

# FOTONIKA

Martin ČOPIČ  
Mojca VILFAN

Recenzenti: \*\*\*

Lektor: \*\*\*

Risbe in diagrami: Mojca Vilfan in Andrej Petelin

Oblikovanje, postavitev in prelom: Mojca Vilfan

Naslovne slike poglavij: Mojca Vilfan, Martin Rigler (str. 120 in 176), Andrej Petelin (str. 37), ESO (str. 93), Irena Drevenšek (str. 140), in NASA (str. 238)

©Kopiranje in razmnoževanje besedila ali njegovih delov ter slik je dovoljeno samo z odobritvijo avtorjev knjige.

LJUBLJANA, 2019

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Elektromagnetno valovanje .....</b>	<b>7</b>
1.1	Maxwellove enačbe	7
1.2	Valovna enačba in Poyntingov vektor	8
1.3	Monokromatski elektromagnetični val	9
1.4	Ravni val	10
1.5	Polarizacija EM valovanja	11
1.6	Lom in odboj EM valovanja	13
1.7	Uklon svetlobe	15
1.8	EM valovanje v anizotropnih snoveh	19
<b>2</b>	<b>Koherenca .....</b>	<b>23</b>
2.1	Youngov poskus	23
2.2	Koherenca navadnih svetil	24
2.3	Časovna koherenca	25
2.4	Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom	27
2.5	Prostorska koherenca	30
<b>3</b>	<b>Koherentni snopi svetlobe .....</b>	<b>35</b>
3.1	Omejen snop svetlobe	35
3.2	Obosna valovna enačba	36
3.3	Osnovni Gaussov snop	37
3.4	Snopi višjega reda	41
3.5	Besslov snop	43
3.6	Transformacije snopov z lečami	44
3.7	Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki	47
3.8	Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija	49
<b>4</b>	<b>Optični resonatorji .....</b>	<b>51</b>
4.1	Odprti resonatorji	51
4.2	Gaussovi snopi v resonatorjih	54
4.3	Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom	57

<b>4.4</b>	<b>Resonančne frekvence</b>	<b>58</b>
<b>4.5</b>	<b>Izgube v resonatorjih</b>	<b>60</b>
<b>4.6</b>	<b>*Obravnavo resonatorjev z uklonskim integralom</b>	<b>62</b>
<b>4.7</b>	<b>*Sklopitev resonatorja z okolico</b>	<b>64</b>
<b>4.8</b>	<b>*Sklopitev dveh resonatorjev</b>	<b>68</b>

# Predgovor

Fotonika je veda o svetlobi. Obsega izredno široka področja nastanka svetlobe in svetlobnih virov, uporabe svetlobe v različne namene, širjenja optičnih signalov in njihovega spreminjanja ter zaznavanja svetlobe. V zadnjih desetletjih je zato fotonika doživela izreden razcvet v raziskavah in tehnološki uporabi.

V pričajoči knjigi bomo obravnavali osnove fotonike. Po kratki ponovitvi splošne optike bomo spoznali delovanje laserjev in lastnosti laserske svetlobe, nadaljevali z nelinearnimi optičnimi pojavni in modulacijo svetlobe ter zaključili s prenosom in detekcijo laserskih signalov. Knjiga je zato zelo primerna predvsem za študente II. stopnje fizike, ki že imajo znanje optike in zahtevanih matematičnih prijemov, ga pa priporočava vsakemu, ki ga področje fotonike zanima, naj bo to ljubiteljsko ali profesionalno. Bralcu v razmislek sva dodala nekaj nalog, zahtevnejša podoglavlja pa so označena z zvezdico.

Prvotno gradivo za to knjigo je nastalo po zapisih s predavanj pri predmetu Elektrooptika in kasneje Fotonika ter Fizika laserjev. Gradivo sva dopolnila, posodobila in prilagodila obravnavani snovi pri predmetih Fotonika I in Fotonika II. Za pomoč pri pripravi se najlepše zahvaljujeva prof. dr. Ireni Drevenšek Olenik, ki je kot dolgoletna predavateljica Fotonike znatno pripomogla k oblikovanju te knjige, in Andreju Petelinu za pomoč pri delu ter ostalim sodelavcem z Odseka za kompleksne snovi Instituta "Jožef Stefan" za sodelovanje pri pripravi.

Avtorja

## Priporočena dodatna literatura

- A. Yariv in P. Yeh, Photonics, Sixth Edition, Oxford University Press, 2007.
- B. E. A. Saleh in M. C. Teich, Fundamentals of Photonics, 2nd Edition, Wiley, New Jersey, 2007.
- G. A. Reider, Photonics, An Introducion, Springer, Berlin, 2016.
- V. Degiorgio in I. Cristiani, Photonics, A Short Course, Springer International, 2016.
- W. T. Silfvast, Laser Fundamentals, Second Edition, Cambridge University Press, 2008.
- C. C. Davis, Lasers and Electro-Optics, Cambridge University Press, 2006.
- O. Svelto, Principles of Lasers, Fifth Edition, Springer, New York, 2010
- K. F. Renk, Basics of Laser Physics, Second Edition, Springer, Berlin, 2017.
- J. W. Goodman, Statistical Optics, Second Edition, Wiley, New Jersey, 2015.
- W. Demtröder, Laser Spectroscopy, Fifth Edition, Springer, Berlin, 2014.
- G. New, Introduction to Nonlinear Optics, Cambridge University Press, 2011.
- R. W. Boyd, Nonlinear Optics, Third Edition, Academic Press, 2008.

# 1. Elektromagnetno valovanje

Za začetek bomo osvežili osnove teorije elektromagnetnega polja in elektromagnetnega valovanja. Obnovili bomo zapis Maxwellovih enačb in valovne enačbe, opisali osnovne pojave valovanja (lom, odboj in uklon) in si na kratko ogledali razširjanje svetlobe v anizotropnih snoveh.

## 1.1 Maxwellove enačbe

Elektromagnetno polje v praznem prostoru opišemo z dvema vektorskima poljem, električnim in magnetnim, ki sta na splošno funkciji lege  $\mathbf{r}$  in časa  $t$ . Vsaki točki v prostoru lahko priredimo jakost električnega polja  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  in gostoto magnetnega polja  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Za opis elektromagnetnega polja v snovi vpeljemo dve dodatni količini. To sta gostota električnega polja  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  in jakost magnetnega polja  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . Vse te količine povezujejo Maxwellove enačbe<sup>1</sup>

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_e \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

Pri zapisu enačb smo upoštevali tudi izvore polj, to je gostoto električnega toka  $\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t)$  in gostoto naboja  $\rho_e(\mathbf{r}, t)$ , ki pa ju bomo v nadaljevanju izpuščali.

Poleg Maxwellovih enačb veljata zvezi

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{in} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}, \quad (1.6)$$

kjer  $\mathbf{P}$  označuje električno polarizacijo, to je gostoto električnih dipolov,  $\mathbf{M}$  pa magnetizacijo, to je gostoto magnetnega momenta. Polarizacija in magnetizacija sta odvisni od zunanjih polj  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$ . Na splošno sta njuni odvisnosti zelo zapleteni, v izotropnih in linearnih snoveh<sup>2</sup> pa se zvezi poenostavita v

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \mathbf{E} \quad \text{in} \quad \mathbf{M} = \frac{(\mu - 1)}{\mu \mu_0} \mathbf{B} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu - 1) \mathbf{H}. \quad (1.7)$$

Vpeljali smo električno  $\chi_e$  in magnetno  $\chi_m$  susceptibilnost ter dielektričnost  $\epsilon$  in magnetno permeabilnost  $\mu$ . Ko združimo gornje enačbe, lahko zapišemo dve konstitutivni relaciji

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad \text{in} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu}. \quad (1.8)$$

V linearnih anizotropnih snoveh moramo namesto skalarnih vrednosti  $\epsilon$  in  $\mu$  zapisati tenzorje.

<sup>1</sup>Škotski fizik James Clerk Maxwell, 1831–1879.

<sup>2</sup>Med nelinearne snovi, za katere napisani zvezi ne veljata, sodijo na primer feroelektrični in feromagneti.

### Robni pogoji

Navedene Maxwellove enačbe zadoščajo za opis elektromagnetnega polja v neomejeni snovi, kjer so vse komponente polj zvezne funkcije. Za obravnavo v omejeni snovi moramo vedeti tudi, kaj se z elektromagnetnim poljem zgodi na meji dveh sredstev. Pri prehodu iz enega dielektrika v drugega se ohranjata normalni komponenti gostote električnega in magnetnega polja ter tangentni komponenti jakosti električnega in magnetnega polja (slika 1.1)

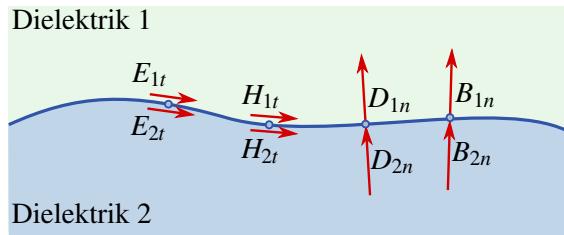
$$D_{1n} = D_{2n} \quad (1.9)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (1.10)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1.11)$$

$$H_{1t} = H_{2t}. \quad (1.12)$$

Privzeli smo, da na meji med dielektrikoma ni površinskih tokov ali nabojev, sicer bi morali robna pogoja za  $D_n$  in  $H_t$  ustreznno popraviti. Na meji dielektrika z idealnim prevodnikom (kovino, zrcalom) so robni pogoji drugačni. Za magnetno polje jih ne moremo preprosto zapisati, za električno polje pa velja, da mora biti tangentna komponenta jakosti električnega polja enaka nič. Posledica tega pogoja je, da se pri pravokotnem vpisu na zrcalo faza valovanja spremeni za  $\pi$ .



Slika 1.1: Na meji med dvema dielektrikoma brez površinskih tokov in nabojev se ohranjata tangentni komponenti  $E_t$  in  $H_t$  ter normalni komponenti  $D_n$  in  $B_n$ .

## 1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor

Večinoma bomo obravnavali elektromagnetna valovanja v izotropnih, homogenih in linearnih snoveh brez zunanjih izvorov in nosilcev naboja ( $\mathbf{j}_e = 0$  in  $\rho_e = 0$ ). Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpeljemo valovni enačbi za jakost električnega in gostoto magnetnega polja

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in} \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.13)$$

Pri tem je hitrost valovanja v snovi enaka

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c_0}{n}. \quad (1.14)$$

Magnetne in dielektrične lastnosti snovi smo pospravili v lomni količnik  $n$ , ki pove, kolikokrat je hitrost svetlobe v snovi manjša od hitrosti svetlobe v praznem prostoru. Velja

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (1.15)$$

Za izotropno in nemagnetno snov ( $\mu = 1$ ) je lomni količnik  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

Vpeljimo še vektor gostote energijskega toka, to je Poyntingov vektor<sup>3</sup>  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (1.16)$$

Iz lastnosti vektorskega produkta sledi, da je smer energijskega toka vedno pravokotna na smeri  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{H}$ . Gostoto energijskega toka  $j$ , to je količino energije, ki v danem času preteče skozi dano ploskev z normalo  $\hat{\mathbf{n}}$ , izračunamo kot časovno povprečje projekcije Poyntingovega vektorja

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle. \quad (1.17)$$

Gostoto energijskega toka  $j$  imenujemo tudi gostota svetlobnega toka.

Poyntingov izrek, ki ga lahko izpeljemo neposredno iz Maxwellovih enačb in konstitutivnih relacij, predstavlja izrek o ohranitvi energije. Za valovanje v homogeni izotropni snovi tako velja

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.18)$$

kjer je  $w$  celotna gostota energije elektromagnetnega polja. Zapišemo jo kot

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_0 \mathbf{B}^2. \quad (1.19)$$

Valovno enačbo in ohranitvene zakone lahko zapišemo tudi za anizotropne, nehomogene ali nelinearne snovi. Nekaj teh primerov bomo srečali v nadaljevanju in jih bomo obravnavali sproti.

### 1.3 Monokromatski elektromagnetični val

Reševanje valovne enačbe navadno poenostavimo s kompleksnim zapisom električnega in magnetnega polja. Račun si oglejmo na primeru monokromatskega elektromagnetnega vala. Nastavek za monokromatski val s krožno frekvenco  $\omega$  naj bo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}) \quad \text{in} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re(\mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}), \quad (1.20)$$

kjer sta  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  in  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  časovno neodvisna vektorja jakosti električnega in gostote magnetnega polja s kompleksno amplitudo. Podobno lahko vpeljemo tudi kompleksne vektorje  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  in  $\mathbf{H}$ , ki opisujejo realne količine (polarizacijo, magnetizacijo, gostoto električnega in jakost magnetnega polja). V nadaljevanju bomo večinoma pisali polja v kompleksni obliki, pri čemer se bomo držali gornje definicije. Zavedati pa se moramo, da je uporaba kompleksnega zapisa zgolj računski pripomoček, na koncu je treba rezultate vedno izraziti z realnimi količinami.

Če vstavimo nastavka za monokromatski val (enačbi 1.20) v valovni enačbi (enačbi 1.13), dobimo Helmholtzevi enačbi<sup>4</sup> za kompleksna vektorja jakosti električnega in gostote magnetnega polja. V homogenem in izotropnem sredstvu ju zapišemo kot

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.22)$$

kjer je  $k = nk_0 = n\omega/c_0$  valovno število. Vpeljemo lahko tudi kompleksni Poyntingov vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}). \quad (1.23)$$

<sup>3</sup>Angleški fizik John Henry Poynting, 1852–1914.

<sup>4</sup>Nemški fiziolog in fizik Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821–1894.

**Naloga 1.3.1** Upoštevajoč izraz za Poyntingov vektor  $\mathbf{S}$  (enačba 1.16) pokaži, da lahko gostoto svetlobnega toka  $j$  (ozziroma povprečje projekcije Poyntingovega vektorja) izrazimo s kompleksnim Poyntingovim vektorjem  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \Re(\mathbf{S}(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.24)$$

## 1.4 Ravni val

Osnovna rešitev valovne enačbe (enačba 1.13) je ravni val. Nastavek, ki predstavlja ravni val in hkrati reši Helmholtzevo enačbo (enačba 1.21), je oblike

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \quad (1.25)$$

in podobno za magnetno polje

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \quad (1.26)$$

pri čemer sta vektorja  $\mathbf{E}_0$  ter  $\mathbf{B}_0$  od kraja in časa neodvisna. Velikost valovnega vektorja  $\mathbf{k}$  je valovno število  $k = nk_0$ , kjer je  $n$  lomni količnik izotropne in homogene snovi.

Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledijo zveze o ortogonalnosti količin električnega in magnetnega polja. Vedno sta med seboj pravokotna vektorja jakosti električnega  $\mathbf{E}$  in magnetnega polja  $\mathbf{H}$  (naloge 1.4.1), ki sta po definiciji tudi vedno pravokotna na Poyntingov vektor  $\mathbf{S}$  (enačba 1.16). V izotropnih snoveh je Poyntingov vektor vzporeden valovnemu vektorju, zato sta v izotropnih snoveh  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{H}$  hkrati pravokotna na valovni vektor  $\mathbf{k}$ . Elektromagnetno valovanje je torej transverzalno valovanje. Zaradi enolične zveze med električnim in magnetnim poljem zadošča za opis ravnega vala le eno polje, navadno se odločimo za električno.

**Naloga 1.4.1** Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) pokaži, da za ravni val vedno velja

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}. \quad (1.27)$$

Izpelji še zvezi

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad \text{in} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mu \mu_0 \mathbf{H}_0, \quad (1.29)$$

iz katerih izhaja, da v izotropni snovi velja  $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k}$ .

Energijski tok je pri ravnem valu v izotropni snovi vedno v smeri valovnega vektorja, pravokotno na valovne fronte. Iz definicije za gostoto svetlobnega toka (enačba 1.24) ter Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledi

$$j = \frac{1}{4} E_0 H_0^* + \frac{1}{4} E_0^* H_0 = \frac{1}{2} c_0 n \epsilon_0 |E_0|^2. \quad (1.30)$$

Gostota svetlobnega toka je torej sorazmerna s kvadratom amplitude jakosti električnega polja. Poglejmo nekaj primerov. Gostoti toka  $j = 1 \text{ kW/m}^2$  (približna gostota svetlobnega toka s Sonca na Zemljinem površju) v praznem prostoru ustrezja jakost električnega polja  $E_0 = 868 \text{ V/m}$ , gostoti  $j = 1 \text{ W}/\mu\text{m}^2$  (močno zbran laserski žarek) pa  $E_0 = 27 \text{ MV/m}$ .

Zapišimo še povprečno gostoto energije valovanja. K energiji prispevata tako magnetno kot električno polje. Oba prispevka sta enaka, zato velja

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \epsilon \epsilon_0 |E_0|^2 + \frac{1}{4} \frac{|B_0|^2}{\mu \mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 |E_0|^2. \quad (1.31)$$

Povprečna gostota energije  $w$ , pomnožena s hitrostjo svetlobe v snovi, da gostoto energijskega oziroma svetlobnega toka  $j$

$$j = cw = \frac{1}{2} c \epsilon \epsilon_0 |E_0|^2 = \frac{1}{2} c_0 n \epsilon_0 |E_0|^2. \quad (1.32)$$

Prva enakost nazorno kaže, da je gostota svetlobnega toka pravzaprav pretok energije. To si lahko predstavljamo, če vzamemo valj s prečnim presekom  $S$  in dolžino  $c\Delta t$ . V volumnu  $Sc\Delta t$  je potem shranjene  $wSc\Delta t$  energije. Energija, ki preteče skozi presek  $S$  v času  $\Delta t$ , je ravno  $cw$ .

Gostota svetlobnega toka ravnega vala je neodvisna od kraja in časa, iz česar sledi, da je povsod po prostoru enaka. Če bi hoteli izračunati energijo, ki jo nosi ravni val, bi opazili, da je ta energija neskončna. To seveda ni mogoče, zato se je vedno treba zavedati, da je ravni val le idealiziran, a nazoren in praktičen približek elektromagnetnega vala.

## 1.5 Polarizacija EM valovanja

Jakost električnega polja elektromagnetnega valovanja je v izotropnem sredstvu vedno pravokotna na smer valovnega vektorja<sup>5</sup>. Vektor  $\mathbf{E}_0$  tako leži v ravnini, ki je pravokotna na smer valovnega vektorja, njegovo smer pa opiše polarizacija.

Električno polje ravnega vala lahko razstavimo na dve medsebojno pravokotni komponenti vektorja  $\mathbf{E}_0$ . Ti dve komponenti nihata sinusno z enako frekvenco, lahko pa se razlikujeta v amplitudi in fazi. Na splošno je ravni val eliptično polariziran in vrh vektorja električne poljske jakosti  $\mathbf{E}_0$  v ravnini, ki je pravokotna na smer širjenja, orisuje elipso. Kadar je elipsa izrojena v daljico, govorimo o linearu polariziranem valu, kadar pa je krog, govorimo o cirkularno polariziranem valu. Poljubno polarizacijo lahko vedno zapišemo kot vsoto dveh linearu ali dveh cirkularno polariziranih valovanj.

Priročen zapis polarizacije je s kompleksnim Jonesovim vektorjem<sup>6</sup>  $\mathbf{J}$ . Za monokromatski ravni val, ki se širi v smeri  $z$  in ima komponenti  $E_x$  in  $E_y$ , je Jonesov vektor

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|E_0|} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Dodali smo normalizacijski faktor  $|E_0| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}$ , da je Jonesov vektor normiran in  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* = 1$ . Ravni val, linearu polariziran v smeri  $x$ , tako zapišemo kot  $\mathbf{J} = (1, 0)$ , val, ki je linearu polariziran pod kotom  $45^\circ$  glede na osi  $x$  in  $y$ , pa je  $\mathbf{J} = (1, 1)/\sqrt{2}$ . Za zapis cirkularno polariziranega valovanja ni enotnega dogovora, tukaj zapišimo desno cirkularno polarizirano valovanje kot  $\mathbf{J} = (1, -i)/\sqrt{2}$ , levo cirkularno polarizirano pa z  $\mathbf{J} = (1, i)/\sqrt{2}$ . V našem zapisu je desno polariziran val tisti val, pri katerem se električna poljska jakost na danem mestu vrti v desno, če gledamo proti izvoru valovanja.

<sup>5</sup>Na splošno velja  $\mathbf{E} \perp \mathbf{S}$  (enačba 1.16) in  $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$  (nalogi 1.4.1). To velja tudi v anizotropnih sredstvih, vendar je tam  $\mathbf{E} \nparallel \mathbf{D}$  in  $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{S}$ .

<sup>6</sup>Ameriški fizik Robert Clark Jones, 1916–2004.

Zapis z Jonesovim vektorjem je prikladen, saj omogoča preprost izračun prehoda ravnega vala skozi optične elemente, ki spreminja polarizacijo, a ohranjajo njegovo obliko. Na splošno se pri prehodu skozi optični element spremeni kompleksna amplituda  $\mathbf{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y})$

$$E_{2x} = A_{11}E_{1x} + A_{12}E_{1y} \quad (1.34)$$

$$E_{2y} = A_{21}E_{1x} + A_{22}E_{1y}, \quad (1.35)$$

pri čemer so komponente  $A_{ij}$  odvisne od lastnosti elementa. Enačbi zapišemo v matrični obliki  $\mathbf{E}_2 = A \cdot \mathbf{E}_1$  oziroma z Jonesovimi vektorji  $\mathbf{J}_2 = A \cdot \mathbf{J}_1$ , kjer  $\mathbf{J}_1$  in  $\mathbf{J}_2$  opisujeta polarizaciji vstopnega in izstopnega vala,  $A$  pa je Jonesova matrika. Jonesova matrika za prehod skozi linearni polarizator, ki polarizira v smeri  $x$ , je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

za polarizator, orientiran pod kotom  $45^\circ$  glede na os  $x$ , pa

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Oglejmo si še dva zanimiva primera. Jonesova matrika za optični element, ki eni komponenti doda fazni zamik  $\pi$  (tak element imenujemo ploščica  $\lambda/2$ ), je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Ploščica  $\lambda/2$  tako spremeni desno cirkularno polariziran val v levo polariziran in obratno, linearno polariziran val pa prezrcali čez koordinatno os. Podobno je Jonesova matrika za element, ki eni komponenti doda fazni zamik  $\pi/2$  (imenujemo ga ploščica  $\lambda/4$ ), enaka

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Ploščica  $\lambda/4$  linearno polarizirano valovanje z Jonesovim vektorjem  $(1, 1)/\sqrt{2}$  spremeni v levo cirkularno polarizirano valovanje, cirkularno polarizirano valovanje pa nazaj v linearne.

---

**Naloga 1.5.1** Pokaži, da je Jonesova matrika za polarizator, ki prepušča polarizacijo pod kotom  $\vartheta$  glede na os  $x$ , podana z matriko

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Namig: matriko  $A'$ , ki opisuje polarizator v smeri  $x$ , zapiši v zasukanem koordinatnem sistemu  $A = R(\vartheta) \cdot A' \cdot R(\vartheta)^T$ , kjer je  $R(\vartheta)$  rotacijska matrika.

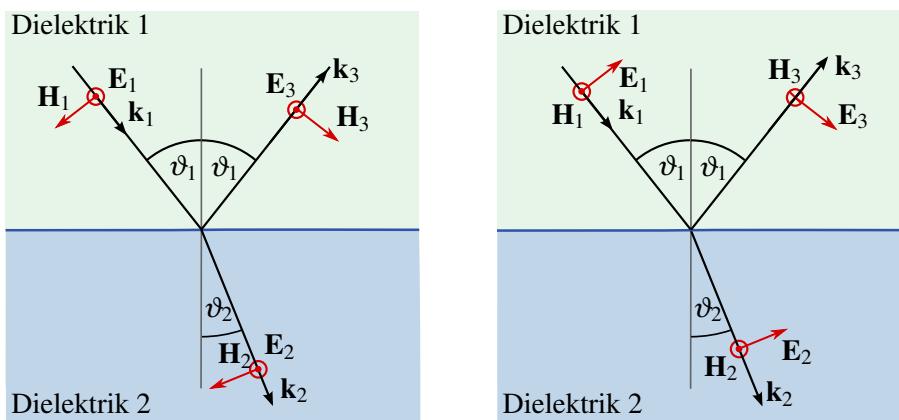
---

## 1.6 Lom in odboj EM valovanja

Na ravni meji med dvema izotropnima dielektrikoma se del svetlobe odbije po odbojnem zakonu, ki pravi, da je odbojni kot enak vpadnemu, del pa lomi po lomnem zakonu

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2. \quad (1.41)$$

S kotoma  $\vartheta_1$  in  $\vartheta_2$  smo označili vpadni in lomni kot,  $n_1$  in  $n_2$  pa sta lomna količnika prve in druge snovi (slika 1.2). Poglejmo, kaj se pri lomu in odboju zgodi s polarizacijo valovanja. Dogovorimo se, da valovanje, pri katerem je električna poljska jakost pravokotna na vpadno ravnino, imenujemo transverzalno električno (TE) valovanje. Kadar leži jakost električnega polja v vpadni ravnini in je na vpadno ravnino pravokotna jakost magnetnega polja, govorimo o transverzalnem magnetnem valovanju (TM).



Slika 1.2: Lom elektromagnetnega valovanja na meji dveh izotropnih dielektrikov. Levo: transverzalno električno (TE) valovanje. Desno: transverzalno magnetno (TM) valovanje.

Z  $E_1$  označimo amplitudo jakosti električnega polja vpadnega valovanja, z  $E_2$  prepuščenega in z  $E_3$  odbitega. Nato vpeljemo amplitudno prepustnost  $t$  in amplitudno odbojnost  $r$ , ki pa sta odvisni od vpadne polarizacije. Zapišemo

$$E_{2\text{TE}} = t_{\text{TE}} E_{1\text{TE}} \quad (1.42)$$

$$E_{2\text{TM}} = t_{\text{TM}} E_{1\text{TM}}. \quad (1.43)$$

Koeficiente  $r$  in  $t$  izračunamo iz robnih pogojev (enačbe 1.9–1.12). Enačbe, ki opisujejo odvisnost odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota za različni vpadni polarizaciji, imenujemo Fresnelove enačbe<sup>7</sup>. Za TE polarizacijo velja

$$r_{\text{TE}} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \quad \text{in} \quad t_{\text{TE}} = 1 + r_{\text{TE}} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \quad (1.44)$$

in za TM polarizacijo

$$r_{\text{TM}} = \frac{n_1 \cos \vartheta_2 - n_2 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1} \quad \text{in} \quad t_{\text{TM}} = (1 + r_{\text{TM}}) \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} = \frac{2n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}. \quad (1.45)$$

<sup>7</sup>Francoski fizik in inženir Augustin Jean Fresnel, 1788–1827.

Na splošno sta odbojnost  $r$  in prepustnost  $t$  kompleksni količini, saj iz lomnega zakona sledi, da je  $\cos \vartheta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \vartheta_1}$  lahko kompleksen. Velikost števila  $|r|$  tako predstavlja odbojnost, argument  $\arg(r)$  pa spremembo faze pri odboju.

Amplitudna odbojnost  $r$  in amplitudna prepustnost  $t$  povesta, kako se spremeni kompleksna amplituda jakosti električnega polja pri odboju oziroma lomu. Razmerje med gostoto energijskega toka odbite in vpadne svetlobe  $\mathcal{R}$  oziroma prepuščene in vpadne svetlobe  $\mathcal{T}$  izračunamo kot

$$\mathcal{R} = |r|^2 \quad \text{in} \quad \mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}. \quad (1.46)$$

Slednja enačba sledi iz ohranitve energije. Na splošno  $\mathcal{T}$  ni enak  $|t|^2$ , saj energijski tok potuje po različnih snoveh in v različnih smereh. Velja zveza

$$\mathcal{T} = \frac{n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1} |t|^2. \quad (1.47)$$

Najpreprostejši primer je pravokotni vpad svetlobe na mejo dveh sredstev. Zaradi simetrije sta v tem primeru odbojnost in prepustnost neodvisni od polarizacije. Sledi

$$r_{\text{TE}} = r_{\text{TM}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{in} \quad t_{\text{TE}} = t_{\text{TM}} = \frac{4n_1 n_2}{n_1 + n_2}. \quad (1.48)$$

Ob pravokotnem vpodu iz zraka na steklo ( $n_1 = 1$  in  $n_2 \approx 1,5$ ) je tako odbojnost

$$\mathcal{R} = \left( \frac{1 - n_2}{1 + n_2} \right) \approx 0,04. \quad (1.49)$$

Poglejmo še odvisnost odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota (slika 1.3). Pri tem je pomembno, ali se svetloba lomi v optično gostejše ( $n_1 < n_2$ ) ali v optično redkejše sredstvo ( $n_1 > n_2$ ). Najprej obravnavajmo primer loma v optično gostejšo snov (sliki a in c). Vidimo, da je pri nekem kotu, imenujemo ga Brewstrov kot<sup>8</sup>, odbojnost za TM polarizirano valovanje enaka nič. Posledično je ob vpodu pod Brewstrovim kotom odbito valovanje vedno TE polarizirano. Vse TM valovanje je prepuščeno, zato pri Brewstrovem kotu velja  $\mathcal{T}_{\text{TM}} = 1$  in  $\mathcal{T}_{\text{TE}} < 1$ .

---

**Naloga 1.6.1** Pokaži, da Brewstrov kot izračunamo kot

$$\vartheta_B = \arctan \left( \frac{n_2}{n_1} \right). \quad (1.50)$$

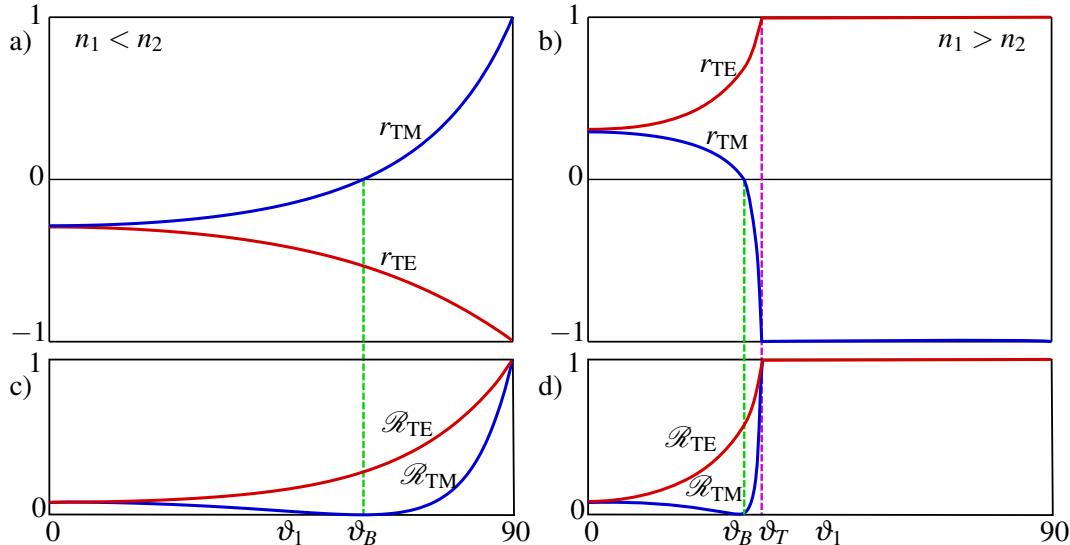

---

Negativen predznak odbojnosti  $r_{\text{TE}}$  pomeni, da ima odbiti TE polarizirani val pri vpodu na optično gostejše sredstvo nasprotno fazo od vpadnega. Za TM val je faza pri vpadnih kotih, manjših od Brewstrovega, nasprotna, pri večjih vpadnih kotih pa ima odbita svetloba enako fazo kot vpadna.

Pri vpodu na optično redkejše sredstvo (sliki 1.3 b in d) je pomemben še en kot, to je mejni kot totalnega odboja  $\vartheta_T = \arcsin(n_2/n_1)$ . Pri vpadnih kotih, ki so večji od  $\vartheta_T$ , se svetloba v celoti odbije in govorimo o totalnem ali popolnem odboju. Kljub temu električna poljska jakost v optično redkejšem sredstvu ni enaka nič, saj se tam pojavi evanescentno polje. To je polje, ki se širi v smeri mejne ravnine, njegova amplituda pa pojema eksponentno z oddaljenostjo od nje. Vdorna globina je odvisna od valovne dolžine valovanja, lomnega količnika snovi in tudi od vpadnega kota. Čeprav se v optično redkejši snovi pojavi električno polje, je Poyntingov vektor v smeri pravokotno na mejno ploskev v povprečju enak nič in zato ne pride do prenosa energije v drugo snov.

---

<sup>8</sup>Škotski fizik in znanstvenik Sir David Brewster, 1781–1868.



Slika 1.3: Amplitudna odbojnost  $r$  za obe vpadni polarizaciji (a, b) in razmerje med gostoto energijskega toka odbite in vpadne svetlobe  $\mathcal{R}$  za obe polarizacije (c, d) v odvisnosti od vpadnega kota. Za primer na slikah (a) in (c) velja  $n_1 < n_2$ , za primer na slikah (b) in (d) pa  $n_1 > n_2$ . Z zeleno je označen Brewstrov kot  $\vartheta_B$ , z vijolično pa mejni kot totalnega odboja  $\vartheta_T$ .

★ Prozorne ploščice, ki so postavljene pod Brewstrovim kotom glede na smer vpadne svetlobe, imenujemo Brewstrova okna. Njihova značilnost je, da eno polarizacijo (TM) prepustijo v celoti, druge polarizacije (TE) pa se del odbije, del pa prepusti. Brewstrova okna so zelo uporabna pri izdelavi resonatorjev plinskih laserjev, saj so izgube za izbrano polarizacijo zelo majhne, za drugo pa razmeroma velike.

★ Pri prehodu skozi optične elemente se – razen TM polariziranega valovanja pri Brewstrovem kotu – vedno nekaj svetlobe odbije. Da zmanjšamo te izgube, optične elemente navadno prekrijemo z antirefleksno plastjo, to je nanosom ene ali več primerno debelih plasti dielektrikov z ustreznimi lomnimi količniki. Zaradi destruktivne interference valovanj, odbitih na posameznih plasteh, se količina odbite svetlobe z izbrano valovno dolžino občutno zmanjša. Ker so laserji koherentni izvori svetlobe s točno določeno valovno dolžino, za zmanjšanje izgub, na primer v resonatorju laserja, uporabljamo optične elemente (leče, kristale, modulatorje ...) z ustrezeno antirefleksno plastjo.

## 1.7 Uklon svetlobe

Kadar svetloba vpade na oviro, za oviro nastane senca. Nastala senca ni ostra, ampak ima zaradi uklona zabrisane robove. Obravnave uklona svetlobe na odprtinah ali zaslonkah se lotimo z uporabo skalarnega približka teorije elektromagnetnega polja. To pomeni, da vpliva polarizacija ne upoštevamo. Ta je pomemben zgolj pri zelo majhnih odprtinah, kjer je velikost odprtine  $a$  po velikosti podobna valovni dolžini svetlobe  $a \sim \lambda$ . Vendar so tudi v tem primeru uklonske slike za različne polarizacije podobne, razlikujejo pa se po jakosti uklonjene svetlobe.

★ Primer, kjer skalarni približek ne da pravih rezultatov, je uklon na mrežici, narejeni iz zelo tankih prevodnih žic. Takšna mrežica deluje kot polarizator za vpadno elektromagnetno valovanje. Elektromagnetni val s polarizacijo, ki je vzporedna žicam, pri prečkanju v žicah inducira tok in val se delno odbije in delno absorbira. Za valovanje, ki je polarizirano pravokotno na žice, je inducirani tok bistveno manjši, saj je tok omejen na smer vzdolž žice. Posledično je val, polariziran pravokotno na žice, prepuščen, val, polariziran vzporedno z žicami, pa ne. Takšni polarizatorji se večinoma uporabljajo v mikrovalovni tehniki, vendar se v zadnjih letih z razvojem in izboljšavo litografskih postopkov vse pogosteje uporablja tudi v bližnjem infrardečem delu svetlobe.

Pri velikostih odprtin  $a \gg \lambda$  torej uporabimo skalarno obliko valovne enačbe (enačba 1.13)

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (1.51)$$

Časovna odvisnost polja  $E$  je harmonična funkcija in je sorazmerna z  $e^{-i\omega t}$ . Z uporabo Greenovega izreka jakost polja  $E_P$  v točki prostora  $P$  izrazimo s poljem na poljubni ploskvi, ki to točko obkroža. Zvezo opisuje Kirchhoffov integral<sup>9</sup>

$$E_P = -\frac{1}{4\pi} \oint \left( E \mathbf{n} \cdot \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \cdot \nabla E \right) dS, \quad (1.52)$$

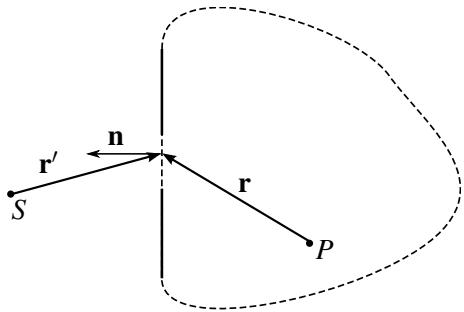
kjer je  $\mathbf{n}$  normala na ploskev, po kateri teče integral,  $r$  pa oddaljenost od  $P$  do dela ploskve  $dS$ .

Naj svetloba iz točkastega izvora v točki  $S$  (slika 1.4) vpada na zaslonsko ploskvo z odprtino poljubne oblike. Izračunajmo skalarno polje v točki  $P$  na drugi strani zaslona. Vpadno svetlobo zapišemo kot

$$E = A \frac{e^{ikr'}}{r'}, \quad (1.53)$$

kjer je  $r'$  razdalja od izvora do točke na zaslunu,  $A$  pa zaradi ohranitve energije konstanta.

Integracijska ploskev je lahko poljubna sklenjena ploskev, ki objema točko  $P$ . Izberemo ploskev, ki zajema odprtino na zaslunu, poleg tega pa naredimo še dva približka: jakost polja  $E$  in njen gradient doprineseta k integralu le na odprtini, na preostanku ploskve pa sta njuna prispevka zanemarljivo majhna; vrednost  $E$  in njen gradient sta na odprtini takšna, kot da zaslona ne bi bilo. Približka sta precej groba, vendar se izkaže, da se kljub temu dobro ujemata z eksperimentalno uklonsko sliko, s čimer upravičimo njuno uporabo.



Slika 1.4: Integracijska ploskev v Kirchhoffovem integralu zajema odprtino in objema točko  $P$ .

Kirchhoffov integral za točkast izvor svetlobe se zapiše kot integral po odprtini

$$E_P = -\frac{ikAe^{-i\omega t}}{4\pi} \int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} (\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')) dS. \quad (1.54)$$

Imenujemo ga Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral.

**Naloga 1.7.1** Uporabi Kirchhoffov integral (enačba 1.52) in pokaži, da za primer krožnega vpadnega vala (enačba 1.53) polje v točki  $P$  zapišemo s Fresnel-Kirchhoffovim integralom (enačba 1.54). Pri tem privzemi, da je oddaljenost točke  $P$  od odprtine  $r \gg \lambda$ .

<sup>9</sup>Nemški fizik Gustav Robert Kirchhoff, 1824–1887.

Oglejmo si poseben primer, ko leži točkast izvor svetlobe na osi okrogle odprtine. Polje v točki  $P$  izračunamo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi} \int E_S \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1) dS, \quad (1.55)$$

pri čemer  $E_S$  predstavlja kompleksno amplitudo vpadnega polja v odprtini

$$E_S = A \frac{e^{ikr'}}{r'}. \quad (1.56)$$

Zgornja oblika Fresnel-Kirchhoffovega integrala ni pravzaprav nič drugega kot matematičen zapis Huygensovega načela<sup>10</sup>. Spomnimo se, da Huygensovo načelo pravi, da lahko vsako točko valovne fronte obravnavamo kot izvor novega krogelnega vala. Točno to je zapisano tudi v gornjem integralu. Vpadni val  $E_S$  v vsakem od elementov odprtine  $dS$  vzbudi krogelno valovanje s kompleksno amplitudo

$$E = A_0 \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (1.57)$$

polje v izbrani točki  $P$  pa je vsota prispevkov posameznih krogelnih valovanj. Za razliko od osnovnega Huygensovega načela, v Fresnel-Kirchhoffovem integralu (enačba 1.55) nastopa še faktor  $(\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1)$ , ki poskrbi, da ni valovanja v smeri nazaj proti izvoru. Tudi faktor  $-i$  manjka v osnovnem Huygensovem načelu, pomeni pa, da je uklonjeno valovanje fazno zakasnjenjo za  $\pi/2$  glede na osnovno valovanje  $E_S$ .

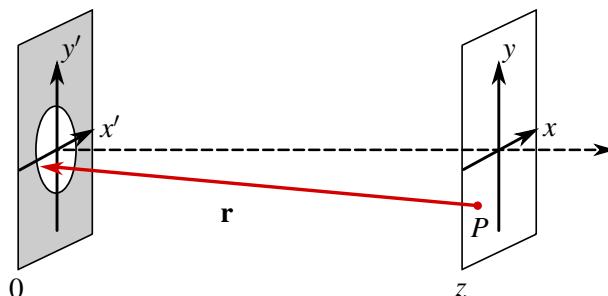
Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral uporabno razširimo z dodatkom prepustnostne funkcije odprtine  $T$ . Z njo na splošno popišemo amplitudne in fazne spremembe, do katerih pride na raznih odprtinah, lečah, uklonskih mrežicah ... Razširjen uklonski integral zapišemo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi} \int T(r') E_S(r') \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1) dS, \quad (1.58)$$

pri čemer smo upoštevali tudi splošno obliko vpadnega vala  $E_S(r')$ .

### Fraunhoferjev in Fresnelov približek

Izračun Fresnel-Kirchhoffovega uklonskega integrala (enačba 1.54) je na splošno zelo zapleten, zato se pogosto poslužujemo dveh približkov: Fraunhoferjevega<sup>11</sup> in Fresnelovega.



Slika 1.5: K izračunu Fraunhoferjevega in Fresnelovega uklona

<sup>10</sup>Nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens, 1629–1695.

<sup>11</sup>Nemški fizik Joseph von Fraunhofer, 1787–1826.

Izhajamo iz Fresnel-Kirchhoffovega integrala za točkast izvor (enačba 1.54) in zapišemo lego točke  $P$  s koordinatami  $x, y$  in  $z$ , razdaljo  $r$  pa s koordinatami točke  $P$  in koordinatama na zaslonu  $x'$  in  $y'$  (slika 1.5). Privzamemo, da je oddaljenost zaslona  $z$  bistveno večja od prečnih dimenzij  $x$  in  $y$ . Zapišemo razdaljo  $r$  in jo razvijemo

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \approx z + \frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z}. \quad (1.59)$$

Vstavimo razvoj v uklonski integral (enačba 1.55), pri čemer  $r$  v imenovalcu nadomestimo kar z  $z$ . Pridemo do Fresnelovega uklonskega približka

$$E_P(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \int \int E_S e^{ik((x-x')^2 + (y-y')^2)/2z} dx' dy'. \quad (1.60)$$

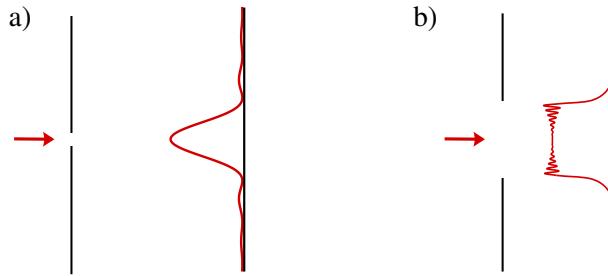
Kadar je oddaljenost zaslona dovolj velika oziroma so prečne dimenzije dovolj majhne, da zadošča razvoj do linearnih členov, govorimo o Fraunhoferjevem uklonu in uklonski integral je

$$E_P(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ik(z+(x^2+y^2)/2z)} \int \int E_S e^{-ik(xx'+yy')/z} dx' dy'. \quad (1.61)$$

V njem prepoznamo Fourierovo transformacijo polja  $E_S$ . Fraunhoferjeva uklonska slika velja za razmeroma velike oddaljenosti zaslona od uklonske odprtine, ko lahko uklonjeni val dovolj dobro opišemo z ravnim valom. Bolj zapleteno Fresnelovo uklonsko sliko moramo uporabiti, kadar obravnavamo primer bližnjega polja. Mejo med Fraunhoferjevim in Fresnelovim režimom kvalitativno določa Fresnelovo število

$$F = \frac{a^2}{L\lambda}. \quad (1.62)$$

Pri tem je  $a$  karakteristična dimenzija odprtine,  $L$  tipična oddaljenost zaslona od odprtine ter  $\lambda$  valovna dolžina svetlobe. V grobem velja, da lahko Fraunhoferjev približek uporabimo, kadar je  $F < 1$  in je odstopanje faze od ravnega vala znotraj odprtine majhno. Sicer moramo uklon obravnavati v Fresnelovem približku ali celo v polni obliki.



Slika 1.6: Značilna uklonska slika odprtine v Fraunhoferjevem (a) in Fresnelovem režimu (b)

**Naloga 1.7.2** Pokaži, da je v Fraunhoferjevi uklonski sliki uklon na okrogli odprtini podan z

$$I_P = I_0 \frac{4J_1(kap/z)}{kap/z}, \quad (1.63)$$

kjer je  $a$  polmer odprtine,  $J_1(x)$  je Besslova funkcija in  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

## 1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh

Do zdaj smo obravnavali elektromagnetno valovanje v izotropnih snoveh, v katerih je dielektričnost skalar in hitrost valovanja neodvisna od smeri. Na splošno so snovi anizotropne, dielektričnost je tenzor, hitrost potovanja svetlobe skozi snov pa je odvisna od smeri širjenja in od polarizacije valovanja.

Gostoto električnega polja v anizotropni snovi zapišemo kot

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \underline{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \mathbf{E}, \quad (1.64)$$

kjer je  $\underline{\epsilon}$  tenzor drugega ranga in ima na splošno devet komponent.

V dielektričnih snoveh, v katerih ne pride do optične aktivnosti ali absorpcije, je tenzor realen in simetričen  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$ . Tak tenzor lahko vedno diagonaliziramo, torej poiščemo koordinatni sistem, v katerem je diagonalen. V takem koordinatnem sistemu velja

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \mathbf{E} \quad (1.65)$$

in

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_0 \epsilon_1 E_1, \\ D_2 &= \epsilon_0 \epsilon_2 E_2, \\ D_3 &= \epsilon_0 \epsilon_3 E_3. \end{aligned} \quad (1.66)$$

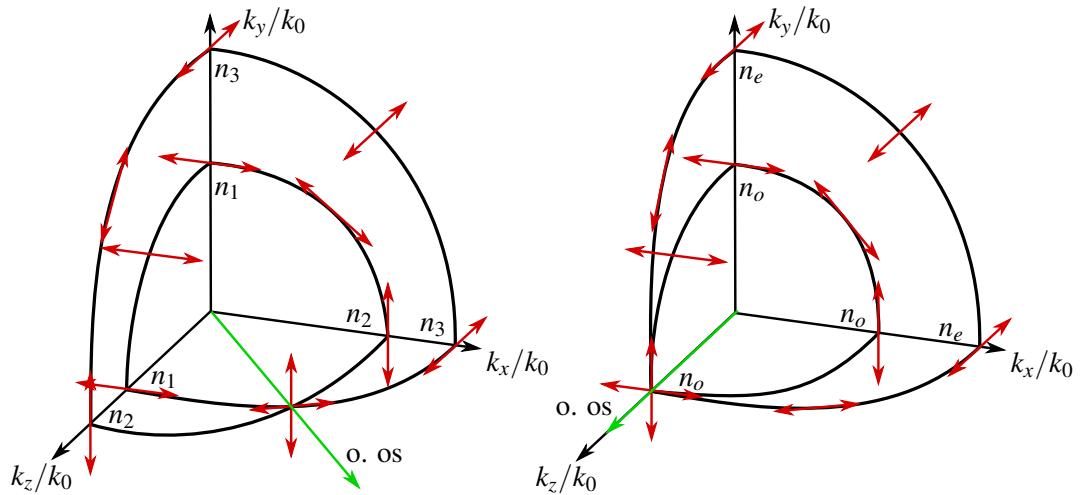
Glavne osi novega koordinatnega sistema določajo smeri, vzdolž katerih sta jakost in gostota električnega polja vzporedni, iz lastnih vrednosti pa izračunamo tri lomni količnike  $n_i = \sqrt{\epsilon_i}$ . Snovi, za katere so vse tri vrednosti  $n_i$  različne, imenujemo optično dvoosne snovi, medtem ko sta v optično enoosnih snoveh dve lastni vrednosti enaki  $n_1 = n_2$ . Če so enake vse tri lastne vrednosti, je snov izotropna.

### Ploskev valovnega vektorja

V anizotropnih snoveh je lomni količnik odvisen od smeri širjenja svetlobe in izkaže se, da tudi od njene polarizacije. Poglejmo najprej preprost primer, ko se svetloba širi vzdolž lastne osi, naj bo to os  $z$ . Če je vpadno valovanje polarizirano vzdolž lastne osi  $x$ , se pri prehodu skozi kristal polarizacija valovanja ohrani, lomni količnik za tak val je  $n_1$ . Podobno velja za val, polariziran v smeri  $y$ , za katerega je lomni količnik enak  $n_2$ . Če polarizacija valovanja, ki se širi vzdolž lastne osi  $z$ , ne sovpada z lastnima osema  $x$  ali  $y$ , nastane po prehodu skozi kristal iz vpadnega linearne polariziranega valovanja na splošno eliptično valovanje. Lastni komponenti namreč potujeta različno hitro, zato pride med njima do faznega zamika.

Za poljubno smer širjenja valovanja in poljubno polarizacijo je račun razmeroma zapleten. Formalen pristop izhaja iz valovne enačbe (enačba 1.13), v kateri moramo upoštevati tudi električno polarizacijo  $\mathbf{P} = \epsilon_0(\underline{\epsilon} - I)\mathbf{E}$ . Iz nje sledi sistem enačb za komponente valovnega vektorja in električne poljske jakosti.

Rešitev tega sistema najbolj nazorno predstavimo s ploskvijo valovnega vektorja, ki je sklenjena dvolistna ploskev (slika 1.7). Dvolistnost ploskve vodi pri vsakem valovnem vektorju  $\mathbf{k}$  do dveh rešitev in dveh različnih lomnih količnikov, od katerih vsak ustreza eni od ortogonalnih polarizacij. Točke, v katerih se ploskev dotika sama sebe in sta lomna količnika za obe polarizacije enaka, določajo smeri optičnih osi.



Slika 1.7: Dvolistna ploskev valovnega vektorja, pri čemer zaradi nazornosti rišemo le presečišča ploskve z geometrijskimi ravninami v prvem oktantu. V dvoosnem kristalu (levo) sta dve optični osi. Druga os ni narisana, leži pa simetrično glede na os  $z$ . Privzeli smo, da velja  $n_1 < n_2 < n_3$ . V optično enoosnem kristalu (desno) je le ena optična os, po dogovoru je to os  $z$ . Rdeče puščice označujejo ustrezno polarizacijo.

### Optično enoosni kristali

V optično enoosnih kristalih sta dve lastni vrednosti enaki. Lastne vrednosti izberemo tako, da velja  $n_1 = n_2 \neq n_3$ . Navadno vpeljemo nove oznake:  $n_1 = n_2 = n_o = n_{\perp}$ , ki ga imenujemo redni (*ordinary*) lomni količnik, in  $n_3 = n_e = n_{\parallel}$ , ki je izredni (*extraordinary*) lomni količnik. V eni smeri sta lomna količnika za obe polarizacije enaka in tisti smeri pravimo optična os. Po dogovoru je to os  $z$ . Hitrost valovanja, ki se širi vzdolž optične osi, je tako neodvisna od njegove polarizacije. Ker je optična os samo ena, imenujemo kristal optično enoosen.

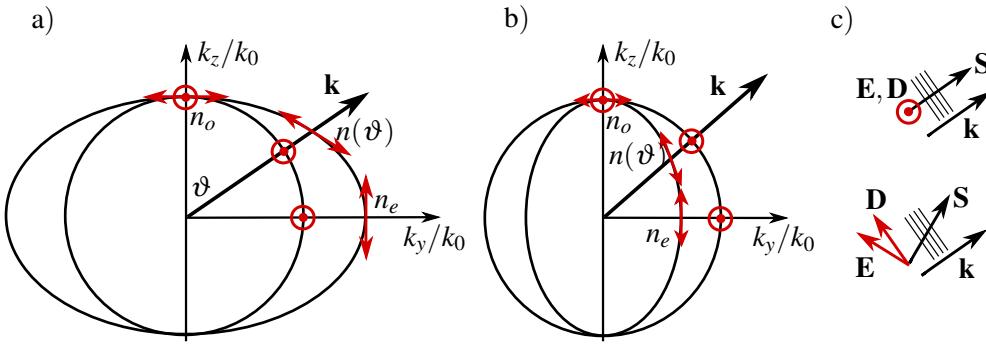
Za lažjo predstavo si oglejmo ploskev valovnega vektorja (slika 1.7, desno). V tem primeru ni treba obravnavati celotne ploskve, ampak zaradi rotacijske simetrije zadošča, da narišemo presek ploskve valovnega vektorja z vpadno ravnino, ki jo določata optična os in valovni vektor  $\mathbf{k}$ . Pomemben je le kot  $\vartheta$  med valovnim vektorjem  $\mathbf{k}$  in optično osjo  $z$ , zato si lahko drugo koordinatno os poljubno izberemo. Tukaj izberemo os  $y$  (slika 1.8).

Za vsako smer valovnega vektorja, torej za vsak kot  $\vartheta$ , obstajata dve rešitvi, ki pripadata dvema lastnima polarizacijama z ustrezнимi lomnimi količnikoma. Lomni količnik za žarek, ki je polariziran pravokotno na vpadno ravnino, je neodvisen od  $\vartheta$ . To je redni žarek, njegov lomni količnik pa je vedno  $n_o$ , ne glede na vpadni kot. Na skici temu žarku ustreza krožnica.

Žarek, katerega polarizacija leži v vpadni ravnini, je izredni žarek. Pripadajoč lomni količnik je odvisen od kota  $\vartheta$  in ga izračunamo iz sledeče enačbe elipse s polosema  $n_o$  in  $n_e$ :

$$\frac{1}{n^2(\vartheta)} = \frac{\cos^2 \vartheta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{n_e^2}. \quad (1.67)$$

Navadno sta pri ravnem valu vektorja  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{D}$  vzporedna, prav tako  $\mathbf{k}$  in  $\mathbf{S}$ . Žarek se širi v smeri valovnega vektorja, valovne fronte pa so pravokotne nanj. To velja tudi za redni žarek v anizotropnih snoveh. Izredni žarek pa ima, kot že ime nakazuje, "izredne" lastnosti. Vektorja  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{D}$  nista vzporedna, zato tudi valovni vektor  $\mathbf{k}$  ni vzporen energetskemu toku oziroma Poyntingovemu vektorju  $\mathbf{S}$  (slika 1.8 c). Smer energijskega toka, ki ni enaka smeri valovnega vektorja, določimo z normalo na elipso pri kotu  $\vartheta$ .



Slika 1.8: V optično enoosnih kristalih je lomni količnik odvisen od smeri valovnega vektorja  $\mathbf{k}$  in polarizacije. Poznamo pozitivno anizotropne snovi, pri katerih je  $n_e > n_o$  (a) in negativno anizotropne snovi, kjer velja  $n_e < n_o$  (b). V obeh primerih je redni žarek polariziran pravokotno na vpadno ravnino. Zanj velja, da je  $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$  in  $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$  (c, zgornje). Polarizacija izrednega žarka leži v vpadni ravnini. Smer  $\mathbf{S}$  ni vzporedna z valovnim vektorjem  $\mathbf{k}$ , prav tako valovne fronte niso pravokotne nanjo (c, spodaj). Primer je narisana za pozitivno anizotropno snov.

## Dvojni lom

Ko vpade žarek na snov, se lomi. Hitrost valovanja – in s tem tudi kot, pod katerim se lomi – je v anizotropnih snoveh odvisna od polarizacije. Pri zapisu lomnega zakona (enačba 1.41) v anizotropnih snoveh moramo biti zato pazljivi. Na splošno se pojavita dva lomljena žarka z različnima polarizacijama, kar da ime pojavi: dvolomnost (slika 1.9).

Za redni val s TE polarizacijo (pravokotno na vpadno ravnino) velja navadni lomni zakon, pri čemer je lomni količnik snovi enak rednjemu lomnemu količniku  $n_o$

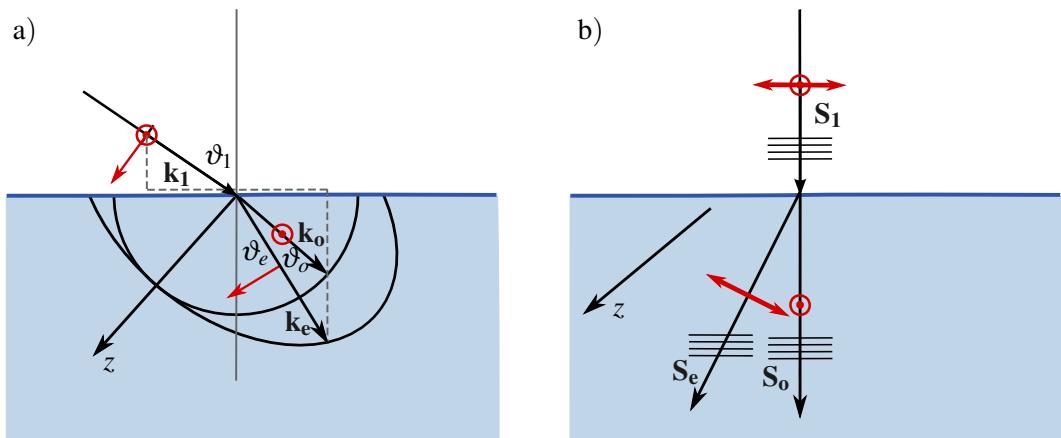
$$\sin \vartheta_1 = n_o \sin \vartheta_o. \quad (1.68)$$

Pri zapisu smo privzeli, da je lomni količnik snovi, iz katere valovanje prehaja v anizotropno snov, enak 1. Za izredni val s TM polarizacijo (električna poljska jakost leži v vpadni ravnini) prav tako zapišemo lomni zakon

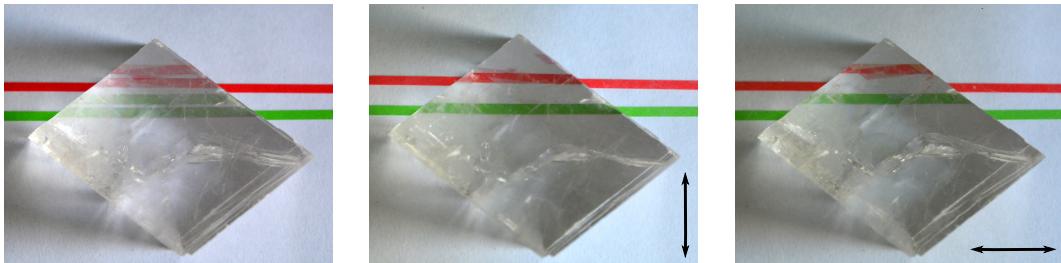
$$\sin \vartheta_1 = n(\vartheta_e) \sin \vartheta_e, \quad (1.69)$$

Ie da je lomni količnik  $n(\vartheta_e)$  odvisen od smeri širjenja valovanja in je določen z enačbo elipse (enačba 1.67).

Kadar vpada valovanje pravokotno na izotropno snov, se žarek ne lomi. V dvolomnih snoveh pa lahko tudi pri pravokotnem vpodu pride do razklona svetlobe (slika 1.9 b). Kadar je optična os nagnjena glede na vpadnico, sta valovna vektorja obih prepuščenih žarkov sicer vzporedna valovnemu vektorju vpadnega žarka ( $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_o \parallel \mathbf{k}_e$ ), razlikujeta pa se smeri Poyntingovih vektorjev ( $\mathbf{S}_1 \parallel \mathbf{S}_o \nparallel \mathbf{S}_e$ ). Ob prehodu skozi plast anizotropne snovi tako svetloba potuje v dveh smereh in nastaneta dve sliki z medsebojno pravokotnima polarizacijama (slika 1.10).



Slika 1.9: Dvojni lom. Pri poševnem vpadu na anizotropno snov se valovanje loči na dva različno polarizirana žarka (a). Če je optična os usmerjena pod poljubnim kotom glede na normalo mejne ravnine, pride do razklona svetlobe tudi pri pravokotnem vpadu. Valovna vektorja sta tudi v tem primeru kolinearna, Poyntingova vektorja pa imata različne smeri (b).



Slika 1.10: Dvojni lom v kristalu kalcita (islandski dvolomec). Po prehodu skozi kristal nastaneta dve razmazknjeni sliki in z linearnim polarizatorjem pokažemo, da imata sliki različni polarizaciji.

Snov	$n_o$	$n_e$
CaCO <sub>3</sub> (kalcit)	1,6557	1,4849
BaTiO <sub>3</sub>	2,4042	2,3605
LiNbO <sub>3</sub>	2,2864	2,2022
KH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> (KDP)	1,5074	1,4669
tekoči kristal 5CB (25 °C)	1,5319	1,7060
telur ( $\lambda = 10 \mu\text{m}$ )	4,7969	6,2455

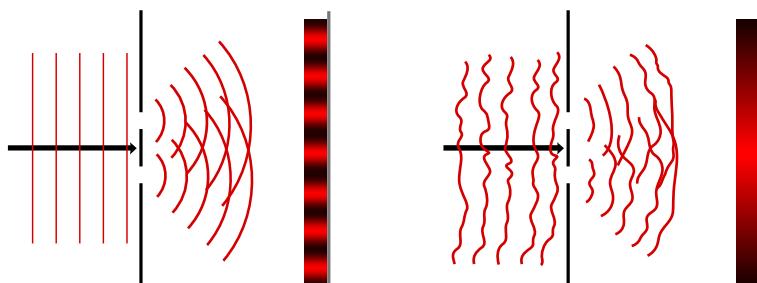
Tabela 1.1: Redni in izredni lomni količniki za nekaj izbranih optično enoosnih kristalov. Razen v primeru telurja veljajo vrednosti za svetlobo z valovno dolžino 633 nm.

## 2. Koherenca

V tem poglavju bomo spoznali koherenco. To je lastnost valovanja, ki je tesno povezana s pojavom interference. Ohlapno pravimo, da je koherentno tisto valovanje, s katerim se posrečijo interferenčni poskusi.

### 2.1 Youngov poskus

Interferenčnih pojavov ni mogoče opazovati z vsakim svetlobnim izvorom. Da bi to razumeli, si oglejmo interferenco valovanja, ki vpada na dve ozki reži (tako imenovani Youngov poskus<sup>1</sup>). Navadno predpostavimo, da sta obe reži osvetljeni z istim ravnim valom. Delni valovanji, ki izhajata iz rež, imata tako ves čas poskusa enako polarizacijo, enako frekvenco in enako fazo. Zaradi različnih dolžin poti obeh delnih valovanj od reže do dane točke na zaslolu nastane na oddaljenem zaslolu interferenčni vzorec (slika 2.1). Vendar se interference pojavi le v primeru, ko je faza valovanja, ki vpada na reži, konstantna. Svetloba s konstantno fazo je koherentna in nastane, na primer, v kvalitetnem laserju. Svetloba iz običajnih svetil ima spremenljivo fazo in zato ne da interferenčnega vzorca. Zanjo pravimo, da ni koherentna.



Slika 2.1: Youngov poskus na dveh režah. Le če je vpadno valovanje koherentno (levo), se pojavi na zaslolu interferenčni vzorec. Nekoherentno valovanje s spremenljivo fazo (desno) ne da interferenčnega vzorca.

Svetloba navadnih svetil, na primer plinskih razelektritvenih cevi, je zaradi vrste nastanka kaotične narave. Atomi sevajo neodvisno, zato se faza izsevanega valovanja spreminja. Približno konstantna je le znotraj nekega karakterističnega časa. Če je pri interferenčnem poskusu karakteristični čas spreminjanja faze krajsi od zakasnitve med valovanjem zaradi različno dolgih poti, pride na danem mestu zaslona izmenično do konstruktivne in destruktivne interference. Čas spreminjanja je praviloma bistveno krajsi od časa opazovanja, zato utripanja ne vidimo in zaznamo povprečno razmazano sliko. Interferenčni poskus se ne posreči zaradi majhne časovne koherence, karakterističnemu času spreminjanja faze pa rečemo koherenčni čas  $t_c$ . Časovno koherenco bomo natančneje obravnavali v razdelku (2.3), zaenkrat povejmo le, da je časovna koherenca vezana na fazno razliko med točkami, ki ležijo vzdolž smeri širjenja valovanja.

<sup>1</sup>Angleški znanstvenik Thomas Young, 1773–1829.

Poleg časovne koherence na interferenčno sliko pomembno vpliva tudi prostorska koherenca, ki je posledica končne dimenzijske svetlobe. Svetloba, ki na reži vpada iz različnih delov svetila, ima namreč različno fazo zaradi razlike v dolžini poti od svetila do rež. Ta faza se prišteje fazni razliki zaradi različno dolgi poti od rež do zaslona, zato se interferenčne proge na zaslono nekoliko premaknejo. Če je fazna razlika žarkov iz različnih delov svetila večja od fazne razlike za režami, se celotna interferenčna slika na zaslono izpopreči. Interferenca se pri Youngovem poskusu pojavi, kadar sta reži razmakeni le toliko, da je povprečna fazna razlika manjša od  $2\pi$ . Največjemu prečnemu razmiku, ki še da interferenco, rečemo prečna koherenčna razdalja  $d_c$ . Prostorska koherenca, ki jo bomo podrobnejše spoznali v razdelku (2.5), je torej vezana na fazno razliko med točkami, ki ležijo prečno na smer širjenja valovanja.

Poudarimo še enkrat, da je pojem koherenčnosti statističen. Če je koherenčni čas  $t_c$  dolg v primerjavi s časom opazovanja, se seštevajo amplitudo valovanj in pojavi se interferenčna slika. Ta se slučajno spreminja z značilnim časom  $t_c$ . Če pa so razlike poti večje od  $ct_c$  ali razmik rež večji od  $d_c$ , gledamo le povprečno sliko in interferenčne proge izginejo.

## 2.2 Koherenca navadnih svetil

Obravnavajmo plinsko razelektritveno cev in z ustreznim filtrom izberimo eno samo spektralno črto. Ta črta naj ima osrednjo frekvenco  $v_0$  in končno frekvenčno širino  $\Delta v$ . Privzemimo, da je glavni prispevek k razširitvi spektralne črte posledica medatomskih trkov.

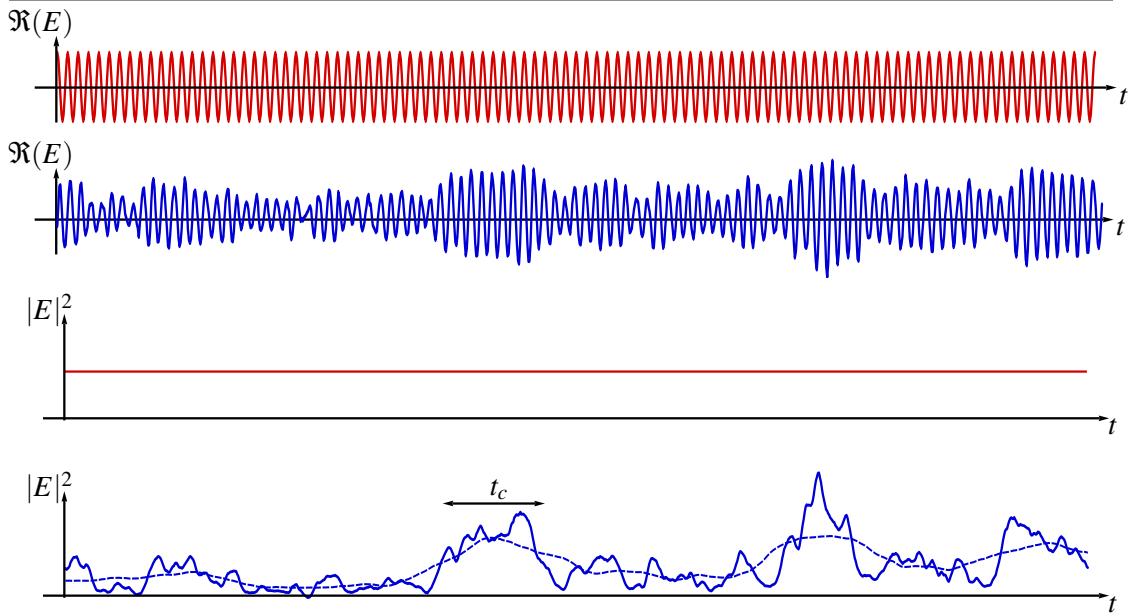
Celotna izsevana svetloba je vsota delnih valov, ki izhajajo iz posameznih atomov in so med seboj neodvisni. Vsak delni val ohranja konstantno fazo med dvema trkoma, to je v intervalu dolžine  $t_c$ . Valovni paket dolžine  $t_c$  tako vsebuje frekvence v pasu  $\Delta v$ , za katerega velja  $t_c \Delta v \sim 1$ . Koherenčni čas je torej kar reda velikosti obratne vrednosti spektralne širine svetlobe. Povsem monokromatsko valovanje bil imelo neskončen koherenčni čas in bi bilo popolno koherentno.

Zapišimo še izsevano polje takega svetila. Jakost električnega polja v izbrani točki prostora je vsota delnih valov, ki izvirajo iz raznih delov izvora. Vsak atom v izvoru, naj jih bo  $N$ , seva neodvisno, zato so tudi delna valovanja med seboj neodvisna. Posamična valovanja ohranjajo konstantno fazo v času med dvema trkoma atoma  $t_c$ . Zaradi enostavnosti privzemimo, da so amplitudo  $E_1$  in polarizacija izsevanih polj posameznih atomov enake. Električno poljsko jakost  $E$  v izbrani točki prostora potem zapišemo kot vsoto posameznih prispevkov

$$E = E_1 \sum_{n=1}^N e^{i\phi_n(t)}. \quad (2.1)$$

kjer se faza polja  $\phi_n(t)$ , ki ga izseva posamezni atom, naključno spremeni ob trku z drugim atomom. Povprečje vsote polj je nič, povprečni kvadrat skupnega polja, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka, pa je  $NE_1^2$ . Zaradi slučajnosti faz je slučajna tudi faza celotnega polja in se gotovo povsem spremeni v času, ko se spremeni faza posameznih prispevkov, to je  $t_c$ . S tako svetlobo bomo videli interferenco na režah, če bo razlika poti delnih valovanj manjša od  $ct_c$ .

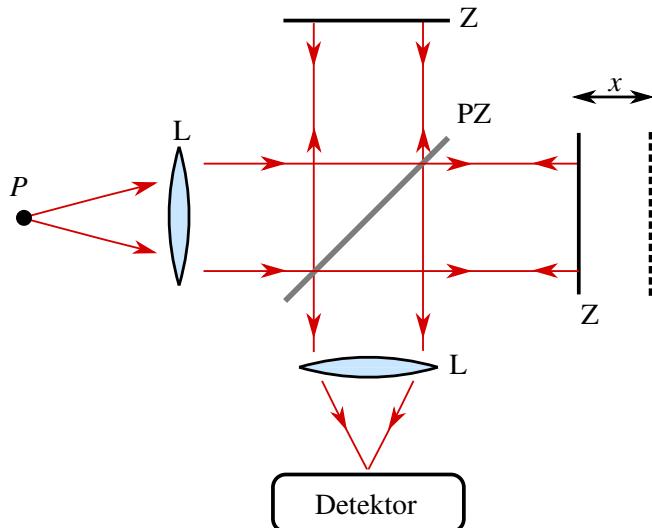
Oglejmo si izračun na primeru. Imejmo  $N = 100$  neodvisnih atomov, ki se jim faza naključno spreminja s karakterističnim časom  $t_c = 10/v$ , kjer je  $v$  frekvencia valovanja. Na sliki (2.2) sta prikazana časovna poteka amplitude  $E$  (enačba 2.1) in  $|E|^2$ . Za primerjavo je prikazan tudi raven val  $E = \sqrt{N}E_1 e^{-i\omega t}$  s konstantno fazo in pripadajoč  $|E|^2$ , ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka. Ta je v primeru ravnega vala konstantna, medtem ko je povprečna gostota svetlobnega toka iz navadnega svetila približno konstantna le znotraj  $t_c$ .



Slika 2.2: Zgoraj: shematski prikaz električne poljske jakosti ravnega vala s konstantno fazo (rdeča črta) in električne poljske jakosti navadnega svetila (modra črta) kot funkcije časa. Spodaj: pripadajoča vrednost  $|E|^2$  v primeru ravnega vala (rdeča črta) in v primeru svetlobe iz navadnega svetila (modra črta) kot funkcija časa. Modra črtkana črta je povprečna vrednost  $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t + t')E^*(t + t')dt'$  s časom integracije  $T = t_c$ .

### 2.3 Časovna koherenca

Časovno koherenco je najpreprosteje obravnavati z Michelsonovim interferometrom<sup>2</sup>, ki je prikazan na sliki (2.3).



Slika 2.3: Michelsonov interferometer. Svetlubo iz izvora  $P$  usmerimo preko kolimacijske leče (L) na polprepustno zrcalo (PZ), s čimer jo razdelimo na dva snopa. S premikanjem enega zrcala (Z) spremojemo zakasnitev enega delnega snopa. Interferenco opazujemo na detektorju.

<sup>2</sup>Ameriški fizik in nobelovec Albert Abraham Michelson, 1852–1931.

Valovanje iz točke  $P$  na polprepustnem zrcalu razdelimo na dva delna snopa, nato enega s premikanjem zrcala zakasnimo za  $\tau = 2x/c$ . Dokler je zakasnitev  $\tau$  manjša od koherenčnega časa  $t_c$ , snopa med seboj interferirata. S spremjanjem lege zrcala se tako na detektorju izmenično pojavijo ojačitve in oslabitve. Pri zakasnitvah, ki so večje od koherenčnega časa, ni stalne fazne povezave in interferenčna slika se izpovpreči.

 S kolimacijsko lečo dosežemo, da je čim več žarkov, ki izhajajo iz  $P$ , vzporednih z osjo interferometra. V eksperimentih snop svetlobe ni nikoli povsem vzporen in dolžine poti posameznih žarkov se med seboj malo razlikujejo. Na detektorju tako za  $\tau < t_c$  nastanejo jasno vidni interferenčni krogi. Pri večjih vrednostih  $\tau$  se kontrast interferenčnih prog zmanjšuje in pri zakasnitvah, ki so daljše od koherenčnega časa, se slika povsem zabriše.

Zapišimo ugotovitev še matematično. Gostota svetlobnega toka na detektorju je sorazmerna s kvadratom električne poljske jakosti obeh delnih valovanj

$$|E_d(t)|^2 = |E(t) + E(t + \tau)|^2 = |E(t)|^2 + |E(t + \tau)|^2 + 2\Re(E(t)E^*(t + \tau)). \quad (2.2)$$

Zakasnitev  $\tau$  je določena s premikom pomičnega zrcala  $\tau = 2x/c$ . Navadno opazujemo v času  $T$ , ki je dolg v primerjavi s koherenčnim časom svetlobe, zato izraz povprečimo po času

$$\begin{aligned} \langle |E_d(t)|^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |E_d(t)|^2 dt \\ &= 2\langle |E(t)|^2 \rangle + 2\Re\langle E(t)E^*(t + \tau) \rangle = 2\langle |E(t)|^2 \rangle + 2\Re G(\tau). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Prvi člen je vsota povprečnih prispevkov obeh delnih snopov. Prizeli smo, da je polje v povprečju stacionarno in je zato povprečje neodvisno od izbire časovnega intervala. Drugi člen opisuje interferenco. Za opis smo vpeljali časovno avtokorelacijsko funkcijo električnega polja

$$G(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t + \tau) dt. \quad (2.4)$$

Za zakasnitev  $\tau$ , ki so manjše od koherenčnega časa  $t_c$ , je avtokorelacijska funkcija različna od nič in na detektorju zaznamo interferenco. Pri zakasnitvah, ki so precej večje od koherenčnega časa  $t_c$ , pa sta polji  $E(t)$  in  $E(t + \tau)$  statistično neodvisni in povprečje produkta je enako produktu povprečij. Ker je  $\langle E(t) \rangle = 0$ , pri velikih zakasnitvah  $\tau$  interferenčni člen izgine.

Priročno je vpeljati normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)}. \quad (2.5)$$

Za povsem koherentno valovanje je  $|g(\tau)| = 1$ , za povsem nekoherentno valovanje je  $|g(\tau)| = 0$ , za delno koherentna pa  $0 < |g(\tau)| < 1$ . Praviloma se vrednost  $|g(\tau)|$  z naraščajočim  $\tau$  zmanjšuje, saj postaja valovanje za velike časovne zamike vedno manj korelirano. Ohlapno povedano je koherenčni čas zakasnitev, pri kateri postane vrednost avtokorelacijske funkcije majhna. Koherenčni čas  $t_c$  lahko tudi bolj natančno definiramo z normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$t_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 d\tau. \quad (2.6)$$

Zakasnitev delnih valov je pogosto posledica različno dolgih optičnih poti, zato namesto koherenčnega časa  $t_c$  pogosto uporabljamo koherenčno dolžino  $l_c = c t_c$ .

**Naloga 2.3.1** Pokaži, da v navedenih avtokorelacijskih funkcijah  $g(\tau)$  spremenljivka  $t_c$  ustreza koherenčnemu času, kot je definiran v enačbi (2.6), in izračunaj  $|g(t_c)|$  za oba primera.

$$g(\tau) = \begin{cases} \exp(i\omega_0\tau - |\tau|/t_c), \\ \exp(i\omega_0\tau - \pi\tau^2/2t_c^2), \end{cases} \quad (2.7)$$

Ob nalogi (2.4.2) in v razdelku (??) bomo spoznali, da sta to avtokorelacijski funkciji za svetlobo z Lorentzovim spektrom (razširitev spektralne črte zaradi medatomskih trkov) in Gaussovim spektrom (Dopplerjeva razširitev).

Poglejmo nekaj značilnih vrednosti koherenčnih dolžin. Koherenčna dolžina svetlobe, izsevana iz črnega telesa, je  $l_c = c t_c \approx \hbar c / k_B T$  (glej nalogo 2.4.3). Svetloba s Sonca ( $T \approx 6000$  K) ima tako koherenčno dolžino zgolj  $\sim 0,4$  μm, kar ustreza koherenčnemu času  $t_c \sim 1$  fs. Svetloba, izsevana iz LED sijalk, ima koherenčno dolžino  $\sim 20\text{--}100$  μm. Živosrebrna svetilka ima za izbrano spektralno črto koherenčno dolžino do okoli 50 cm, kar ustreza koherenčnemu času  $t_c \sim 1,6$  ns. Koherenčna dolžina laserjev je tipično okoli 100 m, v nekaterih vlakenskih laserjih pa koherenčna dolžina presega 100 km.

## 2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom

Spoznali smo, da je monokromatski ravni val povsem koherenten in njegov korelacijski čas neskončen. Obravnavajmo zdaj koherenco poljubnega valovanja, ki je v povprečju stacionarno. To pomeni, da se povprečna gostota svetlobnega toka v času zajemanja, ki traja čas  $T$ , ne spreminja. Vzorec valovanja razvijemo v Fourierovo vrsto

$$E(t) = \sum_n A_n(\omega) e^{-in\Delta\omega t}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.8)$$

Amplitude  $A_n(\omega)$  so slučajne spremenljivke, ki predstavljajo delež polja pri krožni frekvenci  $\omega = n\Delta\omega$ , čas opazovanja  $T$  pa naj bo bistveno daljši od  $t_c$ . Zapišimo amplitudo  $A_n$

$$A_n(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.9)$$

Kvadrat  $|A_n(\omega)|^2$ , ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka pri krožni frekvenci  $\omega$ , imenujmo intenziteta valovanja<sup>3</sup>. Potem vpeljemo spekter  $S(\omega)$ , ki podaja intenziteto svetlobe pri  $\omega$ , deljeno z intervalom  $\Delta\omega$

$$S(\omega) = \frac{|A_n(\omega)|^2}{\Delta\omega} = \frac{T}{2\pi} |A_n(\omega)|^2. \quad (2.10)$$

Vstavimo še amplitudo  $A_n$  (enačba 2.9) in dobimo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \int \int_{-T/2}^{T/2} E(t) E^*(t') e^{-i\omega(t' - t)} dt dt'. \quad (2.11)$$

Uvedemo novo spremenljivko  $\tau = t' - t$  in zapišemo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-T/2}^{T/2} E(t) E^*(t + \tau) dt. \quad (2.12)$$

<sup>3</sup>Intenziteto valovanja na splošno vpeljemo kot  $|E|^2$ , gostota svetlobnega toka pa je  $j = \epsilon \epsilon_0 c |E|^2 / 2$  z enotami W/m<sup>2</sup> (enačba 1.32). Kadar predfaktorji niso pomembni, pogosto uporabljamo krajevi izraz.

Integral po  $t$  je ravno enak korelacijski funkciji  $G(\tau)$  (enačba 2.4). Privzeli smo, da velja  $T \gg t_c$ , zato je korelacijska funkcija na mejah integracije po  $\tau$  praktično enaka nič in meje integracije smo lahko raztegnili do neskončnosti. Zveza, ki smo jo dobili, je Wiener-Hinčinov izrek<sup>4</sup>

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.13)$$

Spekter svetlobe je torej Fourierova transformiranka avtokorelacijske funkcije svetlobnega polja. Pri tem ne pozabimo, da je spekter, ki smo ga zapisali z enačbo (2.12), zapisan za izbran vzorec valovanja, ki traja čas  $T$ , in je tudi slučajna spremenljivka. Povprečni spekter dobimo tako, da naredimo limito  $T \rightarrow \infty$ .

$$\langle S(\omega) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} S(\omega). \quad (2.14)$$

 Zaradi priročnosti smo zapisali spekter in Wiener-Hinčinov izrek s krožno frekvenco. Podobno lahko vpeljemo tudi spekter na frevenčni interval in Wiener-Hinčinov izrek se prepiše v

$$S(v) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i2\pi v\tau} d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(v) e^{i2\pi v\tau} dv. \quad (2.15)$$

Iz Wiener-Hinčinovega izreka (enačba 2.13) neposredno sledi, da je koherenca nekega valovanja tesno povezana z njegovim spektrom. Koherenčni čas  $t_c$  je tako povezan s spektralno širino svetlobe  $\gamma$ , za katero velja (glej nalogu 2.4.1)

$$\gamma = \frac{1}{t_c}. \quad (2.16)$$

Valovanje z dolgim  $t_c$  ima tako zelo majhno spektralno širino (ozek spekter), valovanje s kratkim  $t_c$  pa ima širok spekter. To je v skladu s primeri, navedenimi na koncu prejšnjega razdelka: svetloba s Sonca ima širok spekter in zelo kratek koherenčni čas, svetloba iz laserjev pa ima praviloma ozko spektralno črto in dolg koherenčni čas. Ugotovimo tudi, da lahko valovanju podaljšamo koherenčni čas z ustreznim spektralnim filtriranjem.

**Naloga 2.4.1** Formalno lahko vpeljemo spektralno širino kot

$$\gamma = \frac{1}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2 d\omega}; \quad \text{kjer je} \quad s(\omega) = \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} = \frac{S(\omega)}{G(0)} \quad (2.17)$$

normirani spekter. Z uporabo enačbe za koherenčni čas  $t_c$  (enačba 2.6) pokaži, da je spektralna širina obratno sorazmerna s koherenčnim časom (enačba 2.16) ne glede na obliko spektra.

Namig: Uporabi Parsevalov izrek, ki pravi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.18)$$

kjer je

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} d\tau \quad (2.19)$$

Fouriereva transformiranka funkcije  $f(t)$ .

---

<sup>4</sup>Ameriški matematik Norbert Wiener, 1894–1964, in ruski matematik Aleksander Jakovljevič Hinčin, 1894–1959.

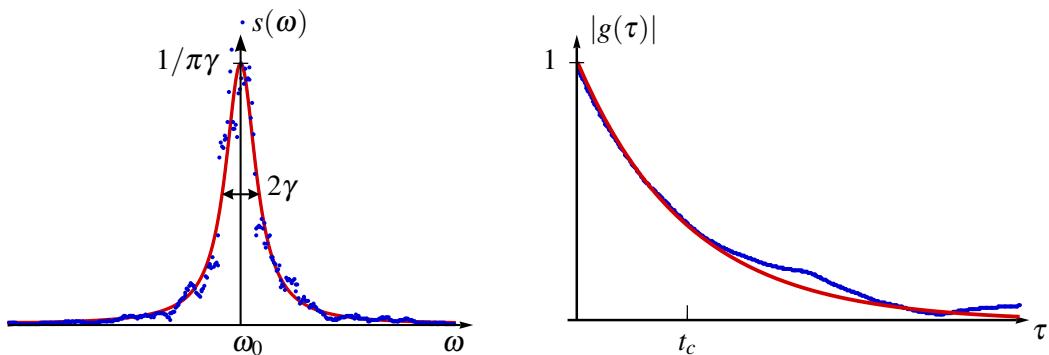
Za zgled Wiener-Hinčinovega izreka vzemimo primer, ki je predstavljen na sliki (2.2). Ker so trki med atomi naključni, je avtokorelacijska funkcija eksponentno pojemajoča

$$g(\tau) = e^{i\omega_0\tau} e^{-\tau/t_c}, \quad (2.20)$$

spekter take svetlobe pa je Lorentzove oblike (glej nalogo 2.4.2)

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \quad (2.21)$$

pri čemer je  $\gamma = 1/t_c$  spektralna širina. Normirani spekter  $s(\omega)$  in ustrezna avtokorelacijska funkcija  $g(\tau)$  sta prikazana na sliki (2.4). Točke na grafih predstavljajo spekter in izračunano avtokorelacijsko funkcijo za integracijski čas  $T = 100t_c$ . Za primerjavo sta z rdečo krivuljo prikazana tudi pričakovani spekter (enačba 2.21) in avtokorelacijska funkcija (enačba 2.20). Zaradi končnega časa  $T$  pri izračunu povprečja se spekter iz simulacije nekoliko razlikuje od pričakovanega.



Slika 2.4: Spekter in avtokorelacijska funkcija valovanja s slike (2.2)

---

**Naloga 2.4.2** Imejmo dve vrsti svetlobe. Prva naj ima avtokorelacijsko funkcijo, ki je eksponentno pojemajoča, druga pa ima avtokorelacijsko funkcijo Gaussove oblike (enačbi 2.7). Pokaži, da sta njuna spektra oblike

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad \text{in} \quad s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\pi\gamma^2}\right), \quad (2.22)$$

kjer je  $\gamma = 1/t_c$  spektralna širina.

---

Spektralne črte atomov so pogosto Lorentzove oblike, kar je posledica eksponentnega razpada stanj (naravna širina). Dodatno se spektralne črte razširijo zaradi trkov med atomi, vendar tudi to vodi do približno Lorentzove oblike spektra. V plinih je pogosto prevladujoča razširitev črt zaradi Dopplerjevega pojava (glej razdelek ??). Spekter Dopplerjevo razširjene svetlobe je, kot bomo videli v nadaljevanju, Gaussove oblike. V tem primeru iz enačbe (2.13) sledi, da je tudi avtokorelacijska funkcija Gaussove oblike.

**Naloga 2.4.3** Numerično pokaži, da je koherenčni čas svetlobe, ki jo oddaja črno telo s temperaturo  $T$ , približno enak  $t_c \approx \hbar/k_B T$ . Normirani spekter sevanja črnega telesa zapišemo kot Planckov spekter

$$s(\omega) = \frac{15}{\pi^4} \frac{\hbar^4 \omega^3}{(kT)^4} / \left( e^{\hbar\omega/kT} - 1 \right) \quad \text{za } \omega > 0, \text{ sicer } s(\omega) = 0. \quad (2.23)$$

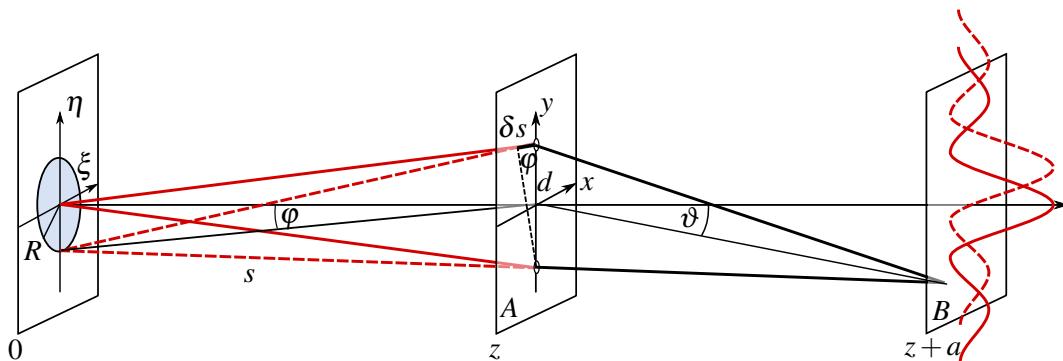


V prejšnjem razdelku smo videli, da časovno avtokorelacijsko funkcijo merimo z Michelsonovim interferometrom. Dobljena povezava med merjeno avtokorelacijo in izračunanim spektrom je osnova za Fourierovo spektroskopijo<sup>5</sup>, pri kateri določimo absorpcijski ali emisijski spekter snovi iz izmerjene avtokorelacijske funkcije. Tak pristop ima nekatere pomembne prednosti pred drugimi metodami in se danes precej uporablja, posebej v infrardečem delu EM valovanja (tako imenovana metoda FTIR - *Fourier-transform infrared spectroscopy*).

## 2.5 Prostorska koherenca

Vrnimo se k Youngovemu poskusu in obravnavi interference na dveh ozkih režah. Osvetljujmo zdaj reži s svetilom končnih razsežnosti. Svetilo naj sveti skoraj enobarvno svetlobo in naj bo na simetrali med režama, kot kaže slika (2.5).

Žarka, ki izhajata iz sredine svetila (polna črta), opravita do rež v ravnini A enako dolgo pot in povzročita na zaslonu B interferenčne proge. Žarka, ki izhajata iz roba izvora (prekinjena črta), imata do rež različno dolgo pot, zato nastane med njima fazna razlika že do ravnine A, ki se prišteje fazni razliki do ravnine B. Interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, so premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Ker so žarki z roba statistično neodvisni od žarkov iz sredine, z njimi ne interferirajo. Celotni interferenčni vzorec je zato kar vsota interferenčnih vzorcev žarkov iz različnih delov svetila. Če je razlika poti za žarke iz različnih delov velikosti valovne dolžine  $\lambda$ , se celotna interferenčna slika na zaslonu B izpovpreči.



Slika 2.5: Shema interferenčnega eksperimenta z razsežnim svetilom

Razdaljo med režama  $d_c$ , pri kateri interferenčne proge izginejo, imenujemo prečna koherenčna razdalja. Zanjo velja približno

$$\delta s = d_c \sin \varphi \approx d_c \frac{R}{z} \sim \lambda \Rightarrow d_c \sim \frac{z\lambda}{R}. \quad (2.24)$$

<sup>5</sup>Francoski matematik in fizik Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830.

Pri tem moramo paziti, da koherenčne dolžine, ki jo izpeljemo iz časovne koherence, ne zamenjamo s prečno koherenčno razdaljo, o kateri bomo govorili v nadaljevanju. Pogosto je v uporabi tudi pojem koherenčna ploskev, to je območje, v katerem je fazna razlika v povprečju konstantna. Velikost te ploskve je približno  $d_c^2$ . V območju koherenčne ploskve so tudi valovne fronte približno gladke.

Zapišimo gornje ugotovitve nekoliko bolj natančno. Na zaslonu  $B$  izmerimo gostoto svetlobnega toka, ki je sorazmerna povprečju kvadrata električne poljske jakosti valovanj, ki izhajata iz obeh odprtin

$$\begin{aligned}\langle |E_d|^2 \rangle &= \langle |K_1 E_1 + K_2 E_2|^2 \rangle \\ &= |K_1|^2 \langle |E_1|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |E_2|^2 \rangle + 2\Re K_1 K_2^* \langle E_1(0) E_2^*(\tau) \rangle.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Pri tem je  $\tau = d \sin \vartheta / c$  zakasnitev valovanja iz druge odprtine glede na valovanje iz prve, faktorja  $K_1$  in  $K_2$  pa sta določena z uklonom na posameznih odprtinah. Interferenčna slika je vsebovana v podobnem členu kot pri Michelsonovem interferometru, le da nastopa v tem primeru namesto avtokorelacijske funkcije navzkrižna korelacijska funkcija polj  $E_1$  in  $E_2$  iz obeh odprtin.

Kako je interferenčni člen povezan z lastnostmi svetila, brez težav doženemo v izbranem primeru skoraj enobarvne svetlobe z osrednjo krožno frekvenco  $\omega$ . Tedaj lahko za zakasnите  $\tau$ , ki so krajše od koherenčnega časa, zapišemo

$$E_2(\tau) = E_2(0) e^{-i\omega\tau} \quad (2.26)$$

in

$$\langle E_1(0) E_2^*(\tau) \rangle = \langle E_1(0) E_2^*(0) \rangle e^{i\omega\tau} = J(P_1, P_2) e^{i\omega\tau}. \quad (2.27)$$

Faktor  $\Re e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) = \cos(kd \sin \vartheta)$  da interferenčne proge za koherentno osvetlitev zaslona, povprečje produkta polj v odprtinah ob istem času  $J(P_1, P_2) = \langle E(P_1, 0) E^*(P_2, 0) \rangle$  pa meri stopnjo prečne koherenčnosti med obema odprtinama. Od velikosti tega člena je odvisen kontrast interferenčnih prog. Izračunajmo ga.

Polje v posamezni odprtini je vsota prispevkov iz celega izvora.

$$E(P_j) = -\frac{i}{\lambda} \int E(\xi, \eta) \frac{e^{iks_j}}{s_j} d\xi d\eta. \quad (2.28)$$

Pri tem je  $s_j$  razdalja med točko  $(\xi, \eta)$  na izvoru in točko  $P_j(x_j, y_j)$  na reži v ravnini A (glej sliko 2.5). Faktor pred integralom  $-i/\lambda$  izhaja iz uklonske teorije (enačba 1.54). Tako je

$$J(P_1, P_2) = \frac{1}{\lambda^2} \int \int \langle E(\xi, \eta) E^*(\xi', \eta') \rangle \frac{e^{ik(s_1 - s'_2)}}{s_1 s'_2} d\xi d\eta d\xi' d\eta'. \quad (2.29)$$

V izbranem svetilu sevajo atomi neodvisno. Valovanji iz dveh točk svetila, ki sta razmaznjeni za več kot  $\lambda$ , sta neodvisni in povprečje njunega produkta je enako nič. Tako približno velja

$$\langle E(\xi, \eta) E^*(\xi', \eta') \rangle = \frac{\lambda^2}{\pi} \cdot \delta(\xi - \xi', \eta - \eta') \langle |E(\xi, \eta)|^2 \rangle. \quad (2.30)$$

Faktor  $\lambda^2/\pi$  poskrbi za ustrezno normalizacijo. Naj bo oddaljenost svetila od zaslona A veliko večja od dimenzije svetila ( $z \gg R$ ), tako da lahko imenovalec pod integralom v izrazu (2.29) nadomestimo z  $z^2$  in postavimo pred integral.

$$J(P_1, P_2) = \frac{1}{\pi z^2} \int \langle |E(\xi, \eta)|^2 \rangle e^{ik(s_1 - s'_2)} d\xi d\eta. \quad (2.31)$$

Izraz lahko še nekoliko poenostavimo, če razvijemo  $s_1$  in  $s_2$  do drugega reda

$$s_j = \sqrt{z^2 + (x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2} \approx z + \frac{(x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2}{2z}. \quad (2.32)$$

Pri tem sta  $(x_j, y_j)$  koordinati točke  $P_j$ . Pišimo še  $\langle |E(\xi, \eta)|^2 \rangle = I(\xi, \eta)$  ter  $x_2 - x_1 = \Delta x$  in  $y_2 - y_1 = \Delta y$ . S tem dobimo znani rezultat, tako imenovani van Cittert-Zernikov izrek<sup>6</sup>

$$J(\Delta x, \Delta y) = \frac{e^{-i\phi}}{\pi z^2} \int I(\xi, \eta) e^{ik(\Delta x \xi + \Delta y \eta)/z} d\xi d\eta. \quad (2.33)$$

Faza

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda z} [(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)] \quad (2.34)$$

meri skupni premik interferenčnih prog, do katerega pride, kadar svetilo ne leži na isti osi kot odprtini v zaslonu. Kadar ležita odprtini v ravnini  $A$  simetrično glede na os svetila, je faza  $\phi$  enaka nič.

Dobljeni rezultat si je vredno nekoliko ogledati. Prečno prostorsko korelacijsko funkcijo  $J(P_1, P_2)$ , ki določa kontrast interferenčnih prog, smo izrazili kot 2-D Fourierevo transformiranko intenzitete svetlobe na samem svetilu (enačba 2.33).

 Ob tem se spomnimo, da velja podobna zveza med električno poljsko jakostjo v osvetljeni odprtini in njen Fraunhoferjevo uklonsko sliko (enačba 1.61), pri čemer so količine, ki nastopajo v obeh zvezah, povsem različne. Različna je tudi veljavnost obeh izrazov: medtem ko je Fraunhoferjeva uklonska formula veljavna le v veliki oddaljenosti, za opis uklonske slike v bližnjem polju pa je treba uporabiti Fresnelov izraz (enačba 1.60), je rezultat za  $J(P_1, P_2)$  (enačba 2.33) veljaven v obeh območjih.

Ker je velikost svetila končna,  $J(P_1, P_2)$  pri dovolj veliki razdalji med točkama  $P_1$  in  $P_2$  gotovo pade na nič. Največja razdalja, do katere je  $J(P_1, P_2)$  še različna od nič, je ravno prečna koherenčna razdalja  $d_c$ , ustrezna ploskev pa je koherenčna ploskev  $S_c$ . Iz izraza za koherenčno razdaljo (enačba 2.24) jo lahko ocenimo

$$S_c \sim \frac{(\lambda z)^2}{S_0} \sim \frac{\lambda^2}{\Omega_0}, \quad (2.35)$$

kjer je  $S_0$  površina svetila,  $\Omega_0$  pa prostorski kot, pod katerim je videti svetilo v ravnini  $A$ .

Oglejmo si primer. Naj bo svetilo v obliki kroga s polmerom  $R$ , obe odprtini v zaslonu naj imata koordinati  $y$  enaki nič, razmik med režama v smeri  $x$  pa naj bo  $d$ . Prečno korelacijsko funkcijo izračunamo iz enačbe (2.33) in dobimo (glej nalogu 2.5.1)

$$J(0, \Delta y) = 2 \frac{R^2 I_0}{z^2} \frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z}, \quad (2.36)$$

kjer je  $J_1(x)$  Besslova funkcija. V ničlah Besslove funkcije pade prečna korelacijska funkcija  $J$  na nič in interferenčnega vzorca ne vidimo. Za prečno koherenčno razdaljo je zato smiselno vzeti ravno prvo ničlo Besslove funkcije  $J_1$ , to je pri

$$d_c \approx 3,83 \frac{z}{kR} = 0,61 \frac{\lambda z}{R}. \quad (2.37)$$

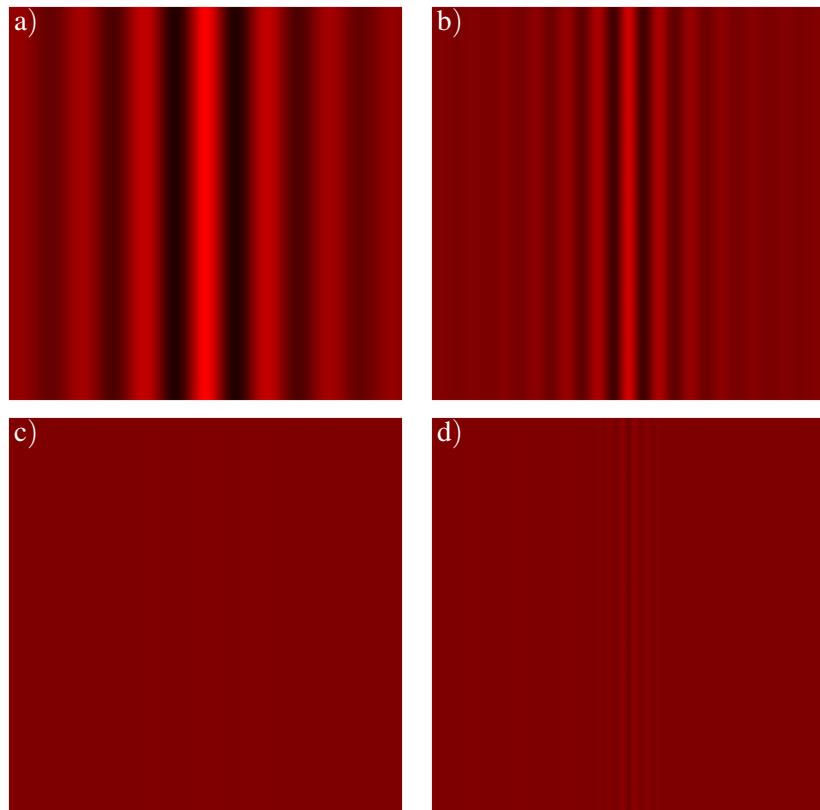
---

<sup>6</sup>Nizozemski fizik Pieter Hendrik van Cittert, 1889–1959, in nizozemski fizik in nobelovec Frits Zernike, 1888–1966.

**Naloga 2.5.1** Pokaži, da prečno korelacijsko funkcijo za okroglo svetilo s polmerom  $R$ , pri čemer odprtini na zaslonu ležita simetrično na osi  $y$  v razmiku  $d$ , zapišemo z enačbo (2.36).

Doslej smo obravnavali le valovanje v središču interferenčne slike na zaslonu  $B$ , to je pri tako majhnih kotih  $\vartheta$ , da je zakasnitev manjša od koherenčnega časa. Pri večjih kotih moramo upoštevati še vpliv končnega koherenčnega časa, zaradi česar se kontrast interferenčnih prog še dodatno zmanjšuje. Interferenčna slika je tako produkt časovnega in prostorskega dela.

V primeru dveh zelo tankih rež z razmikom  $d$  nastanejo na zaslonu  $B$  uklonski vrhovi. Za nekaj različnih razmikov med odprtinama  $d$  je intenziteta svetlobe na zaslonu prikazana na sliki (2.6). Če je  $d \ll \lambda z/R$  (slika a), je modulacija interferenčnih prog v sredini popolna in se zaradi končnega koherenčnega časa zmanjšuje le pri večjih kotih  $\vartheta$ . Pri nekaj večjem razmiku (slika b) tudi v sredini kontrast ni več popoln. Obenem se interferenčne proge zgostijo. Kadar je  $d \approx 3,83 z/kR$ , dosežemo prvo ničlo Besslove funkcije  $J_1(x)$  in interferenčni vzorec prvič izgine (slika c). Takrat je razdalja med režama ravno enaka prečni koherenčni razdalji valovanja. Pri še večjih razmikih (slika d) je Besslova funkcija negativna in ponovno se pojavijo interferenčne proge, vendar so slabše izražene in z nasprotno fazo, kar da v sredini temno progo.



Slika 2.6: Interferenčna slika na zaslonu  $B$  za različne vrednosti razmikov med odprtinama: a)  $d = z/kR$ , b)  $d = 2z/kR$ , c)  $d = 3,832 z/kR$  in d)  $d = 5,136 z/kR$ . Z večanjem razdalje med režama se proge zgostijo in kontrast se zmanjša. Koherenčni čas svetlobe je  $t_c = 10/\omega$ , kar še dodatno zmanjšuje modulacijo interferenčnih prog. Pri  $d = 3,832 z/kR$  dosežemo prvo ničlo Besslove funkcije in interferenčni vzorec popolnoma izgine. Nato se interferenčne proge zopet pojavijo, vendar z manjšim kontrastom in nasprotno fazo.



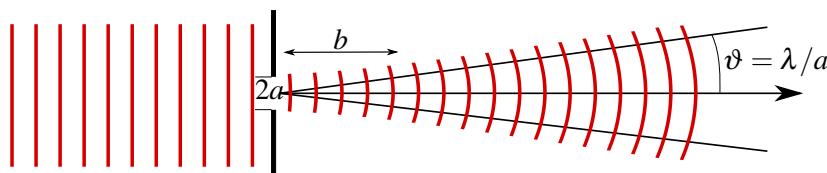
Merjenje prečne koherenčne razdalje svetlobe zvezd je osnova za Michelsonovo metodo določanja zvezdnih premerov. Svetlobo izbrane zvezde zberejo v teleskop preko dveh manjših parov zrcal, kjer sta zunanji zrcali na pomičnih rokah, tako da ju je mogoče razmikati. Glavno zrcalo teleskopa zbere svetlobna snopa v goriščni ravnini, kjer nastanejo interferenčne proge, če le pomični zrcali nista preveč razmakenjeni. Iz razmika, pri katerem interferenčne proge izginejo, je mogoče določiti premere bližnjih svetlih zvezd. Za zvezdo s polmerom  $10^6$  km v razdalji 5 svetlobnih let je prečna koherenčna razdalja za zeleno svetlobo okoli 15 m, kar je z Michelsonovim zvezdnim interferometrom mogoče izmeriti. Pri zvezdah, ki so dlje od nekaj deset svetlobnih let, metoda odpove.

# 3. Koherentni snopi svetlobe

V tem poglavju bomo zapisali obosni približek valovne enačbe in spoznali njeno osnovno rešitev: Gaussov snop. Obravnavali bomo snope osnovnega in višjega reda ter se naučili računati prehode Gaussovih snopov skozi optične elemente.

## 3.1 Omejen snop svetlobe

Pri obravnavi elektromagnetnega valovanja pogosto uporabljamo približek ravnih valov. Ti so v smeri pravokotno na smer širjenja neomejeni in so zato lahko le idealizacija. Čim raven val usmerimo skozi odprtino v zaslonu, nastane omejen snop svetlobe. V snopu svetlobe valovna čela niso ravna in meje snopa niso vzporedne, ampak se snop zaradi uklona širi (slika 3.1).



Slika 3.1: Omejen snop nastane ob prehodu ravnega vala skozi končno odprtino.

V veliki oddaljenosti od zaslona polje izračunamo s Fraunhoferjevo uklonsko teorijo (glej poglavje 1.7). Vendar za oceno kota širjenja računa niti ne potrebujemo. Velja približno

$$\vartheta \sim \frac{\lambda}{a}, \quad (3.1)$$

kjer je  $a$  polmer odprtine v zaslonu. Opis polja v bližini zaslona je zahtevnejši, saj je treba uporabiti Fresnelov približek (enačba 1.60). Območje bližnjega polja seže do  $b$ , ki ga lahko ocenimo s slike (3.1)

$$\frac{a}{b} \sim \vartheta \sim \frac{\lambda}{a} \quad \text{in tako} \quad b \sim \frac{a^2}{\lambda}. \quad (3.2)$$

Včasih taki približni oceni zadoščata. Bolj kvantitativen opis omejenih snopov bi lahko dobili s Fraunhoferjevo in Fresnelovo uklonsko teorijo, kar pa ni najudobnejša pot. Lotimo se naloge raje z uporabo približka obosne valovne enačbe.

**Naloga 3.1.1** Pokaži, da je Fraunhoferjeva uklonska slika reže, katere prepustnost se v radialni smeri spreminja kot Gaussova funkcija  $T(\xi, \eta) = e^{-(\xi^2 + \eta^2)/w_0^2}$ , podana z Gaussovo funkcijo oblike  $E(x, y, z) \propto e^{-(x^2 + y^2)/w^2(z)}$  in določi odvisnost  $w(z)$ . Izračunaj še uklonsko sliko v bližnjem polju po Fresnelovi uklonski teoriji.

### 3.2 Obosna valovna enačba

Obravnavo začnemo z valovno enačbo in monokromatskim valovanjem s krožno frekvenco  $\omega$ . Ustrezna Helmholtzeva enačba je (enačba 1.21)

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad (3.3)$$

kjer je  $k = n\omega/c_0$  valovno število in  $n$  lomni količnik sredstva, po katerem se valovanje širi. Zaradi enostavnosti obravnavamo le eno polarizacijo, tako da  $E$  pišemo kot skalar. Iščemo rešitev za omejen snop, ki se širi približno vzdolž osi  $z$ . Uporabimo nastavek

$$E = E_0 \psi(\mathbf{r}, z) e^{ikz}, \quad (3.4)$$

kjer je  $\mathbf{r}$  krajevni vektor v ravnini  $xy$ , prečni na smer širjenja svetlobe. Glavni del odvisnosti od koordinate  $z$  smo zapisali v faktorju  $e^{ikz}$ , tako da lahko privzamemo, da se  $\psi$  v smeri  $z$  le počasi spreminja. Vstavimo gornji nastavek v Helmholtzevo enačbo (enačba 3.3) in pri tem zanemarimo druge odvode po  $z$ , saj je zaradi počasnega spremenjanja  $\partial^2 \psi / \partial z^2$  majhen v primerjavi s  $k \partial \psi / \partial z$  in  $k^2 \psi$ . Dobimo obosno ali paraksialno valovno enačbo

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = -2ik \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (3.5)$$

 Opazimo, da je obosna valovna enačba enaka Schrödingerjevi enačbi za prost delec v dveh dimenzijah, v kateri ima koordinata  $z$  vlogo časa. Omejenemu snopu v kvantni mehaniki ustreza lokaliziran delec – valovni paket. Ta se s časom širi, kar v optiki ustreza pojavi uklona.

Zapišimo nastavek za ravni val v obliki

$$\psi = e^{ik_1 x + ik_2 y} e^{-i\beta z}. \quad (3.6)$$

Da bo gornji nastavek rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5), mora veljati

$$\beta = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \quad (3.7)$$

Ko vstavimo nastavek za  $\psi$  v izraz za polje  $E$  (enačba 3.4), dobimo ravni val, za katerega velja

$$k_3 = k - \beta = k - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \quad (3.8)$$

Pri tem  $k_3$  označuje vzdolžno in  $k_1$  ter  $k_2$  prečni komponenti valovnega vektorja,  $k$  pa je valovno število. Za ravni val, ki je rešitev Helmholtzeve enačbe (enačba 3.3) in ne obosnega približka, velja

$$k_3 = \sqrt{k^2 - (k_1^2 + k_2^2)}. \quad (3.9)$$

Vidimo, da sledi enačba (3.8) iz enačbe (3.9) z razvojem za majhne vrednosti  $k_1$  in  $k_2$ . To pove, da je približek obosne enačbe dober, kadar je razmerje prečne in vzdolžne komponente valovnega vektorja majhno. Takrat je majhen tudi kot širjenja snopa in člene, višje od kvadratnih, lahko zanemarimo. To pa je tudi območje veljavnosti Fresnelove uklonske teorije.

 Časovno odvisnost poljubnega začetnega stanja v kvantni mehaniki navadno izračunamo tako, da v nekem začetnem trenutku paket razvijemo po lastnih stanjih energije – ravnih valovih. Rešitev v poljubnem kasnejšem trenutku je potem dana v obliki Fourierevega integrala. Ta pot je zelo uporabna tudi v optiki in je osnova sklopa računskih metod, znanih pod imenom Fouriereva optika. V našem primeru z njo brez težav pridemo nazaj do Fresnelove uklonske formule.

### 3.3 Osnovni Gaussov snop

Naša naloga je poiskati rešitve obosne enačbe, ki popišejo omejene snope. Iz kvantne mehanike vemo, da je najbolj lokaliziran in se najpočasneje širi valovni paket Gaussove oblike. Zato poskusimo najti rešitev obosne enačbe (enačba 3.5) z nastavkom

$$\psi(r, z) = e^{ikr^2/2q(z)} e^{-i\phi(z)}, \quad (3.10)$$

kjer funkcija  $q(z)$  opisuje širjenje snopa v prečni smeri,  $\phi(z)$  pa opisuje počasno sprememinjanje faze snopa vzdolž osi  $z$ . Vstavimo nastavek (enačba 3.10) v obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Zaenkrat se omejimo le na radialno simetrične rešitve in v cilindričnih koordinatah zapišemo

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left( \frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} \right) \psi \quad (3.11)$$

in

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left( -\frac{ikr^2}{2q^2} q(z)' - i\phi' \right) \psi. \quad (3.12)$$

Tako iz obosnega približka (enačba 3.5) sledi

$$\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} = ik \left( \frac{ikr^2}{q^2} q(z)' + 2i\phi' \right). \quad (3.13)$$

Gornja zveza mora veljati pri vsakem  $r$ , zato so koeficienti pri  $r^2$  na obeh straneh enačbe enaki in členi brez odvisnosti od  $r$  prav tako. Sledi

$$q(z)' = 1 \quad \text{in} \quad \phi' = -\frac{i}{q}. \quad (3.14)$$

Z integracijo dobimo najprej

$$q = z - iz_0, \quad (3.15)$$

kjer smo z  $-iz_0$  označili integracijsko konstanto. Integriramo še enačbo za fazo

$$\phi = \int_0^z -\frac{idz}{z - iz_0} = -i \ln(1 + i \frac{z}{z_0}). \quad (3.16)$$

Sledi

$$\begin{aligned} \psi &= \exp \left( i \frac{kr^2}{2(z - iz_0)} \right) \exp \left( -\ln(1 + i \frac{z}{z_0}) \right) = \\ &= \frac{1}{1 + i \frac{z}{z_0}} \exp \left( -\frac{kr^2 z_0}{2(z_0^2 + z^2)} + \frac{ikr^2 z}{2(z_0^2 + z^2)} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Najprej podrobnejše poglejmo realni del eksponenta, ki opisuje širjenje snopa. Polmer snopa  $w$ , ki je funkcija koordinate  $z$ , opišemo z enačbo

$$w^2 = \frac{2z_0}{k} \left( 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right). \quad (3.18)$$

V izhodišču pri  $z = 0$  je snop najožji in pravimo, da je tam grlo snopa. Polmer snopa v grlu označimo z  $w_0$  in zapišemo hiperbolično zvezo  $w(z)$

$$w^2 = w_0^2 \left( 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right). \quad (3.19)$$

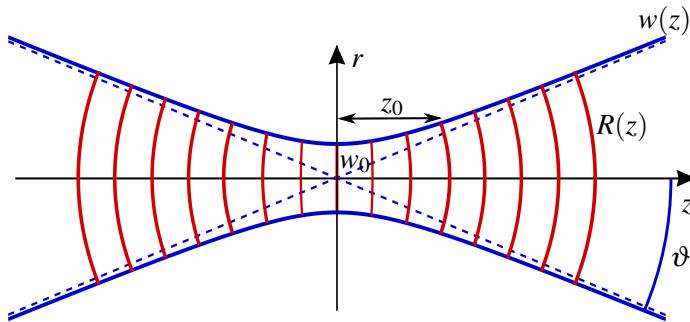
Pri tem velja

$$w_0^2 = \frac{2z_0}{k} \quad (3.20)$$

oziroma

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (3.21)$$

Dolžina  $z_0$  je razdalja, pri kateri preide snop v asimptotično enakomerno širjenje. Čeprav smo vpeljali grlo kot najožji del snopa (pri  $z = 0$ ), uporabljam izraz grlo tudi za celotno območje, znotraj katerega se snop ne razširi znatno. Njegovo dolžino določa ravno parameter  $z_0$ , tako da je dolžina celotnega grla  $2z_0$ . Območju grla pravimo območje bližnjega polja ali Rayleighovo območje in dolžini  $z_0$  Rayleighova dolžina<sup>1</sup>. Dolžina  $z_0$  označuje tudi oddaljenost od grla, pri kateri začne veljati Fraunhoferjev uklonski približek.



Slika 3.2: Gaussov snop s karakterističnimi parametri

Zapišimo še kot divergence snopa v velikih oddaljenostih. Polovični kot širjenja je

$$\vartheta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dw}{dz} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.22)$$

Celotna divergencia snopa pa

$$\theta = 2 \frac{w_0}{z_0} = \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.23)$$

Izraza za območje bližnjega polja (enačba 3.21) in divergenco (enačba 3.22) sta v skladu z ocenama, ki smo ju napravili v začetku poglavja (enačbi 3.1 in 3.2). Faktor  $1/\pi$  je značilen za Gaussov snop, ki ima od vseh možnih oblik najmanjšo divergenco.

Za določanje kakovosti dejanskega laserskega snopa in njegovega odstopanja od idealnega Gaussovega snopa se pogosto vpelje faktor  $M^2$

$$\theta = M^2 \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \quad (3.24)$$

Dobri laserji dosegajo vrednost  $M^2 \sim 1$ , pri močnejših trdninskih ali polprevodniških laserjih pa je lahko  $M^2 \sim 30$  ali več. V grobem velja, da  $M^2$  narašča z močjo laserja in oblika snopa možnih laserjev navadno znatno odstopa od oblike idealnega Gaussovega snopa.

<sup>1</sup>Angleški fizik in nobelovec John William Strutt, 3. baron Rayleighski; lord Rayleigh, 1842–1919.

Vrnimo se k imaginarnemu delu eksponenta v enačbi (3.17). Vpeljemo količino

$$R = z \left( 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right), \quad (3.25)$$

ki meri krivinski radij valovnih front pri oddaljenosti od grla  $z$ . To najlažje uvidimo, če zapis imaginarnega dela primerjamo z zapisom za krogelni val, razvit po majhnih odmikih  $r$  od osi  $z$

$$\frac{1}{R} e^{ikR} = \frac{1}{R} e^{ik\sqrt{z^2+r^2}} \approx \frac{1}{R} e^{ikz+ikr^2/2R}. \quad (3.26)$$

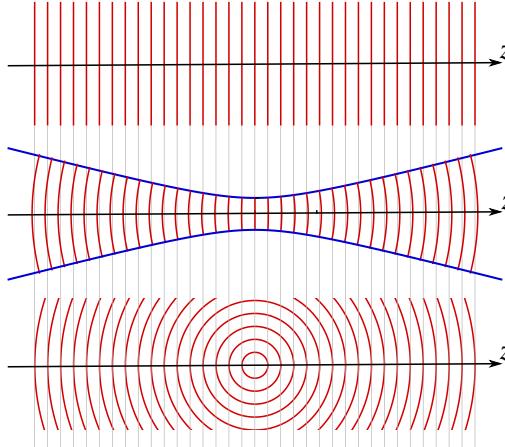
Upoštevali smo, da je na osi  $z = R$ .

---

**Naloga 3.3.1** Pokaži, da je največja ukrivljenost valovnih front snopa (in s tem najmanji  $R$ ) ravno pri  $z = \pm z_0$ . Izračunaj še ukrivljenost front v grlu in v veliki oddaljenosti od grla.

---

Na sliki (3.3) so prikazane valovne fronte ravnega vala, Gaussovega snopa (enačba 3.29) in krogelnega vala (enačba 3.26). Vidimo, da je v grlu Gaussov snop podoben ravnemu valu (ukrivljenost front je zelo majhna in  $R \rightarrow \infty$ ). Za velike oddaljenosti krivinski radij valovnih front postaja kar enak oddaljenosti  $z$ . Snop je tako podoben delu krogelnega vala, le da je faza Gaussovega snopa zamaknjena za  $\pi/2$  glede na krogelni val.



Slika 3.3: Ravni val, Gaussov snop ter krogelni val. V grlu je Gaussov snop podoben ravnemu valu, pri velikih oddaljenostih od grla pa krogelnemu valu.

Ostane še faktor pred eksponentom v izrazu (3.17). Ta faktor meri zmanjševanje amplitude električne poljske jakosti v snopu in s tem poskrbi za ohranitev energijskega toka ob širjenju žarka, poleg tega pa še dodatno spremeni fazo. Zapišemo ga v obliki

$$\frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{z}{z_0})^2}} e^{-i\eta(z)} = \frac{w_0}{w} e^{-i\eta(z)}, \quad (3.27)$$

pri čemer je

$$\eta(z) = \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (3.28)$$

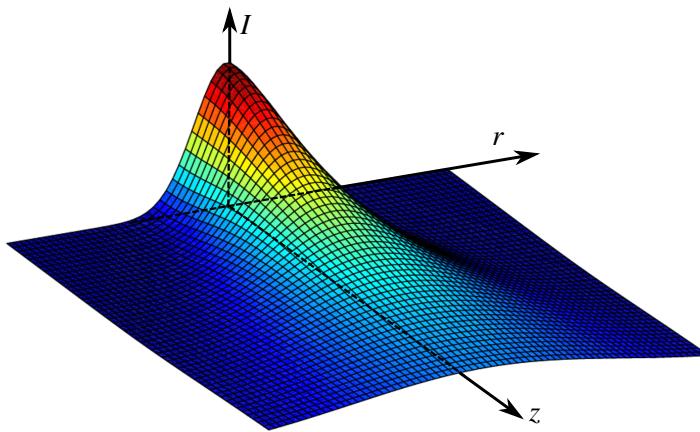
Dodatna faza  $\eta$ , imenujemo jo tudi Gouyeva faza<sup>2</sup>, je posledica povečane fazne hitrosti valovanja, kadar je valovanje omejeno v prečni smeri. Podoben pojav bomo srečali tudi pri valovanju, ki je omejeno v valovode (poglavlje ??).

S tem lahko končno zapišemo izraz za električno poljsko jakost osnovnega Gaussovega snopa<sup>3</sup>

$$E(r, z, t) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{ikz - i\omega t} e^{-r^2/w^2(z)} e^{ikr^2/2R(z)} e^{-i\eta(z)}. \quad (3.29)$$

Intenziteta svetlobe je sorazmerna z  $E(r, z)E^*(r, z)$  in zanjo velja

$$I(r, z) = I_0 \frac{w_0^2}{w^2(z)} e^{-2r^2/w^2(z)}. \quad (3.30)$$



Slika 3.4: Upodobitev intenzitete svetlobe v Gaussovem snopu za  $z > 0$

---

**Naloga 3.3.2** Pokaži, da je celotna svetlobna moč v snopu enaka  $P = \frac{1}{2}\pi w_0^2 I_0$ .

---

Povejmo še nekaj o parametru  $q(z)$ , ki smo ga uporabili pri izračunu Gaussovega snopa v nastavku (enačba 3.10). Spomnimo se, da parameter  $q$  narašča linearno z oddaljenostjo od grla

$$q(z) = z - iz_0. \quad (3.31)$$

Parameter  $q$  imenujemo kompleksni krivinski radij, njegov inverz pa kompleksna ukrivljeno

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} + i \frac{2}{kw^2}. \quad (3.32)$$

---

**Naloga 3.3.3** Uporabi enačbi (3.21 in 3.25) in izpelji gornji izraz za kompleksno ukrivljeno.

---

Izkazalo se bo, da je kompleksni krivinski radij zelo uporaben pri obravnavi preslikav Gaussovih snopov z lečami.

<sup>2</sup>Francoski fizik Louis Georges Gouy, 1854–1926.

<sup>3</sup>Nemški matematik, fizik in astronom Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.

### 3.4 Snopi višjega reda

Osnovna rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5) je Gaussov snop (enačba 3.29). Poleg te rešitve obstaja še veliko drugih rešitev, prav tako omejenih v prečni smeri. V kartezičnih koordinatah tako rešijo obosno valovno enačbo Hermite-Gaussovi snopi<sup>4</sup>

$$\psi_{n,m}(x, y) = \frac{w_0}{w} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left(\frac{ik(x^2 + y^2)}{2q} - i\eta_{n,m}\right), \quad (3.33)$$

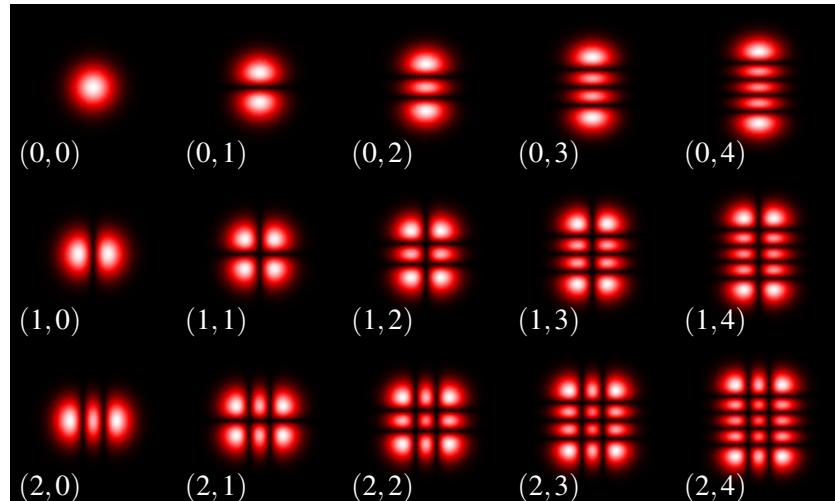
kjer so  $H_n$  Hermitovi polinomi stopnje  $n$  (npr.  $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x \dots$ ). V to se lahko prepričamo, če izraz vstavimo v obosno valovno enačbo (enačba 3.5) in upoštevamo zvezo med Hermitovimi polinomi

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \quad (3.34)$$

Osnovni Gaussov snop je očitno poseben primer gornje rešitve za  $n = m = 0$ . Polmer snopa  $w(z)$  in kompleksni krivinski radij  $q(z)$  sta za vse  $n$  in  $m$  enaka kot za osnovni snop in podana z enačbama (3.19) in (3.31). Razlika je v fazi, ki je odvisna tudi od  $n$  in  $m$

$$\eta_{n,m}(z) = (n + m + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \quad (3.35)$$

Nekaj višjih redov Hermite-Gaussovinih snopov je na sliki (3.5), kjer rišemo  $|\psi_{n,m}(x, y, 0)|$ . Indeks  $n$  in  $m$  določata število vozlov v prečnih smereh  $x$  in  $y$ , širina snopa pa narašča z  $n$  in  $m$ .



Slika 3.5: Prečni profil absolutne vrednosti električne poljske jakosti Hermite-Gaussovinih snopov v grlu za različne vrednosti  $(n, m)$

**Naloga 3.4.1** Pokaži, da za Hermite-Gaussove snope višjih redov efektivni polmer snopa narašča sorazmerno s korenom iz števila prečnih vozlov  $w_{eff} \propto w\sqrt{n+m}$ .

Namig: pri zapisu prečne odvisnosti polja upoštevaj le vodilni člen Hermitovih polinomov in določi razdaljo od središča snopa, pri kateri je amplituda polja  $\psi$  največja.

<sup>4</sup>Francoski matematik Charles Hermite, 1822–1901.

 Hermite-Gaussovi snopi (enačba 3.33) tvorijo popoln ortogonalen sistem funkcij koordinat  $x$  in  $y$

$$\int \psi_{n,m}^*(x,y) \psi_{n',m'}(x,y) dx dy = \pi w_0^2 2^{n+m-1} n! m! \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}. \quad (3.36)$$

Polje nekega valovanja, ki ga poznamo v ravnini  $z = 0$ , lahko pri poljubnem  $z$  izračunamo z razvojem po Hermite-Gaussovih snopih. Pri tem je izbira polmera grla  $w_0$  poljubna, bo pa seveda vplivala na hitrost konvergencije razvoja. Na tak način lahko obravnavamo uklon na odprtini, kjer je očitno smiselno vzeti  $w_0$  približno enak dimenziji odprtine. Dobljeni rezultat je enako natančen kot Fresnelov uklonski integral.

Pri velikih  $z$ , kjer velja Fraunhoferjeva uklonska teorija, je polje Fourierjeva transformiranka polja pri  $z = 0$ . Hermite-Gaussovi snopi ohranajo prečno obliko, ki pa se z naraščajočim  $z$  širi. To je v skladu s tem, da je Fourierjeva transformiranka Hermite-Gaussove funkcije  $H_n(x)e^{-x^2/2}$  kar Hermite-Gaussova funkcija.

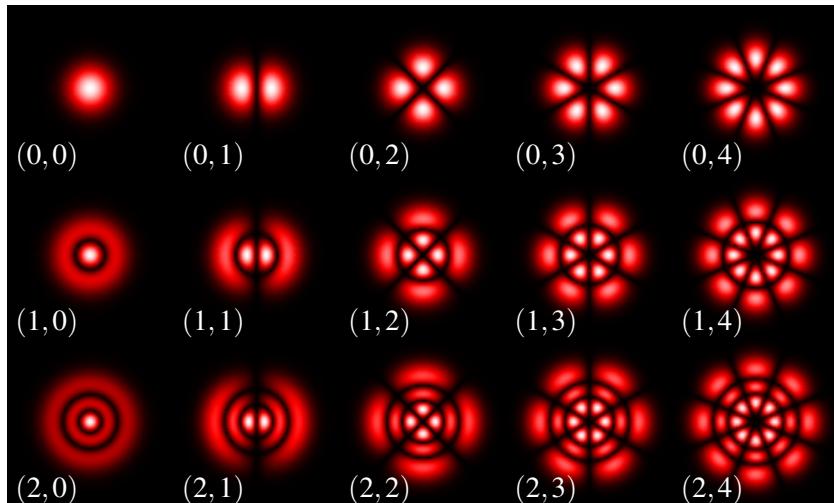
V cilindričnih koordinatah imajo snopi višjega reda obliko Laguerre-Gaussovih snopov<sup>5</sup>

$$\psi_{p,l}(r, \varphi, z) = \frac{w_0}{w} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w^2} \right) e^{\pm il\varphi} \exp \left( \frac{ikr^2}{2q} - i\eta_{p,l} \right), \quad (3.37)$$

kjer so  $L_p^l$  pridruženi Laguerrovi polinomi (npr.  $L_0^l(x) = 1, L_1^l(x) = -x + l + 1, L_2^l(x) = x^2/2 - (l+2)x + (l+2)(l+1)/2 \dots$ ) in

$$\eta_{p,l}(z) = (2p + l + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (3.38)$$

Podobno kot je v kartezičnem primeru red polinoma določal število prečnih ničel, določa  $p$  v cilindričnem primeru število vozelnih črt, kjer je gostota svetlobnega toka enaka nič. Na sliki (3.6) je prikazanih nekaj oblik amplitud  $|\Re \psi_{p,l}(r, \varphi, 0)|$ . Pri zapisu intenzitete, ki je sorazmerna s  $\psi\psi^*$ , člen s kotno odvisnostjo  $\exp(il\varphi)$  odpade in slike intenzitete Laguerre-Gaussovih snopov so radialno simetrične.



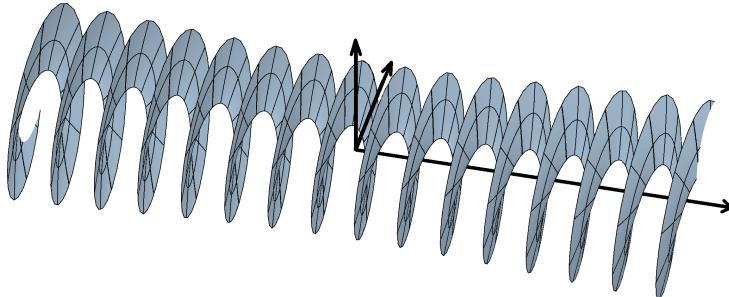
Slika 3.6: Prečni profil realnega dela električne poljske jakosti Laguerre-Gaussovih snopov v grlu za različne vrednosti  $(p, l)$

Navadno želimo, da iz laserja izhaja čim čistejši osnovni snop, vendar lahko pogosto opazimo tudi snope višjega reda. Da dobimo le osnovni snop, je treba posebej paziti pri konstrukciji laserja.

<sup>5</sup>Francoski matematik Edmond Nicolas Laguerre, 1834–1886.



Valovne fronte Laguerre-Gaussovih snopov imajo pri  $l \neq 0$  obliko vijačnic. Poyntingov vektor pri njih ni vzporeden z osjo žarka, ampak ima komponento tudi v prečni smeri. Ta spreminja smer, zato pride do pojava vrtilne količine v smeri osi snopa in snop na snov deluje z navorom. Pravimo, da Laguerre-Gaussovi snopi nosijo t.i. tirno vrtilno količino. V kvantni mehaniki funkcija  $\psi_{p,l}$  predstavlja foton s tirno vrtilno količino  $L = \hbar l$ , medtem ko leva in desna cirkularna polarizacija predstavlja spin fotona.



Slika 3.7: Valovna fronta Laguerre-Gaussovega snopa

### 3.5 Besslov snop

Poglejmo še poseben primer omejenega snopa, to je Besslov snop<sup>6</sup>. Nastavek za eksaktно rešitev valovne enačbe (enačba 1.13), pri čemer obravnavamo polje skalarno, naj bo

$$E = E_0 \psi(x, y) e^{i\beta z - i\omega t}. \quad (3.39)$$

Funkcija  $\psi$  mora zadoščati Helmholtzovi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + k_{\perp}^2 \psi = 0 \quad (3.40)$$

pri  $k_{\perp}^2 = k^2 - \beta^2$ . V cilindričnih koordinatah ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ) se enačba prepiše v

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k_{\perp}^2 \psi = 0. \quad (3.41)$$

Rešitve gornje enačbe so s faznim faktorjem pomnožene Besslove funkcije

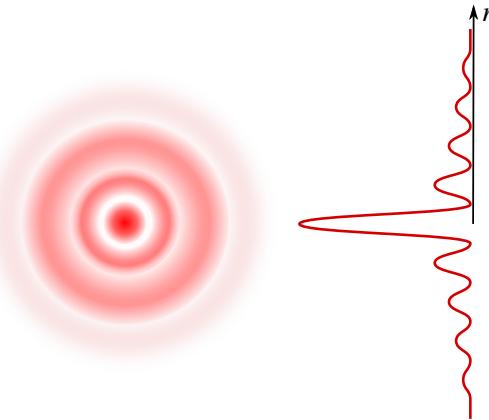
$$\psi_m(r, \varphi) = J_m(k_{\perp} r) e^{im\varphi}, \quad (3.42)$$

kjer je  $J_m$  Besslova funkcija,  $m$  pa celo število. Za  $m = 0$  je rešitev osnovi Besslov snop

$$E(r, z, t) = E_0 J_0(k_{\perp} r) e^{i\beta z - i\omega t}. \quad (3.43)$$

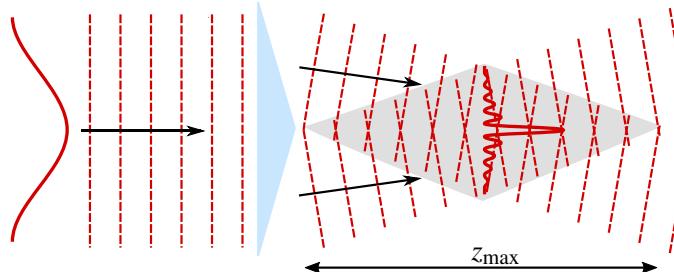
Valovne fronte Besslovega snopa so ravne in snop nima divergence. Vendar pa Besslov snop ni omejen v pravem smislu. Za velike oddaljenosti od osi snopa  $r$  intenzitetni profil namreč pojema kot  $I \propto J_0^2(k_{\perp} r) \sim (2/\pi k_{\perp} r) \cos^2(k_{\perp} r - \pi/4)$ . Energija takega snopa ni omejena znotraj efektivnega radija, kot je to pri Gaussovih snopih. Za konstrukcijo Besslovinih snopov bi (tako kot za konstrukcijo ravnega vala) potrebovali neskončno energije, kar je seveda nemogoče. Lahko pa ustvarimo dobre približke Besslovinih snopov, ki imajo pomembne in uporabne lastnosti.

<sup>6</sup>Nemški astronom, matematik in fizik Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846.



Slika 3.8: Prečni presek in profil intenzitete Besslovega snopa

 Z uporabo stožčaste leče (aksikona) lahko Gaussov snop preoblikujemo v približek Besslovega snopa (slika 3.9). Na plašču stožčaste leče se namreč Gaussov snop zlomi in valovni vektorji nastalega snopa opisujejo stožec, kar je sicer lastnost Besslova snopov. Dobljeni snop je približek Besslovega snopa, vendar le na določenem območju, dolgem  $z_{max}$ . Znotraj tega območja je divergenca snopa praktično enaka nič. Poleg manjše divergence imajo ti snopi še lastnost regeneracije. To pomeni, da se snop v senčni strani za objektom, ki ga osvetljuje (na primer v optični pinceti), regenerira. Profil snopa v senčni strani (daleč stran od objekta) je tako enak profilu snopa pred objektom.



Slika 3.9: Nastanek približka Besslovega snopa na stožčasti leči

### 3.6 Transformacije snopov z lečami

Vrnimo se h Gaussovim snopom in poglejmo, kaj se zgodi z njimi pri prehodu skozi optične elemente. Začnemo z enostavno tanko lečo z goriščno razdaljo  $f$ . V geometrijski optiki je krivinski radij krogelnega vala, ki izhaja iz točke na osi, kar enak razdalji do točke. Leča točko na optični osi preslika v točko na osi, od tod pa sledi, da se krogelni val s krivinskim radijem  $R_1$  po prehodu skozi leč spremeni v val s krivinskim radijem  $R_2$ . Pri tem velja zveza

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}. \quad (3.44)$$

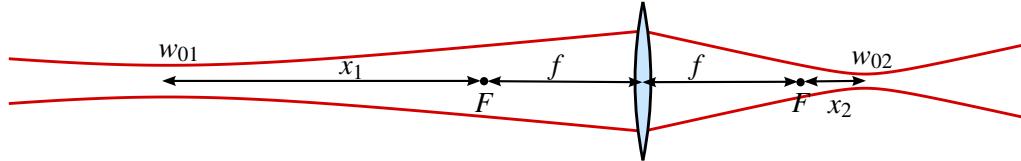
Dogovorimo se, da je krivinski radij v točki  $z$  pozitiven, če je središče krožnice pri  $z' \leq z$ .

Kako pa je z Gaussovim snopom? Polmer snopa  $w$  se pri prehodu skozi tanko lečo ne spremeni, zato velja po enačbah (3.32) in (3.44) za kompleksni krivinski radij tik pred lečo in tik za njo

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f}. \quad (3.45)$$

Kompleksni krivinski radij  $q$  je po enačbi (3.31) linearna funkcija koordinate  $z$  in za opis Gaussovega snopa zadošča, če v neki točki  $z$  poznamo  $q$ . Iz realnega dela določimo ukrivljenost front, iz imaginarnega pa polmer snopa. Enačba (3.45) torej zadošča za račun prehoda snopa skozi poljuben sistem leč brez aberacij.

Kot primer poglejmo, kako z zbiralno lečo zberemo Gaussov snop.



Slika 3.10: Prehod Gaussovega snopa skozi tanko lečo. Grlo velikosti  $w_{01}$  v oddaljenosti  $x_1$  od gorišča leče  $F$  se preslikava v grlo velikosti  $w_{02}$  v oddaljenosti  $x_2$  od gorišča leče  $F$ .

Vpadni snop naj ima grlo s polmerom  $w_{01}$  in parametrom  $z_{01} = \pi w_{01}^2 / \lambda$ . Lega grla je v točki, ki je za  $x_1$  oddaljena od levega gorišča leče  $F$  (slika 3.10). Naj bosta

$$q_1^F = x_1 - iz_{01} \quad \text{in} \quad q_2^F = -x_2 - iz_{02} \quad (3.46)$$

kompleksna krivinska radija v levem in desnem gorišču, pri čemer je koordinatna os  $z$  usmerjena v desno, gledamo pa referenčno glede na lego grla vsakega posameznega snopa. Za vrednosti  $q$  tik pred lečo in tik za njo velja tudi

$$q_1 = q_1^F + f \quad \text{in} \quad q_2 = q_2^F - f. \quad (3.47)$$

Od tod z uporabo enačbe (3.45) izpeljemo zvezo za  $q$  v goriščih v kompaktni obliki

$$q_1^F q_2^F = -f^2. \quad (3.48)$$

Enačba je po obliki podobna enačbi za oddaljenost slike od gorišča v geometrijski optiki, pomen pa ima drugačen. Uporabimo enačbi (3.46) in zapišimo posebej realni in imaginarni del

$$x_1 x_2 = f^2 - z_{01} z_{02} \quad \text{in} \quad \frac{x_1}{z_{01}} = \frac{x_2}{z_{02}}. \quad (3.49)$$

Dobimo enačbi za preslikavo Gaussovega snopa z lečo z goriščno razdaljo  $f$ . Prva enačba

$$x_2 = \frac{x_1 f^2}{x_1^2 + z_{01}^2} \quad (3.50)$$

določa lego grla preslikanega snopa na desni strani leče, druga pa povečavo

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}. \quad (3.51)$$

Enačba (3.50) se ujema z izrazom za preslikavo točke v geometrijski optiki le, kadar je  $z_{01} \ll x_1$ . Kadar je  $z_{01} \gg f$ , je val na leči pri vsakem  $x_1$  skoraj raven in  $x_2 \rightarrow 0$ , kar pomeni, da leži grlo na desni strani v gorišču. V praksi za Gaussove snope, ki izhajajo iz laserjev, pogosto ne velja ne prva ne druga limita, zato je treba uporabiti zapisani izraz (enačba 3.50). Tudi velikost polmera grla na desni, podana z enačbo (3.51), je precej drugačna kot v geometrijski optiki.

Za primer vzemimo snop iz He-Ne laserja (valovna dolžina 632,8 nm), ki ima grlo s polmerom  $w_{01} = 0,5$  mm na izhodnem ogledalu in je 50 cm oddaljeno od leče z goriščno razdaljo  $f = 25$  cm. Za tak snop je  $z_{01} = 124$  cm. Po enačbi (3.50) leži grlo za lečo v oddaljenosti 1 cm od gorišča in torej 26 cm za lečo, po enačbi (3.51) pa izračunamo polmer  $w_{02} = 100$  μm. Enačbe geometrijske optike bi dale popolnoma napačen položaj grla 50 cm za lečo, polmer grla pa 0,5 mm. Po drugi strani bi približek, da je vpadni snop kar raven, dal grlo na desni v gorišču s približno pravim polmerom. Zakaj da približek ravnih valov bolj pravilen rezultat, lahko hitro uvidimo, če pogledamo Rayleighovo dolžino snopa  $z_{01}$ : snop vpada na lečo še v območju bližnjega polja ( $x_1 + f < z_{01}$ ), kjer je približno oblike ravnih valov.

Če postavimo gorišče leče v grlo snopa ( $x_1 = 0$ ), je grlo na desni strani tudi v gorišču ( $x_2 = 0$ ). Razmerje polmerov grl na eni in drugi strani leče lahko izračunamo

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_2}{x_1} = \frac{f^2}{z_{01}^2} \quad \text{in} \quad \frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f}{z_{01}}. \quad (3.52)$$

Velikost grla na desni strani je tako

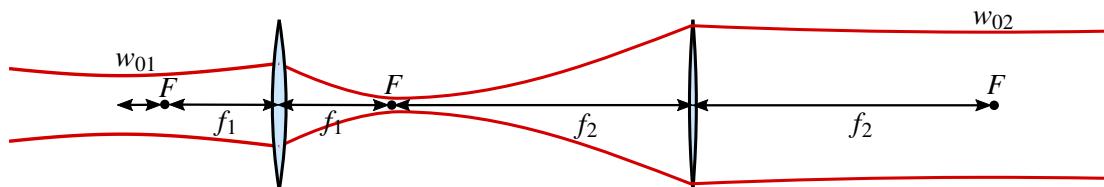
$$w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01}}. \quad (3.53)$$

Če želimo doseči kar se da majhno grlo po prehodu skozi leč, mora biti polmer vpadnega snopa kar se da velik. Vpadni snop je tako smiseln razširiti, vendar je polmer snopa lahko največ enak polmeru leče  $a$ . Najmanjša velikost grla, ki jo še lahko dosežemo z zbiralno lečo, je tako

$$w_{02 \min} = \frac{\lambda f}{\pi a} \sim \lambda. \quad (3.54)$$

Dobi mikroskopski in fotografiski objektivi dosegajo  $f/a \simeq 1$ , zato je mogoče z njimi Gaussov snop zbrati v piko velikosti  $\sim \lambda$ .

Omenili smo, da je treba za dosego majhnega polmera grla za leč snop pred lečo čim bolj razširiti. Razširitev vpadnega snopa naredimo s teleskopom (slika 3.11), katerega značilnost je, da je razmik med lečama enak vsoti goriščnih razdalj leč in zato gorišči leč sovpadata. Povečava teleskopa je pri taki postavitvi leč enaka razmerju med goriščima razdaljama (glej nalogu 3.6.1).



Slika 3.11: Prehod Gaussovega snopa skozi teleskop iz leč z goriščnima razdaljama  $f_1$  in  $f_2$ . Pri teleskopu gorišči leč sovpadata.

**Naloga 3.6.1** Dve leči z goriščnima razdaljama  $f_1$  in  $f_2$  naj bosta na medsebojni razdalji  $d = f_1 + f_2$ . Pokaži, da je povečava takega teleskopa enaka

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f_2}{f_1}. \quad (3.55)$$

### 3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki

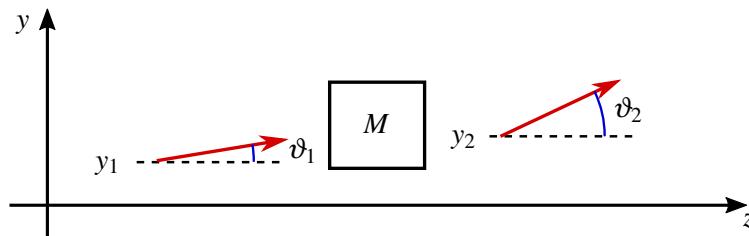
Preden se lotimo splošnejšega zapisa preslikav Gaussovega snopa, se spomnimo, kako obravnavamo preslikave v geometrijski optiki. Slika nastane kot presečišče žarkov, ki izhajajo iz točke predmeta pred optičnim sistemom. Žarek je pravokoten na valovne ploskve, pri čemer moramo vzeti še limito, ko gre valovna dolžina proti nič. Ukrivljenost valovne fronte je neposredno povezana s spremjanjem naklona žarkov, pri čemer bomo privzeli, da so nakloni žarkov glede na os majhni.

Žarek v izbrani ravnini  $z$  lahko opišemo z dvema parametrom: oddaljenostjo  $y$  od osi in naklonom  $\vartheta$  glede na os sistema. Ti dve količini sta med seboj neodvisni in ju sestavimo v vektor

$$\begin{bmatrix} y \\ \vartheta \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Preslikavo žarka zapišemo kot matriko, ki deluje na vpadni vektor in ga preslika v izhodni vektor (slika 3.12)

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$



Slika 3.12: Preslikave žarkov lahko obravnavamo z matrikami. Optični element, ki ga predstavlja matrika  $M$ , preslika žarek  $(y_1, \vartheta_1)$  v  $(y_2, \vartheta_2)$ .

Matrike  $M$  so na splošno oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

zato jih imenujemo tudi matrike ABCD. Poglejmo nekaj primerov.

Pri premiku za  $d$  vzdolž osi se zaradi končnega naklona spremeni odmik od osi, naklon pa ostane enak

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + d\vartheta_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

To lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Matrika za premik  $d$  vzdolž osi  $z$  je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Poglejmo še matriko za prehod skozi lečo. Pri prehodu skozi tanko lečo se spremeni nagib žarka. Če je žarek pred lečo vzporeden z osjo, gre za lečo skozi gorišče, zato

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -\frac{y_1}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Pri tem koeficientov  $B$  in  $D$  še ne poznamo. Določimo jih iz drugega pogoja, ki pravi, da se žarek, ki gre skozi lečo na osi, ne spremeni

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Sledi  $B = 0$  in  $D = 1$ . Matrika za prehod skozi lečo je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Podobno izpeljavo kot za prehod skozi lečo naredimo za odboj na sferičnem zrcalu s krivinskim radijem  $R$ . Pripadajoča matrika je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

pri čemer je  $R > 0$  za konkavna zrcala. Matrika za odboj na ravnem zrcalu je identiteta.

Matriko sestavljenih optičnih naprave zapišemo kot produkt matrik posameznih komponent. Pri tem moramo paziti na vrstni red množenja, saj množenje matrik ni komutativno. Matriko preslikave z dvema optičnima elementoma, pri čemer žarek najprej preide element z indeksom 1 in nato element z indeksom 2, zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2A_1 + B_2C_1 & A_2B_1 + B_2D_1 \\ C_2A_1 + D_2C_1 & C_2B_1 + D_2D_1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

V sistemu z več elementi zapišemo produkt matrik za vse elemente, pri čemer ne smemo pozabiti na premike med elementi.

Poglejmo primer. Žarek naj najprej prepotuje razdaljo  $d$ , nato pa ga usmerimo na tanko lečo z goriščno razdaljo  $f$ . Matrika za celoten prehod je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$



Opisani matrični formalizem je zelo prikladen predvsem za računanje prehoda svetlobe skozi zapletene optične sisteme, saj ga je prav lahko izvesti z računalnikom. Poleg tega je enolično povezan z matričnim formalizmom izračuna kompleksne ukrivljenosti Gaussovih snopov, zato omogoča preprost prenos rezultatov geometrijske optike v optiko snopov.

### 3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija

Poskusimo zdaj zapisati podoben matrični formalizem še za kompleksne krivinske radije. Za opis Gaussovega snopa zadošča, da v izbrani ravnini  $z$  poznamo kompleksni krivinski radij  $q$ . Vemo, da je  $q$  linearna funkcija premika po  $z$  (enačba 3.31). Izračunali smo tudi že, kako se  $q$  spremeni pri prehodu skozi tanko lečo (enačba 3.45).

Pri premiku iz ravnine  $z_1$  v ravnino  $z_2$ , ki je premaknjena za  $d$ , se  $q$  spremeni

$$q_2 = q_1 + d. \quad (3.68)$$

Po enačbi (3.45) je pri prehodu skozi lečo

$$q_2 = \frac{q_1 f}{f - q_1} = \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1}. \quad (3.69)$$

Premik in leča dasta skupaj

$$q_2 = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1 + d}{f} + 1} = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1}{f} - \frac{d}{f} + 1}. \quad (3.70)$$

V vseh treh primerih lahko transformacijo kompleksnega krivinskega radija  $q$  zapišemo v obliki ulomljene linearne preslikave

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}. \quad (3.71)$$

Ko koeficiente preslikave razvrstimo v matriko

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

in iz gornjih enačb razberemo koeficiente matrik za opisane preslikave, vidimo, da so povsem enaki koeficientom matrik ABCD, ki jih poznamo iz geometrijske optike. Hitro lahko tudi preverimo, da je matrika za premik in lečo, ki jo dobimo iz preslikave (enačba 3.70), enaka produktu matrike za premik in matrike za lečo (enačba 3.67).

Omenimo še eno lastnost matrik ABCD. Kadar po prehodu skozi optične elemente snop svetlobe preide v snov z enakim lomnim količnikom kot je bil na začetku, je determinanta matrike ABCD enaka 1. V nasprotnem primeru je determinanta matrike enaka razmerju lomnih količnikov začetne in končne snovi.

$$\det(M) = AD - BC = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.73)$$

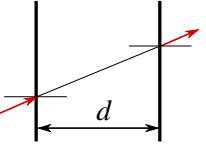
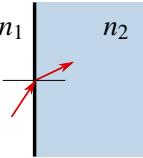
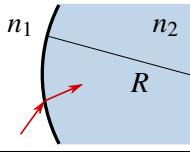
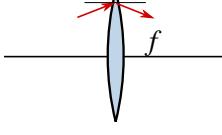
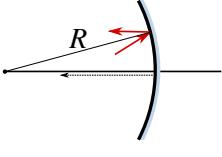
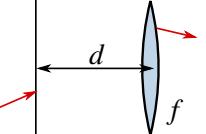
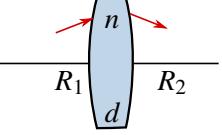
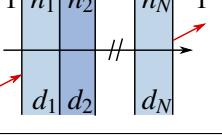
Opis prehoda	Skica	Matrika za prehod
Prehod skozi prostor za $d$		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Prehod skozi mejo dveh snovi		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod skozi konveksno ukrivljeno mejo $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1-n_2)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod skozi konveksno lečo $f > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Odboj na konkavnem zrcalu $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3.1: Matrike ABCD za nekaj osnovnih preslikav, ki veljajo tako v geometrijski optiki kot tudi za izračun preslikave kompleksnega krivinskega radija  $q$  Gaussovih snopov.

**Naloga 3.8.1** Pokaži, da za naslednje prehode veljajo ustrezne matrike ABCD.

Prehod skozi prostor in lečo		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{bmatrix}$
Prehod skozi lečo z debelino $d$ in krivinskima radijema $R_1$ in $R_2$		$\begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{n f_1} & \frac{d}{n} \\ -\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{d}{n f_1 f_2} & 1 - \frac{d}{n f_2} \end{bmatrix} f_i = \frac{R_i}{n-1}$
Prehod skozi zaporedje plasti		$\begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



## 4. Optični resonatorji

Osnovni gradnik vsakega laserja je resonator. V njem je vzbujeno lastno nihanje, ki skozi delno prepustno steno resonatorja kot valovanje izhaja iz sistema. V tem poglavju bomo najprej spoznali optične resonatorje in kriterije za njihovo stabilno delovanje, nato pa izračunali lastne frekvence resonatorjev ter povezali spektralno širino črt izsevane svetlobe z izgubami v laserskem resonatorju.

### 4.1 Odprtii resonatorji

Optični resonatorji so votline, v katerih je mogoče vzpostaviti stoječe svetlobno valovanje. Če vzbujamo v resonatorju valovanja z različnimi frekvencami, se pri nekaterih diskretnih frekvencah pojavi resonančno obnašanje. Te frekvence imenujemo lastne frekvence resonatorja. Zaradi dušenja imajo lastne frekvence končno frekvenčno oziroma spektralno širino, pri čemer je čas dušenja mnogo daljši od nihajne periode.

Optične resonatorje uporabljamo predvsem v dva namena:

1. V resonatorjih lahko ob razmeroma šibkem zunanjem vzbujanju nastane velika električna poljska jakost pri resonančni frekvenci. Za vzdrževanje konstantne amplitude lastnega nihanja mora zunanji vir zgolj pokrivati izgube v resonatorju. Če so te majhne, je zunanji vir lahko šibek, polje v resonatorju pa vseeno veliko.
2. Resonatorji delujejo kot filtri, ki prepuščajo le polje s točno določeno frekvenco in izbrano prostorsko odvisnostjo. Primer take uporabe je Fabry-Perotov interferometer, opisan v nadaljevanju.



Resonatorje poznamo z različnih področij, na primer akustične pri glasbilah ali mikrovalovne in radijske. V mikrovalovnem področju, kjer so valovne dolžine valovanja okoli 1 cm, so resonatorji zaprte kovinske votline z dimenzijami, ki so primerljive z valovno dolžino vzbujenega valovanja. Resonančne frekvence so v takem resonatorju med seboj dobro ločene in ni težko doseči enega samega lastnega nihanja v izbranem frekvenčnem intervalu.

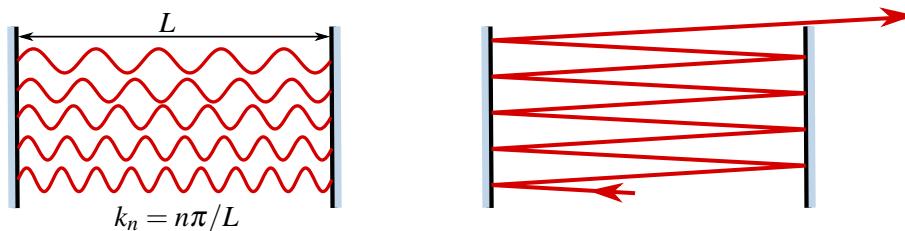
V optiki so resonatorji navadno veliko večji od valovne dolžine svetlobe. Vzemimo kocko s stranico  $L \gg \lambda$ , v kateri je vzbujeno zelo veliko število lastnih nihanj. Število lastnih nihanj  $N$  na frekvenčni interval  $\Delta\nu$  zapišemo z zvezno gostoto stanj

$$N = 2 \frac{1}{8} 4\pi k^2 \Delta k \frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V \Delta \omega = \frac{8\pi v^2}{c^3} V \Delta \nu. \quad (4.1)$$

To gornje enačbe smo prišli tako, da smo prešteli stoječa valovanja z velikostjo valovnega vektorja med  $k$  in  $k + \Delta k$ : volumen pripadajoče krogelne lupine v pozitivnem oktantu  $\frac{1}{8} 4\pi k^2 \Delta k$  smo delili z volumnom  $(\pi/L)^3$ , ki pripada enemu stanju. Upoštevali smo tudi, da ima vsako lastno nihanje lahko dve polarizaciji.

Poglejmo primer. Izberimo osrednjo frekvenco  $\nu = 3 \cdot 10^{14}$  Hz, ki ustreza valovni dolžini  $1 \mu\text{m}$ , in širino frekvenčnega intervala  $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9$  Hz, ki je značilna za Dopplerjevo razširjeno emisijsko črto v plinu. Potem je v votlini s stranico  $L = 1 \text{ cm}$  in prostornino  $V = 1 \text{ cm}^3$  število lastnih nihanj na izbran frekvenčni interval po enačbi (4.1) enako  $N = 2,5 \cdot 10^8$ . Če bi bile vse stene votline idealna zrcala, bi bil čas dušenja vseh lastnih nihanj približno enako dolg in vedno bi vzbujali zelo veliko število resonanc hkrati. Tak resonator bi bil neuporaben.

Hkratnemu vzbujanju velikega števila nihanj se izognemo z zmanjšanjem odbojnosti stranskih sten votline, saj tako povečamo dušenje stoječih valov v prečni smeri. Dušenje valov, ki so pravokotni na idealno odbojni končni steni, ostane nespremenjeno. Nazadnje lahko stranske stene povsem odstranimo, tako da stoječih valov v prečni smeri sploh ni več. Ostane le še nekaj valov, ki so pravokotni na končni steni. Takemu resonatorju pravimo odprt resonator (slika 4.1).



Slika 4.1: Levo: lastni nihajni načini odprtega rezonatorja imajo diskretne vrednosti valovnih vektorjev  $k_n$ . Desno: žarki, ki niso pravokotni na zrcali, uidejo iz odprtega rezonatorja.

Obravnavajmo odprte rezonatorje podrobneje. V zaprti pravokotni votlini velikosti  $a \times a \times L$  z idealno odbojnimi stenami so dovoljene vrednosti valovnega vektorja za lastna nihanja

$$\mathbf{k}_{l,m,n} = \left( \frac{l\pi}{a}, \frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{L} \right), \quad (4.2)$$

kjer so  $l$ ,  $m$  in  $n$  cela števila,  $L$  dolžina,  $a$  pa prečna dimenzija rezonatorja. Lastne krožne frekvence so

$$\omega_{l,m,n} = c |\mathbf{k}_{l,m,n}|. \quad (4.3)$$

Dolžina rezonatorja  $L$  je velika v primerjavi z  $\lambda$  in zato je  $n$  zelo veliko število. Če prečnih sten ni, mora biti  $\mathbf{k}$  približno vzporeden z osjo  $z$ , zato morata biti  $l$  in  $m$  majhna. Tedaj lahko velikost valovnega vektorja razvijemo in krožno frekvenco zapišemo kot

$$\omega_{l,m,n} = c \left( \frac{n\pi}{L} + \frac{l^2 + m^2}{2n} \frac{L\pi}{a^2} \right). \quad (4.4)$$

Drugi člen v oklepaju je navadno le majhen popravek, tako da so lastne frekvence odprtih optičnih rezonatorjev odvisne predvsem od števila vozlov v vzdolžni smeri. To število je navadno veliko, med  $10^5$  in  $10^7$ . Možna so tudi lastna nihanja z nekaj vozli v prečni smeri, ki pa le malo vplivajo na lastne frekvence. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali predvsem lastna nihanja brez vozlov v prečni smeri in jih označili z enim samim indeksom  $n$ .

Razlika med frekvencama dveh zaporednih lastnih nihanj  $n$  in  $n+1$  je

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \quad \text{in} \quad \Delta\nu_n = \frac{c}{2L}. \quad (4.5)$$

Pri dolžini rezonatorja  $L = 30 \text{ cm}$  je v frekvenčnem intervalu  $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$  le še  $\Delta\nu/\Delta\nu_n = 6$  nihanj, ki jih je brez težav mogoče razločiti.

V zaprtih votlinah z zrcalnimi stenami obstajajo dobro določena lastna stanja pri poljubni obliki votline. To ne drži za odprte resonatorje. Da se pojavi lastna nihanja z majhnimi izgubami, morata biti izpolnjena dva pogoja:

1. Snop žarkov mora po mnogih odbojih ostati ujet med zrcalom resonatorja.
2. Polmer zrcala mora biti večji od polmera uklonsko razširjenega snopa, ki se širi od nasprotnega zrcala.

Resonatorje, ki zadoščajo gornjima pogojem, imenujemo stabilni resonatorji. Drugi pogoj lahko zapišemo tudi z enačbami, izhajajoč iz enačbe za oceno divergenc (enačba 3.1):

$$\vartheta = \frac{\lambda}{a_1} < \frac{a_2}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1 a_2}{\lambda L} > 1, \quad (4.6)$$

kjer sta  $a_1$  in  $a_2$  polmera zrcal resonatorja. Izrazu  $F = a_1 a_2 / \lambda L$  pravimo tudi Fresnelovo število (glej enačbo 1.62) in za stabilen resonator mora veljati  $F > 1$ . Laserji imajo pogosto  $F \gg 1$ , lahko tudi  $F \sim 100$ .

### Fabry-Perotov interferometer

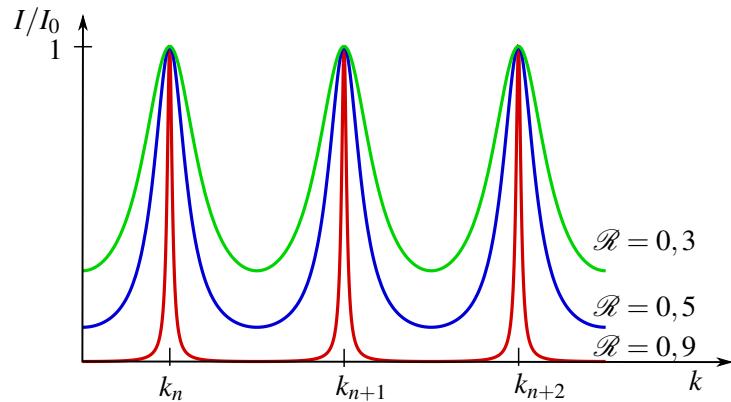
Poglejmo resonator, omejen z dvema vzporednima ravnima zrcaloma z veliko odbojnostjo. Takemu sistemu pravimo Fabry-Perotov interferometer<sup>1</sup>. Da nastane med zrcaloma stoječe valovanje, mora biti razdalja med zrcaloma večkratnik polovične valovne dolžine (enačba 4.2)

$$L = \frac{n\lambda}{2}. \quad (4.7)$$

Prepustnost interferometra za ravni val, ki vpada pravokotno na zrcali z odbojnostjo  $\mathcal{R}$ , je

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2 kL} \quad (4.8)$$

in je prikazana na sliki (4.2).



Slika 4.2: Prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v odvisnosti od valovnega števila  $k$  pri različnih odbojnostih zrcal  $\mathcal{R}$ .

Ko je frekvence vpadnega valovanja ravno enaka lastni frekvenci resonatorja, je sistem v resonanci in  $T = 1$ . Širina resonance se z naraščajočo odbojnostjo zrcal  $\mathcal{R}$  zmanjšuje. Spoznali bomo, da odbojnost zrcal določa tudi čas dušenja vzbujenega lastnega nihanja.

<sup>1</sup>Francoska fizika Maurice Paul Auguste Charles Fabry, 1867–1945, in Jean-Baptiste Alfred Perot, 1863–1925.

**Naloga 4.1.1** Pokaži, da je prepustnost Fabry-Perotovega interferometra, katerega zrcali imata odbojnost  $\mathcal{R}$ , enaka

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2 \delta}, \quad (4.9)$$

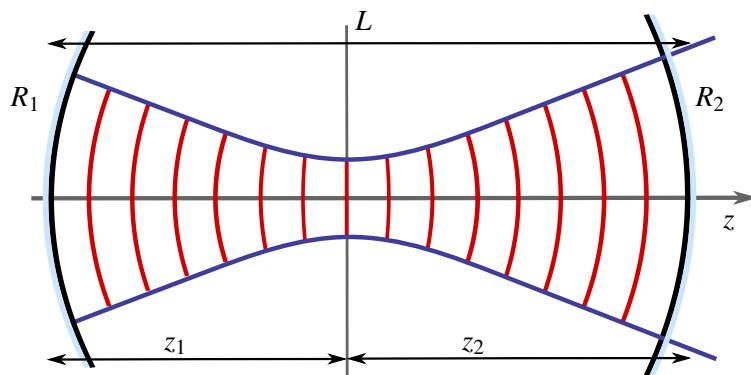
kjer je  $\delta = kL \cos \vartheta$ ,  $L$  razmik med zrcaloma,  $\vartheta$  vpadni kot,  $k$  pa valovno število.

Prvemu pogoju za stabilnost ustreza v Fabry-Perotovem interferometru le žarki, ki so natanko pravokotni na zrcali. Čim sta zrcali le malo nevzporedni, stabilnih žarkov sploh ni več. Tak planparallelni interferometer torej deluje na meji stabilnosti. Z izpolnjevanjem drugega pogoja ni težav, saj morata biti pri na primer 30 cm dolgem resonatorju in valovni dolžini 0,5 μm zrcali večji od 0,4 mm, da zadostita pogoju, zapisanem v enačbi (4.6).

Bolj stabilni resonatorji so sestavljeni iz dveh konkavno ukrivljenih zrcal. Tedaj so žarki, ki potujejo pod majhnim kotom glede na osrednjo os, ujeti med zrcaloma in energija lastnih nihanj ostaja lokalizirana blizu osi.

## 4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih

V stabilnih resonatorjih s konkavnima zrcaloma pričakujemo, da so lastna nihanja omejena na bližino osrednje osi in zrcali znatno večji od polmera lastnega nihanja. Tedaj lahko za obravnavo električnega polja uporabimo obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Upoštevamo še zahtevo, da svetloba po odboju od zrcala konstruktivno interferira sama s sabo. Od tod izhaja robni pogoj, ki pravi, da se valovna fronta stoječega valovanja na zrcalu ujema z obliko zrcala, električno polje na površini zrcala pa je približno enako nič.



Slika 4.3: Gaussov snop v odprttem resonatorju s konkavno ukrivljenima zrcaloma s krivinskimi radijema  $R_1$  in  $R_2$ . Krivinski radij čela snopa se ujema s krivinskim radijem zrcala. Kadar  $R_1 \neq R_2$ , grlo snopa ne leži na sredini resonatorja.

V prečni smeri omejene rešitve obosne enačbe smo našli v obliki potupočnih Gaussovih snopov (enačba 3.29). Podobno kot lahko zapišemo stoječe valovanje z vsoto valovanj, ki se širita v nasprotnih smereh, lahko stoječe snope zapišemo s superpozicijo snopov, ki se širita v različnih smereh ob osi. Da zadostimo robnim pogojem na zrcalih, se mora krivinski radij valovnih front snopa na zrcalih ujemati s krivinskima radijema zrcal  $R_1$  in  $R_2$  (slika 4.3). Pri tem sta neznanki polmer grla snopa  $w_0$ , ki je povezan s parametrom  $z_0$ , in lega grla.

Postavimo izhodišče osi  $z$  v grlo, kot smo navajeni, tako da sta zrcali pri  $z_1 < 0$  in  $z_2 > 0$ . Uporabimo enačbo za krivinski radij snopa  $R$  (enačba 3.25) in zapišemo

$$-R_1 = z_1 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z_1} \right)^2 \right] \quad \text{in} \quad (4.10)$$

$$R_2 = z_2 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z_2} \right)^2 \right]. \quad (4.11)$$

Pri tem smo upoštevali, da je krivinski radij za konkavno zrcalo glede na pozitivno smer  $z$  pozitiven. Prvo enačbo smo zapisali z negativnim predznakom pri  $R_1$ , zato da je krivinski radij pozitivno število. Veljati mora še

$$z_2 - z_1 = L. \quad (4.12)$$

Iz gornjih enačb najprej izračunamo razdaljo  $z_1$ , ki določa lego grla v resonatorju, nato pa parameter  $z_0$ , ki določa območje bližnjega polja in preko enačbe (3.21) enolično tudi polmer grla

$$z_0^2 = \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}. \quad (4.13)$$

Da je snop realen in omejen, mora biti  $z_0^2 > 0$  in zato števec gornjega izraza pozitiven. Ta pogoj lahko po kratkem računu zapišemo v obliki stabilnostnega kriterija

$$0 < \left( 1 - \frac{L}{R_1} \right) \left( 1 - \frac{L}{R_2} \right) < 1. \quad (4.14)$$

Resonatorji, ki zadoščajo gornjemu pogoju, so stabilni.

---

**Naloga 4.2.1** Izhajajoč iz pogoja, da se na zrcalih krivinski radij valovnih front snopa ujema s krivinskim radijem zrcal (enačbi 4.10 in 4.11), izpelji kriterij za stabilno delovanje resonatorja (enačba 4.14).

---

Stabilnostni kriterij za resonatorje je najbolj nazorno predstaviti na diagramu, kjer na os  $x$  nanašamo  $L/R_1$ , na os  $y$  pa  $L/R_2$ . Na sliki (4.4) je stabilno območje delovanja resonatorjev, kot ga razberemo iz enačbe (4.14), označeno senčeno. Opazimo, da je možnih veliko različnih vrst stabilnih resonatorjev, ob tem da resonatorji, ki so sestavljeni iz dveh konveksnih zrcal, niso nikoli stabilni. Če je eno zrcalo ravno (plankonkavni resonatorji), je grlo Gaussovega snopa vedno na ravnem zrcalu. V primeru konveksno-konkavnega resonatorja leži grlo snopa izven resonatorja. Podrobnejše si oglejmo nekaj posebnih primerov stabilnih resonatorjev.

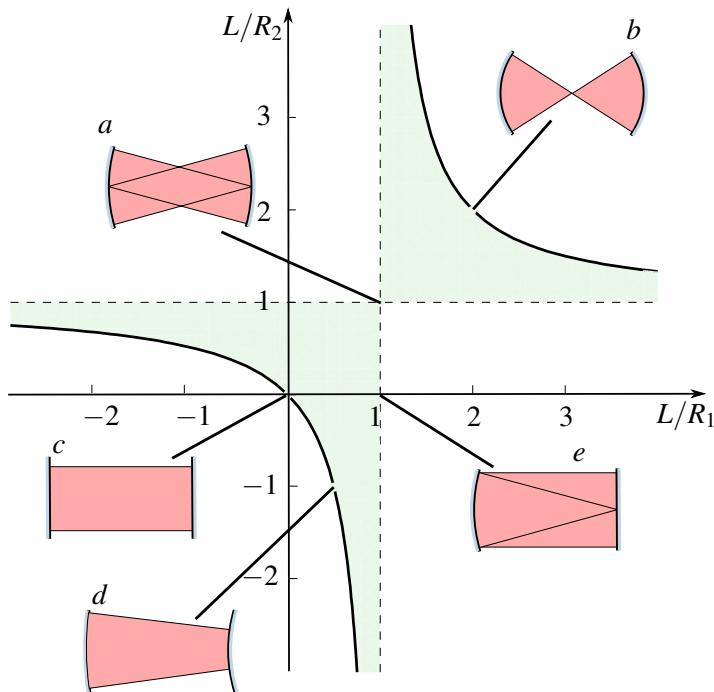
### Simetrični resonatorji

Za simetrični resonator velja  $R_1 = R_2 = R$ . Na diagramu (slika 4.4) se taki resonatorji nahajajo na simetrali lihih kvadrantov pri  $x = y$ . Pri simetričnih resonatorjih je grlo v sredini resonatorja in enačba (4.13) se poenostavi v

$$z_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(2R - L)L}. \quad (4.15)$$

Polmer grla v simetričnem resonatorju je enak

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \sqrt[4]{(2R - L)L}. \quad (4.16)$$



Slika 4.4: Laserski resonator je stabilen, če sta parametra  $L/R_1$  in  $L/R_2$  znotraj obarvanega območja: (a) konfokalni resonator, (b) koncentrični resonator, (c) planparalelni resonator (Fabry-Perot), (d) konveksno-konkavni resonator in (e) plankonkavni resonator.

Po enačbi (3.19) lahko izračunamo še polmer snopa na ogledalu

$$w_1 = w_0 \sqrt{\left(1 + \left(\frac{L}{2z_0}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \frac{R\sqrt{L}}{\sqrt{2R-L}}}. \quad (4.17)$$

Pri izbrani dolžini simetričnega resonatorja je polmer snopa na zrcalu najmanjši, kadar je  $R = L$ . Tedaj sovpadata geometrijski gorišči obeh zrcal, zato imenujemo tak resonator konfokalni. Hiter račun pokaže, da velja  $z_0 = L/2$ , snop od grla do zrcala pa se razširi za  $w_1/w_0 = \sqrt{2}$ .

**Naloga 4.2.2** Pokaži, da je polmer snopa na izhodnem zrcalu v simetričnem resonatorju z danimi parametromi  $R$  in  $L$  najmanjši, kadar je resonator konfokalni.

Pri dejanskem načrtovanju laserjev velja dodatna omejitev, saj želimo ojačevalno sredstvo, ki je v resonatorju, čim bolj izkoristiti. Pogosto je zato polmer grla snopa razmeroma velik. Iz enačbe (4.16) sledi, da mora biti v tem primeru velik tudi krivinski radij zrcal. S tem pridobimo na ojačenju, po drugi strani pa se nekoliko poslabša stabilnost.

Poglejmo primer. Naj bo dolžina resonatorja laserja  $L = 1$  m in valovna dolžina  $\lambda = 633$  nm. Tedaj je v konfokalni geometriji po enačbi (4.16) polmer grla  $w_0 = 0,32$  mm. Premer razelektrične cevi je navadno nekaj milimetrov in približno tako debel mora biti tudi svetlobni snop, da dobro izkoristi ojačenje zaradi stimuliranega sevanja. Da bi pri isti dolžini laserja dobili grlo s premerom 2 mm, bi morali uporabiti zrcali s krivinskim radijem okoli 50 m. Primer kaže, da že majhna ukrivljenost zrcal zagotovi dokaj ozke snope.

 Izkaže se, da so konfokalni resonatorji najmanj občutljivi na majhne zasuke zrcal. Pri zasuku zrcala se v navadnih stabilnih resonatorjih namreč premakne os, ki gre skozi krivinski središči obeh zrcal. Če želimo, da je največji odmik nove osi kar se da majhen, uporabimo konfokalne resonatorje.

Skrajna primera stabilnega simetričnega resonatorja sta koncentrični resonator, pri katerem sovpadata krivinski središči zrcal in  $L = 2R$ , in planparalelni resonator, pri katerem sta zrcali ravni. V prvem primeru gre po enačbi (4.16) polmer grla proti nič, v drugem pa raste sorazmerno z  $R^{1/4}$ . Pri ravnih zrcalih postanejo uklonske izgube na robovih znatne. Račun z Gaussovimi snopi tedaj ni več veljaven in treba je uporabiti pristope, ki jih bomo opisali v razdelku (4.6).

Poleg osnovnega Gaussovega snopa rešijo obosno enačbo tudi snopi višjega reda. Ti imajo enak parameter  $z_0$  in enako ukrivljenost  $R$ , zato tudi taki snopi predstavljajo rešitve za polje v stabilnih resonatorjih. Vendar je pri enakem  $w_0$  polmer snopa reda  $n$  za približno  $\sqrt{n}$ -krat večji (glej nalogo 3.4.1). Če želimo, da iz laserja izhaja samo osnovni Gaussov snop<sup>2</sup> (ki ima najmanjšo divergenco pri danem  $w_0$ ) pogosto uporabimo zaslonko, ki snope višjih redov poreže, ali kakšen drug element, npr. Fabry-Perotov etalon<sup>3</sup>, ki poveča izgube za snope višjega reda.

 Včasih se uporablajo tudi nestabilni resonatorji, za katere ne obstajajo rešitve v obliki Gaussovih snopov. Taki resonatorji imajo velike izgube na robovih zrcal, ker žarki v njih niso ujeti. Uporabni so predvsem v laserjih z velikim ojačenjem. Njihova prednost je, da je cel volumen resonatorja enakomerno pokrit s svetlobo.

### 4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom

V prejšnjem razdelku smo izpeljali pogoj za stabilnost resonatorja, sestavljenega iz dveh zrcal s polmeroma  $R_1$  in  $R_2$ , ki sta med seboj oddaljeni za  $L$ . Izhajali smo iz pogoja, da se ukrivljenost valovnih front na zrcalu ujema z ukrivljenostjo zrcal. Vendar so sistemi z zgolj dvema zrcalom razmeroma redki. Pogosto so v resonatorju druge optične komponente, ki jih je treba upoštevati pri zapisu kriterija za stabilnost. Takrat si pomagamo z matrikami ABCD.

Izhajamo iz zahteve, da se v stabilnem resonatorju snop po enem celotnem obhodu preslika sam vase. Gaussov snop na neki točki v resonatorju zapišemo s kompleksno ukrivljenostjo  $q$  (enačba 3.32). V najpreprostejšem primeru resonatorja snop prepotuje razdaljo do zrcala, se na njem odbije, prepotuje resonator v nasprotni smeri, se odbije od drugega zrcala in se vrne v izhodišče. V bolj zapletenih primerih je treba upoštevati še prehode skozi druge optične elemente. Matriko za celoten prehod zapišemo kot produkt matrik ABCD za posamezne prehode  $M = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1$ . Končni produkt za celoten obhod je matrika oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

kompleksni krivinski radij po obhodu pa je enak začetnemu

$$q_2 = \frac{Aq + B}{Cq + D} = q. \quad (4.19)$$

<sup>2</sup>Osnovni Gaussov snop imenujemo tudi TEM<sub>00</sub> – Transverse Electromagnetic Mode, transverzalno elektromagnetno valovanje.

<sup>3</sup>Razlika med Fabry-Perotovim interferometrom in etalonom je v tem, da je interferometer sestavljen iz premičnih zrcal, etalon pa je ploščica z nespremenljivo debelino. Pri izrazu za prepustnost etalona je treba upoštevati še lomni količnik ploščice.

Gornjo enačbo prepišemo v

$$Cq^2 + (D - A)q - B = 0. \quad (4.20)$$

Da je  $w$  realen, mora biti  $q$  kompleksen (enačba 3.32) in zato diskriminanta kvadratne enačbe negativna

$$(D - A)^2 + 4BC < 0. \quad (4.21)$$

Upoštevamo še, da je determinanta matrike  $AD - BC = 1$  in pogoj za stabilnost zapišemo s koeficienti matrike  $M$

$$-1 < \left( \frac{A+D}{2} \right) < 1. \quad (4.22)$$

**Naloga 4.3.1** Pokaži, da je za resonator z dolžino  $L$  in s konkavnima zrcalomoma s krivinskima radijema  $R_1$  in  $R_2$  pogoj za stabilnost (enačba 4.22) ekvivalenten pogoju (4.14).

 Podoben, a malo bolj zapleten račun lahko naredimo tudi za resonatorje, v katerih se snop ne vrne v svojo začetno obliko po enem obhodu, ampak je teh obhodov  $n$ . V tem primeru zapišemo matriko  $M$  kot produkt elementov v enem obhodu, celotna matrika pa je enaka  $M^n$ . Iz pogoja, da matrika ne divergira za velike  $n$ , izpeljemo pogoj za stabilnost, ki je natančno enak pogoju (4.22).

## 4.4 Resonančne frekvence

Doslej smo obravnavali le prostorsko obliko polja v resonatorju, ničesar pa še nismo povedali o časovni odvisnosti lastnih nihanj. Frekvence lastnih nihanj izpeljemo iz pogoja, da se mora faza snopa pri enem obhodu<sup>4</sup> spremeniti za mnogokratnik  $2\pi$ . Fazo za osnovni snop zapišemo po enačbi (3.29)

$$\phi = kz + \frac{kr^2}{2R} - \eta(z) = kz - \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (4.23)$$

pri čemer smo se omejili na valovanje na osi pri  $r = 0$ . Razlika faze po obhodu je

$$\frac{\omega_n}{c} 2L - 2 \left( \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \right) = 2n\pi. \quad (4.24)$$

Člen v oklepaju je enak za vsa nihanja in le za delček valovne dolžine spremeni efektivno dolžino resonatorja. Ker dolžine resonatorja niti ne poznamo tako natančno, lahko ta prispevek zanemarimo. Iz istega razloga lahko izpustimo tudi spremembo faze na zrcalu. Od tod sledi znana enačba za resonančne frekvence

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{in} \quad v_n = \frac{nc}{2L}. \quad (4.25)$$

Konstantni členi, ki jih pri zapisu frekvence nismo upoštevali, ne vplivajo na razmik med dvema zaporednima lastnima frekvencama. Razlika med zaporednima lastnima frekvencama je tako v skladu z enačbo (4.5)

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \quad \text{in} \quad \Delta v_n = \frac{c}{2L}. \quad (4.26)$$

<sup>4</sup>Prelet resonatorja je prehod svetlobe od enega zrcala do drugega, obhod pa imenujemo prelet v obe smeri.

Za snope višjega reda, ki imajo vozle v prečni smeri, je fazni premik odvisen tudi od števila vozlov. Tako je na primer v cilindričnih koordinatah (enačba 3.38)

$$\eta_{p,l}(z) = (2p + l + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \quad (4.27)$$

Resonančni pogoj zapišemo kot

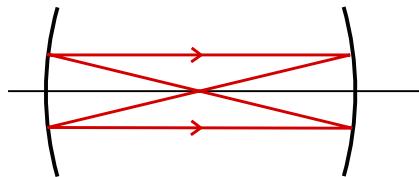
$$\frac{\omega_{n,p,l}}{c} 2L - 2(2p + l + 1) \left( \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \right) = 2n\pi. \quad (4.28)$$

Resonančne frekvence so torej odvisne tudi od števila prečnih vozlov (slika 4.6), kar je dodaten razlog, da v laserjih vzbujamo le osnovno lastno nihanje.

Zanimiv in praktično pomemben je primer konfokalnega resonatorja, pri katerem je  $z_0 = L/2$  in  $\arctan(L/2z_0) = \arctan(1) = \pi/4$ . Resonančne frekvence so

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L} \left( n + \frac{1}{2}(2p + l + 1) \right) \quad \text{in} \quad v_{n,p,l} = \frac{c}{2L} \left( n + \frac{1}{2}(2p + l + 1) \right). \quad (4.29)$$

Snopi, pri katerih je  $2p + l$  liho število, imajo iste resonančne frekvence kot osnovni snopi, pri sodih  $2p + l$  pa se pojavijo še resonance na sredini med osnovnimi. Razmik med sosednjimi frekvencami je tako  $\Delta v = c/4L$  in konfokalni interferometer se obnaša kot dvakrat daljši planparalelni. To lahko razumemo tudi iz geometrijske slike: žarek, ki vstopi v konfokalni resonator ali interferometer vzporedno z osjo, se šele po dveh obhodih vrne sam vase.

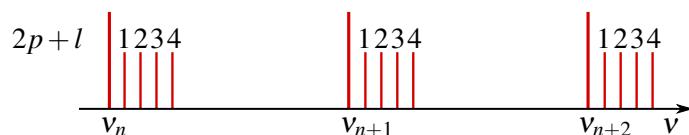


Slika 4.5: V konfokalnem resonatorju se žarek šele po dveh obhodih vrne sam vase.

Pri skoraj planparalelnem simetričnem resonatorju je  $z_0 \gg L$ ,  $\arctan(L/2z_0)$  lahko razvijemo, upoštevamo enačbo (4.15) in zapišemo

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L} \left( n + (2p + l + 1) \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2L}{R}} \right). \quad (4.30)$$

Ker je  $L$  majhen v primerjavi z  $R$ , so resonance snopov nizkega prečnega reda zelo blizu resonancam osnovnih snopov. Poglejmo primer. Vzemimo simetrični resonator z dolžino  $L = 1$  m in  $R = 50$  m, valovna dolžina naj bo  $\lambda = 500$  nm. Z uporabo enačbe (4.15) hitro lahko izračunamo  $z_0 = 4,97$  m. Ker je pogoj  $z_0 \gg L$  izpolnjen, lahko uporabimo gornji približek. Razlika med frekvencama dveh osnovnih snopov je  $\Delta v_{n,p,l} = 150$  MHz, medtem ko je razlika med frekvencama dveh prečnih snopov  $\Delta v_{n,p,l} = 9,5$  MHz.



Slika 4.6: Resonančne frekvence za skoraj planparalelni ( $R \gg L$ ) resonator

## 4.5 Izgube v resonatorjih

Energija lastnega nihanja odprtega resonatorja ni konstantna, ampak se počasi zmanjšuje. Razlogov je več:

1. Odbojnost zrcal ni enaka 1. Tudi če bi znali narediti popolno odbojna zrcala, tak resonator ne bi bil uporaben, saj nihanja ne bi mogli sklopiti z zunanjim poljem. Če naj torej laser oddaja svetlobe, mora biti odbojnost vsaj enega od zrcal manjša od 1.
2. Na sredstvu in na optičnih elementih v resonatorju pride do absorpcije in sisanja svetlobe. Te izgube želimo navadno kar se da zmanjšati.
3. Uklonske izgube so odvisne od velikosti zrcal in velikosti snopa na njih. V dani geometriji imajo najmanjši polmer osnovni snopi, snopi višjega reda so širši, zato imajo večje uklonske izgube. Merilo za uklonske izgube je Fresnelovo število (enačba 4.6)  $N_F = a^2/(L\lambda)$ , kjer je  $a$  polmer ogledal. Pri enakem  $N_F$  je polmer snopa na izhodnem zrcalu najmanjši, če je resonator konfokalni, zato ima tak resonator tudi najmanjše uklonske izgube (glej nalogo 4.2.2). Navadno je  $N_F$  znatno večji od 1 in so uklonske izgube zanemarljive.

Vse izgube lahko popišemo z razpadnim časom za energijo

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau}W, \quad (4.31)$$

in

$$W = W_0 e^{-2t/\tau}, \quad (4.32)$$

pri čemer  $\tau$  imenujemo življenjski ali razpadni čas nihanj. Izguba energije na celoten obhod resonatorja je sestavljena iz izgub na zrcalih in drugih (predvsem notranjih) izgub

$$\Delta W = -(1 - \mathcal{R}_1)W - (1 - \mathcal{R}_2)W - \Lambda_0 W = -\Lambda W. \quad (4.33)$$

Z  $\mathcal{R}_1$  in  $\mathcal{R}_2$  smo označili odbojnosti zrcal, od katerih je navadno ena kolikor mogoče blizu 1. Parameter  $\Lambda_0$  popiše absorpcijo in sisanje znotraj resonatorja ter morebitne uklonske izgube. Tipične vrednosti  $\Lambda_0$  so do nekaj stotink. Celotne izgube združimo v parameter  $\Lambda$ .

Razpadni čas nihanja lahko neposredno povežemo z izgubami, če v enačbo (4.31) vstavimo čas enega obhoda  $t = 2L/c$ . Zapišemo

$$\frac{\Delta W}{W} = -\Lambda = -\frac{2}{\tau} \frac{2L}{c}, \quad (4.34)$$

od koder sledi

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\Lambda c}{4L} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{c}{4L} ((1 - \mathcal{R}_1) + (1 - \mathcal{R}_2)), \quad (4.35)$$

kjer smo s

$$\tau_0 = \frac{4L}{\Lambda_0 c} \quad (4.36)$$

označili razpadni čas zaradi notranjih izgub.

Notranje izgube  $\Lambda_0$  so navadno zelo majhne, odbojnost enega zrcala je  $\mathcal{R}_1 \sim 1$ , tako da je življenjski čas nihanj približno

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{4L}(1 - \mathcal{R}_2). \quad (4.37)$$

Zaradi dušenja se energija lastnih nihanj eksponentno zmanjšuje, prav tako tudi amplituda jakosti električnega polja, ki pojema s karakterističnim časom  $\tau$ . Spekter eksponentno pojemajoče funkcije lahko izračunamo (glej nalogo 2.4.2) in dobimo Lorentzovo krivuljo s širino črte, ki ustreza ravno

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \quad (4.38)$$

Lastne krožne frekvence torej niso neskončno ozke, ampak imajo končno širino  $2/\tau$ . Poglejmo primer. Naj bodo notranje izgube na obhod  $\Lambda_0 = 0,01$ , eno zrcalo naj bo idealno, drugo naj ima odbojnost  $\mathcal{R} = 0,93$ . Dolžina resonatorja naj bo  $L = 0,5$  m, valovna dolžina pa 500 nm. Tedaj je  $1/\tau = 12 \cdot 10^6$  s<sup>-1</sup>. Zanimivo je pogledati razmerje med razliko krožnih frekvenc  $\Delta\omega_n$  (enačba 4.5) in širino resonance  $2/\tau$ . Za opisani primer velja  $\Delta\omega_n\tau/2 \approx 80$ .

 Namesto razpadnega časa  $\tau$  se za opis izgub pogosto uporablja dobrota resonatorja, ki jo vpeljemo kot razmerje med resonančno krožno frekvenco in širino črte

$$Q = \frac{\omega_n}{2\gamma} = \frac{\omega_n\tau}{2}. \quad (4.39)$$

Za tipične optične resonatorje je resonančna krožna frekvenco  $\omega_n \sim 10^{15}$  s<sup>-1</sup>, širina pa reda  $1/\tau \sim 10^7$  s<sup>-1</sup>. Faktor dobreote je tako  $Q \sim 10^8$ . Optični resonatorji imajo zelo velike faktorje dobreote!

Poglejmo še primer, ko so notranje izgube zanemarljive in sta odbojnosti obeh zrcal enaki. Potem sledi iz enačbe (4.35)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{2L}(1 - \mathcal{R}). \quad (4.40)$$

Do istega rezultata pridemo tudi z razvojem izraza za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra (enačba 4.8) okoli vrha pri  $\omega_n$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \sin^2 L \frac{(\omega - \omega_n)}{c}} \approx \frac{1}{1 + \left( \frac{2}{(1-\mathcal{R})} \frac{L}{c} (\omega - \omega_n) \right)^2}, \quad (4.41)$$

kjer smo upoštevali še, da je odbojnost  $\mathcal{R} \approx 1$ . Rezultat je znana Lorentzova krivulja oblike

$$T = \frac{\gamma^2}{(\omega - \omega_n)^2 + \gamma^2}, \quad (4.42)$$

od koder hitro razberemo

$$\frac{1}{\tau} = \gamma = \frac{c}{2L}(1 - \mathcal{R}). \quad (4.43)$$

#### 4.6 \*Obravnavanje resonatorjev z uklonskim integralom

V nestabilnih resonatorjih stacionarna rešitev v obliki stoječega Gaussovega snopa ne obstaja. Zato je v takih resonatorjih rešitev za električno polje precej zahtevno poiskati. Ker pa je problem soroden uklonu, ga lahko obravnavamo z uklonsko teorijo.

Označimo jakost električnega polja v točki  $P_1$  na prvem zrcalu z  $E_1$ . Polje na drugem zrcalu v točki  $P_2$  lahko zapišemo s Kirchhoffovim uklonskim integralom (enačba 1.55)

$$E_2 = -\frac{i}{2\lambda} \int_1 E_1(P_1) \frac{e^{ikr}(1 + \cos \vartheta)}{r} dS_1 \quad (4.44)$$

$$= \int_1 E_1(P_1) K(P_1, P_2) dS_1. \quad (4.45)$$

Integriramo po celotni prvi ploskvi,  $r$  je razdalja med točkama  $P_1$  in  $P_2$ ,  $\vartheta$  je kot med zveznicami in normalo na zrcali v osi, druge faktorje pa smo pospravili v faktor

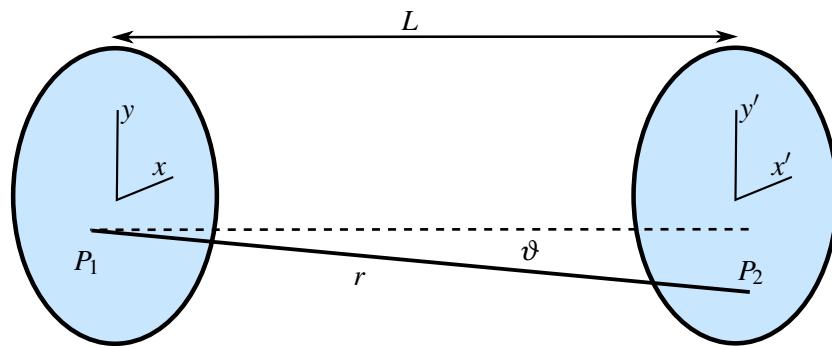
$$K(P_1, P_2) = -\frac{i}{2\lambda} \frac{e^{ikr}(1 + \cos \vartheta)}{r}, \quad (4.46)$$

ki predstavlja jedro integralske enačbe. Polje na prvem zrcalu je na enak način povezano s poljem na drugem. Če naj zapisano polje predstavlja lastno nihanje resonatorja, mora biti po dveh odbojih sorazmerno začetnemu polju

$$E_1(P) = \gamma \int_1 \int_2 E_1(P_1) K(P_1, P_2) K(P_2, P_1) dS_1 dS_2. \quad (4.47)$$

Enačba (4.47) je homogena integralska enačba, katere lastne rešitve so iskana lastna nihanja elektromagnetnega polja v resonatorju. Kompleksne lastne vrednosti  $\gamma$  določajo frekvenco in dušenje nihanj. Na splošno rešitev ni mogoče poiskati analitično in treba je uporabiti numerične metode. Najenostavnejša je iterativna metoda, pri kateri začnemo z nekim začetnim poljem in ponavljamo integracijo v enačbi (4.47), dokler se polje ne spreminja več.

Integralsko enačbo (enačba 4.47) je mogoče rešiti v posebnem primeru konfokalnega resonatorja. Privzemimo, da je brez izgub. Resonator je simetričen, zato se polje na obeh zrcalih lahko razlikuje kvečjemu za predznak.



Slika 4.7: Koordinatna sistema na zrcalih resonatorja

Vpeljemo kartezične koordinate na obeh zrcalih, kot kaže slika (4.7). Pričakujemo, da bo prečna razsežnost lastnega nihanja majhna v primerjavi z dolžino resonatorja  $L$ , zato lahko  $r$  razvijemo, pri čemer se kvadratni členi ravno odštejejo zaradi ukrivljenosti zrcal. Ostaneta le še mešana člena

$$r \approx L - \frac{xx' + yy'}{L}. \quad (4.48)$$

V konfokalnem resonatorju je krivinski radij zrcal kar enak dolžini resonatorja. V imenovalcu jedra integrala (enačba 4.46) zato lahko  $r$  nadomestimo z  $L$ . Koti med zveznico točk na obeh zrcalih in normalo na zrcali so majhni, zato je  $\cos \vartheta \approx 1$ .

Tako iz enačbe (4.45) sledi

$$E(x',y') = \pm \frac{ie^{ikL}}{\lambda L} \int E(x,y) \exp\left(\frac{-ik(xx' + yy')}{L}\right) dx dy. \quad (4.49)$$

Integracija poteka po celiem zrcalu. Jedro integrala je produkt dveh faktorjev, ki vsebujejo vsak le  $x'$  ali  $y'$  koordinati. Zato poiščemo rešitev enačbe (4.49) v obliki produkta  $E(x',y') = E_0 f(x') g(y')$ . S tem nastavkom mora biti funkcija  $f(x')$  rešitev enačbe

$$\alpha f(x') = \int f(x) \exp\left(\frac{-ikxx'}{L}\right) dx, \quad (4.50)$$

kjer je  $\alpha$  še neznana konstanta. Meje integrala so od enega do drugega roba zrcala. Če je zrcalo dovolj veliko, pričakujemo, da je polje na robu dovolj majhno, da lahko meje vzamemo kar od  $-\infty$  do  $\infty$ . Vpeljemo še brezdimenzijski koordinati

$$X = x\sqrt{k/L} \quad \text{in} \quad X' = x'\sqrt{k/L} \quad (4.51)$$

in dobimo

$$\alpha f(X') = \sqrt{\frac{L}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} f(X) e^{-iXX'} dX \quad (4.52)$$

ter podobno enačbo za  $g(Y')$ . Enačba (4.52) pravi, da mora biti  $f(X)$  podobna svoji Fourierovi transformiranki. Najpreprostejša funkcija s to lastnostjo je Gaussova funkcija

$$f(X) = \exp\left(-\frac{1}{2}X^2\right). \quad (4.53)$$

Polje na zrcalu ima tako po pričakovanju obliko Gaussovega snopa

$$E(x,y) = E_0 \exp\left(-\frac{k(x^2 + y^2)}{2L}\right). \quad (4.54)$$

Poglejmo še konstanto  $\alpha$ . Iz enačbe (4.52) sledi, da je njena vrednost  $\alpha = \sqrt{2\pi L/k} = \sqrt{\lambda L}$ . Postavimo zdaj izračunano električno poljsko jakost (enačba 4.54) z ustrezno vrednostjo za  $\alpha$  v enačbo (4.49) in upoštevajmo, da mora biti  $E_2 = \pm E_1$ . Sledi

$$i\alpha^2 \frac{e^{ikL}}{\lambda L} = ie^{ikL} = \pm 1. \quad (4.55)$$

Iz gornjega izraza izpeljemo resonančni pogoj za frekvenco lastnega nihanja in izračunamo razliko med dvema lastnima krožnima frekvencama, ki jo že poznamo (enačba 4.26)

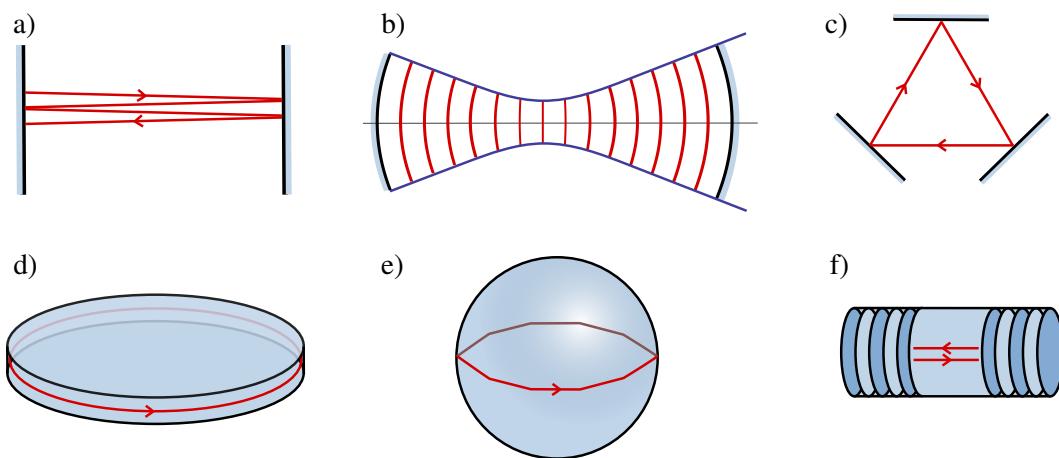
$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L}. \quad (4.56)$$

Integralna enačba iz uklonske teorije tako da isti rezultat kot stoeče valovanje v obliki Gaussovih snopov, ki so rešitve obosne valovne enačbe. To nas seveda ne preseneča, saj je obosna valovna enačba enako natančna kot Fresnelova uklonska teorija.

**Naloga 4.6.1** Pokaži, da so funkcije, ki so sorazmerne svoji Fourierovi transformaciji, Hermite-Gaussove funkcije (enačba 3.33), in izračunaj lastne frekvence nihanj višjega reda.



DO zdaj smo obravnavali samo dva primera laserskih resonatorjev: Fabry-Perotov resonator z dvema vzporednima ravnimi zrcaloma (a) in resonator z dvema sferičnimi zrcaloma (b). Poleg teh dveh primerov je v uporabi še cela vrsta različnih resonatorjev. Ciklični resonator (c) je sestavljen iz več zrcal in žarek ciklično potuje med njimi. V vlakenskih laserjih je resonator optično vlakno med dvema zrcaloma ali pa sklenjeno vlakno. Kot laserski resonator lahko delujejo tudi mikroploščice (d) ali mikrokroglice (e), v katere je s totalnim odbojem ujeta svetloba. Namesto zrcal se v mikroresonatorjih uporablja tudi periodične dielektrične strukture, na katerih pride do Braggovega odboja (f).



#### 4.7 \*Sklopitev resonatorja z okolico

Na začetku poglavja smo omenili, da resonatorjev ne uporabljamo le pri izdelavi laserjev, ampak lahko služijo tudi kot frekvenčni in prostorski filtri za svetlobno valovanje. Povezavo med lastnimi nihanji resonatorja in prepustnostjo ter odbojnostjo za valovanje, ki na resonator vpada, bomo poiskali s formalizmom sklapljanja valovanj, ki je neke vrste perturbacijska analiza in je pogosto zelo uporaben.

Začnimo z resonatorjem z idealno odbojnimi stenami brez notranjih izgub. Stojče lastno valovanje v resonatorju zapišemo kot produkt krajevnega in časovnega dela

$$E(\mathbf{r}, t) = f(t)g(\mathbf{r}). \quad (4.57)$$

Krajevni del  $g(\mathbf{r})$  naj bo normiran tako, da je  $\int g^2 dV = 1$ . Iz valovne enačbe (enačba 1.13) sledi, da mora časovni del zadoščati nihajni enačbi drugega reda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_n^2 f = \ddot{f} + \omega_n^2 f = 0. \quad (4.58)$$

Vpeljemo novo kompleksno spremenljivko  $a$ , ki je kombinacija funkcije  $f$  in njenega časovnega odvoda

$$a = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}} \left( f + \frac{i}{\omega_n} \dot{f} \right). \quad (4.59)$$

Izbira predfaktorja bo razvidna v nadaljevanju. Z odvajanjem in uporabo nihajne enačbe (enačba 4.58) ugotovimo, da za  $a$  velja diferencialna enačba

$$\dot{a} = -i\omega_n a. \quad (4.60)$$

Funkcija  $a$  ima preprosto časovno odvisnost  $e^{-i\omega_n t}$ .

Poglejmo elektromagnetno energijo v resonatorju. Električni del energije polja, ki je ravno polovica celotne energije, zapišemo kot

$$W_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int E^2 dV = \frac{1}{2}\epsilon_0 f^2 \int g^2 dV = \frac{1}{4}(a + a^*)^2. \quad (4.61)$$

V spremenljivki  $a$  in konjugirani spremenljivki  $a^*$  prepoznamo klasično obliko anihilacijskih in kreacijskih operatorjev v kvantno-mehanskem opisu harmonskega oscilatorja.

Celotna energija lastnega nihanja resonatorja je po analogiji iz kvantne mehanike enaka

$$W = |a|^2. \quad (4.62)$$

Vpeljana nova spremenljivka  $a(t)$  je sorazmerna z  $e^{-i\omega_n t}$ , zato ji pravimo tudi komponenta amplituda s pozitivno frekvenco. Prednost uporabe spremenljivke  $a$  je v preprostejših enačbah, ki so le prvega reda.

Obravnavali smo resonator brez izgub, zdaj si oglejmo še primer z izgubami. Izgube v resonatorju opišemo z dodatnim členom v enačbi (4.60)

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a. \quad (4.63)$$

V taki obliki lahko zapišemo enačbo le, kadar so izgube majhne. Če niso, je treba uporabiti navadno nihajno enačbo drugega reda. Gornji približek namreč ne vsebuje zmanjšanja nihajne frekvence pri velikem dušenju. Prehod na dve nesklopljeni enačbi prvega reda za  $a$  in  $a^*$  je točen le, kadar ni izgub. Izgube sklopijo enačbi za  $a$  in  $a^*$ , vendar smo v našem približku to sklopitev zanemarili.

Naj bo odbojnosc enega zrcala resonatorja nekoliko manjša od 1. Izgube v resonatorju potem opišemo kot (enačba 4.37)  $1/\tau = (1 - \mathcal{R})c/(4L)$ . Druga posledica zmanjšane odbojnosti je sklopitev resonatorja z okolico. To pomeni, da valovanje izhaja iz resonatorja, po drugi strani pa to pomeni tudi, da je lastno nihanje mogoče vzbujati z valovanjem, ki na resonator vpada.

Naj  $s_+$  opiše snop valovanja, ki vpada na resonator. Amplituda  $s_+$  naj bo izbrana tako, da je  $|s_+|^2$  enako moči vpadnega valovanja. Zaenkrat tudi zanemarimo notranje izgube resonatorja. Potem lahko zapišemo

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a + \kappa s_+, \quad (4.64)$$

kjer je  $\kappa$  sklopitveni koeficient med vpadnim valovanjem in amplitudo lastnega nihanja. Koeficient  $\kappa$  je določen s prepustnostjo zrcala, ki pa je vsebovana tudi v  $1/\tau$ . Koeficient  $\kappa$  torej ni neodvisen in poiščimo zvezo med  $\kappa$  in  $1/\tau$ .

Naj ima vpadno valovanje frekvenco  $\omega$ . Tedaj lahko iz enačbe (4.64) izračunamo amplitudo nihanja v stacionarnem stanju. Upoštevamo, da mora imeti v stacionarnem stanju nihanje enako frekvenco kot vpadni val. Sledi

$$a = \frac{\kappa s_+}{i(\omega_n - \omega) + 1/\tau}. \quad (4.65)$$

Označimo del valovanja, ki se od resonatorja odbije ali iz njega izvira, s  $s_-$ . Če vpadnega vala ni, energija nihanja pojema zaradi odtekanja v  $s_-$ . Ohranitev energije da

$$-\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}|a|^2 = \frac{2}{\tau}|a|^2 = |s_-|^2 \quad (4.66)$$

ali

$$|s_-| = \sqrt{\frac{2}{\tau}}|a|, \quad (4.67)$$

kjer smo fazo  $s_-$  priredili z izbiro referenčne ravnine, v kateri opazujemo  $s_-$ .

Ob prisotnosti vpadnega vala  $s_+$  lahko izhajajoči val zapišemo kot vsoto direktnega odboja vpadnega vala  $s_+$  in prispevka iz resonatorja

$$s_- = rs_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau}}a, \quad (4.68)$$

kjer  $r$  zaenkrat še ne poznamo. Ker ni notranjih izgub, mora biti v stacionarnem stanju vpadna moč enaka izhajajoči

$$|s_+|^2 = |s_-|^2. \quad (4.69)$$

Uporabimo še izraz za stacionarno vrednost  $a$  (enačba 4.65) in zapišemo enakost

$$r^2 + \frac{2(\tau\kappa^2 + r\kappa\sqrt{2\tau})}{1 + \tau^2(\omega_n - \omega)^2} = 1. \quad (4.70)$$

Gornja enačba mora veljati pri vsaki frekvenci  $\omega$ , to je pri vsaki vrednosti imenovalca ulomka. Zato mora biti  $r^2 = 1$  in  $\tau\kappa = -r\sqrt{2\tau}$ . Ker sta  $\tau$  in  $\kappa$  pozitivna, je  $r = -1$  in

$$\kappa = \sqrt{\frac{2}{\tau}}. \quad (4.71)$$

Odbito valovanje lahko torej zapišemo

$$s_- = -s_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau}}a. \quad (4.72)$$

Z upoštevanjem notranjih izgub (enačba 4.36) se amplituda nihanja spremeni v

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau} \right) a + \sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+. \quad (4.73)$$

Enačbi (4.72) in (4.73) sta osnovna izraza za sklapljanje resonatorjev z enim vhodom. Za primer uporabe izračunajmo odbojnost resonatorja  $s_-/s_+$  kot funkcijo frekvence vpadnega vala. V enačbo (4.72) vstavimo izraz za stacionarno vrednost amplitude nihanja

$$a = \frac{\sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+}{i(\omega_n - \omega) + (\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau})}. \quad (4.74)$$

Sledi

$$\frac{s_-}{s_+} = \frac{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} - i(\omega_n - \omega)}{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_0} + i(\omega_n - \omega)}. \quad (4.75)$$

Daleč od resonance je odbojnost -1. V resonanci (pri  $\omega_n = \omega$ ) odboja ni, kadar je  $\tau = \tau_0$ . Takrat je moč, ki gre iz vpadnega valovanja v vzbujanje resonatorja, največja in je sklopitev, ki jo meri  $\tau$ , popolnoma prilagojena izgubam. Taka prilagoditev je analogna zahtevi, da mora biti impedanca bremena na koncu valovoda ali koaksialnega kabla enaka impedanci valovoda oziroma kabla.

Če sta obe zrcali resonatorja delno prepustni, kot na primer pri Fabry-Perotovem interferometru, je enačba za amplitudo nihanja

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) a + \kappa_1 s_{+1} + \kappa_2 s_{+2}, \quad (4.76)$$

kjer sta  $s_{+1}$  in  $s_{+2}$  valovanji, ki vpadata z ene in druge strani. Izgube zaradi končne prepustnosti so

$$\frac{1}{\tau_{1,2}} = \frac{c}{4L} (1 - \mathcal{R}_{1,2}). \quad (4.77)$$

S podobnim razmislekom kot prej, s tem da postavimo najprej eno, nato drugo vpadno valovanje na nič, dobimo

$$\kappa_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{\tau_{1,2}}}. \quad (4.78)$$

Prepustnost resonatorja – oziroma razmerje med močjo vpadnega valovanja na eni strani in izhodnega na drugi – je

$$T = \frac{|s_{-2}|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{2}{\tau_2} \frac{|a|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{4\tau_c^2 / \tau_1 \tau_2}{1 + \tau_c^2 (\omega_n - \omega)^2}, \quad (4.79)$$

kjer je  $1/\tau_c = 1/\tau_0 + 1/\tau_1 + 1/\tau_2$ . Če ni notranjih izgub, je prepustnost v resonanci

$$T = \frac{4/\tau_1 \tau_2}{(1/\tau_1 + 1/\tau_2)^2}. \quad (4.80)$$

Prepustnost je v resonanci popolna, če sta obe zrcali enaki in  $\tau_1 = \tau_2$ . Gornja izraza se ujemata z znanim izrazom za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v bližini resonanc, če so izgube in prepustnost zrcal majhne (enačbi 4.8 in 4.42).

Resonatorji imajo mnogo lastnih nihanj. Očitno veljajo gornji izrazi za vsako lastno nihanje posebej in celoten odziv resonatorja na poljubno vpadno valovanje zapišemo kot vsoto po vseh lastnih nihanjih. Pri tem ne smemo pozabiti, da mora vpadno valovanje, ki se sklaplja z izbranim lastnim nihanjem, imeti prostorsko odvisnost, ki ustreza lastnemu stanju. V primeru stabilnih resonatorjev iz prejšnjih razdelkov mora torej biti vpadni snop Gaussov z enakim  $w_0$  in istega prečnega reda kot resonatorsko stanje. Če vpadno valovanje ni tako, ga najprej razvijemo po Gaussovih snopih, ki ustrezajo resonatorju. Pri zahtevnejših interferometričnih meritvah je treba za vzbujanje le ene resonance vpadni snop prilagoditi resonatorju, tako da je polmer na vhodnem zrcalu enak polmeru lastnega nihanja, krivinski radij vpadne valovne fronte pa enak krivinskemu radiju zrcala.

Resonator pa ne deluje le kot frekvenčni filter, ampak tudi kot prostorski. Če ima vpadno valovanje isto frekvenco kot eno od nihanj resonatorja, ima prepuščeno valovanje obliko Gaussovega snopa, kot jo določa resonator, ne glede na obliko vpadnega snopa.

Gornji način obravnave resonatorjev in sklopitve z vpadnim valovanjem je posebej prikladen za račun nestacionarnega obnašanja in za primer, ko je resonator napolnjen z nelinearnim sredstvom.

#### 4.8 \*Sklopitev dveh resonatorjev

Podobno kot sklopitev z zunanjim valovanjem lahko obravnavamo tudi sklopitev med dvema resonatorjema. Naj bosta dva resonatorja brez izgub sklopljena z delno prepustnim zrcalom. Sklopitev naj bo šibka, tako da lahko zapišemo

$$\dot{a}_1 = -i\omega_1 a_1 + \kappa_{12} a_2 \quad (4.81)$$

$$\dot{a}_2 = -i\omega_2 a_2 + \kappa_{21} a_1. \quad (4.82)$$

Zaradi ohranitve energije sklopitvena koeficijenta  $\kappa_{12}$  in  $\kappa_{21}$  nista neodvisna. Vsota energij obeh resonatorjev mora biti konstantna, zato

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(|a_1|^2 + |a_2|^2) &= a_1 \dot{a}_1^* + a_1^* \dot{a}_1 + a_2 \dot{a}_2^* + a_2^* \dot{a}_2 \\ &= a_1^* \kappa_{12} a_2 + a_1 \kappa_{12}^* a_2^* + a_2^* \kappa_{21} a_1 + a_2 \kappa_{21}^* a_1^* \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Veljati mora torej

$$\kappa_{12} + \kappa_{21}^* = 0. \quad (4.84)$$

Poglejmo primer dveh sklopljenih resonatorjev, pri čemer je v drugem resonatorju vzbujeno stoeče valovanje. Moč tistega dela, ki potuje proti prvemu resonatorju, je polovica energije, deljena s časom preleta od enega zrcala do drugega

$$|s_+|^2 = \frac{1}{2} |a_2|^2 \frac{c}{L}. \quad (4.85)$$

Z upoštevanjem enačbe (4.71) je

$$\kappa_{12} a_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau}} s_+ = \sqrt{\frac{c}{\tau L}} a_2, \quad (4.86)$$

tako da je

$$\kappa_{12} = \frac{c}{2L} \sqrt{1 - \mathcal{R}}, \quad \kappa_{21} = -\kappa_{12}. \quad (4.87)$$

Zaradi sklopitve se spremenijo lastne frekvence resonatorjev. Poglejmo dva enaka sklopljena resonatorja

$$\dot{a}_1 = -i\omega_0 a_1 + \kappa_{12} a_2 \quad (4.88)$$

$$\dot{a}_2 = -i\omega_0 a_2 - \kappa_{12} a_1. \quad (4.89)$$

Iščemo rešitve oblike  $A_i e^{-i\omega t}$ . Če uporabimo ta nastavek v gornjih diferencialnih enačbah, dobimo homogen linearen sistem za  $A_1$  in  $A_2$ , ki je netrivialno rešljiv, če je determinanta enaka nič. Ta pogoj da enačbo za frekvenco

$$(\omega - \omega_0)^2 = \kappa_{12}^2 \quad (4.90)$$

in

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \kappa_{12}. \quad (4.91)$$

Zaradi sklopitve sta se prej enaki frekvenci resonatorjev razcepili v dve, kot smo lahko pričakovali.

# Stvarno kazalo

- Življenjski čas nihanj, 59
- Avtokoreacijska funkcija, 26
- BaTiO<sub>3</sub>, 22
- Besslov snop, 42
- divergenca, 42
- Braggov odboj, 63
- Brewstrov kot, 14
- Brewstrovo okno, 15
- CaCO<sub>3</sub>, *glej* Kalcit
- Dielektričnost, 7, 19
- Dobrota resonatorja, 60
- Dopplerjeva razširitev, 27, 51
- Dvolomnost, 21
- dvoosne snovi, 19
- enoosne snovi, 19, 20
- Električna polarizacija, 7
- Električno polje
- gostota, 7, 19
- jakost, 7, 9
- Elektromagnetno valovanje, 9
- Evanescentno polje, 14
- Fabry-Perotov interferometer, 50, 52, 60, 66
- Faktor  $M^2$ , 37
- Fouriereva optika, 35
- Fouriereva spektroskopija, 30
- Fraunhoferjev uklon, 18, 32, 34, 41
- Fresnel-Kirchhoffov integral, 16
- Fresnelov uklon, 17, 32, 34, 35, 41
- Fresnelove enačbe, 13
- Fresnelovo število, 18, 52, 59
- Gaussov snop, 36, 39, 53
- divergenca, 37
- dolžina grla, 37
- faza, 38
- grlo, 36
- intenziteta, 39
- krivinski radij, 38
- polmer, 36
- Gostota energije, 9, 11
- Gostota energijskega toka, 9–11
- Gostota stanj, 50
- Gostota svetlobnega toka, *glej* Gostota energijskega toka
- Gouyeva faza, 39, 40, 57
- Helmholtzeva enačba, 9, 35, 42
- Hermite-Gaussovi snopi, 40, 63
- Hitrost valovanja, 8, 19
- Huygensovo načelo, 17
- Infrardeče valovanje, 15, 30
- Intenziteta, 27
- Interferenca, 23, 26, 30, 33
- Izgube v resonatorju, 59, 64
- notranje, 59
- Jonesov vektor, 11
- Jonesova matrika, 12
- Kalcit, 22
- KDP, 22
- KH<sub>2</sub>PO<sub>4</sub>, *glej* KDP
- Kirchhoffov integral, 16, 61
- Koherenčna dolžina, 26
- Koherenčna ploskev, 30, 32
- Koherenčna razdalja, 24, 30
- Koherenčni čas, 23, 26, 28
- Koherenca, 23
- časovna, 23, 25
- prostorska, 24, 30
- Kompleksna ukrivljenost, 39
- Kompleksni krivinski radij, 39
- Laguerre-Gaussovi snopi, 41
- Laser
- He-Ne, 45
- vlakenski, 27, 63
- Lastne frekvence resonatorja, 50, 51, 57
- LED, 27
- LiNbO<sub>3</sub>, 22
- Lomni količnik, 8, 19, 20
- izredni, 20
- redni, 20
- Lomni zakon, 13, 21

- Magnetizacija, 7
- Magnetna permeabilnost, 7
- Magnetno polje
  - gostota, 7, 9
  - jakost, 7
- Matrike ABCD, 46, 48, 56
- Maxwellove enačbe, 7
  - robni pogoji, 8
- Michelsonov interferometer, 25
- Navzkrižna korelacijska funkcija, 31
- Območje bližnjega polja, 37
- Obosna valovna enačba, 35, 40, 53
- Omejen snop, 34
- Optična os, 20
- Paraksialna enačba, *glej* Obosna valovna enačba
- Ploščica  $\lambda/2$ , 12
- Ploščica  $\lambda/4$ , 12
- Ploskev valovnega vektorja, 19
- Polarizacija, 11
  - circularna, 11
  - eliptična, 11, 19
  - linearna, 11
  - TE, 13
  - TM, 13
- Poyntingov izrek, 9
- Poyntingov vektor, 9, 42
- Preslikava z lečo, 43
- Ravni val, 10, 24, 34, 35
- Rayleighova dolžina, 37
- Rayleighovo območje, *glej* Območje bližnjega polja
- Resonator, 50
  - ciklični, 63
  - koncentrični, 55, 56
  - konfokalni, 55, 58, 59, 61
  - nestabilni, 56
  - odprtii, 51
  - planparalelni, 53, 55, 56, 58
  - simetrični, 54
- Sevanje črnega telesa, 27, 29
- Sklopitev resonatorja
  - z okolico, 63
  - z resonatorjem, 67
- Spekter, 27
  - Gaussov, 27, 29
  - Lorentzov, 27, 29, 60
- Planckov, 29
- Stabilnost resonatorja, 52, 54, 57
- Stoječe valovanje, 50, 52, 63
- Susceptibilnost
  - električna, 7
  - magnetna, 7
- Tekoči kristali, 22
- Telur, 22
- TEM<sub>00</sub>, 56
- Tirna vrtilna količina, 42
- Totalni odboj, 14, 63
- Uklon, 15, 34, 61
- Valovna enačba, 8
- Valovni vektor, 10
- Valovno število, 9
- van Cittert-Zernikov izrek, 31
- Wiener-Hinčinov izrek, 28
- Youngov poskus, 23, 30