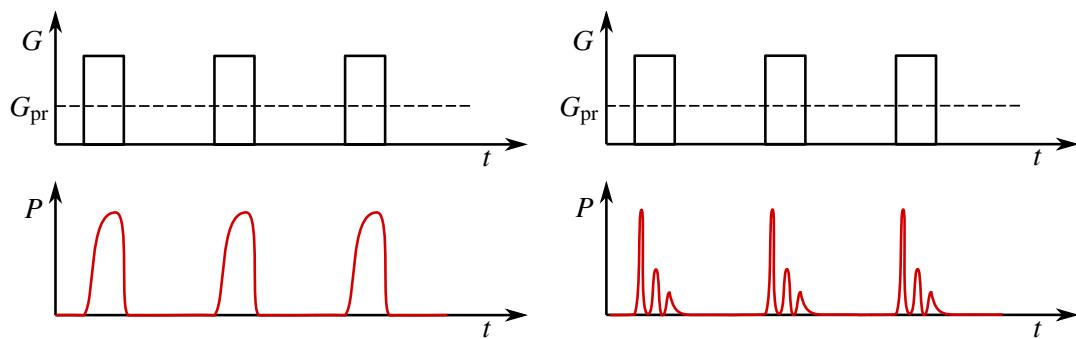
## 6.7 Sunkovni laserji

Kadar potrebujemo veliko izhodno moč svetlobe iz laserja pri zmerni povprečni porabi energije, zvezno delujoči laserji, ki smo jih obravnavali do zdaj, niso primerni. Poslužiti se moramo sunkovnih laserjev, ki v kratkem časovnem intervalu delujejo z zelo veliko izhodno močjo.

Poglejmo primer. Močan zvezno delujoč laser ima izhodno moč 10 kW. Sunkovni laser pa naj oddaja svetlobo v 10 ns dolgih sunkih s povprečno energijo 1 J in s ponovitvijo 1000/s. Povprečna moč, s katero deluje tak laser, je 1 kW, moč, ki jo dosega v sunkih, pa je 100 MW. Tako pri nižji povprečni moči laserja dosežemo moči, ki so za 5–10 velikostnih redov večje od moči zvezno delujočih laserjev.

V grobem ločimo dva načina sunkovnega delovanja laserjev. V prvem primeru periodično spreminjammo črpalno moč, v drugem pa periodično spreminjammo izgube v resonatorju. V slednjo skupino uvrščamo laserje na preklop dobrote in laserje, ki uklepajo faze valovanj.

Obravnavajmo najprej najpreprostejši način, pri katerem periodično moduliramo črpanje. To dosežemo na primer z bliskavko ali drugim sunkovnim laserjem. V intervalu črpanja je ojačenje večje od izgub in svetloba izhaja iz laserja, ko pa črpanja ni, so izgube prevelike in laser ne sveti (slika 6.10 levo). Za dosego velike obrnjene zasedenosti v ojačevalnem sredstvu mora biti spremembra črpanja zelo hitra, da v času preklopa še ne pride do znatnega povečanja števila fotonov. Najbolj pogosto se modulacija črpanja uporablja v polprevodniških laserjih, saj v njih črpanje poteka z električnim tokom, ki ga je zelo preprosto modulirati z razmeroma velikimi frekvencami.



Slika 6.10: Delovanje sunkovnega laserja z periodično moduliranim črpanjem (levo), pri katerem lahko pride do neželenih oscilacij (desno)

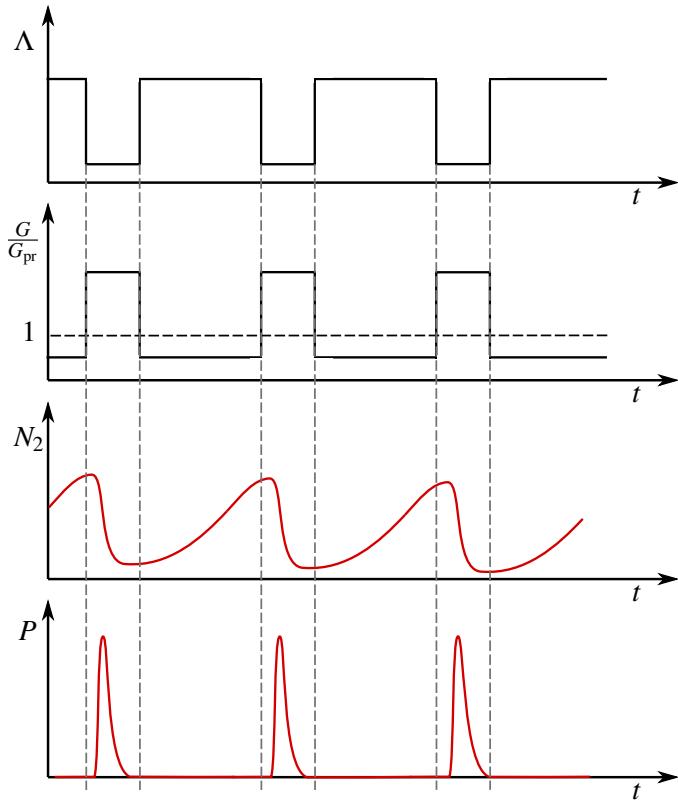
Pri modulaciji črpanja se lahko pojavi težava. Ko ob močnem črpanju obrnjena zasedenost znatno preseže zasedenost praga (v nestacionarnem stanju je to mogoče), laser posveti in v kratkem času zasedenost pade nazaj pod prag. Če tedaj črpanje še traja, zasedenost naraste in laser ponovno posveti. To se lahko večkrat ponovi. Razmiki med zaporednimi sunki so reda velikosti periode relaksacijskih oscilacij, so pa lahko precej nepravilni (slika 6.10 desno). Pri takem režimu delovanja v posameznem sunku ne dobimo razpoložljive energije črpanja v enem samem lepo oblikovanem sunku, kar močno omejuje uporabnost tega pristopa.

## 6.8 Delovanje v sunkih s preklopom dobre

Namesto modulacije črpanja lahko v sunkovnih laserjih periodično spremojemo izgube. Čim večje so namreč izgube, višji je prag za delovanje laserja in večja je lahko stopnja obrnjene zasedenosti. Tako v sistemu atomov shranimo več energije, ki se lahko izseva iz sistema preko stimuliranega sevanja. Ko je enkrat ustvarjena velika obrnjena zasedenost, izgube zelo hitro zmanjšamo. Optično ojačenje je veliko in energija svetlobe v kratkem času močno naraste. S tem se tudi obrnjena zasedenost hitro zniža na vrednost močno pod pragom. Predstavljamo si lahko, da dobimo prvi nihaj relaksacijskih oscilacij, le da je začetno stanje daleč od stacionarnega in zato linearni približek ne drži več. Iz laserja dobimo kratek in zelo močan sunek svetlobe, pri čemer je energija sunka skoraj tolikšna kot je bila energija obrnjene zasedenosti. Tipične dolžine sunkov, ki jih dosežemo na ta način, so  $t \sim 10$  ns, sunki pa se ponavljajo s frekvenco  $v \sim 1\text{--}100$  kHz. Dogajanje v laserju kaže slika (6.11).



V elektrotehniki se izgube resonatorjev podajajo z dobroto  $Q$ , to je razmerjem frekvence lastnega stanja in njegove širine. Ker s povečanjem izgub spremenimo širino črte in z njo dobroto, opisano tehniko imenujemo preklop dobre.



Slika 6.11: Izgube ( $\Lambda$ ), relativno ojačanje ( $G/G_p$ ), zasedenost višjega nivoja ( $N_2$ ) in izsevana moč laserja ( $P$ ) v odvisnosti od časa, kadar laser deluje v režimu preklopa dobrote.

Izgube resonatorja je mogoče spremenjati na več načinov. Najpreprosteje je mehansko, na primer z vrtečo prizmo ali zrcalom. Tedaj je resonator uglašen le v kratkem trenutku, ko žarek vpada pravokotno na zrcalo resonatorja. Bolj razširjen način je z vgradnjo elektro-optičnega ali akusto-optičnega modulatorja, o katerih bomo govorili v nadaljevanju (poglavlje 8). Na kratko povejmo, da z njimi lahko izgube preklapljam zelo hitro, saj to naredimo s spremenjajočo se električno napetostjo.

Kot smo že povedali, sistema nelinearnih enačb za zasedenost in število fotonov (enačbi 6.10 in 6.11) ne moremo analitično rešiti. Preden jih podrobnejše pogledamo, napravimo nekaj ocen. Dolžina izhodnega sunka je odvisna od hitrosti, s katero se izprazni zgornji laserski nivo. To se ne more zgoditi hitreje kot v nekaj preletih sunka skozi resonator. Trajanje sunka je torej vsaj nekajkrat  $2L/c$ , to je za 15 cm dolg resonator vsaj nekaj ns.

Ocenimo še hitrost naraščanja števila fotonov na začetku in njegovega upadanja na koncu sunka. Še enkrat zapišemo enačbi za zasedenost in za število fotonov, pri čemer upoštevajmo, da nas zanima le dogajanje v času sunka, ki je zelo kratek v primerjavi z atomskim razpadnim časom, zato ustrezni člen v enačbi (6.10) zanemarimo. Navadno je tudi črpanje prešibko, da bi med sunkom samim znatno vplivalo na zasedenost, zato lahko člen  $rN$  izpustimo. Seveda pa je črpanje upoštevano v tem, da je v sistemu velika začetna zasedenost  $N_{20}$ . Tako ostane

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{\sigma c}{V} n N_2 \quad (6.42)$$

in

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma c}{V} n N_2 - \frac{2}{\tau} n. \quad (6.43)$$

Na začetku sunka je  $n$  majhen,  $N_2$  pa velik in njegova vrednost se ne razlikuje dosti od začetne vrednosti  $N_{20}$ . Število fotonov na začetku sunka tako narašča približno eksponentno

$$n(t) = n_0 e^{t N_{20} \sigma c / V} = n_0 e^{t / \tau_r}. \quad (6.44)$$

Začetnega števila fotonov ne poznamo, vemo pa, da je velikostnega reda 1, saj predstavlja spontano emisijo. Da  $n$  naraste na znatno vrednost, recimo več od  $10^{10}$  fotonov, je potreben čas blizu  $25 \tau_r$ .

Proti koncu sunka  $N_2$  pojema zaradi sevanja svetlobe in člen z  $N_2$  lahko zanemarimo. Ostane samo še en člen, ki da preprosto rešitev

$$n(t) = \tilde{n}_0 e^{-2t/\tau}. \quad (6.45)$$

Eksponentno pojemanje števila fotonov na koncu sunka je torej določeno z izgubami v resonatorju (enačba 4.35).

Dogajanja v vmesnih časih ne moremo enostavno popisati, lahko pa najdemo medsebojno zvezo med  $n$  in  $N_2$ , če iz enačb eliminiramo čas. Izrazimo  $dt$  iz enačbe (6.42) in ga vstavimo v enačbo (6.43). Sledi

$$dn = -dN_2 + \frac{\tilde{N}_2}{N_2} dN_2, \quad (6.46)$$

kjer smo zapisali  $\tilde{N}_2 = 2V/(\sigma c \tau)$ . Enačbo brez težav integriramo

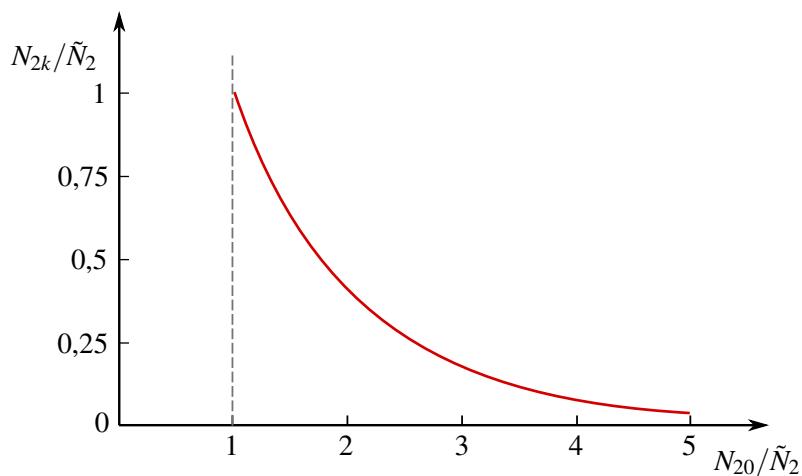
$$n = N_{20} - N_2 + \tilde{N}_2 \ln \frac{N_2}{N_{20}}. \quad (6.47)$$

Pri tem smo privzeli, da je na začetku sunka  $n = 0$  in  $N_2 = N_{20}$ .

Iz dobljene zveze najprej izračunamo, kolikšna je zasedenost na koncu sunka  $N_{2k}$ . Izhajamo iz pogoja, da je število fotonov na koncu sunka  $n = 0$ , kar da transcendentno enačbo za  $N_{2k}$

$$\ln \frac{N_{2k}}{N_{20}} = \frac{N_{2k}}{\tilde{N}_2} - \frac{N_{20}}{\tilde{N}_2}, \quad (6.48)$$

ki jo lahko preprosto numerično rešimo (slika 6.12).



Slika 6.12: Rešitev enačbe (6.48)

Če vpeljemo parametra  $x = N_{2k}/\tilde{N}_2$  in  $a = N_{20}/\tilde{N}_2$ , se enačba prepiše v

$$\ln \frac{x}{a} = x - a. \quad (6.49)$$

Za vrednosti  $a < 1$  oziroma  $a = N_{20}/\tilde{N}_2$  enačba nima rešitev in v  $\tilde{N}_2$  prepoznamo vrednost na pragu delovanja. Kadar je začetna zasedenost  $N_{20}$  le malo nad pragom, končna zasedenost  $N_{2k}$  ne pade dosti pod prag, zato je izraba energije slabša. Pri večjih začetnih vrednostih  $N_{20}$  pade končna zasedenost praktično na nič. Za  $a = 2$ , na primer, je  $x = 0,41$ , medtem ko je že pri  $a = 4$  vrednost  $x$  le še 0,08.

Ko poznamo začetno in končno vrednost zasedenosti, lahko izračunamo celotno energijo sunka  $W = \hbar\omega(N_{20} - N_{2k})$ . Če je začetna vrednost dovolj nad pragom, lahko končno zasedenost zanemarimo in celotna energija sunka je

$$W \approx \hbar\omega N_{20}. \quad (6.50)$$

**Nalogă 6.8.1** Trenutna moč, ki izhaja iz laserja, je dana s

$$P = n\hbar\omega \frac{2}{\tau}. \quad (6.51)$$

Pokaži, da je vrh sunka dosežen natanko tedaj, ko pade zasedenost na vrednost pri pragu in je  $N_2 = \tilde{N}_2$ .

Največja izsevana moč iz laserja je

$$P_{\max} = \frac{n_{\max}\hbar\omega}{2L/c} (1 - \mathcal{R}) = \frac{2n_{\max}\hbar\omega}{\tau}, \quad (6.52)$$

pri čemer smo z  $n_{\max}$  označili število fotonov v vrhu sunka. Ko vstavimo še vrednost za  $n_{\max}$  pri  $N_2 = \tilde{N}_2$  (glej nalogă 6.8.1), dobimo

$$P_{\max} = \frac{2\hbar\omega}{\tau} (N_{20} - \tilde{N}_2 - \tilde{N}_2 \ln(N_{20}/\tilde{N}_2)). \quad (6.53)$$

Ker je navadno  $N_{20} \gg \tilde{N}_2$ , je  $n_{\max} \approx N_{20}$  in

$$P_{\max} \approx \frac{2\hbar\omega N_{20}}{\tau}. \quad (6.54)$$

Poglejmo primer. Naj bo presek za stimulirano sevanje  $\sigma = B\hbar\omega g/c$  okoli  $10^{-19}\text{cm}^2$  in začetna gostota zasedenosti  $N_{20}/V = 10^{19}\text{cm}^3$ , kar so tipični podatki za neodimov laser. Tedaj je  $\tau_r = 30\text{ ps}$  in čas naraščanja sunka okoli  $\sim 1\text{ ns}$ . Število fotonov se nato zmanjšuje s karakterističnim razpadnim časom resonatorja  $\tau/2 \sim 2L/(c(1 - \mathcal{R}))$ . Za dosego kratkih sunkov svetlobe je zato v laserjih s preklopom dobrote odbojnost izhodnega zrcala navadno dokaj nizka, recimo 0,5. Pri  $L = 15\text{ cm}$  je tako  $\tau = 4\text{ ns}$ . Celotno trajanje sunka je v izbranem primeru tako  $\sim 10\text{ ns}$ , pri čemer traja okoli 100 ns od preklopa dobrote do trenutka, ko sunek zraste iz šuma spontanega sevanja. Energija sunka je blizu  $N_{20}\hbar\omega$ , to je pri aktivnem volumnu  $0,5\text{ cm}^3$  nekaj desetink joula. Od tod lahko ocenimo, da je moč v vrhu sunka velikostnega več 10 MW.

## 6.9 Uklepanje faz

Krajše sunke kot s preklopom dobrote je mogoče dobiti z uklepanjem faz. Pri tem gre za povsem drugačen način, ki je prav presentljiva manifestacija koherentnosti laserske svetlobe. Spoznali smo že, da je v laserju navadno vzbujenih več lastnih nihanj hkrati, pri čemer so njihove krožne frekvence enakomerno razmanknjene za  $\Delta\omega = \pi c/L$  (enačba 4.5). Celotno električno polje v neki točki v laserju zapišemo kot vsoto

$$E(t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} A_m e^{i(\omega_0 + m\Delta\omega)t + i\varphi_m(t)}, \quad (6.55)$$

pri čemer je  $N$  število vseh vzbujenih nihanj. Upoštevali smo, da ima vsako vzbujeno nihanje lahko poljubno fazo  $\varphi_m(t)$ , ki je na splošno predvsem zaradi zunanjih motenj slučajna funkcija časa. Zaradi tega se tudi celotno polje v resonatorju slučajno spreminja, kar močno zmanjšuje uporabnost takega laserja.

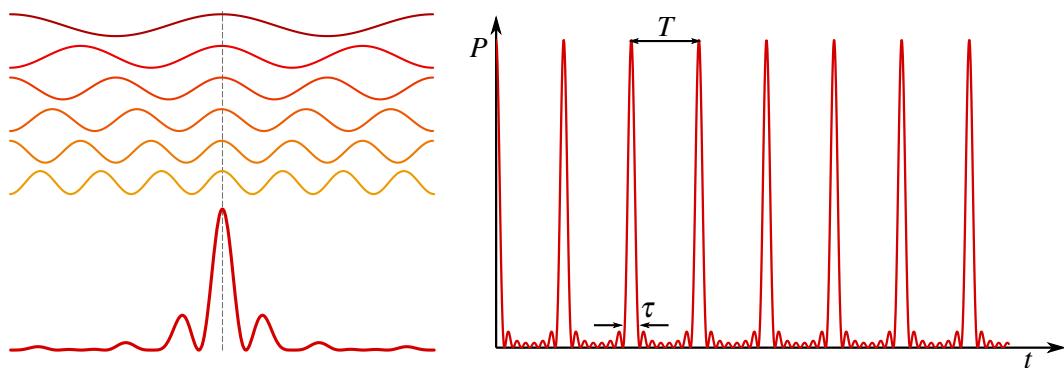
Denimo, da nekako dosežemo enake faze vseh nihanj. Poleg tega zaradi enostavnosti računa privzemimo, da so enake tudi vse amplitude  $A_m = A_0$ . Tedaj postane vsota (6.55) geometrijska in jo brez težav seštejemo

$$E(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} \frac{\sin(N\Delta\omega t/2)}{\sin(\Delta\omega t/2)}. \quad (6.56)$$

Moč izhodne svetlobe ima časovno odvisnost

$$P(t) = P_0 \frac{\sin^2(N\Delta\omega t/2)}{\sin^2(\Delta\omega t/2)}, \quad (6.57)$$

ki jo kaže slika (6.13). Predstavlja periodično zaporedje sunkov, ki si sledijo s periodo  $T = 2\pi/\Delta\omega = 2L/c$ , kar je enako času obhoda svetlobe v resonatorju (glej nalogo 6.9.1).



Slika 6.13: Valovanja z enako fazo se seštejejo v posamezne vrhove (levo). Časovna odvisnost moči večfrekvenčnega laserja z uklenjenimi fazami je zato v obliki izrazitih sunkov (desno).

---

**Naloga 6.9.1** Pokaži, da izhodno moč iz laserja v primeru enakih faz vzbujenih lastnih nihanj zapišemo z enačbo (6.57). Pokaži še, da je razmak med posameznimi sunki (vrhovi moči) enak  $T = 2L/c$ , dolžina posameznega sunka  $\tau = T/N$ , vrednost moči v vrhu sunka  $N^2 P_0$  in povprečna moč  $NP_0$ .

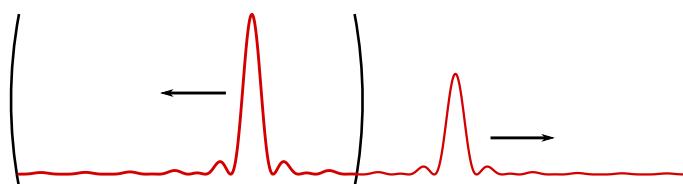
---

Izračunamo lahko tudi dolžino sunkov (glej nalogo 6.9.1)

$$\tau = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_G}. \quad (6.58)$$

Ker je  $N$  število vzbujenih lastnih nihanj, ki se med seboj po krožni frekvenci razlikujejo za  $\Delta\omega$ , je produkt  $N\Delta\omega$  ravno enak širini ojačevanja  $\Delta\omega_G$ . Dolžina sunka je torej obratno sorazmerna s širino ojačevanja aktivnega sredstva. Za dosego zelo kratkih sunkov z metodo uklepanja faz je torej treba uporabiti laser s kar se da veliko širino ojačevanja.

Premislimo še, kakšna je prostorska odvisnost električnega polja v resonatorju. Polje na danem mestu opisuje enačba (6.56). Krajevno odvisnost dobimo, če v enačbi (6.56) parameter  $t$  zamenjamo s  $(t - z/c)$ . To predstavlja svetlobni paket, ki potuje sem in tja med zrcalom resonatorja. Na izhodnem zrcalu se vsakič del sunka odbije, del pa zapusti resonator (slika 6.14). Razmik med sunki, ki izhajajo iz resonatorja, je  $2L$ , prostorska dolžina posameznega sunka pa  $\tau c = 2L/N$ .



Slika 6.14: Prostorska odvisnost fazno uklenjenih sunkov. Pri vsakem odboju del sunka zapusti rezonator.



V našem računu predpostavka, da so vse amplitude  $A_m$  enake, ni ključnega pomena. Če vzamemo, da so amplitude oblike  $A_m = A_0 \exp(-(m\Delta\omega/\Delta\omega_G)^2)$ , kar je bolj realistično (slika 6.8), vsote (enačba 6.55) ne znamo točno sešteeti. Lahko pa jo približno pretvorimo v integral, ki je Fourierova transformiranka Gaussove funkcije (pri prehodu z diskretne vsote na integral seveda izgubimo periodičnost zaporedja sunkov). Ta je zopet Gaussova funkcija, katere širina je obratna vrednost širine prvotne funkcije, prav podobno, kot smo dobili zgoraj. Odvisnost amplitud vzbujenih lastnih nihanj od  $m$  vpliva torej le na točno obliko sunkov.

Pri uklepanju faz je bistvena predpostavka, da so vse faze  $\varphi_m$  enake. V dosedanjem opisu mnogofrekvenčnih laserjev so rezonatorska stanja med seboj neodvisna, zato so v splošnem faze poljubne in se zaradi motenj lahko še spreminjačo. Za dosego istih faz posameznih nihanj moramo poskrbeti posebej. Tako ujemanje oziroma uklepanje faz lahko dosežemo na več načinov. V grobem ločimo dva načina: aktivno in pasivno uklepanje faz.

Pri aktivnem uklepanju faz moduliramo izgube v resonatorju s frekvenco, ki je ravno enaka razliki frekvenc med lastnimi rezonatorskimi stanji. Za ta namen dodamo v rezonator modulator, na primer akusto-optični modulator (glej poglavje 8). Ko v akusto-optičnemu modulatorju vzbudimo stopeče zvočno valovanje, se svetloba na njem uklanja in izgube so velike. Amplituda stopečega valovanja periodično pada na nič in takrat se uklonske izgube zmanjšajo. Če se to dogaja v časovnih razmikih, ki so enaki  $T = 2L/c$ , se v rezonatorju ojačuje le kratek sunek svetlobe. Navadno zadošča razmeroma majhna sinusna modulacija izgub, kjer je relativna prepustnost v minimumu za nekaj desetink manjša od največje.

Kako pri modulaciji pride do uklepanja faz, lahko uvidimo še drugače. Modulacija amplitude posameznega lastnega nihanja povzroči, da se v spektru nihanja pojavitva še stranska pasova pri frekvencah  $\omega_m \pm \Delta\omega$ . Ta se ravno ujemata z obema sosednjima nihanjem in se konstruktivno

prištejeta, če imata enako fazo. Podobno tudi naprej za ostala nihanja. S tem se zmanjšajo izgube in delovanje laserja z uklenjenimi fazami ima najnižji prag.

Pri pasivnem uklepanju faz dodanega elementa ne krmilimo od zunaj, ampak se sam ustrezno odziva. Ena od možnosti je plast barvila, ki močno absorbira svetlobo pri majhni gostoti svetlobnega toka, pri veliki gostoti pa svetlobo prepušča, saj pride do nasičenja absorpcije (glej poglavje 5.5). V laserju je po vklopu prisotno predvsem spontano sevanje, ki se pri enem prehodu skozi aktivno snov deloma ojači. Barvilo najmanj absorbira fluktuacijo z največjo intenziteto. Pri dovolj velikem ojačenju se bo ta izbrana fluktacija ojačevala, ostale pa ne, zato se spet pojavi fazno uklenjeni sunek. Ker mora po prehodu sunka absorpcija v barvilu hitro narasti, mora biti relaksacijski čas barvila zelo kratek  $\sim \text{ps}$ . In this scheme, it is essential to use a saturable absorber with a recovery time much shorter than the period  $T$ .

Drug način pasivnega uklepanja faz je z uporabo nelinearne optike (glej poglavje ??). This lensing effect has a practical application: it is used to induce self-mode-locking in solid-state lasers, such as titanium sapphire lasers. The mechanism is the following. The multimode laser can operate either in a free-running regime, in which the modes have random phases, or in a mode-locking regime. If the number of modes is large, the peak intensity of the mode-locked pulses is much larger than the CW intensity of the free-running laser. It is assumed that the third-order nonlinearity of the active crystal gives rise to a Kerr lens in the mode-locking regime, but no Kerr lens in free running. The effect of the Kerr lens is that of focusing the laser beam at some point inside the cavity. If a pinhole is placed at that point, the free-running regime will experience large losses, whereas the mode-locking regime will be unaffected. As a consequence, the laser is forced to operate as a mode-locked oscillator. More generally, Kerr-lens mode-locking can be explained by keeping in mind the definition of cavity stability given in Sect. 3.8. If the cavity is designed to be stable in presence of the Kerr lens and unstable in absence of the Kerr lens, the laser will choose to operate in the mode-locking regime in presence of self-focusing. The technique is known as “Kerr-lens mode-locking”.

Z uklepanjem faz je danes mogoče dobiti sunke z dolžino pod  $100 \text{ fs}$  ( $10^{-13} \text{ s}$ ). Tak sunek traja le še nekaj deset optičnih period. S posebnimi prijemi jih lahko še skrajšajo na okoli  $10 \text{ fs}$ . Če je potrebna večja energija sunkov, jih ojačijo, kar ne pokvari mnogo osnovnega sunka. Zelo kratke svetlobne sunke danes na široko uporabljajo za študij hitre molekularne dinamike in kratkoživih vzbujenih elektronskih stanj v polvodnikih in mnogih drugih snoveh. Z njimi se je časovna ločljivost povečala za nekaj redov velikosti [?].

## 6.10 Frekvenčni glavnik

### 6.11 \*Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo

Še ožjo lasersko črto lahko dobimo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Ideja je taka: frekvenco svetlobe, ki izhaja iz laserja, primerjamo z nekim standardom in iz razlike ugotovimo spremembo dolžine resonatorja. Eno od obeh zrcal je nameščeno na piezoelektričnem nosilcu, ki mu z električno napetostjo lahko spremojemo dolžino in tako popravimo dolžino resonatorja.

Pogalvitna težava je seveda, kako najti dovolj stabilen primerjalni standard za frekvenco. Ena možnost je, da izhodno svetlobo spustimo skozi konfokalni interferometer, ki je skoraj v resonanci z laserjem in ima dovolj ozek vrh prepustnosti. Majhen premik frekvence laserja bo povzročil, da se bo spremenil skozi interferometer prepuščeni svetlobni tok. Na prvi pogled je videti, da s tem nismo nič pridobili, saj bo resonančna frekvanca interferometra stabilna tudi le toliko, kot je stabilna njegova dolžina. Vendar je z izolacijo in temperaturno stabilizacijo možno držati dolžino

Slika 6.15: Odvisnost moči laserja z nasičenim absorberjem od frekvence

praznega resonatorja - interferometra - mnogo natančneje kot dolžino laserja, v katerem imamo aktivno sredstvo, ki mu moramo dovajati energijo.

Druga možnost je stabilizirati laser na primerno molekularno absorpcijsko črto. Te so lahko zelo ozke, zato je tudi spekter laserja lahko izredno ozek, pod 1 kHz. Pri tem moti Dopplerjeva razširitev absorpcijske črte, ki pa se ji je mogoče izogniti. Kako to napravimo in kako je bila s tem omogočena nova definicija metra, si bomo pogledali v razdelku ???.

V drugem razdelku smo videli, da je efektivna spektralna širina enofrekvenčnega laserja odvisna od fluktuacij dolžine optične poti svetlobe pri preletu resonatorja. Na to lahko poleg spreminjanja geometrijske dolžine vpliva še spreminjanje lomnega količnika. Če se posebej ne potrudimo, laser sveti nekje blizu vrha ojačevalnega pasu, pri čemer frekvenca pleše za znaten del razmika med resonatorskimi stanji. V šolskem He-Ne laserju je to na primer nekaj deset MHz.

Bistveno manjšo širino lahko dosežemo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Pri tem je pogalvitni problem, kako dobiti primerjalni standard. S stabilizacijo na pomožni interferometer, ki smo jo na kratko opisali v drugem razdelku, lahko dobimo zelo ozko črto, ki pa ima le toliko natančno določeno frekvenco, kot poznamo dolžino interferometra. Včasih, na primer za natančna interferometrična merjenja dolžin, s tem nismo zadovoljni in potrebujemo drug, absoluten standard.

Tak standard za frekvenco so ozki prehodi v primerenem razredčenem plinu. Vendar naletimo na težavo. Zaradi Dopplerjevega pojave so absorpcijske črte močno razširjene. Pomagamo si s pojavom nasičenja absorpcije, o katerem smo govorili v razdelku 4.9. Tam smo videli, da se pri dvakratnem prehodu monokromatskega snopa svetlobe skozi plin v nasprotnih smereh pojavi v sredini Dopplerjevo razširjene črte vdolbina, ki ima obliko homogeno razširjene črte. Homogena širina je lahko mnogo manjša od Dopplerjeve in je zato vdolbina uporabna kot frekvenčni standard.

V laserski resonator postavimo poleg aktivnega sredstva še celico s primernim plinom, ki ima absorpcijsko črto v bližini vrha ojačenja aktivnega sredstva. Za He-Ne laser pri 633 nm so to na primer pare ioda. Zaradi absorpcije se povečajo izgube v laserju in izhodna moč se zmanjša. Spreminjammo sedaj dolžino resonatorja in s tem frekvenco laserja. Ko se ta približa na homogeno širino centru absorpcijske črte pri  $\omega_0$ , se absorpcija zmanjša in s tem se moč laserja poveča. Odvisnost moči laserja z absorberjem od dolžine kaže slika ???. Povečanje moči v vrhu običajno ni prav veliko, manj od procenta.

Shema stabilizacije na nasičeno absorpcijo je prikazana na sliki ???. Eno od zrcal resonatorja je na piezoelektričnem nosilcu. Nanj vodimo izmenično napetost s frekvenco  $\Omega$  in s tem moduliramo

Slika 6.16: Shema stabilizacije laserja na nasičeno absoprcijo

frekvenco laserja, da se vozi preko absorpcijske vdolbine pri  $\omega_0$ . Zaradi tega se spreminja tudi izhodna moč laserja, ki jo opazujemo s fotodiodo. Kadar je srednja frekvenca laserja enaka  $\omega_0$ , se moč zmanjša simetrično pri odmikih navzgor in navzdol od  $\omega_0$  in se zato spreminja z dvojno frekvenco modulacije  $2\Omega$ . Kadar pa je srednja frekvenca laserja nekoliko odmaknjena od  $\omega_0$ , se izhodna moč pri odmiku v zrcala v eno stran spremeni drugače kot v drugo, kar pomeni, da je v signalu s fotodiode tudi komponenta s frekvenco  $\Omega$ . Da držimo srednjo frekvenco laserja enako  $\omega_0$ , moramo torej meriti komponento izhodne moči pri modulacijski frekvenci in s povratno zanko skrbeti, da je ta enaka nič.

Komponento signala s frekvenco  $\Omega$  zaznamo s faznim detektorjem, ki deluje tako, da signal množi z referenčno modulacijsko napetostjo. V produktu dobimo istosmerno komponento, ki je sorazmerna signalu pri frekvenci  $\Omega$  in ki jo izločimo z nizkopasovnim filtrom. Izhod iz faznega detektorja je tako sorazmeren odmiku srednje frekvence laserja od  $\omega_0$ . Preko primerenega ojačevalnika ga vodimo na piezoelektrični nosilec zrcala in tako popravljamo dolžino laserja.

Napravimo kvantitativno oceno opisane stabilizacijske sheme. Odvisnost izhodne moči od frekvence laserja  $\omega$  lahko približno zapišemo v obliki

$$P(\omega) = P_0 + \frac{P_1 \gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} . \quad (6.59)$$

$P_0$  je moč laserja brez saturacijskega vrha pri  $\omega_0$ ,  $P_1$  pa povečanje moči pri  $\omega_0$ . Predpostavili smo, da se ojačenje laserja in nehomogeno razširjeni del absorpcije ne spreminjata mnogo preko homogene širine absorberja in je zato  $P_0$  približno konstantna. Frekvenco laserja moduliramo:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega + a \sin \Omega t . \quad (6.60)$$

Z  $\Delta\omega$  smo označili odstopanje srednje frekvence laserja od centra absorpcijske črte  $\omega_0$ . Če sta  $a$  in  $\Delta\omega$  majhna v primeri s homogeno širino  $\gamma$ , lahko imenovalec v enačbi 6.59 razvijemo:

$$P(\omega) = P_0 + P_1 \left[ 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Delta\omega^2 + \frac{2}{\gamma^2} a \Delta\omega \sin \Omega t - \frac{a^2}{\gamma^2} \sin^2 \Omega t \right] . \quad (6.61)$$

Amplituda signala pri  $\Omega$  je  $2P_1 a \Delta\omega / \gamma^2$ . Najmanjša razlika, ki jo lahko zaznamo, je določena s šumom meritve. Kot bomo videli v poglavju o detekciji svetlobe, je osnovni izvor šuma

fotodiode Poissonov šum števila parov elektron-vrzel, ki nastanejo zaradi fotoefekta v p-n spoju. Najmanjša sprememba svetlobne moči, ki jo lahko izmerimo, je (glej 10???. poglavje)

$$P_N \simeq \sqrt{\hbar\omega P \frac{1}{\tau}}, \quad (6.62)$$

kjer je  $P$  celotna svetlobna moč, ki vpada na diodo,  $\tau$  pa čas meritve, ki je v našem primeru določen s časovno konstanto nizkopasovnega filtra na izhodu faznega detektorja.

Vzemimo na primer He-Ne laser, stabiliziran na iodove pare. Povprečna moč laserja  $P_0$  naj je  $10 \text{ mW}$  in  $P_1 = 0.1 \text{ mW}$ . Širina absorpcijske črte  $\gamma = 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Izberimo amplitudo modulacije  $a = 10^5 \text{ s}^{-1}$  in  $\tau = 10^{-4} \text{ s}$ . Časovna konstanta  $\tau$  ne sme biti prevelika, določa namreč, kako hitro popravljamo dolžino laserja. Gornje vrednosti dajo za najmanjšo zaznavno moč pri  $\Omega$   $P_N = 0.5 \times 10^{-8} \text{ W}$ . Najmanjše merljivo odstopanje frekvence laserja je tedaj

$$\Delta\omega_N = \frac{P_N \gamma^2}{2P_1 a} = 2.5 \times 10^3 \text{ s}^{-1}. \quad (6.63)$$

Takšno in še boljšo stabilnost frekvence tudi zares dosežejo. Pozoren bralec bo opazil, da je  $\Delta\omega_N < 0.01\gamma$ , to je, položaj absorpcijskega vrha je na opisan način mogoče določiti z natančnostjo nekaj tisočink celotne širine.

Na absorpcijsko črto stabiliziranega laserja navadno ne uporabljam direktno, temveč z njim kontroliramo drug laser. Del izhodne svetlobe iz obeh laserjev zmešamo na detekcijski fotodiodi. V signalu dobimo utripanje, ki je enako razliki frekvenc obeh laserjev. S spremenjanjem dolžine drugega laserja skrbimo, da je frekvenca utripanja konstantna. Na ta način lahko v ozkem frekvenčnem intervalu še spremenjam frekvenco drugega laserja.

Z merjenjem utripanja med dvema stabiliziranimi laserjema ugotavljam tudi njihovo stabilnost.

## 6.12 \*Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra

Najnatančnejša merljiva količina je čas odnosno frekvenca. Frekvence laserja, ki sveti v vidnem področju seveda ni mogoče direktno prešteti. Pač pa je v začetku sedemdesetih let uspelo s heterodinsko tehniko, ki se v mikrovalovni tehniki pogosto uporablja, napraviti primerjavo stabiliziranega He-Ne laserja z osnovno cezijevo uro in tako določiti frekvenco absorpcijske črte metana pri  $3.39 \mu\text{m}$  z isto natančnostjo, kot jo ima cezijeva ura.

S heterodinsko tehniko primerjamo frekvenci dveh ali več valovanj tako, da jih zmešamo na primerinem nelinearnem elementu, običajno neki diodi. Zaradi nelinearnosti dobimo v odzivu diode različne mnogokratnike vpadnih frekvenc, njihove vsote in razlike. Od teh je kaktera lahko dovolj nizka, da jo lahko direktno prestejemo.

Za primerjanje frekvenc nad mikrovalvnim področjem je potreben ustrezni mešalni element. Polvodni diode nehajo biti uporabne pri približno  $20 \text{ GHz}$ . Za višje frekvence uporabijo diode kovina-izolator-kovina, ki jih sestavljajo oksidirana površina niklja, ki se je dotika ostra volframska konica. Taka dioda deluje kot uporaben mešalni element do frekvenc okoli  $200 \text{ THz}$ , to je skoraj do vidnega področja.

Za primerjavo He-Ne laserja, stabiliziranega na metan pri  $3.39 \mu\text{m}$ , z osnovno cezijevo uro je bilo potrebno zgraditi celo verigo vmesnih primerjav, ki jo kaže slika ???. Frekvenco  $\text{CO}_2$  laserja dobimo na primer iz utripanja med frekvencama  $\text{CO}_2$  laserja pri  $10.2 \mu\text{m}$  in pri  $9.3 \mu\text{m}$ ,

Slika 6.17: Primerjalna veriga za meritev frekvence He-Ne laserja

trikratnikom frekvence HCN laserja in še klistrona s frekvenco 20 GHz. Na ta način so izmerili, da je frekvanca CH<sub>4</sub> črte na katero je stabiliziran He-Ne laser, 88.376181627 THz.

Valovno dolžino laserja dobimo z interferometrično primerjavo z dolžinskim standardom, ki je bil do leta 1984 določen z neko kriptonovo črto. Iz znane frekvence in valovna dolžine določimo hitrost svetlobe. Zaradi relativno velike širine črte kriptonove svetilke je bil po starem meter definiran le z relativno natančnostjo  $10^{-8}$ , kar je pomenilo, da tudi hitrost svetlobe ne more biti določena bolj natančno. Meritev frekvence laserja pa je dosti natančnejša. Zato je bilo smiselno opustiti meter kot osnovno enoto in raje definirati hitrost svetlobe kot pretvornik med sekundo in metrom. Z njeno vrednost so vzeli, kar so dobili z naboljšo primerjavo stabiliziranega laserja in kriptonove črte:  $c = 299792458 \text{ m/s}$ . Na metan ali jod stabilizirani laser je postal sekundarni standard za dolžino. Laser je pravzaprav pri tem le pomožna naprava; standard je ustrezni molekularni prehod.

## 6.13 \*Semiklasični model laserja

Doslej smo laserje obravnavali le z modelom zasedbenih enačb. Ta je zelo grob, saj smo pri tem zanemarili nekaj pomembnih pojavov. Svetlobo v resonatorju smo opisali le s celotno energijo oziroma številom fotonov in se za njeno valovno naravo nismo menili. Kar privzeli smo, da sta frekvenca delujočega laserja in oblika polja v njem enaki kot za lastno stanje praznega resonatorja. Aktivno snov smo opisali le z zasedenostjo zgornjega in spodnjega laserskega stanja in s tem izpustili možnost, da se zaradi interakcij z elektromagnetnim poljem atomi nahajajo v nestacionarnem, mešanem stanju.

Gornje pomanjkljivosti delno odpravimo s tem, da elektromagnetno polje v resonatorju obravnavamo klasično z valovno enačbo, atome aktivne snovi pa kvantno in upoštevamo, da se pokoravajo Schrödingerjevi enačbi. S tem dobimo semiklasični model laserja. Za še natančnejši opis bi morali obravnavati kvantno tudi svetlobo, kar pa presega okvir te knjige.

Aktivna snov naj bo množica enakih dvonivojskih atomov s stanjema  $|1\rangle$  in  $|2\rangle$ , ki imata energiji  $W_1$  in  $W_2$ . Atomi s svetlobo sodelujejo preko dipolne interakcije oblike  $H = -eE(t)\hat{x}$ , kjer je  $E(t)$  polje v resonatorju, ki naj bo zaradi preprostosti polarizirano v smeri osi  $x$ . Časovno odvisno stanje atomov zapišimo v obliki

$$|\psi\rangle = c_1(t)|1\rangle \exp(-iW_1t/\hbar) + c_2(t)|2\rangle \exp(-iW_2t/\hbar). \quad (6.64)$$

Iz Schrödingerjeve enačbe (enačba 5.106) dobimo za časovna odvoda koeficientov  $c_1(t)$  in  $c_2(t)$  zvezi (glej enačbi 5.108)

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{\hbar}E(t)v_{12}e^{-i\omega_0t}c_2 \quad \text{in} \quad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{\hbar}E(t)v_{12}e^{i\omega_0t}c_1, \quad (6.65)$$

pri čemer je  $v_{12} = -e\langle 1|\hat{x}|2\rangle$  in  $\omega_0 = (W_2 - W_1)/\hbar$ .

Električni dipolni moment atoma v stanju  $\psi$  je

$$p = e\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = -(c_1^*c_2e^{-i\omega_0t} + c_1c_2^*e^{i\omega_0t})v_{12}. \quad (6.66)$$

Razdelimo  $p$  na dva dela in zapišemo

$$p = p^+ + p^- = -v_{12}[\eta(t) + \eta^*(t)], \quad (6.67)$$

kjer smo vpeljali  $\eta(t) = c_1^*c_2e^{-i\omega_0t}$ .

Zanima nas, kako se dipolni moment spreminja s časom. Zadošča, če poznamo, kako se s časom spreminja parameter  $\eta(t)$ . Njegov časovni odvod izrazimo iz enačb (6.65) in dobimo

$$\dot{\eta} = -i\omega_0\eta + \frac{i}{\hbar}E(t)v_{12}(|c_2|^2 - |c_1|^2). \quad (6.68)$$

Spomnimo, da je  $|c_i|^2$  verjetnost za zasedenost stanja  $|i\rangle$ . Izraz v oklepaju na desni strani gornje enačbe torej meri razliko zasednosti obeh stanj, ki jo označimo s  $\zeta$ . Podobno kot zgoraj izrazimo spremenjanje razlike zasedenosti s časovni odvodom

$$\dot{\zeta} = -\frac{2i}{\hbar}E(t)v_{12}(\eta^* - \eta). \quad (6.69)$$

S tem smo iz Schrödingerjeve enačbe dobili enačbi za časovni razvoj dipolnega momenta in obrnjene zasedenosti, ki pa ju moramo še dopolniti.

Naj bo atom na začetku v vzbujenem stanju  $|2\rangle$  in naj bo  $E(t) = 0$ . Začetna vrednost obrnjene zasedenosti je tako  $\zeta(0) = 1$ . Po enačbi (6.69) naj bi bil odvod obrnjene zasedenosti enak nič in  $\zeta$  konstantna. Vemo pa, da se atom, ki je v vzbujenem stanju, sčasoma vrne v osnovno stanje. Verjetnost za tak spontan prehod na časovno enoto smo označili z  $A$  (glej poglavje 5.3).

Poleg tega moramo upoštevati še črpanje, s katerim vzdržujemo obrnjeno zasedenost in s tem lasersko delovanje. Za podroben opis črpanja bi morali v Hamiltonov operator dodati ustreerne člene in morda upoštevati še druga stanja atomov, vendar nas take podrobnosti na tem mestu ne zanimajo. Če bi ne bilo črpanja, bi bila stacionarna vrednost v odsotnosti laserskega polja

$$\zeta_{\text{stac}} = |c_2|^2 - |c_1|^2 = -1. \quad (6.70)$$

Zaradi črpanja zavzame obrnjena zasedenost neko vrednost  $-1 < \zeta_0 < 1$ , odvisno od moči črpanja. Enačbi (6.69) dodamo ustrezen člen

$$\dot{\zeta} = A(\zeta_0 - \zeta) - \frac{2i}{\hbar} E(t) v_{12} (\eta^* - \eta), \quad (6.71)$$

ki popisuje vpliv črpanja in spontane prehode v nižje stanje.

Podobno dopolnimo še enačbo za časovno spreminjanje električnega dipola (enačba 6.68). Pri  $E(t) = 0$  da zapisana oblika enačbe časovno odvisnost  $\eta \propto e^{-i\omega_0 t}$ , to je brez dušenja. Vendar vemo, da polarizacija v mešanem stanju razpada vsaj zaradi spontanega sevanja, lahko pa še zaradi drugih vplivov, na primer trkov z drugimi atomi. Označimo koeficient dušenja polarizacije, ki meri tudi spektralno širino svetlobe, ki jo sevajo atomi pri prehodu  $2 \rightarrow 1$ , z  $\gamma$ . Zapišemo dopolnjeno enačbo

$$\dot{\eta} = -(i\omega_0 + \gamma)\eta + \frac{i}{\hbar} E(t) v_{12} \zeta \quad (6.72)$$

in kompleksno konjugirano enačbo

$$\dot{\eta}^* = -(-i\omega_0 + \gamma)\eta^* - \frac{i}{\hbar} E(t) v_{12} \zeta. \quad (6.73)$$

Tako smo dobili sklopljene diferencialne enačbe, ki popisujejo časovno spreminjanje obrnjene zasedenosti in dipolnega momenta atoma.

 Enačbe (6.71), (6.72) in (6.73) pogosto imenujemo Maxwell-Blochove ali optične Blochove enačbe<sup>5</sup>. Osnovne Blochove enačbe opisujejo gibanje jedrskega magnetnega momenta v elektromagnetnem polju, zato so jih najprej uporabili za opis jedrske magnetne in elektronske spinske resonanse.

Za opis potrebujemo še enačbo za polje  $E(t)$ . To naredimo klasično, tako da električna poljska ja-kost zadošča valovni enačbi. Upoštevati moramo, da imamo tudi od nič različno tudi polarizacijo snovi. Valovna enačba v skalarni obliki je tedaj

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (6.74)$$

pri čemer je v primeru, da so vsi atomi enakovredni, polarizacija enaka

$$P = \frac{N}{V} p = -\frac{N}{V} v_{12} (\eta + \eta^*) = P^+ + P^-. \quad (6.75)$$

<sup>5</sup>Švicarsko-ameriški fizik in nobelovec Felix Bloch, 1905–1983.

Namesto mikroskopske količine  $\zeta$  lahko uvedemo še gostoto obrnjene zasedenosti  $Z = (N/V)\zeta$  in enačbe (6.71), (6.72) in (6.73) prepišemo v obliko

$$\frac{dZ}{dt} = A(Z_0 - Z) + \frac{2i}{\hbar} E(P^- - P^+), \quad (6.76)$$

$$\frac{dP^+}{dt} = (-i\omega_0 - \gamma)P^+ - \frac{i}{\hbar}Ev_{12}^2Z, \quad (6.77)$$

$$\frac{dP^-}{dt} = (i\omega_0 - \gamma)P^- + \frac{i}{\hbar}Ev_{12}^2Z. \quad (6.78)$$

Opozorimo še, da je prehod z enačb (6.71–6.73) na (6.76–6.78) mogoč le, kadar so vsi atomi enakovredni, to je, kadar ni nehomogene razširitev spektra.<sup>6</sup>

Eračbe (6.76–6.78), skupaj z valovno eračbo (eračba 6.74) podajajo semiklasični opis interakcij svetlobe s snovjo. Iz izpeljave je vidno, da je v semiklasičnem opisu spontano sevanje obravnavano pomanjkljivo, le s fenomenološkim nastavkom. To je moč popraviti tako, da tudi elektromagnetno polje kvantiziramo. Kljub tej pomanjkljivosti je s semiklasičnim modelom mogoče zelo podrobno opisati večino pojavov v laserjih in tudi druge probleme širjenja svetlobe po snovi. Reševanje zapisanega sistema nelinearnih parcialnih diferencialnih eračb je pa na splošno zelo težavno.

### Primer enofrekvenčnega laserja

Semiklasične eračbe pobliže spoznajmo na najenostavnnejšem primeru. To naj bo laser, v katerem je vzbujeno le eno resonatorsko stanje. Polje ima tedaj obliko

$$E(\mathbf{r}, t) = E_\lambda(t)u_\lambda(\mathbf{r}), \quad (6.79)$$

kjer je  $u_\lambda(\mathbf{r})$  krajevni del lastnega stanja resonatorja, ki zadošča eračbi

$$\nabla^2 u_\lambda + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} u_\lambda = 0. \quad (6.80)$$

Funkcija  $E_\lambda(t)$  opisuje časovno odvisnost. Za laser v stacionarnem delovanju je periodična, vendar njena krožna frekvence  $\Omega$  ni nujno enaka lastni krožni frekvenci praznega resonatorja  $\omega_\lambda$ . Krožno frekvenco  $\Omega$  moramo še izračunati.

Najprej razvijmo po lastnih funkcijah  $u_\lambda(\mathbf{r})$  še polarizacijo. Ker so lastne funkcije med seboj ortogonalne, preide valovna eračba (6.74) ob upoštevanju eračbe (6.80) v

$$\omega_\lambda^2 E_\lambda + \frac{d^2 E_\lambda}{dt^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d^2 P_\lambda}{dt^2}. \quad (6.81)$$

Razstavimo  $E_\lambda(t)$  na dva dela:

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^+(t) + E_\lambda^-(t) = A^+(t)e^{-i\omega_\lambda t} + A^-(t)e^{i\omega_\lambda t}. \quad (6.82)$$

Dejanska krožna frekvence laserja je blizu  $\omega_\lambda$ , zato pričakujemo, da se bosta amplitudi  $A^\pm(t)$  v primerjavi z  $e^{-i\omega_\lambda t}$  le počasi spremunjali s časom. Izračunajmo

$$\frac{d^2 E_\lambda^+}{dt^2} = -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda \frac{dA^+}{dt} e^{-i\omega_\lambda t} \approx -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda \left( \frac{dE_\lambda^+}{dt} + i\omega_\lambda E_\lambda^+ \right). \quad (6.83)$$

---

<sup>6</sup>Kako je v primeru nehomogene razširitev, lahko bralec poišče npr. v H. Haken, Laser Theory, Springer Verlag.

Izpustili smo drugi odvod  $A$  po času in s tem napravili približek počasno spreminjajoče se amplitude.

Polarizacija snovi je približno periodična s krožno frekvenco  $\omega_0$ , ki je približno enaka  $\omega_\lambda$ . Tudi amplituda polarizacije se le počasi spreminja, zato lahko privzamemo, da je  $\dot{P}_\lambda^+ \approx -\omega_\lambda^2 P_\lambda^+$ . Z uporabo tega približka in enačbe (6.83) preide valovna enačba (enačba 6.74) za eno nihanje v

$$\frac{dE_\lambda^+}{dt} = -i\omega_\lambda E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\epsilon_0} P_\lambda^+. \quad (6.84)$$

Doslej še nismo upoštevali, da je polje v praznem resonatorju dušeno, zato moramo gornjo enačbo še popraviti

$$\frac{dE_\lambda^+}{dt} = \left( -i\omega_\lambda - \frac{1}{\tau} \right) E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\epsilon_0} P_\lambda^+. \quad (6.85)$$

Kadar v resonatorju ni snovi, je dobljena enačba enaka enačbi (4.63).

Enačbe (6.76–6.78) so nelinearne, zato jih ni moč kar tako prepisati za primer razvoja po lastnih stanjih resonatorja. Pri enačbah za razvoj polarizacije (enačbi 6.77 in 6.78) v zadnjem členu na desni nastopa produkt komponente polja  $E_\lambda$  in obrnjene zasedenosti  $Z$ . Bistveno prispeva le krajevno povprečje  $\bar{Z}$ , ki se s časom le počasi spreminja. Seveda vsebuje  $Z$  tudi krajevno odvisne komponente, ki pa so pomembne predvsem zato, ker sklapljajo različna lastna stanja resonatorja, vendar to presega našo trenutno obravnavo. Tako iz enačbe (6.77) dobimo

$$\frac{dP_\lambda^+}{dt} = (-i\omega_0 - \gamma) P_\lambda^+ - \frac{i\nu_{12}^2}{\hbar} E_\lambda^+ \bar{Z}. \quad (6.86)$$

Enačbo za  $\bar{Z}$  dobimo iz (6.76). V zadnjem členu nastopajo produkti  $E^\pm P^\pm = E_\lambda^\pm P_\lambda^\pm u_\lambda^2(\mathbf{r})$ , ki jih moramo prostorsko povprečiti. Funkcije  $u_\lambda(\mathbf{r})$  so normirane, tako da je  $\int u_\lambda^2(\mathbf{r}) dV = V$  in  $\overline{u_\lambda^2(\mathbf{r})} = 1$ . Sledi

$$\frac{d\bar{Z}}{dt} = A (\bar{Z}_0 - \bar{Z}) + \frac{2i}{\hbar} (E_\lambda^+ + E_\lambda^-) (P_\lambda^- - P_\lambda^+), \quad (6.87)$$

kjer je  $\bar{Z}_0$  povprečje nenasicečene zasedenosti  $Z_0$ . V zadnjem členu nastopajo produkti, ki nihajo s frekvencami  $\omega_\lambda - \omega_0$  in  $\omega_\lambda + \omega_0$ . Frekvenci sta si zelo blizu, zato je njuna vsota znatno večja od razlike. Hitro spreminjajoče se člene  $E_\lambda^+ P_\lambda^+$  in  $E_\lambda^- P_\lambda^-$  izpustimo, saj skoraj nič ne vplivajo na valovanje blizu  $\omega_\lambda$ . Časovno odvisnost  $\bar{Z}$  tako zapišemo

$$\frac{d\bar{Z}}{dt} = A (\bar{Z}_0 - \bar{Z}) + \frac{2i}{\hbar} (E_\lambda^+ P_\lambda^- - E_\lambda^- P_\lambda^+). \quad (6.88)$$

Enačbe (6.85), (6.86) in (6.88), skupaj s konjugirano kompleksnimi enačbami za  $E_\lambda^-$  in  $P_\lambda^-$ , so zaključen sistem, ki opisuje delovanje enofrekvenčnega laserja. Uporabimo jih za izračun frekvence izhodne svetlobe.

Naj bo stanje stacionarno. Tedaj lahko polje zapišemo v obliki  $E_\lambda^+ = E_0 e^{-i\Omega t}$ , kjer je  $E_0$  realna konstanta, krožna frekvanca svetlobe  $\Omega$  pa je blizu  $\omega_0$  in  $\omega_\lambda$ . V stacionarnem stanju ima polarizacija enako časovno odvisnost in  $P_\lambda^+ = P_0 e^{-i\Omega t}$ . Tedaj je v enačbi (6.88) drugi oklepaj konstanten in povprečna gostota obrnjene zasedenosti  $\bar{Z}$  je v stacionarnem stanju od časa

neodvisna. Sistem enačb (6.85), (6.86) in (6.88) tako da

$$\left( i(\Omega - \omega_\lambda) - \frac{1}{\tau} \right) E_0 + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P_0 = 0 \quad (6.89)$$

$$(i(\Omega - \omega_0) - \gamma) P_0 - \frac{iv_{12}^2}{\hbar} E_0 \bar{Z} = 0 \quad (6.90)$$

$$A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) + \frac{2i}{\hbar} E_0 (P_0^* - P_0) = 0. \quad (6.91)$$

Najprej iz druge enačbe izrazimo  $P_0$ , ga vstavimo v tretjo in izračunamo  $\bar{Z}$ . Dobimo

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \left[ 1 + \frac{v_{12}^2}{\hbar^2 A} E_0^2 \frac{2\gamma}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \gamma^2} \right]^{-1} \quad (6.92)$$

Ta izraz že poznamo.  $\pi v_{12}^2 / (\varepsilon_0 \hbar^2)$  je Einsteinov koeficient  $B$ .  $E_0^2$  je sorazmern gostoti energije polja v resonatorju, zadnji ulomek v oklepaju pa podaja obliko homogeno razširjene atomske črte (5.67)

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \left[ 1 + \frac{2B}{A} g(\omega_0 - \Omega) w \right]^{-1} \quad (6.93)$$

To je natanko enako izrazu za nasičenje zasedenosti stanj, ki smo ga izpeljali iz zasedbenih enačb v četrtem poglavju.

Postavimo  $P_0$  iz prve enačbe sistema 6.89 v drugo:

$$E_0 [i(\Omega - \omega_\lambda) + \frac{1}{\tau}] [i(\Omega - \omega_0) + \gamma] = -\frac{v_{12}^2 \omega_0}{2\hbar \varepsilon_0} E_0 \bar{Z}. \quad (6.94)$$

V delajočem laserju je  $E_0 \neq 0$ , zato lahko krajšamo.  $\bar{Z}$  je realen, tako da mora biti imaginarni del leve strani enak nič:

$$(\Omega - \omega_\lambda) \gamma + (\Omega - \omega_0) \frac{1}{\tau} = 0. \quad (6.95)$$

Od tod lahko izračunamo frekvenco laserja

$$\Omega = \frac{\omega_\lambda \gamma + \omega_0 \frac{1}{\tau}}{\gamma + \frac{1}{\tau}}. \quad (6.96)$$

Frekvanca torej ni enaka frekvenci praznega resonatorja  $\omega_\lambda$ , temveč je premaknjena proti centru atomske črte  $\omega_0$ . Premik je odvisen od razmerja širine atomske črte in izgub resonatorja.

Bralec lahko sam iz enačbe 6.94 izračuna še energijo svetlobe v resonatorju in rezultat primerja s tistim, ki smo ga dobili z uporabo zasedbenih enačb.

Gornji primer uporabe polklasičnih enačb je zelo preprost. Prava moč modela se pokaže pri obravnavi mnogofrekvenčnega laserja, na primer pri računu uklepanja faz laserskih nihanj, kar pa presega okvir te knjige. Več bo bralec našel v [?].

## 7. Primeri laserjev

V tem poglavju bomo spoznali nekaj najpomembnejših vrst laserjev. V grobem laserje razlikujemo po aktivnem sredstvu (plin, trdna snov, organsko barvilo, polprevodnik), pri čemer tudi pri izbranem sredstvu obstaja veliko različnih izvedb in načinov delovanja. Za vsak obravnavani primer bomo navedli osnovne karakteristike, v podrobnosti izvedbe pa se ne bomo spuščali.

### 7.1 Laserski sistemi

Laser je lahko dokaj preprosta naprava, z malo sestavnimi deli, lahko pa je zelo velik in zapleten sistem. Večina laserskih sistemov je sestavljena iz osnovnega laserja, ki ni posebno močan, a daje kvaliteten snop svetlobe, in iz enega ali več ojačevalnikov. V njih se svetloba ojačuje v sredstvu, ki je enako kot v osnovnem laserju in ki je v kolikor mogoče visokem stanju obrnjene zasedenosti. V več ojačevalnih korakih se tako doseže zelo velika svetlobna moč.

Pri velikih laserskih močeh nastopi vrsta novih težav. Da gostota svetlobnega toka ne povzroča poškodb optičnih komponent, mora premer ojačevanega snopa (in s tem premer vseh vmesnih ojačevalnih stopenj) naraščati. Na zadnjih stopnjah največjih laserskih sistemov je premer snopa lahko večji od pol metra, kar seveda pomeni, da morajo imeti tolikšno odprtino tudi vse ostale optične komponente. Poleg tega je treba skrbno paziti, da se odbita svetloba ne vrača v prejšnji ojačevalnik ali v osnovni laser in s tem moti njegovo delovanje. Med posamezne ojačevalne stopnje zato damo optične izolatorje, ki temeljijo na Faradayevem pojavu vrtenja polarizacije v snovi z magnetnim poljem.



Slika 7.1: Eden najmočnejših laserskih sistemov na svetu, ki doseže 500 TW moči v sunku.

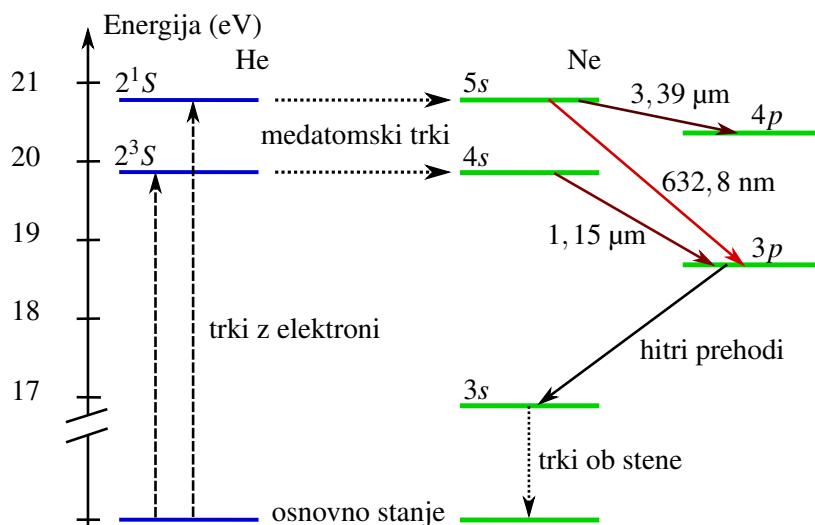
Vir: National Ignition Facility, Livermore, Kalifornija.

Moči svetlobe, ki jih oddajajo najmočnejši laserski sistemi, imajo zelo velike vrednosti. Najmočnejši zvezno delujoči laserji dosegajo moč prek  $\sim 100$  kW. Še bistveno večje moči dosegajo sunkovni laserji, saj lahko v sunku dosežejo moč tudi  $\sim 10^{15}$  W. Vendar so sunki s tako veliko svetlobno močjo izredno kratki, tipično reda pikosekunde, tako da znaša celotna energija v sunku "le"  $\sim$  kJ. Pomemben parameter pri sunkovnih laserjih je tudi čas, ki poteče med dvema zaporednima sunkoma (repeticijo). Najmočnejši laserski sistemi lahko izsevajo največ nekaj sunkov dnevno.

## 7.2 He-Ne laser

Najprej si oglejmo helij-neon (He-Ne) laser, ki je bil prvi zvezno delujoči laser in je še danes zelo razširjen. Najpogosteje deluje pri valovni dolžini 632,8 nm v rdečem delu spektra, lahko pa tudi pri infrardečih 1,15  $\mu\text{m}$  in 3,39  $\mu\text{m}$  ter nekaterih drugih valovnih dolžinah v oranžnem in zelenem delu spektra. Laser deluje v zveznem načinu delovanja s tipičnimi močmi 0,5–100 mW.

Ojačevalno sredstvo je plin, mešanica helija in neonja, katerih relevantni energijski nivoji so prikazani na sliki (7.2). Atome helija s trki z elektroni vzbudimo v eno izmed dveh dolgoživih metastabilnih stanj  $2^3S$  ali  $2^1S$  z razpadnima časoma 0,1 ms in 5  $\mu\text{s}$ . Ti dve stanji slučajno praktično sovpadata z dvema stanjem neonja ( $4s$  in  $5s$ ). Ko heliju dodamo neon, se energija s trki prenese z vzbujenih helijevih atomov na atome neonja, ki s tem preidejo v že omenjeni vzbujeni stanji. Helijevi atomi se po trku vrnejo v osnovno stanje, od koder jih lahko ponovno vzbudimo. Prenos energije z atomov helija na atome neonja s trki je zelo učinkovit, zato zasedenost vzbujenih neonovih stanj hitro naraste. Ko preseže zasedenost nižjih vzbujenih stanj, pride do obrnjene zasedenosti.

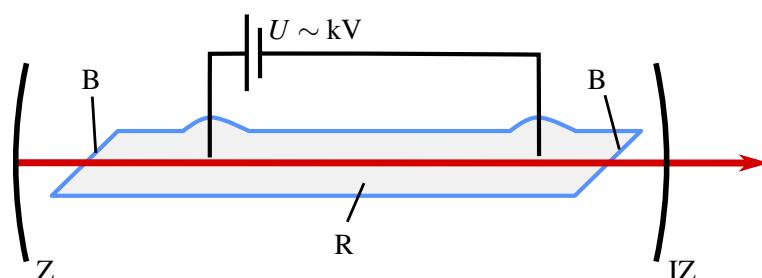


Slika 7.2: Shema energijskih nivojev v He-Ne laserju. Nivoji helija so označeni z modro in nivoji neonja z zeleno, laserski prehodi pa z rdečimi barvami in pripisano ustrezno valovno dolžino.

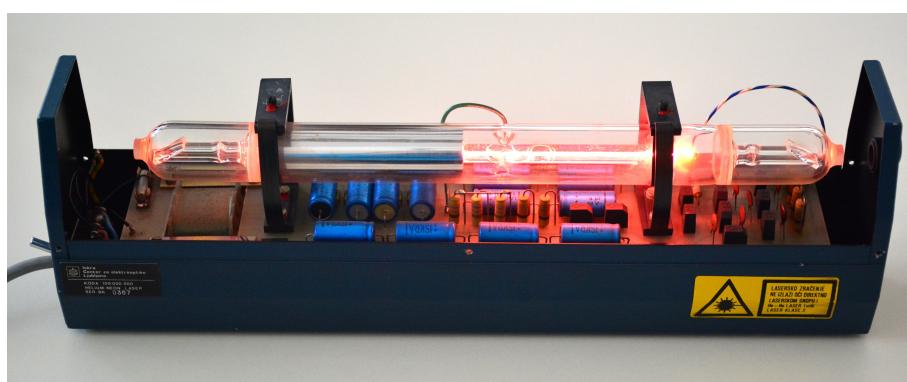
Znano rdečo svetlobo He-Ne laserja z valovno dolžino 632,8 nm dobimo pri prehodu iz stanja  $5s$  v eno od stanj  $3p$ . Pri tem je življenjski čas stanja  $5s$  okoli 100 ns, stanja  $3p$  pa okoli 10 ns, zato se spodnji nivo s spontano emisijo hitro prazni v metastabilno stanje  $3s$ . V njem se atomi nabirajo, saj so dipolni sevalni prehodi v osnovno stanje prepovedani, in atomi le s trki ob steno cevi prehajajo v osnovno stanje. Da pospešimo praznjenje nivoja  $3s$  in omogočimo večjo obrnjeno zasedenost, moramo torej zmanjšati premer razelektritvene cevi. Zaradi gibanja atomov je spektralna črta Dopplerjevo razširjena ( $\Delta\nu = 1,5$  GHz).

Lasersko delovanje dobimo tudi pri prehodu iz  $5s$  v stanje  $4p$ , pri katerem ima izsevana svetloba valovno dolžino  $3,39 \mu\text{m}$ . Ojačenje je za ta prehod celo precej večje kot za prehod pri  $632,8 \text{ nm}$ , deloma zaradi nižje frekvence (glej zvezo med Einsteinovima koeficientoma  $A$  in  $B$ , enačba 5.34), deloma pa zaradi kratke življenske dobe spodnjega laserskega nivoja  $4p$ . Zato bi pričakovali, da bo He-Ne laser svetil v infrardečem delu in ne vidnem. To delno prepreči absorpcija v steklu, delno pa izgube namerno povečamo s selektivno odbojnostjo resonatorskih zrcal, ki dvigne prag delovanja za  $3,39 \mu\text{m}$  nad prag za  $632,8 \text{ nm}$ . V laser lahko dodamo tudi celico metana, ki infrardeč del svetlobe močno absorbira, vidnega pa ne. Omenimo še prehode iz stanja  $4s$ , ki ga dosežejo neonovi atomi s trki z vzbujenimi helijevimi atomi iz nivoja  $2^3S$ . Prehod  $4s$  v  $3p$ , ki da svetlobo pri  $1,15 \mu\text{m}$ , je bil prvi opaženi prehod v He-Ne laserjih.

Tipičen He-Ne laser je razmeroma preprosto zgrajen (sliki 7.3 in 7.4). V razelektritveni cevi (napetost  $\sim 1 \text{ kV}$ ), skozi katero teče električni tok ( $\sim 10 \text{ mA}$ ), se nahaja mešanica helija in neonja v razmerju  $5 : 1$ – $10 : 1$ . Skupni tlak v cevi je nizek, le okoli  $3 \text{ mbar}$ , cev pa je tipično dolga okoli  $0,5 \text{ m}$  s premerom  $1$ – $2 \text{ mm}$ . Cev na obeh straneh zapirata okni, ki sta nagnjeni za Brewstrov kot (glej enačbo 1.50), tako da so izgube pri odboju za eno polarizacijo kar se da majhne. Izhodna svetloba iz laserja je zato seveda polarizirana. V manjših laserjih so namesto Brewstrovih oken na razelektritveno cev privarjena kar resonatorska zrcala, zaradi česar so taki laserji nepolarizirani. Navadno je razelektritvena cev obdana z dvema ukrivljenima zrcalomoma, ki imata zelo veliko odbojnost za izbrano valovno dolžino. Nekaj tipičnih podatkov za He-Ne laser je zbranih v tabeli (7.1).



Slika 7.3: Shema He-Ne laserja: R – razelektritvena cev, IZ – izhodno zrcalo, Z – zrcalo z veliko odbojnostjo, B – Brewstrov okni



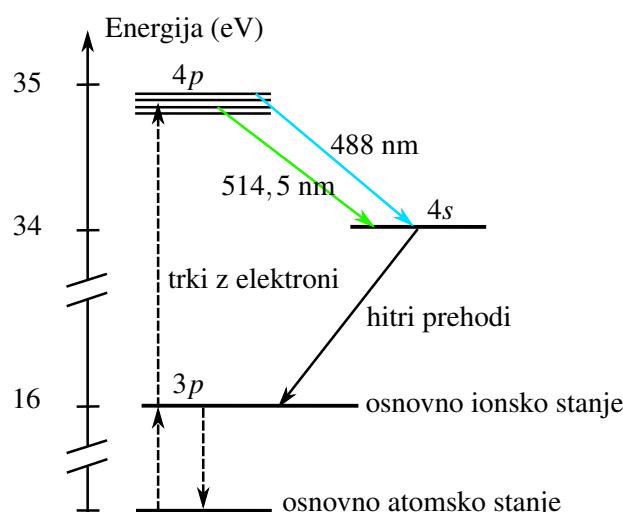
Slika 7.4: Primer starejšega He-Ne laserja, izdelanega v Sloveniji

He-Ne laserji so preprosti, stabilni, zanesljivi, poceni, imajo visoko kvalitetno žarka in dolgo služijo (do 50 000 ur). Danes jih sicer izrivajo polprevodniški laserji, vendar so še vedno v uporabi v merilnih napravah, v optičnih čitalnih sistemih, v šolah, v raziskovalnih laboratorijsih za interferometrijo, holografijo itd. Na njem je osnovan tudi standard za meter.

### 7.3 Argonov ionski laser

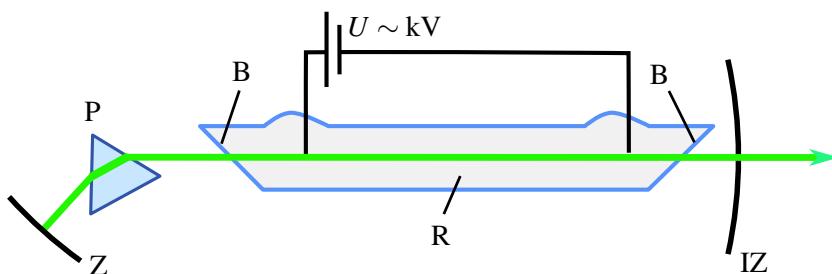
Kot drugi primer plinskega laserja obravnavajmo argonov ionski ( $\text{Ar}^+$ ) laser, ki je najbolj poznan po zveznem delovanju v modrem in zelenem delu spektra pri valovnih dolžinah 488,0 nm in 514,5 nm, deluje pa tudi v bližnjem ultravijoličnem delu spektra. Tipične moči delovanja argonovega laserja so 100 mW–50 W.

Kot večino plinskih laserjev tudi tega črpamo z električnim tokom. Atome argona vzbudimo s trki z elektronimi vione argona, ti pa z nadaljnji trki preidejo v vzbujena stanja. Obrnjeno zasedenost dosežemo med nivojem 4p in 4s (slika 7.5). Ta dva nivoja vsebujejo veliko podnivojev, zato je tudi prehodov med njima zelo veliko. Argonov laser tako seva pri več kot tridesetih različnih valovnih dolžinah, najznačilnejši sta že omenjeni 488 nm in 514,5 nm. Življenski čas zgornjega nivoja je okoli 10 ns, kar je približno desetkrat več od življenskega časa spodnjega nivoja, od koder se ionizira z rekombinacijo z elektronimi vrnejo v osnovno stanje atoma. Tudi pri tem laserju je poglaviti vzrok za razširitev črte Dopplerjev pojav ( $\Delta\nu = 3,5 \text{ GHz}$ ).



Slika 7.5: Shema energijskih nivojev v  $\text{Ar}^+$  laserju

Argonov laser je v osnovi zgrajen podobno kot He-Ne laser. V razelektritveni cevi (tipična dolžina 1 m in premer 1–2 mm) se nahaja argon pri pritisku okoli 10 mbar. Ker gre pri vzbujanju atomov argona za dvostopenjski proces, mora biti električni tok, s katerim dosežemo obrnjeno zasedenost, precej velik, lahko tudi nekaj deset amperov. Pri tipični napetosti nekaj kV to pomeni, da so potrebne velike električne moči, pogosto več deset kW, in močnejši argonovi laserji so zato zaradi velike količine odvečne toplotne najpogosteje vodno hlajeni.



Slika 7.6: Prenosna shema  $\text{Ar}^+$  laserja s prizmo: R – razelektritvena cev, IZ – izhodno zrcalo, Z – zrcalo z veliko odbojnostjo, B – Brewstrovi okni, P – prizma

 V argonovih laserjih pogosto ustvarimo vzdolžno magnetno polje, ki preprečuje elektronom, da bi predčasno zapustili ojačevalno območje in trčili v steno. S tem se poveča izhodno moč laserja, hkrati pa preprečuje poškodbe na stenah, ki bi jih lahko povzročili visokoenergijski elektroni. Iz istega razloga so pri močnejših laserjih zrcala izven plinske cevi.

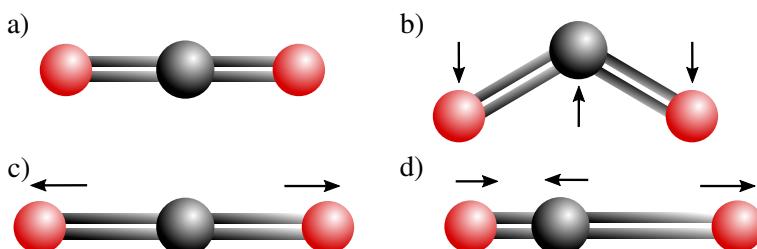
V resonator argonovega laserja moramo vgraditi še element, ki omogoči izbiro ene same spektralne črte. Najpogosteje za ta frekvenčno selektiven element uporabimo kar majhno prizmo pred enim od obeh zrcal (slika 7.6). Zaradi disperzije v prizmi se snopi različnih valovnih dolžin lomijo pod različnimi koti in le tisti snop, ki vpada pravokotno na zrcalo, se ojačuje. Z vrtenjem prizme ali zrcala lahko tako izbiramo valovno dolžino izhodne svetlobe. Nekaj tipičnih podatkov za argonov laser je zbranih v tabeli (7.1).

Argonovi laserji so zanesljivi in dajejo zelo kvaliteten Gaussov snop pri eni sami frekvenci. Zato se dosti uporablajo v optični spektroskopiji, interferometriji, holografiji in meritni tehniki. Delujejo v zveznem načinu, zaradi razmeroma široke črte ojačenja pa jih uporabljamo tudi za fazno uklenjene sunkovne laserje z dolžino sunkov okoli 150 ps. V kombinaciji s kriptonovimi laserji, ki so zelo podobni argonovim, le da delujejo v rdečem in oranžnem delu spektra, se uporablajo tudi v zabavni industriji. V zadnjem času jih vse bolj izrivajo polprevodniški laserji ali pa frekvenčno podvojeni Nd:YAG.

## 7.4 CO<sub>2</sub> laser

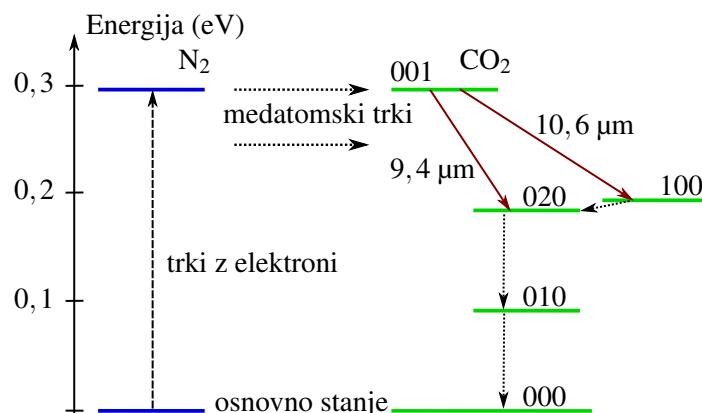
Do zdaj opisani laserji so delovali na elektronskih prehodih v atomih oziroma ionih. Laser na ogljikov dioksid pa deluje na prehode med vibracijskimi stanji molekul CO<sub>2</sub>, pri čemer elektroni ostanejo v osnovnem stanju. Zaradi majhnih energijskih razlik med vibracijskimi stanji deluje tak laser v infrardečem delu spektra, najpogosteje pri 9,6 μm in 10,6 μm. Laser deluje v zveznem in v sunkovnem načinu, odlikuje ga pa zelo velik izkoristek (~ 30 %) in posledično zelo velike moči, 1 W–10 kW.

Preden opišemo delovanje laserja, si na kratko oglejmo še nihajna stanja molekule ogljikovega dioksida. Molekula CO<sub>2</sub> je v osnovnem stanju linearna molekula (slika 7.7 a). Za molekule take oblike obstajajo trije osnovni načini nihanja atomov glede na težišče: atomi nihajo v smeri pravokotno na os (upogib, slika 7.7 b), atoma kisika nihata simetrično vzdolž osi molekule, ogljik pa pri tem miruje (simetrični razteg, slika 7.7 c) in atoma kisika se gibljeta v isti smeri vzdolž osi, ogljik pa v nasprotni smeri (asimetrični razteg, slika 7.7 d). Pri tem ima najvišjo frekvenco asimetrični razteg, najnižjo pa upogib. Vsako vibracijsko stanje lahko razstavimo na osnovne nihajne načine in ga opišemo s številom energijskih kvantov v posameznem osnovnem nihanju, torej s trojico celih števil ( $n_1, n_2, n_3$ ). Po dogovoru stanje 100 opisuje osnovni simetrični razteg, stanje 010 osnovni upogib, stanje 001 pa osnovni asimetrični razteg.



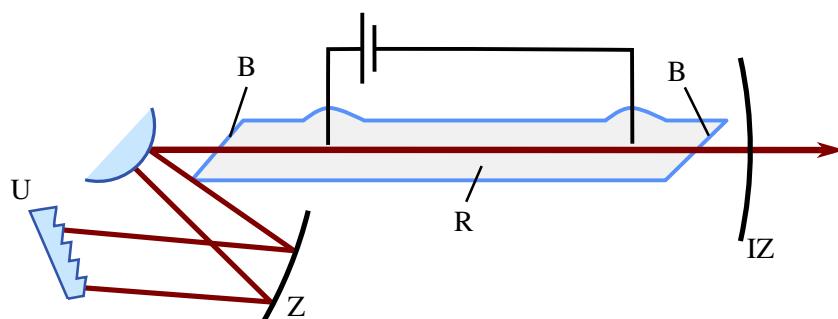
Slika 7.7: Molekula CO<sub>2</sub> (a) in trije osnovni načini nihanja molekule: upogib (b), simetrični razteg (c) in asimetrični razteg (d)

Vibracijska stanja molekule vzbudimo z električnim tokom skozi plin. Pri tem v razelektritveno cev dodamo dušik ( $N_2$ ) in podobno kot pri He-Ne laserju se tudi CO<sub>2</sub> črpa predvsem preko trkov z dušikovimi molekulami. Dušikova molekula je dvoatomna in ima zato zgolj eno vibracijsko stanje, ki po energiji praktično sovpada z energijo stanja 001 (slika 7.8). Iz tega zgornjega stanja prehajajo molekule v stanje 100 (10,6 μm) ali v stanje 020 (9,4 μm). Da pospešimo prehod nazaj v osnovno stanje, plinski mešanici dodamo še helij, s katerim trkajo molekule. Razmerje parcialnih tlakov je navadno 1:1:8 za CO<sub>2</sub>:N<sub>2</sub>:He pri tlaku 1 mbar. Pri tako nizkih tlakih je poglavitna razširitev spektralne črte Dopplerjeva, ki pa je v primerjavi z ostalimi plinskimi laserji zaradi nizkih frekvenc zelo majhna, le okoli 70 MHz. V laserskih sistemih, kjer je tlak višji, prevlada razširitev zaradi medmolekulskih trkov. Pri tlakih okoli 20 bar znaša razširitev že okoli 500 GHz, kar omogoča izdelavo fazno uklenjenih sunkovnih laserjev s sunki dolžine ~ 1 ps. Nekaj tipičnih podatkov za laser na ogljikov dioksid je zbranih v tabeli (7.1).



Slika 7.8: Shema vibracijskih nivojev v CO<sub>2</sub> laserju

Najpreprostejši laser na ogljikov dioksid je po svoji zgradbi podoben drugim plinskim laserjem. Razelektritvena cev (polmer ~ 1 cm in dolžina 0,5–2 m) je na obeh koncih zaključena z Brewstrovima oknoma in zrcaloma. Vsi optični elementi v laserju morajo biti seveda prepustni oziroma odbojni za infrardeč del svetlobe. Ker lahko deluje laser pri zelo veliko različnih valovnih dolžinah, dodamo frekvenčno selektiven člen, na primer uklonsko mrežico (slika 7.9).



Slika 7.9: Poenostavljena shema najpreprostejšega CO<sub>2</sub> laserja: R – razelektritvena cev, IZ – izhodno zrcalo, Z – zrcalo z veliko odbojnostjo, B – Brewstrovi okni, U – uklonska mrežica

Laserji na ogljikov dioksid se največ uporabljajo v industriji za zahtevne obdelave materialov, na primer za rezanje kovin, vrtanje, ablacijo, varjenje, pa tudi za vojaške in medicinske namene. Obdelava z laserji omogoča veliko natančnost, čistočo in je zelo fleksibilna.

Laser	He-Ne	$\text{Ar}^+$	$\text{CO}_2$	ekscimer
Valovna dolžina $\lambda$	632,8 nm	488 in 514,5 nm	9,6 in 10,6 $\mu\text{m}$	UV
Verjetnost za spontani prehod $A$	$3,4 \times 10^6/\text{s}$	$7,8 \times 10^7/\text{s}$	0,25/s	$\sim 10^8/\text{s}$
Presek za stimulirano emisijo $\sigma$	$3 \times 10^{-17} \text{ m}^2$	$2,6 \times 10^{-16} \text{ m}^2$	$3 \times 10^{-22} \text{ m}^2$	$10^{-20} \text{ m}^2$
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	$1,5 \times 10^9 \text{ Hz}$	$3,5 \times 10^9 \text{ Hz}$	$7 \times 10^7 \text{ Hz}$	$10^{13} \text{ Hz}$
Obrnjena zasedenost $\Delta N/V$	$5 \times 10^{15}/\text{m}^3$	$2 \times 10^{15}/\text{m}^3$	$3 \times 10^{21}/\text{m}^3$	$10^{20}/\text{m}^3$

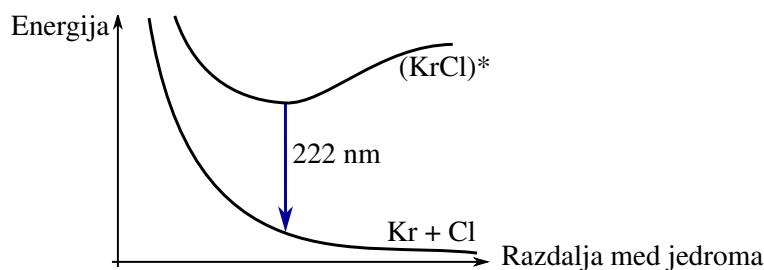
Tabela 7.1: Izbrani podatki za He-Ne,  $\text{Ar}^+$ ,  $\text{CO}_2$  in tipičen ekscimerni laser

## 7.5 Ekscimerni laser

Ekscimerji (*excited dimer, excimer*) so vzbujena vezana stanja dveh atomov, ki bi se v osnovnem stanju ne vezala. Za laserje so zanimivi predvsem ekscimerji težkih žlahtnih plinov in halogenov, na primer  $\text{Ar}_2^*$  (126 nm),  $\text{Kr}_2^*$  (146 nm),  $\text{Xe}_2^*$  (172 nm),  $\text{ArF}$  (193 nm),  $\text{KrF}$  (248 nm),  $\text{XeCl}$  (308 nm),  $\text{ArBr}$  (161 nm),  $\text{NeF}$  (108 nm) ... Te molekule obstajajo samo v vzbujenem stanju, v osnovnem stanju pa je odbojna sila med atomoma prevelika in molekula neobstojna. Vsi našteti primeri oddajajo lasersko svetlobo v ultravijoličnem delu, ki ga drugi laserski sistemi le težko pokrivajo. Ekscimerni laserji delujejo v sunkih, pri čemer je tipična oddana energija v sunku  $\sim 1 \text{ J}$ , dolžina sunka 10–100 ns pri repeticiji  $\sim 100 \text{ Hz}$ .

Vezano stanje dveh atomov dobimo, kadar je ionizacijska energija prvega atoma manjša od vsote elektronske afinitete drugega atoma in elektrostaticne energije vezave obeh ionov. Vzemimo za primer klor in kripton. Ionizacijska energija kriptona v osnovnem stanju je 14 eV, v vzbujenem pa 5 eV. Elektronska afiniteta klorja je 3,75 eV in elektrostaticna vezavna energija  $\text{KrCl}$  okoli 7 eV. Tako je za nastanek molekule  $\text{KrCl}$  v osnovnem stanju potrebno dodati okoli 4 eV, pri tvorbi molekule v vzbujenem stanju pa se sprosti okoli 6 eV. Približno obliko celotne potencialne energije molekule  $\text{KrCl}$  v osnovnem in vzbujenem stanju kaže slika (7.10). Molekula, ki je vezana v vzbujenem stanju, po sevalnem prehodu v osnovno stanje takoj razpade, zato je zelo lahko doseči obrnjeno zasedenost. Pri tem je razpadni čas vezanega stanja  $\sim 10 \text{ ns}$ , spodnjega nevezanega pa okoli 0,1 ps. Da nastanejo ekscimeri, vzbujamo mešanico plinov (žlahtnega plina ali mešanice žlahtnega in halogenega plina) v heliju. Pritisak je razmeroma velik ( $\sim 3 \text{ bar}$ ), zato plin v cevi vzbujamo prečno. Velika je tudi spektralna širina prehoda ( $\Delta\nu = 10^{13} \text{ Hz}$ ). Nekaj tipičnih podatkov za ekscimerne laserje je zbranih v tabeli (7.1).

Ekscimerni laserji delujejo v sunkih s precej veliko energijo in se uporabljajo v industriji materialov, mikroprocesorjev, fotolitografiji in medicini, predvsem oftalmologiji in kirurgiji.



Slika 7.10: Shema energije v odvisnosti od razdalje med jedromi atomov. V vzbujenem stanju se atoma povežeta v molekulo, po prehodu v nižji nivo pa atoma disociirata.

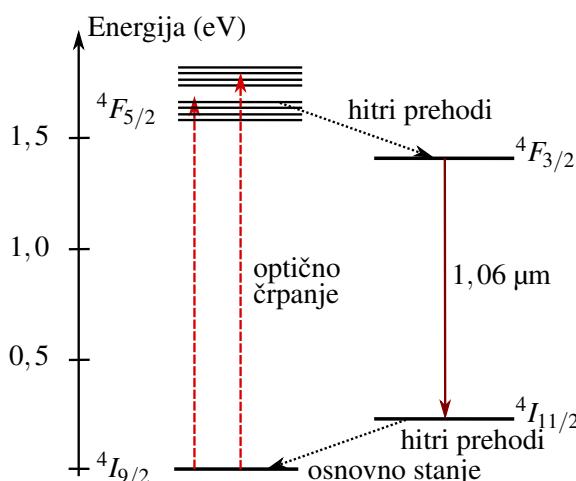
## 7.6 Neodimov laser

Druga skupina laserjev, ki jo bomo obravnavali, so trdninski laserji. Taki laserji temeljijo na elektronskih prehodih v ionih primesi, ki jih dodamo v kristal ali steklo, črpamo pa jih optično. Primesi so navadno redke zemlje ali prehodne kovine, kristali pa oksidi ali fluoridi. Izdelava ojačevalnih sredstev na osnovi stekla je bistveno bolj preprosta in poceni, vendar ima steklo precej nižjo topotno prevodnost od kristalov in se zato bolj greje. Začeli bomo z opisom dveh primerov neodimovega laserja, Nd:YAG in Nd:steklo. Podobne laserje dobimo, če v YAG kristalu namesto z neodimom itrijeve ione nadomestimo z iterbijem (1030 nm) ali erbijem (2940 nm).

### 7.6.1 Nd:YAG

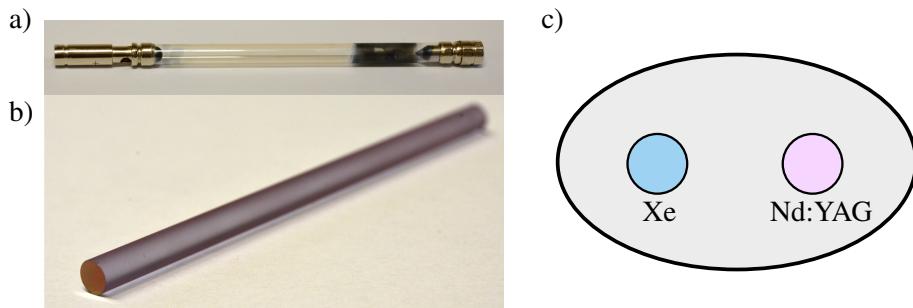
V Nd:YAG laserju je ojačevalno sredstvo itrij-aluminijev granat ( $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ , YAG) s primesmi neodimovih ionov  $\text{Nd}^{3+}$ . Neodimov laser deluje pri valovni dolžini 1,064 μm ali frekvenčno podvojeni 532 nm. Laser deluje v zveznem načinu pri močeh do 5 kW ali sunkovnem z dolžino sunkov okoli 100 ns in energijo sunka ~ 1 J.

Neodimov laser je primer štirinivojskega laserskega sistema, pri čemer je laserski prehod med stanjem  $^4F_{5/2}$  in  $^4I_{11/2}$  iona neodima (slika 7.11). S svetlogo višje frekvence (tipično okoli 800 nm) črpamo elektrone v višje nivoje, ki hitro preidejo v zgornji laserski nivo. Življenski čas zgornjega nivoja je okoli 230 μs, spodnjega pa precej krajši, zato je lahko doseči veliko obrnjeno zasedenost. Spodnje stanje je dovolj visoko nad osnovnim, da pri sobni temperaturi v ravnovesju ni znatno zasedeno. Razširitev črte je homogena in je predvsem posledica termičnega nihanja kristalne mreže ( $\Delta\nu = 130 \text{ GHz}$ ). Prag neodimovega laserja za zvezno delovanje je nizek in ga je lahko doseči, prav tako dobro neodimov laser deluje v sunkih, predvsem s preklopom dobrte.



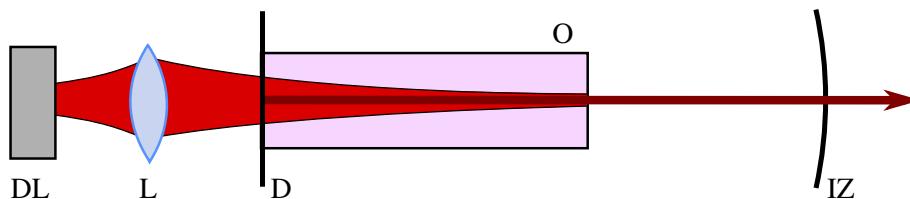
Slika 7.11: Shema energijskih nivojev v  $\text{Nd}^{3+}$  laserju

Laser črpamo z diodnimi laserji ali močnimi ksenonovimi svetilkami za zvezno delovanje ter podobnimi bliskovnimi lučmi za sunkovno delovanje (slika 7.12 a). Aktivna snov v laserju je v obliki paličice dolžine od nekaj cm do dobrih 10 cm in širine ~ 1 cm. V kristalu YAG neodimovi ioni nadomestijo približno 1 % itrijevih, zato ojačevalno sredstvo na videz ni prozorno, temveč rahlo rožnato (slika 7.12 b). Aktivna paličica in svetilka sta vgrajeni v cilindrično ali eliptično votlino z zrcalnimi ali belimi stenami, tako da se čim večji del črpalne svetlobe absorbira v laserski paličici (slika 7.12 c).



Slika 7.12: Ksenonova bliskovna svetilka (a), ojačevalno sredstvo v Nd:YAG laserju (b) in shema eliptične črpalne votline (c)

Pri črpanju s ksenonovo svetilkjo je le manjši del izsevane svetlobe v absorpcijskih pasovih, zato je izkoristek črpanja razmeroma slab, tipično pod 1 %. Za izhodno moč zvezno delajočega Nd:YAG laserja  $\sim 10$  W je tako potrebna električna moč  $\sim \text{kW}$ . Velika večina porabljenih moči gre v gretje, zato je v laserjih z nekoliko večjo povprečno močjo potrebno vodno hlajenje. Gretje povzroča tudi topotne deformacije laserske paličice, kar lahko močno spremeni lastnosti resonatorja. Topotni učinki so ena poglavitnih praktičnih težav pri izdelavi neodimovih laserjev s klasičnimi svetilkami. Danes zato zvezno delajoče neodimove laserje črpamo z diodnimi laserji, ki svetijo v območju največje absorpcije  $\text{Nd}^{3+}$ . Črpanje je lahko prečno ali vzdolžno (slika 7.13). Pri diodnem črpanju je izkoristek dosti večji in je manj gretja, kar omogoča bolj kompaktno konstrukcijo in boljšo stabilnost izhodne moči.



Slika 7.13: Shema vzdolžnega diodnega črpanja Nd:YAG laserja. O – ojačevalno sredstvo, IZ – izhodno zrcalo, D – dikroično zrcalo, prepustno za črpalno svetlobo in odbojno za lasersko, DL – diodni laser za črpanje, L – leča

Neodimovi laserji so zelo razširjeni, tako v osnovni kot tudi v frekvenčno podvojeni različici. Najbolj uporabni so za obdelavo materialov (vrtanje, varjenje, litografija) ter v medicini (dermatologija in endoskopska kirurgija). Pomemben proizvajalec sunkovnih Nd:YAG laserjev za medicinske namene je podjetje Fotona d.o.o. iz Ljubljane.

Laser	Nd:YAG	Nd:steklo	Ti:safir
Valovna dolžina	1064 nm	1050 nm	660 – 1180 nm
Verjetnost za spontani prehod $A$	$4 \times 10^3 / \text{s}$	$3 \times 10^3 / \text{s}$	$3 \times 10^5 / \text{s}$
Presek za stimulirano emisijo $\sigma$	$3 \times 10^{-23} \text{ m}^2$	$3 \times 10^{-24} \text{ m}^2$	$3 \times 10^{-23} \text{ m}^2$
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	$1,3 \times 10^{11} \text{ Hz}$	$7 \times 10^{12} \text{ Hz}$	$1 \times 10^{14} \text{ Hz}$
Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$	$1,6 \times 10^{23} / \text{m}^3$	$8 \times 10^{23} / \text{m}^3$	$6 \times 10^{23} / \text{m}^3$

Tabela 7.2: Tipični podatki za Nd:YAG, Nd:steklo in Ti:safirni laser

### 7.6.2 Nd:steklo

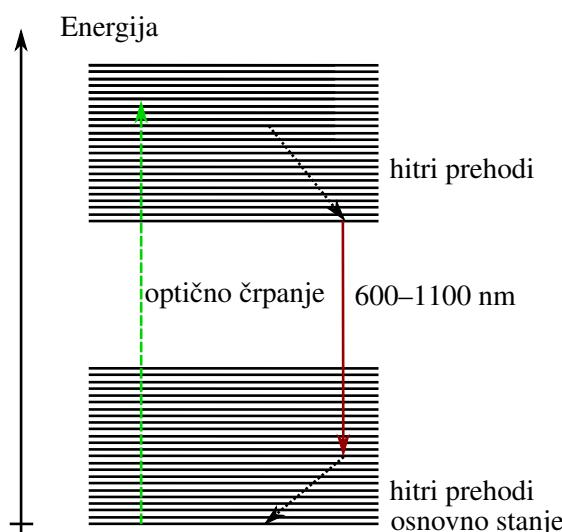
Namesto v kristal lahko neodimove ione  $\text{Nd}^{3+}$  vgradimo tudi v steklo. Laser z Nd:steklo ojačevalnim sredstvom deluje pri valovni dolžini 1,050 µm v sunkovnem načinu s preklopom dobrote ali z uklepanjem faz z energijami sunkov  $\sim 1 \text{ J}$ . Zaradi amorfne strukture stekla in posledično nehomogenega lokalnega polja je laserska črta nehomogeno razširjena ( $\Delta\nu = 7 \text{ THz}$ ). Ojačenje je manjše kot v Nd:YAG in za prag laserskega delovanja je potrebna precej večja črpalna moč. Laserji Nd:steklo se zato uporabljajo le v sunkovnem načinu in za tako delovanje so celo primernejši od Nd:YAG laserjev. Zaradi manjšega ojačenja pri dani obrnjeni zasedenosti je v laserju s preklopom dobrote mogoče doseči večjo načrpanost preden pride do praznjenja zaradi ojačevanja spontanega sevanja v enem preletu paličice. Problem teh laserjev predstavlja nizka topotna prevodnost stekla, ki omejuje repeticijo sunkov. Velika širina spektralne črte je zelo primerna za delovanje v načinu uklepanja faz, s katerim dosegamo ultrakratke sunke ( $\sim 100 \text{ fs}$ ).



Energie izsevanih sunkov je mogoče še povečati z ojačevalniki. Med največjimi je laserski sistem Nd:steklo v Ročestru (New York), ki ga uporabljajo za raziskave fuzije. Okoli 1 ns dolg sunek iz osnovnega laserja razdelijo na deset ojačevalnih vej, ki so dolge po 180 m. Končna energija sunka je nad  $\sim 1 \text{ MJ}$ . Z njim z vseh strani posvetijo na kroglico iz devterija in tritija, ki se dovolj segreje in stisne, da pride do njunega zlivanja. Vršna moč laserskega sunka je okoli  $10^{15} \text{ W}$ . Če laserski snop zberemo na površino  $1 \text{ mm}^2$ , dobimo električno poljsko jakost okoli  $5 \times 10^{11} \text{ V/m}$ , kar je približno enako električnemu polju v vodikovem atomu.

## 7.7 Ti:safir laser

Titan-safirni laser je trdninski laser, pri katerem so v kristal safirja  $\text{Al}_2\text{O}_3$  primešani ioni titana  $\text{Ti}^{3+}$ . Njegova najpomembnejša značilnost je zvezna nastavljivost valovne dolžine v zelo širokem frekvenčnem pasu (600–1180 nm) z največjo učinkovitostjo pri okoli 800 nm. Deluje v zveznem načinu z močmi do 50 W in sunkovno v fazno uklenjenem načinu z dolžino sunkov do 10 fs z vršnimi močmi nad  $10^{12} \text{ W}$ .



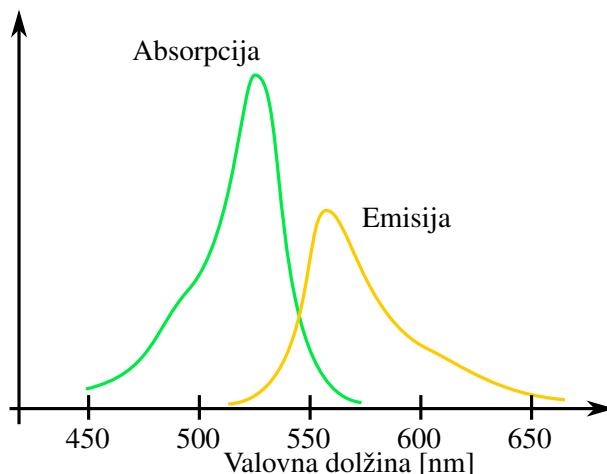
Slika 7.14: Energijski nivoji v Ti:safir laserju. Dva nivoja sta zaradi vibracij razcepljena na veliko število podnivojev, ki pa se med seboj deloma prekrivajo. Zelo podobna je tudi shema energijskih nivojev organskih barvil.

Ojačevalno sredstvo v Ti:safir laserju je aluminijev oksid, v katerem približno 0,2 % aluminijevih ionov nadomestimo s titanovimi. Titanovi ioni imajo v taki konfiguraciji zgolj eno vzbujeno stanje, vendar se zaradi sklopitve s fononi vibracijski nivoji posameznega stanja med seboj prekrivajo in prehod je močno razširjen. Z optičnim črpanjem vzbudimo titanov ion iz osnovnega stanja v eno izmed vibracijskih stanj vzbujenega stanja. Ion nato hitro preide v najnižje vzbujeno stanje. Laserski prehod poteka med nižjem vzbujenim stanjem in enim od vibracijskih nivojev osnovnega stanja (slika 7.14). Življenski čas vzbujenega stanja je kratek ( $3,2 \mu\text{s}$ ), širina črte pa največja med vsemi trdninskimi laserji ( $\Delta\nu = 100 \text{ THz}$ ). Ker je vrh absorpcijskega pasu blizu 500 nm, laser črpamo z zeleno svetlobo (argonov laser za zvezno delovanje oziroma frekvenčno podvojen neodimov laser za sunkovno). Najpomembnejša uporaba Ti:safir laserjev je v raziskovalnih laboratorijih za ustvarjanje zelo kratkih sunkov svetlobe z dolžino  $\sim 10 \text{ fs}$ . Prevedeno v dolžino, ki jo svetloba v tem času prepotuje, je to le nekaj valovnih dolžin svetlobe.

## 7.8 Laserji na organska barvila

Naslednja skupina laserjev so laserji na organska barvila, v katerih je organsko barvilo raztopljeno v tekočini, praviloma vodi ali alkoholu. To so bili prvi laserji z veliko spektralno širino in nastavljivo valovno dolžino delovanja. Delujejo lahko kot zvezni laserji in z izbiro barvila lahko dosežemo delovanje v območju  $300\text{--}1500 \mu\text{m}$  pri močeh do  $\sim 2 \text{ W}$ , široka spektralna širina pa omogoča sunkovno delovanje z uklepanjem faz z nekaj femtosekundnimi sunki pri energiji sunka nekaj 100 J.

Shema energijskih nivojev molekule tipičnega organskega barvila je zelo podobna shemi energijskih nivojev titan-safirnega laserja (slika 7.14). Vsi elektronski nivoji so razcepljeni v vibracijske in rotacijske podnivoje. V topotnem ravnovesju je molekula na dnu osnovnega elektronskega stanja  $S_0$ . Z absorpcijo vidne svetlobe primerne frekvence preide v neko vzbujeno singletno stanje  $S_1$ . Preko trkov z molekulami topila vzbujena barvilna molekula zelo hitro, v času okoli pikosekunde, preide na dno vzbujenega stanja, od koder s sevanjem preide nekam v osnovno stanje  $S_0$ , od tam pa s trki hitro nazaj na dno osnovnega stanja. Ker sta obe elektronski stanji zaradi vibracij in rotacij razširjeni, sta absorpcijska in emisijska fluorescenčna črta široki ( $\Delta\nu = 30 \text{ THz}$ ). Energija izsevane svetlobe je zmanjšana za energijo prehodov s trki, zato je emisijska črta premaknjena k nižjim frekvencam od absorpcijske. Absorpcijski in fluorescenčni spekter prehoda  $S_0 - S_1$  za barvilo rodamin 6G kaže slika (7.15).



Slika 7.15: Absorpcijski in emisijski spekter barvila rodamin 6G, ki se uporablja v laserjih

Valovna dolžina	300–1500 $\mu\text{m}$
Verjetnost za spontani prehod $A$	$\sim 10^8/\text{s}$
Presek za stimulirano emisijo $\sigma$	$3 \times 10^{-20} \text{ m}^2$
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	$3 \times 10^{13} \text{ Hz}$
Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$	$\sim 10^{22}/\text{m}^3$

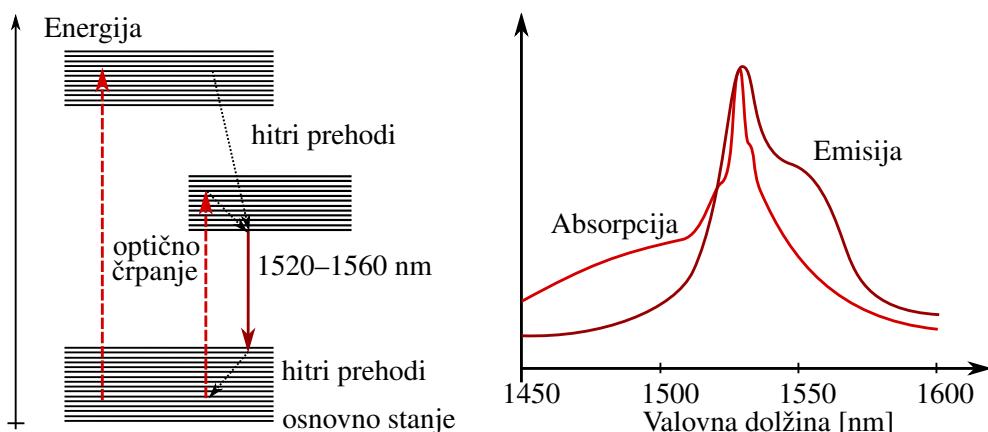
Tabela 7.3: Tipični podatki za laserje na organska barvila

Laser na organska barvila lahko deluje pri vseh frekvencah znotraj široke fluorescenčne črte. Zato moramo v resonator vgraditi frekvenčno selektiven element, s katerim nastavljamo frekvenco izhodne svetlobe. Uporabna je prizma, kot v primeru argonovega laserja, ali pa eno od zrcal nadomestimo z uklonsko mrežico, ki je zasukana pod takim kotom, da se po osi resonatorja odbije svetloba izbrane valovne dolžine. Barvilne laserje črpamo ali z bliskovno svetilko ali z drugim laserjem primerne valovne dolžine, na primer argonovim ali eksimernim laserjem.

Slabost laserjev na organska barvila je njihova degradacija. Barvila v laserjih je treba pogosto menjati (tipično na 100 ur delovanja), poleg tega je ravnanje z njimi zahtevno, saj je veliko barvil in topil strupenih in korozivnih. Laserji na organska barvila so uporabni v spektroskopiji, za ločevanje izotopov, v medicini (dermatologija, odstranjevanje ledvičnih kamnov) ...

## 7.9 Vlakenski laserji

Posebna vrsta laserjev so vlakenski laserji, v katerih predstavlja aktivno sredstvo optično vlakno, dopirano z ioni redkih zemelj. (Za podroben opis optičnih vlaken glej poglavje 9) Valovna dolžina, pri kateri oddajajo svetlobo, je odvisna od snovi, s katerimi je vlakno dopirano. Najpogosteje je to erbij (1550 nm), iterbij ( $\sim 1100$  nm) ali neodim (1064 nm). Vlakenske laserje odlikuje izredno velik izkoristek (tipično okoli 70–80 %, lahko tudi več) in posledično zelo velika moč (do 20 kW). Za njih sta značilni tudi izredno velika kakovost žarka (faktor  $M^2 < 1,1$ , glej enačbo 3.24) in razmeroma majhna občutljivost na zunanje motnje. Delujejo lahko v zveznem ali sunkovnem načinu.

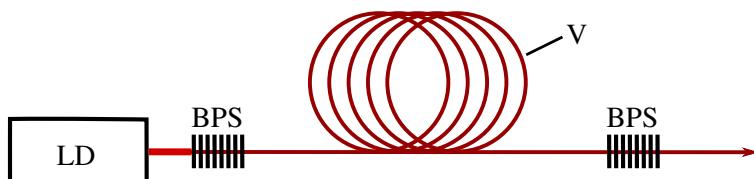


Slika 7.16: Energijski nivoji v erbijevem vlakenskem laserju (levo) in absorpcijski ter emisijski spekter za erbij (desno). Dodaten vrh pri 980 nm ni prikazan.

Oglejmo si vlakenski laser, katerega vlakno je dopirano z ioni erbija (masni delež  $\sim 1\%$ ). Vlakna so pogosto dodatno dopirana z iterbijem, kar poveča absorpcijo črpalne svetlobe in s tem izkoristek laserja. Laser črpamo optično z lasersko diodo pri 980 nm ali 1480 nm, laserski prehodi pa se zgodijo ob povratku v osnovno stanje. Osnovno stanje je razcepljeno v več podnivojev (slika 7.16), zato je valovna dolžina oddane svetlobe v razmeroma širokem intervalu 1520–1560 nm. Velika spektralna širina omogoča delovanje z uklepanjem faz.

Zgradba vlakenskih laserjev se razlikuje od do zdaj opisanih. Glavna razlika je seveda v resonatorju, ki je v tem primeru kar optično vlakno. Tipičen premer je  $\sim 5 \mu\text{m}$  in dolžina več metrov. Na koncih vlakna lahko postavimo dikroični zrcali, ki omogočata longitudinalno sklopitev črpalnega žarka v vlakno. Namesto navadnih zrcal se pogosto uporabi periodične strukture na koncih vlakna, na katerih se valovanje izbrane valovne dolžine Braggovo odbija (slika 7.17). S selektivnim odbojem se širina spektra izhodnega valovanja bistveno zmanjša.

Navadno uporabljamo vlakna, ki so sestavljena iz sredice in dveh plaščev. Laserska svetloba ostaja ujeta v sredici vlakna, črpalno pa vodimo po notranjem plašču. To omogoča bistveno lažjo sklopitev črpalnega žarka v vlakno, poleg tega povečanje efektivnega polmera žarka vodi do manjših vršnih intenzitet in manjše verjetnosti pojava neželenih nelinearnih pojmov (poglavlje 9.10).



Slika 7.17: Shema vlakenskega laserja: LD – črpalna laserska dioda, BPS – Braggova periodična struktura, V – optično vlakno

Vlakenski laserji se uporabljajo v telekomunikacijah, saj oddajajo svetlobo valovnih dolžin, pri katerih je v vlaknih najmanjša disperzija (poglavlje 9.4). Velika intenziteta svetlobe omogoča obdelavo, varjenje, vrtanje in rezanje kovin. Zaradi svojih mehanskih lastnosti so primerni tudi za premično lasersko obdelavo snovi.

Valovna dolžina	1550 nm
Verjetnost za spontani prehod $A$	$\sim 90/\text{s}$
Presek za stimulirano emisijo $\sigma$	$7 \times 10^{-25} \text{ m}^2$
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	$3 \times 10^{12} \text{ Hz}$
Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$	$\sim 10^{24}/\text{m}^3$

Tabela 7.4: Tipični podatki za erbijev vlakenski laser



Namesto vlaken, dopiranih z ioni redkih zemelj, lahko za izdelavo vlakenskih laserjev izkoristimo pojav stimuliranega Ramanovega sipanja (glej poglavje ??). Pri tem pojavu se črpalni žarek svetlobe neelastično siplje, ojači pa se žarek pri nižji frekvenci. Razlika frekvenc ustreza vibracijskim prehodom molekul, ki prevzamejo preostanek energije. Signal, ki se pri prehodu ojačuje, ostaja pretežno ujet v vlakno z Braggovimi periodičnimi strukturami na koncih. Zavedati se moramo razlike med navadnim laserjem, ki deluje zaradi vzpostavljene obrnjene zasedenosti, in Ramanskim laserjem, v katerem pride do ojačanja sipane svetlobe.

## 7.10 Polprevodniški laserji

Danes so nedvomno najpomembnejši polprevodniški oziroma diodni laserji. Njihove glavne značilnosti so veliko ojačenje in zato majhna dimenzija ( $\sim 10\text{--}100 \mu\text{m}$ ), nizka cena, velik izkoristek ( $\sim 50\%$ ) in neposredno črpanje z električnim tokom. Za črpanje zadoščajo majhni tokovi (tipično  $\sim 100 \text{ mA}$ ), kar omogoča zelo hitro modulacijo (več 10 GHz) svetlobne moči s spreminjajočim se črpanjem. Slabost polprevodniških laserjev je razmeroma širok spekter in posledično majhna koherenca. Polprevodniški laserji delujejo v območju valovnih dolžin od  $\sim 375 \text{ nm}$  do več  $\mu\text{m}$ . Izvodne moči so zelo odvisne od valovne dolžine: v UV območju so razmeroma nizke ( $\sim 100 \text{ mW}$ ), sicer pa dosegajo vrednosti  $\sim 3 \text{ W}$ .

Na hitro lahko rečemo, da delovanje diodnih laserjev temelji na rekombinaciji elektronov iz prevodnega pasu z vrzelmi v valenčnem pasu, pri čemer se izseva foton. Ta proces je lahko spontan, kot v svetlečih diodah, lahko pa tudi stimuliran, kar vodi do ojačanja svetlobe in laserkega delovanja. Za podrobnejšo razlago ojačenja v polprevodniških laserjih moramo poznati osnove polprevodniške fizike, zato jo na kratko ponovimo.

### Energijski pasovi v polprevodnikih

V trdnih snoveh elektroni niso lokalizirani in zaradi interakcij med sosednjimi atomi se sicer ostra elektronska stanja razširijo v elektronske pasove. Pasovi se lahko prekrivajo (kovine), lahko pa se med najvišjim polno zasedenim (valenčnim) pasom in najnižjim nezasedenim (prevodnim) pasom pojavi energijska reža. Če je velikost energijske reže  $E_g$  nekaj  $kT$ , je snov polprevodnik (tabela 7.5), sicer je izolator.

Snov	InSb	InAs	Ge	Si	GaAs	GaP
$E_g$ [eV]	0,17	0,36	0,67	1,124	1,43	2,26

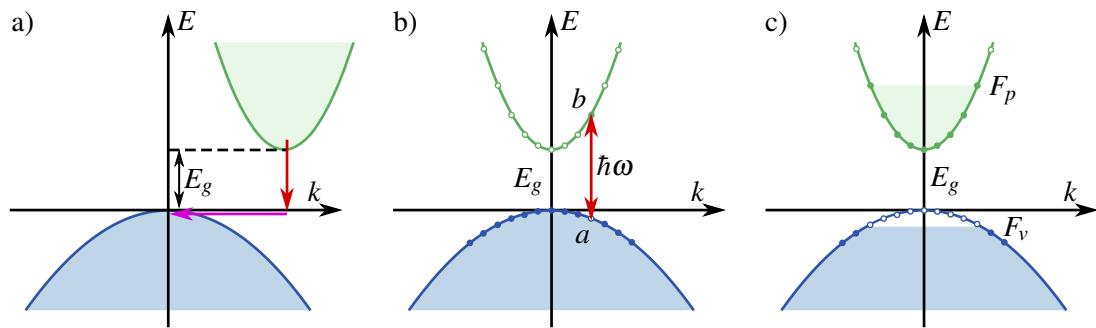
Tabela 7.5: Širina energijske reže v nekaterih polprevodnikih

Ko na polprevodnik vpade foton z energijo  $\hbar\omega > E_g$ , se foton absorbira, elektron iz valenčnega pasu preide v prevodni pas, v valenčnem pasu pa ostane vrzel. Pričakovali bi, da se tak elektron, ki je medtem hitro prešel v dno prevodnega pasu, spontano vrne v valenčni pas, pri čemer se svetloba izseva. Vendar je pri prehodu treba upoštevati tudi ohranitev gibalne količine. Pri najobičajnejših polprevodnikih, siliciju in germaniju, leži vrh valenčnega pasu pri valovnem vektorju  $\mathbf{k} = 0$ , dno prevodnega pasu pa pri  $\mathbf{k} \neq 0$  (slika 7.18 a). Prehod elektrona preko take indirektne reže je malo verjeten, saj mora zaradi ohranitve gibalne količine priti še do interakcije s fononom. Prehod je veliko bolj verjeten v snoveh z direktno režo, pri katerih ležita tako dno prevodnega kot vrh valenčnega pasu pri  $\mathbf{k} = 0$  (slika 7.18 b). Snovi z direktno režo so na primer GaAs in druge spojine elementov tretje in pete skupine, ki so najbolj uporabni za izdelavo diodnih laserjev.

V najpreprostejši sliki obliko prevodnega pasu v bližini minimuma opišemo s parabolično odvisnostjo od velikosti valovnega vektorja  $\mathbf{k}$

$$E_p = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p}. \quad (7.1)$$

Pri tem  $m_e$  označuje efektivno maso elektrona v prevodnem pasu, ki upošteva interakcije z mrežo in se zato razlikuje od mase prostega elektrona  $m_0$ .



Slika 7.18: Energijski pasovi v polprevodniku, kjer modra označuje valenčni pas, zelena pa prevođnega. Reža je indirektna (a) ali direktna (b). V vzbujenem stanju (c) so najnižja mesta v prevođnem pasu zasedena in najvišja mesta valenčnega pasu izpraznjena.

Podobno z efektivno maso zapišemo energijo vrzeli v valenčnem pasu

$$E_v = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_v}. \quad (7.2)$$

Zapišimo še gostoti stanj na energijski interval za prevodni in valenčni pas. Izhajamo iz zveze  $\rho(k)dk = k^2 dk / \pi^2$  (enačba 5.4) in z upoštevanjem gornjih zvez dobimo

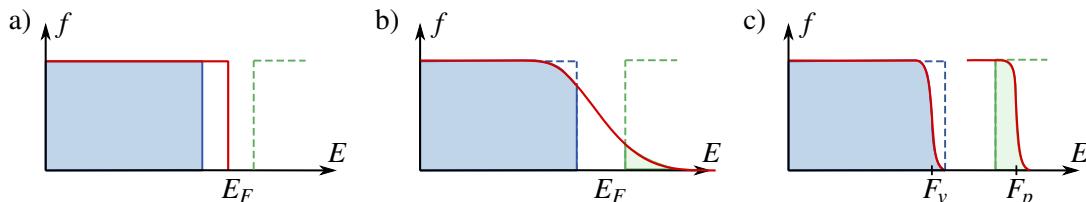
$$\rho_p(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_p}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_g} \quad \text{in} \quad \rho_v(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_v}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{-E}. \quad (7.3)$$

Pri tem sta ključna parametra efektivna masa elektronov in vrzeli. Ti dve masi sta značilni za posamezen polprevodnik in znašata, na primer v GaAs,  $m_e = 0,067 m_0$  in  $m_v = 0,5 m_0$ . Gostota stanj za vrzeli je v GaAs zato približno dvajsetkrat večja od gostote stanj za elektrone.

Verjetnost za zasedenost stanj je podana s Fermi-Diracovo funkcijo

$$f_p(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}, \quad (7.4)$$

kjer  $E_F$  označuje Fermijevo energijo. Pri  $T = 0$  so vsa stanja pod Fermijevo energijo zasedena, nad njo pa prazna in Fermijeva energija leži v energijski reži (slika 7.19 a). Pri končni temperaturi se na dnu prevodnega pasu nahajajo termično vzbujeni elektroni, na vrhu valenčnega pasu pa vrzeli (slika 7.19 b). Verjetnost za pojav vrzeli v valenčnem pasu je  $f_v = 1 - f_p$ .



Slika 7.19: Verjetnost za zasedenost stanj. Pri  $T = 0$  je valenčni pas poln, prevodni pa prazen (a). Pri končni temperaturi termično vzbujeni elektroni preidejo v prevodni pas (b). Za opis neravnovesnega stanja uporabimo dve Fermijevi energiji  $F_v$  in  $F_p$ , za vsak pas svojo (c).



$E_F$  se določi iz pogoja, da je število elektronov v prevodnem pasu enako številu vrzeli v valenčnem pasu in  $N_{p0} = N_{v0}$ . Fermijeva energija leži na sredini energijske reže le v primeru, da sta efektivni masi za elektrone in vrzeli enaki. Sicer pride do premika Fermijeve energije proti pasu z manjšo efektivno maso.

Število elektronov v prevodnem pasu na prostorninsko enoto izračunamo kot produkt gostote stanj in verjetnost, da je stanje zasedeno, integrirano po celotnem energijskem pasu

$$N_{p0} = \int_{E_g}^{\infty} \rho_p(E) f_p(E) dE. \quad (7.5)$$

Število vrzeli v valenčnem pasu je

$$N_{v0} = \int_{-\infty}^{0} \rho_v(E) f_v(E) dE. \quad (7.6)$$

Število elektronov v prevodnem pasu (in vrzeli v valenčnem) je pri  $T = 0$  enako nič in tudi pri končnih temperaturah ostaja razmeroma nizko. Znatno ga lahko povečamo, če polprevodnik dopiramo in s tem povišamo Fermijevo energijo.

Dopiranje polprevodnika pomeni nadzorovano dodajanje ustreznih nečistoč. Če dodamo donorske primesi, ki povečajo število elektronov v snovi, govorimo o polprevodniku tipa  $n$ , če pa dodajamo akceptorske snovi, ki elektrone sprejemajo, govorimo o polprevodniku tipa  $p$ . Primeri donorjev za GaAs so žveplo, selen ali telur, primer akceptorjev pa cink in kadmij.

Zaradi primesi se v energijski reži pojavi dodatni energijski nivo, pri čemer je donorski nivo navadno tik pod prevodnim pasom, akceptorski pa tik nad valenčnim. V tipu  $n$  se Fermijeva energija premakne navzgor, pri močnem dopiranju lahko tudi v prevodni pas. V tem primeru so zasedena vsa stanja v valenčnem pasu in vsa stanja do Fermijeve energije v prevodnem. Podobno je v močno dopiranju tipu  $p$ , v katerem se Fermijeva energija pomakne navzdol in število vrzeli v valenčnem pasu močno naraste. Prosta so tako vsa stanja v prevodnem pasu in stanja do Fermijeve energije v valenčnem pasu.

 Zgolj z dopiranjem se verjetnost za prehod in izsevanje fotona ne spremeni. V  $n$  tipu, na primer, se število elektronov v prevodnem pasu sicer znatno poveča, vendar v prevodnem pasu ni dovolj ustreznih vrzeli, s katerimi bi se elektroni lahko rekombinirali.

Ko elektrone vzbudimo iz valenčnega v prevodni pas, se v valenčnem pasu pojavijo vrzeli. Dokler ne pride do rekombinacije (tipično nekaj ns), vlada v prevodnem pasu kvazi-termično ravnovesje, saj je relaksacija elektronov znotraj pasu bistveno hitrejša (tipično ps). Za veliko populacijo elektronov v prevodnem in veliko populacijo vrzeli v valenčnem pasu Fermijeva funkcija ni več dobra za opis zasedenosti stanj (slike 7.18 c in 7.19 c). Uporabimo koncept kvazi-Fermijevih nivojev  $F_p$  in  $F_v$ , s katerima opišemo porazdelitvi v vsakem pasu posebej, za prevodni in valenčni pas

$$f_p(E) = \frac{1}{e^{(E-F_p)/k_B T} + 1} \quad \text{in} \quad f_v(E) = \frac{1}{e^{(E-F_v)/k_B T} + 1}. \quad (7.7)$$

V termičnem ravnovesju je razlika med kvazi-Fermijevima energijama  $F_p - F_v$  enaka nič, z naraščajočim vzbujanjem pa se razlika povečuje.

### Ojačenje svetlobe v polprevodnikih

Posvetimo na polprevodnik v vzbujenem stanju s svetlobo s frekvenco  $\omega$ . Vpadna svetloba povzroča prehode med stanji z energijo  $E_a$  v valenčnem in med stanji z energijo  $E_b$  v prevodnem pasu (slika 7.18 b). Če je prehodov iz prevodnega pasu v valenčnega več kot prehodov v obratni smeri, pride do ojačanja svetlobe.

Za zapis verjetnosti za prehod med dvema stanjema v časovni enoti uporabimo Fermijevo zlato pravilo. Verjetnost, da je zgornje stanje zasedeno, je  $f_p(E_b)$ , verjetnost za zasedenost spodnjega stanja pa je  $1 - f_v(E_a)$ . Verjetnost za prehod pri določenem valovnem vektorju je

$$w_s(k) = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{pv}|^2 \delta(E_b - E_a - \hbar\omega) f_p(E_b) [1 - f_v(E_a)], \quad (7.8)$$

kjer je  $H_{pv} = \langle p|\hat{x}|v\rangle E$  matrični element za dipolni prehod v svetlobnem polju  $E$  med prevodnim in valenčnim pasom. Podobno je verjetnost za absorpcijo

$$w_a(k) = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{pv}|^2 \delta(E_b - E_a - \hbar\omega) f_v(E_a) [1 - f_p(E_b)]. \quad (7.9)$$

Upoštevamo enačbi (7.1) in (7.2) in zapišemo razliko energij

$$E_b - E_a = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2} \left( \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_v} \right) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}, \quad (7.10)$$

kjer smo z  $m_r = m_v m_p / (m_v + m_p)$  označili reducirano maso elektrona in vrzeli.

Število spontanih emisij oziroma absorpcij na enoto volumna v danem času izračunamo tako, da verjetnosti za prehod integriramo po vseh  $\mathbf{k}$ . Razliko med številom spontanih emisij in absorpcij na enoto volumna je

$$\begin{aligned} N_{pv} - N_{vp} &= \int (w_s - w_a) \rho(k) dk \\ &= \frac{2}{\pi\hbar} \int |H_{pv}|^2 (f_p(E_b) - f_v(E_a)) \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + E_g - \hbar\omega\right) k^2 dk. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Upoštevali smo, da je gostota stanj  $\rho(k) = k^2 dk / \pi^2$ . Vpeljemo novo spremenljivko

$$X = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + E_g - \hbar\omega \quad (7.12)$$

in zapišemo integral

$$N_{pv} - N_{vp} = \frac{1}{\pi\hbar} \left( \frac{2m_r}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int |H_{pv}|^2 (f_p(E_b) - f_v(E_a)) \sqrt{(X - E_g + \hbar\omega)} \delta(X) dX. \quad (7.13)$$

Z upoštevanjem lastnosti funkcije  $\delta$  lahko zapišemo

$$N_{pv} - N_{vp} = \frac{1}{\pi\hbar} \left( \frac{2m_r}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\hbar\omega - E_g} (f_p(E_b) - f_v(E_a)). \quad (7.14)$$

Poglejmo rezultat podrobneje. Da je število prehodov iz prevodnega v valenčni pas večje od števila prehodov v obratno smer in torej pride do ojačanja vpadne svetlobe in ne njene absorpcije, mora biti  $N_{pv} - N_{vp} > 0$ . Sledi pogoj

$$\frac{1}{e^{(E_b - F_p)} + 1} > \frac{1}{e^{(E_a - F_v)} + 1}. \quad (7.15)$$

Upoštevamo, da je  $E_b - E_a = \hbar\omega$  in da mora biti število prehodov realno, in dobimo pogoj za ojačevanje

$$E_g \leq \hbar\omega < F_p - F_v. \quad (7.16)$$

Energija fotonov, ki naj se v snovi ojačujejo, mora biti po pričakovanjih večja od energije reže, sicer ne pride niti do absoprcije niti do ojačenja. Gornja zveza pa pove tudi, da za ojačenje svetlobe ne zadošča le nekaj vzbujenih elektronov in nekaj ustreznih vrzeli. V prevodnem pasu mora biti toliko elektronov, da pri neki energiji zasedejo vsaj polovico stanj, hkrati pa mora biti v valenčnem pasu toliko vrzeli, da je vsaj polovica stanj nezasedena. Ojača se torej le svetloba z energijo fotonov, ki je manjša od razlike med kvazi-Fermijevema nivojem.

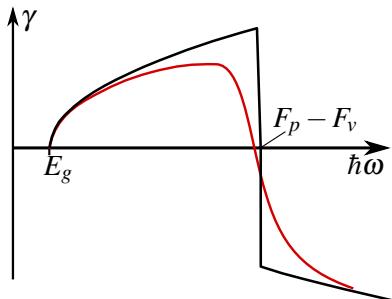
Koeficient ojačenja vpadne svetlobe pri dani frekvenci  $\omega$  je

$$\gamma(\omega) = K \sqrt{\hbar\omega - E_g} (f_p(E_b) - f_v(E_a)), \quad (7.17)$$

pri čemer za ojačenje velja

$$dj = \gamma(\omega) j dz. \quad (7.18)$$

Z naraščajočo stopnjo vzbujenosti koeficient ojačenja razumljivo narašča, manjša pa se z naraščajočo temperaturo. Njegovo odvisnost od energije vpadnih fotonov kaže slika (7.20) in vidimo, da se z naraščajočo temperaturo zmanjšuje tudi širina ojačanega pasu.



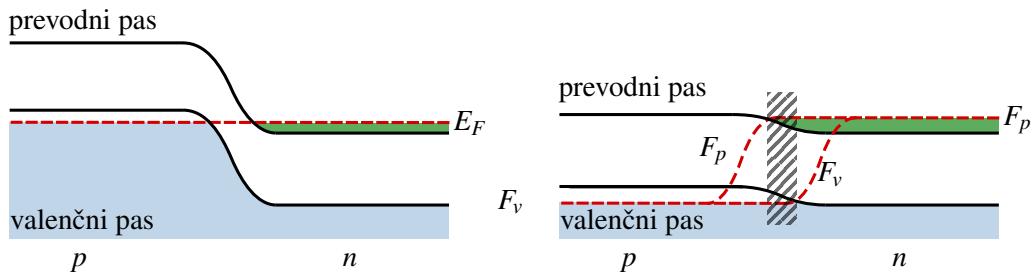
Slika 7.20: Ojačenje v polprevodniku kot funkcija frekvence svetlobe. Črna krivulja velja pri  $T = 0$  in rdeča pri  $T > 0$ . Pri frekvencah, večjih od  $(F_p - F_v)/\hbar$ , pride do absorpcije svetlobe.

 Iz enačbe (7.17) za ojačenje v polprevodnikih je še enkrat jasna glavna razlika med navadnimi in polprevodniškimi laserji: v navadnih laserjih je obrnjena zasedenost podvržena Boltzmannovi statistiki, v polprevodniških pa zasedenost stanj opišemo s Fermi-Diracovo porazdelitvijo.

### Spoj $p$ - $n$

Svetloba se v polprevodniku ojačuje le, če je na istem mestu v prevodnem pasu dovolj veliko število elektronov, v valenčnem pasu pa zadosti vrzeli. Za delovanje polprevodniškega laserja moramo torej s črpanjem vzdrževati neravnovesno stanje, podobno kot smo pri navadnih laserjih vzdrževali obrnjeno zasedenost.

Neravnovesno stanje dosežemo tako, da v degeneriran polprevodnik tipa  $p$  z veliko vrzeli dovolj hitro dodajamo elektrone v prevodni pas. To lahko storimo preko spoja  $p$ - $n$ , na katerega priključimo napetost v prevodni smeri. Najpreprostejši primer spoja  $p$ - $n$  je spoj dveh kosov iste snovi, ki je na eni strani dopirana z akceptorji ( $p$ ) in na drugi z donorji ( $n$ ). Ko staknemo območji  $p$  in  $n$ , elektroni iz območja z višjo koncentracijo difundirajo v območje z nižjo koncentracijo, vrzeli pa ravno obratno. Ob spoju nastane v stacionarnem stanju ozek pas, tako imenovani izpraznjeni sloj, v katerem ni prostih nosilcev naboja. Na strani  $n$  ostanejo pozitivni donorski ioni, na strani  $p$  pa negativni akceptorski ioni, ki ustvarjajo električno polje. Nastalo polje preprečuje nadaljnjo difuzijo nosilcev naboja. V ravnotesju se Fermijeva energija na obeh straneh izenači, prevodni in valenčni pas pa se ukrivita.



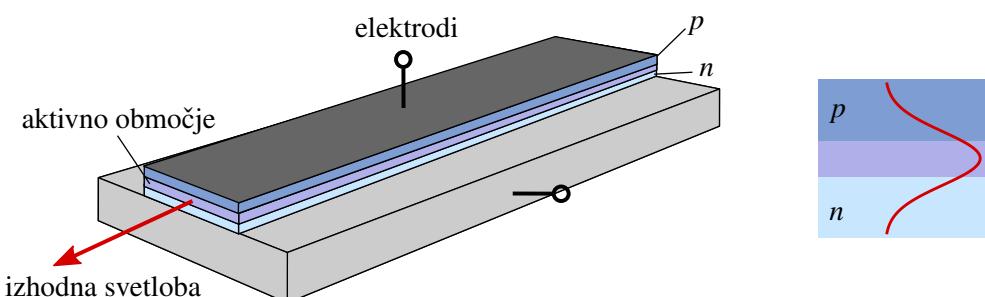
Slika 7.21: Energijska pasova v močno dopiranem spoju  $p$ - $n$  (levo) in ista pasova ob priključeni napetosti  $U$  v prevodni smeri (desno).  $F_p$  in  $F_v$  označujeta kvazi-Fermijevi energiji, senčen del pa aktivno območje, v katerem pride do rekombinacije elektronov in vrzeli.

Ko na spoj priključimo napetost v prevodni smeri (torej pozitivno napetost na stran  $p$ ), se potencialni skok zmanjša. Pri tem je potencialna razlika kar sorazmerna s priključeno napetostjo  $U$ . Fermijevi energiji na  $p$  in  $n$  strani se razmakneta in v ozkem območju v bližini spoja pride do hkratne zasedenosti elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu (slika 7.21). To imenujemo aktivno območje, saj v njem prihaja do rekombinacij in do nastanka fotonov.

Pri nizkih priključenih napetostih oziroma nizkih tokovih skozi spoj  $p$ - $n$  prihaja do spontane rekombinacije in nizke izsevane moči svetlobe. Pri večjih napetostih, ko je  $e_0 U \approx E_g$ , pride do velikih koncentracijah nosilcev naboja in stimuliranih rekombinacij, ki omogočajo optično ojačenje. Takrat presežemo prag delovanja diodnega laserja. Ojačenje v polprevodniških laserjih je precej veliko, lahko več od 100 /cm, zato je mogoče dobiti delujoč laser že v zelo majhnem aktivnem območju, lahko tudi le nekaj mikronov. Običajni polprevodniški laserji so tako dolgi okoli do 0,25 mm.

### Zgradba laserja

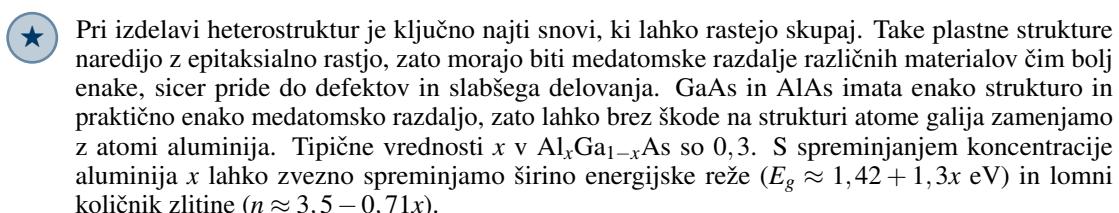
Prvi polprevodniški laser (1962) je bil narejen iz GaAs in je oddajal svetlobo pri 850 nm. Shema takega laserja je na sliki (7.22). Svetloba se ojačuje v tanki aktivni plasti in iz laserja izhaja v smeri vzdolžno z laserjem. Vidimo, da polprevodniški laser nima navadnega resonatorja iz dveh odbojnih zrcal, ampak se svetloba odbija kar na gladko odklaniah stranskih ploskvah kristala. Zaradi velikega lomnega količnika (npr.  $n = 3,5$  za GaAs) je odbojnosc dovolj velika za učinkovito delovanje.



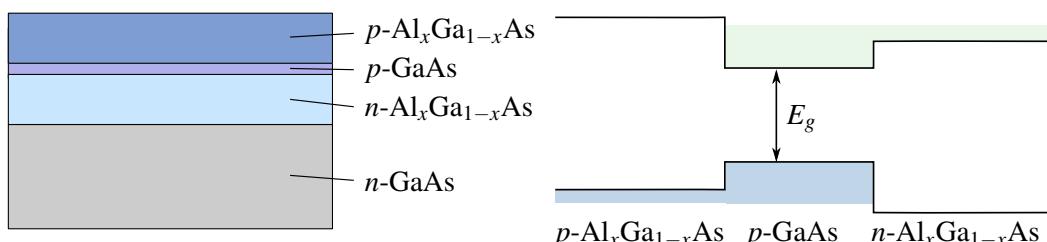
Slika 7.22: Shema preprostega polprevodniškega laserja (levo) in porazdelitev svetlobne intenzitete na spoju  $p$ - $n$ . Tipična širina je 100–200  $\mu\text{m}$ , dolžina 200–500  $\mu\text{m}$ , debelina aktivne plasti pa le  $\sim 1 \mu\text{m}$ . Svetlobni profil v laserju (desno). Svetloba se ojači v aktivnem območju (vijolična), v območju  $p$  in  $n$  pa se absorbira.

Opisani polprevodniški laserji imajo kar nekaj slabosti. So zelo močno dopirani, dobro delujejo le močno hlajeni (prvotno pri 77 K), poleg tega je snop v takih laserjih pogosto širši od debeline aktivnega območja. Debeline aktivnega območja ne moremo nadzorovano spremenjati, saj je odvisna od difuzije in rekombinacije. Tipično znaša  $\sim 1 \mu\text{m}$ , širina žarka pa nekaj mikronov več, zato znaten del svetlobe potuje po območju  $p$  in  $n$ , kjer pride do absorpcije in do povečanih izgub ter segrevanja. Tokovi, potrebni za delovanje takega laserja, so visoki ( $\sim 100 \text{kA/cm}^2$  pri sobni temperaturi), kakovost žarka pa razmeroma slaba.

Bistveno izboljšano delovanje je v tako imenovanih heterostrukturah. Gre za dvojni spoj  $p$ - $n$ , v katerem sta spojeni dve različni snovi, aktivno območje (tipično debelo le okoli 100 nm) pa se nahaja med polprevodnikoma tipa  $p$  in  $n$ .<sup>1</sup> Najpomembnejši primer je plast  $p$ -GaAs, ki se nahaja med plastjo  $n$ -Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As in  $p$ -Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As (slika 7.23). Elektroni v tem primeru tečejo iz tipa  $n$  v prevodni pas aktivne plasti GaAs, vrzeli pa iz tipa  $p$  v valenčni pas. Tak laser deluje v območju od 750 nm do 880 nm, odvisno od  $x$  in koncentracije primesi. Drug pomemben primer je laser z In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As<sub>1-y</sub>P<sub>y</sub>, ki seva svetobo z valovno dolžino med 1,1  $\mu\text{m}$  in 1,6  $\mu\text{m}$ . To ga naredi še posebej pomembnega za optične komunikacije, v katerih se najpogosteje uporablja svetobo pri 1,3  $\mu\text{m}$  in 1,55  $\mu\text{m}$ . Prvi primer si oglejmo podrobneje.

 Pri izdelavi heterostruktur je ključno najti snovi, ki lahko rastejo skupaj. Take plastne strukture naredijo z epitaksialno rastjo, zato morajo biti medatomske razdalje različnih materialov čim bolj enake, sicer pride do defektov in slabšega delovanja. GaAs in AlAs imata enako strukturo in praktično enako medatomsko razdaljo, zato lahko brez škode na strukturi atome galija zamenjamo z atomi aluminija. Tipične vrednosti  $x$  v Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As so 0,3. S spremenjanjem koncentracije aluminija  $x$  lahko zvezno spremojamo širino energijske reže ( $E_g \approx 1,42 + 1,3x \text{ eV}$ ) in lomni količnik zlitine ( $n \approx 3,5 - 0,71x$ ).

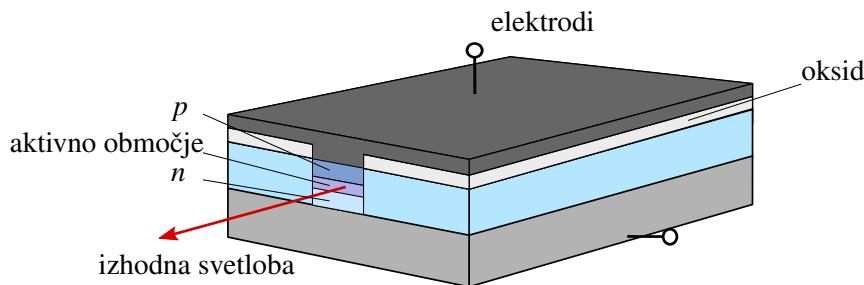
Heterostruktura ima nekaj poglavitnih prednosti. Zlitina z aluminijem ima večjo energijsko režo od čistega GaAs, zato mejni plasti ustvarita potencialno bariero, ki preprečuje difuzijo nosilcev naboja iz aktivne plasti (slika 7.23). Tako ostane koncentracija elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu že pri razmeroma majhnih tokovih velika in svetloba se ojačuje. Druga prednost je manjši lomni količnik zlitine, zaradi katerega ostane svetloba ujeta v aktivni plasti, podobno kot v valovnem vodniku. Ker manjši del svetlobe potuje izven aktivnega območja, je ojačenje večje, poleg tega se zaradi večje energijske reže občuno zmanjša absorpcija izven aktivnega območja. Skupaj z zmanjšano debelino aktivnega območja to vodi do znižanja tokov, potrebnih za delovanje laserja, za približno dva reda velikosti ( $\sim 1 \text{kA/cm}^2$ ). Z uporabo heterostrukture se tudi izboljša izkoristek in zmanjša gretje.



Slika 7.23: Shema laserja z dvojno heterostrukturo (levo) oblika energijskih pasov na spoju pri napetosti, priključeni v prevodni smeri. V aktivnem območju je število elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu zelo veliko, zato pride do močnega ojačenja svetlobe.

<sup>1</sup>Za iznajdbo heterostruktur sta Zhores I. Alferov in Herbert Kroemer leta 2000 prejela Nobelovo nagrado.

Pri strukturi, ki jo kaže slika (7.23), je aktivna plast v prečni smeri praktično neomejena, zato lahko hkrati sveti mnogo prečnih nihanj. Posledično je prečna koherenca snopa razmeroma slaba in delovanje laserja nestabilno. To slabost popravijo tako, da plasti ob straneh pojedkajo, da ostane le kakih  $5\text{ }\mu\text{m}$  širok pas (7.24). Odjedkani material nadomestijo s čistim  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ , tako da je aktivno območje z vseh strani obdano s snovjo z večjim lomnim količnikom in laserski snop ostane ujet v pravokoten valovni vodnik. Izhodni snop je zaradi oblike aktivne snovi eliptičen s premerom okoli  $1\text{ }\mu\text{m}$  v navpični in  $5\text{ }\mu\text{m}$  v prečni smeri. To da v večji oddaljenosti snop z divergenco kakih  $50^\circ$  v navpični in okoli  $5^\circ$  v prečni smeri. Če potrebujemo cilindrično simetričen snop, ga moramo popraviti z ustreznimi cilindričnimi lečami (Naloga).



Slika 7.24: Shema laserja z dvojno heterostrukuro z dodatno prečno omejitvijo.



Omenili smo, da polprevodniški laserji nimajo posebnih zrcal. Zaradi velikega lomnega količnika polprevodnika se dovolj svetlobe odbije na mejni ploskvi. Naloga resonatorja pa ni samo odboj svetlobe, ampak tudi izbira posameznega nihajnega načina. Ker tega z odbojem na ploskvi ne dosežemo, pogosto uporabimo periodične strukture, na katerih se svetloba selektivno Braggovo odboje. Druga možnost je periodično spreminjača se debelina plasti, na kateri pride do porazdeljene povratne sklopite (*distributed feedback*).

Večja odbojnost mejnih ploskev je nujna v laserjih, pri katerih svetloba ne izhaja iz tanke aktivne plasti vzporedno z ravino spoja *p-n*, ampak izhaja v smeri pravokotno na aktivno plast. To so tako imenovani VCSEL (*Vertical cavity surface-emitting laser*). Ker je sevalna površina večja in ojačevalno sredstvo krajše, je ojačenje na prelet manjše in mora biti odbojnost resonatorja toliko večja. Kvaliteta žarka je občutno boljša kot v navadnih diodnih laserjih, poleg tega ima izhodni žarek manjšo divergenco.



Posebna vrsta polprevodniških laserjev so nizko-dimenzionalni laserji. V njih je velikost aktivnega območja vsaj v eni smeri primerljiva z medatomsko razdaljo (tipično  $\sim 10\text{ nm}$ ). Najpreprostejši je laser s potencialno jamo (*Quantum well laser*), ki je po svoji zgradbi zelo podoben heterostrukturnim (slika 7.24), le da so dimenzijske precej manjše. Zaradi majhne dimenzijske se v taki snovi bistveno zmanjša gostota stanj. Za dosego zahtevane razlike med kvazi-Fermijevih nivojev – in s tem doseči prag za delovanje laserja – je zato potrebna precej manjša gostota nosilcev naboja in tok, potreben za delovanje laserja, se zniža.

V kvantnih pikah, ki so kvantno omejene v vseh treh smereh, so stanja diskretna in pasov ni več. Ker pa je tehnološko zelo zahtevno izdelati povsem enake kvantne pike, je spekter izsevanje svetlobe iz skupine kvantnih pik zelo nehomogeno razširjen.

Diodni laserji so danes eni najpomembnejših laserjev. Uporabljamо jih v vsakodnevnih napravah (tiskalnikih, optičnih čitalcih), v medicini, industriji, izrednega pomena so za telekomunikacije, pogosto pa jih uporabljamо tudi za črpanje trdninskih ali vlakenskih laserjev. Poleg že naštetih prednosti jih odlikuje tudi zelo dolg življenjski čas (do 50 000 ur).

### 7.10.1 Svetlobne diode - LED

Svetlobne diode danes so eno najbolj razširjenih izvorov svetlobe in nadomeščajo navadne žarnice ali svetlike. Oddajajo svetlobo od UV do IR, odlikujeta jih dober izkoristek (nad 25 %) in dolga življenska doba (do 50 000 ur).

Svetlobne diode delujejo podobno kot polprevodniški laserji. Na spoju *p-n* prihaja do spontane emisije fotonov zaradi rekombinacij elektronov in vrzeli. Za razliko od laserjev svetlobne diode nimajo praga delovanja, ampak začnejo svetiti, čim je na spoj priključena napetost v prevodni smeri. Zaradi spontane narave prehodov je svetloba, ki jo oddajajo svetloben diode, nekoherentna in nepolarizirana.

Prve svetlobne diode so bile izdelane iz GaAsP in so oddajale svetlobo pri 710 nm. Pomemben napredek je bila izdelava svetlobnih diod, ki so oddajale svetlobo v modrem delu spektra.<sup>2</sup> Te so sestavljene iz dvojne heterostrukturi, v kateri je plast InGaN, dopiranega s cinkom, med plastema *p*-AlGaN in *n*-AlGaN.

Belo svetlobo iz LED svetil lahko dobimo z mešanjem svetlobe iz treh različnih diod, rdeče, zelene in modre. Bolj primeren je pristop z uporabo ene same diode, ki oddaja svetlobo v modrem delu spektra, ki pajo prevlečemo z molekulami fosforja. Fosfor modro svetlobo absorbira in spontano izseva svetlobo pri nižjih frekvencah oziroma daljših valovnih dolžinah. Z ustrezno izbiro parametrov dobimo belo svetlobo ceneje in preprosteje kot s tremi ločenimi diodami.



Posebna vrsta svetlobnih diod so organske svetlobne diode (OLED). Te so narejene iz organskih snovi, ki se obnašajo kot organski polprevodniki. Z spremenjanjem kemijske sestave se spreminja valovno dolžino, ki jo LED oddaja. Njihova poglavitna prednost je preprosta izdelava, saj je proizvodnja organski spojin preprostejša in cenejša od rasti kristalov.

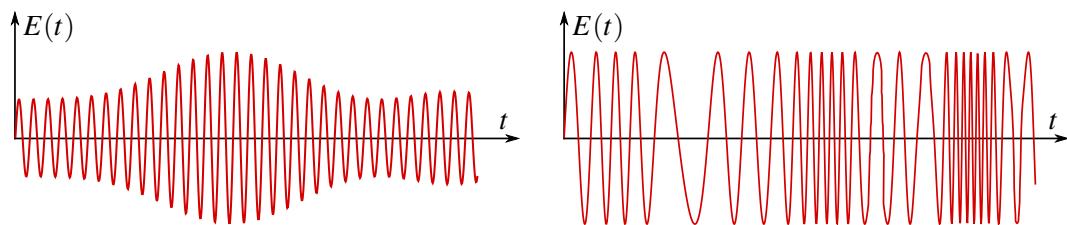
---

<sup>2</sup>Za iznajdbo modrih LED so Isamu Akasaki, Hiroshi Amano and Shuji Nakamura leta 2014 prejeli Nobelovo nagrado.

## 8. Modulacija svetlobe

Pri obravnavi širjenja svetlobe skozi snov je najpomembnejši parameter lomni količnik oziroma tenzor dielektričnosti. V tem poglavju bomo spoznali, kako lahko z zunanjim poljem vplivamo na lomni količnik in tako na širjenje svetlobe skozi snov. To omogoča spremembo – modulacijo – lastnosti svetlobe z zunanjim poljem. En primer uporabe smo že spoznali pri obravnavi laserja, kjer za preklop dobrote potrebujemo element, ki hitro spreminja prepustnost. Še pomembnejša je modulacija valovanja pri optičnem prenosu informacij.

Svetlobno valovanje lahko moduliramo na več načinov. Z ustreznim moduliranjem lomnega količnika lahko valovanju spremijamo amplitudo ali frekvenco oziroma fazo (slika 8.1).



Slika 8.1: Amplitudno (levo) in fazno oziroma frekvenčno moduliran signal (desno)

Delovanje optičnih modulatorjev temelji na različnih pojavih. V tem poglavju bomo podrobneje spoznali dva načina, to sta elektro-optični in elasto-optični pojav. Pri prvem pride do spremembe lomnega količnika snovi pod vplivom zunanjega električnega polja, pri drugem pa zaradi mehanske deformacije. Kadar mehansko deformacijo povzroči zvočno valovanje, takim modulatorjem pravimo akusto-optični. Na koncu bomo spoznali še zelo pomemben primer elektro-optičnih modulatorjev na osnovi tekočih kristalov.

### 8.1 Elektro-optični pojav

Elektro-optični pojav opisuje spremembe optičnih lastnosti snovi (dielektričnosti in lomnega količnika) pod vplivom zunanjega električnega polja. Omejimo se na statično zunanje polje oziroma na polje, ki se spreminja s frekvenco, ki je bistveno manjša od optične frekvence. Omejitev na nizko frekvenco je potrebna zato, da optično polje še lahko obravnavamo linearno. Kako je v nasprotnem primeru, ko je frekvencia polja primerljiva z optično frekvenco, smo na široko obravnavali v poglavju o nelinearni optiki (poglavje ??).

Vzemimo optično anizotropno snov z nemotenim tenzorjem dielektričnosti  $\tilde{\epsilon}$ . V snoveh brez absorpcije ali optične aktivnosti je tenzor  $\tilde{\epsilon}$  realen in simetričen, zato ga lahko diagonaliziramo (enačba 1.66). Lastne vrednosti  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  in  $\epsilon_3$  ustrezajo kvadratom treh lomnih količnikov  $n_1^2$ ,  $n_2^2$  in  $n_3^2$ , ki so na splošno različni.

Zaradi priročnosti namesto dielektričnega tenzorja vpeljemo inverzni dielektrični tenzor

$$\underline{b} = \underline{\varepsilon}^{-1}. \quad (8.1)$$

V lastnem nemotenem sistemu ga preprosto zapišemo kot

$$\tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 1/\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3^2 \end{bmatrix}. \quad (8.2)$$

Ko priključimo zunanje polje, se tenzor  $\tilde{\underline{b}}$  spremeni. Pri elektro-optičnem pojavu so spremembe tenzorja dielektričnosti zaradi vpliva zunanjega polja navadno majhne in lahko spremembo komponente  $\delta b_{ij}$  zapišemo kot potenčno vrsto zunanjega polja  $E$ , pri čemer upoštevajmo zgolj prva dva člena v razvoju

$$\delta b_{ij} = r_{ijk}E_k + q_{ijkl}E_kE_l. \quad (8.3)$$

Prvi člen je linearne sorazmeren z zunanjim poljem in opisuje linearne elektro-optični ali Pockelsov pojav<sup>1</sup>. Tenzor tretjega ranga  $r_{ijk}$  imenujemo elektro-optični tenzor ali tudi Pockelsov tenzor. Pockelsov tenzor je različen od nič v snoveh brez centra inverzije, značilne vrednosti Pockelsovega tenzorja pa so okoli  $r \sim 10^{-12}\text{--}10^{-10} \text{ m/V}$ .

Kvadratnemu elektro-optičnemu pojavu pravimo Kerrov pojav<sup>2</sup>, tenzorju  $q_{ijkl}$  pa Kerrov tenzor. Kerrov pojav je praviloma precej šibkejši od Pockelsovega, vendar je različen od nič v vseh snoveh, ne glede na njihove simetrijske lastnosti, torej tudi v tekočinah. Značilna vrednost Kerrovega tenzorja je  $q \sim 10^{-24} \text{ m}^2/\text{V}^2$ . Navadno ločimo dva primera Kerrovega pojava: Kerrov elektro-optični pojav pri zunanjih poljih z nizko frekvenco, in optični Kerrov pojav, ki smo ga podrobnejše spoznali pri obravnavi nelinearnih optičnih pojavov (poglavje ??).

Pri uporabi trdnih kristalov navadno prevlada linearni člen, zato se osredotočimo le nanj in zapišemo

$$\delta b_{ij} = r_{ijk}E_k. \quad (8.4)$$

### **Elektro-optični ali Pockelsov tenzor**

Simetrija snovi pomembno vpliva na obliko tenzorjev, ki opisujejo njene lastnosti. Pockelsov tenzor  $r$  je tenzor tretjega ranga, zato je lahko različen od nič le v kristalih brez centra inverzije.

---

**Naloga 8.1.1** Razmisli, zakaj je v kristalih s centrom inverzije tenzor  $r$  vedno enak nič.

---

Ker je inverzni dielektrični tenzor  $\underline{b}$  vedno simetričen, je v prvih dveh indeksih simetričen tudi  $r$

$$r_{ijk} = r_{jik}. \quad (8.5)$$

V najmanj simetričnem primeru triklinskega kristala ima tako namesto 27 zgolj 18 neodvisnih komponent, v kristalih z višjo simetrijo pa še precej manj.

---

<sup>1</sup>Nemški fizik Friedrich Carl Alwin Pockels, 1865–1913.

<sup>2</sup>Škotski fizik John Kerr, 1824–1907.

Podobno kot nelinearno susceptibilnost (poglavlje ??) lahko tudi elektro-optični tenzor zaradi simetrije zapišemo le z dvema komponentama. Prva dva indeksa, v katerih je  $r_{ijk}$  simetričen, združimo v enega z vrednostmi od 1 do 6 po dogovoru

$$xx = 1 \quad yz = zy = 4 \quad (8.6)$$

$$yy = 2 \quad zx = xz = 5 \quad (8.7)$$

$$zz = 3 \quad xy = yx = 6 \quad (8.8)$$

in  $r_{ijk}$  postane matrika velikosti  $6 \times 3$ , simetrični tenzor drugega ranga  $b_{ij}$  pa šestdimenzionalen vektor. Nekaj primerov Pockelsovih tenzorjev pri različnih kristalnih simetrijah je podanih v tabeli (8.1).

Kristal	Grupa	Neničelne komponente tenzorja $r$	Vrednost ( $10^{-12} \text{ m/V}$ )
BaTiO <sub>3</sub>	4mm	$r_{xzx} = r_{yzy} = r_{zxx} = r_{zyy} = r_{51} = r_{42}$ $r_{xxz} = r_{yyz} = r_{13} = r_{23}$ $r_{zzz} = r_{33}$	(pri $1,55 \mu\text{m}$ ) $r_{51} = 800$ $r_{13} = 8$ $r_{33} = 28$
KDP	$\bar{4}2m$	$r_{yzx} = r_{zyx} = r_{xzy} = r_{zxy} = r_{41} = r_{52}$ $r_{xyz} = r_{yxz} = r_{63}$	$r_{41} = 8,77$ $r_{63} = -10,3$
GaAs	$\bar{4}3m$	$r_{yzx} = r_{zyx} = r_{xzy} = r_{zxy} = r_{xyz} = r_{yxz}$	(pri $10,6 \mu\text{m}$ ) $r_{41} = 1,5$
ZnTe		$= r_{41} = r_{52} = r_{63}$	(pri $3,4 \mu\text{m}$ ) $r_{41} = 4,2$
LiNbO <sub>3</sub>	3m	$r_{xzx} = r_{zxx} = r_{yzy} = r_{zyy} = r_{51} = r_{42}$ $r_{xxz} = r_{yyz} = r_{13} = r_{23}$ $r_{zzz} = r_{33}$ $r_{yyy} = -r_{xxy} = -r_{xyx} = -r_{yxx} =$ $= r_{22} = -r_{12} = -r_{61}$	$r_{51} = 32,6$ $r_{13} = 9,6$ $r_{33} = 30,9$ $r_{22} = 6,8$

Tabela 8.1: Koeficienti Pockelsovega tenzorja za nekaj izbranih snovi. Če ni navedeno drugače, veljajo vrednosti pri valovni dolžini okoli 600 nm.



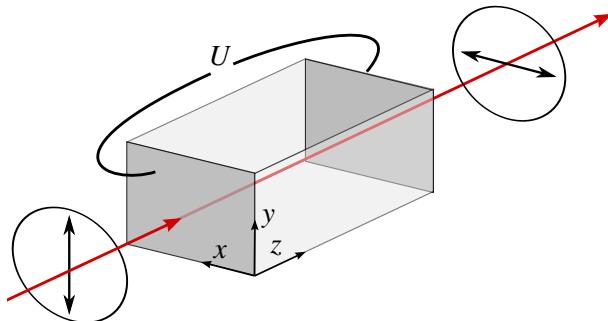
Komponente elektro-optičnega tenzorja zaradi nazornosti pogosto ponazarjamо grafično. V matriki  $6 \times 3$  s piko označimo komponente, ki so enake nič, s polnim krožcem neničelne komponente, povezava med komponentami pomeni njihovo enakost, prazen krožec in črtkana črta pa označujeja neničelno komponento nasprotnega predznaka. Kot primer sta podana prikaza tenzorjev za GaAs (levo) in LiNbO<sub>3</sub> (desno).

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cdot & \circ & \bullet \\ \cdot & \bullet & \bullet \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

## 8.2 Longitudinalna modulacija

Poglejmo podrobneje, kako električno polje spremeni optične lastnosti elektro-optičnega kristala in kako to vpliva na svetlobo, ki potuje skozi tak kristal. Navadno se uporabljajo kristali, ki so dvolomni že brez zunanjega polja. Kot primer vzemimo kristal  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  (KDP), ki ima tetragonalno simetrijo ( $\bar{4}2m$ ). Kot razberemo iz tabele (8.1), ima elektro-optični tenzor dve neodvisni komponenti:  $r_{41} = r_{52} = 8,77 \times 10^{-12} \text{ m/V}$  in  $r_{63} = -10,3 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ .

Kristal naj bo odrezan po kristalografskih oseh. Svetloba naj skozi kristal potuje v smeri optične osi, to je po dogovoru smer  $z$ , v isti smeri pa na kristal priključimo polje  $E_z$ . Ker je smer električnega polja vzporedna s smerjo širjenja svetlobe, taki postavitevi pravimo longitudinalna in pojavu longitudinalna modulacija.



Slika 8.2: Shema longitudinalne modulacije signala. Ker je polje priključeno v smeri potovanja svetlobe, morata biti elektrodi transparentni. Z uporabo polarizatorja in analizatorja sestavimo amplitudni modulator (glej razdelek 8.4).

Inverzni dielektrični tenzor brez zunanjega polja za optično enoosni KDP zapišemo kot

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

kjer sta  $n_o$  in  $n_e$  redni in izredni lomni količnik. Ko priključimo polje  $E_z$ , se tenzor dielektričnosti zaradi Pockelsovega pojava spremeni. Sprememba inverznega tenzorja je po enačbi (8.4)

$$\begin{aligned} \delta b_{xx} &= r_{xxx}E_x + r_{xxy}E_y + r_{xxz}E_z = 0, \\ \delta b_{xy} &= \delta b_{yx} = r_{xyx}E_x + r_{xyy}E_y + r_{xyz}E_z = r_{63}E_z, \\ \delta b_{xz} &= \delta b_{zx} = r_{xzz}E_z = 0, \\ \delta b_{yy} &= r_{yyz}E_z = 0, \\ \delta b_{yz} &= \delta b_{zy} = r_{yzz}E_z = 0, \\ \delta b_{zz} &= r_{zzz}E_z = 0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Vidimo, da je zaradi simetrije večina členov enaka nič, se pa zaradi zunanjega električnega polja v smeri  $z$  pojavi izvendiagonalna komponenta  $\delta b_{xy}$

$$b = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & r_{63}E_z & 0 \\ r_{63}E_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & r_{63}E_z & 0 \\ r_{63}E_z & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \quad (8.11)$$

Če želimo izračunati, kako se po kristalu pod napetostjo širi vpadni svetlobni snop, moramo gornji tenzor diagonalizirati. Lastne vrednosti novega tenzorja in pripadajoče nove lastne osi so

$$\lambda_1 = \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \quad (8.12)$$

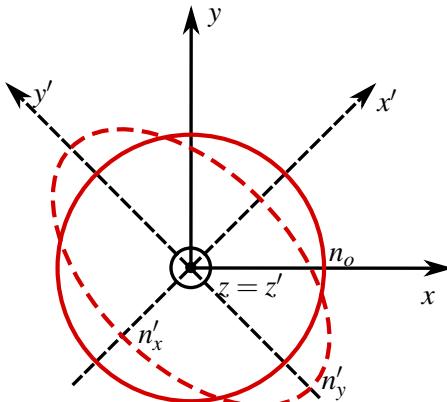
$$\lambda_2 = \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0) \quad (8.13)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{n_e^2} \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1). \quad (8.14)$$

Os  $z$  se ohranja, drugi dve novi lastni osi pa sta zasukani za kot  $45^\circ$  glede na prvotni osi  $x$  in  $y$ . V novem koordinatnem sistemu je inverzni dielektrični tenzor diagonalen in enak

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 + r_{63}E_z & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 - r_{63}E_z & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

Spomnimo se, da potuje svetloba skozi kristal vzdolž osi  $z$ . Brez zunanjega električnega polja je kristal enoosen z optično osjo v smeri  $z$ . Lomni količnik je neodvisen od polarizacije vpadnega valovanja in je enak  $n_o$ . Ko priključimo polje, postane kristal optično dvoosen, saj so vse tri lastne vrednosti tenzorja dielektričnosti različne.



Slika 8.3: Optično enoosen kristal postane pod napetostjo dvoosen. Indikatrisa, ki je pravokotno na optično os brez priključenega polja krožnica (polna črta), se pod vplivom napetosti spremeni v elipso (črtkana črta). Pri tem sta osi elipse zasukani za kot  $45^\circ$  glede na prvotni osi  $x$  in  $y$ .

Za žarek, ki potuje vzdolž osi  $z$ , torej obstajata dve lastni smeri  $x'$  in  $y'$  z ustreznima novima lastnima količnikoma, ki ju izrazimo kot

$$\frac{1}{n_{x'}^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \frac{1}{n_{y'}^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z. \quad (8.16)$$

Za vsa eksperimentalno dosegljiva polja velja  $rE \ll 1/n_o^2$  in gornja izraza lahko razvijemo za majhne popravke

$$n_{x'} = \sqrt{\frac{n_o^2}{1 + n_o^2 r_{63} E_z}} \approx n_o \sqrt{1 - n_o^2 r_{63} E_z} \approx n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z. \quad (8.17)$$

Nova lomna količnika sta tako

$$n_{x'} \approx n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z \quad \text{in} \quad (8.18)$$

$$n_{y'} \approx n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z. \quad (8.19)$$

Različni lastni polarizaciji ob priključenem zunanjem polju potujeta vzdolž osi  $z$  z različnima hitrostma. Kadar polarizacija vpadnega valovanja ne soppada z novima lastnima osema  $x'$  ali  $y'$ , je svetloba po preletu kristala na splošno eliptično polarizirana. Ko svetloba prepotuje dolžino kristala  $L$ , pride med lastnima polarizacijama do fazne razlike

$$\Delta\phi = k_0 n_{y'} L - k_0 n_{x'} L = \frac{\omega}{c_0} L n_o^3 r_{63} E_z = \frac{\omega}{c_0} n_o^3 r_{63} U, \quad (8.20)$$

pri čemer smo upoštevali zvezo  $U = E_z L$ .

Vpeljemo karakteristično napetost  $U_\pi$  (imenovano tudi  $\pi$ -napetost), pri kateri je fazna razlika enaka  $\pi$  in kristal deluje kot ploščica  $\lambda/2$

$$U_\pi = \frac{\pi c_0}{\omega n_o^3 r_{63}} = \frac{\lambda}{2 n_o^3 r_{63}}. \quad (8.21)$$

Za kristal KDP je  $\pi$ -napetost pri valovni dolžini 633 nm okoli 9000 V, kar je precej velika napetost. Velike delovne napetosti so značilne za kristalne elektro-optične modulatorje in so njihova glavna pomanjkljivost.

### 8.3 Transverzalna modulacija

Iz praktičnih razlogov je navadno preprosteje priključiti električno polje v smeri, ki je pravokotna na smer širjenja svetlobe. Taki postavitevi pravimo transverzalna in pojavu transverzalna modulacija. Tudi to postavitev obravnavajmo na primeru. Za zgled vzemimo kristal LiNbO<sub>3</sub>, ki ima trigonalno simetrijo (3m) in po tabeli (8.1) štiri neodvisne komponente:  $r_{51} = r_{42}, r_{13} = r_{23}, r_{33}$  in  $r_{22} = -r_{12} = -r_{61}$ .

Naj se svetloba širi vzdolž osi  $z$ , ki je hkrati tudi optična os, električno polje pa priključimo v smeri  $y$  (slika 8.4). Krajši račun pokaže, da je inverzni dielektrični tenzor v polju enak

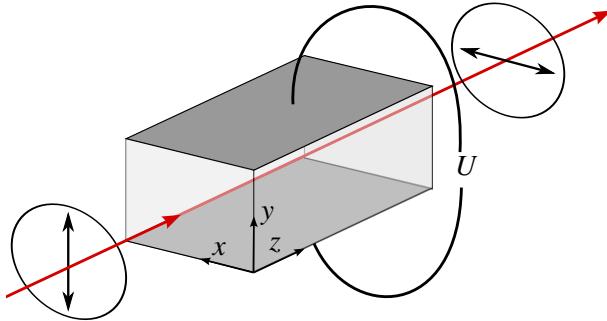
$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 - r_{22}E_y & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 + r_{22}E_y & r_{51}E_y \\ 0 & r_{51}E_y & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \quad (8.22)$$

Tudi v tem primeru tenzor diagonaliziramo in poiščemo nove lastne vrednosti. Če privzamemo, da je sprememba zaradi električnega polja majhna ( $rE \ll 1$ ), lahko zanemarimo člene, v katerih  $rE$  nastopa v kvadratni obliki. Nove lastne vrednosti so tako

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_y, \quad (8.23)$$

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y \quad \text{in} \quad (8.24)$$

$$\lambda_3 \approx \frac{1}{n_e^2}. \quad (8.25)$$



Slika 8.4: Shema transverzalne modulacije signala

Izračunamo še ustrezne lomne količnike

$$n_{x'} \approx n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{22} E_y, \quad (8.26)$$

$$n_{y'} \approx n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{22} E_y \quad \text{in} \quad (8.27)$$

$$n_z' \approx n_e. \quad (8.28)$$

Kako pa je z novimi lastnimi osmi? Hitro ugotovimo (enačba 8.22), da se ob priključenem polju os  $x$  ohranja. Pojavlji se torej zasuk okoli osi  $x$ , ki ga označimo s kotom  $\vartheta$ . Račun pokaže, da je za smiselne vrednosti električnega polja ta kot zelo majhen ( $\vartheta \approx r_{51} E_y / (1/n_o^2 - 1/n_e^2) \sim 1$  mrad), tako da lahko v približku rečemo, da se lastne osi ohranjajo.

Če potuje svetloba vzdolž osi  $z$ , sta torej lomna količnika za polarizaciji v smeri  $x$  in  $y$  približno enaka  $n_{x'}$  in  $n_{y'}$ , fazna razlika med polarizacijama po preletu kristala z dolžino  $L$  pa je

$$\Delta\phi = k_0 n_{y'} L - k_0 n_{x'} L = \frac{\omega}{c_0} L n_o^3 r_{22} E_y = \frac{\omega}{c_0} L n_o^3 r_{22} \frac{U}{d}. \quad (8.29)$$

Pri tem moramo ločiti med  $L$ , ki je dolžina kristala v smeri  $z$ , in  $d$ , ki je širina kristala v smeri, v kateri priključimo napetost. Karakteristična  $\pi$ -napetost je

$$U_\pi = \frac{\lambda d}{2 L n_o^3 r_{22}}. \quad (8.30)$$

Za izbran kristal ( $d = 5$  mm,  $L = 1$  cm) je  $\pi$ -vrednost napetosti pri valovni dolžini 633 nm okoli 2000 V. S tanjšanjem kristala lahko to napetost še zmanjšamo.



Transverzalno modulacijo lahko dosežemo tudi tako, da se žarek širi vzdolž osi  $y$ , električno polje pa priključimo vzdolž optične osi  $z$ . V tem primeru se lastne osi ohranijo in kristal ostane optično enoosen. Vendar ima tudi ta rešitev določene slabosti. Ker je kristal že sam po sebi dvolomen, povzroči zunanje polje le majhno dodatno fazno razliko, zato je najbolje, če je dolžina kristala taka, da velja  $k_0 L (n_o - n_e) = 2N\pi$ . Pri tem pa nastopi težava. Pogoj je lahko zaradi temperaturnega raztezanja in odvisnosti lomnih količnikov od temperature izpolnjen le pri eni temperaturi, poleg tega se mora svetloba širiti natančno v smeri  $y$ . Zato dvolomnost nemotenega kristala navadno kompenziramo, tako da postavimo dva enako dolga kristala zapored, pri čemer sta optični osi med seboj pravokotni, modulacijska napetost na drugem kristalu pa ima nasproten predznak. Tedaj se fazna razlika med obema polarizacijama zaradi naravne dvolomnosti odšteje, zaradi modulacijske napetosti pa sešteje.

## 8.4 Amplitudna modulacija

Poglejmo, kako lahko elektro-optični pojav izkoristimo za modulacijo amplitude svetlobnega snopa. Pod vplivom polja pride v kristalu do faznega zamika med polarizacijama, ki je sorazmeren napetosti (enačbi 8.20 in 8.29). Če za tak kristal postavimo analizator, lahko z napetostjo spremojamo moč prepuščene svetlobe – amplitudno moduliramo signal.

Vrnimo se k longitudinalni modulaciji (slika 8.2). Naj bo vpadna električna poljska jakost  $E_0$  polarizirana v smeri  $y$ . Ko priključimo napetost, sta novi lastni osi zasukani za kot  $45^\circ$  glede na prvotni lastni osi (slika 8.3). Vpadno valovanje zato razstavimo na komponenti  $x'$  in  $y'$

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{x'} + \mathbf{e}_{y'}) . \quad (8.31)$$

Po prehodu skozi kristal pride med njima do fazne razlike  $\Delta\phi$  (enačba 8.20), zato je polje  $\mathbf{E}_1$  ob izstopu iz kristala

$$\mathbf{E}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (e^{ik_0 n_{x'} L} \mathbf{e}_{x'} + e^{ik_0 n_{y'} L} \mathbf{e}_{y'}) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{ik_0 n_{x'} L} (\mathbf{e}_{x'} + e^{i\Delta\phi} \mathbf{e}_{y'}) . \quad (8.32)$$

Analizator na izhodni strani naj bo obrnjen v smeri  $x$ , to je pravokotno na smer vpadne polarizacije. Prepušča le projekcijo obeh lastnih polarizacij na os  $x$

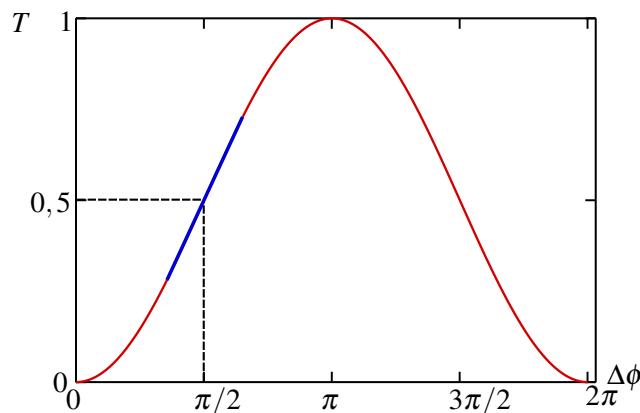
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{ik_0 n_{x'} L} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Delta\phi} \right) \mathbf{e}_x . \quad (8.33)$$

Gostota prepuščenega svetlobnega toka ob vpadnem toku  $j_0$  je tako

$$j = \frac{1}{4} j_0 |1 - e^{i\Delta\phi}|^2 = \frac{1}{2} j_0 (1 - \cos \Delta\phi) . \quad (8.34)$$

Preoblikujemo izraz in zapišemo prepustnost takega modulatorja ob upoštevanju enačbe (8.20)

$$T = \frac{j}{j_0} = \sin \left( \frac{\Delta\phi}{2} \right)^2 = \sin \left( \frac{\pi n_o r_{63} U}{\lambda} \right)^2 . \quad (8.35)$$



Slika 8.5: Prepustnost amplitudnega modulatorja v odvisnosti od faznega zamika  $\Delta\phi$ , sorazmernega priključeni napetosti  $U$  (rdeča črta). Če pred vzorec dodamo ploščico  $\lambda/4$ , pride do faznega zamika  $\pi/2$  in odvisnost prepustnosti od priključene napetosti je približno linearna (modra črta).

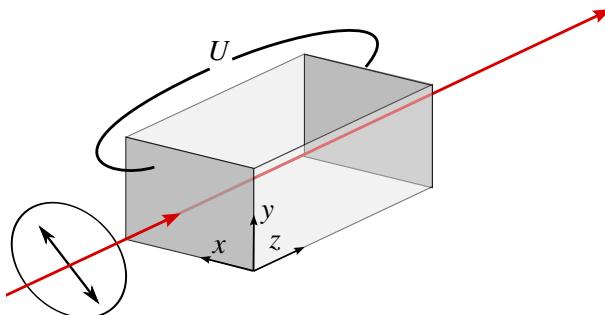
Ko je napetost na kristalu enaka nič, je  $\Delta\phi = 0$  in tudi intenziteta prepuščene svetlobe  $j = 0$ . To je pričakovano, saj sta analizator in polarizator prekrižana, vpadni žarek pa se širi vzdolž lastne osi kristala. Prepustnost doseže največjo vrednost, ko je  $\Delta\phi = \pi$ , kar je ravno pri  $\pi$ -napetosti. Ko torej napetost povečamo z 0 na  $U_\pi$ , se prepustnost modulatorja spremeni z 0 na 1 (slika 8.5).

Pogosto želimo, da je zveza med modulacijsko napetostjo in izhodno gostoto toka linear. To lahko dosežemo, če modulator deluje v okolici  $\Delta\phi = \pi/2$  (slika 8.5). Ena rešitev je dodati stalno visoko napetost, signal pa modulirati okoli te vrednosti. Precej bolj praktičen pristop je z uporabo ploščice  $\lambda/4$ , ki jo dodamo med polarizator in kristal, tako da se pojavi stalni fazni premik  $\pi/2$  med rednim in izrednim valom. Potem lahko z razmeroma majhno napetostjo linearno amplitudno moduliramo svetlobo.

## 8.5 Fazna in frekvenčna modulacija

Svetlobo amplitudno moduliramo, tako da z zunanjim poljem spremenimo fazi lastnih valov, zaradi česar postane linearno polarizirano vpadno valovanje po prehodu kristala eliptično polarizirano. Spremembo polarizacije z analizatorjem prevedemo v spremembo amplitude.

Pogosto je bolje modulirati fazo vpadne svetlobe. Tudi to si oglejmo na primeru longitudinalne modulacije. Fazno oziračno frekvenčno modulacijo dosežemo tako, da vhodno polarizacijo izberemo vzporedno eni od novih lastnih osi kristala, na primeri osi  $x'$ , izhodni polarizator pa odstranimo (slika 8.6).



Slika 8.6: Shema fazne modulacije signala. Vpadna polarizacija je vzporedna eni od novih lastnih osi kristala, ki se pojavi pod vplivom zunanjega polja.

Celoten fazni zamik po preletu skozi kristal zapišemo kot

$$\phi = k_0 n_{x'} L - \omega_0 t = \frac{\omega_0}{c_0} L \left( n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} \frac{U}{L} \right) - \omega_0 t, \quad (8.36)$$

pri čemer smo lomni količnik zapisali skladno z enačbo (8.18). Opazimo, da je fazni zamik odvisen od priključene zunanje napetosti. Pri stalni napetosti je ta fazni zamik konstanten, mi pa si oglejmo, kaj se zgodi, ko na kristal priključimo spremenljajočo se napetost.

Obravnavajmo dva primera. V prvem primeru naj bo napetost linearna funkcija časa

$$U = U_0 + \frac{\Delta U}{\Delta t} t. \quad (8.37)$$

Celotna faza prepuščenega valovanja je potem

$$\phi = \frac{\omega_0}{c_0} L n_o - \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2 c_0} \left( U_0 + \frac{\Delta U}{\Delta t} t \right) - \omega_0 t. \quad (8.38)$$

Krožno frekvenco valovanja v danem trenutku izračunamo kot negativni odvod faze po času

$$\omega = -\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = \omega_0 + \Delta\omega. \quad (8.39)$$

Linearno spremenljajoča se modulacijska napetost da torej konstanten frekvenčni premik. Do segljive spremembe frekvence so seveda dokaj majhne, do nekaj sto MHz, saj so omejene s hitrostjo spremenjanja napetosti. Napetost seveda tudi ne more neomejeno naraščati. Kadar se napetost vrača na nič, pride do frekvenčnega premika v nasprotni smeri, ki pa ga lahko zanemarimo, če je čas vračanja bistveno krajši od časa naraščanja.

Poglejmo še primer, ko se priključena napetost periodično spreminja kot  $U = U_0 \sin(\omega_m t)$ . Vstavimo izraz v enačbo (8.36) in zapišemo fazo izhodnega valovanja

$$\phi = \frac{\omega_0}{c_0} L n_o - \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0 \sin(\omega_m t) - \omega_0 t. \quad (8.40)$$

V primeru linearno spremenljajoče se napetosti smo na tem mestu fazo odvajali in dobili krožno frekvenco, ki je bila konstantna. V tem primeru z odvajanjem dobimo krožno frekvenco, ki se spreminja s časom. Zato se računa lotimo drugače. Konstantni člen v gornjem izrazu, ki predstavlja le konstantni fazni premik, lahko izpustimo in zapišemo električno poljsko jakost prepuščenega valovanja

$$E = E_0 \cos \left( \omega_0 t + \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0 \sin(\omega_m t) \right) = E_0 \cos (\omega_0 t + \delta \sin(\omega_m t)), \quad (8.41)$$

pri čemer je

$$\delta = \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0. \quad (8.42)$$

Z uporabo Jacobi-Angerjevih<sup>3</sup> identitet

$$\begin{aligned} \cos(\delta \sin x) &= J_0(\delta) + 2J_2(\delta) \cos 2x + 2J_4(\delta) \cos 4x + \dots \quad \text{in} \\ \sin(\delta \sin x) &= 2J_1(\delta) \sin x + 2J_3 \sin 3x + 2J_5 \sin 5x + \dots \end{aligned} \quad (8.43)$$

je izhodno polje mogoče zapisati v obliki

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= J_0(\delta) \cos(\omega_0 t) + \\ &+ J_1(\delta) \cos(\omega_0 + \omega_m)t - J_1(\delta) \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \\ &+ J_2(\delta) \cos(\omega_0 + 2\omega_m)t + J_2(\delta) \cos(\omega_0 - 2\omega_m)t + \\ &+ J_3(\delta) \cos(\omega_0 + 3\omega_m)t - J_3(\delta) \cos(\omega_0 - 3\omega_m)t + \dots \end{aligned} \quad (8.44)$$

---

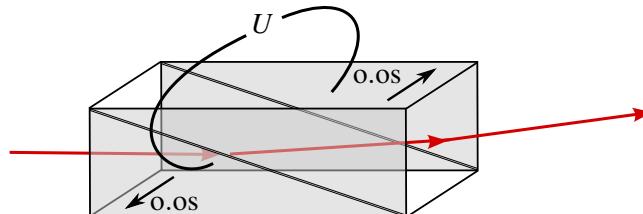
**Naloga 8.5.1** Z uporabo Jacobi-Angerjevih identitet (enačbi 8.43) pokaži, da električno polje izhodne svetlobe ob priključeni napetosti  $U_0 \sin(\omega_m t)$  ustreza polju v enačbi (8.44).

---

Zaradi periodične fazne modulacije se v spektru izhodne svetlobe pojavijo stranski pasovi, ki se od osnovne krožne frekvence  $\omega_0$  razlikujejo za večkratnike modulacijske krožne frekvence  $\omega_m$ . Njihova amplituda je podana z vrednostjo Besselovih funkcij pri  $\delta$ . Ker je vrednost  $\delta$  navadno majhna, za opis pogosto zadošča le prvi člen.

<sup>3</sup>Nemška matematika Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851, in Carl Theodor Anger, 1803–1858.

★ Elektro-optični pojav izkorisčamo tudi za uklanjanje žarkov. Najpreprostejši primer deflektorja je trikotna prizma z elektrodama na osnovnih ploskvah. Svetloba se ob prehodu skozi prizmo lomi v odvisnosti od njenega lomnega količnika, tega pa lahko spremojmo z napetostjo na elektrodah. Praktično je bolj uporabna dvojna prizma. Sestavljena je iz dveh enakih prizem, ki skupaj tvorita kvader, pri tem pa optični osi zgornje in spodnje prizme kažeta v nasprotni smeri. S spremjanjem napetosti, ki jo priključimo prečno na smer razširjanja svetlobe, lahko zelo hitro in zelo natančno spremojmo smer izhodnega žarka. Vendar ta pristop ni splošno uveljavljen, predvsem zaradi velike napetosti, ki je potrebna za znatno uklanjanje. Veliko bolj razširjen je akusto-optični pojav, ki ga bomo spoznali v nadaljevanju.



Slika 8.7: Shema elektro-optičnega deflektorja

★ Elektro-optični pojav ima dva prispevka: neposrednega, kjer zunanje polje vpliva neposredno na elektronsko polarizabilnost, in posredno spremembo lomnega količnika zaradi piezoelektrične deformacije. Pri nizkih frekvencah sta prispevka primerljiva, pri velikih frekvencah pa deformacija kristala ne more slediti modulacijski napetosti in ostane le neposredni prispevek. Pri akustičnih resonancah, ko modulacija v kristalu vzbudi stopeče zvočno valovanje, pa se piezoelektrični prispevek resonančno poveča. Pogoj za akustično resonanco je, da je dimenzija kristala mnogokratnik polovice valovne dolžine akustičnega vala v kristalu. Pri kristalih velikosti  $\sim \text{cm}$  in hitrosti zvočnih valov okoli 5000 m/s so resonance v območju od nekaj sto kHz do nekaj deset MHz.

Pri visokih frekvencah postane pomembna tudi električna vezava modulatorja, saj kristal predstavlja kapacitivno breme. Njegova impedanca pojema z rastoco frekvenco, zato je vedno večji del padca napetosti na notranjem uporu izvora napetosti. Pomagamo si z vzporedno vezavo tuljave, tako da je resonančna frekvanca  $1/(LC)$  nastalega nihajnega kroga enaka modulacijski frekvenci, z dodatnim uporom pa spremojmo širino resonance. Tipična moč, ki je potrebna za modulacijo, je nekaj 10 W, kar je za visokonapetosten in hiter izvor že znatna moč.

## 8.6 Elasto-optični in akusto-optični pojav

Pri elasto-optičnem pojavu dielektrične lastnosti snovi in njen lomni količnik spremojmo z mehansko deformacijo. Tudi tu opisemo pojav s spremembou inverznega dielektričnega tenzorja

$$\underline{b} = \tilde{\underline{b}} + \delta\underline{b}, \quad (8.45)$$

pri čemer je  $\tilde{\underline{b}}$  tenzor v odsotnosti mehanske deformacije,  $\delta\underline{b}$  pa sprememba tenzorja zaradi deformacije snovi. V prvem približku jo zapišemo kot

$$\delta b_{ij} = p_{ijkl} S_{kl}. \quad (8.46)$$

Sprememba tenzorja je sorazmerna s tenzorjem deformacije snovi (Greenovim tenzorjem<sup>4</sup>) v linearinem približku

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad (8.47)$$

pri čemer je  $\mathbf{u}$  vektor deformacije.

<sup>4</sup>Angleški matematični fizik George Green, 1793–1841.

Vpeljali smo še sorazmernostni faktor  $p_{ijkl}$ , ki ga imenujemo elasto-optični tenzor. Tenzor  $\underline{p}$  je različen od nič v vsaki snovi, saj povezuje dva simetrična tenzorja drugega ranga. Posledično je simetričen v prvem in drugem paru indeksov

$$p_{ijkl} = p_{jikl} = p_{ijlk} = p_{jilk}. \quad (8.48)$$

V najbolj splošnem primeru triklinske kristalne simetrije ima tako 36 neodvisnih komponent, v bolj simetričnih snoveh pa se število neodvisnih komponent še zmanjša. Če vpeljemo skrajšan zapis indeksov ( $xx = 1, yy = 2, zz = 3, yz = zy = 4, zx = xz = 5, xy = yx = 6$ ), zapišemo tenzor za primer izotropne snovi kot

$$\underline{p}_{\text{izo}} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix}, \quad (8.49)$$

pri čemer je  $p_{44} = \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12})$ . Koeficienti tenzorja so brezdimenzijski, njihova tipična vrednost pa je  $p \sim 0,1$ . Za vodo, na primer, velja  $p_{11} \approx p_{12} = 0,31$  in  $p_{44} = 0$ , za LiNbO<sub>3</sub> pa  $p_{11} = -0,02, p_{12} = 0,08, p_{13} = 0,13, p_{14} = -0,08, p_{31} = 0,17, p_{33} = 0,07, p_{41} = -0,15, p_{44} = 0,12$ .

Iz enačbe (8.46) izrazimo spremembo dielektričnega tenzorja

$$\delta \epsilon_{ij} = -\tilde{\epsilon}_{ii}\tilde{\epsilon}_{jj}p_{ijkl}S_{kl}, \quad (8.50)$$

kjer smo privzeli, da je nemoten  $\tilde{\epsilon}$  diagonalen. Ob mehanski deformaciji torej v splošnem tudi izotropna snov postane dvolomna. Dvojni lom, ki se pojavi v deformirani snovi, izkorističamo na primer za študij mehanskih napetosti v modelih, ki so izdelani iz prozorne plastične snovi. Nas bo v nadaljevanju zanimal uklon svetlobe na periodični modulaciji lomnega količnika, ki nastane zaradi zvočnega valovanja v snovi. Takemu pojavu pravimo tudi akusto-optični pojav.

**Naloga 8.6.1** Po izotropni snovi se širi longitudinalno valovanje vzdolž smeri  $z$ , tako da deformacijo v snovi zapišemo kot

$$\mathbf{u} = A \cos(qz - \Omega t) \mathbf{e}_z. \quad (8.51)$$

Pokaži, da je taka snov dvolomna z optično osjo vzdolž osi  $z$ , lastni lomni količniki pa so

$$n_x' \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{12} q A \sin(qz - \Omega t)) \quad (8.52)$$

$$n_y' \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{12} q A \sin(qz - \Omega t)) \quad (8.53)$$

$$n_z' \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{11} q A \sin(qz - \Omega t)), \quad (8.54)$$

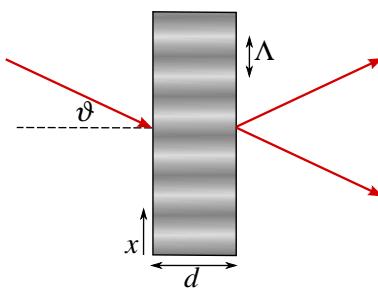
kjer je  $n$  lomni količnik v odsotnosti motnje.

## 8.7 Uklon svetlobe na zvočnem valovanju

Vzбудimo v plasti prozorne izotropne snovi zvočno valovanje z valovno dolžino  $\Lambda$ , ki potuje v smeri  $x$ . To naredimo tako, da na eno stran snovi priključimo piezoelektrik, ki se pod izmenično napetostjo periodično krči in razteza s krožno frekvenco  $\Omega$ . Na drugo stran damo akustični absorber ali reflektor, tako da lahko v snovi vzбудimo tudi stopeče valovanje. Zaradi zvočnega valovanja se v snovi periodično spreminja gostota in z njo lomni količnik (glej nalogu 8.6.1)

$$n = \tilde{n} + \delta n \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x - \Omega t\right). \quad (8.55)$$

V zgoščini je lomni količnik nekoliko večji kot v razredčini, zato je optična pot na takem mestu skozi plast daljša. Ravno svetlobno valovanje, ki vpada na plast pravokotno glede na smer širjenja zvoka, po izstopu zato nima povsod enake faze, valovno čelo pa je periodično modulirano s periodom valovne dolžine zvočnega valovanja. Zvočno valovanje v snovi torej deluje kot optična fazna mrežica. Tipična frekvenca, s katero vzbujamo elastično deformacijo, je okoli  $\Omega/2\pi \sim 50$  MHz, ustrezena valovna dolžina pa okoli  $\Lambda \sim 100$  μm. Frekvence, ki so v uporabi, navadno sežejo od nekaj MHz prek 10 GHz. Čeprav so vse te frekvence daleč nad slišnimi, taka valovanja imenujemo zvočna oziroma akustična.



Slika 8.8: Vpadna svetloba se na zvočnem valovanju v snovi uklanja.

Oglejmo si dva limitna primera. V prvem primeru je debelina plasti, v kateri vzbujamo zvočno valovanje, zelo majhna in  $d \ll \Lambda^2/\lambda$  (slika 8.9 a). Takrat modulator deluje kot tanka uklonska mrežica in pojavi se veliko uklonskih vrhov, intenziteta posameznega žarka pa je razmeroma majhna. Kote, pod katerimi se pojavijo ojačitve, izračunamo po preprosti enačbi

$$\Lambda(\sin \vartheta - \sin \beta) = N\lambda, \quad (8.56)$$

pri čemer je  $\lambda$  valovna dolžina svetlobe v snovi,  $N$  pa celo število. Takemu pojavu pravimo Raman-Nathov uklon<sup>5</sup>. Opazimo ga pri razmeroma nizkih zvočnih frekvencah (pod  $\sim 10$  MHz) in majhnih debelinah (pod  $\sim 1$  cm) pri poljubnem vpadnem kotu  $\vartheta$ .

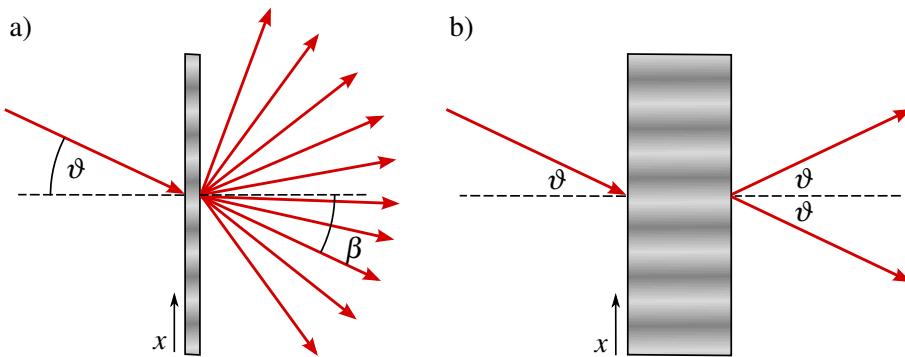
V nasprotnem limitnem primeru se svetloba uklanja na ravnih zvočnih valovih in modulator deluje kot debela uklonska mrežica (slika 8.9 b). Na splošno je delež uklnjene svetlobe na taki mrežici neuporabno majhen. Znaten postane le tedaj, kadar je izpolnjen Braggov pogoj<sup>6</sup>

$$2\Lambda \sin \vartheta = N\lambda. \quad (8.57)$$

Ker je valovna dolžina svetlobe precej manjša od valovne dolžine zvočnega valovanja, je  $\vartheta$  praviloma zelo majhen  $\vartheta \sim 10^{-2}$ .

<sup>5</sup>Indijski fizik in nobelovec Sir Chandrasekhara Venkata Raman, 1888–1970, in indijski fizik N. S. Nagendra Nath.

<sup>6</sup>Angleška znanstvenika in nobelovca oče in sin Sir William Henry Bragg, 1862–1942, in Sir William Lawrence Bragg, 1890–1971.

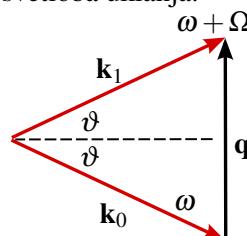


Slika 8.9: Ob vpadu svetlobe na tanko plast, v kateri je vzbujeno zvočno valovanje (a), se pojavi veliko uklonskih vrhov, na debeli plasti (b) pa je opazen zgolj en uklonjen vrh, pa še ta le ob izpolnjenem Braggovem pogoju.

Poglejmo natančneje, kako pridemo do gornjega pogoja. Zapišimo pogoj za ohranitev gibalne količine fotona pri sisanju na zvočnem valu

$$\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{q} = \mathbf{k}_1, \quad (8.58)$$

kjer je  $\mathbf{k}_0$  valovni vektor vpadne svetlobe,  $\mathbf{k}_1$  valovni vektor uklonjene svetlobe,  $\mathbf{q}$  pa valovni vektor zvočnega vala. Znak plus velja, kadar potuje zvok proti projekciji  $\mathbf{k}_0$  na  $\mathbf{q}$ , negativen predznak pa ob potovanju zvoka v nasprotno smer. Frekvenca zvočnega vala je dosti nižja od frekvence svetlobe, zato se frekvenca svetlobe pri sisanju le malo spremeni in  $|\mathbf{k}_0| \approx |\mathbf{k}_1|$ . Tedaj je  $|\mathbf{q}| = q = 2k_0 \sin \vartheta$  (glej sliko 8.10), od koder sledi Braggov pogoj (enačba 8.57). Obenem je vpadni kot enak izhodnemu, kar pomeni, da se na zvočnem valu Braggovo sipana svetloba zrcalno odbije. Razmere so torej povsem analogne Braggovemu sisanju rentgenske svetlobe na kristalnih ravninah. Kot bomo pokazali v nadaljevanju, je ob izpolnjenem Braggovem pogoju mogoče doseči, da se vsa vpadna svetloba uklanja.



Slika 8.10: K izpeljavi Braggovega pogoja



Naredimo še oceno izračuna, kdaj je v veljavi Raman-Nathov in kdaj Braggov režim. Izhajajmo iz pogoja, da je laserski snop na poti skozi plast zvočnega valovanja tako ozek, da ostane v celoti znotraj ene razredčine ali zgoščine. Širino razredčin in zgoščin ocenimo na  $\Lambda/2$ , to pa je potem tudi približno premer laserskega snopa  $2w$ . Dolžina, znotraj katere se snop še ne razširi znatno, je dolžina grla  $2z_0 = 2\pi w^2/\lambda$  (enačba 3.21). Največja dolžina poti, pri kateri je pogoj izpolnjen in snop ostane znotraj ene razredčine ali zgoščine, je tako

$$d_c \sim 2z_0 \sim \frac{2\pi w^2}{\lambda} \sim \frac{\pi \Lambda^2}{8\lambda}. \quad (8.59)$$

Pri debelinah  $d \ll d_c$  velja Raman-Nathov približek, pri debelinah  $d \gg d_c$  pa Braggov uklon. Poglejmo primer. Če svetloba z  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  vpade na kristal, v katerem je vzbujeno zvočno valovanje s krožno frekvenco  $\Omega = 150 \text{ MHz}$  in pripadajočo valovno dolžino  $\Lambda = 0,1 \text{ mm}$ , je mejna debelina  $d_c \sim 6 \text{ mm}$ .

Če je zvočno valovanje potupoče, kar smo v gornji obravnavi že privzeli s tem, da smo mu pripisali natanko določen valovni vektor  $\mathbf{q}$ , se spremeni tudi frekvenca sisanega vala zaradi Dopplerjevega premika pri odboju na zvočnem valovanju, ki potuje s hitrostjo  $v_z$ . Upoštevati moramo le projekcijo na smer vpadne in odbite svetlobe, zato je

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm \frac{2v_z \sin \vartheta}{c} = \pm \frac{2\Omega\Lambda \sin \vartheta}{2\pi c} = \pm \frac{\Omega}{\omega}, \quad (8.60)$$

pri čemer smo uporabili Braggov pogoj (enačba 8.57). Sprememba frekvence siane svetlobe je torej kar enaka frekvenci zvočnega valovanja. To je seveda v skladu z gornjo zahtevo, da se pri uklonu na zvočnem valovanju ohranja skupna energija vpadnega fotona in kvanta zvočnega valovanja (fonona), ki se pri sisanju absorbira ali pri njem nastane.

Malenkost drugačno je obnašanje, ko v snovi vzbudimo stoječe zvočno valovanje. Takrat lahko sisanje obravnavamo kot vsoto sisanja na dveh valovanjih z valovnima vektorjem  $\mathbf{q}$  in  $-\mathbf{q}$ . Smer Braggovo sisanega vala je obakrat enaka, frekvanca pa se enkrat poveča, drugič zmanjša za  $\Omega$ . Zato se pojavi utripanje sisanega vala s frekvenco  $2\Omega$ .

### Uporaba akusto-optičnih modulatorjev

Spoznali smo, da lahko z zvočnim valovanjem spremojemo smer vpadne svetlobe. Bistvena razlika od navadnih uklonskih mrežic je dinamičnost akusto-optičnih modulatorjev, saj lahko uklonski kot svetlobe hitro spremojamo. Poglavitna omejitev je, da mora biti vsaj približno izpolnjen Braggov pogoj. S kombinacijo dveh med seboj pravokotnih akusto-optičnih modulatorjev lahko žarek premikamo po ravnini, kar s pridom uporabljamo v različnih optičnih napravah, na primer v optičnih pincetah, optičnih čitalcih ali optičnih litografskih zapisovalnikih.

Z vklapljanjem in izklopiljanjem zvočnega valovanja, ki ga vzbujamo s piezoelektričnim elementom, na katerega pritisnemo izmenično napetost, lahko moduliramo intenziteto direktnega svetlobnega snopa. To potrebujemo na primer pri preklapljanju dobrote laserskega resonatorja.

Akusto-optične modulatorje uporabljamo tudi za uklepanje faz v laserskem resonatorju. Če je v Braggovem elementu prisotno stoječe zvočno valovanje, je amplituda direktnega snopa modulirana s frekvenco zvoka. Kadar je frekvanca zvoka ravno enaka razmiku frekvenc laserskih nihanj, lahko nastanejo uklenjene faze vzbujenih nihanj in s tem kratki sunki svetlobe.

Naslednji primer uporabe je spremjanje frekvence svetlobe. Možne so spremembe do nekaj 100 MHz, kar je ravno primerno za uporabo v laserskih merilnikih hitrosti, kjer merimo frekvenco utripanja med referenčno svetobo in svetobo, odbito od merjenega predmeta. Če ima referenčna svetloba isto frekvenco kot merilni snop, ni mogoče določiti predznaka hitrosti predmeta, če pa referenčni svetlobi nekoliko spremenimo frekvenco, se pojavi utripanje tudi tedaj, ko predmet miruje. Frekvanca utripanja se poveča ali zmanjša glede na predznak hitrosti predmeta.

Zanimiva je tudi uporaba Braggovega elementa za izdelavo hitrega frekvenčnega analizatorja električnih signalov. Piezoelektrični element vzbujamo z električnim signalom, ki ima neznan spekter. Enak spekter imajo tudi vzbujeni zvočni valovi, pri čemer vsakemu valu določene frekvence ustrezata določen kot odklona svetlobnega snopa. Za Braggovim elementom postavimo lečo. Vsak delni uklonjeni snop da v goriščni ravnini svetlo točko, katere položaj je odvisen od kota odklona in torej od frekvence zvočnega vala. Spekter zaznamo z vrstičnim detektorjem. Akusto-optični element oziroma Braggova celica torej frekvenčni spekter zvočnih valov prevede v prostorski spekter prepuščene svetlobe. Prostorski spekter svetlobe pa lahko analiziramo z lečo, ki v goriščni ravnini da prostorsko Fourierovo transformiranko svetlobnega snopa pred lečo.

## 8.8 \*Račun akusto-optičnega pojava

Izračunajmo intenziteto svetlobe, ki se uklanja na zvočnem valovanju. Izhajamo iz valovne enačbe v nehomogenem sredstvu, kar je dokaj težaven problem in se moramo zateči k približkom. Uporabili bomo metodo sklopljenih valov.

Naj vzporeden snop zvočnega valovanja s širino  $d$  in valovnim vektorjem  $\mathbf{q}$  potuje v smeri  $x$ . Nanj pod kotom  $\vartheta$  glede na os  $z$  (normalo na kristal) vpada ravno svetlobno valovanje z valovnim vektorjem  $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) = k(\sin \vartheta, 0, \cos \vartheta)$ . Vse valovanje, vpadno na levi od zvočnega snopa in izhodno na njegovi desni, obravnavajmo znotraj snovi, da ni treba upoštevati še loma, ki le zaplete izraze.

Privzemimo, da se v snovi zaradi zvočnih valov spremeni le velikost dielektrične konstante. Ob upoštevanju zveze med spremembijo dielektričnosti in deformacijo v zvočnem valu (enačba 8.50) spremembijo dielektričnosti zapišemo kot

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} + \delta\epsilon = \tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}^2 p S_0 \sin(qx - \Omega t). \quad (8.61)$$

Zaradi spremembe dielektričnosti pride do pojava dodatne električne polarizacije  $\delta P$

$$\delta P = \epsilon_0 \delta\epsilon E = -\epsilon_0 \tilde{\epsilon}^2 p S_0 \sin(qx - \Omega t) E. \quad (8.62)$$

Dodatna polarizacija v valovno enačbo doprinese nehomogen člen, podobno kot pri nelinearni optiki (enačba ??). Zapišemo

$$\nabla^2 E - \frac{\tilde{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial E^2}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2}, \quad (8.63)$$

pri čemer smo privzeli, da je  $\nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$ , čeprav je  $\epsilon$  funkcija kraja.

Enačbo (8.63) brez dodane polarizacije  $\delta P$  rešijo ravni valovi z valovnim vektorjem  $\mathbf{k}$  in krožno frekvenco  $\omega$ . Tej rešitvi se primešajo valovi z valovnim vektorjem  $\mathbf{k} \pm n\mathbf{q}$  in krožno frekvenco  $\omega \pm n\Omega$ . Zato iščemo rešitve v obliki vsote ravnih valov, torej Fourierove vrste

$$E = \sum_n A_n(z) e^{in(qx - \Omega t)} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}. \quad (8.64)$$

Zaradi sklopitev preko  $\delta P$  smo dopustili, da so amplitude  $A_n$  funkcije  $z$ . Če je  $\delta\epsilon$  dovolj majhen, se  $A_n(z)$  le počasi spreminjajo.

Izračunajmo

$$\nabla^2 E = \sum_n \left( -(k_z^2 + (k_x + nq)^2) A_n(z) + 2ik_z A'_n(z) \right) e^{i((k_x + nq)x + k_z z - (\omega + n\Omega)t)}. \quad (8.65)$$

Člene z  $A''_n$  lahko izpustimo, če je le  $k_z A'_n \gg A''_n$  oziroma kadar se  $A_n$  spreminjajo počasi v primerjavi z  $\exp(ik_z z)$ . Drugi odvod polarizacije po času da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2} &= -\frac{\epsilon_0 \tilde{\epsilon}^2 p S_0}{2i} \sum_n A_n(z) \exp(i((k_x + nq)x + k_z z - (\omega + n\Omega)t)) \cdot \\ &\quad \left( -(n\Omega + \omega + \Omega)^2 e^{i(qx - \Omega t)} + (n\Omega + \omega - \Omega)^2 e^{i(-qx + \Omega t)} \right), \end{aligned} \quad (8.66)$$

drugi odvod polja po času pa

$$\frac{\partial E^2}{\partial t^2} = -\sum_n (n\Omega + \omega)^2 A_n(z) e^{in(qx - \Omega t)} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}. \quad (8.67)$$

Vstavimo izraze (8.65), (8.66) in (8.67) v valovno enačbo (8.63) in izenačimo člene z isto časovno in prostorsko frekvenco, na primer s  $k_z z + (k_x + mq)x - (\omega + m\Omega)t$ . Sledi

$$-(k_z^2 + (k_x + mq)^2)A_m + 2ik_z A'_m + \frac{\tilde{\epsilon}}{c^2}(m\Omega + \omega)^2 A_m = \quad (8.68)$$

$$= \frac{\mu_0 \epsilon_0 \tilde{\epsilon}^2 p S_0}{2i} (\omega + m\Omega)^2 (A_{m-1} - A_{m+1}). \quad (8.69)$$

Upoštevamo, da je

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\tilde{\epsilon} \omega^2}{c^2} \quad (8.70)$$

in naredimo približek  $(\omega + m\Omega)^2 \approx \omega^2$ . Sledi

$$A'_m + i\beta_m A_m + \xi (A_{m+1} - A_{m-1}) = 0, \quad (8.71)$$

kjer sta

$$\beta_m = \frac{mq}{k_z} (k_x + \frac{1}{2}mq) \quad \text{in} \quad \xi = -\frac{\tilde{\epsilon} p S_0 k^2}{4k_z}. \quad (8.72)$$

Reševanje sistema enačb (8.71) je težavno, zato poiščimo rešitve le v treh pomembnih limitnih primerih. Amplituda vala, ki vpada z leve, naj bo  $A_0(0) = A_0$ , za ostale pa naj velja  $A_n(0) = 0$ .

### Braggov uklon ob šibki pretvorbi

Najprej privzemimo, da je  $\xi d \ll 1$ , da je torej velikost  $\delta\epsilon$  majhna in debelina zvočnega snopa ne prevelika. Tedaj pri vseh  $z$  in za pozitivne  $m$  velja  $A_{m+1} \ll A_m$  in lahko člen  $A_{m+1}$  v enačbi (8.71) izpustimo. S tem zapišemo preprost sistem enačb

$$A'_m + i\beta_m A_m = \xi A_{m-1}, \quad (8.73)$$

ki jih lahko zapored integriramo

$$A_m(z) = \xi e^{-i\beta_m z} \int_0^z A_{m-1}(z') e^{i\beta_m z'} dz'. \quad (8.74)$$

Podobne izraze izpeljemo za negativne  $m$ .

Poglejmo posebej prvi uklonjeni val z amplitudo  $A_1$ . Po predpostavki, da je  $A_{\pm 1} \ll A_0$ , se le malo energije uklanja iz osnovnega vala in lahko privzamemo, da je  $A_0(z)$  skoraj konstanta. Potem lahko integral v enačbi (8.74) izračunamo

$$A_1(d) = A_0 \xi d \frac{\sin \beta_1 d / 2}{\beta_1 d / 2} e^{-i\beta_1 d / 2}, \quad (8.75)$$

pri čemer je  $d$  debelina plasti zvočnega valovanja. Funkcija  $A_1(d)$  ima vrh pri  $\beta_1 = 0$ , to je po enačbi (8.72) pri

$$k_x + \frac{q}{2} = k \sin \vartheta + \frac{q}{2} = 0 \quad \text{ali} \quad 2\Lambda \sin \vartheta = -\lambda. \quad (8.76)$$

Vidimo, da predstavlja  $\beta_1 = 0$  ravno pogoj za Braggovo sisanje vpadnega vala.

Delež moči uklonjenega vala je

$$\frac{I_1}{I_0} = \left| \frac{A_1}{A_0} \right|^2 = (\xi d)^2 \left( \frac{\sin \beta_1 d / 2}{\beta_1 d / 2} \right)^2. \quad (8.77)$$

Če je Braggov pogoj izpolnjen, je  $I_1/I_0 = (\xi d)^2$  in naraščanje parabolično. To seveda lahko velja le, dokler je  $\xi d \ll 1$ . Kadar intenziteta uklonjenega žarka tako naraste, da ta pogoj ni več izpolnjen, je treba v računu upoštevati tudi zmanjšanje moči vpadnega snopa.

### Braggov uklon ob znatni pretvorbi

Drug primer naj bo približek, da sta le  $A_0$  in  $A_1$  različna od nič, opustimo pa omejitev  $\xi d \ll 1$ . Ta približek je smiseln, saj je Braggov pogoj hkrati lahko izpolnjen le za en uklonjen val, na primer  $m = 1$ . Tedaj so vse ostale amplitude  $A_{m,m \neq 0,1}$  majhne in ne vplivajo na  $A_1$ . Zaradi velike pretvorbe  $A_0(z)$  ne smemo več obravnavati kot konstante. Upoštevamo izpolnjen Braggov pogoj (enačba 8.76) in iz sistema enačb (8.71) sledi

$$\begin{aligned} A'_0 + \xi A_1 &= 0 \\ A'_1 - \xi A_0 &= 0. \end{aligned} \quad (8.78)$$

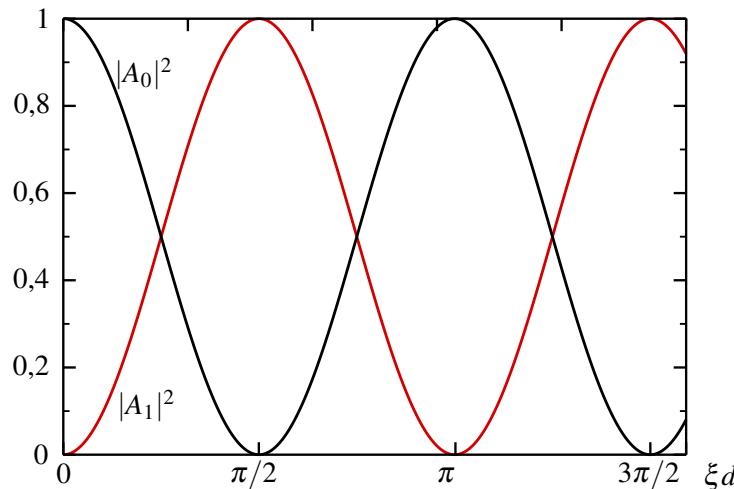
Ob začetnih pogojih  $A_0(0) = A_0$  in  $A_1(0) = 0$  sta rešitvi gornjih enačb

$$A_0(d) = A_0 \cos(\xi d) \quad (8.79)$$

in

$$A_1(d) = A_0 \sin(\xi d). \quad (8.80)$$

Če je izpolnjen Braggov pogoj, se moč vpadnega vala na razdalji  $\pi/(2\xi)$  skoraj vsa pretoči v uklonjeni snop, nato pa zopet nazaj (slika 8.11). Za čim bolj učinkovito delovanje akusto-optičnega modulatorja seveda želimo doseči ravno take pogoje.



Slika 8.11: Relativna intenziteta prepuščenega (črna) in uklonjenega (rdeča) valovanja na zvočnem valovanju v odvisnosti od debeline plasti zvočnega valovanja.

V gornja izraza vstavimo še parameter  $\xi$ , ki je podan z enačbo (8.72). Razmerje med močjo uklonjenega in vpadnega snopa je tako

$$\frac{I_1}{I_0} = \sin^2 \left( \frac{\pi n_0^3 p S_0 d}{2\lambda \cos \vartheta} \right), \quad (8.81)$$

pri čemer je  $n_0 = \sqrt{\tilde{\epsilon}}$ . Poiščimo še amplitudo deformacije  $S_0$ . Za longitudinalne (zvočne) valove v snovi oblike  $u = u_0 \cos(qx - \Omega t)$  je deformacija

$$S_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} = -u_0 q \sin(qx - \Omega t). \quad (8.82)$$

Povprečna gostota energijskega toka je

$$j_z = \frac{1}{T} \int_0^T v_z \left( \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho v_z^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dt = \frac{1}{2} \rho v_z^3 S_0^2, \quad (8.83)$$

kjer je  $v_z$  hitrost zvoka v snovi in  $\rho$  gostota snovi. Sledi

$$S_0 = \sqrt{\frac{2j_z}{\rho v_z^3}}. \quad (8.84)$$

Praktično je vpeljati merilo uporabnosti neke snovi za akusto-optični modulator. To je koeficient

$$M = \frac{n_0^6 p^2}{\rho v_z^3}. \quad (8.85)$$

Večja kot je vrednost koeficiente  $M$ , bolj izrazit je akusto-optični pojav v dani snovi. Izkoristek pretvorbe s koeficientom  $M$  potem zapišemo kot

$$\frac{I_1}{I_0} = \sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda \cos \vartheta} \sqrt{\frac{j_z M}{2}} \right). \quad (8.86)$$

Poglejmo primer. V kremenu z gostoto  $\rho = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  je hitrost zvoka  $v_z = 6000 \text{ m/s}$ ,  $n_0 = 1,46$  in  $p = 0,2$ . To da  $M = 8 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2/\text{W}$ . Pri gostoti zvočnega toka  $10 \text{ W/cm}^2$  in valovni dolžini svetlobe  $633 \text{ nm}$  pride do popolnega prenosa moči v uklonjeni snop pri debelini  $d \sim 3 \text{ cm}$ . Upoštevana gostota zvočnega toka je kar velika in je ni prav lahko doseči, zato so uklonski izkoristki navadno nekaj manjši od 1.



Opisani račun izkoristka uklona na zvočnih valovih je uporaben tudi pri računu izkoristka holograma. V primeru faznega holograma je račun povsem enak in jasno kaže razliko med tankim in debelim hologramom. Kako pa je z izkoristkom amplitudnega holograma, kjer je modulirana absorpcija v snovi, lahko bralec izračuna sam ali najde v literaturi.<sup>7</sup>

### Raman-Nathov uklon

Oglejmo si še tretji primer. Izhajamo iz sistema enačb (8.71), ki smo ga zaenkrat rešili za primer Braggovega uklona oziroma v njegovi bližini. Enačbe je preprosto rešiti še v primeru tanke mrežice oziroma t. i. Raman-Nathovega približka. Vpeljimo novo neodvisno spremenljivko  $\zeta = 2\xi z$ . Zveza (8.71) preide v

$$2 \frac{dA_m(\zeta)}{d\zeta} + A_{m+1}(\zeta) - A_{m-1}(\zeta) = \frac{\beta_m}{i\xi} A_m. \quad (8.87)$$

Člen na desni lahko izpustimo, če je

$$\frac{\beta_m}{\xi} = \left| \frac{4mq}{\tilde{\epsilon} p S_0 k} \left( \sin \vartheta + \frac{mq}{2k} \right) \right| \ll 1, \quad (8.88)$$

oziroma če je valovna dolžina zvoka dovolj velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Potem v enačbi (8.87) prepoznamo rekurzivsko zvezo za Besslove funkcije

$$2J'_n + J_{n+1} - J_{n-1} = 0 \quad (8.89)$$

z rešitvijo  $A_m(z) = A_0 J_m(2\xi z)$ . Kadar je  $2\xi d$  ničla funkcije  $J_0$ , prvič je to pri  $2\xi d \approx 2,4$ , se vsa energija ukloni iz vpadnega snopa, vendar se v tem primeru razporedi v mnogo uklonjenih snopov.

<sup>7</sup>H. Kogelnik, Bell Syst. Tech. J. 48, 2909 (1969).

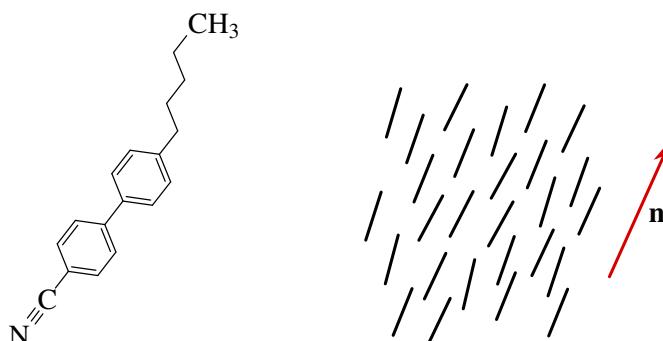
## 8.9 Modulacija s tekočimi kristali

### Nematični tekoči kristali

Za konec opišimo še modulacijo svetlobe s tekočimi kristali. Tekoči kristali so anizotropne kapljevine. To pomeni, da so tekoči kot kapljevine, imajo pa določene anizotropne lastnosti kot trdni kristali. Tekoče kristale tvorijo podolgovate ali ploščate molekule, ki odražajo različne stopnje urejenosti.

Omejimo se na najosnovnejši primer, to so podolgovate organske molekule v nematični fazi tekočega kristala. Navadno so to molekule z razmeroma togim jedrom iz dveh ali treh benzenovih obročev, ki imajo na koncih krajše ali daljše alifatske verige (slika 8.12). Značilnost nematične faze je, da so v njej težišča molekul neurejena, enako kot v navadni tekočini, osi molekul pa so v povprečju urejene v določeno smer. Pravimo, da imajo molekule v nematiku orientacijsko ureditev dolgega dosega. Če nematic segrejemo, preide v izotropno tekočo fazo, če pa ga ohladimo, neposredno ali prek drugih tekočekristalnih faz preide v trdno kristalno obliko.

Smer povprečne urejenosti podolgovatih molekul opišemo z enotskim vektorjem  $\mathbf{n}$ , ki ga imenujemo direktor. Smeri  $\mathbf{n}$  in  $-\mathbf{n}$  sta enakovredni, saj molekule z enako verjetnostjo kažejo v smer  $+\mathbf{n}$  kot v  $-\mathbf{n}$ . Stopnja urejenosti v mikroskopski sliki ni prav velika, povprečen odklon molekul od  $\mathbf{n}$  je nekaj deset stopinj, odvisno seveda od temperature.

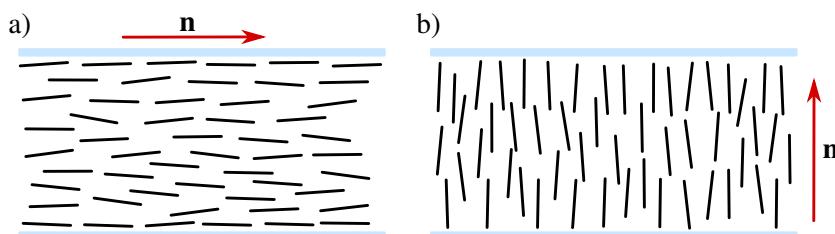


Slika 8.12: Molekula enega najbolj razširjenih tekočih kristalov, 4-ciano-4'pentil-bifenila ali 5CB (levo) in shematski prikaz nematične faze z označenim direktorjem (desno)

Molekule so v nematični fazi v povprečju orientacijsko urejene, zato se nematic obnaša kot enoosen dvolomni kristal. Njegova optična os je vzporedna z  $\mathbf{n}$ , lastni vrednosti dielektričnega tenzorja pa sta  $\epsilon_{\perp}$  in  $\epsilon_{\parallel}$ , ki ustrezata rednemu ( $n_o$ ) in izrednemu ( $n_e$ ) lomnemu količniku. Ker je optična polarizabilnost benzenovih obročev vzdolž osi molekul precej večja kot v prečni smeri, je razlika med rednim in izrednim lomnim količnikom v nematiku razmeroma velika, navadno med 0,1 in 0,2, seveda spet odvisno od temperature.

V povprečju so molekule urejene v smeri direktorja. Če se smer direktorja lokalno spremeni, je energija takega deformiranega stanja nekoliko večja od energije homogenega urejenega stanja. Tekoči kristal na drugače orientiran delček snovi zato deluje z navorom v smeri zmanjševanja nehomogenosti  $\mathbf{n}$ . To lastnost, ki je značilna za tekoče kristale, imenujemo orientacijska elastičnost. Vendar so v makroskopskem vzorcu nematičnega tekočega kristala elastični navori prešibki, da bi uredili celoten vzorec, zato se na splošno smer direktorja  $\mathbf{n}$  po vzorcu neurejeno spreminja. Da dobimo urejene vzorce, ki jih potrebujemo za izdelavo optičnih naprav, moramo ureditev vzorca vsiliti. To naredimo z zunanjim električnim ali magnetnim poljem, ali pa vzorce pripravimo dovolj tanke, da ureditev vsilijo mejne površine.

Poglejmo, kako nastane urejen vzorec v tankih plasteh. Če površino, ki je v stiku s tekočim kristalom, ustrežno pripravimo (prevlečemo s posebnimi plastmi ali mehansko obdelamo), se molekule tekočega kristala tik ob površini uredijo v dani smeri. Tako na primer podrgnjena tanka plast najlona uredi  $\mathbf{n}$  ob površini v smeri drgnjenja vzporedno s površino (slika 8.13 a). Po drugi strani pa tanka plast lecitina ali surfaktanta silana uredi direktor pravokotno na površino (slika 8.13 b). Ti dve snovi imata namreč polarno glavo, ki se adsorbira na stekleno površino, in alifatsko verigo, ki stoji približno pravokotno na površino. Zato se tudi alifatski repi molekul tekočega kristala uredijo pravokotno na steklo. V obeh primerih, vzporedni (planarni) ali pravokotni (homeotropni) ureditvi ob steni, se urejenost zaradi orientacijske elastičnosti ohranja tudi stran od stene, tako da lahko brez težav naredimo urejene vzorce debeline do kakih 200 µm. Pri večjih debelinah so elastični navori prešibki in v vzorcu nastanejo defekti.



Slika 8.13: Ureditev tekočega kristala navadno vsilimo z urejevalno površino. Dva primera sta planarna ureditev (a), kjer je direktor vzporeden z urejevalno površino, in homeotropna ureditev (b), kjer je direktor pravokoten na mejno ploskev.

Na ureditev molekul tekočega kristala vpliva zunanje električno ali magnetno polje. Zaradi urejenosti molekul električna (ali magnetna) susceptibilnost nematičnega tekočega kristala ni skalar, temveč ima dve različni lastni vrednosti, eno za smer vzporedno z  $\mathbf{n}$ , drugo za pravokotno nanj. Zato je elektrostatična energija odvisna od kota med zunanjim poljem  $\mathbf{E}$  in direktorjem  $\mathbf{n}$ . Pri konstantnem zunanjem električnem polju gostoto električne energije zapišemo kot

$$w_{el} = -\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (8.90)$$

Električno polje lahko razstavimo na del, ki je vzporeden z  $\mathbf{n}$ , in del, ki je pravokoten nanj

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}). \quad (8.91)$$

Potem je

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_{\perp} \mathbf{E} + \epsilon_0 \epsilon_a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad (8.92)$$

pri čemer je  $\epsilon_a = \epsilon_{||} - \epsilon_{\perp}$  anizotropni del dielektrične konstante. Anizotropni del gostote energije je tako do konstante

$$w_a = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})^2. \quad (8.93)$$

Če je  $\epsilon_a > 0$ , se molekule tekočega kristala uredijo v smeri zunanjega polja, v nasprotnem primeru pa pravokotno nanj.

Urejenost tekočekristalnega vzorca je tako odvisna od orientacijske elastičnosti, robnih pogojev, ki jih določimo z obdelavo mejne površine, in od jakosti ter smeri zunanjega električnega ali magnetnega polja.

### Tekočekristalni prikazovalnik

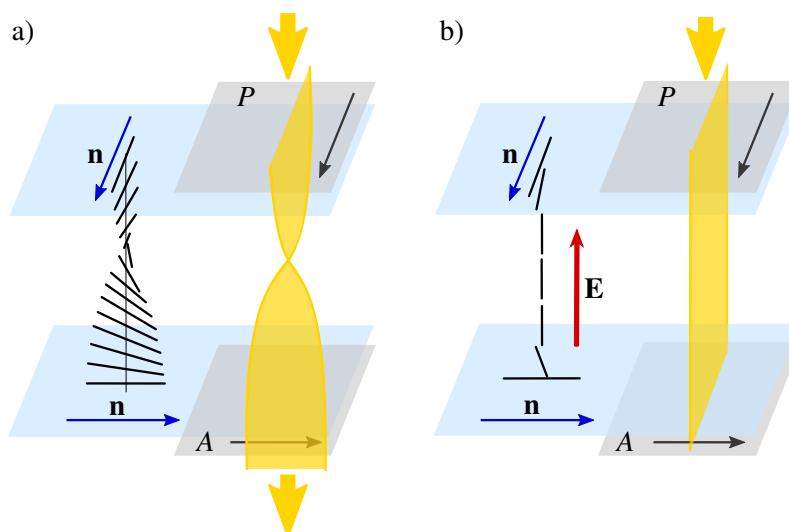
Vzemimo tanko plast tekočega kristala med dvema površinama, ki vsiljujeta vzporedno planarno ureditev. Vzorec je urejen in homogen, optična os leži v ravnini plasti. Če dodamo na površini še prozorni elektrodi, lahko z zunanjim napetostjo spremojemo orientacijo molekul v plasti in tako tudi smer optične osi. Dovolj velika napetost zasuče  $\mathbf{n}$  in optična os se postavi pravokotno na stene, razen tik ob površini. Tipično so take napetosti okoli nekaj volтов.

Ta pojav lahko izkoristimo za izdelavo preprostega optičnega preklopnika. Naj debelina plasti  $d$  ustreza debelini ploščice  $\lambda/2$  za izbrano valovno dolžino svetlobe

$$d(n_e - n_o) = (2N + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad (8.94)$$

kjer je  $N$  celo število,  $n_e$  izredni in  $n_o$  redni lomni količnik. Ker je v nematikih  $n_e - n_o \sim 0,1$ , je ustrezna debelina  $d$  nekaj  $\mu\text{m}$ . Tak vzorec damo med dva prekrizana polarizatorja s prepustno smerjo pod kotom  $45^\circ$  glede na  $\mathbf{n}$  oziroma optično os. Vzorec, ki deluje kot ploščica  $\lambda/2$ , polarizacijo svetlobe z izbrano valovno dolžino zasuče za  $90^\circ$  in svetloba prehaja skozi analizator. Ko priključimo napetost, se optična os obrne v smeri polja. Polarizacija vpadne svetlobe se pri prehodu skozi plast ohrani in analizator je ne prepusti. Z električnim poljem smo torej preklopili iz stanja, ki prepusta svetljivo, v stanje, ki svetljivo ne prepusta. Vendar ima tak preklopnik nekaj slabosti. Prepustnost je odvisna od valovne dolžine svetlobe in od temperature, poleg tega mora biti debelina plasti povsem enaka. Zato se v praksi uporablja zasukan nematic.

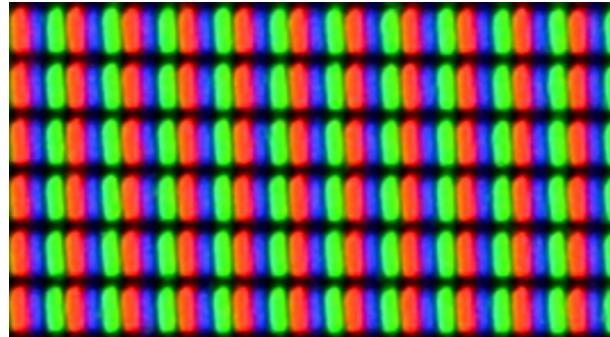
Zasukan nematic nastane tako, da površini, ki vsiljujeta planarno ureditev, zasučemo za kot  $90^\circ$  eno glede na drugo (slika 8.14 a), zato se  $\mathbf{n}$  v plasti zvezno zavrti. Pokazali bomo, da polarizacija svetlobe, ki je ob vstopu v plast polarizirana v smeri urejanja, pri prehodu skozi plast približno sledi  $\mathbf{n}$  in je ob izstopu iz plasti pravokotna na vpadno polarizacijo. Ko priključimo električno polje, se direktor obrne v smer pravokotno na plast tekočega kristala (slika 8.14 b). V tem primeru se polarizacija ne zasuče in analizator svetlobe ne prepusti. Plast med prekrizanimi polarizatorji brez polja torej prepusta svetljivo, s poljem pa ne. Pri tem delovanje prikazovalnika ni dosti odvisno niti od debeline plasti niti od valovne dolžine svetlobe.



Slika 8.14: a) V zasukani nematični celici polarizacija sledi smeri zasukanega direktorja in analizator (A) prepusta svetljivo. b) V električnem polju (E) se tekočekristalne molekule zasučajo v smer polja. Polarizacija svetlobe se ohranja in analizator (A) svetljivo ne prepusta.



Tekočekristalni zasloni, ki jih uporabljam v praksi, so precej bolj zapleteni. Najpreprostejši so črno-beli prikazovalniki, ki delujejo z odbito svetlogo (npr. v žepnih računalih), zato imajo za analizatorjem odbojno površino. Večina sodobnih prikazovalnikov (npr. računalniški ali telefonski zasloni) ima svoj izvor svetlobe, praviloma so to LED ali fluorescenčna svetila. Barve dosežemo z barvnimi filterji (rdečim, modrim in zelenim) na vsakem pikslu posebej, natančno krmiljenje pikslov pa s tankoplastnimi tranzistorji (*Thin film transistors, TFT*). Veliko sodobnejših zaslonov ima tekoče kristale urejene planarno, tekočekristalne zaslone pa lahko z dodatnimi plastmi naredimo tudi občutljive na dotik.



Slika 8.15: Na močno povečani sliki računalniškega tekočekristalnega zaslona se jasno vidi, da je vsak piksel sestavljen iz treh barv.

## 8.10 \*Račun prehoda svetlobe skozi zasukan nematik

Pokazati moramo še, da polarizacija svetlobe pri prehodu skozi zasukan nematik približno sledi zasuku optične osi. Vzemimo vzorec, kakršen je na sliki (8.14 a) in ga obravnavajmo kot lokalno optično enoosno snov. Pri  $z = 0$  naj bo optična os v smeri  $x$ , ko se premikamo vzdolž osi  $z$ , pa naj se optična os suče v ravnini  $xy$ . Kot med optično osjo in osjo  $x$  tako zapišemo

$$\varphi = qz. \quad (8.95)$$

Poleg zasukane nematične celice je pomemben primer snovi s takimi lastnostmi holesterični tekoči kristal, ki je zelo podoben nematičnemu, le da so molekule kiralne in se  $\mathbf{n}$  spontano suče okoli smeri, pravokotne na  $\mathbf{n}$ . Zanimajmo se le za širjenje svetlobe v smeri  $z$ . Tedaj potrebujemo le del dielektričnega tenzorja v  $xy$  ravnini.

**Naloga 8.10.1** Pokaži, da se dielektrični tenzor v zasukani nematični plasti zapiše kot

$$\boldsymbol{\epsilon}(z) = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon} + \frac{1}{2}\epsilon_a \cos(2qz) & \frac{1}{2}\epsilon_a \sin(2qz) \\ \frac{1}{2}\epsilon_a \sin(2qz) & \bar{\epsilon} - \frac{1}{2}\epsilon_a \cos(2qz) \end{bmatrix}, \quad (8.96)$$

kjer je  $z$  razdalja od plasti, v kateri je direktor obrnjen v smeri  $x$ , povprečna vrednost  $\bar{\epsilon}$  pa

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp}}{2}. \quad (8.97)$$

Namig: Zasukan tenzor  $\boldsymbol{\epsilon}(z)$  pri danem  $z$  izračunamo iz nezasukanega  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  s transformacijo  $\boldsymbol{\epsilon}(z) = A(\varphi) \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot A(\varphi)^T$ , pri čemer je  $A(\varphi)$  rotacijska matrika.

Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) hitro uvidimo, da je valovna enačba za valovanje s krožno frekvenco  $\omega$  v našem primeru oblike

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\epsilon}(z)\mathbf{E} = 0 \quad (8.98)$$

ali po komponentah, upoštevajoč tenzor dielektričnosti (enačba 8.96)

$$\frac{d^2E_x}{dz^2} + (\beta^2 + \alpha^2 \cos(2qz))E_x + \alpha^2 E_y \sin(2qz) = 0 \quad (8.99)$$

in

$$\frac{d^2E_y}{dz^2} + \alpha^2 E_x \sin(2qz) + (\beta^2 - \alpha^2 \cos(2qz))E_y = 0, \quad (8.100)$$

kjer je  $\alpha^2 = \epsilon_a \omega^2 / (2c^2)$  in  $\beta^2 = \bar{\epsilon} \omega^2 / c^2$ . S tem smo dobili sistem dveh sklopljenih diferencialnih enačb, ki ga lahko rešimo.

Za reševanje je ugodno vpeljati krožni polarizaciji  $E_+ = E_x + iE_y$  in  $E_- = E_x - iE_y$ . Enačbi (8.99) in (8.100) prepišemo v

$$-\frac{d^2E_+}{dz^2} = \beta^2 E_+ + \alpha^2 E_- e^{2iqz} \quad (8.101)$$

in

$$-\frac{d^2E_-}{dz^2} = \alpha^2 E_+ e^{-2iqz} + \beta^2 E_-. \quad (8.102)$$

Lastne rešitve poiščemo v obliki

$$E_+ = A e^{i(k+q)z} \quad (8.103)$$

in

$$E_- = B e^{i(k-q)z}. \quad (8.104)$$

Nastavek reši sistem enačb (8.101) in (8.102), natanko takrat, kadar  $A$  in  $B$  rešita sistem homogenih linearnih enačb

$$((k+q)^2 - \beta^2)A - \alpha^2 B = 0 \quad (8.105)$$

in

$$-\alpha^2 A + ((k-q)^2 - \beta^2)B = 0. \quad (8.106)$$

Sistem je netrivialno rešljiv, če je determinanta koeficientov enaka nič

$$(k^2 + q^2 - \beta^2)^2 - 4k^2 q^2 - \alpha^4 = 0. \quad (8.107)$$

Spomnimo se, da sta  $\beta$  in  $\alpha$  sorazmerna z  $\omega$ , zato dobljena enačba predstavlja disperzijsko relacijo – zvezo med  $\omega$  in  $k$  – za svetlobo v zasukanem sredstvu

$$\left( k^2 + q^2 - \frac{\bar{\epsilon} \omega^2}{c^2} \right)^2 - 4k^2 q^2 - \frac{\epsilon_a^2 \omega^4}{4c^4} = 0. \quad (8.108)$$

Da dobimo disperzijsko odvisnost  $k(\omega)$ , moramo rešiti gornjo kvadratno enačbo. Vendar za razlago delovanja zasukane nematične celice zadošča približek  $q \ll \alpha$  in  $q \ll \beta$ , saj je perioda sukanja optične osi velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Tedaj lahko  $q$  v disperzijski zvezi (enačba 8.107) zanemarimo in velja

$$k^2 = \begin{cases} \beta^2 + \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\parallel} \\ \beta^2 - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp}. \end{cases} \quad (8.109)$$

Ti vrednosti ustrezata velikosti valovnega vektorja za izredni in redni val v navadnem enoosnem kristalu. Vstavimo ju v enačbi (8.103 in 8.104) in za polarizacijo lastnih valov dobimo  $B = \pm A$ . Izračunajmo še obe kartezični komponenti električnega polja za prvo rešitev

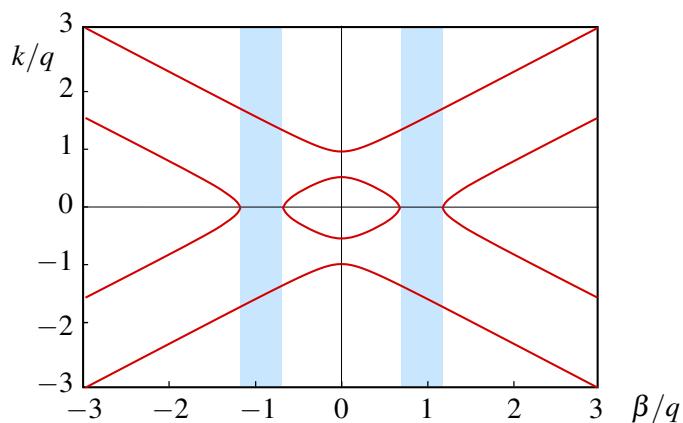
$$E_x = \frac{1}{2}(E_+ + E_-) = \frac{1}{2}Ae^{ikz}(e^{iqz} + e^{-iqz}) = Ae^{ikz} \cos qz \quad (8.110)$$

$$E_y = \frac{1}{2i}(E_+ - E_-) = \frac{1}{2i}Ae^{ikz}(e^{iqz} - e^{-iqz}) = Ae^{ikz} \sin qz. \quad (8.111)$$

Zasuk polarizacije torej res sledi zasuku optične osi. Druga rešitev da val, ki je polariziran pravokotno na lokalno optično os in se prav tako suče z njo. Pri tem se prvi val širi kot izredni val s fazno hitrostjo  $c/n_e$ , drugi pa kot redni val s  $c/n_o$ . Če na zasukanu nematično celico vpada svetloba, ki je polarizirana ali vzporedno z optično osjo ob meji ali pravokotno nanjo, se pojavi na izhodni strani polarizacija, zasukana za enak kot, kot je zasukana optična os. V primeru, da vpadna polarizacija ne sovpada z eno od lastnih osi, jo razstavimo na obe lastni in po prehodu skozi tekoči kristal zopet sestavimo, s čemer seveda na splošno nastane eliptična polarizacija.



Disperzijsko zvezo (enačbi 8.107 in 8.108) lahko rešimo (slika 8.16). Pri izbrani vrednosti  $\alpha$  obstajajo pri vseh frekvencah, razen v ozkem območju – rečemo mu frekvenčna reža – štiri realne rešitve za  $k$ , po dve za valovanji v pozitivni in v negativni smeri. V območju reže je en par rešitev imaginaren. Vsaki vrednosti  $k$  pripada neko razmerje amplitud  $A$  in  $B$ , ki ga izračunamo iz enačb (8.105) in (8.106) in ki določa polarizacijo lastnega vala. Polarizacije lastnih valov so na splošno eliptične in pri dani frekvenci med seboj niso pravokotne, saj zapisani sistem enačb ne predstavlja čisto navadnega problema lastnih vektorjev simetrične matrike. V območju frekvenčne reže le en par rešitev predstavlja potupoč val, drug pa polje, ki eksponentno pojema v sredstvo. Zato se svetloba s frekvenco v reži in v ustrezno polarizacijo totalno odbije. Pojav v zasukanih nematskih celicah ni opazen, saj je tam  $q \ll \alpha$ . Če pa je perioda vijačnice primerljiva z valovno dolžino svetlobe, kot na primer v holesteričnih tekočih kristalih, pride do značilnegaobarvanega videza. Pojav je povsem analogen Braggovemu odboju na kristalih.



Slika 8.16: Rešitve disperzijske zveze (enačba 8.107) v zasukanem nematičku ali holesteriku pri danem  $\alpha$ . Razen v frekvenčni reži (modra pasova) obstajajo štiri rešitve za vsako frekvenco.

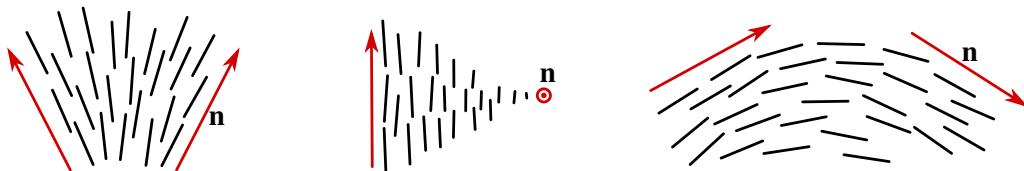
## 8.11 Račun preklopa v tekočem kristalu – Frederiksov prehod

Ob opisu tekočekristalnih prikazovalnikov smo omenili, da lahko z dovolj velikim zunanjim električnim poljem molekule tekočega kristala, razen tik ob urejevalni površini, obrnemo v smeri polja. Izračunajmo jakost polja, ki je potrebna za ta zasuk.

Energija nematičnega tekočega kristala je najnižja, kadar je direktor  $\mathbf{n}$  povsod obrnjen v isto smer. Povečanje energije zaradi krajevne odvisnosti  $\mathbf{n}$  zapišemo z orientacijsko elastično energijo oziroma Frankovo prosto energijo<sup>8</sup>

$$F_e = \frac{1}{2} \int \left\{ K_1(\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_2(\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + K_3(\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2 \right\} dV. \quad (8.112)$$

Pri tem so  $K_1$ ,  $K_2$  in  $K_3$  tri Frankove elastične konstante, ki so odvisne od snovi in tudi od temperature. Prvi člen predstavlja povečanje energije zaradi deformacije v obliki pahljače, drugi zaradi zasuka in tretji zaradi upogiba (slika 8.17).



Slika 8.17: Trije načini deformacije ureditve tekočega kristala so pahljačasta deformacija, zasuk in upogib.

V zunanjem električnem polju se energija tekočega kristala dodatno spremeni. Navadno je neodvisna električna količina električna poljska jakost, saj je polje posledica zunanje napetosti na elektrodah. Ustrezni člen v prosti energiji je tedaj (enačbi 8.90 in 8.92)

$$F_{el} = - \int \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = - \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \epsilon_{\perp} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \epsilon_a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})^2) dV = F_0 + F_{el,a}. \quad (8.113)$$

Prvi člen je neodvisen od  $\mathbf{n}$ , zato ni pomemben pri izračunu preklopa. Prosta energija nematičnega tekočega kristala v električnem polju je tako

$$F = F_e + F_{el} = F_0 + F_e + F_{el,a} = F_0 + F_e - \int \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})^2 dV, \quad (8.114)$$

kjer  $F_0$  predstavlja del proste energije, ki je neodvisen od  $\mathbf{n}$ . Tekoči kristal je v ravnotežju, ko je prosta energija najmanjša. Kadar je  $\epsilon_a > 0$ , se zato skuša  $\mathbf{n}$  postaviti vzporedno s poljem, popoln zasuk pa onemogoča mejna urejevalna plast. Da lahko z minimizacijo  $F$  izrazimo  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ , moramo torej poznati še robne pogoje.

Poglejmo primer. Naj bo nematični tekoči kristal med dvema vzporednima steklenima ploščama, med katerima je razmik  $d$ . Na obeh ploščah naj bo  $\mathbf{n}$  vzporen s površino in obrnjen v isto smer, tako da je brez zunanjega polja  $\mathbf{n}$  povsod enako usmerjen. Naj bo to smer  $x$ . Na stekleni plošči dodamo elektrodi, ki ustvarjata polje pravokotno na prvotno smer direktorja, naj bo to smer  $z$ . Ko priključimo polje, je energijsko ugodnejše, da se molekule vsaj delno zasučejo v smer polja. Ta zasuk opišemo s komponento vektorja  $\mathbf{n}$  v smeri  $z$

$$\mathbf{n}(z) = (n_x(z), 0, n_z(z)). \quad (8.115)$$

<sup>8</sup>Angleški fizik Sir Frederick Charles Frank, 1911–1998.

Robni pogoj, kateremu mora direktor zadostiti, je  $n_z(0) = n_z(d) = 0$ . Približno rešitev zato iščemo z nastavkom

$$n_z(z) = a \sin(qz), \quad q = \frac{\pi}{d}, \quad (8.116)$$

ki ni nič drugega kot prvi člen razvoja prave rešitve v Fourierovo vrsto. Ker je direktor enotski vektor, velja

$$n_x = \sqrt{1 - a^2 \sin^2(qz)} \approx 1 - \frac{a^2}{2} \sin^2(qz). \quad (8.117)$$

Vzdolž smeri  $x$  in  $y$  se direktor ne spreminja, zato velja

$$\nabla \times \mathbf{n} = \left(0, \frac{dn_x}{dz}, 0\right) \quad (8.118)$$

in

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}) = \left(-n_z \frac{dn_x}{dz}, 0, n_x \frac{dn_x}{dz}\right). \quad (8.119)$$

Površinska gostota proste energije je tako do konstante

$$\begin{aligned} F_S &= \frac{1}{2} \int \left( K_1 \left( \frac{dn_z}{dz} \right)^2 + K_3(n_x^2 + n_z^2) \left( \frac{dn_x}{dz} \right)^2 - \epsilon_0 \epsilon_a (n_z E)^2 \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^d \left( K_1 q^2 a^2 \cos^2(qz) + K_3 q^2 a^4 \sin^2(qz) \cos^2(qz) - \epsilon_0 \epsilon_a E^2 a^2 \sin^2(qz) \right) dz = \\ &= \frac{d}{4} \left( K_1 q^2 a^2 + \frac{1}{4} K_3 q^2 a^4 - \epsilon_0 \epsilon_a E^2 a^2 \right). \end{aligned} \quad (8.120)$$

V našem primeru smo integral lahko izračunali, saj smo uporabili nastavek (enačba 8.116). Sicer bi morali uporabiti Euler-Lagrangeovo metodo za minimizacijo proste energije, ki jo poznamo iz variacijskega računa.

Zdaj lahko poiščemo amplitudo deformacije  $a$ , pri kateri je prosta energija najmanjša in odvod  $dF_S/da = 0$ . Tedaj mora biti  $a$  rešitev enačbe

$$2(K_1 q^2 - \epsilon_0 \epsilon_a E^2)a + K_3 q^2 a^3 = 0. \quad (8.121)$$

Rešitvi sta

$$a = 0 \quad (8.122)$$

in

$$a^2 = 2 \frac{\epsilon_0 \epsilon_a E^2 - K_1 q^2}{K_3 q^2}. \quad (8.123)$$

Pri majhnih poljih, ko je  $\epsilon_0 \epsilon_a E^2 < K_1 q^2$ , je fizikalno smiselna le prva rešitev, ki predstavlja vzorec brez deformacije. Pri velikih poljih postane stabilna druga rešitev. Takrat deformacija v sredini plasti hitro naraste, tako da se  $\mathbf{n}$  postavi skoraj popolnoma v smer zunanjega polja. Tedaj naša rešitev seveda ni dobra, saj smo pri računu privzeli, da je  $n_z \ll 1$ . Prehodu iz nedeformiranega stanja v deformirano stanje pravimo Frederiksov prehod<sup>9</sup>. Na njem temelji preklapljanje optičnih prikazovalnikov na nematične tekoče kristale.

<sup>9</sup>Ruski fizik Vsevolod Konstantinovič Frederiks, tudi Fréedericksz, 1885–1944.

Izračunajmo še kritično jakost električnega polja, pri kateri pride do prehoda v deformirano fazo. To se zgodi pri

$$\varepsilon_0 \varepsilon_a E_c^2 - K_1 q^2 = 0 \quad (8.124)$$

oziroma

$$E_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_a}}. \quad (8.125)$$

V tipičnem tekočekristalnem prikazovalniku je napetost, potrebna za prehod,  $U = E_c d \sim 3\text{V}$ .

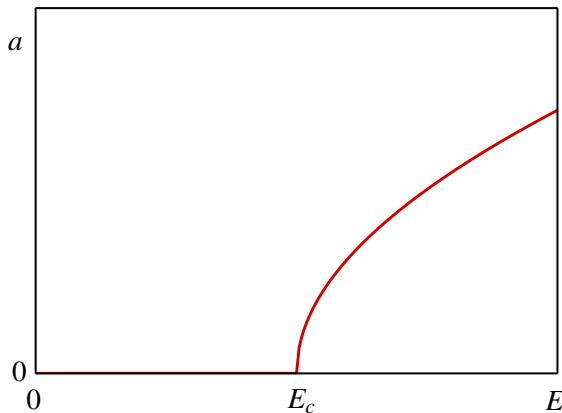
Poglejmo še, kako narašča amplituda deformacije v bližini prehoda. Iz enačbe (8.123) sledi

$$a = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_a}{K_3 q^2} (E^2 - E_c^2)}. \quad (8.126)$$

Pogosto naredimo približek enakih konstant, kjer privzamemo, da so vse Frankove elastične konstante enake vrednosti. V tem približku je

$$a \approx \sqrt{\frac{2(E^2 - E_c^2)}{E_c^2}} \quad (8.127)$$

in amplituda korensko narašča s naraščajočim poljem (slika 8.18). Tak prehod je fazni prehod drugega reda, saj količina, ki opisuje prehod (amplituda deformacije  $a$ ) zvezno preide iz vrednosti  $a = 0$  v končno vrednost.



Slika 8.18: Kvalitativno obnašanje amplitude deformacije  $a$  ob Frederiksovem prehodu

---

**Naloga 8.11.1** Izračunaj Frederiksov prehod v zasukani nematični celici (kot zasuka med zgornjo in spodnjo mejno ploskvijo naj bo  $\pi/2$ ) in pokaži, da je kritično polje za prehod enako

$$E_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_a}} \sqrt{1 + \frac{K_3 - 2K_2}{4K_1}}. \quad (8.128)$$

Namig: uporabi nastavek  $\phi = z\pi/2d$  in  $\vartheta = a \sin(\pi z/d)$ .

---

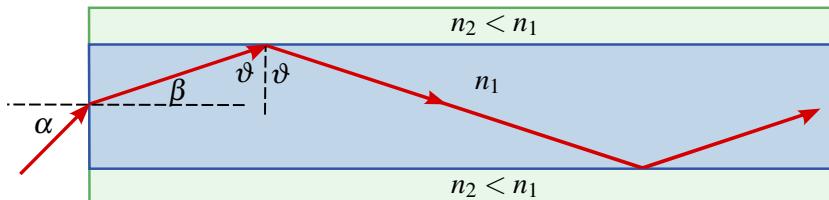
# 9. Optična vlakna

Moderna komunikacijska tehnologija zahteva vedno hitrejši prenos vedno večje količine podatkov. Navadne kovinske vodnike so zato v računalniških in telekomunikacijskih povezavah nadomestila optična vlakna, ki jih odlikujejo majhne izgube, neobčutljivost na elektromagnetne in medsebojne motnje ter zmožnost prenosa izjemno velike količine podatkov. V tem poglavju bomo opisali mehanizme prenosa podatkov po optičnih vodnikih in spoznali omejitve pri prenosu, predvsem disperzijo in izgube, ter načine, kako se z njimi spopadamo.

## 9.1 Planparalelni vodnik

### Geometrijski opis

Klasično pojasnimo delovanje optičnih vlaken s totalnim odbojem na meji med dvema dielektrikoma. Kadar prehaja svetloba iz snovi z večjim lomnim količnikom v sredstvo z manjšim lomnim količnikom, se pri vpadnih kotih, ki so večji od kritičnega kota, totalno odbije.



Slika 9.1: Klasična razlaga valovnega vodnika

Najpreprostejši optični vodnik je planparalelna plast dielektrika, ki je obdana s snovjo z manjšim lomnim količnikom (slika 9.1). Plasti z večjim lomnim količnikom ( $n_1$ ) rečemo sredica, okoliški snovi z lomnim količnikom  $n_2 < n_1$  pa plašč. Žarek potuje po vodniku, če je vpadni kot na mejo med sredico in plaščem  $\vartheta$  večji od kota totalnega odboja  $\vartheta_c$ , za katerega velja

$$\sin \vartheta_c = \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.1)$$

Obstaja torej največji vpadni kot  $\alpha_{\max}$ , pri katerem se vpadna svetloba ujame v vlakno. Z njim povezana je numerična odprtina (apertura) vlakna, ki jo izračunamo kot

$$NA = \sin \alpha_{\max} = n_1 \sin \beta_{\max} = n_1 \sin(\pi/2 - \vartheta_c) = n_1 \cos \vartheta_c = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_c}. \quad (9.2)$$

Upoštevajoč enačbo (9.1) numerično odprtino zapišemo kot

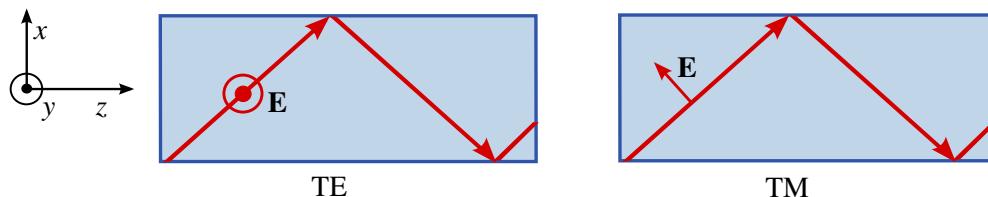
$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (9.3)$$

Razlika med lomnima količnikoma sredice in plašča je navadno majhna, tipično le nekaj stotink, zato je numerična odprtina optičnih vodnikov  $NA \lesssim 0,1$ . Kot, pod katerim lahko vpada svetloba v vodnik (ali vlakno), da se vanj ujame, je tako navadno le nekaj stopinj.

### Valovni opis

Za natančen opis širjenja svetlobe po vodnikih ali vlaknih<sup>1</sup>, ki imajo polmer sredice od nekaj do nekaj deset mikrometrov, geometrijska optika ne zadošča. Rešiti moramo Maxwellove enačbe (enačbe 1.1–1.4) z ustreznimi robnimi pogoji (enačbe 1.9–1.12), kar je za cilindrična vlakna dokaj dolg in zapleten račun. Zato določimo najprej osnovne značilnosti valovanja, ki se širi po planparalelnem vodniku.

Glede na smer polarizacije električne poljske jakosti ločimo dva primera (slika 9.2). Če je smer električne poljske jakosti valovanja vzporedna z mejnima ploskvama (smer  $y$ ), govorimo o transverzalnem električnem (TE) valovanju. V nasprotnem primeru, ko je z mejnima ploskvama vzporedna magnetna poljska jakost in leži električna poljska jakost v ravnini  $xz$ , govorimo o transverzalnem magnetnem (TM) valovanju.



Slika 9.2: Polarizaciji TE (levo) in TM (desno) valovanj v valovnem vodniku

Geometrijskemu žarku, ki pod kotom potuje po sredici in se na njeni meji odbija, ustreza v valovni sliki val, ki ima prečno komponento valovnega vektorja  $k_x$  različno od nič. Ker je valovanje v prečni smeri omejeno na sredico končne debeline (naj bo debelina sredice enaka  $a$ ), lahko  $k_x$  zavzame le diskretne vrednosti. Te so v grobem približno enake  $N\pi/a$ , pri čemer je  $N$  celo število. Pravimo, da vsak  $N$  določa en rod valovanj v vodniku. Po drugi strani obstaja največji  $k_x$ , za katerega približno velja

$$k_{x\max} \approx k_0 \sin \alpha_{\max} = k_0 n_1 \cos \vartheta_c = k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (9.4)$$

Število rešitev za  $k_x$  je tako omejeno in točno določeno, odvisno pa je od razlike lomnih količnikov in od debeline vodnika ozziroma polmra vlakna. V nadaljevanju bomo spoznali, da v optičnih vlaknih en rod vselej obstaja, za razliko od dielektričnih in kovinskih vodnikov, kakršne poznamo iz mikrovalovne tehnike, po katerih se pod določeno frekvenco valovanje ne more širiti. Enorodovna optična vlakna, torej vlakna, po katerih se širi en sam rod, imajo še posebej lepe lastnosti za uporabo v komunikacijskih sistemih.

Povejmo še nekaj o hitrosti valovanja v vodniku. Naj bo  $\beta$  velikost komponente valovnega vektorja vzdolž smeri  $z$  in odvisnost polja od koordinate vzdolž vodnika  $\exp(i\beta z)$ . Po Pitagorovem izreku velikost valovnega vektorja v sredici vodnika zapišemo kot

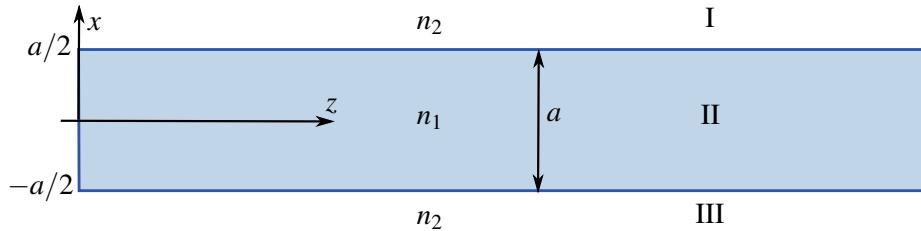
$$k_1 = n_1 \frac{\omega}{c_0} = \sqrt{\beta^2 + k_x^2}. \quad (9.5)$$

Vidimo, da za dano vrednost  $k_x$  zveza med valovnim številom  $\beta$  in krožno frekvenco  $\omega$  ni linearна. Fazna hitrost valovanja  $v_f = \omega/\beta$  je tako odvisna od krožne frekvence in pride do disperzije. Grupna hitrost  $v_g = d\omega/d\beta$  se zaradi nelinearne zveze med  $\beta$  in  $\omega$  razlikuje od fazne hitrosti in njena frekvenčna odvisnost ima pomembne posledice za uporabo vlaken pri prenosu podatkov. Več o tem bomo spoznali v nadaljevanju poglavja.

<sup>1</sup>Dogovorimo se, da besedo vlakno uporabljamo za cilindrične strukture, besedo vodnik pa za planparalelne in njim podobne strukture.

## 9.2 Račun lastnih rodov v planparalelnem vodniku

Poščimo rešitve valovne enačbe v planparalelnem vodniku. To je preprost dvodimenzionalen model optičnega vlakna, ki je sestavljen iz plasti prozornega dielektrika z lomnim količnikom  $n_2$  in plašča z lomnim količnikom  $n_1$ . Zaradi enostavnosti privzamemo, da je plašč na obeh straneh sredice enak. Sredica naj bo debela  $a$ , izhodišče koordinatnega sistema si izberemo na sredini plasti. Ločimo tri območja, kjer rešujemo valovno enačbo: območje II označuje sredico, območji I in III pa sta v plašču nad sredico ozziroma pod njo.



Slika 9.3: K izračunu lastnih rodov v simetričnem planparalelnem vodniku

Krajevni del valovne enačbe, ki jo rešujemo, opisuje Helmholtzova enačba (enačba 1.21)

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n^2(x) k_0^2 \mathbf{E} = 0, \quad (9.6)$$

kjer je  $k_0 = \omega/c$ ,  $n(x)$  pa nezvezno spremeni vrednost ob prehodu iz sredice v plašč. Nastavek za rešitev naj bo oblike

$$\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{e} \psi(x) e^{i\beta z}. \quad (9.7)$$

Omejimo se le na primer TE polarizacije (za izračun lastnih rodov TM polariziranega valovanja glej nalogo 9.2.1). Vstavimo nastavek (enačba 9.7) v enačbo (9.6) in zapišemo

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) \psi = 0 \quad \text{v sredici ozziroma območju II} \quad (9.8)$$

in

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (k_0^2 n_2^2 - \beta^2) \psi = 0 \quad \text{v plašču ozziroma območjih I in III.} \quad (9.9)$$

Iz zveze (enačba 9.5) sledi  $k_0^2 n_1^2 - \beta^2 = k_x^2$ , zato lahko rešitve prve enačbe zapišemo v obliki

$$\psi_{\text{II}}(x) = C \cos(k_x x) + D \sin(k_x x), \quad (9.10)$$

rešitve v plašču pa so oblike

$$\psi_{\text{I}}(x) = A \exp(-\kappa x) + B \exp(\kappa x), \quad \psi_{\text{III}}(x) = F \exp(-\kappa x) + G \exp(\kappa x), \quad (9.11)$$

pri čemer smo vpeljali  $\kappa^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2$ .

Da valovanje ostane ujeto v vlakno, mora biti  $\kappa$  realno število. Le tako namreč dosežemo eksponentno pojemanje električne poljske jakosti z oddaljenostjo od sredice, sicer je valovanje v vseh treh območjih oscilatorno in ni ujeto v vlakno.

Iz zahteve, da sta  $k_x$  in  $\kappa$  realna, sledi pogoj za valovno število  $\beta$

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1. \quad (9.12)$$

Poleg tega zahteva po končnosti rešitve da pogoj, da je v območju I (pri  $x > a/2$ ) koeficient  $B = 0$ , v območju III (pri  $x < -a/2$ ) pa  $F = 0$ . Hitro ugotovimo, da so zaradi simetrije vlakna lastne rešitve lahko le sode ali lihe funkcije.

### Sode rešitve

Poglejmo najprej sode rešitve. V sredici bo različen od nič samo  $C$ , v območjih I in III pa bosta amplitudi enaki in  $A = G$  (slika 9.4 a). Dobimo

$$\psi_I(x) = A \exp(-\kappa x), \quad (9.13)$$

$$\psi_{II}(x) = C \cos(k_x x), \quad (9.14)$$

$$\psi_{III}(x) = A \exp(\kappa x). \quad (9.15)$$

Zvezo med koeficientoma  $A$  in  $C$  določimo z upoštevanjem robnih pogojev. Na meji med sredico in plaščem morata biti tangencialni komponenti električne in magnetne poljske jakosti zvezni (enačbi 1.11 in 1.12). Iz tega izpeljemo pogoj, da se za TE valovanje na meji ohranja amplituda električne poljske jakosti. Pri  $x = a/2$  zapišemo

$$A \exp(-\kappa a/2) = C \cos(k_x a/2). \quad (9.16)$$

Drugi pogoj sledi iz zveze  $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}$ , ki izhaja neposredno iz Maxwellove enačbe (1.2). Ker se na meji ohranja tangencialna komponenta  $\mathbf{H}$ , to je v tem primeru  $H_z$ , se posledično ohranja odvod električne poljske jakosti  $dE_y/dx$ . Pri  $x = a/2$  velja

$$-A\kappa \exp(-\kappa a/2) = -Ck_x \sin(k_x a/2). \quad (9.17)$$

Enačbo za  $k_x$  izpeljemo iz zahteve, da sta gornja robna pogoja hkrati izpolnjena. Izraza za robna pogoja delimo in dobimo sekularno enačbo za sode rešitve

$$\frac{\kappa}{k_x} = \tan \frac{k_x a}{2}. \quad (9.18)$$

Rešitve enačbe so diskretne in vsaki vrednosti  $k_x$  ustreza en sodi rod ozziroma sodi lastni način. Pri tem je zveza med  $\kappa$  in  $k_x$

$$\kappa^2 + k_x^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_2^2). \quad (9.19)$$

### Lihe rešitve

Oglejmo si še lihe rešitve v planparallelnem vodniku. V sredici je od nič različen le  $D$ , polji v plašču pa sta nasprotno enaki in  $A = -G$  (slika 9.4 b). Sledi

$$\psi_I(x) = A \exp(-\kappa x), \quad (9.20)$$

$$\psi_{II}(x) = D \sin(k_x x), \quad (9.21)$$

$$\psi_{III}(x) = -A \exp(\kappa x). \quad (9.22)$$

Z upoštevanjem zveznosti električne poljske jakosti in njenega odvoda na meji med sredico in plaščem zapišemo robna pogoja pri  $x = a/2$

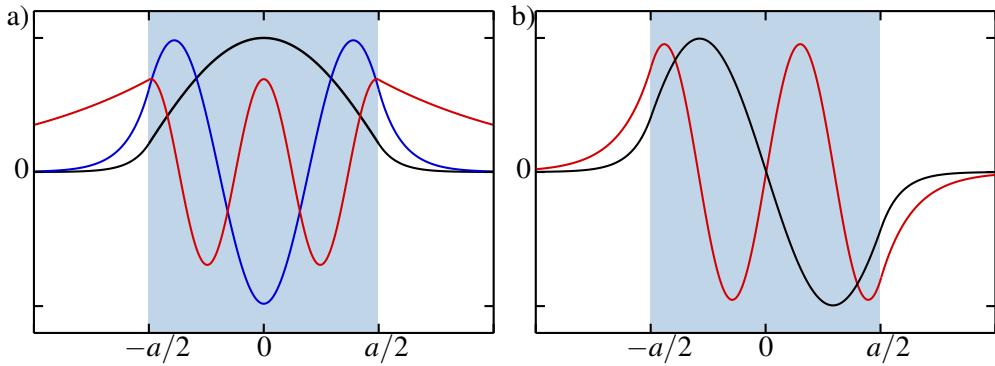
$$A \exp(-\kappa a/2) = D \sin(k_x a/2) \quad (9.23)$$

in

$$-\kappa A \exp(-\kappa a/2) = D k_x \cos(k_x a/2). \quad (9.24)$$

Ustrezna sekularna enačba za lihe rešitve je

$$-\frac{k_x}{\kappa} = \tan \frac{k_x a}{2}. \quad (9.25)$$



Slika 9.4: Prečne oblike električne poljske jakosti za sode (a) in lihe (b) rodove v simetričnem planparalelnem valovnem vodniku. Modra barva označuje sredico, beli del pa plašč vodnika.

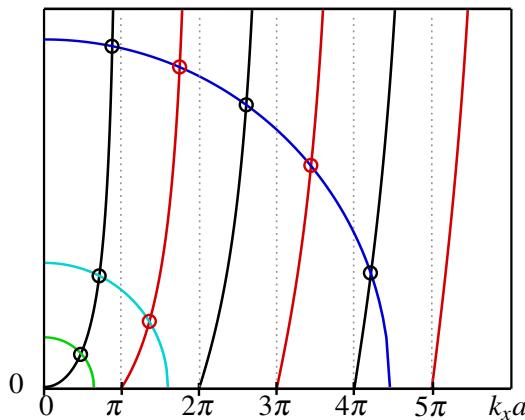


Če ne prej, je bralec ob slikah (9.4) zagotovo opazil podobnost s kvantnim delcem, ujetim v končni enodimensionalni potencialni jami. Svetloba, ujeta v vodnik ali vlakno, ustreza vezanim stanjem delca, numerična odprtina pa je tisti parameter, ki določa globino potencialne Jame. Pri majhnih vrednostih obstaja samo ena rešitev za vezano stanje, pri globlji jami je rešitev več. Podobno kot v kvantni mehaniki tudi v tem primeru ena rešitev za vezano stanje vedno obstaja.

Sekularnih enačb za lastne rodove (enačbi 9.18 in 9.25) ne moremo rešiti analitično. Rešujemo jih numerično, zelo nazorna pa je tudi grafična predstavitev (slika 9.5). Eناčbo za sode rodove (enačba 9.18) pomnožimo s  $k_x a$  in narišemo funkcijo  $k_x a \tan(k_x a/2)$  (črne črte). Eناčbo za lihe rodove (enačba 9.25) preoblikujemo in narišemo  $-k_x a \cot(k_x a/2)$  (rdeče črte). Nato pri danih parametrih  $n_1, n_2, a$  in  $k_0$  narišemo krožnico za  $\kappa a$ , ki sledi iz enačbe (9.19)

$$(\kappa a)^2 + (k_x a)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_2^2) = k_0^2 a^2 N A^2. \quad (9.26)$$

Število presečišč krivulj s krožnico določa število lastnih rodov v vodniku, lega presečišča pa pripadajočo vrednost  $k_x$ . Na sliki so narisane tri krožnice za tri različne debeline vodnika  $a$  (pri istih lomnih količnikih in isti valovni dolžini svetlobe). V najtanjem vodniku (zeleni črta) je presečišče le eno in tak vodnik imenujemo enorodovni vodnik. Z večanjem debeline število lastnih rodov narašča in taki vodniki so večrodovni. Lastni rodovi v večrodovnem vodniku so izmenično sodi in lihi, začenši z osnovnim rodom, ki je vedno sod.



Slika 9.5: K izračunu  $k_x$  v valovnem vodniku za TE polarizacijo. Število presečišč krožnice s krivuljami določa število lastnih rodov v vodniku. Zelena krožnica prestavlja enorodovni vodnik, turkizna dvorodovnega in modra petrodovnega s tremi sodimi in dvema lihima rešitvama.

S slike (9.5) razberemo še eno pomembno lastnost vodnikov. Ne glede na to, kako majhen je polmer krožnice, krožnica vedno seka črno krivuljo. To pomeni, da v še tako tankem vodniku vsaj ena rešitev za  $k_x$  vedno obstaja in ta je vedno soda.

Ocenimo še število lastnih rodov v vodniku. S slike (9.5) vidimo, da je največja možna vrednost  $k_x$  omejena s polmerom krožnice  $k_0 a N A$ , ki ga imenujemo tudi normirana frekvenca  $V$ . Do te vrednosti je po ena rešitev na vsak interval dolžine  $\pi$ , izmenično soda in liha, zato je celotno število rodov za eno polarizacijo

$$N \approx \frac{k_0 a N A}{\pi} = \frac{V}{\pi}. \quad (9.27)$$

Za enorodovni vodnik velja  $V < \pi$  oziroma  $a < \frac{\lambda}{2 N A}$ . Tipičen enorodovni vodnik ima tako debelino  $a \lesssim 5 \mu\text{m}$ , večrodnovni vodnik z okoli 20 rodovi pa  $a \sim 50 \mu\text{m}$ .

**Naloga 9.2.1** Ponovi izračun za TM valovanje in pokaži, da sta sekularni enačbi enaki

$$\frac{\kappa}{k_x} \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 = \tan \frac{k_x a}{2} \quad \text{in} \quad -\frac{k_x}{\kappa} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 = \tan \frac{k_x a}{2}. \quad (9.28)$$

Namig: Zapiši enačbe za magnetno poljsko jakost  $\mathbf{H}$  in upoštevaj ustreerne pogojne.

Podoben račun lahko naredimo tudi za TM valovanje (glej nalogo 9.2.1). Zaradi drugačnih robnih pogojev se sekularni enačbi razlikujeta od tistih za TE polarizacijo. Razlika je v faktorju  $(n_1/n_2)^2$ , ki pa je v tipičnem vodniku zelo blizu ena. Zato se tudi rešitve za prečno komponento  $k_x$  le malo razlikujejo. Bolj pomembna je ugotovitev, da je število dovoljenih rodov za TM polarizacijo enako številu dovoljenih rodov za TE polarizacijo, saj je največji  $k_x$  v obeh primerih določen z enakim polmerom  $V$ . Vse lastne rodove, ki se širijo v danem vodniku, torej zajamemo z opisom TE sodih in lihih ter TM sodih in lihih rodov.

Ugotovili smo, da je električna poljska jakost tudi izven sredice vodnika različna od nič. Poglejmo še, kako je z energijskim tokom. Čeprav se velika večina pretaka po sredici, delež, ki se pretaka po plašču, ni vedno zanemarljiv. To posebej velja za višje rodove. Delež energijskega toka, ki se pretaka po sredici, izračunamo z integralom

$$\Gamma = \frac{\int_{-a/2}^{a/2} j \, ds}{\int_{-\infty}^{\infty} j \, ds}. \quad (9.29)$$

**Naloga 9.2.2** Pokaži, da je razmerje med energijskim tokom  $P_p$ , ki se pretaka po plašču, in energijskim tokom, ki se pretaka po sredici vodnika  $P_s$ , za sode rodove enako

$$\frac{P_p}{P_s} = \frac{n_2}{n_1} \frac{2k_x}{\kappa} \frac{\cos^2(k_x a/2)}{k_x a + \sin(k_x a)}, \quad (9.30)$$

in za lihe rodove

$$\frac{P_p}{P_s} = \frac{n_2}{n_1} \frac{2k_x}{\kappa} \frac{\sin^2(k_x a/2)}{k_x a - \sin(k_x a)}. \quad (9.31)$$

### 9.3 Cilindrično vlakno

Do zdaj smo obravnavali ravninski valovni vodnik. V praksi svetlobo navadno usmerjamo po optičnih vlaknih, ki imajo cilindrično geometrijo. Najpreprostejši primer je cilindrično vlakno, v katerem je lomni količnik cilindrične sredice konstanten in nekoliko večji od lomnega količnika plašča. Navadno je  $n_1 - n_2 \sim 0,001$ . Pogosto se uporablja bolj zapletene konstrukcije, pri katerih se lomni količnik sredice spreminja z oddaljenostjo od osi. Z zapletenejšo geometrijo namreč zmanjšamo disperzijo v vlaknu in s tem povečamo zmogljivost prenašanja velike količine podatkov na dolge razdalje – najzmogljivejša komercialna vlakna zmorejo prenos več deset terabitov na sekundo<sup>2</sup>.

Račun za širjenje svetlobe po cilindričnem vlaknu s homogeno sredico je podoben kot za planparalelni vodnik, vendar je precej bolj zapleten. V cilindrični geometriji namreč ni delitve na čiste električne in magnetne transverzalne valove, saj so robni pogoji sklopljeni. Na splošno se rešitve izražajo v obliki kombinacij Besslovih funkcij. Izkaže se, da je osnovni rod, ki se širi po cilindričnem vlaknu, po obliki zelo podoben osnovnemu Gaussovemu snopu, zato je sklopitev laserskih snopov v optična vlakna zelo učinkovita. Tudi v cilindričnih vlaknih obstaja končno število lastnih rodov, ki je odvisno od polmera sredice in lomnih količnikov sredice in plašča. Če je polmer zadosti majhen (razlika lomnih količnikov navadno je), obstaja le en lastni rod in optično vlakno je enorodovno. Sicer je vlakno večrodonovo.

#### Valovna enačba v cilindričnem vlaknu

Točen izračun za rodove v cilindričnem vlaknu presega okvire te knjige, zato si oglejmo le izhodiščne enačbe in rešitve.<sup>3</sup> Za jakost električnega in magnetnega polja velja Helmholtzova enačba (enačba 1.21)

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n^2(r) k_0^2 \mathbf{E} = 0, \quad (9.32)$$

pri čemer je  $n(r < a) = n_1$  lomni količnik sredice in  $n(r > a) = n_2$  lomni količnik plašča, ki je dovolj debel, da njegova debelina ne vpliva na potovanje svetlobe.  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{H}$  sta vektorja in imata po tri komponente, ki pa so med seboj odvisne. Izračunajmo naprej  $E_z$  z nastavkom

$$E_z = R(r) e^{iv\varphi} e^{i\beta z}, \quad (9.33)$$

pri čemer je  $v$  celo število zaradi zahteve po enoličnosti rešitve pri spremembi kota za  $2\pi$ . Za  $R(r)$  v sredici vlakna velja enačba

$$r^2 R(r)'' + r R(r)' + (k_s^2 r^2 - v^2) R(r) = 0, \quad (9.34)$$

kjer je

$$k_s^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2, \quad (9.35)$$

in v plašču

$$r^2 R(r)'' + r R(r)' + (-\kappa^2 r^2 - v^2) R(r) = 0, \quad (9.36)$$

kjer je

$$\kappa^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2. \quad (9.37)$$

<sup>2</sup>Za doprinos k razvoju in uporabi optičnih vlaken je leta 2009 Charles K. Kao prejel Nobelovo nagrado.

<sup>3</sup>Točen izračun lahko bralec poišče npr. v C. C. Davis, *Lasers and Electro-optics*, Cambridge University Press.

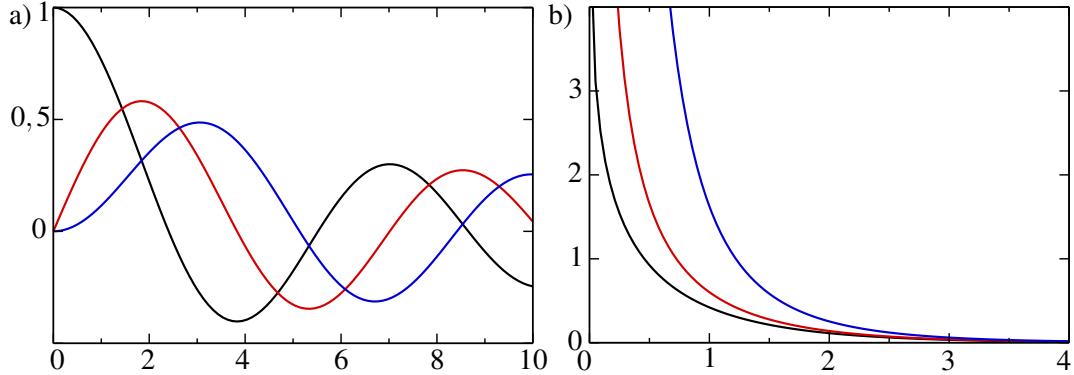
V enačbah (9.34) in (9.36) prepoznamo Besslovo diferencialno enačbo. Upoštevajoč le funkcije, ki na izbranem območju ne divergirajo, zapišemo rešitve v sredici kot

$$E_z(r, \varphi, z) = AJ_v(k_s r) \sin(v\varphi)e^{i\beta z} \quad \text{in} \quad H_z(r, \varphi, z) = BJ_v(k_s r) \cos(v\varphi)e^{i\beta z}. \quad (9.38)$$

Podobno zapišemo tudi rešitve v plašču

$$E_z(r, \varphi, z) = CK_v(\kappa r) \sin(v\varphi)e^{i\beta z} \quad \text{in} \quad H_z(r, \varphi, z) = DK_v(\kappa r) \cos(v\varphi)e^{i\beta z}. \quad (9.39)$$

Pri tem so  $A, B, C$  in  $D$  konstante,  $J_v(x)$  je Besslova funkcija prve vrste reda  $v$ ,  $K_v(x)$  pa je modificirana Besslova funkcija druge vrste reda  $v$  (slika 9.6).



Slika 9.6: Besslove funkcije: (a) Besslove funkcije prve vrste  $J_0(x)$  (črna),  $J_1(x)$  (rdeča) in  $J_2(x)$  (modra), ki predstavljajo oblike rešitev v sredici vlakna, in (b) modificirane Besslove funkcije druge vrste  $K_0(x)$  (črna),  $K_1(x)$  (rdeča) in  $K_2(x)$  (modra), ki predstavljajo rešitev v plašču vlakna.

Ko enkrat poznamo komponenti  $E_z$  in  $H_z$ , lahko z uporabo Maxwellovih enačb izračunamo še preostale komponente. Nato z upoštevanjem robnih pogojev zapišemo štiri enačbe za pet neznank ( $A, B, C, D$  in  $\beta$ ), tako da ostane ena spremenljivka (amplituda polja) prosta. Na ta način izračunamo celotni jakosti električnega in magnetnega polja v vlaknu in podobno kot pri valovnem vodniku tukaj zapišemo sekularno enačbo, ki jo moramo rešiti numerično. Pri vsakem  $v$  obstaja več rešitev, zato lastne rodove označujemo s parom indeksov  $v$  in  $m$ , npr. TE<sub>01</sub> ali HE<sub>31</sub>.

### TE in TM rodovi

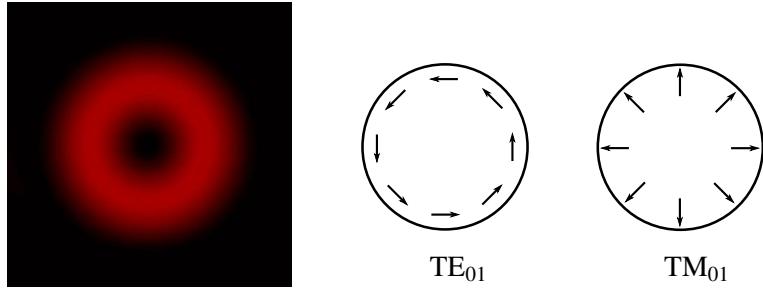
Najprej si oglejmo rešitve, pri katerih je  $v = 0$  in so tako neodvisne od kota  $\varphi$ . V klasični sliki so to žarki, ki potujejo po osi vlakna. Iz robnih pogojev sledi, da gre za transverzalne TE rodove, za katere velja  $E_z = 0$ ,  $E_r = 0$  in  $E_\varphi \propto J_1(k_s r)$ . Električno poljsko jakost za TE zapišemo kot

$$\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_\varphi J_1(k_s r). \quad (9.40)$$

Podobno lahko prepoznamo tudi TM rodove, pri katerih je  $H_z = 0$ ,  $H_r = 0$  in  $H_\varphi \propto J_1(k_s r)$ . Ustrezna električna poljska jakost za TM rodove je

$$\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_r J_1(k_s r). \quad (9.41)$$

Amplitudi električne poljske jakosti sta za TE in TM rodove enaki, zato sta enaki tudi sliki gostote svetlobnega toka (slika 9.7). Opazimo, da je v osi vlakna gostota svetlobnega toka enaka nič, zato sklepamo, da to niso osnovni načini širjenja svetlobe po cilindričnem vlaknu.

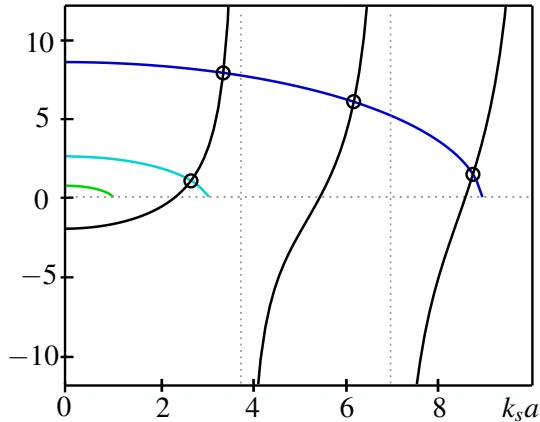


Slika 9.7: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za rodova  $\text{TE}_{01}$  in  $\text{TM}_{01}$

Podobno kot smo zapisali sekularno enačbo v valovnem vodniku (enačbi 9.18 in 9.25), tudi tukaj zapišemo enačbo za dovoljene vrednosti  $k_s$ . Ob približku, da se lomna količnika sredice in plašča le malo razlikujeta, je poenostavljena enačba za TE valovanje

$$-k_s a \frac{J_0(k_s a)}{J_1(k_s a)} = \kappa a \frac{K_0(\kappa a)}{K_1(\kappa a)}, \quad (9.42)$$

pri čemer velja  $\kappa^2 + k_s^2 = (NA)^2 k_0^2$ . Zaporedne rešitve enačbe ustrezajo rodovom  $\text{TE}_{0m}$ . Če želimo izračunati še valovne vektorje za rodove  $\text{TM}_{0m}$ , moramo levo stran enačbe (9.42) pomnožiti z  $(n_1/n_2)^2$ . Ker je ta faktor približno enak ena, se rešitve enačb med seboj le malo razlikujejo.



Slika 9.8: K izračunu prečnih komponent valovnega vektorja  $k_s$  v cilindričnem vlaknu za TE polarizacijo. Leva stran sekularne enačbe je narisana s črno, desna stran pa za tri različne vrednosti parametra  $V = k_0 a N A$ .

Zapisano sekularno enačbo rešujemo numerično, lahko pa se je lotimo grafično in na sliki (9.8) poiščemo presečišča krivulj. Na sliki je leva stran enačbe prikazana s črno barvo, desna pa za tri različne vrednosti  $V = k_0 a N A$ . Pri velikem  $V$  (modra črta) ima sistem tri rešitve, pri srednjem  $V$  (turkizna črta) eno rešitev, pri majhnem  $V$  (zelena črta) pa se krivulji ne sekata. To pomeni, da pri dovolj majhnem polmeru  $a$  TE rod ne obstaja.

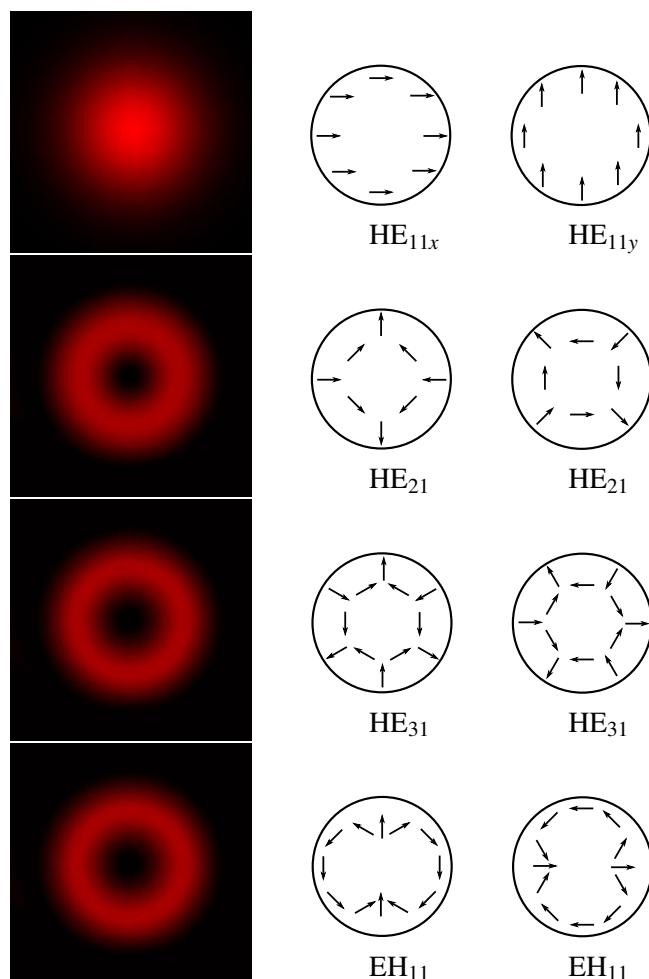
Zapišimo to ugotovitev še matematično. Desna stran enačbe da realne rešitve za  $k_s a \leq V$ . Po drugi strani pa leva stran enačbe postane pozitivna šele pri  $J_0(k_s a) = 0$ , to je pri  $k_s a = 2,405$ . Da ima tak sistem vsaj eno rešitev, mora veljati  $V > 2,405$ . Polmer, pri katerem se  $\text{TE}_{01}$  (ali  $\text{TM}_{01}$ ) valovanje z dano valovno dolžino sploh širi po vlaknu, je torej navzdol omejen z

$$a \geq \frac{2,405}{k_0 N A}. \quad (9.43)$$

### Hibridni HE in EH rodovi

Poglejmo zdaj rešitve, pri katerih je  $v \neq 0$ . V tem primeru je vseh šest komponent električnega in magnetnega polja valovanja različnih od nič in vsi rodovi imajo tudi komponento v smeri  $z$ . Take rodove imenujemo hibridni rodovi in jih označimo s HE, če je  $E_z$  razmeroma velik ali vsaj primerljiv z  $E_r$  in  $E_\phi$ , oziroma z EH, če je  $H_z$  po velikosti primerljiv s  $H_r$  in  $H_\phi$  ali večji od njiju.

Sekularna enačba za hibridne rodove je precej bolj zapletena in je ne bomo zapisali. Oglejmo si le njihovo obliko (slika 9.9). Najpomembnejši hibridni rod je  $\text{HE}_{11}$ , ki je sorazmeren z  $J_0(k_s r)$  in zato v središču različen od nič. To je osnovni rod, za katerega rešitev sekularne enačbe vedno obstaja in se zato širi po še takoj tankem vlaknu.



Slika 9.9: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za rodove  $\text{HE}_{11}$ ,  $\text{HE}_{21}$ ,  $\text{HE}_{31}$  in  $\text{EH}_{11}$

Po obliki je osnovni  $\text{HE}_{11}$  rod zelo podoben Gaussovemu profilu  $\exp(-r^2/w^2)$ , zato ga lahko razmeroma dobro opišemo z Gaussovim približkom. Pri tem efektivni polmer snopa  $w$  izračunamo po Marcusejevi formulji<sup>4</sup>

$$w = \left(0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6}\right)a, \quad (9.44)$$

pri čemer je  $V = k_0 a N A$ . Podobnost profila osnovnega  $\text{HE}_{11}$  roda z Gaussovo funkcijo omogoča zelo dobro sklopitev Gaussovih snopov, ki izhajajo iz laserja, v cilindrična vlakna.

<sup>4</sup>D. Marcuse, Bell Syst. Tech. J. 56, 703 (1977).

Na sliki (9.9) je poleg osnovnega  $\text{HE}_{11}$  roda še nekaj primerov višjih rodov. Opazimo, da imajo vsi rodovi, razen osnovnega, v osi vlakna minimum. Poleg tega opazimo tudi podobnost med oblikami posameznih rodov, do katere pride zaradi majhne razlike med lomnima količnikoma sredice in plašča ( $n_1 \approx n_2$ ). V takem primeru se sekularne enačbe poenostavijo, nekateri rodovi so med seboj degenerirani in dajo enako rešitev. Poleg rodov z enako obliko in različno polarizacijo so tako med seboj degenerirani še  $\text{HE}_{v+1,m}$  in  $\text{EH}_{v-1,m}$  rodovi. Degenerirane rodove lahko združimo v linearne kombinacije teh valov in nastanejo pretežno linearno polarizirani LP rodovi.

### LP rodovi

Za praktično uporabo so najpomembnejši linearno polarizirani (LP) rodovi. Taki rodovi niso točne rešitve valovne enačbe v cilindrični geometriji, ampak jih zapišemo kot linearno kombinacijo lastnih rodov, ki so zaradi majhne razlike med lomnima količnikoma sredice in plašča degenerirani. Tudi te rodove označimo z dvema indeksoma: prvi določa število azimutalnih vozlov, drugi pa število radialnih vrhov. Poglejmo nekaj primerov (slika 9.10).

Osnovni  $\text{LP}_{01}$  je kar približno enak osnovnemu  $\text{HE}_{11}$  rodu. Električna poljska jakost je

$$\mathbf{E}_{\text{LP}01} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_0(k_s a), \quad (9.45)$$

saj ima dve možni smeri polarizacije. Na splošno so  $\text{LP}_{0m}$  zelo podobni rodovom  $\text{HE}_{1m}$ .

Višje rodove, na primer  $\text{LP}_{11}$  sestavimo kot linearno kombinacijo  $\text{TE}_{01}$  ali  $\text{TM}_{01}$  in  $\text{HE}_{21}$ . Električna poljska jakost v  $\text{LP}_{11}$  je tako

$$\mathbf{E}_{\text{LP}11} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_1(k_s a) \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (9.46)$$

kar opisuje štiri različne oblike rodov  $\text{LP}_{11}$ .

Tudi  $\text{LP}_{21}$  rodovi, ki nastanejo kot kombinacija  $\text{HE}_{31}$  in  $\text{EH}_{11}$  rodov, imajo štiri oblike

$$\mathbf{E}_{\text{LP}21} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_2(k_s a) \begin{Bmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{Bmatrix}. \quad (9.47)$$

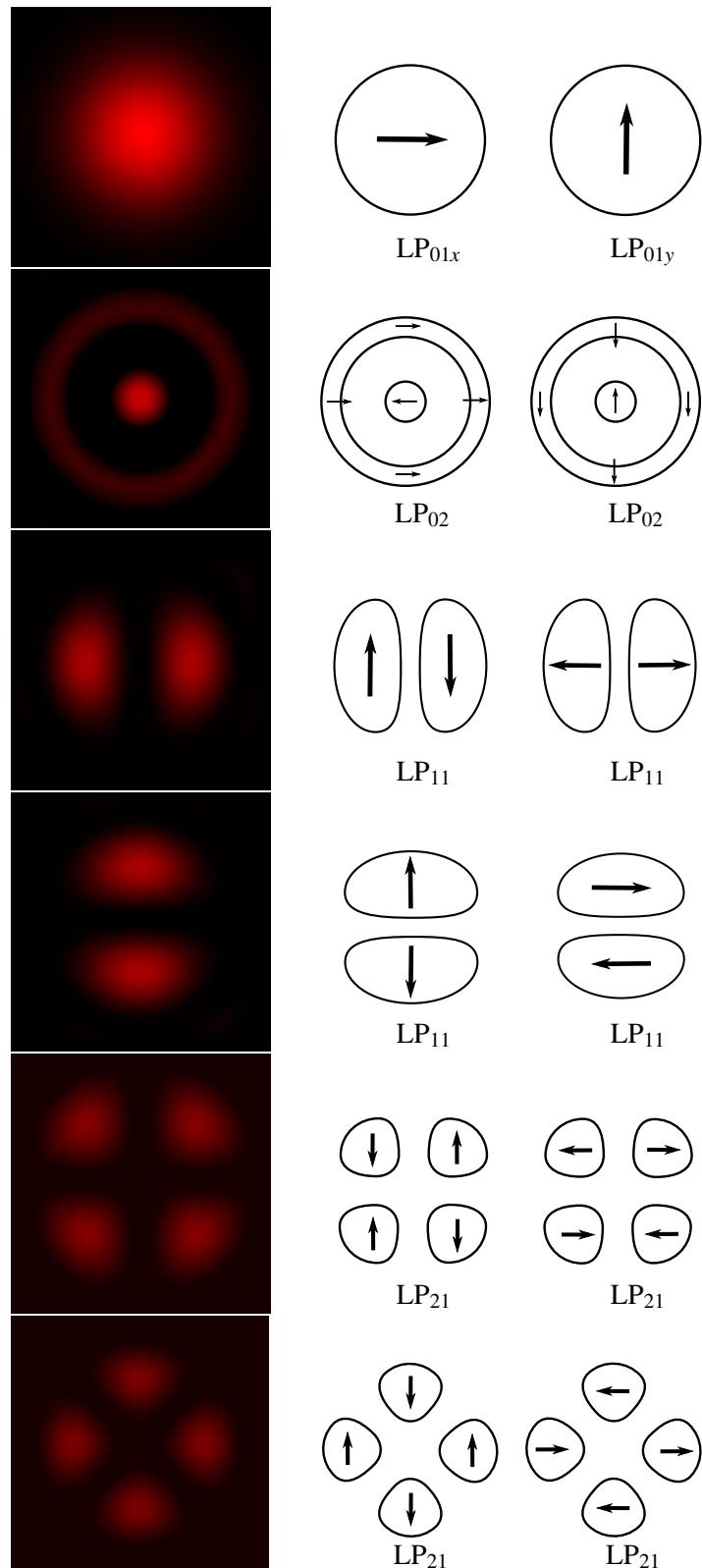
Linearno polarizirani LP rodovi imajo precejšnjo uporabno vrednost. To so namreč rodovi, ki jih v vlaknu vzbudimo, ko nanj posvetimo s polarizirano lasersko svetlobo. Zavedati pa se moramo, da to niso lastni rodovi vlakna, ampak njihove linearne kombinacije, ki po vlaknu potujejo z malenkost različnimi hitrostmi. Polarizacija svetlobe se zato vzdolž vlakna ne ohranja povsem.



Število rodov v večrodnem cilindričnem vlaknu pri izbrani normirani frekvenci  $V = k_0 a N A$  lahko približno ocenimo z uporabo asimptotičnega razvoja Besslovih funkcij za velike argumente. Približna ocena vključuje vse dovoljene rešitve pri vsaki vrednosti  $V$  in dve polarizaciji. To vodi do rezultata

$$N = \frac{4V^2}{\pi^2}. \quad (9.48)$$

V vlaknu s polmerom sredice  $20 \mu\text{m}$  in numerično aperturo  $0,2$  se tako pri valovni dolžini  $1 \mu\text{m}$  lahko širi 256 rodov.



Slika 9.10: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za približno linearne rodove  $LP_{01}$ ,  $LP_{02}$ ,  $LP_{11}$  in  $LP_{21}$ .

### Cilindrično vlakno s paraboličnim profilom lomnega količnika

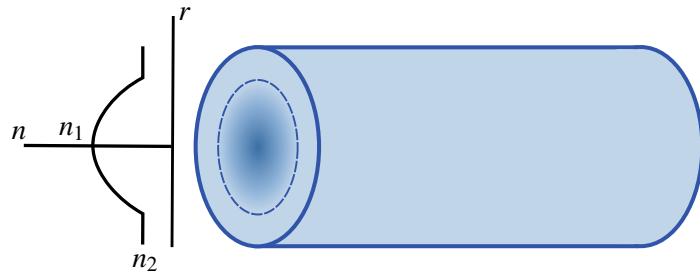
Čeprav je račun lastnih načinov v cilindričnem vlaknu zapleten, lahko razmeroma enostavno poiščemo rešitve za vlakno, v katerem je dielektrična konstanta kvadratna funkcija radialne koordinate  $r$ .

$$\epsilon(r) = \epsilon_1 - Cr^2, \quad (9.49)$$

pri čemer je sprememba navadno majhna. Zapišemo še enačbo z lomnimi količniki in vpeljemo brezdimenzijski parameter  $\Delta$

$$n^2(r < a) = n_1^2 - \Delta^2 \frac{r^2}{a^2}, \quad (9.50)$$

pri čemer  $a$  označuje polmer sredice vlakna. Enačbo lahko tudi razvijemo za majhno razliko  $\Delta$  in za vse smiselne vrednosti  $r$  ima tudi lomni količnik parabolični profil. Parabolična sredica je seveda omejena, okoli nje pa je plašč s konstantnim lomnim količnikom  $n_2 \approx n_1 - \Delta^2/2n_1$  (slika 9.11). Tipičen polmer sredice  $a$  je nekaj deset mikrometrov, plašča pa približno petkrat toliko.



Slika 9.11: Parabolični profil lomnega količnika sredice zmanjša disperzijo v vlaknu. Plašč je praviloma bistveno debelejši od sredice vlakna.

Električno poljsko jakost za izbrano polarizacijo zapišemo v obliki

$$E = E_0 \psi(x, y) e^{i\beta z - i\omega t}. \quad (9.51)$$

Pri tem smo zanemarili, da zaradi odvisnosti od prečnih koordinat in pogoja  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  polje ne more imeti povsod iste smeri; za bolj natančen račun bi morali zapisati enačbo za vektorsko polje. Vstavimo približni nastavek (enačba 9.51) in krajevno odvisnost lomnega količnika (enačba 9.50) v valovno enačbo (enačba 1.13)

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + \left[ k_0^2 \left( n_1^2 - \Delta^2 \frac{r^2}{a^2} \right) - \beta^2 \right] \psi = 0. \quad (9.52)$$

Rešitve lahko zapišemo v obliki

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y), \quad (9.53)$$

od koder sledita dve neodvisni enačbi

$$X'' - \frac{k_0^2 \Delta^2}{a^2} X x^2 - \lambda_1 X = 0 \quad \text{in} \quad Y'' - \frac{k_0^2 \Delta^2}{a^2} Y y^2 - \lambda_2 Y = 0, \quad (9.54)$$

pri čemer sta  $\lambda_1$  in  $\lambda_2$  konstanti. Opazimo, da sta enačbi popolnoma enaki enačbama za krajevni del lastnih funkcij harmonskega oscilatorja v kvantni mehaniki. Rešitev posamezne enačbe je tako produkt Gaussove in Hermitove funkcije

$$X_n(x) = e^{-\xi^2 x^2/2} H_n(\xi x), \quad (9.55)$$

pri čemer je  $\xi = \sqrt{k_0 \Delta / a}$ .

**Naloga 9.3.1** Uporabi nastavek (enačba 9.55) in pokaži, da reši enačbo (9.54). Pri tem si pomagaj z diferencialno enačbo za Hermitove polinome

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n \right) H_n(x) = 0. \quad (9.56)$$

Lastne vrednosti enačbe so oblike

$$\beta_{mn}^2 = n_1^2 k_0^2 \left( 1 - \frac{2\Delta}{k_0 n_1^2 a} (m+n+1) \right). \quad (9.57)$$

Drugi člen v oklepaju je navadno zelo majhen, zato lahko izraz razvijemo in

$$\beta_{mn} = n_1 k_0 \left( 1 - \frac{\Delta}{k_0 n_1^2 a} (m+n+1) \right) = n_1 k_0 - \frac{\Delta(m+n+1)}{n_1 a}. \quad (9.58)$$

Ob privzetku, da je parameter  $\Delta$  neodvisen od krožne frekvence, je grupna hitrost

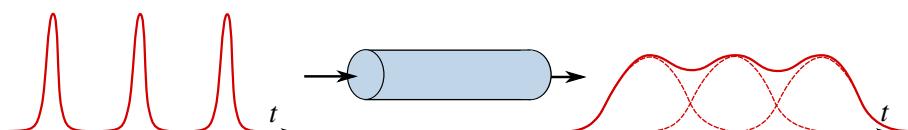
$$v_g = \left( \frac{d\beta_{mn}}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c_0}{n_1} \quad (9.59)$$

in torej enaka za vse rodove. To je pomembna značilnost vlakna s paraboličnim profilom lomnega količnika. V dejanskem vlaknu je seveda taka odvisnost mogoča le v omejenem območju sredice, zato je tudi gornja analiza le približna in velja dobro za tiste rodove, ki se ne raztezajo dosti izven sredice.

Neodvisnost grupne hitrosti od roda je praktično zelo pomembna. Grupna hitrost namreč določa čas potovanja svetlobnega sunka, ki lahko predstavlja en bit informacije. Če se po vlaknu širi več rodov z različnimi grupnimi hitrostmi, se sunek po prehodu skozi vlakno razširi, kar – kot bomo podrobnejše videli v naslednjem razdelku – omejuje uporabno dolžino vlakna. Temu se sicer lahko izognemo z uporabo enorodovnih vlaken, ki pa so dražja, poleg tega morata divergenca in polmer svetlobnega snopa natančno ustrezati značilnostim enorodovnega vlakna, da se izognemo izgubam. Zato se za krajše povezave (do nekaj 100 m) uporabljo večrodovna vlakna, ki imajo sredico s približno paraboličnim profilom lomnega količnika.

## 9.4 Disperzija

Pri prenosu velike količine podatkov na daljavo je zelo pomembno, da se oblika svetlobnih sunkov, ki prenašajo informacijo, čim bolj ohranja. Na obliko sunka močno vpliva disperzija, to je odvisnost fazne in grupne (skupinske) hitrosti valovanja od krožne frekvence. Zaradi disperzije se kratki sunki, ki potujejo po vlaknu, podaljšajo in tako omejujejo količino informacije, ki jo lahko prenašamo po vlaknu dane dolžine. Največja količina vhodnih podatkov na časovno enoto je kar obratno sorazmerna z dolžino izhodnih sunkov svetlobe.



Slika 9.12: Zaradi disperzije se sunki svetlobe, ki potujejo skozi vlakno, podaljšajo, zato jih na izhodu iz vlakna ne moremo več ločiti.

Pri potovanju svetlobe po optičnih vlaknih poznamo tri vrste disperzije: rodovno, materialno in valovodno. V večrodonih vlaknih je povsem prevladujoča rodovna disperzija, ki je posledica dejstva, da se različni rodovi po vlaknu širijo z različnimi hitrostmi. V enorodonih vlaknih rodovne disperzije ni, zato prideta do izraza materialna disperzija, ki se pojavi zaradi odvisnosti lomnega količnika vlakna od valovne dolžine svetlobe, in valovodna disperzija, ki se pojavi zaradi nelinearne zveze med valovnim številom  $\beta$  in krožno frekvenco valovanja.

### Rodovna disperzija

Na primeru planparalelnega vodnika smo pokazali, da vsaki rešitvi sekularnih enačb (enačbi 9.18 in 9.25) ustreza en lastni rod v vlaknu. Ker se vrednosti  $k_x$  za različne rodove med seboj razlikujejo in so posledično vrednosti  $\beta$  za vsak rod drugačne, se posamezni rodovi po vlaknu širijo z različnimi hitrostmi. Kratek sunek svetlobe, sestavljen iz več različnih rodov, se tako po prehodu skozi vlakno razdeli na posamezne delne sunke oziroma se efektivno podaljša. Izračunajmo razliko med časom, ki ga za širjenje po vlaknu dane dolžine potrebuje osnovni rod, in časom, ki ga za isto razdaljo potrebuje zadnji še dovoljeni rod.

Osnovni rod določa prva rešitev sekularne enačbe in je zato pripadajoča vrednost  $k_x$  zelo majhna oziroma v približku  $k_s \approx 0$ . Ustrezno valovno število je po enačbi

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 n_1^2 - k_x(\omega)^2} \quad (9.60)$$

kar približno enako  $\beta_0 \approx k_0 n_1$ . Za zadnji še dovoljeni rod velja  $k_x a \approx V$  in  $\beta_N \approx k_0 n_2$ , pri čemer je  $n_2$  lomni količnik plašča. Zapišemo še grupno hitrost, s katero potujejo sunki svetlobe po vlaknu

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}. \quad (9.61)$$

Za prehod vlakna z dolžino  $L$  potrebuje osnovni rod

$$t_0 = \frac{L}{v_{g0}} = L \frac{d\beta_0}{d\omega} = L \frac{n_1}{c_0}, \quad (9.62)$$

zadnji rod pa

$$t_N = \frac{L}{v_{gN}} = L \frac{d\beta_N}{d\omega} = L \frac{n_2}{c_0}. \quad (9.63)$$

Podaljšanje sunka zaradi rodovne disperzije je potem

$$\tau \approx \frac{L}{c_0} (n_1 - n_2). \quad (9.64)$$

Največja frekvenca modulacije vhodnega signala, pri kateri izhodne sunke še zaznamo ločeno, je približno obratno sorazmerna z dolžino izhodnih sunkov. Za 1 km dolgo vlakno z  $\Delta n = 0,05$  je tako modulacijska frekvenca oziroma količina podatkov v časovni enoti le okoli 10 MHz. Čeprav lahko disperzijo zmanjšamo s paraboličnim profilom lomnega količnika, so večrodonna vlakna za prenos podatkov na dolge razdalje praktično neuporabna.



Med rodovno disperzijo uvrščamo tudi polarizacijsko disperzijo, do katere pride zaradi različnih hitrosti valovanj z različnima polarizacijama. V idealnem cilindričnem vlaknu potujeta obe polarizaciji z enako hitrostjo. V realnem vlaknu pa pride na nečistočah in asimetrijah v vlaknu do različnih hitrosti za različni polarizaciji. Ker so nečistoče slučajno in neodvisno razporejene, tako disperzijo zelo težko odpravimo.

### Materialna disperzija

Optična vlakna so navadno narejena iz stekla, katerega lomni količnik je odvisen od valovne dolžine svetlobe. Zaradi tako imenovane materialne disperzije različne spektralne komponente svetlobnega sunka po vlaknu potujejo z različnimi hitrostmi in sunek se po prehodu skozi vlakno podaljša. Pri obravnavi se omejimo na enorodovna vlakna, v katerih rodovne disperzije ni.

Ker je sunek svetlobe končno dolg, je končna tudi njegova spektralna širina  $\Delta\lambda = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ . Dolžino sunka  $\tau$  po prehodu skozi vlakno dolžine  $L$  približno zapišemo kot

$$\tau = \frac{dt}{d\lambda} \Delta\lambda = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{L}{v_g} \right) = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda} \left( L \frac{d\beta}{d\omega} \right). \quad (9.65)$$

Za enorodovno vlakno velja  $k_x \approx 0$  in  $\beta \approx n_1 \omega / c_0$ , pri čemer valovodne disperzije zaenkrat ne upoštevamo. Velja

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{n_1}{c_0} + \frac{\omega}{c_0} \frac{dn_1}{d\omega} = \frac{n_1}{c_0} - \frac{\lambda}{c_0} \frac{dn_1}{d\lambda}, \quad (9.66)$$

od koder sledi

$$\tau = \Delta\lambda L \left( -\frac{\lambda}{c_0} \frac{d^2 n_1}{d\lambda^2} \right). \quad (9.67)$$

Če vpeljemo  $D_m$  kot koeficient materialne disperzije

$$D_m = -\frac{\lambda}{c_0} \frac{d^2 n_1}{d\lambda^2}, \quad (9.68)$$

zapišemo dolžino sunka po prehodu skozi vlakno kot

$$\tau = |D_m| L \Delta\lambda. \quad (9.69)$$

Koeficient disperzije navadno izrazimo v enotah ps/nm km, njegova vrednost pa je lahko pozitivna ali negativna, zato smo v končnem izrazu za dolžino sunka dodali absolutno vrednost. V snoveh, ki jih uporabljamo za izdelavo optičnih vlaken, je  $D_m \sim 10$  ps/nm km, lahko pa seže tudi do več 100 ps/nm km, odvisno seveda od valovne dolžine in izbrane snovi.

Materialno disperzijo lahko zmanjšamo na več načinov. Lahko uporabimo čim bolj enobarven vir svetlobe, da zmanjšamo  $\Delta\lambda$ . Za izbrano snov lahko celo izberemo valovno dolžino, pri kateri je koeficient materialne disperzije enak nič. Za  $\text{SiO}_2$  je to pri okoli 1300–1500 nm, odvisno od dopiranja stekla. Še najbolj uporabna je rešitev, pri kateri z materialno disperzijo izničimo vpliv valovodne disperzije in na ta način zmanjšamo skupno disperzijo v vlaknu.

### Valovodna disperzija

Spomnimo se, da v optičnem vodniku velja nelinearna zveza med prečno ( $k_x$ ) in vzdolžno ( $\beta$ ) komponento valovnega vektorja (enačba 9.60). Pri tem  $k_x$  izračunamo numerično iz sekularne enačbe, rešitev pa je odvisna od valovne dolžine svetlobe. Tudi v cilindričnih vlaknih je valovno število  $\beta$  nelinearna funkcija krožne frekvence, zato pride do disperzije. Izhajamo iz zveze (enačba 9.65)

$$\tau = \frac{dt}{d\lambda} \Delta\lambda = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda} \left( L \frac{d\beta}{d\omega} \right). \quad (9.70)$$

Upoštevamo zvezo med valovno dolžino in krožno frekvenco in za podaljšanje začetnega kratkega sunka dobimo

$$\tau = -\frac{\lambda^2}{2\pi c_0} \frac{d^2\beta}{d\lambda^2} L \Delta\lambda. \quad (9.71)$$

Ko vpeljemo  $D_v$  kot koeficient valovodne disperzije

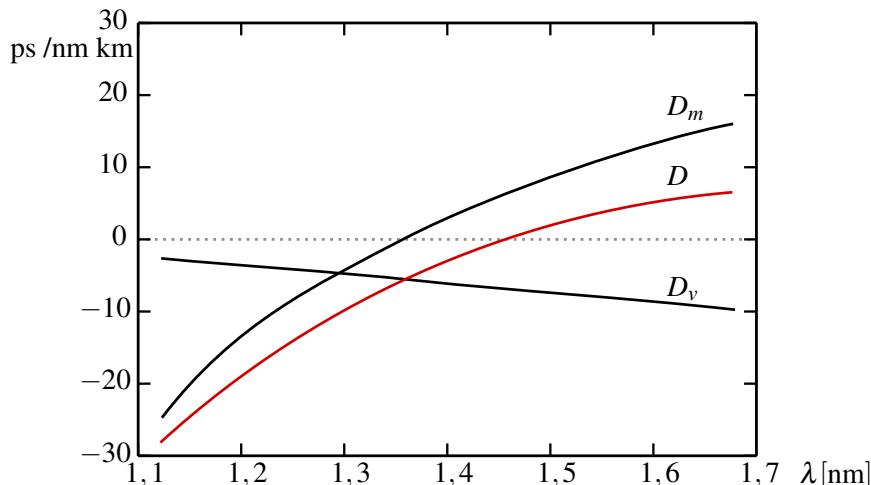
$$D_v = -\frac{\lambda^2}{2\pi c_0} \frac{d^2\beta}{d\lambda^2}, \quad (9.72)$$

se izraz za dolžino sunka poenostavi v

$$\tau = |D_v| L \Delta\lambda. \quad (9.73)$$

Koeficient valovodne disperzije je praviloma najmanjši,  $D_v \sim 1\text{--}10 \text{ ps/nm km}$ . Znaten postane v enorodovnih vlaknih v območju, kjer je materialna disperzija zelo majhna ali celo enaka nič. V vlaknih s homogeno sredico se valovodni disperziji ne moremo izogniti, lahko pa jo pri dani valovni dolžini približno izničimo z materialno (slika 9.13).

Ker ima sunek svetlobe vedno neko končno spektralno širino, disperzije v optičnem vlaknu nikoli ne moremo povsem odpraviti. Pri celotni disperziji 5 ps/nm km in spektralni širini 1 nm znaša v 100 km dolgem vlaknu najvišja frekvenca modulacije vhodnega signala, ki ga na izhodu še lahko razločimo, okoli 2 GHz. V nadaljevanju bomo videli, da je pri prenosu podatkov v vlaknih poglavitni omejujoči faktor ravno disperzija in ne absorpcija.



Slika 9.13: Odvisnost koeficientov disperzije od valovne dolžine v  $\text{SiO}_2$  vlaknu.  $D_m$  je koeficient materialne disperzije,  $D_v$  valovodne,  $D$  pa je vsota obeh. Pri valovni dolžini okoli 1450 nm se materialna in valovodna disperzija odštejeta in skupna disperzija je praktično enaka nič.



Na valovodno disperzijo je mogoče vplivati tudi s konstrukcijo vlakna. Pokazali smo že, da v idealnem primeru v vlaknu s paraboličnim profilom lomnega količnika disperzije ni. V praksi je sredica sestavljena iz več plasti z različnimi lomnimi količniki in različnimi debelinami, s čimer se prispevek valovodne disperzije spremeni. Na ta način lahko položaj ničle celotne disperzije premaknemo k valovni dolžini izvora oziroma k valovni dolžini, pri kateri je v vlaknu najmanj absorpcije in izgub.

## 9.5 \*Potovanje kratkega sunka po enorodovnem vlaknu

### Podaljšanje sunka zaradi disperzije

Poglejmo si podrobneje, kako po enorodovnem vlaknu ali drugem sredstvu z disperzijo potuje kratek sunek valovanja z dano začetno obliko. Sunek zapišemo kot

$$E(x, y, z, t) = \psi(x, y) a(z, t), \quad (9.74)$$

kjer je  $\psi(x, y)$  lastna rešitev prečnega dela valovne enačbe, ki določa zvezo  $\beta(\omega)$ . Funkcija  $a(z, t)$  opisuje obliko in potovanje sunka v smeri  $z$ . Pri  $z = 0$  jo razvijemo po krožnih frekvencah z ustreznimi amplitudnimi faktorji

$$a(0, t) = \int \tilde{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (9.75)$$

Ko sunek potuje vzdolž osi  $z$ , vsaki komponenti pripisemo ustrezen fazni faktor  $i\beta(\omega)z$ . Tako velja

$$a(z, t) = \int \tilde{A}(\omega) e^{i\beta(\omega)z - i\omega t} d\omega. \quad (9.76)$$

Osnovni sunek naj bo približno monokromatičen s krožno frekvenco  $\omega_0$ , kar pomeni, da je mnogo daljši od optične periode. Potem lahko  $\beta(\omega)$  razvijemo okoli  $\omega_0$ , pri čemer vpeljemo razliko krožnih frekvenc  $\Omega = \omega - \omega_0$

$$\beta(\omega_0 + \Omega) \approx \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega} \Omega + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Omega^2 = \beta(\omega_0) + \beta' \Omega + \frac{1}{2} \beta'' \Omega^2. \quad (9.77)$$

Enačbo (9.76) prepisemo v

$$a(z, t) = \int \tilde{A}(\Omega) e^{i\beta(\omega_0 + \Omega)z - i(\omega_0 + \Omega)t} d\Omega = e^{i\beta(\omega_0)z - i\omega_0 t} A(z, t). \quad (9.78)$$

Funkcija  $A(z, t)$  predstavlja prostorsko in časovno odvisnost ovojnice sunka. Z upoštevanjem razvoja (enačba 9.77) jo zapišemo kot

$$A(z, t) = \int \tilde{A}(\Omega) \exp\left(i\beta' \Omega z + \frac{i}{2} \beta'' \Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega. \quad (9.79)$$

Odvajajmo ovojnico najprej po  $z$

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = \int \tilde{A}(\Omega) \left(i\beta' \Omega + \frac{i}{2} \beta'' \Omega^2\right) \exp\left(i\beta' \Omega z + \frac{i}{2} \beta'' \Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega, \quad (9.80)$$

nato pa še enkrat

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial t} = \int \tilde{A}(\Omega) (-i\Omega) \exp\left(i\beta' \Omega z + \frac{i}{2} \beta'' \Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega \quad (9.81)$$

in dvakrat parcialno po  $t$

$$\frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} = \int \tilde{A}(\Omega) (-\Omega^2) \exp\left(i\beta' \Omega z + \frac{i}{2} \beta'' \Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega. \quad (9.82)$$

Primerjamo izračunane odvode in dobimo enačbo

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -\beta' \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}. \quad (9.83)$$

Enačbo lahko nekoliko poenostavimo z vpeljavo novih neodvisnih spremenljivk

$$\begin{aligned}\tau &= t - \beta' z \quad \text{in} \\ \zeta &= z.\end{aligned}\tag{9.84}$$

Uporabimo verižno pravilo odvajanja in dobimo

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau} (-\beta') + \frac{\partial}{\partial \zeta}\tag{9.85}$$

in

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}.\tag{9.86}$$

Z novima spremenljivkama se enačba (9.83) prepiše v

$$\beta'' \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - 2i \frac{\partial A}{\partial \zeta} = 0.\tag{9.87}$$

Poglejmo enačbo podrobneje. Če ni disperzije in je  $\beta'' = 0$ , se  $A$  vzdolž koordinate  $\zeta$  ne spreminja. To pomeni, da se oblika sunka ob odsotnosti disperzije ohranja in sunek poljubne začetne oblike nepopačen potuje po vlaknu z grupno hitrostjo  $1/\beta'$ .

Če je disperzija različna od nič, ostaneta v enačbi obliki oba člena. Opazimo, da ima enačba enako obliko kot obosna valovna enačba, ki smo jo v drugem poglavju uporabili za obravnavo koherentnih snopov (enačba 3.5). Razlika med obosno valovno enačbo in enačbo (9.87) je v tem, da vlogo prečne koordinate prevzame čas  $\tau$ . To, kar je bila prej širina snopa, je zdaj torej dolžina sunka. Spomnimo se, da obosno valovno enačbo rešijo Gaussovi snopi (enačba 3.29).



Podobnost med pojavnoma seže dlje od formalne oblike. Pri snopih, ki so omejeni v prečni smeri, disperzija fazne in grupne hitrosti po prečnih komponentah valovnega vektorja povzroča spremicanje prečnega preseka snopa. Pri časovno omejenih sunkih v sredstvu s frekvenčno disperzijo se namesto preseka sunka spreminja njegova vzdolžna oblika oziroma njegova dolžina.

Celotnega računa ni treba ponavljati, namesto tega kar v izrazu za Gaussove snope (enačba 3.29) napravimo ustrezno zamenjavo spremenljivk. Iz enačbe (9.87) razberemo, da valovnemu številu  $k$  pri snopih ustreza parameter  $\mu = (d^2 \beta / d \omega^2)^{-1}$ . Poleg tega vpeljemo dolžino sunka  $\sigma$ , ki ustreza polmeru Gaussovega snopa  $w$ , in parameter  $b$ , ki ustreza krivinskemu radiju  $R$ . Oba parametra sta seveda odvisna od  $\zeta$ , tako kot sta parametra  $w$  in  $R$  odvisna od  $z$ .

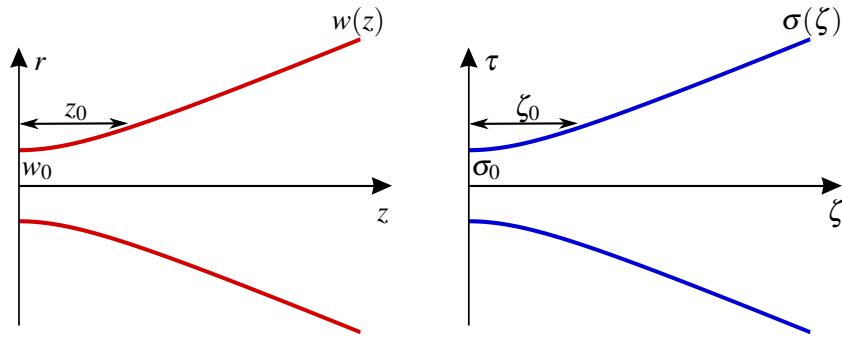
Na podlagi analogije zapišemo obliko podaljšanega Gaussovega sunka

$$A(\zeta, \tau) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-i \frac{\mu \tau^2}{2b}\right) e^{i\phi(\zeta)}.\tag{9.88}$$

Pri tem za dolžino sunka  $\sigma$  velja enaka zveza kot za polmer Gaussovega snopa (enačba 3.19)

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left(1 + \left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)^2\right).\tag{9.89}$$

Tu je  $\sigma_0$  trajanje sunka pri  $\zeta = 0$ , to je na začetku, kjer je sunek najkrajši. Krivinskemu radiju valovnih front (enačba 3.25) v tem primeru ustreza količina  $b = \zeta (1 + \zeta_0^2 / \zeta^2)$ . Po analogiji s snopi lahko sklepamo, da se najmanj podaljšuje ravno sunek z Gaussovo časovno odvisnostjo.



Slika 9.14: Primerjava širitve Gaussovega snopa in podaljšanja Gaussovega sunka

Zanimivo je pogledati odvod faze po  $\tau$ , ki predstavlja spremembo krožne frekvence glede na centralno krožno frekvenco sunka  $\omega_0$

$$\omega - \omega_0 = \frac{\mu \tau}{b}. \quad (9.90)$$

Za pozitivne vrednosti  $\mu$  je krožna frekvenca na začetku sunka, to je pri  $\tau < 0$ , manjša od  $\omega_0$ , z naraščajočim časom pa se linearno povečuje proti koncu sunka. Obnašanje je torej podobno črikanju, ki ga poznamo iz nelinearne optike (slika ?? a).

**★** Pri  $\zeta = 0$  je sunek najkrajši možen pri dani spektralni širini. Lahko si mislimo, da je sunek najkrajši, to je omejen s Fourierovo transformacijo spektra, kadar se vse frekvenčne komponente seštejejo z isto fazo, to je pri  $\zeta = 0$ . Da nastanejo najkrajši sunki, kadar je faza vseh delnih valov enaka, smo spoznali že pri fazno uklenjenih sunkih iz večfrekvenčnih laserjev (poglavje 6.9). Pri potovanju sunka se zaradi disperzije faze frekvenčnih komponent različno spreminja in sunek se podaljša. Pri tem je pomemben drugi odvod valovnega števila po krožni frekvenci. Linearno spremicanje faze namreč ne povzroči razširitve, temveč le spremembo v grupni in fazni hitrosti.

**Naloga 9.5.1** Naj bo vpadni sunek svetlobe Gaussove oblike  $E(x, y, z = 0, t) = \psi(x, y)e^{-at^2 - i\omega_0 t}$ . Pokaži, da je ustrezna funkcija  $\tilde{A}(\Omega)$  oblike

$$\tilde{A}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\Omega^2/4a}. \quad (9.91)$$

Nato vpelji novi spremenljivki  $\tau$  in  $\zeta$  in z neposredno integracijo (enačba 9.79) pokaži, da je podaljšan sunek pri  $z \neq 0$  enak ovojnici, zapisani z enačbo (9.88), pri čemer je

$$\zeta_0 = \frac{\mu}{2a}. \quad (9.92)$$

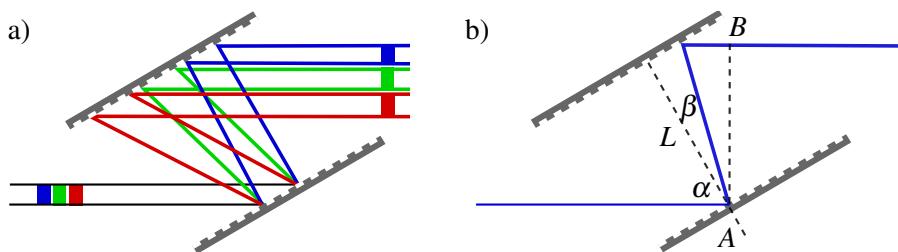
**Naloga 9.5.2** Uporabi enačbo (9.89) in pokaži, da je podaljšanje Gaussovega sunka svetlobe oblike  $I \propto \exp(-2\tau^2/\sigma^2)$  pri dani dolžini vlakna enako

$$\sigma(L) = \sigma_0 \sqrt{1 + \left( \frac{2L}{\sigma_0^2 \mu} \right)^2} \quad (9.93)$$

in za velike dolžine enako izrazu, ki smo ga izračunali pri valovodni disperziji (enačba 9.73).

### Kompenzacija disperzije

Razširitev sunka zaradi pozitivne disperzije je pri  $\mu > 0$  mogoče kompenzirati s parom vzporednih uklonskih mrežic, kot kaže slika (9.15). Prva mrežica različne frekvenčne komponente razkloni, druga pa ponovno zbere, vendar so pri tem dolžine optičnih poti za različne komponente različno dolge. Pokazali bomo, da je celoten učinek enak kot pri razširjanju sunka po sredstvu z negativno disperzijo. Vzporednost uklonskih mrežic zagotavlja vzporednost izhodnih žarkov, vendar so različne komponente vpade svetlobe med seboj razmaksnjene (slika 9.15 a). V praksi zato uporabimo ali dva para uklonskih mrežic ali pa zrcalo, ki svetlobo usmeri po isti poti nazaj.



Slika 9.15: Kompenzacija disperzije z uklonskima mrežicama (a) in shema z oznakami (b).

Naj na par vzporednih uklonskih mrežic vpada ravni val pod kotom  $\alpha$ , odbije pa naj se pod kotom  $\beta = \beta(\omega)$  (slika 9.15 b). Pot, ki jo prepotuje žarek od vpada na mrežico do izhoda iz sistema (med točkama A in B), je enaka

$$P = \frac{L}{\cos \beta} (1 + \cos(\alpha + \beta)). \quad (9.94)$$

Zaradi uklona velja zveza  $\sin \alpha - \sin \beta = \lambda / \Lambda$ , pri čemer je  $\lambda$  valovna dolžina svetlobe,  $\Lambda$  pa perioda uklonske mrežice. Pri fazi moramo upoštevati še fazni premik na drugi mrežici

$$\Phi_m = \frac{2\pi}{\Lambda} L \tan \beta = qL \tan \beta. \quad (9.95)$$

Celotna sprememba faze je tako  $\Phi = \omega P/c + \Phi_m$ .

**Naloga 9.5.3** Pokaži, da je drugi odvod faze po kotni frekvenci enak

$$\frac{d^2\Phi}{d\omega^2} = -\frac{Lcq^2}{\sqrt{\omega^2 - (\omega \sin \alpha - cq)^2}^{3/2}}. \quad (9.96)$$

Račun v nalogi (9.5.3) pokaže, da je disperzija, ki je določena z drugim odvodom faze po kotni hitrosti (enčba 9.96), vedno negativna. Par vzporednih uklonskih mrežic torej deluje kot sredstvo z negativno disperzijo in sunek, ki se je razširil zaradi potovanja po sredstvu s pozitivno disperzijo, lahko ponovno skrajša do meje, določene s širino spektra.

 Postopek kompenzacije disperzije se uporablja za pridobivanje zelo močnih zelo kratkih sunkov svetlobe. Sunku iz fazno ukljenjenega barvilnega ali Ti:safirnega laserja se najprej v nelinearnem sredstvu razširi spekter, hkrati se sunek tudi časovno podaljša. Podaljšan sunek lahko ojačimo, česar s prvotnim kratkim in razmeroma močnim sunkom ne bi mogli narediti. Razširjen in ojačen sunek nato s parom uklonskih mrežic skrajšamo za faktor 10–100 glede na prvotno dolžino sunka. Tako nastanejo zelo močni sunki svetlobe, dolgi le okoli 10 fs, kar je le še nekaj optičnih period<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Za to odkritje sta leta 2018 Donna Strickland in Gérard Mourou prejela Nobelovo nagrado.

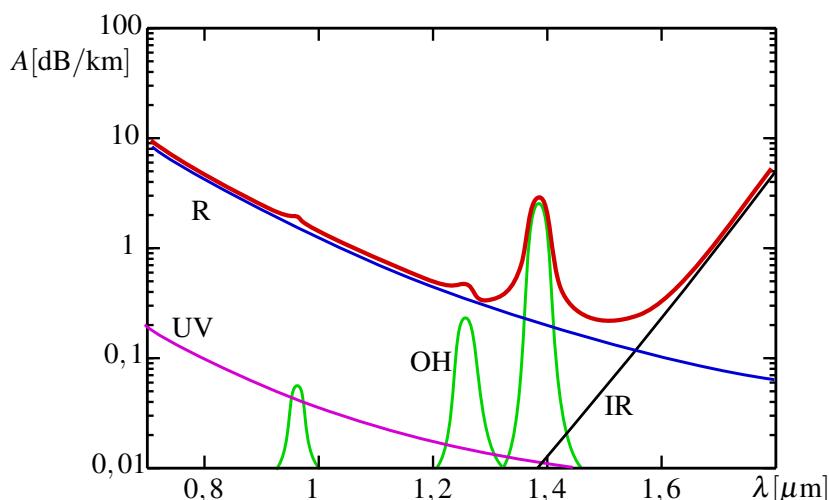
## 9.6 Izgube in ojačenje v optičnih vlaknih

Pri prenosu informacij z optičnimi vlakni je poleg disperzije, ki signal popači, treba upoštevati tudi izgube, ki signal oslabijo. Do izgub pride predvsem zaradi absorpcije svetlobe v vlaknu, Rayleighovega sisanja na fluktuacijah gostote, sisanja na nečistočah, upognjenosti vlakna in, kot bomo videli v nadaljevanju, prihaja do izgub tudi na stiku med vlakni. Za prenos na dolge razdalje je tako potreben razmeroma močen signal, ki pa ne sme biti premočen, saj lahko v vlaknu pride do nelinearnih optičnih pojavov. V praksi zato optični signal, ki potuje po čezoceanskih vlaknih, ojačujemo in s tem nadomestimo izgube.

Za merilo izgub v vlaknu vpeljemo atenuacijski koeficient, merjen v decibelih ali dB/km

$$A[\text{dB}] = -10 \log_{10} \frac{j(z)}{j(0)}, \quad (9.97)$$

pri čemer je  $j(z)$  intenziteta svetlobe po prepotovani razdalji  $z$ ,  $j(0)$  pa začetna intenziteta. Če se po prepotovanem kilometru signal zmanjša na primer na polovico, so izgube 3 dB/km. Pri izdelavi optičnih vlaken se najpogosteje uporablja kremenovo steklo, ki ima pri valovni dolžini 1,55 μm izgube okoli 0,2 dB/km. Za primerjavo: navadno steklo ima pri vidni svetlobi atenuacijski koeficient okoli 1000 dB/km.



Slika 9.16: Izgube v vlaknu v odvisnosti od valovne dolžine: vijolična črta – UV absorpcija, črna črta – IR absorpcija, zelena črta – absorpcija na OH ionih in modra črta – izgube zaradi Rayleighovega sisanja. Z rdečo črto so označene skupne izgube.

Slika (9.16) prikazuje odvisnost izgub od valovne dolžine za dobro enorodovno vlakno iz kremenovega stekla. Celotne izgube (rdeča črta) so sestavljene iz vrste različnih prispevkov. Pri kratkih valovnih dolžinah je absorpcija velika zaradi elektronskih prehodov v steklu (vijolična črta). Širina reže za SiO<sub>2</sub> je namreč okoli 8,9 eV, kar ustreza valovni dolžini okoli 140 nm. Pri velikih valovnih dolžinah pride do absorpcije zaradi vibracijskih prehodov (črna črta). Čeprav so ti prehodi pri nižjih frekvencah, so vrhovi zelo široki in sežejo do okoli 1500 nm. Absorpcija na nečistočah lahko ob pazljivi izdelavi postane skoraj v celotnem območju praktično zanemarljiva. Najbolj problematična nečistoča je voda oziroma OH<sup>-</sup> ioni, ki imajo velik dipolni moment in izrazito absorpcijo pri 1380 nm (zelena črta). Zelo pomemben prispevek k izgubam, posebej pri krajših valovnih dolžinah, je Rayleighovo sisanje na fluktuacijah gostote, saj je sorazmerno z  $\lambda^{-4}$  (modra črta).

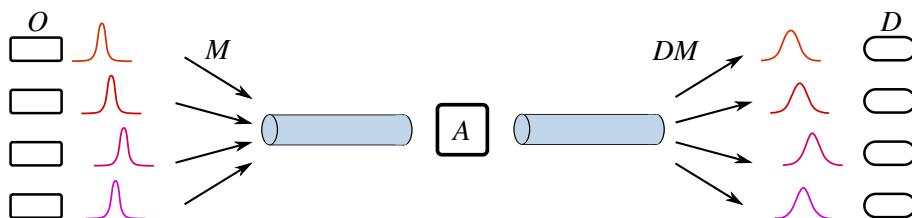
**★** Sipanje na fluktacijah gostote predstavlja poglaviti del izgub v vlaknu. Na splošno so gostotne fluktacije v steklu zaradi amorfne zgradbe neizogibne, v vlaknih pa so navadno še precej večje. Med izdelavo steklo namreč močno segrejejo (na okoli  $2000\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), da lahko iz njega vlečejo vlakno, termične fluktacije gostote pa pri hitrem ohlajanju ostanejo zamrznjene v vlaknu.

Slike je razvidno, da so skupne izgube najmanjše okoli  $1,55\text{ }\mu\text{m}$ , zato se to območje največ uporablja za prenos signalov na velike razdalje. Izgube so tako majhne, da omogočajo prenos signala do nekaj sto kilometrov brez vmesnega ojačevanja. Teh izgub na vlaknih se ne bo dalo več kaj dosti izboljšati, saj so že zdaj na meji, določeni s termičnimi fluktacijami. Pri dolžini optičnih zvez tako izgube niso več glavna omejitev, ampak je to popačitev signala zaradi disperzije.

**★** Pri prenosu signalov z optičnimi vlakni vpeljemo različne pasove, ki ustrezajo različnim valovnim dolžinam. Pri valovnih dolžinah  $1260\text{--}1360\text{ nm}$  je tako imenovani pas O (*original*), ki so ga sprva uporabljali zaradi razpoložljivih virov svetlobe in nizke disperzije. Sledita pas E (*extended*,  $1360\text{--}1460\text{ nm}$ ) in pas S (*short*,  $1460\text{--}1530\text{ nm}$ ). Najširše uporabljan je pas C (*conventional*) pri valovnih dolžinah  $1530\text{--}1565\text{ nm}$ , sledita mu še pas L (*long*,  $1565\text{--}1625\text{ nm}$ ) in pas U (*ultralong*,  $1625\text{--}1675\text{ nm}$ ).

Po optičnem vlaknu lahko prenašamo več signalov hkrati, če za vsakega posebej uporabimo drugo valovno dolžino. Temu procesu pravimo razvrščanje po valovni dolžini (WDM – *wavelength-division multiplexing*) in z njim dosežemo vzporeden prenos podatkov in hitrosti prenosa do  $100\text{ Tb/s}$ .

Shematsko je tak način prenosa podatkov prikazan na sliki (9.17). Oddajniki (O) oddajo sunke svetlobe, ki se rahlo razlikujejo v valovni dolžini. Z multiplekserjem (M) signale iz različnih kanalov zberemo in jih usmerimo v enorodovno vlakno. Vlakno prenaša signal, vmes ga po potrebi ojačimo (A), nato z demultiplekserjem (DM) signal razstavimo na posamezne kanale, ki jih zaznamo z ločenimi detektorji (D). Razlika v valovnih dolžinah med posameznimi signali je tipično  $0,8\text{ nm}$ . Zanimivo je tudi, da so (de)multipleksirji pasivni in za svoje delovanje ne potrebujejo električne energije.

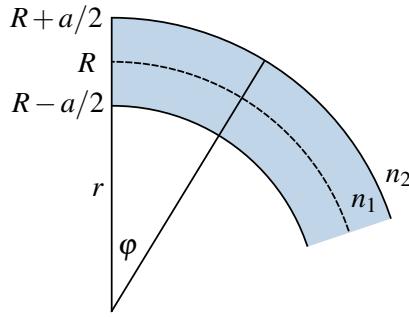


Slika 9.17: Shematski prikaz prenosa več signalov hkrati po enorodovnem vlaknu

### \*Izgube v ukrivljenem vlaknu

V vseh primerih do zdaj smo privzeli, da je vlakno povsem ravno oziroma da so mejne ploskve valovnega vodnika vzporedne. Kadar je vlakno ukrivljeno, del valovanja uhaja v plašč in izgube pri prenosu se povečajo. Te izgube postanejo znatne, kadar je krivinski radij ukrivljenega vlakna tipično centimeter ali manj. Poglejmo si pojav podrobneje na planparalelnem vodniku.

Naj bo vodnik dvodimensionalna plast debeline  $a$  z lomnim količnikom  $n_1$ , ki je obdana s snovjo z lomnim količnikom  $n_2$ . Vodnik naj zdaj ne bo raven, temveč ukrivljen s krivinskim radijem  $R$ , tako da tvori del kolobarja z notranjim radijem  $R - a/2$  in zunanjim radijem  $R + a/2$ . Privzamemo, da je  $R \gg a$  (slika 9.18).



Slika 9.18: K izračunu izgub v ukrivljenem vodniku

Zapišimo Helmholtzevo enačbo (enačba 1.21) v cilindrični geometriji

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k_0^2 n^2(r) E = 0, \quad (9.98)$$

pri čemer ima  $n(r)$  vrednost  $n_1$  v sredici in  $n_2$  v plašču. Pri tem ne pozabimo, da  $r$  ni več radialna koordinata vlakna, ampak označuje oddaljenost od središča krivine. Zanimajo nas rešitve oblike

$$E(r, \varphi) = \psi(r) e^{im\varphi}, \quad (9.99)$$

kjer bomo privzeli, da je  $\psi(r)$  znatna le v sredici.

Naj bo  $z = R\varphi$  dolžina loka vzdolž sredine sredice. Tedaj je faza nastavka (enačba 9.99) enaka  $m\varphi = mz/R$  in valovno število  $\beta = m/R$ . Ker je valovna dolžina svetlobe dosti manjša od  $R$ , je  $m$  zelo veliko število. Funkcija  $\psi$  zadošča enačbi

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left( k_0^2 n^2(r) - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi = 0. \quad (9.100)$$

Rešitve gornje enačbe za  $\psi$  so kombinacije Besslovih funkcij reda  $m$ , kar pa zaradi velikosti  $m$  ni posebno zanimivo.

Dosti več bomo izvedeli, če se problema lotimo malo drugače. Namesto  $r$  in  $\varphi$  vpeljemo koordinati  $x = r - R$  in  $z = R\varphi$ . S tem preidemo nazaj na koordinate planparalelne plasti in iščemo popravke valovne enačbe v sredici (9.8), ki so reda  $1/R$ . Zapišemo

$$\frac{m^2}{r^2} = \frac{m^2}{(R+x)^2} \approx \frac{m^2}{R^2} \left( 1 - 2 \frac{x}{R} \right) = \beta^2 \left( 1 - 2 \frac{x}{R} \right). \quad (9.101)$$

Z upoštevanjem gornje zvezne enačbe (9.100) nadomestimo s približno enačbo za prečno obliko polja

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (k_0^2 n^2(r) - \beta^2) \psi + \frac{1}{R} \left( \frac{d\psi}{dx} + 2\beta^2 x \psi \right) = 0. \quad (9.102)$$

Člen, ki vsebuje prvi odvod  $d\psi/dx$ , lahko odpravimo z nastavkom

$$\psi(x) = e^{-x/2R} \zeta(x) \quad (9.103)$$

in dobimo

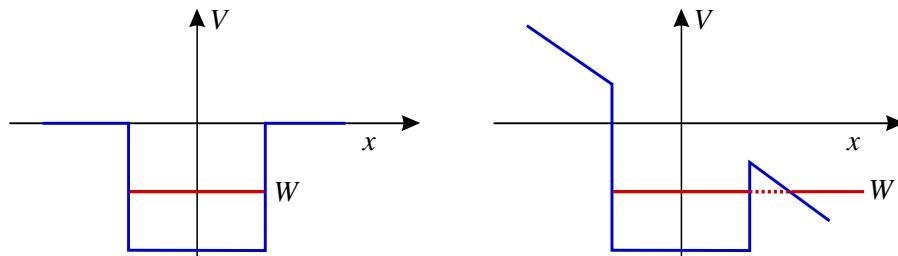
$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \left( k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{1}{4R^2} \right) \zeta + \frac{2\beta^2}{R} x \zeta = 0. \quad (9.104)$$

Gornja enačba je podobna enačbi za izračun lastnih rodov v planparalelnem vodniku (9.8), pri čemer se  $\beta^2$  poveča za  $1/4R^2$ . Poleg tega je prisoten dodatni člen, ki je linearen v  $x$ . Če ponovno naredimo primerjavo med lastnimi načini v valovnem vodniku in stanji delca, ujetega v končno potencialno jamo, ta člen ustrezava potencialni energiji delca v konstantnem zunanjem električnem polju (slika 9.19). Podobno kot lahko ujeti delci uhajajo iz potencialne jame v prisotnosti zunanjega polja (tunelirajo), uhaja tudi svetloba iz ukrivljenega vlakna.

Po analogiji s kvantno mehaniko, kjer ukrivljenost vodnika ustrezava električni poljski jakosti, lahko izgube iz vodnika (ozioroma delež prepuščene svetlobe) zapišemo kot

$$A \propto e^{-CR}, \quad (9.105)$$

pri čemer je  $C$  konstanta, odvisna od lomnih količnikov sredice in plašča, od polmera vlakna ter od valovne dolžine potajoče svetlobe.



Slika 9.19: Lastni načini širjenja svetlobe po ravnem vodniku so analogni stanjem delca v končni potencialni jami (levo), načini širjenja po ukrivljenem vodniku so podobni stanjem delca v konstantnem zunanjem električnem polju (desno). Zaradi spremenjenega potenciala delci tunelirajo, svetloba pa uhaja iz ukrivljenega vlakna.

### Ojačevanje v vlaknih

Zaradi izgub pri prenosu signalov na več tisoč kilometrov dolge razdalje je treba signal med prenosom ojačevati. To lahko naredimo elektronsko, kjer optični signal pretvorimo v električnega, tega ojačimo in ga nato pretvorimo nazaj v optičnega. Precej bolj priročna rešitev je optično ojačevanje v vlaknu samem.

V ta namen se najpogosteje uporablja vlakno, dopirano z erbijevimi ioni<sup>6</sup>. Na določenih razdaljah (na okoli 100 km) svetlobo iz navadnega vlakna sklopimo v vlakno, v katerem so erbijevi ioni. S črpalnim laserjem erbijeve ione vzbudimo, da dosežemo obrnjeno zasedenost. Ko na dopirani del vlakna vpade svetlobni sunek z valovno dolžino okoli 1550 nm, pride do stimulirane emisije in sunek se ojači. Gre za povsem enak princip ojačevanja svetlobe, kot ga poznamo iz delovanja laserja, le da tukaj svetloba ni ujeta v resonator, ampak se postopoma ojačuje vzdolž vlakna. Pri tem se intenziteta črpalnega laserja postopoma zmanjšuje, kar omejuje dolžino, na kateri se signal ojačuje. Spektralna širina ojačenja je zaradi sklopitev z ioni v steklu razmeroma široka, tudi 40 nm. To pomeni, da se hkrati ojačujejo signali različnih valovnih dolžin, kar je še posebej uporabno pri prenosu več signalov naenkrat.

V praksi se uporablja vlakna, v katerih je delež erbijevih ionov okoli  $\sim 10^{-4}$ . Črpalni laser je polprevodniški laser, ki deluje pri valovni dolžini 900 nm ali 1,48 nm z močjo okoli 20–100 mW. Na ta način lahko v 10–30 m dolgih odsekih vlaken dosežemo več 1000-kratno ojačenje (30–40 dB), kar je dovolj za kompenzacijo izgub.

<sup>6</sup>EDFA - Erbium-doped fiber amplifier, ojačevalnik na vlakno, dopirano z erbijem

## 9.7 Sklopitev svetlobe v optične vodnike

Do zdaj smo govorili o svetlobi, ki potuje po valovnem vodniku ali optičnem vlaknu. Kako pa svetlubo sploh sklopimo v vodnik? Poznamo več načinov sklopitev, obravnavali bomo čelno sklopitev, bočno sklopitev s prizmo in bočno sklopitev s periodično strukturo. Prvi način navadno uporabljamo pri cilindričnih vlaknih, ostala dva načina pa najpogosteje pri planarnih valovodnih strukturah.

### Čelna sklopitev

Sklopitev svetlobe v večrodonno vlakno lahko obravnavamo geometrijsko, kot smo to naredili na začetku poglavja (slika 9.1). Izračunali smo, da je največji vpadni kot, pod katerim se svetloba še sklopi v vlakno, določen z numerično odprtino vlakna  $\sin \alpha_{\max} = NA$  (enačba 9.2).

Za bolj natančen izračun izkoristka sklopitev svetlobe v optično vlakno vpeljemo tako imenovani prekrivalni integral, ki pove, kolikšen delež vpadne svetlobe z električno poljsko jakostjo  $E(r, \varphi)$  se sklopi z izbranim rodom vlakna. To naredimo tako, da vpadni val razvijemo po lastnih rodovih vlakna, iz ortogonalnosti pa sledi prekrivalni integral, ki ga moramo seveda ustrezno normirati. Za sklopitev v rod, označen z indeksoma  $n$  in  $m$ , zapišemo prekrivalni integral kot

$$\eta = \frac{|\int E(x, y) E_{n,m}^*(x, y) dx dy|^2}{(\int |E(x, y)|^2 dx dy) (\int |E_{n,m}(x, y)|^2 dx dy)}, \quad (9.106)$$

ozziroma v cilindričnih koordinatah

$$\eta = \frac{|\int E(r, \varphi) E_{n,m}^*(r, \varphi) r dr d\varphi|^2}{(\int |E(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi) (\int |E_{n,m}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi)}. \quad (9.107)$$

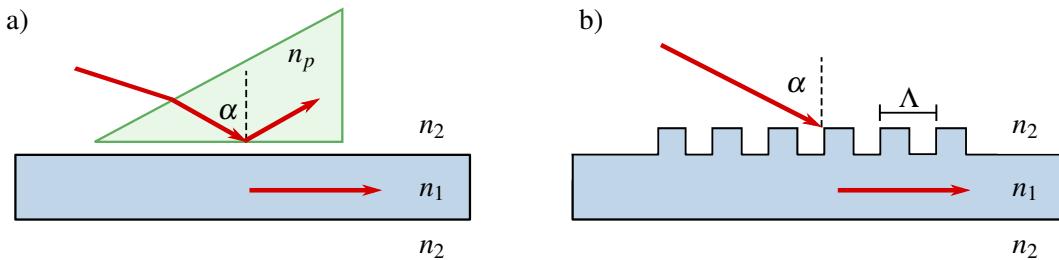
Točen račun gornjega integrala je na splošno precej zapleten, saj vsebuje integrale Besslovih funkcij. V primeru osnovnega roda račun poenostavimo, tako da prečno odvisnost polja nadomestimo z Gaussovim profilom z ustreznim efektivnim polmerom (po enačbi 9.44).

### Bočna sklopitev

Neposredna sklopitev svetlobe v optični vodnik preko plašča ni mogoča. V vodniku je namreč lomni količnik sredice vedno večji od lomnega količnika plašča, zato dovolj velikega vstopnega kota, pod katerim bi se svetloba ujela v sredico, ni mogoče doseči. Za sklopitev preko stranice zato uporabimo drugačen pristop, navadno s prizmo ali s periodično strukturo na vlaknu.

V prvem primeru uporabimo prizmo, kot kaže slika (9.20 a). Lomni količnik prizme je pri tem večji od lomnega količnika plašča  $n_p > n_2$ . Vhodni žarek vpada na prizmo, se ob prehodu vanjo lomi, nato pa se na stranici, ki je vzporedna z vodnikom, totalno odbije. V tankem vmesnem območju med prizmo in sredico vodnika se pojavi evanescentni val s komponento valovnega vektorja  $\beta_v = k_0 n_p \sin \alpha$  v smeri vzporedno z vodnikom.

Pogoj za uspešno sklopitev v vlakno je ujemanje vzdolžne komponente valovnega vektorja vpadne svetlobe  $\beta_v$  z vzdolžno komponentno valovnega vektorja  $\beta_n$  tistega rodu, ki ga želimo vzbuditi. S sprememjanjem vpadnega kota  $\alpha$  sprememjam  $\beta_v$  in v vodniku vzbujamo različne rodove. Pri tem mora biti razdalja med prizmo in vodnikom dovolj majhna (tipično reda valovne dolžine svetlobe), da se v valovod ob izpoljenem pogoju ujemanja faze sklopi znaten delež vpadne svetlobe.



Slika 9.20: Dva primera bočne sklopitve svetlobe v valovni vodnik: sklopitev s prizmo (a) in sklopitev s periodično strukturo (b)

Tudi sklopitev s periodično strukturo na valovnem vodniku (slika 9.20 b) deluje na ujemaju vzdolžnih komponent valovnega vektorja vpadnega vala in valovnega vektorja ustreznega rodu. Ko vpade val pod kotom  $\alpha$  glede na valovni vodnik, periodična struktura na vodniku spremeni njegovo fazo za večkratnik  $2\pi z/\Lambda$ , pri čemer je  $\Lambda$  perioda strukture. Če dosežemo, da se komponenta novega valovnega vektorja  $\beta = k_0 n_2 \sin \alpha + 2\pi/\Lambda$  izenači s komponento valovnega vektorja za izbrani rod v vlaknu, se vpadna svetloba sklopi v vlakno.



Oba opisana načina za sklopitev svetlobe v vlakno lahko uporabimo tudi za sklopitev svetlobe iz vlakna, pri čemer mora biti ravno tako izpolnjen pogoj ujemanja faz. Sklapljanje svetlobe skozi prizmo je uporabno tudi za raziskave tankih plasti snovi. Iz pogoja za ujemanje faz lahko določimo lastnosti tanke plasti, na primer njen lomni količnik.

## 9.8 Sklopitev med optičnimi vodniki

### Čelna sklopitev dveh vlaken

Pri telekomunikacijah z optičnimi vodniki so spoji med posameznimi vodniki neizogibni. V idealnem primeru sta vodnika povsem enaka in se natančno stikata, tako da na spoju ne prihaja do dodatnih izgub ali popačenja signala. Čim pa se pojavi odstopanja v velikosti polmera sredice, razlike v vrednostih lomnih količnikov ali nenatančna poravnava sredice, na spoju pride do izgub. Tipično znašajo izgube na spoju vlaken do okoli 0,2–0,5 dB.

Omejimo se na spoj enorodovnih vlaken, v katerih krajevni del električne poljske jakosti osnovnega roda zapišemo kot

$$E(r, \varphi, z) = \psi(r, \varphi) e^{i\beta z}. \quad (9.108)$$

Podobno kot smo zapisali prekrivalni integral pri sklopitvi svetlobe v vlakno (enačba 9.107), vpeljemo prekrivalni integral za izračun sklopitve med dvema vlaknoma, ki pove, kolikšen delež svetlobe moči iz prvega vlakna se sklopi v osnovni rod v drugem vlaknu. Sklopitveni faktor je

$$\eta = \frac{|\int \psi_1(r, \varphi) \psi_2^*(r, \varphi) r dr d\varphi|^2}{(\int |\psi_1|^2 r dr d\varphi) (\int |\psi_2|^2 r dr d\varphi)}, \quad (9.109)$$

pri čemer z indeksom 1 označimo osnovni rod v prvem vlaknu, z indeksom 2 pa v drugem. Tudi tukaj račun poenostavimo in namesto Besslovega profila uporabimo Gaussov profil z ustreznim efektivnim polmerom snopa (enačba 9.44).

Izračunajmo za primer sklopitveni faktor in izgube na spoju dveh vlaken z rahlo različnima polmeroma. Po Marcusejevi formuli najprej določimo efektivna polmera Gaussovih snopov v obeh vlaknih  $w_1$  in  $w_2$ . Prečni profil v vlaknih je potem

$$\psi_{1,2} = A_{1,2} e^{-r^2/w_{1,2}^2}. \quad (9.110)$$

Vstavimo gornja nastavka v prekrivalni integral (enačba 9.109) in dobimo

$$\eta = \frac{|\int A_1 e^{-r^2/w_1^2} A_2 e^{-r^2/w_2^2} 2\pi r dr|^2}{\left(\int A_1^2 e^{-2r^2/w_1^2} 2\pi r dr\right) \left(\int A_2^2 e^{-2r^2/w_2^2} 2\pi r dr\right)}, \quad (9.111)$$

od koder sledi

$$\eta = \frac{4w_1^2 w_2^2}{(w_1^2 + w_2^2)^2}. \quad (9.112)$$

Kadar sta polmera vlaken enaka, je prekrivanje popolno in  $\eta = 1$ . Z naraščajočo razliko med polmeroma pa vrednost  $\eta$  pojema. Pri tem ni pomembno, ali ima večji polmer prvo ali drugo vlakno, v obeh primerih pride do izgube signala. Intuitivno razumemo, da se signal izgubi pri prehodu iz večjega v manjše vlakno, obratno pa je tudi res, saj se v širšem končnem vlaknu poleg osnovnega vzbudijo tudi višji rodovi.

Pri prehodu iz vlakna z  $w = 10 \mu\text{m}$  v vlakno s polmerom  $w = 8 \mu\text{m}$  (ali obratno), je sklopitveni faktor (oziora razmerje med prepuščeno in vpadno intenziteto svetlobe) enak 0,95. Po enačbi (9.97) so izgube za izračunano sklopitev enake 0,21 dB.

---

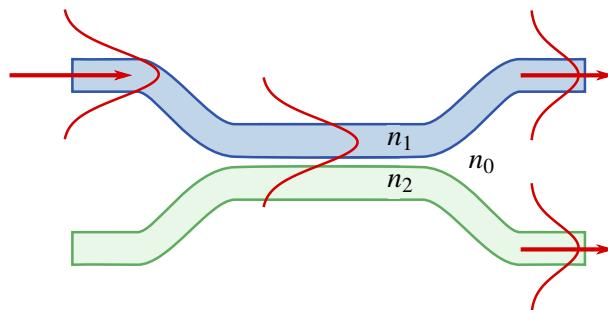
**Naloga 9.8.1** Izračunaj prekrivalni integral (enačba 9.111) in pokaži veljavnost enačbe (9.112). Poleg tega pokaži tudi, da je sklopitveni faktor za dve enaki vzporedni vlakni, ki sta iz osi izmaknjeni za  $\Delta$ , enak

$$\eta = \exp\left(-\frac{\Delta^2}{w^2}\right). \quad (9.113)$$


---

### Vzdolžna sklopitev

Ob prenosu signala po optičnem valovodu večina energijskega toka potuje po sredici, energijski tok pa seže tudi izven nje, v plašč (enačba 9.29). Če sta dva vzporedna valovoda dovolj blizu, da se evanescentni električni polji enega in drugega vodnika v plašču prekrivata, pride do sklopitve vodnikov in prenosa energijskega toka iz enega vodnika v drugega.



Slika 9.21: Sklopitev med dvema vzporednima vodnikoma

Za podrobnejšo obravnavo bi morali zapisati Maxwellove enačbe z ustreznimi robnimi pogoji in jih rešiti za sklopljen primer dveh vzporednih vodnikov. Tak račun je izredno zapleten, zato se bomo poslužili približka šibke sklopitve in privzeli, da so rodovi v vodnikih taki, kot če bi vodniki ne bili sklopljeni. Sklopitev torej ne bo spremenila oblike lastnih rodov, bo pa spremenila njihovo amplitudo, ki bo tako postala odvisna od vzdolžne koordinate  $z$ .

Imejmo dva enorodovna vodnika z lomnima količnikoma sredice  $n_1$  in  $n_2$  in enako debelino  $a$ , med njima in okoli njiju pa naj bo snov z lomnim količnikom  $n_0$ . Širina reže med vodnikoma naj bo  $2d$ . Potem zapišemo električni poljski jakosti v prvem in drugem vodniku kot

$$E_1(x, z) = A(z)\psi_1(x)e^{i\beta_1 z} \quad \text{in} \quad (9.114)$$

$$E_2(x, z) = B(z)\psi_2(x)e^{i\beta_2 z}, \quad (9.115)$$

pri čemer se  $A(z)$  in  $B(z)$  le počasi spremunjata s koordinato  $z$ . Skupna električna poljska jakost, ki je v našem približku kar vsota prispevkov  $E_1$  in  $E_2$ , mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla^2 E(x, z) + k_0^2 n(x)^2 E(x, z) = 0. \quad (9.116)$$

Pri tem smo z  $n(x)$  označili prečno odvisnost lomnega količnika. Vstavimo nastavek za električno poljsko jakost v gornjo enačbo in zapišemo

$$\begin{aligned} & Ae^{i\beta_1 z} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1(x) - \beta_1^2 \psi_1 + k_0^2 n(x)^2 \psi_1 \right) + \\ & Be^{i\beta_2 z} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2(x) - \beta_2^2 \psi_2 + k_0^2 n(x)^2 \psi_2 \right) + 2i\beta_1 A' \psi_1 e^{i\beta_1 z} + 2i\beta_2 B' \psi_2 e^{i\beta_2 z} = 0. \end{aligned} \quad (9.117)$$

Pri tem smo člena z drugim odvodom  $\partial^2 A / \partial z^2$  in  $\partial^2 B / \partial z^2$  zanemarili. Zapišimo enačbi za nemoteni funkciji  $\psi$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1(x) + (k_0^2 n_1(x)^2 - \beta_1^2) \psi_1 = 0 \quad (9.118)$$

in

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2(x) + (k_0^2 n_2(x)^2 - \beta_2^2) \psi_2 = 0. \quad (9.119)$$

Lomna količnika  $n_1(x)$  in  $n_2(x)$  sta tukaj tudi funkciji prečne koordinate. Naj bo  $n_1(x)$  povsod enak  $n_0$  razen v sredici prvega vodnika, kjer je  $n_1$ , in naj bo  $n_2(x)$  povsod enak  $n_0$ , razen v sredici drugega vlakna, kjer je enak  $n_2$ . Sledi

$$\begin{aligned} & Ae^{i\beta_1 z} k_0^2 (n(x)^2 - n_1(x)^2) \psi_1 + Be^{i\beta_2 z} k_0^2 (n(x)^2 - n_2(x)^2) \psi_2 + \\ & 2i\beta_1 A' \psi_1 e^{i\beta_1 z} + 2i\beta_2 B' \psi_2 e^{i\beta_2 z} = 0. \end{aligned} \quad (9.120)$$

Enačbo pomnožimo s kompleksno konjugirano vrednostjo  $\psi_1^*$  in integriramo po  $x$ . Upoštevamo, da se funkciji  $\psi_1$  in  $\psi_2$  le malo prekrivata, in zapišemo

$$\frac{dA}{dz} = iAK_{11} + iBe^{i(\beta_2 - \beta_1)z} K_{12}, \quad (9.121)$$

pri čemer sta

$$K_{11} = \frac{k_0^2}{2\beta_1} \int \psi_1^* \psi_1 (n^2 - n_1^2) dx \quad \text{in} \quad K_{12} = \frac{k_0^2}{2\beta_1} \int \psi_1^* \psi_2 (n^2 - n_2^2) dx. \quad (9.122)$$

Koeficient  $K_{11}$  določa spremembo faze v vlaknu zaradi prisotnosti drugega vlakna, kar lahko zanemarimo. Tako ostane samo sklopitevni člen

$$\frac{dA}{dz} = iBe^{i(\beta_2 - \beta_1)z}K_{12} \quad (9.123)$$

in podobno za  $B$

$$\frac{dB}{dz} = iAe^{i(-\beta_2 + \beta_1)z}K_{21}. \quad (9.124)$$

Prvo enačbo odvajamo, upoštevamo drugo in zapišemo

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - i\Delta\beta \frac{\partial A}{\partial z} + K_{12}K_{21}A = 0. \quad (9.125)$$

Enačbo rešujemo z nastavkom

$$A = e^{i\Delta\beta z/2} (a_1 e^{i\gamma z} + a_2 e^{-i\gamma z}). \quad (9.126)$$

**Naloga 9.8.2** Pokaži, da nastavek (enačba 9.126) reši enačbo (9.125) in pokaži, da med parametri enačb velja sledeča zveza

$$\gamma^2 = K^2 + \frac{\Delta\beta^2}{4}, \quad (9.127)$$

pri čemer je  $K = \sqrt{K_{12}K_{21}}$  in  $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ . Nato uporabi enačbo (9.123) in pokaži, da je rešitev za amplitudo  $B$  enaka izrazu v enačbi (9.128).

Ko poznamo  $A$ , lahko z uporabo enačbe (9.123) izračunamo še  $B$

$$B = \frac{1}{K_{21}} e^{-i\Delta\beta z/2} \left( \left( \frac{\Delta\beta}{2} + \gamma \right) a_1 e^{i\gamma z} + \left( \frac{\Delta\beta}{2} - \gamma \right) a_2 e^{-i\gamma z} \right). \quad (9.128)$$

Naj bo  $A(z=0) = A_0$  in  $B(z=0) = 0$ . To pomeni, da potuje svetloba na začetku le po prvem vlaknu, potem pa se sklopi v drugega. S tem začetnima pogojema zapišemo izraza za  $A$  in  $B$

$$A = A_0 e^{i\Delta\beta z/2} \left( \cos(\gamma z) - \frac{i\Delta\beta}{2\gamma} \sin(\gamma z) \right) \quad \text{in} \quad B = A_0 e^{-i\Delta\beta z/2} \frac{iK_{21}}{\gamma} \sin(\gamma z). \quad (9.129)$$

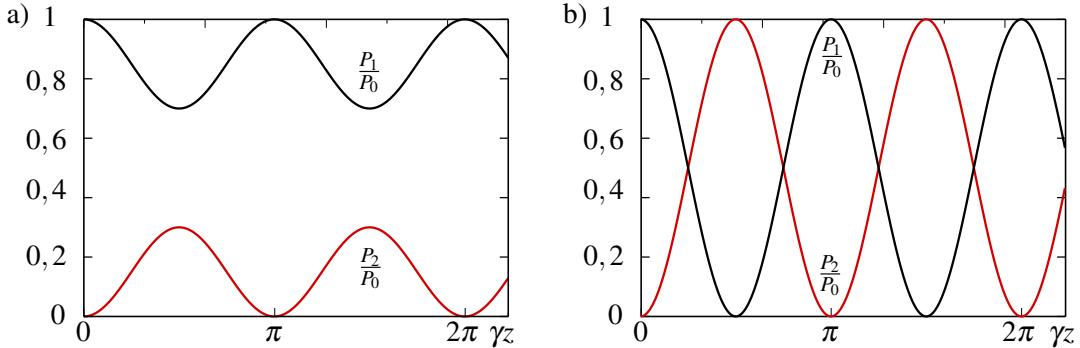
Moč, ki se pretaka po posameznem vlaknu, je tako z upoštevanjem zveze (9.127)

$$P_1 = P_0 \left( \cos^2(\gamma z) + \frac{\Delta\beta^2}{4\gamma^2} \sin^2(\gamma z) \right) = P_0 \left( 1 - \frac{K^2}{\gamma^2} \sin^2(\gamma z) \right) \quad (9.130)$$

in

$$P_2 = P_0 \frac{K^2}{\gamma^2} \sin^2(\gamma z). \quad (9.131)$$

Privzeli smo, da velja  $|K_{12}| = |K_{21}| = K$ . Obe funkciji sta oscilirajoči in svetloba se periodično pretaka med vlaknoma s periodo  $\pi/\gamma$  (slika 9.22). Amplituda prenosa je odvisna od sklopitevnega faktorja  $K$  in ujemanja valovnih števil v obeh vlaknih. Večji koeficient  $K$  in manjše odstopanje  $\Delta\beta$  vodita v večji prenos svetlobnega toka v drugo vlakno.



Slika 9.22: Prenos svetlobnega toka med dvema sklopljenima vodnikoma. V prvem primeru (a) sta vodnika različna, v drugem primeru (b) pa sta vodnika enaka in pride do popolnega prenosa.

Če sta vlakni enaki, je  $\Delta\beta = 0$  in  $\gamma = K$ , tako da pride do popolnega prenosa svetlobnega toka iz enega vlakna v drugo in seveda tudi obratno. Takrat veljata enačbi

$$P_1 = P_0 \cos^2(\gamma z) \quad \text{in} \quad (9.132)$$

$$P_2 = P_0 \sin^2(\gamma z). \quad (9.133)$$

Na ta način lahko v drugo vlakno sklopimo poljuben delež vpadne svetlobe. Do celotnega prenosa svetlobnega toka v drugo vlakno pride pri dolžini sklopitve  $L = \pi/2\gamma$ . Pri dolžini  $L = \pi/4\gamma$  sklopimo eno polovico intenzitete vpadne svetlobe in govorimo o 3-dB sklopitvi.



Pri izbrani dolžini sklopitve med vlaknoma je intenziteta svetlobe, ki preide v drugo vlakno, močno odvisna od parametra  $\gamma$ , torej od prekrivalnega integrala in od razlike  $\Delta\beta$ . Z rahlim spremenjanjem parametrov, na primer lomnega količnika enega od vlaken, lahko spremojamo delež svetlobe v drugem vlaknu. V ta namen pogosto uporabimo elektro-optični pojav in s spremenjanjem priključene napetosti na enem od vlaken natančno določimo delež svetlobe, ki preide v drugo vlakno.

## 9.9 \*Vpliv spremembe lomnega količnika vlakna na širjenje svetlobe

Sprememba lomnega količnika sredice ali plašča vlakna povzroči spremembo valovnega števila  $\beta$  za izbran rod. V enorodovnih vlaknih je to mogoče izkoristiti za izdelavo senzorjev, na primer temperature ali tlaka. Spremembo valovnega števila, do katere pride zaradi zunanjih vplivov, izmerimo preko spremembe faze valovanja na izhodu iz vlakna z ustrezno sestavljenim interferometrom. Ker je dolžina vlakna lahko velika (v nekaj centimetrov velik tulec lahko brez težav navijemo kilometre vlakna), je celotna sprememba faze velika že pri majhnih spremembah merjene količine. Po drugi strani pa že majhna sprememba valovnega števila povzroča neželene spremembe faze in odboje pri prenosu informacij. V tem razdelku zato poglejmo, kako se spremeni valovno število pri dani spremembi lomnega količnika in koliko svetlobe se odbije.

Obravnavajmo rod z vzdolžno komponento valovnega vektorja  $\beta_{lm}$  in prečnim profilom  $\psi_{lm}(r, \varphi)$ . Ta mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_{lm} + (\epsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2) \psi_{lm} = 0. \quad (9.134)$$

Naj se dielektrična konstanta na delu vlakna spremeni za  $\delta\epsilon$ . Posledično se na tem mestu spremenita tudi valovno število  $\beta = \beta_{lm} + \delta\beta$  in prečna oblika  $\psi = \psi_{lm} + \delta\psi$ .

Tudi popravljena funkcija  $\psi$  mora zadoščati enačbi (9.134), zato za perturbacijo velja

$$\nabla_{\perp}^2 \delta\psi + (\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2) \delta\psi + \delta\varepsilon k_0^2 \psi_{lm} = 2\beta_{lm} \delta\beta \psi_{lm}, \quad (9.135)$$

pri čemer smo zanemarili produkte majhnih količin. Množimo obe strani enačbe s  $\psi_{lm}^*$ , integriramo po preseku vlakna in dobimo

$$\begin{aligned} & \int \psi_{lm}^* \nabla_{\perp}^2 \delta\psi dS + \int (\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2) \delta\psi \psi_{lm}^* dS + k_0^2 \int \delta\varepsilon |\psi_{lm}|^2 dS \\ &= 2\beta_{lm} \delta\beta \int |\psi_{lm}|^2 dS. \end{aligned} \quad (9.136)$$

Prvi člen na levi preoblikujmo z uporabo zvez

$$\int (u \nabla_{\perp}^2 v - v \nabla_{\perp}^2 u) dS = \int \nabla_{\perp} \cdot (u \nabla_{\perp} v - v \nabla_{\perp} u) dS = \oint (u \nabla_{\perp} v - v \nabla_{\perp} u) \cdot ds. \quad (9.137)$$

Funkciji  $\psi_{lm}$  in  $\delta\psi$  opisujeta vodene valove, zato morata iti njune vrednosti za velike  $r$  proti nič. Posledično gre proti nič tudi integral po krivulji  $ds$  in velja

$$\int \psi_{lm}^* \nabla_{\perp}^2 \delta\psi dS = \int \delta\psi \nabla_{\perp}^2 \psi_{lm}^* dS. \quad (9.138)$$

Funkcija  $\psi_{lm}^*$  zadošča enačbi (9.134), zato se v enačbi (9.136) prvi in drugi člen odštejeta. Iskan popravek k valovnemu številu je tako

$$\delta\beta = \frac{k_0^2 \int \delta\varepsilon |\psi_{lm}|^2 dS}{2\beta \int |\psi_{lm}|^2 dS}. \quad (9.139)$$

 Ta rezultat je seveda analogen kvantno-mehanskemu rezultatu, ki sledi iz teorije motenj za spremembo energije lastnega stanja delca pri majhni spremembi Hamiltonovega operatorja. Rezultat je tudi intuitivno razumljiv: v najnižjem redu je  $\delta\beta$  sorazmerna s uteženim povprečjem  $\delta\varepsilon$ , pri čemer je utež  $\psi_{lm}$ .

Sprememba valovnega števila  $\delta\beta$  v delu vlakna ne povzroči le spremembe faze, ampak tudi delni odboj. To je le nekoliko druga oblika odboja na (zvezni ali ostri) meji dveh dielektrikov ali, splošneje, odboja valovanja na območju, kjer se spremeni fazna hitrost valovanja. Amplitudo odbitega valovanja, do katerega pride na območju vlakna, kjer se spreminja  $\beta$ , najpreprosteje dobimo z uporabo enačbe za odboj na meji dveh dielektrikov pri pravokotnem vpodu. Odbita amplituda je tedaj (enačba 1.44)

$$E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_0, \quad (9.140)$$

pri čemer  $n_1$  in  $n_2$  označujeta nespremenjen in rahlo spremenjen lomni količnik sredice vlakna.

Mislimo si, da je sprememba  $\beta$  na delu vlakna sestavljena iz majhnih stopničastih sprememb  $\Delta\beta_i$  na intervalih  $\Delta z$ . Za ravno valovanje je sprememba fazne hitrosti sorazmerna s spremembo lomnega količnika, zato iz enačbe (9.140) sledi, da je delež odbitega valovanja na stopničasti spremembi  $\Delta\beta_i$  enak

$$\Delta E_i = \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} E_0. \quad (9.141)$$

Privzeli smo, da je delež odbitega valovanja tako majhen, da ni treba upoštevati spremembe amplitude vpadnega vala  $E_0$ . Celotno odbito valovanje je vsota prispevkov na posameznih stopnicah  $\Delta\beta_i$ , pri čemer moramo upoštevati še različne faze delno odbitih valovanj

$$E_r = \sum \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} e^{2i\beta z_i} E_0 = \frac{1}{2\beta} \sum \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z_i} \Delta z E_0. \quad (9.142)$$

Preidemo z vsote na integral in zapišemo amplitudo odbitega valovanja

$$E_r = \frac{E_0}{2\beta} \int \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z} dz. \quad (9.143)$$

Za primer poglejmo linearino spremembo lomnega količnika in linearino spremembo valovnega števila za  $\Delta\beta$  na razdalji  $L$ . Krajši račun pokaže, da je delež intenzitete odbitega valovanja

$$\frac{I_r}{I_0} = \left( \frac{\Delta\beta}{2\beta} \frac{\sin\beta L}{\beta L} \right)^2. \quad (9.144)$$

Odbojnost je največja, kadar je  $L \ll 1/\beta$ , torej kadar je sprememba  $\beta$  ostra stopnica. Čim počasnejša je sprememba, tem manj je odboja. Kadar je  $\sin\beta L = 0$ , pride do destruktivne interference vseh delnih odbojev in odbojnost je enaka nič.

**Naloga 9.9.1** Naj se valovno število ob prehodu spreminja kot funkcija erf

$$\beta(z) = \beta_0 + \frac{2\Delta\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z/a} e^{-t^2} dt. \quad (9.145)$$

Pokaži, da je amplituda odbitega valovanja za majhne spremembe  $\Delta\beta$  enaka

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{\Delta\beta}{\beta_0} e^{-a^2\beta_0^2}. \quad (9.146)$$

Po pričakovanju je odbojnost največja pri  $a \rightarrow 0$ , to je v primeru ostre stopnice.

## 9.10 Nelinearni pojavi v optičnih vlaknih

V osmem poglavju smo podrobno obravnavali nelinearne optične pojave v snovi. Spoznali smo nelinearne pojave drugega reda, do katerih pride v snoveh brez centra inverzije, in nelinearne pojave tretjega reda, do katerih pride v vseh snoveh ob dovolj velikih vpadnih močeh svetlobe. Na kratko povzemimo, kako se ti pojavi odražajo v optičnih vodnikih.

### Pojavi drugega reda

Optična vlakna so praviloma narejena iz  $\text{SiO}_2$ , za katerega zaradi simetrije molekul velja, da je  $\chi^{(2)} = 0$ . Nelinearnih pojavor drugega reda zato ne opazimo, razen izjemoma na morebitnih nepravilnostih v steklu. Da bi izkoristili nelinearne optične pojave drugega reda in v vodnikih dosegli na primer optično frekvenčno podvajanje, morajo biti vodniki zgrajeni iz snovi, ki imajo nelinearno susceptibilnost različno od nič. Prednost vodnikov pred navadnimi kristali je v tem, da svetloba znotraj sredice vodnika potuje brez uklona. Posledično je pretvorba iz osnovne v frekvenčno podvojeno svetlubo, ki je sorazmerna s kvadratom dolžine poti (enačba ??), zelo učinkovita. Seveda mora biti izpolnjen tudi pogoj za ujemanje faz. To omogoča rodovna disperzija, zaradi katere lahko rodova pri osnovni in podvojeni frekvenci potujeta po vodniku z enako propagacijsko konstanto.

### Pojavi tretjega reda

V navadnih optičnih vlaknih prevladujejo nelinearni pojavi tretjega reda, ki jih v grobem delimo v dve skupini. Prva vključuje neelastično sipanje (Ramanovo in Brillouinovo), druga pa pojave, ki temeljijo na optičnem Kerrovem pojavu.

Obravnavajmo najprej stimulirano Ramanovo sipanje (SRS), ki smo ga spoznali v poglavju (??). Spomnimo se, da se pri SRS intenziteta svetlobe pri vpadni frekvenci zmanjšuje, na njen račun pa se eksponentno povečuje intenziteta valovanja z malenkost nižjo frekvenco. Razlika frekvenc ustreza vibracijskemu prehodu molekul v snovi. SRS v telekomunikacijskih vlaknih vodi do popačenja signala in povečanja spektralne širine. Po drugi strani stimulirano Ramanovo sipanje izkorisčamo za ojačenje signala v vodnikih. Če v vlakno posvetimo z močno črpalno svetlobo, katere frekvenca se od signalnega žarka razlikuje za vibracijsko frekvenco ( $\sim 13$  THz), se signalni žarek ojači. Ker je spekter  $\text{SiO}_2$  razmeroma širok ( $\sim 5$  THz), tega pogoja ni težko izpolniti.

Pri stimuliranem Brillouinovem sipanju (SBS) pride do odboja vpadne svetlobe na optično vzbujenem akustičnem valu v snovi (poglavlje ??). Signal v smeri naprej oslabi, pojavi pa se odbit val, katerega intenziteta narašča eksponentno z intenzitetom vpadne svetlobe. Neželenemu pojavu se lahko izognemo z zmanjšanjem vpadne moči (pod  $\sim 100$  mW na kanal) ali povečanjem spektralne širine vpadne svetlobe.

Druga skupina nelinearnih pojavov temelji na spreminjanju lomnega količnika z intenzitetom vpadne svetlobe (Kerrov pojav, poglavje ??). Opišimo tri pojave:

1. Samo-fazna modulacija ali lastna fazna modulacija (*SPM – Self-phase modulation*). Različni deli sunka zaradi različne intenzitete občutijo različen lomni količnik in pride do tako imenovanega črikanja (enačba ?? in slika ??). Pojav vodi do spektralne razširitve in zaradi disperzije tudi do časovnega podaljšanja sunka. Z ustreznim disperzijom dosežemo krajšanje sunkov ali pojav optičnih solitonov (poglavlje ??).
2. Navzkrižna fazna modulacija (*CPM – Cross-phase modulation*). Ko po vlaknu potuje več svetlobnih sunkov hkrati, prvi sunek povzroči spremembo lomnega količnika, drugi sunki pa to spremembo občutijo. Gre za medsebojno motnjo med sunki, ki vodi do spektralne razširitve. Pojav lahko izkoristimo za krajšanje sunkov ali za izdelavo optičnih stikal, saj lahko z zunanjim kontrolnim žarkom spremojamo fazo izbranega sunka.
3. Sklopitev štirih valov (*FWM – Four-wave mixing*). Če po vlaknu potuje več valovanj z različnimi frekvencami, pride zaradi nelinearne sklopitve do pojava valovanj pri dodatnih frekvencah (vsotah in razlikah obstoječih valovanj). To se pojavi predvsem v vlaknih z zelo majhno disperzijo, v katerih pride do ujemanja faz.

# Stvarno kazalo

- NEP*, 264  
*SNR*  
    see Razmerje signal proti šumu, 261  
 $\pi$ -napetost, 184, 185, 187  
Čričkanje, 168  
Črikanje, 240  
Črpanje, 81, 94, 138  
Štirinivojski sistem, 81, 124, 126, 128  
Šum, 259  
    štetja, 259, 260  
    seštevanje, 263  
    sevanja ozadja, 259, 263  
    temnega toka, 259, 263  
    termični, 259, 262  
Življenski čas nihanj, 63
- Absorpcija, 78, 228, 242  
Absorpcija fotona, 75, 82  
Absorpcijski koeficient, 78, 80, 86  
Aktivno območje, 139  
Akusto-optični modulator, 193  
Akusto-optični pojav, 189, 191, 194  
AlGaAs, 140  
Atenuacijski koeficient, 228  
Avtokorelacijska funkcija, 28
- BaTiO<sub>3</sub>, 24, 144, 145, 181  
Bennettova vdolbina, 86  
Besslov snop, 45  
    divergenca, 45  
Bining, *glej* Združevanje pikslov  
Bolometer, 241, 243, 257  
Boltzmannova porazdelitev, 73, 77, 262  
Braggov odboj, 59, 133, 141, 192, 203  
Braggov uklon, 191, 195, 196  
Brewstrov kot, 16  
Brewstrovo okno, 17  
Brillouinovo sisanje, 176  
    stimulirano, 176, 240
- CaCO<sub>3</sub>, *glej* Kalcit  
CS<sub>2</sub>, 162–164, 178
- Detektor, 241  
CCD, 257
- CMOS, 257, 259  
kvantni, 241, 246  
občutljivost, 241, 247  
odzivni čas, 241–243, 255  
prag detekcije, 241  
spektralni odziv, 241, 251  
termični, 241, 242
- DFG, *glej* Generacija razlike frekvenc
- Dielektričnost, 9, 21, 194, 198  
    inverzna, 180, 189
- Disperzija, 168, 169, 208, 220  
    kompenzacija, 227  
    materialna, 222  
    podaljšanje sunka, 224  
    polarizacijska, 221  
    rodovna, 221, 239  
    valovodna, 222
- Dobrota resonatorja, 64
- Dopplerjeva razširitev, 29, 54, 84, 85, 122, 124, 126
- Dvolomnost, 23, 150, 185, 190  
    dvoosne snovi, 21, 183, 185  
    enoosne snovi, 21, 22, 150, 182, 183, 198, 201
- Dvonivojski sistem, 74, 77, 85, 88, 91
- Einsteinovi koeficienti, 76, 88, 90  
Elasto-optični pojav, 189  
Elasto-optični tenzor, 190  
Električna polarizacija, 9, 143, 161, 177, 194  
Električno polje  
    gostota, 9, 21  
    jakost, 9, 11, 143
- Elektro-optična modulacija  
    amplitudna, 179, 186  
    fazna, 179, 187  
    frekvenčna, 179, 187  
    linearna, 187  
    longitudinalna, 182, 186, 187  
    transverzalna, 184
- Elektro-optični deflektor, 189
- Elektro-optični pojav, 179  
    kvadratni, *glej* Kerrov pojav  
    linearni, *glej* Pockelsov pojav

- Elektro-optični tenzor, 180  
Elektromagnetno valovanje, 11, 71  
Energijska reža, 134  
Energijski nivoji  
    argon, 124  
    CO<sub>2</sub>, 126  
    ekscimer, 127  
    He-Ne, 122  
    Nd:YAG, 128  
    Ti:safir, 130  
Erbij, 128, 132, 231  
Evanescentno polje, 16, 232, 234  
  
Fabry-Perotov interferometer, 53, 55, 64, 69  
Faktor  $M^2$ , 40  
Fermi-Diracova porazdelitev, 135  
Fermijeva energija, 135  
Fotocelica, *glej* Fotodioda, vakumska  
Fotodioda, 251, 261  
    *p-i-n*, 251, 255, 256  
    *p-n*, 251, 255  
    fotovoltaik, 251, 253, 254  
    heterostrukturna, 255  
    kratko sklenjena, 251, 253, 254  
    plazovna, 241, 246, 256, 257, 263  
    polprevodniška, 241, 246, 264  
    prevodna smer, 251, 252  
    Schottkyjeva, 255, 257  
    vakumska, 241, 246  
    zaporna smer, 251, 253, 255, 256  
Fotoefekt, 241, 246  
    notranji, 246, 249, 251  
    zunanji, 246  
Foton, 73  
Fotona d.o.o., 129  
Fotopomnoževalka, 246, 249, 263  
Fotoprevodnik, 246, 249, 257  
Fotupornik, *glej* Fotoprevodnik  
Fouriereva optika, 38  
Fouriereva spektroskopija, 32  
Frankova prosta energija, 204  
Fraunhoferjev uklon, 20, 34, 37, 44  
Frederiksov prehod, 204  
Fresnel-Kirchhoffov integral, 18  
Fresnelov uklon, 19, 34, 37, 38, 44  
Fresnelove enačbe, 15  
Fresnelovo število, 20, 55, 62  
FTIR, 32  
  
GaAs, 134, 160, 163, 181, 248  
GaAsP, 142  
GaP, 134, 160  
GaSe, 160  
Gaussov snop, 39, 42, 56  
    bližnje polje, 40  
    divergenca, 40  
    efektivni polmer, 216, 233  
    faza, 41  
    frekvenčno podvajanje, 153, 154  
    grlo, 39  
    intenziteta, 42  
    krivinski radij, 41  
    polmer, 39  
Gaussov sunek, 225  
Generacija razlike frekvenc, 145  
Generacija vsote frekvenc, 145  
Germanij, 134, 249, 251, 263, 264  
Gibljivost, 250  
Gostota električnega toka, 250  
Gostota energije, 11, 13, 74, 199  
Gostota energijskega toka, 11–13, 167, 197, 212  
Gostota stanj, 53, 72, 77, 135, 141  
Gostota svetlobnega toka, *glej* Gostota energijskega toka  
Gouyeva faza, 42, 43, 61  
  
Hamiltonova funkcija, 73, 91  
Harmonski oscilator, 73, 89, 177, 219  
Helmholtzeva enačba, 11, 38, 45, 209, 213, 230  
Hermite-Gaussovi snopi, 43, 66  
Heterodinska detekcija, 265  
Heterostruktura, 140  
Hitrost valovanja, 10, 21  
    fazna, 208  
    grupna, 170, 208, 220, 225  
    solitonov, 167  
Hologram, 197  
Homodinska detekcija, 266  
Huygensovo načelo, 19  
  
InAs, 134  
Infrardeče valovanje, 17, 32, 122, 125, 128, 132, 140, 147, 156, 158, 228, 241, 245, 246, 248, 249, 251, 257, 263, 266  
InGaAs, 251  
InSb, 134  
Intenziteta, 29  
Interferenca, 25, 28, 32, 35

- Iterbij, 128, 132  
 Izgube v optičnih vlaknih, 228  
     Rayleighovo sisanje, 228  
     spoj dveh vlaken, 233  
     ukriviljeno vlakno, 229  
 Izgube v resonatorju, 63, 67, 93, 94  
     notranje, 63  
 Izhodna moč laserja, 95  
 Izstopno delo, 246  
 Johnson-Nyquistov šum, *glej* Šum, termični  
 Johnsonov šum, *glej* Šum, termični  
 Jonesov vektor, 13  
 Jonesova matrika, 14  
 Kalcit, 24  
 Karakteristika diode, 253  
 Karakteristika fotodiode, 254, 256  
 KDP, 24, 144, 148, 152, 154, 181, 182, 184  
 Kerrov pojav, 180  
     optični, 161, 174, 240  
 Kerrov tenzor, 180  
 KH<sub>2</sub>PO<sub>4</sub>, *glej* KDP  
 Kirchhoffov integral, 18, 64  
 Kleinmanova domneva, 144  
 Koeficient  $M$ , 197  
 Koeficient ojačenja, 83, 96  
 Koherenčna dolžina, 28  
 Koherenčna ploskev, 33, 34  
 Koherenčna razdalja, 26, 32  
 Koherenčni čas, 25, 28, 30  
 Koherenca, 25  
     časovna, 25, 27  
     prostorska, 26, 32  
 Kompleksna ukriviljenost, 42  
 Kompleksni krivinski radij, 42  
 Kvantizacija polja, 71, 88  
 Kvantna limita detekcije, 265  
 Kvantni izkoristek, 247, 250  
     notranji, 247  
     zunanji, 247  
 Kvazi-Fermijeva energija, 136  
 Laguerre-Gaussovi snopi, 44  
 Lambova vdolbina, 87  
 Laser, 93, 121  
     argonov, 81, 124, 127  
     CO<sub>2</sub>, 125, 127  
     ekscimerni, 127  
     He-Ne, 48, 81, 84, 85, 122, 127  
     kvantne pike, 141  
     Nd:steklo, 129, 130  
     Nd:YAG, 81, 84, 85, 128, 129, 147  
     organska barvila, 131, 227  
     polprevodniški, 81, 134  
     Ramanski, 133  
     s potencialno jamo, 141  
     Ti:safir, 81, 129, 130, 227  
     VCSEL, 141  
     vlakenski, 29, 59, 132  
     zgradba, 123, 124, 126, 129, 133, 139  
 Laserski sistemi, 121  
 Lastne frekvence resonatorja, 53, 54, 61  
 LED, 29, *glej* Svetlobne diode  
 LiNbO<sub>3</sub>, 24, 144, 158, 159, 178, 181, 184, 190  
 LiTaO<sub>3</sub>, 244, 245  
 Lomni količnik, 10, 21, 22, 150, 179, 183, 190,  
     191, 198, 207  
     efektivni, 162  
     izredni, 22  
     nelinearni, 162  
     redni, 22  
 Lomni zakon, 15, 23  
 Magnetizacija, 9  
 Magnetna permeabilnost, 9  
 Magnetno polje  
     gostota, 9, 11  
     jakost, 9  
 Makerjeve oscilacije, 149  
 Marcusejeva formula, 216, 234  
 Matrike ABCD, 49, 51, 60  
 Maxwellova porazdelitev, 85  
 Maxwellove enačbe, 9  
     robni pogoji, 10  
 Metoda sklopjenih valov, 194  
 Metoda vzdolžnega premika, 165  
 Michelsonov interferometer, 27  
 Multipleksiranje, 229  
 Nasičena absorpcija, 79  
     nehomogeno razširjene črte, 85  
 Navzkrižna fazna modulacija, 240  
 Navzkrižna korelacijska funkcija, 33  
 Nedejavni žarek, 157  
 Nelinearna optika, 143  
     drugega reda, 145, 239  
     tretjega reda, 161, 240  
     v vlaknih, 239  
 Neodim, 132

- Neujemanje faz, 158  
Ničelna energija, 73  
Normirana frekvenca, 212  
Notranje ojačenje, 256, 263  
Numerična odprtina, 207  
Nyquistov šum, *glej* Šum, termični
- Obosna valovna enačba, 38, 43, 56, 155, 165, 225  
Obrnjena zasedenost, 81, 82, 95, 231  
Ojačenje s stimuliranim sevanjem, *glej* Stimulirano sevanje  
Ojačenje signala, 250  
Ojačenje svetlobe v polprevodnikih, 136  
Ojačevanje s stimuliranim sevanjem, *glej* Stimulirano sevanje  
Omejen snop, 37  
Operator  
    anihilacijski, 89  
    kreacijski, 89  
Optična fazna konjugacija, 172, 173  
Optična os, 22  
Optična pinceta, 193  
Optični parametrični oscilator, 158  
Optični vodnik, 207  
    število rodov, 212  
    enorodovni, 208, 211  
    lastni rodovi, 209  
    lihi rodovi, 210  
    plašč, 207  
    planparalelni, 207, 209, 229  
    sodi rodovi, 210  
    sredica, 207  
    TE rodovi, 209  
    TM rodovi, 212  
    večrodoni, 211  
Optično črpanje, 82  
Optično frekvenčno podvajanje, 145, 147, 153, 239  
Optično ojačevanje, 81, 84, 93  
    v vlaknih, 178, 231  
Optično parametrično ojačevanje, 156  
Optično usmerjanje, 145, 159  
Optično vlakno, 132, 207, 213  
    dopirano z erbijem, 231  
    EH rodovi, 216  
    enorodovno, 208, 213, 224, 228  
    HE rodovi, 216  
    LP rodovi, 217  
    parabolični profil, 219  
TE rodovi, 214  
TM rodovi, 214  
večrodonno, 213, 221
- Paraksialna enačba, *glej* Obosna valovna enačba  
Parametrično ojačevanje, *glej* Optično parametrično ojačevanje  
Pasovna širina detekcije, 261  
PbS, 249  
Piksel, 257, 259  
Piroelektrični detektor, 241, 244  
Planckov zakon, 74, 263  
Ploščica  $\lambda/2$ , 14, 184, 200  
Ploščica  $\lambda/4$ , 14, 187  
Ploskev valovnega vektorja, 21  
Pockelsov pojav, 180  
Pockelsov tenzor, *glej* Elektro-optični tenzor  
Poissonova porazdelitev, 260  
Polarizacija, 13  
    circularna, 13  
    eliptična, 13, 21  
    linearna, 13  
    TE, 15, 208  
    TM, 15, 208  
Polprevodniška fotodioda, *glej* Fotodioda, polprevodniška  
Polprevodnik, 134  
    izpraznjeni sloj, 252  
    tip  $n$ , 136, 252  
    tip  $p$ , 136, 252  
Porazdeljena povratna sklopitev, 141  
Poyntingov izrek, 11  
Poyntingov vektor, 11, 45  
Prag delovanja laserja, 94, 96, 139  
Preklop dobrote, 193  
Prekrivalni integral, 232, 233  
Presek za absorpcijo, 78, 84  
Presek za stimulirano sevanje, 83, 84  
Preslikava z lečo, 46
- Rabijeva frekvenca, 91  
Rabijkeve oscilacije, 91  
Raman-Nathov uklon, 191, 197  
Ramanovo sisanje, 133, 176  
    anti-Stokesovo, 176  
    stimulirano, 176, 240  
    Stokesovo, 176  
Ravni val, 12, 26, 37, 38, 71  
Rayleighova dolžina, 40

- Rayleighovo območje, *glej* Območje bližnjega polja  
 Rayleighovo sisanje, 176, 228  
 Razmerje signal proti šumu, 241, 261  
 Razpadni čas, 75  
 Resonator, 53, 93
  - ciklični, 59
  - koncentrični, 58, 59
  - konfokalni, 58, 61, 62, 65
  - nestabilni, 59
  - odprtji, 54
  - parametrični oscilator, 158
  - planparalelni, 56, 58, 59, 62
  - simetrični, 57
 Samo-fazna modulacija, 240  
 Samozbiranje, 161, 163  
 Saturacijska energija, 94  
 Saturacijska gostota toka, 79, 83  
 Schrödingerjeva enačba, 91
  - nelinearna, 166, 171
 Sekularna enačba
  - lihi rodovi, 210
  - sodi rodovi, 210
  - TE rodovi, 215
 Semiklasični model, 91  
 Sevanje črnega telesa, 29, 32, 73, 74, 76, 263  
 SFG, *glej* Generacija vsote frekvenc  
 SHG, *glej* Optično frekvenčno podvajanje  
 Silicij, 134, 249–251, 257, 263, 264  
 $\text{SiO}_2$ , 171, 178, 222, 223, 228, 239, 255, 257  
 Sklopitev štirih valov, 240  
 Sklopitev med valovodi, 233
  - 3-dB sklopitev, 237
 Sklopitev resonatorja
  - z okolico, 66
  - z resonatorjem, 70
 Sklopitev v optično vlakno, 232
  - čelna sklopitev, 232
  - bočna sklopitev, 232
 Soliton
  - krajevni, 163–165
  - optični, 168, 169, 240
 Spekter, 29
  - Gaussov, 29, 31, 85
  - Lorentzov, 29, 31, 63, 75, 84
  - Planckov, 32
  - Voigtov, 85
 Spektralna črta, 75, 98
  - homogena razširitev, 84, 128
 nehomogena razširitev, 84, 130  
 Spektralna gostota energije, 74–77  
 Spoj  $p$ - $n$ , 138, 142  
 Spontano sevanje, 75, 82, 90, 93  
 Stabilnost resonatorja, 55, 57, 60  
 Standardni odklon, 260  
 Stik  $p$ - $n$ , 252  
 Stimulirano sevanje, 76, 82, 90, 231  
 Stoječe valovanje, 53, 55, 66, 71  
 Susceptibilnost
  - efektivna, 147, 151, 177
  - električna, 9
  - kompleksna, 178
  - linearna, 143
  - magnetna, 9
  - nelinearna, 143, 144
  - nelinearna, efektivna, 162
 Svetlobe diode, 142  
 Svetlobne diode
  - OLED, 142
 Tekočekristalni prikazovalnik, 200  
 Tekoči kristali, 24, 198
  - 5CB, 198
  - direktor, 198
  - holesterik, 203
  - nematik, 198
  - zasukan nematik, 200, 201
 Telur, 24, 144, 153  
 $\text{TEM}_{00}$ , 43  
 $\text{TEM}_{n,m}$ , 43  
 Temni tok, 248, 253, 254, 263  
 Teraherčno valovanje, 159, 241, 243  
 Termistor, 243  
 Termičen, 241, 244  
 TGS, 244  
 Tirna vrtilna količina, 45  
 Totalni odboj, 16, 59, 207, 232  
 Trinivojski sistem, 81, 95, 122  
 Ujemanje faz, 149, 150, 153, 155, 157, 161, 239  
 Uklepanje faz, 193, 226, 227  
 Uklon, 17, 37, 64, 190, 191  
 Uklonska mrežica, 109, 126, 132, 191, 193, 227  
 Ultravijolično valovanje, 124, 127, 153, 228, 241, 246, 248, 251, 255  
 Valovna enačba, 10, 213

- nelinearna, 145, 169, 174
- Valovni vektor, 12, 71, 208
- Valovno število, 11, 209
- van Cittert-Zernikov izrek, 34
- Varianca, 260
- Verjetnost za prehod, 75, 88
- Wiener-Hinčinov izrek, 30
- Youngov poskus, 25, 32
- Z-scan, *glej* Metoda vzdolžnega premika
- Zaporni tok, *glej* Temni tok
- Zasedbene enačbe, 95
- Zasedenost stanj, 77
- Združevanje pikslov, 258
- ZnSe, 163
- ZnTe, 160, 181