FOTONIKA

Martin ČOPIČ
Mojca VILFAN

FOTONIKA

Martin Čopič in Mojca Vilfan
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani
in
Institut "Jožef Stefan", Ljubljana

Recenzenti: ***

Risbe in diagrami: Mojca Vilfan in Andrej Petelin

Oblikovanje, postavitev in prelom: Mojca Vilfan

Naslovne slike poglavij: Mojca Vilfan, Martin Rigler (str. 121 in 203), Andrej Petelin (str. 37), ESO (str. 93), NASA (str. 177) in Irena Drevenšek (str. 231)

©*Kopiranje in razmnoževanje besedila ali njegovih delov ter slik je dovoljeno samo z odobritvijo avtorjev knjige.*

LJUBLJANA, 2020

Kazalo

1 Elektromagnetno valovanje 9
1.1 Maxwellove enačbe 9
1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor 10
1.3 Monokromatski elektromagnetni val 11
1.4 Ravni val 12
1.5 Polarizacija EM valovanja 13
1.6 Lom in odboj EM valovanja 14
1.7 Uklon svetlobe 17
1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh 21

2 Koherenca 25
2.1 Youngov poskus 25
2.2 Koherenca navadnih svetil 26
2.3 Časovna koherenca 27
2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom 29
2.5 Prostorska koherenca 32

3 Koherentni snopi svetlobe 37
3.1 Omejen snop svetlobe 37
3.2 Obosna valovna enačba 38
3.3 Osnovni Gaussov snop 39
3.4 Snopi višjega reda 43
3.5 *Besslov snop 45
3.6 Transformacije snopov z lečami 46
3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki 49
3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija 51

4 Optični resonatorji 53
4.1 Odprti resonatorji 53
4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih 56
4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom 60

4.4 Resonančne frekvence 61
4.5 Izgube v resonatorjih 62
4.6 *Obravnava resonatorjev z uklonskim integralom 64
4.7 *Sklopitev resonatorja z okolico 66
4.8 *Sklopitev dveh resonatorjev 70

5 Interakcija svetlobe s snovjo 71
5.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja 71
5.2 Sevanje črnega telesa 73
5.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje 74
5.4 Absorpcijski koeficient 78
5.5 Nasičenje absorpcije 79
5.6 Optično ojačevanje 81
5.7 Optično črpanje trinivojskega sistema 81
5.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte 84
5.9 *Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte 85
5.10 *Izpeljava verjetnosti za prehod 88
5.11 *Rabijeve oscilacije 91

6 Laser 93
6.1 Laser 93
6.2 Zasedbene enačbe 96
6.3 Spektralna širina enega laserskega nihanja 98
6.4 Primerjava laserjev in navadnih svetil 100
6.5 *Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo 102
6.6 Večfrekvenčni laser 103
6.7 Relaksacijske oscilacije 105
6.8 Sunkovni laserji 107
6.9 Delovanje v sunkih s preklopom dobrote 108
6.10 Uklepanje faz 111
6.11 *Frekvenčni glavnik in absolutna meritev frekvence laserja 114
6.12 *Semiklasični model laserja 116

7 Primeri laserjev 121
7.1 Laserski sistemi 121
7.2 He-Ne laser 122
7.3 Argonov ionski laser 124

7.4 CO_2 laser 125
7.5 Ekscimerni laser 127
7.6 Neodimov laser 128
7.7 Ti:safir laser 130
7.8 Laserji na organska barvila 131
7.9 Vlakenski laserji 132
7.10 Polprevodniški laserji 134

8 Optična vlakna 143
8.1 Planparalelni vodnik 143
8.2 Račun lastnih rodov v planparalelnem vodniku 145
8.3 Cilindrično vlakno 149
8.4 Disperzija 156
8.5 *Potovanje kratkega sunka po enorodovnem vlaknu 160
8.6 Izgube in ojačenje v optičnih vlaknih 164
8.7 Sklopitev svetlobe v optične vodnike 168
8.8 Sklopitev med optičnimi vodniki 169
8.9 *Vpliv spremembe lomnega količnika vlakna na širjenje svetlobe 173

9 Detektorji svetlobe 176
9.1 Osnovne karakteristike detektorjev 176
9.2 Termični detektorji 177
9.3 Fotoefekt 181
9.4 Vakuumska fotodioda (fotocelica) in fotopomnoževalka 182
9.5 Fotoprevodni detektorji 184
9.6 Polprevodniške fotodiode 186
9.7 Plazovne fotodiode 191
9.8 CCD in CMOS detektorji 192
9.9 Šum pri optični detekciji 194
9.10 Heterodinska detekcija 200

10 Modulacija svetlobe 202
10.1 Elektro-optični pojav 202
10.2 Longitudinalna modulacija 205
10.3 Transverzalna modulacija 207
10.4 Amplitudna modulacija 209
10.5 Fazna in frekvenčna modulacija 210

10.6 Elasto-optični in akusto-optični pojav 212
10.7 Uklon svetlobe na zvočnem valovanju 214
10.8 *Račun akusto-optičnega pojava 217
10.9 Modulacija s tekočimi kristali 221
10.10 *Račun prehoda svetlobe skozi zasukan nematik 223
10.11 Račun preklopa v tekočem kristalu – Frederiksov prehod 227

11 Nelinearna optika 230
11.1 Nelinearna susceptibilnost 230
11.2 Nelinearni optični pojavi drugega reda 232
11.3 Optično frekvenčno podvajanje 234
11.4 Frekvenčno podvajanje Gaussovih snopov 240
11.5 *Račun podvajanja Gaussovih snopov 241
11.6 Optično parametrično ojačevanje 243
11.7 Optično usmerjanje in teraherčno valovanje 246
11.8 Nelinearni pojavi tretjega reda 248
11.9 Optični Kerrov pojav 248
11.10 Samozbiranje in krajevni solitoni 250
11.11 *Izpeljava krajevnih solitonov 252
11.12 Optični solitoni 255
11.13 *Izpeljava optičnih solitonov 256
11.14 Optična fazna konjugacija 259
11.15 *Izpeljava optične fazne konjugacije 260
11.16 Stimulirano Ramanovo in stimulirano Brillouinovo sipanje 263
11.17 Nelinearni pojavi v optičnih vlaknih 265

Predgovor

Fotonika je veda o svetlobi. Obsega izredno široka področja nastanka svetlobe v svetlobnih izvorih, predvsem laserjih, razširjanja in modulacije svetlobe, njenega zaznavanja in uporabe v različne namene. V zadnjih desetletjih je zato fotonika doživela izreden razcvet v raziskavah in tehnološki uporabi.

V pričujoči knjigi bomo obravnavali osnove fotonike. Po kratki ponovitvi splošne optike bomo spoznali delovanje laserjev in lastnosti laserske svetlobe, nadaljevali s prenosom, detekcijo in modulacijo laserske svetlobe ter zaključili z nelinearnimi optičnimi pojavi. Knjiga je zato zelo primerna predvsem za študente II. stopnje fizike, ki že imajo znanje optike in zahtevanih matematičnih prijemov, jo pa priporočava vsakemu, ki ga področje fotonike zanima, naj bo to ljubiteljsko ali profesionalno. Bralcu v razmislek sva dodala nekaj nalog, zahtevnejša podpoglavja pa so označena z zvezdico.

Prvotno gradivo za to knjigo je nastalo po zapiskih s predavanj pri predmetu Elektrooptika in kasneje Fotonika ter Fizika laserjev. Gradivo sva posodobila, dopolnila in prilagodila obravnavani snovi pri predmetih Fotonika 1 in Fotonika 2. Za pomoč pri pripravi se najlepše zahvaljujeva prof. dr. Ireni Drevenšek Olenik, ki je kot dolgoletna predavateljica Fotonike znatno pripomogla k oblikovanju te knjige, dr. Andreju Petelinu za pomoč pri delu ter ostalim sodelavcem z Odseka za kompleksne snovi Instituta “Jožef Stefan” za sodelovanje pri pripravi.

Avtorja

Ljubljana, 2020

Dodatna literatura

- A. Yariv in P. Yeh, Photonics, Sixth Edition, Oxford University Press, 2007.
- B. E. A. Saleh in M. C. Teich, Fundamentals of Photonics, Second Edition, Wiley, 2007.
- G. A. Reider, Photonics, An Introduction, Springer, 2016.
- V. Degiorgio in I. Cristiani, Photonics, A Short Course, Second Edition, Springer, 2016.
- W. T. Silfvast, Laser Fundamentals, Second Edition, Cambridge University Press, 2008.
- C. C. Davis, Lasers and Electro-Optics, Cambridge University Press, 2006.
- O. Svelto, Principles of Lasers, Fifth Edition, Springer, 2010.
- K. F. Renk, Basics of Laser Physics, Second Edition, Springer, 2017.
- J. W. Goodman, Statistical Optics, Second Edition, Wiley, 2015.
- W. Demtröder, Laser Spectroscopy, Fifth Edition, Springer, 2014.
- A. Ghatak in K. Thyagarajan, Introduction to Fiber Optics, Cambridge University Press, 1997.
- G. H. Rieke, Detection of Light, Second Edition, Cambridge University Press, 2003.
- G. New, Introduction to Nonlinear Optics, Cambridge University Press, 2011.
- R. W. Boyd, Nonlinear Optics, Third Edition, Academic Press, 2008.

1. Elektromagnetno valovanje

Za začetek bomo osvežili osnove teorije elektromagnetnega polja in elektromagnetnega valovanja. Obnovili bomo zapis Maxwellovih enačb in valovne enačbe, opisali osnovne pojave valovanja (lom, odboj in uklon) in si na kratko ogledali razširjanje svetlobe v anizotropnih snoveh.

1.1 Maxwellove enačbe

Elektromagnetno polje v praznem prostoru opišemo z dvema vektorskima poljema, električnim in magnetnim, ki sta na splošno funkciji lege $\mathbf{r}$ in časa t. Vsaki točki v prostoru lahko priredimo jakost električnega polja $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ in gostoto magnetnega polja $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Za opis elektromagnetnega polja v snovi vpeljemo dve dodatni količini. To sta gostota električnega polja $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ in jakost magnetnega polja $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$. Vse te količine povezujejo Maxwellove enačbe[1]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_e \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1.4}$$

Pri zapisu enačb smo upoštevali tudi izvore polj, to je gostoto električnega toka $\mathbf{j}_e(\mathbf{r},t)$ in gostoto naboja $\rho_e(\mathbf{r},t)$, ki pa ju bomo v nadaljevanju izpuščali.

Poleg Maxwellovih enačb veljata zvezi

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{in} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}, \tag{1.6}$$

kjer $\mathbf{P}$ označuje električno polarizacijo, to je gostoto električnih dipolov, $\mathbf{M}$ pa magnetizacijo, to je gostoto magnetnega momenta. Polarizacija $\mathbf{P}$ in magnetizacija $\mathbf{M}$ sta odvisni od zunanjih polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$. Na splošno sta njuni odvisnosti zelo zapleteni, v izotropnih in linearnih snoveh[2] pa se zvezi poenostavita v

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\mathbf{E} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{M} = \frac{(\mu - 1)}{\mu \mu_0}\mathbf{B} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu - 1)\mathbf{H}. \tag{1.7}$$

Vpeljali smo električno χ_e in magnetno χ_m susceptibilnost ter dielektričnost ε in magnetno permeabilnost μ. Ko združimo gornje enačbe, zapišemo dve konstitutivni relaciji

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu}. \tag{1.8}$$

V linearnih anizotropnih snoveh moramo namesto skalarnih vrednosti ε in μ zapisati tenzorje.

[1] Škotski fizik James Clerk Maxwell, 1831–1879.

[2] Med nelinearne snovi, za katere napisani zvezi ne veljata, sodijo na primer feroelektriki in feromagneti.

Robni pogoji

Navedene Maxwellove enačbe opisujejo elektromagnetno polje v neomejeni snovi, kjer so vse komponente polj zvezne funkcije. Za obravnavo v omejeni snovi moramo vedeti tudi, kaj se z elektromagnetnim poljem zgodi na meji dveh sredstev. Pri prehodu iz enega dielektrika v drugega se ohranjata normalni komponenti gostote električnega in magnetnega polja ter tangentni komponenti jakosti električnega in magnetnega polja (slika 1.1)

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{1.9}$$
$$B_{1n} = B_{2n} \tag{1.10}$$
$$E_{1t} = E_{2t} \tag{1.11}$$
$$H_{1t} = H_{2t}. \tag{1.12}$$

Privzeli smo, da na meji med dielektrikoma ni površinskih tokov ali nabojev, sicer bi morali robna pogoja za D_n in H_t ustrezno popraviti. Na meji dielektrika z idealnim prevodnikom (kovino, zrcalom) so robni pogoji drugačni. Za magnetno polje jih ne moremo preprosto zapisati, za električno polje pa velja, da je tangentna komponenta jakosti električnega polja enaka nič. Posledica tega pogoja je, da se pri pravokotnem vpadu na zrcalo faza valovanja spremeni za π.

Slika 1.1: Na meji med dvema dielektrikoma se v odsotnosti površinskih tokov in nabojev ohranjata tangentni komponenti E_t in H_t ter normalni komponenti D_n in B_n.

1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor

Večinoma bomo obravnavali elektromagnetna valovanja v izotropnih, homogenih in linearnih snoveh brez zunanjih izvorov polja ($\mathbf{j}_e = 0$ in $\rho_e = 0$). Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpeljemo valovni enačbi za jakost električnega in gostoto magnetnega polja

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{in} \qquad \nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.13}$$

Pri tem je hitrost valovanja v snovi enaka

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c_0}{n}. \tag{1.14}$$

Magnetne in dielektrične lastnosti snovi smo pospravili v lomni količnik n, ki pove, kolikokrat je hitrost svetlobe v snovi c manjša od hitrosti svetlobe v praznem prostoru c_0. Velja

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{1.15}$$

Za izotropno in nemagnetno snov ($\mu = 1$) je lomni količnik $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Vpeljimo še vektor gostote energijskega toka, to je Poyntingov vektor[3] $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{1.16}$$

Iz lastnosti vektorskega produkta sledi, da je smer energijskega toka vedno pravokotna na smeri $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$. Gostoto energijskega toka j, to je količino energije, ki v danem času preteče skozi dano ploskev z normalo $\hat{\mathbf{n}}$, izračunamo kot časovno povprečje projekcije Poyntingovega vektorja

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle . \tag{1.17}$$

Gostoto energijskega toka j imenujemo tudi gostota svetlobnega toka.

Poyntingov izrek, ki ga izpeljemo neposredno iz Maxwellovih enačb in konstitutivnih relacij, predstavlja izrek o ohranitvi energije. Za valovanje v homogeni izotropni snovi tako velja

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1.18}$$

kjer je w celotna gostota energije elektromagnetnega polja. Zapišemo jo kot

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{B}^2}{\mu\mu_0}. \tag{1.19}$$

Valovno enačbo in ohranitvene zakone lahko zapišemo tudi za anizotropne, nehomogene ali nelinearne snovi. Nekaj teh primerov bomo srečali v nadaljevanju in jih bomo obravnavali sproti.

1.3 Monokromatski elektromagnetni val

Reševanje valovne enačbe navadno poenostavimo s kompleksnim zapisom električnega in magnetnega polja. Račun si oglejmo na primeru monokromatskega elektromagnetnega vala. Nastavek za monokromatski val s krožno frekvenco ω naj bo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) \qquad \text{in} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}), \tag{1.20}$$

kjer sta $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ časovno neodvisna vektorja jakosti električnega in gostote magnetnega polja s kompleksno amplitudo. Podobno vpeljemo tudi kompleksne vektorje $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ in $\mathbf{H}$, ki opisujejo realne količine (polarizacijo, magnetizacijo, gostoto električnega in jakost magnetnega polja). V nadaljevanju bomo večinoma pisali polja v kompleksni obliki, pri čemer se bomo držali gornje definicije. Zavedati pa se moramo, da je uporaba kompleksnega zapisa zgolj računski pripomoček, na koncu je treba rezultate vedno izraziti z realnimi količinami.

Če vstavimo nastavka za monokromatski val (enačbi 1.20) v valovni enačbi (enačbi 1.13), dobimo Helmholtzevi enačbi[4] za kompleksna vektorja jakosti električnega in gostote magnetnega polja. V homogenem in izotropnem sredstvu ju zapišemo kot

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \qquad \text{in} \qquad \nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \tag{1.21}$$

kjer je $k = \omega/c = n\omega/c_0 = nk_0$ valovno število. Vpeljemo še kompleksni Poyntingov vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}). \tag{1.22}$$

[3] Angleški fizik John Henry Poynting, 1852–1914.
[4] Nemški fiziolog in fizik Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821–1894.

Naloga 1.3.1 Pokaži, da lahko gostoto svetlobnega toka j (enačba 1.17) izrazimo s kompleksnim Poyntingovim vektorjem $\mathbf{S}(\mathbf{r})$

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \Re(\mathbf{S}(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}}. \tag{1.23}$$

1.4 Ravni val

Osnovna rešitev valovne enačbe (enačba 1.13) je ravni val. Nastavek, ki predstavlja ravni val in hkrati reši Helmholtzevo enačbo (enačba 1.21), je oblike

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} \tag{1.24}$$

in podobno za magnetno polje

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}, \tag{1.25}$$

pri čemer sta vektorja $\mathbf{E}_0$ ter $\mathbf{B}_0$ od kraja in časa neodvisna. Velikost valovnega vektorja $\mathbf{k}$ je valovno število $k = nk_0$, kjer je n lomni količnik izotropne in homogene snovi, po kateri potuje ravni val. Zaradi enolične zveze med električnim in magnetnim poljem za opis ravnega vala zadošča le eno polje, navadno se odločimo za električno.

Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledijo zveze o ortogonalnosti količin električnega in magnetnega polja. Vedno sta med seboj pravokotna vektorja jakosti električnega $\mathbf{E}$ in magnetnega polja $\mathbf{H}$, ki sta v izotropni snovi hkrati pravokotna na valovni vektor $\mathbf{k}$ (naloga 1.4.1). Po definiciji sta $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ vedno pravokotna tudi na Poyntingov vektor $\mathbf{S}$ (enačba 1.16), iz česar sledi, da sta v izotropni snovi Poyntingov vektor in smer energijskega toka vzporedna valovnemu vektorju.[5]

Naloga 1.4.1 Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpelji zvezi

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad \text{in} \tag{1.26}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega\mu\mu_0 \mathbf{H}_0, \tag{1.27}$$

iz katerih izhaja, da v izotropni snovi velja $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k}$.

Pokaži tudi, da za ravni val vedno velja

$$\mathbf{D}_0 \perp \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}. \tag{1.28}$$

Zapišimo še povprečno gostoto energije valovanja (enačba 1.19). K energiji prispevata tako magnetno kot električno polje. Oba prispevka sta enaka, zato velja

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_0 |E_0|^2 + \frac{1}{4}\frac{|B_0|^2}{\mu\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 |E_0|^2. \tag{1.29}$$

Povprečna gostota energije w, pomnožena s hitrostjo svetlobe v snovi, je enaka gostoti energijskega oziroma svetlobnega toka j

$$j = cw = \frac{1}{2}c\varepsilon\varepsilon_0 |E_0|^2 = \frac{1}{2}c_0 n\varepsilon_0 |E_0|^2. \tag{1.30}$$

[5] Na splošno velja $\mathbf{E} \perp \mathbf{S}$ (enačba 1.16) in $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$ (naloga 1.4.1). To velja vedno, tudi v anizotropnih sredstvih, vendar je tam $\mathbf{E} \nparallel \mathbf{D}$ in $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{S}$. Za podrobnejši opis glej razdelek 1.8.

Prva enakost nazorno kaže, da je gostota svetlobnega toka pravzaprav pretok energije. To si lahko predstavljamo, če obravnavamo valj s prečnim presekom S in dolžino $c\Delta t$. V volumnu $Sc\Delta t$ je shranjene $wSc\Delta t$ energije. Energija, ki preteče skozi presek S v času Δt, je ravno cw.

Gostota svetlobnega toka je torej sorazmerna s kvadratom amplitude jakosti električnega polja. Poglejmo nekaj primerov. Gostoti toka $j = 1\ \mathrm{kW/m^2}$ (približna gostota svetlobnega toka s Sonca na Zemljinem površju) v praznem prostoru ustreza jakost električnega polja $E_0 = 868\ \mathrm{V/m}$, gostoti $j = 1\ \mathrm{W/\mu m^2}$ (močno zbran laserski žarek) pa $E_0 = 27\ \mathrm{MV/m}$.

Gostota svetlobnega toka ravnega vala je neodvisna od kraja in časa, iz česar sledi, da je povsod po prostoru enaka. Če bi želeli izračunati energijo, ki jo nosi ravni val, bi opazili, da je ta energija neskončna. To seveda ni mogoče, zato se je vedno treba zavedati, da je ravni val le idealiziran, a nazoren in praktičen približek elektromagnetnega vala.

1.5 Polarizacija EM valovanja

Jakost električnega polja elektromagnetnega valovanja v izotropnem sredstvu leži v ravnini, ki je pravokotna na valovni vektor $\mathbf{k}$. Smer vektorja $\mathbf{E}_0$ v tej ravnini opiše polarizacija.

Električno polje ravnega vala v ravnini razstavimo na dve medsebojno pravokotni komponenti vektorja $\mathbf{E}_0$, ki nihata sinusno z enako frekvenco, lahko pa se razlikujeta v amplitudi in fazi. Na splošno je ravni val eliptično polariziran in vrh vektorja $\mathbf{E}_0$ v ravnini, ki je pravokotna na smer širjenja, orisuje elipso. Kadar je elipsa izrojena v daljico, govorimo o linearno polariziranem valu, kadar pa je krog, govorimo o cirkularno polariziranem valu. Poljubno polarizacijo lahko vedno zapišemo kot vsoto dveh linearno ali dveh cirkularno polariziranih valovanj.

Priročen zapis polarizacije je s kompleksnim Jonesovim vektorjem[6] $\mathbf{J}$. Za monokromatski ravni val, ki se širi v smeri z in ima komponenti E_x in E_y, je Jonesov vektor

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|E_0|} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \tag{1.31}$$

Dodali smo normalizacijski faktor $|E_0| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}$. Ravni val, linearno polariziran v smeri x, tako zapišemo kot $\mathbf{J} = (1,0)$, val, ki je linearno polariziran pod kotom 45° glede na osi x in y, pa je $\mathbf{J} = (1,1)/\sqrt{2}$. Za zapis cirkularno polariziranega valovanja ni enotnega dogovora, tukaj zapišimo desno cirkularno polarizirano valovanje kot $\mathbf{J} = (1,-i)/\sqrt{2}$, levo cirkularno polarizirano pa z $\mathbf{J} = (1,i)/\sqrt{2}$. V našem zapisu je desno polariziran tisti val, pri katerem se jakost električnega polja na danem mestu vrti v desno, če gledamo proti izvoru valovanja.

Zapis z Jonesovimi vektorji je prikladen, saj omogoča preprost izračun prehoda ravnega vala skozi optične elemente, ki spreminjajo polarizacijo, a ohranjajo njegovo obliko. Naj bo pred prehodom skozi optični element kompleksna amplituda $\mathbf{E}_1$, po prehodu pa $\mathbf{E}_2$. Spremembo amplitude jakosti električnega polja zapišemo v matrični obliki

$$\mathbf{E}_2 = A \cdot \mathbf{E}_1, \tag{1.32}$$

pri čemer je A Jonesova matrika, njene komponente pa so odvisne od lastnosti elementa, skozi katerega prehaja ravni val. Z uporabo Jonesovih vektorjev je zapis v obliki $\mathbf{J}_2 = A \cdot \mathbf{J}_1$, kjer $\mathbf{J}_1$ in $\mathbf{J}_2$ opisujeta polarizaciji vstopnega in izstopnega vala.

[6] Ameriški fizik Robert Clark Jones, 1916–2004.

Poglejmo nekaj primerov. Jonesova matrika za prehod skozi linearni polarizator, ki polarizira v smeri x, je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.33}$$

za polarizator, zasukan pod kotom 45 ° v pozitivni smeri glede na os x, pa

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

Jonesova matrika za optični element, ki eni komponenti doda fazni zamik π, je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.35}$$

Tak element imenujemo ploščica $\lambda/2$ in spremeni desno cirkularno polariziran val v levo polariziran in obratno, linearno polariziran val pa prezrcali čez koordinatno os.

Podobno je Jonesova matrika za element, ki eni komponenti doda fazni zamik $\pi/2$ (imenujemo ga ploščica $\lambda/4$), enaka

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \tag{1.36}$$

Ploščica $\lambda/4$ linearno polarizirano valovanje z Jonesovim vektorjem $(1,1)/\sqrt{2}$ spremeni v levo cirkularno polarizirano valovanje, cirkularno polarizirano valovanje pa nazaj v linearno.

Naloga 1.5.1 Pokaži, da je Jonesova matrika za polarizator, ki prepušča polarizacijo pod kotom ϑ glede na os x, podana z matriko

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & \sin^2\vartheta \end{bmatrix}. \tag{1.37}$$

Namig: matriko A', ki opisuje polarizator v smeri x, zapiši v zasukanem koordinatnem sistemu $A = R(\vartheta)\cdot A'\cdot R(\vartheta)^{\mathrm{T}}$, kjer je $R(\vartheta)$ rotacijska matrika.

1.6 Lom in odboj EM valovanja

Na ravni meji med dvema izotropnima dielektrikoma se del svetlobe odbije po odbojnem zakonu, ki pravi, da je odbojni kot enak vpadnemu, del pa lomi po lomnem zakonu

$$n_1 \sin\vartheta_1 = n_2 \sin\vartheta_2. \tag{1.38}$$

S kotoma ϑ_1 in ϑ_2 smo označili vpadni in lomni kot, n_1 in n_2 pa sta lomna količnika prve in druge snovi (slika 1.2). Poglejmo, kaj se pri lomu in odboju zgodi s polarizacijo valovanja.

Dogovorimo se, da valovanje, pri katerem je jakost električnega polja pravokotna na vpadno ravnino, imenujemo transverzalno električno (TE) valovanje. Kadar leži jakost električnega polja v vpadni ravnini in je nanjo pravokotna jakost magnetnega polja, govorimo o transverzalnem magnetnem valovanju (TM).

Slika 1.2: Lom elektromagnetnega valovanja na meji dveh izotropnih dielektrikov. Levo: transverzalno električno (TE) valovanje. Desno: transverzalno magnetno (TM) valovanje.

Z E_1 označimo amplitudo jakosti električnega polja vpadnega valovanja, z E_2 prepuščenega in z E_3 odbitega. Nato vpeljemo amplitudno prepustnost t in amplitudno odbojnost r, ki sta odvisni od vpadne polarizacije. Zapišemo

$$E_{2\mathrm{TE}} = t_{\mathrm{TE}} E_{1\mathrm{TE}} \qquad E_{3\mathrm{TE}} = r_{\mathrm{TE}} E_{1\mathrm{TE}} \tag{1.39}$$

$$E_{2\mathrm{TM}} = t_{\mathrm{TM}} E_{1\mathrm{TM}} \qquad E_{3\mathrm{TM}} = r_{\mathrm{TM}} E_{1\mathrm{TM}}. \tag{1.40}$$

Koeficiente r in t izračunamo iz robnih pogojev (enačbe 1.9–1.12). Enačbe, ki opisujejo odvisnost amplitudne odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota za različni vpadni polarizaciji, imenujemo Fresnelove enačbe[7]. Za TE polarizacijo velja

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{n_1 \cos\vartheta_1 - n_2 \cos\vartheta_2}{n_1 \cos\vartheta_1 + n_2 \cos\vartheta_2} \quad \text{in} \quad t_{\mathrm{TE}} = 1 + r_{\mathrm{TE}} = \frac{2 n_1 \cos\vartheta_1}{n_1 \cos\vartheta_1 + n_2 \cos\vartheta_2}, \tag{1.41}$$

za TM polarizacijo pa

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{n_1 \cos\vartheta_2 - n_2 \cos\vartheta_1}{n_1 \cos\vartheta_2 + n_2 \cos\vartheta_1} \quad \text{in} \quad t_{\mathrm{TM}} = (1 + r_{\mathrm{TM}}) \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_2} = \frac{2 n_1 \cos\vartheta_1}{n_1 \cos\vartheta_2 + n_2 \cos\vartheta_1}. \tag{1.42}$$

Na splošno sta amplitudna odbojnost r in prepustnost t kompleksni količini, saj iz lomnega zakona sledi, da je $\cos\vartheta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2\vartheta_1}$ lahko kompleksen. Velikost števila $|r|$ tako predstavlja odbojnost, argument $\arg(r)$ pa spremembo faze pri odboju.

Naloga 1.6.1 Izpelji Fresnelove enačbe (enačbe 1.41 in 1.42).

[7] Francoski fizik in inženir Augustin Jean Fresnel, 1788–1827.

Amplitudna odbojnost r in amplitudna prepustnost t povesta, kako se spremeni kompleksna amplituda jakosti električnega polja pri odboju oziroma lomu. Razmerje med gostoto energijskega toka odbite in vpadne svetlobe $\mathscr{R}$ oziroma prepuščene in vpadne svetlobe $\mathscr{T}$ izračunamo kot

$$\mathscr{R} = |r|^2 \qquad \text{in} \qquad \mathscr{T} = 1 - \mathscr{R}. \tag{1.43}$$

Slednja enačba sledi iz ohranitve energije. Na splošno $\mathscr{T}$ ni enak $|t|^2$, saj energijski tok potuje po različnih snoveh in v različnih smereh. Velja zveza

$$\mathscr{T} = \frac{n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1} |t|^2 . \tag{1.44}$$

Primer uporabe Fresnelovih enačb je pravokotni vpad svetlobe na mejo dveh sredstev. Zaradi simetrije sta v tem primeru odbojnost in prepustnost neodvisni od polarizacije. Sledi

$$r_{\mathrm{TE}} = r_{\mathrm{TM}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad \text{in} \qquad t_{\mathrm{TE}} = t_{\mathrm{TM}} = \frac{4 n_1 n_2}{n_1 + n_2}. \tag{1.45}$$

Ob pravokotnem vpadu svetlobe iz zraka na steklo ($n_1 = 1$ in $n_2 \approx 1,5$) je tako $\mathscr{R} \approx 0,04$.

★ Pri prehodu skozi optične elemente se vedno nekaj svetlobe odbije. Da zmanjšamo te izgube, optične elemente prekrijemo z antirefleksno plastjo, to je nanosom ene ali več primerno debelih plasti dielektrikov z ustreznimi lomnimi količniki. Zaradi destruktivne interference valovanj, odbitih na posameznih plasteh, se količina odbite svetlobe z izbrano valovno dolžino občutno zmanjša. Ker so laserji izvori svetlobe s točno določeno valovno dolžino, za zmanjšanje izgub, na primer v resonatorju laserja, uporabljamo optične elemente (leče, kristale, modulatorje) z ustrezno antirefleksno plastjo.

Poglejmo še odvisnost odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota (slika 1.3). Pri tem je pomembno, ali se svetloba lomi v optično gostejše ($n_1 < n_2$) ali v optično redkejše sredstvo ($n_1 > n_2$).

Najprej obravnavajmo primer loma v optično gostejšo snov (sliki a in c). Vidimo, da je pri neki vrednosti vpadnega kota ϑ_1 odbojnost za TM polarizirano valovanje enaka nič. Ta kot imenujemo Brewstrov kot[8]. Pri Brewstrovem vpadnem kotu je vsa vpadna TM polarizirana svetloba prepuščena in $\mathscr{T}_{\mathrm{TM}}(\vartheta_B) = 1$. Posledično je odbito valovanje vedno TE polarizirano.

Naloga 1.6.2 Pokaži, da za Brewstrov kot velja $\vartheta_B = \arctan(n_2/n_1)$.

★ Prozorne ploščice, ki so postavljene pod Brewstrovim kotom glede na smer vpadne svetlobe, imenujemo Brewstrova okna. Njihova značilnost je, da TM polarizacijo v celoti prepustijo, TE polarizacije pa se del odbije in del prepusti. Brewstrova okna so zelo uporabna pri izdelavi resonatorjev plinskih laserjev, saj so izgube za TM polarizacijo zelo majhne, za TE pa razmeroma velike.

Negativni predznak amplitudne odbojnosti r_{TE} pomeni, da ima odbiti TE polarizirani val pri vpadu na optično gostejše sredstvo nasprotno fazo od vpadnega. Za TM polarizirani val je faza pri vpadnih kotih, manjših od Brewstrovega, nasprotna, pri večjih vpadnih kotih pa ima odbita svetloba enako fazo kot vpadna.

[8] Škotski fizik in znanstvenik Sir David Brewster, 1781–1868.

Slika 1.3: Amplitudna odbojnost r za obe vpadni polarizaciji (a, b) in razmerje med gostoto energijskega toka odbite in vpadne svetlobe $\mathscr{R}$ za obe polarizaciji (c, d) v odvisnosti od vpadnega kota ϑ_1. Za primer na slikah (a) in (c) velja $n_1 < n_2$, za primer na slikah (b) in (d) pa $n_1 > n_2$. Z zeleno je označen Brewstrov kot ϑ_B in z vijolično mejni kot totalnega odboja ϑ_T.

Pri vpadu na optično redkejše sredstvo (sliki 1.3 b in d) je poleg Brewstrovega kota pomemben še en kot, to je mejni kot totalnega odboja $\vartheta_T = \arcsin(n_2/n_1)$. Pri vpadnih kotih, ki so večji od ϑ_T, se svetloba v celoti odbije in govorimo o totalnem ali popolnem odboju. Vendar jakost električnega polja v optično redkejšem sredstvu ni enaka nič, saj se tam pojavi evanescentno polje. To je polje, ki se širi v smeri mejne ravnine, njegova amplituda pa pojema eksponentno z oddaljenostjo od nje. Vdorna globina je odvisna od valovne dolžine valovanja, lomnega količnika snovi in tudi od vpadnega kota. Čeprav se v optično redkejši snovi pojavi električno polje, je Poyntingov vektor v smeri pravokotno na mejno ploskev v povprečju enak nič in zato ne pride do prenosa energije v drugo snov.

1.7 Uklon svetlobe

Kadar svetloba vpada na oviro, za oviro nastane senca. Nastala senca ni ostra, ampak ima zaradi uklona zabrisane robove. Obravnave uklona svetlobe na odprtinah ali zaslonkah se lotimo z uporabo skalarnega približka teorije elektromagnetnega polja. To pomeni, da vpliva polarizacije ne upoštevamo. Ta je pomemben zgolj pri zelo majhnih odprtinah, kjer je velikost odprtine a po velikosti podobna valovni dolžini svetlobe $a \sim \lambda$. Vendar so tudi v tem primeru uklonske slike za različne polarizacije podobne, razlikujejo pa se po jakosti uklonjene svetlobe.

★ Primer, kjer skalarni približek ne da pravih rezultatov, je uklon na mrežici, narejeni iz zelo tankih prevodnih žic. Takšna mrežica deluje kot polarizator za vpadno elektromagnetno valovanje. Elektromagnetni val s polarizacijo, ki je vzporedna žicam, pri prečkanju v žicah inducira tok in val se delno odbije in delno absorbira. Za valovanje, ki je polarizirano pravokotno na žice, je inducirani tok bistveno manjši, saj je tok omejen na smer vzdolž žice. Posledično je val, polariziran pravokotno na žice, prepuščen, val, polariziran vzporedno z žicami, pa ne. Takšni polarizatorji se uporabljajo večinoma v mikrovalovni tehniki, vendar se v zadnjih letih z razvojem in izboljšavo litografskih postopkov vse pogosteje uporabljajo tudi v bližnjem infrardečem delu svetlobe.

Pri velikostih odprtin $a \gg \lambda$ torej uporabimo skalarno obliko valovne enačbe (enačba 1.13)

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{1.46}$$

Časovna odvisnost polja E je harmonična funkcija in je sorazmerna z $e^{-i\omega t}$. Z uporabo Greenovega izreka jakost polja E_P v točki prostora P izrazimo s poljem na poljubni sklenjeni ploskvi S, ki to točko obkroža. Zvezo opisuje Kirchhoffov integral[9]

$$E_P = -\frac{1}{4\pi}\oint \left(E\,\mathbf{n}\cdot\nabla\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{n}\cdot\nabla E \right) dS, \tag{1.47}$$

kjer je $\mathbf{n}$ normala na ploskev, po kateri teče integral, r pa oddaljenost od P do dela ploskve dS.

Naj svetloba iz točkastega izvora v točki T (slika 1.4) vpada na zaslon z odprtino poljubne oblike. Izračunajmo skalarno polje v točki P na drugi strani zaslona. Vpadno svetlobo zapišemo kot

$$E_T = A\frac{e^{ikr'}}{r'}, \tag{1.48}$$

kjer je r' razdalja od izvora do točke na zaslonu, A pa zaradi ohranitve energije konstanta.

Integracijska ploskev je poljubna sklenjena ploskev, ki objema točko P. Izberemo ploskev, ki zajema odprtino na zaslonu, poleg tega pa naredimo še dva približka: jakost polja E in njen gradient doprineseta k integralu le na odprtini, na preostanku ploskve pa sta njuna prispevka zanemarljivo majhna; vrednost E in njen gradient sta na odprtini takšna, kot da zaslona ne bi bilo. Približka sta precej groba, vendar se izkaže, da se kljub temu dobro ujemata z eksperimentalno uklonsko sliko, s čimer upravičimo njuno uporabo.

Slika 1.4: Integracijska ploskev v Kirchhoffovem integralu zajema odprtino in objema točko P.

Kirchhoffov integral za točkast izvor svetlobe se zapiše kot integral po odprtini

$$E_P = -\frac{ikAe^{-i\omega t}}{4\pi}\int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'}\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}')\right) dS. \tag{1.49}$$

Imenujemo ga Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral.

Naloga 1.7.1 Uporabi Kirchhoffov integral (enačba 1.47) in pokaži, da za primer krožnega vpadnega vala (enačba 1.48) polje v točki P zapišemo s Fresnel-Kirchhoffovim integralom (enačba 1.49). Pri tem privzemi, da je oddaljenost točke P od odprtine $r \gg \lambda$.

[9] Nemški fizik Gustav Robert Kirchhoff, 1824–1887.

Oglejmo si poseben primer, ko leži točkast izvor svetlobe na osi okrogle odprtine. Polje v točki P izračunamo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi}\int E_T \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1)\,dS, \tag{1.50}$$

pri čemer E_T predstavlja kompleksno amplitudo vpadnega polja v odprtini (enačba 1.48). Zapisana oblika Fresnel-Kirchhoffovega integrala ni pravzaprav nič drugega kot matematični zapis Huygensovega načela[10]. Spomnimo se, da Huygensovo načelo pravi, da lahko vsako točko valovne fronte obravnavamo kot izvor novega krogelnega vala. Točno to je zapisano tudi v gornjem integralu. Vpadni val E_T v vsakem od elementov odprtine dS vzbudi krogelno valovanje s kompleksno amplitudo

$$E = A_0\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{1.51}$$

polje v izbrani točki P pa je vsota prispevkov posameznih krogelnih valovanj. Za razliko od osnovnega Huygensovega načela, v Fresnel-Kirchhoffovem integralu (enačba 1.50) nastopa še faktor $(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1)$, ki poskrbi, da ni valovanja v smeri nazaj proti izvoru. Tudi faktor $-i$ manjka v osnovnem Huygensovem načelu, pomeni pa, da je uklonjeno valovanje fazno zakasnjeno za $\pi/2$ glede na osnovno valovanje E_T.

Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral uporabno razširimo z dodatkom prepustnostne funkcije odprtine T. Z njo na splošno popišemo amplitudne in fazne spremembe, do katerih pride na raznih odprtinah, lečah, uklonskih mrežicah ... Razširjeni uklonski integral zapišemo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi}\int T(r')E_T(r')\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1)\,dS, \tag{1.52}$$

pri čemer smo upoštevali tudi splošno obliko vpadnega vala $E_T(r')$.

Fraunhoferjev in Fresnelov približek

Izračun Fresnel-Kirchhoffovega uklonskega integrala (enačba 1.49) je na splošno zelo zapleten, zato se pogosto poslužujemo dveh približkov: Fraunhoferjevega[11] in Fresnelovega.

Slika 1.5: K izračunu Fraunhoferjevega in Fresnelovega uklonskega približka

Izhajamo iz Fresnel-Kirchhoffovega integrala za točkast izvor (enačba 1.49) in zapišemo lego točke P s koordinatami x, y in z, razdaljo r pa s koordinatami točke P in koordinatama na zaslonu x' in y' (slika 1.5).

[10] Nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens, 1629–1695.
[11] Nemški fizik Joseph von Fraunhofer, 1787–1826.

Privzamemo, da je oddaljenost zaslona z bistveno večja od prečnih dimenzij x in y. Zapišemo razdaljo r in jo razvijemo

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \approx z + \frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z}. \tag{1.53}$$

Vstavimo razvoj v uklonski integral, pri čemer r v imenovalcu nadomestimo kar z z. Pridemo do Fresnelovega uklonskega približka

$$E_P(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \int\int E_T \, e^{ik((x-x')^2+(y-y')^2)/2z} dx'dy'. \tag{1.54}$$

Kadar je oddaljenost zaslona dovolj velika oziroma so prečne dimenzije dovolj majhne, da zadošča razvoj do linearnih členov, govorimo o Fraunhoferjevem uklonu in uklonski integral je

$$E_P(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ik(z+(x^2+y^2)/2z)} \int\int E_T \, e^{-ik(xx'+yy')/z} dx'dy'. \tag{1.55}$$

V njem prepoznamo Fourierevo transformacijo polja E_T. Fraunhoferjeva uklonska slika velja za razmeroma velike oddaljenosti zaslona od uklonske odprtine, ko lahko uklonjeni val dovolj dobro opišemo z ravnim valom.

Bolj zapleteno Fresnelovo uklonsko sliko moramo uporabiti, kadar obravnavamo primer bližnjega polja. Mejo med Fraunhoferjevim in Fresnelovim režimom kvalitativno določa Fresnelovo število

$$F = \frac{a^2}{L\lambda}. \tag{1.56}$$

Pri tem je a karakteristična dimenzija odprtine, L oddaljenost zaslona od odprtine ter λ valovna dolžina svetlobe. V grobem velja, da lahko Fraunhoferjev približek uporabimo, kadar je $F < 1$ in je odstopanje faze od ravnega vala znotraj odprtine majhno. Sicer moramo uklon obravnavati v Fresnelovem približku ali celo v polni obliki.

Slika 1.6: Značilna uklonska slika odprtine v Fraunhoferjevem (a) in Fresnelovem režimu (b)

Naloga 1.7.2 Pokaži, da je v Fraunhoferjevi uklonski sliki uklon na okrogli odprtini podan z

$$I_P = I_0 \frac{4J_1(ka\rho/z)}{ka\rho/z}, \tag{1.57}$$

kjer je k valovno število, a polmer odprtine, $J_1(x)$ Besslova funkcija in $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh

Do zdaj smo obravnavali elektromagnetno valovanje v izotropnih snoveh, v katerih je dielektričnost skalar in hitrost valovanja neodvisna od smeri. Na splošno so snovi anizotropne, dielektričnost je tenzor, hitrost potovanja svetlobe skozi snov pa je odvisna od njene smeri in polarizacije.

Gostoto električnega polja v anizotropni snovi zapišemo kot

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \mathbf{E}, \tag{1.58}$$

kjer je $\underline{\varepsilon}$ tenzor drugega ranga in ima na splošno devet komponent.

V dielektričnih snoveh, v katerih ne pride do optične aktivnosti ali absorpcije, je tenzor realen in simetričen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$. Tak tenzor lahko vedno diagonaliziramo, torej poiščemo koordinatni sistem, v katerem je diagonalen. V takem koordinatnem sistemu velja

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \mathbf{E} \tag{1.59}$$

in

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1, \\ D_2 &= \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2, \\ D_3 &= \varepsilon_0 \varepsilon_3 E_3. \end{aligned} \tag{1.60}$$

Glavne osi novega koordinatnega sistema določajo smeri, vzdolž katerih sta jakost in gostota električnega polja vzporedni, iz lastnih vrednosti pa izračunamo tri lomni količnike $n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$. Snovi, za katere so vse tri vrednosti n_i različne, imenujemo optično dvoosne snovi, medtem ko sta v optično enoosnih snoveh dve lastni vrednosti enaki $n_1 = n_2$. Če so enake vse tri lastne vrednosti, je snov izotropna.

Ploskev valovnega vektorja

V anizotropnih snoveh je lomni količnik odvisen od smeri širjenja svetlobe in izkaže se, da tudi od njene polarizacije. Poglejmo najprej preprost primer, ko se svetloba širi vzdolž lastne osi, naj bo to os z. Če je vpadno valovanje polarizirano vzdolž lastne osi x, se pri prehodu skozi kristal polarizacija valovanja ohrani, lomni količnik za tak val je n_1. Podobno velja za val, polariziran v smeri y, za katerega je lomni količnik enak n_2. Če polarizacija valovanja, ki se širi vzdolž lastne osi z, ne sovpada z lastnima osema x ali y, nastane po prehodu skozi kristal iz vpadnega linearno polariziranega valovanja na splošno eliptično valovanje. Lastni komponenti namreč potujeta različno hitro, zato pride med njima do faznega zamika.

Za poljubno smer širjenja valovanja in poljubno polarizacijo je račun razmeroma zapleten. Formalni pristop izhaja iz valovne enačbe (enačba 1.13), v kateri moramo upoštevati tudi električno polarizacijo $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\underline{\varepsilon} - I)\mathbf{E}$. Iz nje sledi sistem enačb za komponente valovnega vektorja in jakosti električnega polja.

Rešitev tega sistema najbolj nazorno predstavimo s ploskvijo valovnega vektorja, ki je sklenjena dvolistna ploskev (slika 1.7). Dvolistnost ploskve vodi pri vsakem valovnem vektorju **k** do dveh rešitev in dveh različnih lomnih količnikov, od katerih vsak ustreza eni od ortogonalnih polarizacij. Točke, v katerih se ploskev dotika sama sebe in sta lomna količnika za obe polarizaciji enaka, določajo smeri optičnih osi.

Slika 1.7: Dvolistna ploskev valovnega vektorja, pri čemer zaradi nazornosti rišemo le presečišča ploskve z geometrijskimi ravninami v prvem oktantu. V dvoosnem kristalu (levo) sta dve optični osi. Druga os ni narisana, leži pa simetrično glede na os z. Privzeli smo, da velja $n_1 < n_2 < n_3$. V optično enoosnem kristalu (desno) je le ena optična os, po dogovoru je to os z. Rdeče puščice označujejo ustrezno polarizacijo.

Optično enoosni kristali

V optično enoosnih kristalih sta dve lastni vrednosti enaki. Lastne vrednosti izberemo tako, da velja $n_1 = n_2 \neq n_3$. Navadno vpeljemo nove oznake: $n_1 = n_2 = n_o = n_\perp$, ki ga imenujemo redni (*ordinary*) lomni količnik, in $n_3 = n_e = n_\parallel$, ki je izredni (*extraordinary*) lomni količnik. V eni smeri sta lomna količnika za obe polarizaciji enaka in tisti smeri pravimo optična os. Po dogovoru je to os z. Hitrost valovanja, ki se širi vzdolž optične osi, je tako neodvisna od njegove polarizacije. Ker je optična os samo ena, imenujemo kristal optično enoosni.

Za lažjo predstavo si oglejmo ploskev valovnega vektorja (slika 1.7, desno). V tem primeru ni treba obravnavati celotne ploskve, ampak zaradi rotacijske simetrije zadošča, da narišemo presek ploskve valovnega vektorja z vpadno ravnino, ki jo določata optična os in valovni vektor **k**. Pomemben je le kot ϑ med valovnim vektorjem **k** in optično osjo z, zato si lahko drugo koordinatno os poljubno izberemo. Tukaj izberemo os y (slika 1.8).

Za vsako smer valovnega vektorja, torej za vsak kot ϑ, obstajata dve rešitvi, ki pripadata dvema lastnima polarizacijama z ustreznima lomnima količnikoma. Lomni količnik za žarek, ki je polariziran pravokotno na vpadno ravnino, je neodvisen od ϑ. To je redni žarek, njegov lomni količnik pa je vedno n_o, ne glede na vpadni kot. Na skici temu žarku ustreza krožnica.

Žarek, katerega polarizacija leži v vpadni ravnini, je izredni žarek. Pripadajoči lomni količnik je odvisen od kota ϑ in ga izračunamo iz enačbe elipse s polosema n_o in n_e

$$\frac{1}{n^2(\vartheta)} = \frac{\cos^2\vartheta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{n_e^2}. \tag{1.61}$$

Navadno sta pri ravnem valu vektorja **E** in **D** vzporedna, prav tako **k** in **S**. Žarek se širi v smeri valovnega vektorja, valovne fronte pa so pravokotne nanj. To velja tudi za redni žarek v anizotropnih snoveh. Izredni žarek pa ima, kot že ime nakazuje, "izredne" lastnosti. Vektorja **E** in **D** nista vzporedna, zato tudi valovni vektor **k** ni vzporeden energijskemu toku oziroma Poyntingovemu vektorju **S** (slika 1.8 c). Smer energijskega toka v tem primeru določimo z normalo na elipso pri kotu ϑ.

Slika 1.8: V optično enoosnih kristalih je lomni količnik odvisen od smeri valovnega vektorja **k** in polarizacije. Poznamo pozitivno anizotropne snovi, pri katerih je $n_e > n_o$ (a) in negativno anizotropne snovi, kjer velja $n_e < n_o$ (b). V obeh primerih je redni žarek polariziran pravokotno na vpadno ravnino. Zanj velja, da je $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ in $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$ (c, zgoraj). Polarizacija izrednega žarka leži v vpadni ravnini. Smer **S** ni vzporedna z valovnim vektorjem **k**, prav tako valovne fronte niso pravokotne nanjo (c, spodaj). Primer je narisan za pozitivno anizotropno snov.

Dvojni lom

Ko vpade žarek na mejo dveh sredstev, se lomi. Hitrost valovanja – in s tem tudi kot, pod katerim se lomi – je v anizotropnih snoveh odvisna od polarizacije. Pri zapisu lomnega zakona (enačba 1.38) v anizotropnih snoveh moramo biti zato pazljivi. Na splošno se pojavita dva lomljena žarka z različnima polarizacijama, kar da ime pojavu: dvolomnost (slika 1.9).

Za redni val s TE polarizacijo (pravokotno na vpadno ravnino) velja navadni lomni zakon, pri čemer je lomni količnik snovi enak rednemu lomnemu količniku n_o

$$\sin\vartheta_1 = n_o \sin\vartheta_o. \tag{1.62}$$

Pri zapisu smo privzeli, da je lomni količnik snovi, iz katere valovanje prehaja v anizotropno snov, enak 1. Za izredni val s TM polarizacijo prav tako zapišemo lomni zakon

$$\sin\vartheta_1 = n(\vartheta_e')\sin\vartheta_e, \tag{1.63}$$

le da je lomni količnik $n(\vartheta_e')$ odvisen od smeri širjenja valovanja glede na smer optične osi in je določen z enačbo elipse (enačba 1.61), kot ϑ_e pa je določen glede na normalo na mejno ploskev. Na splošno je zapis precej zapleten, poenostavi se le, ko je optična os vzporedna ali pravokotna na mejno ploskev.

Kadar vpada valovanje pravokotno na izotropno snov, se žarek ne lomi. V dvolomnih snoveh pa lahko tudi pri pravokotnem vpadu pride do razklona svetlobe (slika 1.9 b). Kadar je optična os nagnjena glede na vpadnico, sta valovna vektorja obeh prepuščenih žarkov sicer vzporedna valovnemu vektorju vpadnega žarka ($\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_o \parallel \mathbf{k}_e$), razlikujeta pa se smeri Poyntingovih vektorjev ($\mathbf{S}_1 \parallel \mathbf{S}_o \nparallel \mathbf{S}_e$). Ob prehodu skozi plast anizotropne snovi tako svetloba potuje v dveh smereh in nastaneta dve sliki z medsebojno pravokotnima polarizacijama (slika 1.10) .

Slika 1.9: Dvojni lom. Pri poševnem vpadu na anizotropno snov se valovanje loči na dva različno polarizirana žarka (a). Če je optična os usmerjena pod poljubnim kotom glede na normalo mejne ravnine, pride do razklona svetlobe pri pravokotnem vpadu. Valovna vektorja sta v tem primeru vzporedna, Poyntingova vektorja pa imata različne smeri (b).

Slika 1.10: Dvojni lom v kristalu kalcita (islandski dvolomec). Po prehodu skozi kristal nastaneta dve razmaknjeni sliki in z linearnim polarizatorjem pokažemo, da imata sliki različni polarizaciji.

Snov	n_o	n_e
$CaCO_3$ (kalcit)	1,6557	1,4849
$BaTiO_3$	2,4042	2,3605
$LiNbO_3$	2,2864	2,2022
KH_2PO_4 (KDP)	1,5074	1,4669
tekoči kristal 5CB (25 °C)	1,5319	1,7060
telur ($\lambda = 10$ µm)	4,7969	6,2455

Tabela 1.1: Redni in izredni lomni količniki za nekaj izbranih optično enoosnih kristalov. Razen v primeru telurja veljajo vrednosti za svetlobo z valovno dolžino 633 nm.

2. Koherenca

V tem poglavju bomo spoznali koherenco. To je lastnost valovanja, ki je tesno povezana s pojavom interference. Ohlapno pravimo, da je koherentno tisto valovanje, s katerim se posrečijo interferenčni poskusi.

2.1 Youngov poskus

Interferenčnih pojavov ni mogoče opazovati z vsakim svetlobnim izvorom. Da bi to razumeli, si oglejmo interferenco valovanja, ki vpada na dve ozki reži (tako imenovani Youngov poskus[1]). Navadno predpostavimo, da sta obe reži osvetljeni z istim ravnim valom. Delni valovanji, ki izhajata iz rež, imata tako ves čas poskusa enako polarizacijo, enako frekvenco in enako fazo. Zaradi različnih dolžin poti delnih valovanj od reže do dane točke na zaslonu nastane na oddaljenem zaslonu interferenčni vzorec (slika 2.1). Vendar se interferenca pojavi le v primeru, ko je faza valovanja, ki vpada na reži, konstantna. Svetloba s konstantno fazo nastane na primer v kvalitetnih laserjih in zanjo pravimo, da je koherentna. Svetloba iz navadnih svetil ima spremenljivo fazo in zato ne da interferenčnega vzorca. Zanjo pravimo, da ni koherentna.

Slika 2.1: Youngov poskus na dveh režah. Le če je vpadno valovanje koherentno (levo), se pojavi na zaslonu interferenčni vzorec. Nekoherentno valovanje s spremenljivo fazo (desno) ne da interferenčnega vzorca.

Svetloba navadnih svetil, na primer plinskih razelektritvenih cevi, je zaradi vrste nastanka kaotične narave. Atomi v njih sevajo neodvisno, zato se faza izsevanega valovanja neprestano spreminja. Približno konstantna je le znotraj nekega karakterističnega časa. Če je pri interferenčnem poskusu karakteristični čas spreminjanja faze krajši od zakasnitve med valovanjema zaradi različno dolgih poti, pride na danem mestu zaslona izmenično do konstruktivne in destruktivne interference. Čas spreminjanja je praviloma bistveno krajši od časa opazovanja, zato utripanja ne vidimo in zaznamo povprečno razmazano sliko. Interferenčni poskus se ne posreči zaradi majhne časovne koherence, karakterističnemu času spreminjanja faze pa rečemo koherenčni čas t_c. Časovno koherenco bomo natančneje obravnavali v razdelku (2.3), zaenkrat povejmo le, da je časovna koherenca vezana na fazno razliko med točkami, ki ležijo vzdolž smeri širjenja valovanja.

[1] Angleški znanstvenik Thomas Young, 1773–1829.

Poleg časovne koherence na interferenčno sliko pomembno vpliva tudi prostorska koherenca, ki je posledica končne dimenzije svetila. Svetloba, ki na reži vpada iz različnih delov svetila, ima namreč različno fazo zaradi razlike v dolžini poti od svetila do rež. Ta faza se prišteje fazni razliki zaradi različno dolgih poti od rež do zaslona, zato se interferenčne proge na zaslonu nekoliko premaknejo. Če je fazna razlika žarkov iz različnih delov svetila večja od fazne razlike za režami, se celotna interferenčna slika na zaslonu izpovpreči. Interferenca se pri Youngovem poskusu pojavi, kadar sta reži razmaknjeni le toliko, da je povprečna fazna razlika manjša od 2π. Največjemu prečnemu razmiku, ki še da interferenco, rečemo prečna koherenčna razdalja d_c. Prostorska koherenca, ki jo bomo podrobneje spoznali v razdelku (2.5), je torej vezana na fazno razliko med točkami, ki ležijo prečno na smer širjenja valovanja.

Poudarimo še enkrat, da je pojem koherence statističen. Če je koherenčni čas t_c dolg v primerjavi s časom opazovanja, se seštevajo amplitude valovanj in pojavi se interferenčna slika. Ta se slučajno spreminja z značilnim časom t_c. Če pa so razlike poti večje od ct_c ali razmik rež večji od d_c, gledamo le povprečno sliko in interferenčne proge izginejo.

2.2 Koherenca navadnih svetil

Obravnavajmo plinsko razelektritveno cev in z ustreznim filtrom izberimo eno samo spektralno črto. Ta črta naj ima osrednjo frekvenco ν_0 in končno frekvenčno širino $\Delta\nu$. Privzamemo, da je glavni prispevek k razširitvi spektralne črte posledica medatomskih trkov.

Celotna izsevana svetloba je vsota delnih valov, ki izhajajo iz posameznih atomov in so med seboj neodvisni. Vsak delni val ohranja konstantno fazo med dvema trkoma, to je v intervalu dolžine t_c. Valovni paket dolžine t_c tako vsebuje frekvence v pasu $\Delta\nu$, za katerega velja $t_c\Delta\nu \sim 1$. Koherenčni čas je torej kar reda velikosti obratne vrednosti spektralne širine svetlobe. Povsem monokromatsko valovanje bil imelo neskončen koherenčni čas in bi bilo popolno koherentno.

Zapišimo še izsevano polje takega svetila. Jakost električnega polja v izbrani točki prostora je vsota delnih valov, ki izvirajo iz raznih delov izvora. Vsak atom v izvoru, naj jih bo N, seva neodvisno, zato so tudi delna valovanja med seboj neodvisna. Posamična valovanja ohranjajo konstantno fazo v času med dvema trkoma atoma t_c. Zaradi enostavnosti privzemimo, da so amplitude E_1 in polarizacije izsevanih polj posameznih atomov enake. Električno poljsko jakost E v izbrani točki prostora potem zapišemo kot vsoto posameznih prispevkov

$$E = E_1 \sum_{n=1}^{N} e^{i\phi_n(t)}. \tag{2.1}$$

kjer se faza polja $\phi_n(t)$, ki ga izseva posamezni atom, naključno spremeni ob trku z drugim atomom. Povprečje vsote polj je nič, povprečni kvadrat skupnega polja, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka, pa je NE_1^2. Zaradi slučajnosti faz je slučajna tudi faza celotnega polja in se gotovo povsem spremeni v času, ko se spremeni faza posameznih prispevkov, to je t_c. S tako svetlobo bomo videli interferenco na režah, če bo razlika poti delnih valovanj manjša od ct_c.

Oglejmo si izračun na primeru. Imejmo $N = 100$ neodvisnih atomov, ki se jim faza naključno spreminja s karakterističnim časom $t_c = 10/\nu$, kjer je ν frekvenca valovanja. Na sliki (2.2) sta prikazana časovna poteka amplitude E (enačba 2.1) in $|E|^2$. Za primerjavo je prikazan tudi ravni val $E = \sqrt{N}E_1 e^{-i\omega t}$ s konstantno fazo in pripadajoč $|E|^2$, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka. Ta je v primeru ravnega vala konstantna, medtem ko je povprečna gostota svetlobnega toka iz navadnega svetila približno konstantna le znotraj t_c.

Slika 2.2: Zgoraj: shematski prikaz jakosti električnega polja ravnega vala s konstantno fazo (rdeča črta) in jakosti električnega polja navadnega svetila (modra črta) kot funkcije časa. Spodaj: pripadajoča vrednost $|E|^2$ v primeru ravnega vala (rdeča črta) in v primeru svetlobe iz navadnega svetila (modra črta) kot funkcija časa. Modra črtkana črta je povprečna vrednost $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t+t')E^*(t+t')dt'$ s časom integracije $T = t_c$.

2.3 Časovna koherenca

Časovno koherenco je najpreprosteje obravnavati z Michelsonovim interferometrom[2], ki je prikazan na sliki (2.3).

Slika 2.3: Michelsonov interferometer. Svetlobo iz izvora P usmerimo preko kolimacijske leče (L) na polprepustno zrcalo (PZ), s čimer jo razdelimo na dva snopa. S premikanjem enega zrcala (Z) spreminjamo zakasnitev enega delnega snopa. Interferenco opazujemo na detektorju.

[2] Ameriški fizik in nobelovec Albert Abraham Michelson, 1852–1931.

Valovanje iz točke P na polprepustnem zrcalu razdelimo na dva delna snopa, nato enega s premikanjem zrcala zakasnimo za $\tau = 2x/c$. Dokler je zakasnitev τ manjša od koherenčnega časa t_c, snopa med seboj interferirata. S spreminjanjem lege zrcala se tako na detektorju izmenično pojavijo ojačitve in oslabitve. Pri zakasnitvah, ki so večje od koherenčnega časa, ni stalne fazne povezave in interferenčna slika se izpovpreči.

★ S kolimacijsko lečo dosežemo, da je čim več žarkov, ki izhajajo iz P, vzporednih z osjo interferometra. V eksperimentih snop svetlobe ni nikoli povsem vzporeden in dolžine poti posameznih žarkov se med seboj malo razlikujejo. Na detektorju tako za $\tau < t_c$ nastanejo jasno vidni interferenčni krogi. Pri večjih vrednostih τ se kontrast interferenčnih prog zmanjšuje in pri zakasnitvah, ki so daljše od koherenčnega časa, se slika povsem zabriše.

Zapišimo ugotovitev še matematično. Gostota svetlobnega toka na detektorju je sorazmerna s kvadratom električne poljske jakosti obeh delnih valovanj

$$|E_d(t)|^2 = |E(t) + E(t+\tau)|^2 = |E(t)|^2 + |E(t+\tau)|^2 + 2\Re\left(E(t)E^*(t+\tau)\right). \tag{2.2}$$

Zakasnitev τ je določena s premikom pomičnega zrcala $\tau = 2x/c$. Navadno opazujemo v času T, ki je dolg v primerjavi s koherenčnim časom svetlobe, zato izraz povprečimo po času

$$\begin{aligned} \langle |E_d(t)|^2 \rangle &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |E_d(t)|^2\, dt \\ &= 2\langle |E(t)|^2 \rangle + 2\Re\langle E(t)E^*(t+\tau)\rangle = 2\langle |E(t)|^2 \rangle + 2\Re G(\tau). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Prvi člen je vsota povprečnih prispevkov obeh delnih snopov. Privzeli smo, da je polje v povprečju stacionarno in je zato povprečje neodvisno od izbire časovnega intervala. Drugi člen opisuje interferenco. Za opis smo vpeljali časovno avtokorelacijsko funkcijo električnega polja

$$\boxed{G(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t+\tau)\, dt.} \tag{2.4}$$

Za zakasnitve τ, ki so manjše od koherenčnega časa t_c, je avtokorelacijska funkcija različna od nič in na detektorju zaznamo interferenco. Pri zakasnitvah, ki so precej večje od koherenčnega časa t_c, pa sta polji $E(t)$ in $E(t+\tau)$ statistično neodvisni in povprečje produkta je enako produktu povprečij. Ker je $\langle E(t)\rangle = 0$, pri velikih zakasnitvah τ interferenčni člen izgine.

Priročno je vpeljati normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)}. \tag{2.5}$$

Za povsem koherentno valovanje je $|g(\tau)| = 1$, za povsem nekoherentno valovanje je $|g(\tau)| = 0$, za delno koherentna pa $0 < |g(\tau)| < 1$. Praviloma se vrednost $|g(\tau)|$ z naraščajočim τ zmanjšuje, saj postaja valovanje za velike časovne zamike vedno manj korelirano. Ohlapno povedano je koherenčni čas zakasnitev, pri kateri postane vrednost avtokorelacijske funkcije majhna. Koherenčni čas t_c lahko tudi bolj natančno definiramo z normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$\boxed{t_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2\, d\tau.} \tag{2.6}$$

Zakasnitev delnih valov je pogosto posledica različno dolgih optičnih poti, zato namesto koherenčnega časa t_c pogosto uporabljamo koherenčno dolžino $l_c = c\,t_c$.

Naloga 2.3.1 Pokaži, da v navedenih avtokorelacijskih funkcijah $g(\tau)$ spremenljivka t_c ustreza koherenčnemu času, kot je definiran v enačbi (2.6), in izračunaj $|g(t_c)|$ za oba primera.

$$g(\tau) = \begin{cases} \exp\left(i\omega_0\tau - |\tau|/t_c\right), \\ \exp\left(i\omega_0\tau - \pi\tau^2/2t_c^2\right), \end{cases} \tag{2.7}$$

Ob nalogi (2.4.2) in v razdelku (5.8) bomo spoznali, da sta to avtokorelacijski funkciji za svetlobo z Lorentzovim spektrom (razširitev spektralne črte zaradi medatomskih trkov) in Gaussovim spektrom (Dopplerjeva razširitev).

Poglejmo nekaj značilnih vrednosti koherenčnih dolžin. Koherenčna dolžina svetlobe, izsevane iz črnega telesa, je $l_c = c\,t_c \approx \hbar c/k_B T$ (glej nalogo 2.4.3). Svetloba s Sonca ($T \approx 6000$ K) ima tako koherenčno dolžino zgolj $\sim 0,4$ µm, kar ustreza koherenčnemu času $t_c \sim 1$ fs. Svetloba, izsevana iz LED sijalk, ima koherenčno dolžino $\sim$ 20–100 µm. Živosrebrna svetilka ima za izbrano spektralno črto koherenčno dolžino do okoli 50 cm, kar ustreza koherenčnemu času $t_c \sim 1,6$ ns. Koherenčna dolžina laserjev je tipično okoli 100 m, v nekaterih vlakenskih laserjih pa koherenčna dolžina presega 100 km.

2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom

Spoznali smo, da je monokromatski ravni val povsem koherenten in njegov korelacijski čas neskončen. Obravnavajmo zdaj koherenco poljubnega valovanja, ki je v povprečju stacionarno. To pomeni, da se povprečna gostota svetlobnega toka v času zajemanja, ki traja čas T, ne spreminja. Vzorec valovanja razvijemo v Fourierevo vrsto

$$E(t) = \sum_n A_n(\omega) e^{-in\Delta\omega t}, \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.8}$$

Amplitude $A_n(\omega)$ so slučajne spremenljivke, ki predstavljajo delež polja pri krožni frekvenci $\omega = n\Delta\omega$, čas opazovanja T pa naj bo bistveno daljši od t_c. Zapišimo amplitude A_n

$$A_n(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\, e^{i\omega t}\, dt. \tag{2.9}$$

Kvadrat $|A_n(\omega)|^2$, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka pri krožni frekvenci ω, imenujmo intenziteta valovanja[3]. Potem vpeljemo spekter $S(\omega)$, ki podaja intenziteto svetlobe pri ω, deljeno z intervalom $\Delta\omega$

$$S(\omega) = \frac{|A_n(\omega)|^2}{\Delta\omega} = \frac{T}{2\pi}|A_n(\omega)|^2. \tag{2.10}$$

Vstavimo še amplitudo A_n (enačba 2.9) in dobimo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\int\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t')\, e^{-i\omega(t'-t)}\, dt\, dt'. \tag{2.11}$$

Uvedemo novo spremenljivko $\tau = t' - t$ in zapišemo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t+\tau)\, dt. \tag{2.12}$$

[3] Intenziteto valovanja na splošno vpeljemo kot $I = |E|^2$, gostota svetlobnega toka pa je $j = \varepsilon\varepsilon_0 c|E|^2/2$ z enotami W/m^2 (enačba 1.30). Kadar predfaktorji niso pomembni, pogosto uporabljamo krajši izraz.

Integral po t je ravno enak korelacijski funkciji $G(\tau)$ (enačba 2.4). Privzeli smo, da velja $T \gg t_c$, zato je korelacijska funkcija na mejah integracije po τ praktično enaka nič in meje integracije smo lahko raztegnili do neskončnosti. Zveza, ki smo jo dobili, je Wiener-Hinčinov izrek[4]

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega. \tag{2.13}$$

Spekter svetlobe je torej Fouriereva transformiranka avtokorelacijske funkcije svetlobnega polja. Pri tem ne pozabimo, da je spekter, ki smo ga zapisali z enačbo (2.12), zapisan za izbran vzorec valovanja, ki traja čas T, in je tudi slučajna spremenljivka. Povprečni spekter dobimo tako, da naredimo limito $T \to \infty$.

$$\langle S(\omega)\rangle = \lim_{T\to\infty} S(\omega). \tag{2.14}$$

★ Zaradi priročnosti smo zapisali spekter in Wiener-Hinčinov izrek s krožno frekvenco. Podobno lahko vpeljemo tudi spekter na frekvenčni interval in Wiener-Hinčinov izrek se prepiše v

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}\,d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)e^{i2\pi\nu\tau}\,d\nu. \tag{2.15}$$

Iz Wiener-Hinčinovega izreka (enačba 2.13) neposredno sledi, da je koherenca nekega valovanja tesno povezana z njegovim spektrom. Koherenčni čas t_c je tako povezan s spektralno širino svetlobe γ, za katero velja (glej nalogo 2.4.1)

$$\gamma = \frac{1}{t_c}. \tag{2.16}$$

Valovanje z dolgim t_c ima tako zelo majhno spektralno širino (ozek spekter), valovanje s kratkim t_c pa ima širok spekter. To je v skladu s primeri, navedenimi na koncu prejšnjega razdelka: svetloba s Sonca ima širok spekter in zelo kratek koherenčni čas, svetloba iz laserjev pa ima praviloma ozko spektralno črto in dolg koherenčni čas. Ugotovimo tudi, da lahko valovanju podaljšamo koherenčni čas z ustreznim spektralnim filtriranjem.

Naloga 2.4.1 Formalno lahko vpeljemo spektralno širino kot

$$\gamma = \frac{1}{2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|s(\omega)|^2\,d\omega}; \quad \text{kjer je} \quad s(\omega) = \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega} = \frac{S(\omega)}{G(0)} \tag{2.17}$$

normirani spekter. Z uporabo enačbe za koherenčni čas t_c (enačba 2.6) pokaži, da je spektralna širina obratno sorazmerna s koherenčnim časom (enačba 2.16) ne glede na obliko spektra.
Namig: Uporabi Parsevalov izrek, ki pravi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega, \tag{2.18}$$

kjer je

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \tag{2.19}$$

Fouriereva transformiranka funkcije $f(t)$.

---

[4] Ameriški matematik Norbert Wiener, 1894–1964, in ruski matematik Aleksander Jakovljevič Hinčin, 1894–1959.

Za zgled Wiener-Hinčinovega izreka vzemimo primer, ki je predstavljen na sliki (2.2). Ker so trki med atomi naključni, je avtokorelacijska funkcija eksponentno pojemajoča

$$g(\tau) = e^{i\omega_0\tau} e^{-\tau/t_c}, \tag{2.20}$$

spekter take svetlobe pa je Lorentzove oblike (glej nalogo 2.4.2)

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}, \tag{2.21}$$

pri čemer je $\gamma = 1/t_c$ spektralna širina. Normirani spekter $s(\omega)$ in ustrezna avtokorelacijska funkcija $g(\tau)$ sta prikazana na sliki (2.4). Točke na grafih predstavljajo spekter in izračunano avtokorelacijsko funkcijo za integracijski čas $T = 100t_c$. Za primerjavo sta z rdečo krivuljo prikazana tudi pričakovani spekter (enačba 2.21) in avtokorelacijska funkcija (enačba 2.20). Zaradi končnega časa T pri izračunu povprečja se spekter iz simulacije nekoliko razlikuje od pričakovanega.

Slika 2.4: Spekter in avtokorelacijska funkcija valovanja s slike (2.2)

Naloga 2.4.2 Imejmo dve vrsti svetlobe. Prva naj ima avtokorelacijsko funkcijo, ki je eksponentno pojemajoča, druga pa ima avtokorelacijsko funkcijo Gaussove oblike (enačbi 2.7). Pokaži, da sta njuna spektra oblike

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \quad \text{in} \quad s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\gamma} \exp\Big(-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\pi\gamma^2}\Big), \tag{2.22}$$

kjer je $\gamma = 1/t_c$ spektralna širina.

Spektralne črte atomov so pogosto Lorentzove oblike, kar je posledica eksponentnega razpada stanj (naravna širina). Dodatno se spektralne črte razširijo zaradi trkov med atomi, vendar tudi to vodi do približno Lorentzove oblike spektra. V plinih je pogosto prevladujoča razširitev črt zaradi Dopplerjevega pojava (glej razdelek 5.8). Spekter Dopplerjevo razširjene svetlobe je, kot bomo videli v nadaljevanju, Gaussove oblike. V tem primeru iz enačbe (2.13) sledi, da je tudi avtokorelacijska funkcija Gaussove oblike.

Naloga 2.4.3 Numerično pokaži, da je koherenčni čas svetlobe, ki jo oddaja črno telo s temperaturo T, približno enak $t_c \approx \hbar/k_B T$. Normirani spekter sevanja črnega telesa zapišemo kot Planckov spekter

$$s(\omega) = \frac{15}{\pi^4}\frac{\hbar^4\omega^3}{(kT)^4}\Big/\left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right) \quad \text{za } \omega > 0, \text{ sicer } s(\omega) = 0. \tag{2.23}$$

★ V prejšnjem razdelku smo videli, da časovno avtokorelacijsko funkcijo merimo z Michelsonovim interferometrom. Dobljena povezava med merjeno avtokorelacijo in izračunanim spektrom je osnova za Fourierevo spektroskopijo[5], pri kateri določimo absorpcijski ali emisijski spekter snovi iz izmerjene avtokorelacijske funkcije. Tak pristop ima nekatere pomembne prednosti pred drugimi metodami in se danes precej uporablja, posebej v infrardečem delu EM valovanja (tako imenovana metoda FTIR - *Fourier-transform infrared spectroscopy*).

2.5 Prostorska koherenca

Vrnimo se k Youngovemu poskusu in obravnavi interference na dveh ozkih režah. Osvetljujmo zdaj zaslon z dvema odprtinama s svetilom končnih razsežnosti. Svetilo naj sveti skoraj enobarvno svetlobo in naj bo na simetrali med odprtinama, kot kaže slika (2.5).

Žarka, ki izhajata iz sredine svetila (polna rdeča črta), opravita do odprtin v ravnini A enako dolgo pot in povzročita na zaslonu B interferenčne proge. Žarka, ki izhajata iz roba izvora (prekinjena rdeča črta), imata do odprtin različno dolgo pot, zato nastane med njima fazna razlika že do ravnine A, ki se prišteje fazni razliki do ravnine B. Interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, so premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Ker so žarki z roba statistično neodvisni od žarkov iz sredine, z njimi ne interferirajo. Celotni interferenčni vzorec je zato kar vsota interferenčnih vzorcev žarkov iz različnih delov svetila. Če je razlika poti za žarke iz različnih delov velikosti valovne dolžine λ, se celotna interferenčna slika na zaslonu B izpovpreči.

Slika 2.5: Shema interferenčnega eksperimenta z razsežnim svetilom

Razdaljo med odprtinama d_c, pri kateri interferenčne proge izginejo, imenujemo prečna koherenčna razdalja. Zanjo velja približno

$$\delta s = d_c \sin\varphi \approx d_c\frac{R}{z} \sim \lambda \;\Rightarrow\; d_c \sim \frac{z\lambda}{R}. \tag{2.24}$$

[5] Francoski matematik in fizik Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830.

★ Pogosto je v uporabi pojem koherenčna ploskev, to je območje, v katerem je fazna razlika v povprečju konstantna. Velikost te ploskve je približno d_c^2. V območju koherenčne ploskve so tudi valovne fronte približno gladke. Vsekakor pa moramo paziti, da koherenčne razdalje d_c ne zamenjamo s koherenčno dolžino l_c, ki smo jo vpeljali pri časovni koherenci valovanja.

Zapišimo gornje ugotovitve nekoliko bolj natančno. Na zaslonu B izmerimo povprečno gostoto svetlobnega toka, ki je sorazmerna povprečju kvadrata električne poljske jakosti valovanj, ki izhajata iz obeh odprtin

$$\begin{aligned}\langle|E_d|^2\rangle &= \langle|K_1E_1+K_2E_2|^2\rangle \\ &= |K_1|^2\langle|E_1|^2\rangle + |K_2|^2\langle|E_2|^2\rangle + 2\Re\left(K_1K_2^*\langle E_1(t)E_2^*(t+\tau)\rangle\right).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Pri tem je je $\tau = d\sin\vartheta/c$ zakasnitev valovanja iz druge odprtine glede na valovanje iz prve, faktorja K_1 in K_2 pa sta določena z uklonom na posameznih odprtinah. Interferenčna slika je vsebovana v podobnem členu kot pri Michelsonovem interferometru (enačba 2.3), le da nastopa v tem primeru namesto avtokorelacijske funkcije navzkrižna korelacijska funkcija polj E_1 in E_2 iz obeh.

Kako je interferenčni člen povezan z lastnostmi svetila, brez težav doženemo v izbranem primeru skoraj enobarvne svetlobe z osrednjo krožno frekvenco ω. Tedaj lahko za zakasnitve τ, ki so krajše od koherenčnega časa, zapišemo

$$E_2(\tau) = E_2(0)\,e^{-i\omega\tau} \tag{2.26}$$

in

$$\langle E_1(t)E_2^*(t+\tau)\rangle = \langle E_1(t)E_2^*(t)\rangle e^{i\omega\tau} = J(P_1,P_2)\,e^{i\omega\tau}. \tag{2.27}$$

Faktor $\Re e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) = \cos(kd\sin\vartheta)$ da interferenčne proge za koherentno osvetlitev zaslona, povprečje produkta polj v odprtinah ob istem času $J(P_1,P_2) = \langle E(P_1,t)E^*(P_2,t)\rangle$ pa meri stopnjo prečne koherence med obema odprtinama. Od velikosti tega člena je odvisen kontrast interferenčnih prog. Izračunajmo ga.

Polje v posamezni odprtini je vsota prispevkov iz celega izvora.

$$E(P_j) = -\frac{i}{\lambda}\int E(\xi,\eta)\frac{e^{iks_j}}{s_j}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.28}$$

Pri tem je s_j razdalja med točko na izvoru s koordinato (ξ,η) in točko $P_j(x_j,y_j)$ v odprtini na ravnini A (glej sliko 2.5). Faktor pred integralom $-i/\lambda$ izhaja iz uklonske teorije (enačba 1.49). Tako je

$$J(P_1,P_2) = \frac{1}{\lambda^2}\int\int\langle E(\xi,\eta)E^*(\xi',\eta')\rangle\frac{e^{ik(s_1-s_2')}}{s_1s_2'}\,d\xi\,d\eta\,d\xi'd\eta'. \tag{2.29}$$

V izbranem svetilu sevajo atomi neodvisno. Valovanji iz dveh točk svetila, ki sta razmaknjeni za več kot λ, sta neodvisni in povprečje njunega produkta je enako nič. Tako približno velja

$$\langle E(\xi,\eta)E^*(\xi',\eta')\rangle = \frac{\lambda^2}{\pi}\cdot\delta(\xi-\xi',\eta-\eta')\langle|E(\xi,\eta)|^2\rangle. \tag{2.30}$$

Faktor λ^2/π poskrbi za ustrezno normalizacijo. Naj bo oddaljenost svetila od zaslona A veliko večja od dimenzije svetila ($z \gg R$), tako da lahko imenovalec pod integralom v izrazu (2.29) nadomestimo z z^2 in postavimo pred integral. Sledi

$$J(P_1,P_2) = \frac{1}{\pi z^2}\int\langle|E(\xi,\eta)|^2\rangle e^{ik(s_1-s_2)}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.31}$$

Izraz lahko še nekoliko poenostavimo, če razvijemo s_1 in s_2

$$s_j = \sqrt{z^2 + (x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2} \approx z + \frac{(x_j - \xi)^2 + (y_j - \eta)^2}{2z}. \tag{2.32}$$

Pri tem sta (x_j, y_j) koordinati točke P_j. Pišimo še $\langle |E(\xi,\eta)|^2 \rangle = I(\xi,\eta)$ ter $x_2 - x_1 = \Delta x$ in $y_2 - y_1 = \Delta y$. S tem dobimo tako imenovani van Cittert-Zernikov izrek[6]

$$J(\Delta x, \Delta y) = \frac{e^{-i\phi}}{\pi z^2} \int I(\xi,\eta) e^{ik(\Delta x \xi + \Delta y \eta)/z} \, d\xi \, d\eta. \tag{2.33}$$

Faza

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda z}[(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)] \tag{2.34}$$

meri skupni premik interferenčnih prog, do katerega pride, kadar svetilo ne leži na isti osi kot odprtini v zaslonu. Kadar ležita odprtini v ravnini A simetrično glede na os svetila, je faza ϕ enaka nič.

Dobljeni rezultat si je vredno nekoliko ogledati. Prečno prostorsko korelacijsko funkcijo $J(P_1, P_2)$, ki določa kontrast interferenčnih prog, smo izrazili kot 2-D Fourierevo transformiranko intenzitete svetlobe na samem svetilu (enačba 2.33).

★ Ob tem se spomnimo, da velja podobna zveza med električno poljsko jakostjo v osvetljeni odprtini in njeno Fraunhoferjevo uklonsko sliko (enačba 1.55), pri čemer so količine, ki nastopajo v obeh zvezah, povsem različne. Različna je tudi veljavnost obeh izrazov: medtem ko je Fraunhoferjeva uklonska formula veljavna le v veliki oddaljenosti, za opis uklonske slike v bližnjem polju pa je treba uporabiti Fresnelov izraz (enačba 1.54), je rezultat za $J(P_1, P_2)$ (enačba 2.33) veljaven v obeh območjih.

Pri velikih razdaljah med točkama P_1 in P_2 vrednost $J(P_1, P_2)$ gotovo pade na nič. Največja razdalja, do katere je $J(P_1, P_2)$ še različna od nič, je ravno prečna koherenčna razdalja d_c, ustrezna ploskev pa je koherenčna ploskev S_c. Iz izraza za koherenčno razdaljo (enačba 2.24) jo lahko ocenimo

$$S_c \sim \frac{(\lambda z)^2}{S_0} \sim \frac{\lambda^2}{\Omega_0}, \tag{2.35}$$

kjer je S_0 površina svetila, Ω_0 pa prostorski kot, pod katerim je videti svetilo v ravnini A.

Oglejmo si primer. Naj bo svetilo v obliki kroga s polmerom R, obe odprtini v zaslonu naj imata koordinati y enaki nič, razmik med njima v smeri x pa naj bo d. Prečno korelacijsko funkcijo izračunamo iz enačbe (2.33) in dobimo (glej nalogo 2.5.1)

$$J(0, \Delta y) = 2\frac{R^2 I_0}{z^2} \frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z}, \tag{2.36}$$

kjer je $J_1(x)$ Besslova funkcija. V ničlah prve Besslove funkcije pade prečna korelacijska funkcija J na nič in interferenčnega vzorca ne vidimo. Za prečno koherenčno razdaljo je zato smiselno vzeti ravno prvo ničlo Besslove funkcije J_1, to je pri

$$d_c \approx 3{,}83\frac{z}{kR} = 0{,}61\frac{\lambda z}{R}. \tag{2.37}$$

[6] Nizozemski fizik Pieter Hendrik van Cittert, 1889–1959, in nizozemski fizik in nobelovec Frits Zernike, 1888–1966.

Naloga 2.5.1 Pokaži, da prečno korelacijsko funkcijo za okroglo svetilo s polmerom R, pri čemer odprtini na zaslonu ležita simetrično na osi y v razmiku d, zapišemo z enačbo (2.36).

Doslej smo obravnavali le valovanje v središču interferenčne slike na zaslonu B, to je pri tako majhnih kotih ϑ, da je zakasnitev manjša od koherenčnega časa. Pri večjih kotih moramo upoštevati še vpliv končnega koherenčnega časa, zaradi česar se kontrast interferenčnih prog še dodatno zmanjšuje. Interferenčna slika je tako produkt časovnega in prostorskega dela.

Poglejmo še primer dveh zelo tankih vzporednih rež. Za nekaj različnih razmikov med režama d je intenziteta svetlobe na zaslonu prikazana na sliki (2.6). Če je $d \ll \lambda z/R$ (slika a), je modulacija interferenčnih prog v sredini popolna in se zaradi končnega koherenčnega časa zmanjšuje le pri večjih kotih ϑ. Pri nekaj večjem razmiku (slika b) tudi v sredini kontrast ni več popoln. Obenem se interferenčne proge zgostijo. Kadar je $d \approx 3,83\, z/kR$, dosežemo prvo ničlo Besslove funkcije $J_1(x)$ in interferenčni vzorec prvič izgine (slika c). Takrat je razdalja med režama ravno enaka prečni koherenčni razdalji valovanja. Pri še večjih razmikih (slika d) je Besslova funkcija negativna in ponovno se pojavijo interferenčne proge, vendar so slabše izražene in z nasprotno fazo, kar da v sredini temno progo.

Slika 2.6: Interferenčna slika na zaslonu za različne vrednosti razmikov med režama: a) $d = z/kR$, b) $d = 2z/kR$, c) $d = 3,832\, z/kR$ in d) $d = 5,136\, z/kR$. Z večanjem razdalje med režama se proge zgostijo in kontrast se zmanjša. Koherenčni čas svetlobe je $t_c = 10/\omega$, kar še dodatno zmanjšuje modulacijo interferenčnih prog. Pri $d = 3,832\, z/kR$ je prva ničla Besslove funkcije in interferenčni vzorec popolnoma izgine. Pri večjih d se interferenčne proge zopet pojavijo, vendar z manjšim kontrastom in nasprotno fazo.

Merjenje prečne koherenčne razdalje svetlobe iz zvezd je osnova za Michelsonovo metodo določanja zvezdnih premerov. Svetlobo iz izbrane zvezde zberejo v teleskop preko dveh manjših parov zrcal, kjer sta zunanji zrcali na pomičnih rokah, tako da ju je mogoče razmikati. Glavno zrcalo teleskopa zbere svetlobna snopa v goriščni ravnini, kjer nastanejo interferenčne proge, če le pomični zrcali nista preveč razmaknjeni. Iz razmika, pri katerem interferenčne proge izginejo, je mogoče določiti premere bližnjih svetlih zvezd. Za zvezdo s polmerom 10^6 km v razdalji 5 svetlobnih let je prečna koherenčna razdalja za zeleno svetlobo okoli 15 m, kar je z Michelsonovim zvezdnim interferometrom mogoče izmeriti. Pri zvezdah, ki so dlje od nekaj deset svetlobnih let, metoda odpove.

3. Koherentni snopi svetlobe

V tem poglavju bomo zapisali obosni približek valovne enačbe in spoznali njegovo osnovno rešitev, to je Gaussov snop. Obravnavali bomo tudi snope višjega reda in se naučili računati prehode Gaussovih snopov skozi optične elemente.

3.1 Omejen snop svetlobe

Pri obravnavi elektromagnetnega valovanja pogosto uporabljamo približek ravnih valov. Ti so v smeri pravokotno na smer širjenja neomejeni in so zato lahko le idealizacija. Čim raven val usmerimo skozi odprtino v zaslonu, nastane omejen snop svetlobe. V snopu svetlobe valovna čela niso ravna in meje snopa niso vzporedne, ampak se snop zaradi uklona širi (slika 3.1).

Slika 3.1: Omejen snop nastane ob prehodu ravnega vala skozi končno odprtino.

V veliki oddaljenosti od zaslona polje izračunamo s Fraunhoferjevo uklonsko teorijo (glej poglavje 1.7). Vendar za oceno kota širjenja računa niti ne potrebujemo. Velja približno

$$\vartheta \sim \frac{\lambda}{a}, \tag{3.1}$$

kjer je a polmer odprtine v zaslonu. Opis polja v bližini zaslona je zahtevnejši, saj je treba uporabiti Fresnelov približek (enačba 1.54). Območje bližnjega polja seže do b, ki ga ocenimo s slike (3.1)

$$\frac{a}{b} \sim \vartheta \sim \frac{\lambda}{a} \qquad \text{in tako} \qquad b \sim \frac{a^2}{\lambda}. \tag{3.2}$$

Bolj kvantitativen opis omejenih snopov bi dobili s Fraunhoferjevo in Fresnelovo uklonsko teorijo, kar pa ni najudobnejša pot (glej nalogo 3.1.1). Lotimo se problema raje z uporabo obosnega približka valovne enačbe.

Naloga 3.1.1 Pokaži, da je Fraunhoferjeva uklonska slika na odprtini, katere prepustnost se v radialni smeri spreminja kot Gaussova funkcija $T(\xi,\eta) = e^{-(\xi^2+\eta^2)/w_0^2}$, podana z Gaussovo funkcijo oblike $E(x,y,z) \propto e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)}$ in določi odvisnost $w(z)$. Izračunaj še uklonsko sliko v bližnjem polju po Fresnelovi uklonski teoriji.

3.2 Obosna valovna enačba

Obravnavo začnemo z valovno enačbo in monokromatskim valovanjem s krožno frekvenco ω. Ustrezna Helmholtzeva enačba je (enačba 1.21)

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \tag{3.3}$$

kjer je $k = n\omega/c_0$ valovno število in n lomni količnik sredstva, po katerem se valovanje širi. Zaradi enostavnosti obravnavamo le eno polarizacijo, tako da E pišemo kot skalar. Iščemo rešitev za omejen snop, ki se širi približno vzdolž osi z. Uporabimo nastavek

$$E = E_0 \psi(\mathbf{r}, z) e^{ikz}, \tag{3.4}$$

kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor v ravnini xy, prečni na smer širjenja svetlobe. Glavni del odvisnosti od koordinate z smo zapisali v faktorju e^{ikz}, tako da lahko privzamemo, da se ψ v smeri z le počasi spreminja. Vstavimo gornji nastavek v Helmholtzevo enačbo (enačba 3.3) in pri tem zanemarimo druge odvode ψ po z, saj je zaradi počasnega spreminjanja $\partial^2\psi/\partial z^2$ majhen v primerjavi s $k\partial\psi/\partial z$ in $k^2\psi$. Dobimo obosno ali paraksialno valovno enačbo za ψ

$$\boxed{\nabla_\perp^2 \psi = -2ik\frac{\partial \psi}{\partial z}.} \tag{3.5}$$

★ Opazimo, da je obosna valovna enačba enaka Schrödingerjevi enačbi za prost delec v dveh dimenzijah, v kateri ima koordinata z vlogo časa. Omejenemu snopu v kvantni mehaniki ustreza lokaliziran delec – valovni paket. Ta se s časom širi, kar v optiki ustreza pojavu uklona.

Preden se lotimo reševanja obosne valovne enačbe, jo primerjajmo s Helmholtzevo enačbo na primeru ravnega vala. Nastavek za ravni val zapišemo v obliki

$$\psi = e^{ik_1 x + ik_2 y} e^{-i\beta z}. \tag{3.6}$$

Da bo gornji nastavek rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5), mora veljati

$$\beta = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \tag{3.7}$$

Ko vstavimo nastavek za ψ v izraz za polje E (enačba 3.4), dobimo ravni val, za katerega velja

$$k_3 = k - \beta = k - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \tag{3.8}$$

Pri tem k_3 označuje vzdolžno in k_1 ter k_2 prečni komponenti valovnega vektorja, k pa je valovno število. Po drugi strani za ravni val, ki je rešitev Helmholtzeve enačbe (enačba 3.3), velja zveza

$$k_3 = \sqrt{k^2 - (k_1^2 + k_2^2)}. \tag{3.9}$$

Vidimo, da sledi enačba (3.8) iz enačbe (3.9) z razvojem za majhne vrednosti k_1 in k_2. To pove, da je približek obosne enačbe dober, kadar sta prečni komponenti valovnega vektorja majhni v primerjavi z vzdolžno. Takrat je majhen tudi kot širjenja snopa in člene, višje od kvadratnih, lahko zanemarimo. To pa je tudi območje veljavnosti Fresnelove uklonske teorije.

★ Časovno odvisnost poljubnega začetnega stanja v kvantni mehaniki navadno izračunamo tako, da v začetnem trenutku paket razvijemo po lastnih stanjih energije – ravnih valovih. Rešitev v poljubnem kasnejšem trenutku je potem dana v obliki Fourierevega integrala. Ta pot je zelo uporabna tudi v optiki in je osnova sklopa računskih metod, znanih pod imenom Fouriereva optika. V našem primeru z njo brez težav pridemo nazaj do Fresnelove uklonske formule.

3.3 Osnovni Gaussov snop

Naša naloga je poiskati rešitve obosne valovne enačbe, ki popišejo omejene snope. Iz kvantne mehanike vemo, da je najbolj lokaliziran in se najpočasneje širi valovni paket Gaussove oblike. Zato poskusimo najti rešitev obosne enačbe (enačba 3.5) z nastavkom

$$\psi(r,z) = e^{ikr^2/2q(z)}\, e^{-i\phi(z)}, \tag{3.10}$$

kjer funkcija $q(z)$ opisuje širjenje snopa v prečni smeri, $\phi(z)$ pa opisuje počasno spreminjanje faze snopa vzdolž osi z. Vstavimo nastavek (enačba 3.10) v obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Zaenkrat se omejimo le na radialno simetrične rešitve in v cilindričnih koordinatah zapišemo

$$\nabla_\perp^2 \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2}\right)\psi \tag{3.11}$$

in

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(-\frac{ikr^2}{2q^2} q(z)' - i\phi'\right)\psi. \tag{3.12}$$

Iz obosnega približka sledi

$$\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} = ik\left(\frac{ikr^2}{q^2} q(z)' + 2i\phi'\right). \tag{3.13}$$

Gornja zveza mora veljati pri vsakem r, zato sta koeficienta pri r^2 na obeh straneh enačbe enaka in člena brez odvisnosti od r prav tako. Sledi

$$q(z)' = 1 \qquad \text{in} \qquad \phi' = -\frac{i}{q}. \tag{3.14}$$

Z integracijo dobimo najprej

$$q = z - iz_0, \tag{3.15}$$

kjer smo z $-iz_0$ označili integracijsko konstanto. Integriramo še enačbo za fazo

$$\phi = \int_0^z -\frac{idz}{z - iz_0} = -i\ln(1 + i\frac{z}{z_0}). \tag{3.16}$$

Sledi

$$\psi = \exp\left(i\frac{kr^2}{2(z - iz_0)}\right)\exp\left(-\ln(1 + i\frac{z}{z_0})\right) \tag{3.17}$$

in

$$\psi = \frac{1}{1 + i\frac{z}{z_0}}\exp\left(-\frac{kr^2 z_0}{2(z_0^2 + z^2)} + \frac{ikr^2 z}{2(z_0^2 + z^2)}\right). \tag{3.18}$$

Najprej podrobneje poglejmo realni del eksponenta, ki opisuje prečno obliko snopa. Vpeljemo novo spremenljivko w in realni del prečne odvisnosti zapišemo z Gaussovo funkcijo $\exp(-r^2/w^2)$, ki da snopu tudi ime. Parameter w, ki označuje polmer snopa pri danem z, je podan z enačbo

$$w^2 = \frac{2(z_0^2 + z^2)}{kz_0} = \frac{2z_0}{k}\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right). \tag{3.19}$$

Vpeljemo $w_0 = 2z_0/k$ kot polmer snopa v izhodišču (pri $z = 0$) in zapišemo

$$w^2 = w_0^2\left(1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right). \tag{3.20}$$

Pri $z = 0$ je polmer snopa najmanjši in pravimo, da je tam grlo snopa. Parameter z_0 navadno izrazimo s polmerom snopa v grlu w_0

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \tag{3.21}$$

Parameter z_0 označuje oddaljenost od grla, pri kateri snop preide v asimptotično enakomerno širjenje in tako omejuje območje, znotraj katerega se snop ne razširi znatno. Imenujemo ga Rayleighova dolžina[1], območje približno konstantne širine snopa pa območje bližnjega polja ali Rayleighovo območje. Celotno Rayleighovo območje je zaradi simetričnosti dolgo $2z_0$. Vrednost z_0 označuje tudi oddaljenost od grla, pri kateri začne veljati Fraunhoferjev uklonski približek.

Slika 3.2: Gaussov snop s karakterističnimi parametri

Zapišimo še kot divergence snopa v velikih oddaljenostih od grla. Polovični kot širjenja je

$$\vartheta = \lim_{z\to\infty}\frac{dw}{dz} = \lim_{z\to\infty}\frac{d}{dz}\left(w_0\sqrt{1+z^2/z_0^2}\right) = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \tag{3.22}$$

in celotna divergenca snopa

$$\theta = 2\frac{w_0}{z_0} = \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.23}$$

Izraza za območje bližnjega polja (enačba 3.21) in divergenco (enačba 3.22) sta v skladu z ocenama, ki smo ju napravili na začetku poglavja (enačbi 3.1 in 3.2). Faktor π oziroma $1/\pi$ je značilen za Gaussov snop, ki ima od vseh možnih oblik najmanjšo divergenco.

★ Za določanje kakovosti dejanskega laserskega snopa se pogosto vpelje faktor M^2, ki opiše odstopanje oblike snopa od idealnega Gaussovega snopa

$$\theta = M^2\frac{2\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.24}$$

Dobri laserji dosegajo vrednost $M^2 \sim 1$, pri močnejših trdninskih ali polprevodniških laserjih je $M^2 \sim 30$ ali več. V grobem velja, da M^2 narašča z močjo laserja in oblika snopa močnih laserjev navadno znatno odstopa od oblike idealnega Gaussovega snopa.

[1] Angleški fizik in nobelovec John William Strutt, 3. baron Rayleighški; lord Rayleigh, 1842–1919.

Vrnimo se k imaginarnemu delu eksponenta v enačbi (3.18), ki ga z vpeljavo nove spremenljivke R poenostavimo v obliko $\exp(ikr^2/2R)$. Parameter R, ki ga zapišemo kot

$$R = z\left(1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right), \tag{3.25}$$

meri krivinski radij valovnih front pri oddaljenosti od grla z. To najlažje uvidimo, če zapis imaginarnega dela primerjamo z zapisom za krogelni val, razvit po majhnih odmikih r od osi z

$$\frac{1}{R}e^{ikR} = \frac{1}{R}e^{ik\sqrt{z^2+r^2}} \approx \frac{1}{R}e^{ikz+ikr^2/2z} \approx \frac{1}{R}e^{ikz+ikr^2/2R}. \tag{3.26}$$

Krivinski radij valovnih front Gaussovega snopa je v izhodišču neskončen, kar pomeni, da so tam valovne fronte ravne. Pri velikih oddaljenostih krivinski radij narašča linearno z oddaljenostjo in fronte so podobne delu krogelnega vala.

Naloga 3.3.1 Pokaži, da je največja ukrivljenost valovnih front snopa (in s tem najmanjši R) ravno pri $z = \pm z_0$. Izračunaj še ukrivljenost front v grlu in v veliki oddaljenosti od grla.

Na sliki (3.3) so prikazane valovne fronte ravnega vala, Gaussovega snopa (enačba 3.29) in krogelnega vala (enačba 3.26). V bližini grla je Gaussov snop podoben ravnemu valu, za velike oddaljenosti pa je snop podoben delu krogelnega vala, le da je, kot bomo videli, faza Gaussovega snopa zamaknjena za $\pi/2$ glede na krogelni val.

Slika 3.3: Ravni val, Gaussov snop in krogelni val. V bližini grla je Gaussov snop podoben ravnemu valu, pri velikih oddaljenostih od grla pa krogelnemu valu.

Ostal je še faktor pred eksponentom v izrazu (3.18)

$$\frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{z}{z_0})^2}}e^{-i\eta(z)} = \frac{w_0}{w}e^{-i\eta(z)}, \tag{3.27}$$

pri čemer je

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.28}$$

Ta faktor poskrbi za ohranitev energijskega toka ob širjenju žarka, saj opisuje zmanjševanje amplitude jakosti električnega polja z naraščajočo oddaljenostjo od izhodišča. Dodatna faza η, imenujemo jo Gouyeva faza[2], je posledica povečane fazne hitrosti valovanja, kadar je valovanje omejeno v prečni smeri. Podoben pojav bomo srečali tudi pri valovanju, ki je omejeno v valovode (poglavje 8). Za velike oddaljenosti od izhodišča je enaka $\eta(z \to \infty) = \pi/2$, kar je v skladu s faznim zamikom na sliki (3.3).

S tem končno zapišemo izraz za jakost električnega polja osnovnega Gaussovega snopa[3]

$$E(r,z,t) = E_0 \frac{w_0}{w} e^{ikz-i\omega t} e^{-r^2/w^2} e^{ikr^2/2R} e^{-i\eta}, \tag{3.29}$$

pri čemer so $w(z)$, $R(z)$ in $\eta(z)$ podani z enačbami (3.20), (3.25) in (3.28). Intenziteta svetlobe je

$$I(r,z) = E(r,z,t)E^*(r,z,t) = I_0 \frac{w_0^2}{w^2} e^{-2r^2/w^2}. \tag{3.30}$$

Slika 3.4: Upodobitev intenzitete svetlobe v Gaussovem snopu za $z > 0$

Naloga 3.3.2 Pokaži, da je celotna svetlobna moč v Gaussovem snopu enaka $P = c_0\varepsilon_0 I_0 \pi w_0^2/4$.

Povejmo še nekaj o parametru $q(z)$, ki smo ga uporabili pri izračunu Gaussovega snopa v nastavku (enačba 3.10). Spomnimo se, da parameter q narašča linearno z oddaljenostjo od grla

$$q(z) = z - iz_0. \tag{3.31}$$

Parameter q imenujemo kompleksni krivinski radij, njegov inverz pa kompleksna ukrivljenost

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} + i\frac{2}{kw^2}. \tag{3.32}$$

Naloga 3.3.3 Uporabi enačbi (3.21 in 3.25) in izpelji gornji izraz za kompleksno ukrivljenost.

Kompleksni krivinski radij je zelo uporaben pri obravnavi preslikav Gaussovih snopov z lečami.

[2] Francoski fizik Louis Georges Gouy, 1854–1926.
[3] Nemški matematik, fizik in astronom Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.

3.4 Snopi višjega reda

Osnovna rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5) je Gaussov snop (enačba 3.29), ki ga imenujemo tudi TEM_{00} snop[4]. Poleg te rešitve obstaja še veliko drugih rešitev, prav tako omejenih v prečni smeri. V kartezičnih koordinatah rešijo obosno valovno enačbo Hermite-Gaussovi snopi, imenovani tudi $\mathrm{TEM}_{n,m}$

$$\psi_{n,m}(x,y) = \frac{w_0}{w} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left(\frac{ik(x^2+y^2)}{2q} - i\eta_{n,m}\right), \tag{3.33}$$

kjer so H_n Hermitovi polinomi stopnje n ($H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$ ...). V to se lahko prepričamo, če izraz vstavimo v obosno valovno enačbo in upoštevamo zvezo med Hermitovimi polinomi

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \tag{3.34}$$

Osnovni Gaussov snop je očitno poseben primer gornje rešitve za $n = m = 0$. Polmer snopa $w(z)$ in kompleksni krivinski radij $q(z)$ sta za vse n in m enaka kot za osnovni snop in podana z enačbama (3.20) in (3.31). Razlika je v fazi, ki je odvisna tudi od n in m

$$\eta_{n,m}(z) = (n+m+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.35}$$

Na sliki (3.5) so intenzitetni profili Hermite-Gaussovih snopov višjih redov $|\psi_{n,m}(x,y,0)|^2$. Indeksa n in m določata število vozlov v prečnih smereh x in y, širina snopa pa narašča z n in m.

Slika 3.5: Prečni profil intenzitete Hermite-Gaussovih snopov v grlu za različne vrednosti (n,m)

Naloga 3.4.1 Pokaži, da za Hermite-Gaussove snope višjih redov efektivni polmer snopa narašča sorazmerno s korenom iz števila prečnih vozlov $w_{\mathrm{eff}} \propto w\sqrt{n+m}$.
Namig: pri zapisu prečne odvisnosti polja upoštevaj le vodilni člen Hermitovih polinomov in izračunaj, pri kateri oddaljenosti od središča snopa je amplituda polja ψ največja.

[4] TEM – *Transverse Electromagnetic Mode*, transverzalno elektromagnetno valovanje.

Hermite-Gaussovi snopi (enačba 3.33) tvorijo kompleten ortogonalen sistem funkcij koordinat x in y

$$\int \psi^*_{n,m}(x,y)\psi_{n',m'}(x,y)\,dxdy = \pi w_0^2\, 2^{n+m-1} n!\; m!\; \delta_{n,n'}\; \delta_{m,m'}. \tag{3.36}$$

Polje nekega valovanja, ki ga poznamo v ravnini $z = 0$, pri poljubnem z izračunamo z razvojem po Hermite-Gaussovih snopih. Pri tem je izbira polmera grla w_0 poljubna, bo pa seveda vplivala na hitrost konvergence razvoja. Na tak način lahko obravnavamo uklon na odprtini, kjer je očitno smiselno vzeti w_0 približno enak dimenziji odprtine. Dobljeni rezultat je enako natančen kot Fresnelov uklonski integral.

Pri velikih z, kjer velja Fraunhoferjeva uklonska teorija, je polje Fouriereva transformiranka polja pri $z = 0$. Hermite-Gaussovi snopi ohranjajo prečno obliko, ki pa se z naraščajočim z širi. To je v skladu s tem, da je Fouriereva transformiranka Hermite-Gaussove funkcije $H_n(x)e^{-x^2/2}$ kar Hermite-Gaussova funkcija.

V cilindričnih koordinatah imajo snopi višjega reda obliko Laguerre-Gaussovih snopov

$$\psi_{p,l}(r,\varphi,z) = \frac{w_0}{w}\left(\frac{\sqrt{2}r}{w}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) e^{\pm il\varphi} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q} - i\eta_{p,l}\right), \tag{3.37}$$

kjer so L_p^l pridruženi Laguerrovi polinomi ($L_0^l(x) = 1, L_1^l(x) = -x + l + 1, L_2^l(x) = x^2/2 - (l + 2)x + (l+2)(l+1)/2$ ...) in

$$\eta_{p,l}(z) = (2p + l + 1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.38}$$

Podobno kot v kartezičnem primeru red polinoma določa število prečnih ničel, določa p v cilindričnem primeru število vozelnih črt, kjer je gostota svetlobnega toka enaka nič. Na sliki (3.6) je prikazanih nekaj intenzitetnih profilov Laguerre-Gaussovih snopov višjih redov $|\psi_{p,l}(r,\varphi,0)|^2$. Ker nastopa odvisnost od kota le v fazi, so intenzitetni profili snopa radialno simetrični. Opazimo, da je pri vseh snopih z $l \neq 0$ v središču snopa minimum.

Slika 3.6: Prečni profil intenzitete Laguerre-Gaussovih snopov v grlu za različne vrednosti (p,l)

Navadno želimo, da iz laserja izhaja čim čistejši osnovni snop, vendar pogosto opazimo tudi snope višjega reda. Da dobimo le osnovni snop, je treba posebej paziti pri konstrukciji laserja.

★ Valovne fronte Laguerre-Gaussovih snopov imajo pri $l \neq 0$ obliko vijačnic. Poyntingov vektor pri njih ni vzporeden z osjo žarka, ampak ima komponento tudi v prečni smeri. Ta spreminja smer, zato pride do pojava vrtilne količine v smeri osi snopa in snop na snov deluje z navorom. Pravimo, da Laguerre-Gaussovi snopi nosijo t. i. tirno vrtilno količino. V kvantni mehaniki funkcija $\psi_{p,l}$ predstavlja foton s tirno vrtilno količino $L = \hbar l$, medtem ko leva in desna cirkularna polarizacija predstavljata spin fotona.

Slika 3.7: Valovna fronta Laguerre-Gaussovega snopa

3.5 *Besslov snop

Poglejmo še en primer omejenega snopa, to je Besslov snop[5]. Nastavek za rešitev valovne enačbe (enačba 1.13), pri čemer obravnavamo polje skalarno, naj bo

$$E = E_0 \psi(x,y) e^{i\beta z - i\omega t}. \tag{3.39}$$

Funkcija ψ mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla_\perp^2 \psi + k_\perp^2 \psi = 0 \tag{3.40}$$

pri $k_\perp^2 = k^2 - \beta^2$. V cilindričnih koordinatah ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) se enačba prepiše v

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k_\perp^2 \psi = 0. \tag{3.41}$$

Rešitve gornje enačbe so s faznim faktorjem pomnožene Besslove funkcije

$$\psi_m(r,\varphi) = J_m(k_\perp r) e^{im\varphi}, \tag{3.42}$$

kjer je J_m Besslova funkcija, m pa celo število. Za $m = 0$ je rešitev osnovi Besslov snop

$$E(r,z,t) = E_0 J_0(k_\perp r) e^{i\beta z - i\omega t}. \tag{3.43}$$

Valovne fronte osnovnega Besslovega snopa so ravne, njegova divergenca pa je enaka nič, zato Besslov snop na poljubni oddaljenosti od izhodišča ohranja svojo obliko. Vendar Besslov snop ni omejen v pravem smislu. Za velike oddaljenosti od osi snopa r intenzitetni profil namreč pojema kot $I \propto J_0^2(k_\perp r) \sim (2/\pi k_\perp r)\cos^2(k_\perp r - \pi/4)$. Energija takega snopa ni omejena znotraj efektivnega radija, kot je to pri Gaussovih snopih. Za konstrukcijo Besslovih snopov bi (tako kot za konstrukcijo ravnega vala) potrebovali neskončno energije, kar je seveda nemogoče. Lahko pa ustvarimo dobre približke Besslovih snopov, ki imajo pomembne in uporabne lastnosti.

[5] Nemški astronom, matematik in fizik Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846.

Slika 3.8: Prečni presek in profil intenzitete Besslovega snopa

Z uporabo stožčaste leče (aksikona) Gaussov snop preoblikujemo v približek Besslovega snopa (slika 3.9). Na plašču stožčaste leče se namreč Gaussov snop zlomi in valovni vektorji nastalega snopa opisujejo stožec, kar je sicer lastnost Besslovih snopov. Dobljeni snop je na območju z dolžino z_{max} dober približek Besslovega snopa. Znotraj tega območja je divergenca snopa praktično enaka nič. Poleg manjše divergence imajo ti snopi še lastnost regeneracije. To pomeni, da se snop v senčni strani za objektom, ki ga osvetljuje (na primer v optični pinceti), regenerira. Profil snopa na senčni strani (daleč stran od objekta) je tako enak profilu snopa pred objektom.

Slika 3.9: Nastanek približka Besslovega snopa na stožčasti leči

3.6 Transformacije snopov z lečami

Vrnimo se k osnovnim Gaussovim snopom in poglejmo, kaj se zgodi z njimi pri prehodu skozi optične elemente. Začnemo z enostavno tanko lečo z goriščno razdaljo f. V geometrijski optiki je krivinski radij krogelnega vala, ki izhaja iz točke na osi, kar enak razdalji do točke. Leča točko na optični osi preslika v točko na osi, od tod pa sledi, da se krogelni val s krivinskim radijem R_1 po prehodu skozi lečo spremeni v val s krivinskim radijem R_2. Pri tem velja zveza

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}. \tag{3.44}$$

Dogovorimo se, da je krivinski radij v točki z pozitiven, če je središče krožnice pri $z' \leq z$.

Kako pa je z Gaussovim snopom? Polmer snopa w se pri prehodu skozi tanko lečo ne spremeni, zato velja po enačbah (3.32) in (3.44) za kompleksni krivinski radij tik pred lečo in tik za njo

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f}. \tag{3.45}$$

Kompleksni krivinski radij q je po enačbi (3.31) linearna funkcija koordinate z in za opis Gaussovega snopa zadošča, da v neki točki z poznamo q. Iz realnega dela parametra q določimo ukrivljenost front, iz imaginarnega pa polmer snopa. Enačba (3.45) torej zadošča za račun prehoda snopa skozi poljuben sistem leč brez aberacij, če le poznamo njegovo goriščno razdaljo.

Kot primer poglejmo, kako z zbiralno lečo zberemo Gaussov snop.

Slika 3.10: Prehod Gaussovega snopa skozi tanko lečo. Grlo velikosti w_{01} v oddaljenosti x_1 od gorišča leče F se preslika v grlo velikosti w_{02} v oddaljenosti x_2 od gorišča leče F.

Vpadni snop naj ima grlo s polmerom w_{01} in parametrom $z_{01} = \pi w_{01}^2/\lambda$. Lega grla je v točki, ki je za x_1 oddaljena od levega gorišča leče F (slika 3.10). Naj bosta

$$q_1^F = x_1 - iz_{01} \qquad \text{in} \qquad q_2^F = -x_2 - iz_{02} \tag{3.46}$$

kompleksna krivinska radija v levem in desnem gorišču, pri čemer je koordinatna os z usmerjena v desno, gledamo pa referenčno glede na lego grla vsakega posameznega snopa. Za vrednosti q tik pred lečo in tik za njo velja tudi

$$q_1 = q_1^F + f \qquad \text{in} \qquad q_2 = q_2^F - f. \tag{3.47}$$

Od tod z uporabo enačbe (3.45) izpeljemo zvezo za q v goriščih v kompaktni obliki

$$\boxed{q_1^F q_2^F = -f^2.} \tag{3.48}$$

Uporabimo enačbi (3.46) in zapišemo posebej realni in imaginarni del

$$x_1 x_2 = f^2 - z_{01} z_{02} \qquad \text{in} \qquad \frac{x_1}{z_{01}} = \frac{x_2}{z_{02}}. \tag{3.49}$$

Dobimo enačbi za preslikavo Gaussovega snopa z lečo z goriščno razdaljo f. Prva enačba določa lego grla preslikanega snopa na desni strani leče

$$\boxed{x_2 = \frac{x_1 f^2}{x_1^2 + z_{01}^2}.} \tag{3.50}$$

Druga enačba določa povečavo

$$\boxed{\frac{w_{02}}{w_{01}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}.} \tag{3.51}$$

Enačba (3.50) se ujema z izrazom za preslikavo točke v geometrijski optiki le, kadar je $z_{01} \ll x_1$. Kadar je $z_{01} \gg f$, je val na leči skoraj raven in $x_2 \to 0$, kar pomeni, da leži grlo na desni strani v gorišču. V praksi za Gaussove snope, ki izhajajo iz laserjev, pogosto ne velja ne prva ne druga limita, zato je treba uporabiti zapisani izraz (enačba 3.50). Tudi velikost polmera grla na desni, podana z enačbo (3.51), je precej drugačna kot v geometrijski optiki.

Za primer vzemimo snop iz He-Ne laserja z valovno dolžino 633 nm. Grlo snopa naj leži na izhodu iz laserja, njegov polmer naj bo $w_{01} = 0,5$ mm. Za tak snop je $z_{01} = 124$ cm. Na oddaljenost 50 cm od grla postavimo lečo z goriščno razdaljo $f = 25$ cm. Po enačbi (3.50) leži grlo za lečo v oddaljenosti 1 cm od gorišča in torej 26 cm za lečo, po enačbi (3.51) pa izračunamo polmer $w_{02} = 100$ µm. Enačbe geometrijske optike bi dale popolnoma napačen položaj grla 50 cm za lečo, polmer grla pa 0,5 mm. Po drugi strani bi približek, da je vpadni snop kar raven, dal grlo na desni v gorišču s približno pravim polmerom. Zakaj da približek ravnih valov bolj pravilen rezultat, hitro uvidimo, če pogledamo Rayleighovo dolžino snopa z_{01}: snop vpada na lečo še v območju bližnjega polja ($x_1 + f < z_{01}$), znotraj katerega ima približno obliko ravnih valov.

Če postavimo gorišče leče v grlo snopa ($x_1 = 0$), je grlo na desni strani tudi v gorišču ($x_2 = 0$). Razmerje polmerov grl na eni in drugi strani leče izračunamo

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{x_2}{x_1} = \frac{f^2}{z_{01}^2} \qquad \text{in} \qquad \frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f}{z_{01}}. \tag{3.52}$$

Velikost grla na desni strani je tako

$$w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01}}. \tag{3.53}$$

Če želimo doseči kar se da majhno grlo po prehodu skozi lečo, mora biti polmer vpadnega snopa kar se da velik. Vpadni snop je tako smiselno razširiti, vendar polmer snopa ne more biti večji od polmera leče a. Najmanjša velikost grla, ki jo še lahko dosežemo z zbiralno lečo, je tako

$$\boxed{w_{02\,\mathrm{min}} = \frac{\lambda f}{\pi a} \sim \lambda.} \tag{3.54}$$

Dobri mikroskopski in fotografski objektivi dosegajo $f/a \simeq 1$, zato je mogoče z njimi Gaussov snop zbrati v piko velikosti $\sim \lambda$.

Omenili smo, da je treba za dosego majhnega polmera grla za lečo snop pred lečo čim bolj razširiti. Razširitev vpadnega snopa naredimo s teleskopom (slika 3.11), katerega značilnost je, da je razmik med lečama enak vsoti goriščnih razdalj leč in zato gorišči sovpadata. Povečava teleskopa je pri taki postavitvi enaka razmerju med goriščnima razdaljama leč (glej nalogo 3.6.1).

Slika 3.11: Prehod Gaussovega snopa skozi teleskop iz leč z goriščnima razdaljama f_1 in f_2. Pri teleskopu gorišči leč sovpadata.

Naloga 3.6.1 Dve leči z goriščnima razdaljama f_1 in f_2 naj bosta na medsebojni razdalji $d = f_1 + f_2$. Pokaži, da je povečava takega teleskopa enaka

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f_2}{f_1}. \tag{3.55}$$

3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki

Preden se lotimo splošnejšega zapisa preslikav Gaussovega snopa, se spomnimo, kako obravnavamo preslikave v geometrijski optiki. Slika nastane kot presečišče žarkov, ki izhajajo iz točke predmeta pred optičnim sistemom. Žarek je pravokoten na valovne ploskve, pri čemer moramo vzeti še limito zelo majhne valovne dolžine. Ukrivljenost valovne fronte je neposredno povezana s spreminjanjem naklona žarkov, pri čemer bomo privzeli, da so nakloni žarkov glede na os majhni.

Žarek v izbrani ravnini z opišemo z dvema parametroma: oddaljenostjo y od osi in naklonom ϑ glede na os sistema. Ti dve količini sta med seboj neodvisni in ju sestavimo v vektor

$$\begin{bmatrix} y \\ \vartheta \end{bmatrix}. \tag{3.56}$$

Preslikavo žarka zapišemo kot matriko, ki deluje na vpadni vektor in ga preslika v izhodni vektor (slika 3.12)

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.57}$$

Slika 3.12: Preslikave žarkov lahko obravnavamo z matrikami. Optični element, ki ga predstavlja matrika M, preslika žarek (y_1, ϑ_1) v (y_2, ϑ_2).

Matrike M so na splošno oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{3.58}$$

zato jih imenujemo matrike ABCD. Poglejmo nekaj primerov.

Pri premiku za d vzdolž osi se zaradi končnega naklona spremeni odmik od osi, naklon pa ostane enak

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + d\vartheta_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

To zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

Matrika za premik d vzdolž osi z je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

Poglejmo še matriko za prehod skozi lečo. Pri prehodu skozi tanko lečo se spremeni nagib žarka. Če je žarek pred lečo vzporeden z osjo, gre za lečo skozi gorišče, zato

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -\frac{y_1}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Pri tem koeficientov B in D še ne poznamo. Določimo jih iz drugega pogoja, ki pravi, da se žarek, ki gre skozi lečo na osi, ne spremeni

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.63}$$

Sledi $B = 0$ in $D = 1$. Matrika za prehod skozi lečo je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.64}$$

Podobno izpeljavo kot za prehod skozi lečo naredimo za odboj na sferičnem zrcalu s krivinskim radijem R. Pripadajoča matrika je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.65}$$

pri čemer je $R > 0$ za konkavna zrcala. Matrika za odboj na ravnem zrcalu je identiteta.

Matriko sestavljene optične naprave zapišemo kot produkt matrik posameznih komponent. Pri tem moramo paziti na vrstni red množenja, saj množenje matrik ni komutativno. Matriko preslikave z dvema optičnima elementoma, pri čemer žarek najprej preide element z indeksom 1 in nato element z indeksom 2, zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2A_1 + B_2C_1 & A_2B_1 + B_2D_1 \\ C_2A_1 + D_2C_1 & C_2B_1 + D_2D_1 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

V sistemu z več elementi zapišemo produkt matrik za vse elemente, vendar ne smemo pozabiti na premike med posameznimi elementi.

Poglejmo primer. Žarek naj najprej prepotuje razdaljo d, nato pa ga usmerimo na tanko lečo z goriščno razdaljo f. Matrika za celoten prehod je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix}. \tag{3.67}$$

★ Opisani matrični formalizem je zelo prikladen predvsem za računanje prehoda svetlobe skozi zapletene optične sisteme, saj ga je prav lahko izvesti z računalnikom. Poleg tega je enolično povezan z matričnim formalizmom za izračun kompleksne ukrivljenosti Gaussovih snopov, zato omogoča preprost prenos rezultatov geometrijske optike v optiko Gaussovih snopov.

3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija

Poskusimo zapisati podoben formalizem še za kompleksne krivinske radije. Za opis Gaussovega snopa zadošča, da v izbrani ravnini z poznamo kompleksni krivinski radij q. Vemo, da je q linearna funkcija premika po z (enačba 3.31), in vemo, kako se q spremeni pri prehodu skozi tanko lečo (enačba 3.45).

Pri premiku iz ravnine z_1 v ravnino z_2, ki je od prve oddaljena za d, se q spremeni

$$q_2 = q_1 + d. \tag{3.68}$$

Po enačbi (3.45) je pri prehodu skozi lečo

$$q_2 = \frac{q_1 f}{f - q_1} = \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1}. \tag{3.69}$$

Premik in leča dasta skupaj

$$q_2 = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1 + d}{f} + 1} = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1}{f} - \frac{d}{f} + 1}. \tag{3.70}$$

V vseh treh primerih smo transformacijo kompleksnega krivinskega radija q zapisali v obliki ulomljene linearne oziroma Möbiusove preslikave

$$\boxed{q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}.} \tag{3.71}$$

Ko koeficiente preslikave razvrstimo v matriko

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

in iz gornjih enačb razberemo koeficiente matrik za opisane preslikave, vidimo, da so povsem enaki koeficientom matrik ABCD, ki jih poznamo iz geometrijske optike (3.61, 3.64 in 3.67). Matrike, ki jih poznamo iz geometrijske optike, lahko torej uporabimo tudi za izračun preslikave snopov, vendar v tem primeru elemente matrike razvrstimo v ulomljeno linearno preslikavo.

Omenimo še eno lastnost matrik ABCD. Kadar po prehodu skozi optične elemente snop svetlobe preide v snov z enakim lomnim količnikom, kot je bil na začetku, je determinanta matrike ABCD enaka 1. V nasprotnem primeru je determinanta matrike enaka razmerju lomnih količnikov začetne in končne snovi.

$$\det(M) = AD - BC = \frac{n_1}{n_2}. \tag{3.73}$$

Opis prehoda	Skica	Matrika za prehod
Prehod skozi prostor za d		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Prehod skozi mejo dveh snovi		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod skozi konveksno ukrivljeno mejo $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1-n_2)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod skozi konveksno lečo $f > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Odboj na konkavnem zrcalu $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3.1: Matrike ABCD za nekaj osnovnih preslikav, ki veljajo tako v geometrijski optiki kot tudi za izračun preslikave kompleksnega krivinskega radija q Gaussovih snopov.

Naloga 3.8.1 Pokaži, da za naslednje prehode veljajo ustrezne matrike ABCD.

Prehod skozi prostor in lečo		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d}{f} \end{bmatrix}$
Prehod skozi lečo z debelino d in krivinskima radijema R_1 in R_2		$\begin{bmatrix} 1-\frac{d}{nf_1} & \frac{d}{n} \\ -\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1}-\frac{d}{nf_1f_2} & 1-\frac{d}{nf_2} \end{bmatrix}$ $f_i = \frac{R_i}{n-1}$
Prehod skozi zaporedje plasti		$\begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Optični resonatorji

Osnovni gradnik vsakega laserja je resonator. V njem je vzbujeno lastno elektromagnetno nihanje, ki skozi delno prepustno steno resonatorja kot valovanje izhaja iz sistema. V tem poglavju bomo spoznali optične resonatorje in kriterije za njihovo stabilno delovanje, izračunali lastne frekvence resonatorjev in povezali izgube v laserskem resonatorju s spektralno širino črt izsevane svetlobe.

4.1 Odprti resonatorji

Optični resonatorji so votline, v katerih je mogoče vzpostaviti stoječe svetlobno valovanje. Če vzbujamo v resonatorju valovanja z različnimi frekvencami, se pri nekaterih diskretnih frekvencah pojavi resonančno obnašanje. Te frekvence imenujemo lastne frekvence resonatorja. Zaradi dušenja imajo lastne frekvence končno frekvenčno oziroma spektralno širino, pri čemer je čas dušenja mnogo daljši od nihajne periode.

Optične resonatorje uporabljamo predvsem v dva namena:

1. V resonatorjih se ob razmeroma šibkem zunanjem vzbujanju pojavi velika jakost električnega polja pri resonančni frekvenci. Za vzdrževanje konstantne amplitude lastnega nihanja mora zunanji vir zgolj pokrivati izgube. Če so te majhne, je zunanji vir lahko šibek, polje v resonatorju pa vseeno veliko.

2. Resonatorji delujejo kot filtri, ki prepuščajo le polje s točno določeno frekvenco in izbrano prostorsko odvisnostjo. Primer take uporabe je Fabry-Perotov interferometer.

★ Poleg optičnih resonatorjev poznamo resonatorje tudi na drugih področjih, na primer akustične resonatorje pri glasbilih ali mikrovalovne in radijske resonatorje. V mikrovalovnem področju, kjer so valovne dolžine valovanja okoli 1 cm, so resonatorji zaprte kovinske votline z dimenzijami, ki so primerljive z valovno dolžino vzbujenega valovanja. Resonančne frekvence so v takem resonatorju med seboj dobro ločene in ni težko vzbuditi enega samega lastnega nihanja na izbranem frekvenčnem intervalu.

V optiki so resonatorji navadno veliko večji od valovne dolžine svetlobe. Vzemimo kocko s stranico $L \gg \lambda$, v kateri je vzbujeno zelo veliko število lastnih nihanj. Število lastnih nihanj N na frekvenčni interval $\Delta\nu$ zapišemo z zvezno gostoto stanj

$$N = 2\frac{1}{8}4\pi k^2 \Delta k \frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V \Delta\omega = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V \Delta\nu. \tag{4.1}$$

Do gornje enačbe smo prišli tako, da smo prešteli stoječa valovanja z velikostjo valovnega vektorja med k in $k+\Delta k$: volumen pripadajoče krogelne lupine v pozitivnem oktantu $\frac{1}{8}4\pi k^2 \Delta k$ smo delili z volumnom $(\pi/L)^3$, ki pripada enemu stanju. Upoštevali smo tudi, da ima vsako lastno nihanje lahko dve polarizaciji.

Poglejmo primer. Izberimo osrednjo frekvenco $\nu = 3 \cdot 10^{14}$ Hz, ki ustreza valovni dolžini 1 μm, in širino frekvenčnega intervala $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz, ki je značilna za Dopplerjevo razširjeno emisijsko črto v plinu. Potem je v votlini s stranico $L = 1$ cm in prostornino $V = 1$ cm^3 število lastnih nihanj na izbran frekvenčni interval po enačbi (4.1) enako $N = 2,5 \cdot 10^8$. Če bi bile vse stene votline idealna zrcala, bi bil čas dušenja vseh lastnih nihanj približno enako dolg in vedno bi vzbujali zelo veliko število resonanc hkrati. Tak resonator bi bil neuporaben.

Hkratnemu vzbujanju velikega števila lastnih nihanj se izognemo z zmanjšanjem odbojnosti stranskih sten votline, saj tako povečamo dušenje valov v prečni smeri. Dušenje valov, ki so pravokotni na idealno odbojni končni steni, ostane nespremenjeno. Nazadnje lahko stranske stene odstranimo, tako da stoječih valov v prečni smeri sploh ni več. Ostane le še nekaj valov, ki so pravokotni na končni steni. Resonatorju brez stranskih sten pravimo odprti resonator (slika 4.1).

Slika 4.1: Levo: lastni nihajni načini odprtega resonatorja imajo diskretne vrednosti velikosti valovnih vektorjev k_n. Desno: žarki, ki niso pravokotni na zrcali, iz odprtega resonatorja uidejo.

Obravnavajmo odprte resonatorje podrobneje. V zaprti pravokotni votlini velikosti $a \times a \times L$ z idealno odbojnimi stenami so vrednosti valovnega vektorja za lastna nihanja

$$\mathbf{k}_{l,m,n} = \left(\frac{l\pi}{a}, \frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{L}\right), \tag{4.2}$$

kjer so l, m in n cela števila, L dolžina in a prečna dimenzija resonatorja. Lastne krožne frekvence so

$$\omega_{l,m,n} = c|\mathbf{k}_{l,m,n}|. \tag{4.3}$$

Ker je dolžina resonatorja L velika v primerjavi z λ, je n zelo veliko število. Če prečnih sten ni, je $\mathbf{k}$ približno vzporeden z osjo z in števili l in m sta majhni. Tedaj lahko velikost valovnega vektorja razvijemo in krožno frekvenco zapišemo kot

$$\omega_{l,m,n} = c\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{l^2+m^2}{2n}\frac{L\pi}{a^2}\right). \tag{4.4}$$

Drugi člen v oklepaju je le majhen popravek, tako da so lastne frekvence odprtih optičnih resonatorjev odvisne predvsem od števila vozlov v vzdolžni smeri. To število je navadno veliko, med 10^5 in 10^7. Možna so tudi lastna nihanja z nekaj vozli v prečni smeri, ki pa navadno le malo vplivajo na lastne frekvence. V nadaljevanju bomo obravnavali predvsem lastna nihanja brez vozlov v prečni smeri in jih označili z enim samim indeksom n.

Razlika med frekvencama dveh zaporednih lastnih nihanj n in $n+1$ je

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \qquad \text{oziroma} \qquad \Delta\nu_n = \frac{c}{2L}. \tag{4.5}$$

Pri dolžini resonatorja $L = 30$ cm je v frekvenčnem intervalu $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz le še $\Delta\nu/\Delta\nu_n = 6$ lastnih nihanj, ki jih je brez težav mogoče razločiti.

V zaprtih votlinah z zrcalnimi stenami obstajajo dobro določena lastna nihanja pri poljubni obliki votline. To ne drži za odprte resonatorje. Da se pojavijo lastna nihanja z majhnimi izgubami, morata biti izpolnjena dva pogoja:

1. Snop žarkov mora po mnogih odbojih ostati ujet med zrcaloma resonatorja.
2. Polmer zrcala mora biti večji od polmera uklonsko razširjenega snopa, ki se širi od nasprotnega zrcala.

Resonatorje, ki zadoščajo gornjima pogojema, imenujemo stabilni resonatorji. Drugi pogoj lahko zapišemo tudi z enačbo, izhajajoč iz enačbe za oceno divergence (enačba 3.1):

$$a_1 > L\vartheta = L\frac{\lambda}{a_1} \qquad \text{oziroma} \qquad \frac{a_1 a_2}{\lambda L} > 1, \tag{4.6}$$

kjer sta a_1 in a_2 polmera zrcal. Izrazu $F = a_1 a_2/\lambda L$ pravimo Fresnelovo število (enačba 1.56) in resonator je stabilen pri $F > 1$. Laserji imajo pogosto $F \gg 1$, lahko tudi $F \sim 100$, zato je prvi kriterij navadno odločujoč pri ugotavljanju stabilnosti resonatorja.

Fabry-Perotov interferometer

Poglejmo resonator, omejen z dvema vzporednima ravnima zrcaloma z veliko odbojnostjo. Takemu sistemu pravimo Fabry-Perotov interferometer[1]. Da nastane med zrcaloma stoječe valovanje, mora biti razdalja med zrcaloma večkratnik polovične valovne dolžine (enačba 4.2)

$$L = \frac{n\lambda}{2}. \tag{4.7}$$

Prepustnost interferometra za ravni val, ki vpada pravokotno na zrcali z odbojnostjo $\mathscr{R}$, lahko izračunamo (glej nalogo 4.1.1). Prepustnost, to je razmerje med intenzitetama prepuščenega in vpadnega valovanja, je odvisna od frekvence vpadnega valovanja

$$T = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2 \omega L/c} \tag{4.8}$$

in je prikazana na sliki (4.2) za tri različne vrednosti $\mathscr{R}$.

Slika 4.2: Prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v odvisnosti od frekvence vpadnega valovanja ν pri različnih odbojnostih zrcal $\mathscr{R}$.

Ko je frekvenca vpadnega valovanja enaka lastni frekvenci resonatorja, je sistem v resonanci in $T = 1$. Pri drugih frekvencah je prepustnost znatno manjša, predvsem pri velikih $\mathscr{R}$, kjer pade praktično na nič. Z naraščajočo odbojnostjo zrcal $\mathscr{R}$ se zmanjšuje tudi širina resonančnega vrha.

[1] Francoska fizika Maurice Paul Auguste Charles Fabry, 1867–1945, in Jean-Baptiste Alfred Perot, 1863–1925.

Naloga 4.1.1 Pokaži, da je prepustnost Fabry-Perotovega interferometra, katerega zrcali imata odbojnost $\mathscr{R}$, enaka

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2\delta}, \tag{4.9}$$

kjer je $\delta = kL\cos\vartheta$, L razmik med zrcaloma, ϑ vpadni kot, k pa valovno število.

Prvemu pogoju za stabilnost ustrezajo v Fabry-Perotovem interferometru le žarki, ki so natanko pravokotni na zrcali. Čim sta zrcali le malo nevzporedni, stabilnih žarkov sploh ni več. Tak planparalelni interferometer torej deluje na meji stabilnosti. Z izpolnjevanjem drugega pogoja ni težav, saj morata biti pri na primer 30 cm dolgem resonatorju in valovni dolžini $0,5$ µm zrcali večji od $0,4$ mm, da zadostita pogoju, zapisanem v enačbi (4.6).

4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih

Spoznali smo planparalelni resonator, ki deluje na meji stabilnosti. Bolj stabilni resonatorji so sestavljeni iz dveh konkavno ukrivljenih zrcal. V njih ostajajo žarki, ki potujejo pod majhnim kotom glede na osrednjo os, ujeti med zrcaloma. Energija lastnih nihanj ostaja lokalizirana blizu osi in za obravnavo električnega polja lahko uporabimo obosno valovno enačbo (enačba 3.5).

Poleg tega vemo, da se stoječe valovanje pojavi, kadar svetloba po odboju od zrcala konstruktivno interferira sama s sabo. Od tod izhaja robni pogoj, ki pravi, da se oblika valovne fronte stoječega valovanja na zrcalu ujema z obliko zrcala, električno polje na površini zrcala pa je približno enako nič.

Slika 4.3: Gaussov snop v odprtem resonatorju s konkavno ukrivljenima zrcaloma s krivinskima radijema R_1 in R_2. V stabilnem resonatorju se krivinski radij snopa na zrcalu ujema s krivinskim radijem zrcal. Kadar $R_1 \neq R_2$, grlo snopa ne leži na sredini resonatorja.

V prečni smeri omejene rešitve obosne enačbe smo našli v obliki potujočih Gaussovih snopov (enačba 3.29). Podobno kot zapišemo stoječe valovanje z vsoto valovanj, ki se širita v nasprotnih smereh, lahko stoječe snope zapišemo s superpozicijo dveh snopov, ki se ob osi širita v različnih smereh. Da zadostimo robnim pogojem na zrcalih, se mora krivinski radij valovnih front snopa na zrcalih ujemati s krivinskima radijema zrcal R_1 in R_2 (slika 4.3). Pri tem sta prosta parametra polmer grla snopa w_0, ki je povezan s parametrom z_0, in lega grla.

Postavimo izhodišče osi z v grlo, kot smo navajeni, tako da sta zrcali pri $z_1 < 0$ in $z_2 > 0$. Uporabimo enačbo za krivinski radij snopa R (enačba 3.25) in zapišemo

$$-R_1 = z_1 \left[1 + \left(\frac{z_0}{z_1} \right)^2 \right] \quad \text{in} \tag{4.10}$$

$$R_2 = z_2 \left[1 + \left(\frac{z_0}{z_2} \right)^2 \right]. \tag{4.11}$$

Pri tem smo upoštevali, da je krivinski radij za konkavno zrcalo glede na pozitivno smer z pozitiven. Prvo enačbo smo zapisali z negativnim predznakom pri R_1, zato da je krivinski radij pozitivno število. Veljati mora še

$$z_2 - z_1 = L. \tag{4.12}$$

Iz gornjih enačb najprej izračunamo razdaljo z_1, ki določa lego grla v resonatorju. Rezultat uporabimo za izračun parametra z_0, ki določa območje bližnjega polja in preko enačbe (3.21) enolično tudi polmer snopa v grlu

$$z_0^2 = \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}. \tag{4.13}$$

Da je snop realen in omejen, mora biti $z_0^2 > 0$ in zato števec gornjega izraza pozitiven. Ta pogoj s kratkim računom preoblikujemo v stabilnostni kriterij

$$0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1. \tag{4.14}$$

Resonatorji, ki zadoščajo gornjemu pogoju, so stabilni.

Naloga 4.2.1 Izhajajoč iz pogoja, da se na zrcalih krivinski radij valovnih front snopa ujema s krivinskim radijem zrcal (enačbi 4.10 in 4.11), izpelji kriterij za stabilno delovanje resonatorja (enačba 4.14).

Stabilnostni kriterij za resonatorje je najbolj nazorno predstaviti na diagramu, kjer na os x nanašamo L/R_1, na os y pa L/R_2. Na sliki (4.4) je stabilno območje delovanja resonatorjev, kot ga razberemo iz enačbe (4.14), označeno senčeno. Za simetrične resonatorje velja $R_1 = R_2 = R$ in na diagramu se taki resonatorji nahajajo na simetrali lihih kvadrantov pri $x = y$.

Med njimi omenimo tri posebne vrste resonatorjev. Prvi je konfokalni resonator (a), pri katerem sovpadata gorišči obeh zrcal in zanj velja $L = R$. Drugi je koncentrični resonator (b), pri katerem sovpadata krivinski središči zrcal in $L = 2R$. Tretji je planparalelni ali Fabry-Perotov (c), ki ga že poznamo. Zadnja dva sta skrajna primera stabilnega simetričnega resonatorja. Resonatorji, ki so sestavljeni iz dveh konveksnih zrcal, niso nikoli stabilni, lahko pa so stabilni resonatorji iz enega konveksnega in enega konkavnega zrcala (d) ali resonatorji iz enega ravnega in enega konkavnega zrcala (e).

V simetričnih resonatorjih leži grlo Gaussovega snopa vedno na sredini resonatorja. Če je eno zrcalo ravno (plankonkavni resonatorji), leži grlo Gaussovega snopa vedno na ravnem zrcalu, saj so le tam valovne fronte ravne. V primeru konveksno-konkavnega resonatorja leži grlo snopa izven resonatorja.

Slika 4.4: Laserski resonator je stabilen, če sta parametra L/R_1 in L/R_2 znotraj obarvanega območja. (a) konfokalni resonator, (b) koncentrični resonator, (c) planparalelni (Fabry-Perot) resonator, (d) konveksno-konkavni resonator in (e) plankonkavni resonator.

V simetričnih resonatorjih je grlo v sredini resonatorja in enačba (4.13) se poenostavi v

$$z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(2R-L)L}. \tag{4.15}$$

Polmer grla v simetričnem resonatorju je enak

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\sqrt[4]{(2R-L)L}. \tag{4.16}$$

Naloga 4.2.2 Izračunaj polmer snopa na izhodnem zrcalu. Pokaži, da je polmer snopa na izhodnem zrcalu v simetričnem resonatorju najmanjši, kadar je resonator konfokalni.

Iz naloge (4.2.2) sledi, da je pri dani dolžini resonatorja polmer snopa na zrcalu najmanjši v konfokalnih resonatorjih. Hitro uvidimo, da takrat velja $z_0 = L/2$. Dolžina območja bližnjega polja je enaka dolžini resonatorja in snop se na razdalji od grla do zrcala razširi za $w_1/w_0 = \sqrt{2}$.

★ Izkaže se, da so konfokalni resonatorji najmanj občutljivi na majhne zasuke zrcal. Pri zasuku zrcala se v navadnih stabilnih resonatorjih namreč premakne os, ki gre skozi krivinski središči obeh zrcal. Če želimo, da je največji odmik nove osi kar se da majhen, uporabimo konfokalne resonatorje.

Pri dejanskem načrtovanju laserjev velja dodatna omejitev, saj želimo ojačevalno sredstvo, ki je v resonatorju, čim bolj izkoristiti. Pogosto je zato polmer grla snopa razmeroma velik. Iz enačbe (4.16) sledi, da mora biti v tem primeru velik tudi krivinski radij zrcal. S tem pridobimo na ojačenju, vendar nekoliko poslabšamo stabilnost resonatorja.

Poglejmo primer. Naj bo dolžina resonatorja laserja $L = 1$ m in valovna dolžina $\lambda = 633$ nm. Tedaj je v konfokalni geometriji po enačbi (4.16) polmer grla $w_0 = 0,32$ mm. Premer razelektritvene cevi, v kateri pride do ojačenja svetlobe, je navadno nekaj milimetrov in približno tako debel mora biti tudi svetlobni snop, da dobro izkoristi ojačenje v plinu. Da bi imelo pri isti dolžini laserja grlo premer 2 mm, bi morali uporabiti zrcali s krivinskim radijem okoli 50 m.

V koncentričnem resonatorju gre polmer grla (enačba 4.16) proti nič, v planparalelnem pa raste sorazmerno z $R^{1/4}$. Pri resonatorjih z ravnimi zrcali postanejo uklonske izgube na robovih znatne. Račun z Gaussovimi snopi tedaj ni več veljaven in treba je uporabiti pristope, ki jih bomo opisali v razdelku (4.6).

Poleg osnovnega Gaussovega snopa rešijo obosno enačbo tudi snopi višjega reda. Ti imajo enak parameter z_0 in enako ukrivljenost R, zato tudi taki snopi predstavljajo rešitve za polje v stabilnih resonatorjih. Vendar je pri enakem w_0 polmer snopa reda n za približno $\sqrt{n}$-krat večji od polmera osnovnega snopa (glej nalogo 3.4.1). Če želimo, da iz laserja izhaja samo osnovni Gaussov snop (ki ima najmanjšo divergenco pri danem w_0), pogosto uporabimo zaslonko, ki snope višjih redov poreže, ali kakšen drug element, npr. Fabry-Perotov etalon[2], ki poveča izgube za snope višjega reda.

★ Včasih se uporabljajo tudi nestabilni resonatorji, za katere ne obstajajo rešitve v obliki Gaussovih snopov. Taki resonatorji imajo velike izgube na robovih zrcal, ker žarki v njih niso ujeti. Uporabni so predvsem v laserjih z velikim ojačenjem. Njihova prednost je, da je cel volumen resonatorja enakomerno pokrit s svetlobo.

Do zdaj smo obravnavali dva primera laserskih resonatorjev: Fabry-Perotov resonator z dvema vzporednima ravnima zrcaloma (slika 4.5 a) in resonator z dvema sferičnima zrcaloma (b). Poleg teh dveh primerov je v uporabi še cela vrsta drugih resonatorjev. Ciklični resonator (c) je sestavljen iz več zrcal in žarek ciklično potuje med njimi. V vlakenskih laserjih je resonator optično vlakno med dvema zrcaloma ali pa sklenjeno vlakno. Kot laserski resonator lahko delujejo tudi mikroploščice (d) ali mikrokroglice (e), v katere je s totalnim odbojem ujeta svetloba. Namesto zrcal se v mikroresonatorjih uporablja periodične dielektrične strukture, na katerih pride do Braggovega odboja valovanja (f).

Slika 4.5: Nekaj primerov različnih oblik resonatorjev

[2]Razlika med Fabry-Perotovim interferometrom in etalonom je v tem, da je interferometer sestavljen iz premičnih zrcal, etalon pa je ploščica z nespremenljivo debelino. Pri izrazu za prepustnost etalona je treba upoštevati še lomni količnik ploščice.

4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom

V prejšnjem razdelku smo izpeljali pogoj za stabilnost resonatorja, sestavljenega iz dveh zrcal s krivinskima radijema R_1 in R_2, ki sta med seboj oddaljeni za L. Izhajali smo iz pogoja, da se ukrivljenost valovnih front na zrcalu ujema z ukrivljenostjo zrcal. Vendar so sistemi z zgolj dvema zrcaloma razmeroma redki. Pogosto so v resonatorju druge optične komponente, ki jih je treba upoštevati pri zapisu kriterija za stabilnost. Takrat si pomagamo z matrikami ABCD.

Izhajamo iz zahteve, da se v stabilnem resonatorju snop po celotnem obhodu preslika sam vase. Gaussov snop na neki točki v resonatorju zapišemo s kompleksno ukrivljenostjo q (enačba 3.32). V najpreprostejšem primeru resonatorja snop prepotuje razdaljo do zrcala, se na njem odbije, prepotuje resonator v nasprotni smeri, se odbije od drugega zrcala in vrne v izhodišče. V bolj zapletenih primerih je treba upoštevati še prehode skozi druge optične elemente. Matriko za celoten prehod zapišemo kot produkt matrik ABCD za posamezne prehode $M = M_N M_{N-1} ... M_2 M_1$. Končni produkt za celoten obhod je matrika oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

kompleksni krivinski radij po obhodu q_2 pa je enak začetnemu

$$q_2 = \frac{Aq+B}{Cq+D} = q. \tag{4.18}$$

Gornjo enačbo prepišemo v

$$Cq^2 + (D-A)q - B = 0. \tag{4.19}$$

Da je w realen, mora biti q kompleksen (enačba 3.32) in zato diskriminanta kvadratne enačbe negativna

$$(D-A)^2 + 4BC < 0. \tag{4.20}$$

Upoštevamo še, da je determinanta matrike $AD - BC = 1$ in pogoj za stabilnost zapišemo s koeficienti matrike M

$$\boxed{-1 < \left(\frac{A+D}{2}\right) < 1.} \tag{4.21}$$

Naloga 4.3.1 Pokaži, da je za resonator z dolžino L in s konkavnima zrcaloma s krivinskima radijema R_1 in R_2 pogoj za stabilnost (enačba 4.21) ekvivalenten pogoju (4.14).

★ Podoben, a malo bolj zapleten račun lahko naredimo tudi za resonatorje, v katerih se snop ne vrne v svojo začetno obliko po enem obhodu, ampak je teh obhodov n. V tem primeru zapišemo matriko M kot produkt elementov v enem obhodu, celotna matrika pa je enaka M^n. Iz pogoja, da matrika ne divergira za velike n, izpeljemo pogoj za stabilnost, ki je natančno enak pogoju (4.21).

4.4 Resonančne frekvence

Frekvence lastnih nihanj v resonatorju izpeljemo iz pogoja, da se krajevni del faze lastnega nihanja po enem obhodu[3] spremeni za mnogokratnik 2π. Krajevni del faze za osnovni snop zapišemo po enačbi (3.29)

$$\phi = kz + \frac{kr^2}{2R} - \eta(z) = kz - \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \tag{4.22}$$

pri čemer smo se omejili na valovanje na osi pri $r = 0$. Razlika faze po obhodu je

$$\frac{\omega_n}{c} 2L - 2\left(\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right) = 2n\pi. \tag{4.23}$$

Člen v oklepaju je enak za vsa nihanja in le za delček valovne dolžine spremeni efektivno dolžino resonatorja. Ker dolžine resonatorja niti ne poznamo tako natančno, lahko ta prispevek zanemarimo. Dobimo znano enačbo za resonančne frekvence

$$\boxed{\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \qquad \text{in} \qquad \nu_n = \frac{nc}{2L}.} \tag{4.24}$$

Konstantni členi, ki jih pri zapisu frekvence nismo upoštevali, na razmik med zaporednimi frekvencami ne vplivajo. Razmik med zaporednima lastnima frekvencama je tako v skladu z enačbo (4.5)

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \qquad \text{in} \qquad \Delta\nu_n = \frac{c}{2L}. \tag{4.25}$$

Za snope višjega reda, ki imajo vozle v prečni smeri, je faza odvisna tudi od števila vozlov. Tako je na primer v cilindričnih koordinatah (enačba 3.38)

$$\eta_{p,l}(z) = (2p + l + 1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{4.26}$$

Resonančni pogoj zapišemo kot

$$\frac{\omega_{n,p,l}}{c} 2L - 2(2p + l + 1)\left(\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right) = 2n\pi. \tag{4.27}$$

Resonančne frekvence snopov višjega reda se razlikujejo od frekvence osnovnega Gaussovega snopa in so odvisne od števila prečnih vozlov (slika 4.6). Razlika v lastnih frekvencah je dodaten razlog, da v laserjih, če se le da, vzbujamo le osnovno lastno nihanje.

Slika 4.6: Resonančne frekvence za osnovni Gaussov snop in snope višjih redov

[3] Prelet resonatorja je prehod svetlobe od enega zrcala do drugega, obhod pa imenujemo prelet v obe smeri.

Prvi primer naj bo zanimiv in praktično pomemben konfokalni resonator, pri katerem je $z_0 = L/2$ in $\arctan(L/2z_0) = \arctan(1) = \pi/4$. Resonančne frekvence so

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L}\left(n + \frac{1}{2}(2p+l+1)\right) \qquad \text{in} \qquad \nu_{n,p,l} = \frac{c}{2L}\left(n + \frac{1}{2}(2p+l+1)\right). \tag{4.28}$$

Snopi, pri katerih je $2p+l$ liho število, imajo enake resonančne frekvence kot osnovni snopi, pri sodih $2p+l$ pa se pojavijo še resonance na sredini med frekvencami osnovnega snopa. Razmik med sosednjimi frekvencami je tako $\Delta\nu = c/4L$ in konfokalni resonator se obnaša kot dvakrat daljši planparalelni. To lahko razumemo tudi iz geometrijske slike: žarek, ki vstopi v konfokalni resonator ali interferometer vzporedno z osjo, se šele po dveh obhodih vrne sam vase.

Slika 4.7: V konfokalnem resonatorju se žarek šele po dveh obhodih vrne sam vase.

Drugi primer naj bo skoraj planparalelni simetrični resonator, za katerega velja $z_0 \gg L$. Takrat lahko $\arctan(L/2z_0)$ razvijemo, upoštevamo enačbo (4.15) in zapišemo

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L}\left(n + (2p+l+1)\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2L}{R}}\right). \tag{4.29}$$

Ker je L majhen v primerjavi z R, so resonance snopov nizkega prečnega reda zelo blizu resonancam osnovnih snopov.

Vzemimo simetrični resonator z dolžino $L = 1$ m in $R = 50$ m, valovna dolžina naj bo $\lambda = 500$ nm. Z uporabo enačbe (4.15) hitro lahko izračunamo $z_0 = 4{,}97$ m. Ker je pogoj $z_0 \gg L$ izpolnjen, lahko uporabimo gornji približek. Razlika med frekvencama dveh osnovnih snopov je $\Delta\nu_{n,p,l} =$ 150 MHz, medtem ko je razlika med frekvencama dveh prečnih snopov $\Delta\nu_{n,p,l} = 9{,}5$ MHz.

4.5 Izgube v resonatorjih

Energija lastnega nihanja odprtega resonatorja ni konstantna, ampak se počasi zmanjšuje. Razlogov je več:

1. Odbojnost zrcal ni enaka 1. Tudi če bi znali narediti popolno odbojna zrcala, tak resonator ne bi bil uporaben, saj nihanja ne bi mogli sklopiti z zunanjim poljem. Če naj torej laser oddaja svetlobo, mora biti odbojnost vsaj enega od zrcal manjša od 1.

2. Na sredstvu in na optičnih elementih v resonatorju pride do absorpcije in sipanja svetlobe. Te izgube želimo navadno kar se da zmanjšati.

3. Uklonske izgube so odvisne od velikosti zrcal in velikosti snopa na zrcalih. Pri dani geometriji imajo najmanjši polmer osnovni snopi. Snopi višjega reda so širši, zato imajo večje uklonske izgube. Merilo za uklonske izgube je Fresnelovo število (enačba 4.6) $F = a^2/(L\lambda)$, kjer je a polmer ogledal. Pri enakem F je polmer snopa na izhodnem zrcalu najmanjši, če je resonator konfokalni, zato ima tak resonator tudi najmanjše uklonske izgube (glej nalogo 4.2.2). Navadno so uklonske izgube zanemarljive.

Zmanjševanje energije v resonatorju popišemo z enačbama

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau}W, \tag{4.30}$$

in

$$W = W_0 e^{-2t/\tau}, \tag{4.31}$$

pri čemer τ imenujemo življenjski ali razpadni čas nihanj. Po drugi strani je izguba energije na celoten obhod resonatorja sestavljena iz izgub na zrcalih in t. i. notranjih izgub

$$\Delta W = -(1-\mathscr{R}_1)W - (1-\mathscr{R}_2)W - \Lambda_0 W = -\Lambda W. \tag{4.32}$$

Z $\mathscr{R}_1$ in $\mathscr{R}_2$ smo označili odbojnosti zrcal, od katerih je navadno ena kolikor mogoče blizu 1. Parameter Λ_0 popiše absorpcijo in sipanje znotraj resonatorja ter morebitne uklonske izgube. Tipične vrednosti Λ_0 so do nekaj stotink. Celotne izgube združimo v parameter Λ.

Razpadni čas nihanja lahko neposredno povežemo z izgubami, če v enačbo (4.30) vstavimo čas enega obhoda $t = 2L/c$. Privzamemo, da so izgube na en obhod majhne in namesto odvoda zapišemo razliko vrednosti

$$\frac{\Delta W}{W} = -\frac{2}{\tau}t = -\frac{2}{\tau}\frac{2L}{c} = -\Lambda. \tag{4.33}$$

Sledi

$$\frac{2}{\tau} = \frac{\Lambda c}{2L} = \frac{\Lambda_0 c}{2L} + \frac{c}{2L}\left((1-\mathscr{R}_1)+(1-\mathscr{R}_2)\right). \tag{4.34}$$

Notranje izgube Λ_0 so navadno zelo majhne, odbojnost enega zrcala je $\mathscr{R}_1 \sim 1$, tako da za življenjski čas nihanj približno velja

$$\boxed{\frac{2}{\tau} = \frac{c}{2L}(1-\mathscr{R}_2).} \tag{4.35}$$

Zaradi dušenja se energija lastnih nihanj eksponentno zmanjšuje, prav tako tudi amplituda jakosti električnega polja, ki pojema s karakterističnim časom τ. Spekter eksponentno pojemajoče funkcije lahko izračunamo (glej nalogo 2.4.2) in dobimo Lorentzovo krivuljo s celotno širino črte, ki ustreza ravno

$$2\gamma = \frac{2}{\tau}. \tag{4.36}$$

Lastne krožne frekvence torej niso neskončno ozke, ampak imajo končno širino $2/\tau$. Poglejmo primer. Naj bodo notranje izgube na obhod $\Lambda_0 = 0,01$, eno zrcalo naj bo idealno, drugo naj ima odbojnost $\mathscr{R} = 0,93$. Dolžina resonatorja naj bo $L = 0,5$ m, valovna dolžina pa 500 nm. Tedaj je $1/\tau = 12 \cdot 10^6$ s^{-1}. Zanimivo je razmerje med razliko krožnih frekvenc $\Delta\omega_n$ (enačba 4.5) in širino resonance $2/\tau$. Za opisani primer velja $\Delta\omega_n \tau/2 \approx 80$.

★ Namesto razpadnega časa τ se za opis izgub pogosto uporablja dobrota resonatorja, ki jo vpeljemo kot razmerje med resonančno krožno frekvenco in širino črte

$$Q = \frac{\omega_n}{2\gamma} = \frac{\omega_n \tau}{2}. \tag{4.37}$$

Za tipične optične resonatorje je resonančna krožna frekvenca $\omega_n \sim 10^{15}$ s^{-1}, širina pa reda $1/\tau \sim 10^7$ s^{-1}. Faktor dobrote je tako $Q \sim 10^8$. Optični resonatorji imajo zelo velike faktorje dobrote.

Poglejmo še primer, ko so notranje izgube zanemarljive in sta odbojnosti obeh zrcal enaki. Potem sledi iz enačbe (4.34)

$$\frac{2}{\tau} = \frac{c}{L}(1-\mathscr{R}). \tag{4.38}$$

Do istega rezultata pridemo tudi z razvojem izraza za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra (enačba 4.8) okoli vrha pri ω_n

$$T = \frac{1}{1+\frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2 L\frac{(\omega-\omega_n)}{c}} \approx \frac{1}{1+\left(\frac{2}{(1-\mathscr{R})}\frac{L}{c}(\omega-\omega_n)\right)^2}, \tag{4.39}$$

kjer smo upoštevali še, da je odbojnost $\mathscr{R} \approx 1$. Rezultat je znana Lorentzova krivulja oblike

$$T = \frac{\gamma^2}{(\omega-\omega_n)^2+\gamma^2}, \tag{4.40}$$

od koder hitro razberemo znani rezultat (enačba 4.38)

$$\frac{2}{\tau} = 2\gamma = \frac{c}{L}(1-\mathscr{R}). \tag{4.41}$$

4.6 *Obravnava resonatorjev z uklonskim integralom

V nestabilnih resonatorjih stacionarna rešitev v obliki stoječega Gaussovega snopa ne obstaja. Zato je v takih resonatorjih rešitev za električno polje precej zahtevno poiskati. Vendar je problem soroden uklonu, zato ga lahko obravnavamo z uklonsko teorijo.

Označimo jakost električnega polja v točki P_1 na prvem zrcalu z E_1. Polje na drugem zrcalu v točki P_2 zapišemo s Kirchhoffovim uklonskim integralom (enačba 1.50)

$$E_2 = -\frac{i}{2\lambda}\int_1 E_1(P_1)\frac{e^{ikr}(1+\cos\vartheta)}{r}\,dS_1 \tag{4.42}$$

$$= \int_1 E_1(P_1)K(P_1,P_2)dS_1. \tag{4.43}$$

Integriramo po celotni prvi ploskvi, r je razdalja med točkama P_1 in P_2, ϑ pa je kot med zveznico in normalo na zrcali v osi (slika 4.8). Vpeljemo faktor

$$K(P_1,P_2) = -\frac{i}{2\lambda}\frac{e^{ikr}(1+\cos\vartheta)}{r}, \tag{4.44}$$

ki predstavlja jedro integralske enačbe. Polje na prvem zrcalu je na enak način povezano s poljem na drugem. Če naj zapisano polje predstavlja lastno nihanje resonatorja, mora biti po dveh odbojih sorazmerno začetnemu polju in

$$E_1(P) = \gamma\int_1\int_2 E_1(P_1)K(P_1,P_2)K(P_2,P_1)\,dS_1\,dS_2. \tag{4.45}$$

Enačba (4.45) je homogena integralska enačba, katere rešitve so iskana lastna nihanja elektromagnetnega polja v resonatorju. Kompleksne lastne vrednosti γ določajo frekvenco in dušenje nihanj. Na splošno rešitev ni mogoče poiskati analitično in treba je uporabiti numerične metode. Najenostavnejša je iterativna metoda, pri kateri začnemo z nekim začetnim poljem in ponavljamo integracijo, dokler se polje ne spreminja več.

Slika 4.8: Koordinatna sistema na zrcalih resonatorja

Integralsko enačbo (enačba 4.45) je mogoče analitično rešiti v primeru konfokalnega resonatorja. Privzemimo, da je brez izgub. Resonator je simetričen, zato se polje na obeh zrcalih lahko razlikuje kvečjemu za predznak.

Vpeljemo kartezične koordinate na obeh zrcalih, kot kaže slika (4.8). Pričakujemo, da bo prečna razsežnost lastnega nihanja majhna v primerjavi z dolžino resonatorja L, zato lahko r razvijemo, pri čemer se kvadratni členi ravno odštejejo zaradi ukrivljenosti zrcal. Ostaneta le še mešana člena

$$r \approx L - \frac{xx' + yy'}{L}. \tag{4.46}$$

V konfokalnem resonatorju je krivinski radij zrcal enak dolžini resonatorja. V imenovalcu jedra integrala (enačba 4.44) zato lahko r nadomestimo z L. Koti med zveznico točk na obeh zrcalih in normalo na zrcali so majhni, zato je $\cos\vartheta \approx 1$.

Tako iz enačbe (4.43) sledi

$$E(x',y') = \pm\frac{ie^{ikL}}{\lambda L}\int E(x,y)\exp\left(\frac{-ik(xx'+yy')}{L}\right)dx\,dy. \tag{4.47}$$

Integracija poteka po celem zrcalu. Jedro integrala je produkt dveh faktorjev, ki vsebujeta vsak le x' ali y' koordinati. Zato poiščemo rešitev enačbe (4.47) v obliki produkta $E(x',y') = E_0 f(x')g(y')$. S tem nastavkom mora funkcija $f(x')$ zadoščati enačbi

$$\alpha f(x') = \int f(x)\exp\left(\frac{-ikxx'}{L}\right)dx, \tag{4.48}$$

kjer je α še neznana konstanta. Meje integrala so od enega do drugega roba zrcala. Če je zrcalo dovolj veliko, pričakujemo, da je polje na robu dovolj majhno, da lahko meje vzamemo kar od $-\infty$ do ∞. Vpeljemo še brezdimenzijski koordinati

$$X = x\sqrt{k/L} \quad \text{in} \quad X' = x'\sqrt{k/L} \tag{4.49}$$

in dobimo

$$\alpha f(X') = \sqrt{\frac{L}{k}}\int_{-\infty}^{\infty} f(X)e^{-iXX'}\,dX. \tag{4.50}$$

Enačba (4.50) pravi, da mora biti $f(X)$ podobna svoji Fourierevi transformiranki. Najpreprostejša funkcija s to lastnostjo je Gaussova funkcija

$$f(X) = \exp\left(-\frac{1}{2}X^2\right). \tag{4.51}$$

Podobno napravimo tudi za $g(Y)$. Polje na zrcalu ima po pričakovanju obliko Gaussovega snopa

$$E(x,y) = E_0 \exp\left(-\frac{k(x^2+y^2)}{2L}\right). \tag{4.52}$$

Poiščimo še konstanto α. Iz enačbe (4.50) sledi, da je njena vrednost $\alpha = \sqrt{2\pi L/k} = \sqrt{\lambda L}$. Postavimo izračunano jakost električnega polja (enačba 4.52) z ustrezno vrednostjo za α v enačbo (4.47) in upoštevajmo, da mora biti $E_2 = \pm E_1$. Sledi

$$i\alpha^2 \frac{e^{ikL}}{\lambda L} = ie^{ikL} = \pm 1. \tag{4.53}$$

Iz gornjega izraza izpeljemo resonančni pogoj za frekvenco lastnega nihanja in izračunamo razliko med dvema lastnima krožnima frekvencama, ki jo že poznamo (enačba 4.25)

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L}. \tag{4.54}$$

Integralska enačba iz uklonske teorije tako da isti rezultat kot obosna valovna enačba. To nas ne preseneča, saj je obosna valovna enačba enako natančna kot Fresnelova uklonska teorija.

Naloga 4.6.1 Pokaži, da so funkcije, ki so sorazmerne svoji Fourierevi transformaciji, Hermite-Gaussove funkcije (enačba 3.33), in izračunaj lastne frekvence nihanj višjega reda.

4.7 *Sklopitev resonatorja z okolico

Na začetku poglavja smo omenili, da resonatorjev ne uporabljamo le pri izdelavi laserjev, ampak lahko služijo tudi kot frekvenčni in prostorski filtri za svetlobno valovanje. Povezavo med lastnimi nihanji resonatorja in prepustnostjo ter odbojnostjo valovanja, ki na resonator vpada, bomo poiskali s formalizmom sklapljanja valovanj, ki je neke vrste perturbacijska analiza in je pogosto zelo uporaben.

Začnimo z resonatorjem z idealno odbojnimi stenami brez notranjih izgub. Stoječe lastno valovanje v resonatorju zapišemo kot produkt krajevnega in časovnega dela

$$E(\mathbf{r},t) = f(t)g(\mathbf{r}). \tag{4.55}$$

Krajevni del $g(\mathbf{r})$ naj bo normiran tako, da je $\int g^2 dV = 1$. Iz valovne enačbe (enačba 1.13) sledi, da mora časovni del zadoščati nihajni enačbi drugega reda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_n^2 f = \ddot{f} + \omega_n^2 f = 0. \tag{4.56}$$

Vpeljemo kompleksno spremenljivko a kot kombinacijo funkcije f in njenega časovnega odvoda

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2}}\left(f + \frac{i}{\omega_n}\dot{f}\right). \tag{4.57}$$

Izbira predfaktorja bo razvidna v nadaljevanju. Z odvajanjem in uporabo nihajne enačbe (enačba 4.56) ugotovimo, da za a velja diferencialna enačba

$$\dot{a} = -i\omega_n a. \tag{4.58}$$

Funkcija a ima preprosto časovno odvisnost $e^{-i\omega_n t}$.

Poglejmo elektromagnetno energijo v resonatorju. Električni del energije polja, ki je ravno polovica celotne energije, zapišemo kot

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 f^2 \int g^2 dV = \frac{1}{4}(a+a^*)^2. \tag{4.59}$$

V spremenljivki a in konjugirani spremenljivki a^* prepoznamo klasično obliko anihilacijskih in kreacijskih operatorjev v kvantno-mehanskem opisu harmonskega oscilatorja.

Celotna energija lastnega nihanja resonatorja je po analogiji iz kvantne mehanike enaka

$$W = |a|^2. \tag{4.60}$$

Spremenljivka $a(t)$ je sorazmerna z $e^{-i\omega_n t}$, zato ji pravimo tudi komponenta amplitude s pozitivno frekvenco. Prednost uporabe spremenljivke a je v preprostejših enačbah, ki so le prvega reda.

Izgube v resonatorju opišemo z dodatnim členom v enačbi (4.58)

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a. \tag{4.61}$$

V taki obliki lahko zapišemo enačbo le, kadar so izgube majhne. Če niso, je treba uporabiti navadno nihajno enačbo drugega reda. Gornji približek namreč ne vsebuje zmanjšanja nihajne frekvence pri velikem dušenju. Prehod na dve neskloplјeni enačbi prvega reda za a in a^* je točen le, kadar ni izgub. Izgube sklopijo enačbi za a in a^*, vendar smo v našem približku to sklopitev zanemarili.

Naj bo odbojnost enega zrcala resonatorja nekoliko manjša od 1. Izgube v resonatorju potem opišemo kot (enačba 4.35) $1/\tau = (1-\mathscr{R})c/(4L)$. Druga posledica zmanjšane odbojnosti je sklopitev resonatorja z okolico. To pomeni, da valovanje izhaja iz resonatorja, po drugi strani pa to pomeni tudi, da je lastno nihanje mogoče vzbujati z valovanjem, ki na resonator vpada.

Naj s_+ opiše snop valovanja, ki vpada na resonator. Amplituda s_+ naj bo izbrana tako, da je $|s_+|^2$ enako moči vpadnega valovanja. Zaenkrat tudi zanemarimo notranje izgube resonatorja. Potem lahko zapišemo

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a + \kappa s_+, \tag{4.62}$$

kjer je κ sklopitveni koeficient med vpadnim valovanjem in amplitudo lastnega nihanja. Koeficient κ je določen s prepustnostjo zrcala, ki pa je vsebovana tudi v $1/\tau$. Koeficient κ torej ni neodvisen in poiščimo zvezo med κ in $1/\tau$.

Naj ima vpadno valovanje krožno frekvenco ω. Tedaj lahko iz enačbe (4.62) izračunamo amplitudo nihanja v stacionarnem stanju. Upoštevamo, da mora imeti v stacionarnem stanju nihanje enako frekvenco kot vpadni val. Sledi

$$a = \frac{\kappa s_+}{i(\omega_n - \omega) + 1/\tau}. \tag{4.63}$$

Označimo del valovanja, ki se od resonatorja odbije ali iz njega izvira, s s_-. Če vpadnega vala ni, energija nihanja pojema zaradi odtekanja v s_-. Ohranitev energije da

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}|a|^2 = -\frac{2}{\tau}|a|^2 = -|s_-|^2. \tag{4.64}$$

Sledi

$$|s_-| = \sqrt{\frac{2}{\tau}}|a|, \tag{4.65}$$

pri čemer smo fazo s_- priredili z izbiro referenčne ravnine, v kateri opazujemo s_-.

Ob prisotnosti vpadnega vala s_+ lahko izhajajoči val zapišemo kot vsoto direktnega odboja vpadnega vala s_+ in prispevka iz resonatorja

$$s_- = rs_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau}}a, \tag{4.66}$$

kjer r zaenkrat še ne poznamo. Ker ni notranjih izgub, mora biti v stacionarnem stanju vpadna moč enaka izhajajoči

$$|s_+|^2 = |s_-|^2. \tag{4.67}$$

Uporabimo še izraz za stacionarno vrednost a (enačba 4.63) in zapišemo enakost

$$r^2 + \frac{2(\tau\kappa^2 + r\kappa\sqrt{2\tau})}{1+\tau^2(\omega_n-\omega)^2} = 1. \tag{4.68}$$

Gornja enačba mora veljati pri vsaki krožni frekvenci ω, to je pri vsaki vrednosti imenovalca ulomka. Zato mora biti $r^2 = 1$ in $\tau\kappa = -r\sqrt{2\tau}$. Ker sta τ in κ pozitivna, je $r = -1$ in

$$\kappa = \sqrt{\frac{2}{\tau}}. \tag{4.69}$$

Odbito valovanje lahko torej zapišemo

$$s_- = -s_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau}}a. \tag{4.70}$$

Z upoštevanjem notranjih izgub, ki jih popišemo s τ_0, se amplituda nihanja spremeni v

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau}\right)a + \sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+. \tag{4.71}$$

Enačbi (4.70) in (4.71) sta osnovna izraza za sklapljanje resonatorjev z enim vhodom. Za primer uporabe izračunajmo odbojnost resonatorja s_-/s_+ kot funkcijo frekvence vpadnega vala. V enačbo (4.70) vstavimo izraz za stacionarno vrednost amplitude nihanja

$$a = \frac{\sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+}{i(\omega_n-\omega) + (\frac{1}{\tau_0}+\frac{1}{\tau})}. \tag{4.72}$$

Sledi

$$\frac{s_-}{s_+} = \frac{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} - i(\omega_n-\omega)}{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_0} + i(\omega_n-\omega)}. \tag{4.73}$$

Daleč od resonance je odbojnost -1. V resonanci (pri $\omega_n = \omega$) odboja ni, kadar je $\tau = \tau_0$. Takrat je moč, ki gre iz vpadnega valovanja v vzbujanje resonatorja, največja in je sklopitev, ki jo meri τ, popolnoma prilagojena izgubam. Taka prilagoditev je analogna zahtevi, da mora biti impedanca bremena na koncu valovoda ali koaksialnega kabla enaka impedanci valovoda oziroma kabla.

Če sta obe zrcali resonatorja delno prepustni, kot na primer pri Fabry-Perotovem interferometru, je enačba za amplitudo nihanja

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) a + \kappa_1 s_{+1} + \kappa_2 s_{+2}, \tag{4.74}$$

kjer sta s_{+1} in s_{+2} valovanji, ki vpadata z ene in druge strani. Izgube zaradi končne prepustnosti so

$$\frac{1}{\tau_{1,2}} = \frac{c}{4L}(1 - \mathscr{R}_{1,2}). \tag{4.75}$$

S podobnim razmislekom kot prej, s tem da postavimo najprej eno, nato drugo vpadno valovanje na nič, dobimo

$$\kappa_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{\tau_{1,2}}}. \tag{4.76}$$

Prepustnost resonatorja – oziroma razmerje med močjo vpadnega valovanja na eni strani in izhodnega na drugi – je

$$T = \frac{|s_{-2}|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{2}{\tau_2}\frac{|a|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{4\tau_c^2/\tau_1\tau_2}{1 + \tau_c^2(\omega_n - \omega)^2}, \tag{4.77}$$

kjer je $1/\tau_c = 1/\tau_0 + 1/\tau_1 + 1/\tau_2$. Če ni notranjih izgub, je prepustnost v resonanci

$$T = \frac{4/\tau_1\tau_2}{(1/\tau_1 + 1/\tau_2)^2}. \tag{4.78}$$

Prepustnost je v resonanci popolna, če sta obe zrcali enaki in $\tau_1 = \tau_2$. Gornja izraza se ujemata z znanim izrazom za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v bližini resonanc, če so izgube in prepustnost zrcal majhne (enačbi 4.8 in 4.40).

Resonatorji imajo mnogo lastnih nihanj. Očitno veljajo gornji izrazi za vsako lastno nihanje posebej in celoten odziv resonatorja na poljubno vpadno valovanje zapišemo kot vsoto po vseh lastnih nihanjih. Pri tem ne smemo pozabiti, da mora vpadno valovanje, ki se sklaplja z izbranim lastnim nihanjem, imeti prostorsko odvisnost, ki ustreza lastnemu stanju. V primeru stabilnih resonatorjev iz prejšnjih razdelkov mora torej biti vpadni snop Gaussov z enakim w_0 in istega prečnega reda kot resonatorsko stanje. Če vpadno valovanje ni tako, ga najprej razvijemo po Gaussovih snopih, ki ustrezajo resonatorju. Pri zahtevnejših interferometričnih meritvah je treba za vzbujanje le ene resonance vpadni snop prilagoditi resonatorju, tako da je polmer na vhodnem zrcalu enak polmeru lastnega nihanja, krivinski radij vpadne valovne fronte pa enak krivinskemu radiju zrcala.

Resonator pa ne deluje le kot frekvenčni filter, ampak tudi kot prostorski. Če ima vpadno valovanje isto frekvenco kot eno od nihanj resonatorja, ima prepuščeno valovanje obliko Gaussovega snopa, kot jo določa resonator, ne glede na obliko vpadnega snopa.

Gornji način obravnave resonatorjev in sklopitve z vpadnim valovanjem je posebej prikladen za račun nestacionarnega obnašanja in za primer, ko je resonator napolnjen z nelinearnim sredstvom.

4.8 *Sklopitev dveh resonatorjev

Podobno kot sklopitev z zunanjim valovanjem lahko obravnavamo tudi sklopitev med dvema resonatorjema. Naj bosta dva resonatorja brez izgub sklopljena z delno prepustnim zrcalom. Sklopitev naj bo šibka, tako da lahko zapišemo

$$\dot{a}_1 = -i\omega_1 a_1 + \kappa_{12} a_2 \tag{4.79}$$

$$\dot{a}_2 = -i\omega_2 a_2 + \kappa_{21} a_1. \tag{4.80}$$

Zaradi ohranitve energije sklopitvena koeficienta κ_{12} in κ_{21} nista neodvisna. Vsota energij obeh resonatorjev mora biti konstantna, zato

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(|a_1|^2 + |a_2|^2) &= a_1\dot{a}_1^* + a_1^*\dot{a}_1 + a_2\dot{a}_2^* + a_2^*\dot{a}_2 \\ &= a_1^*\kappa_{12}a_2 + a_1\kappa_{12}^*a_2^* + a_2^*\kappa_{21}a_1 + a_2\kappa_{21}^*a_1^* \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Veljati mora torej

$$\kappa_{12} + \kappa_{21}^* = 0. \tag{4.82}$$

Poglejmo primer dveh sklopljenih resonatorjev, pri čemer je v drugem resonatorju vzbujeno stoječe valovanje. Moč tistega dela, ki potuje proti prvemu resonatorju, je polovica energije, deljena s časom preleta od enega zrcala do drugega

$$|s_+|^2 = \frac{1}{2}|a_2|^2\frac{c}{L}. \tag{4.83}$$

Sledi

$$\kappa_{12}a_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+ = \sqrt{\frac{c}{\tau L}}a_2, \tag{4.84}$$

tako da je

$$\kappa_{12} = \frac{c}{2L}\sqrt{1-\mathscr{R}} \quad \text{in} \quad \kappa_{21} = -\kappa_{12}. \tag{4.85}$$

Zaradi sklopitve se spremenijo lastne frekvence resonatorjev. Poglejmo dva enaka sklopljena resonatorja

$$\dot{a}_1 = -i\omega_0 a_1 + \kappa_{12} a_2 \tag{4.86}$$

$$\dot{a}_2 = -i\omega_0 a_2 - \kappa_{12} a_1. \tag{4.87}$$

Iščemo rešitve oblike $A_i e^{-i\omega t}$. Če uporabimo ta nastavek v gornjih diferencialnih enačbah, dobimo homogen linearen sistem za A_1 in A_2, ki je netrivialno rešljiv, če je determinanta sistema enaka nič. Ta pogoj da enačbo za krožno frekvenco

$$(\omega - \omega_0)^2 = \kappa_{12}^2 \tag{4.88}$$

in

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \kappa_{12}. \tag{4.89}$$

Zaradi sklopitve sta se prej enaki frekvenci resonatorjev razcepili v dve, kot smo lahko pričakovali. Velikost razcepa je odvisna od odbojnosti zrcala in časa preleta resonatorja (enačba 4.85).

5. Interakcija svetlobe s snovjo

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali svetlobo v praznem prostoru. Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. To je seveda zelo obširna tema in jo bomo obdelali le v obsegu, potrebnem za razumevanje ojačevanja svetlobe s stimulirano emisijo, kar je osnova za delovanje laserjev. Najprej bomo na kratko pogledali termodinamsko ravnovesje svetlobe v stiku s toplotnim zalogovnikom, torej sevanje črnega telesa, ki zahteva kvantno obravnavo elektromagnetnega polja. Nato bomo vpeljali fenomenološki Einsteinov opis mikroskopskih procesov absorpcije, spontane in stimulirane emisije in pokazali, da ti procesi niso neodvisni. Izpeljali bomo izraze za absorpcijski koeficient in koeficient ojačenja, na koncu poglavja pa bomo nakazali še kvantnomehansko izpeljavo verjetnosti za prehod atoma iz višjega energijskega stanja v nižje s sevanjem.

5.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja

Ravni valovi so enostavne in zelo prikladne rešitve valovne enačbe (enačba 1.13), zato jih pogosto uporabimo za bazo, po kateri razvijemo elektromagnetno polje. Možen je razvoj po celotnem prostoru, vendar je tedaj nekoliko nerodna normalizacija baznih funkcij. Če se omejimo na le del prostora, se temu problemu izognemo. Mora pa biti izbrani del prostora dovolj velik, da končni rezultat ni odvisen od izbire njegove velikosti in oblike.

Najpreprosteje je vzeti votlino v obliki velike kocke s stranico L in idealno prevodnimi stenami. Rešitve Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) znotraj take votline so ob upoštevanju robnih pogojev (enačbe 1.9–1.12) stoječa valovanja. Zapišemo jih v obliki

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0}\cos\frac{\pi l x}{L}\sin\frac{\pi m y}{L}\sin\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t} \\ E_y &= E_{y0}\sin\frac{\pi l x}{L}\cos\frac{\pi m y}{L}\sin\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t} \\ E_z &= E_{z0}\sin\frac{\pi l x}{L}\sin\frac{\pi m y}{L}\cos\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kjer so l, m in n cela števila. Vsako stoječe valovanje je določeno z valovnim vektorjem

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\pi l}{L}, \frac{\pi m}{L}, \frac{\pi n}{L}\right), \tag{5.2}$$

katerega velikost je povezana s krožno frekvenco $|\mathbf{k}| = k = \omega/c$. Iz Maxwellove enačbe za prazen prostor $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ (enačba 1.3) sledi $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$. Za vsako trojico števil l, m in n obstajata tako dve neodvisni polarizaciji.

Naloga 5.1.1 Pokaži, da stoječe valovanje, zapisano z enačbami (5.1), reši valovno enačbo (enačba 1.13) v kocki s stranico L in zadosti robnim pogojem idealno prevodnih sten votline.

Preštejmo, koliko je stoječih valovanj oziroma lastnih nihanj v intervalu velikosti valovnega vektorja med k in $k+dk$ – to smo na hitro naredili že pri obravnavni resonatorjev (enačba 4.1). Možni valovni vektorji tvorijo tridimenzionalno mrežo v prvem oktantu prostora vseh valovnih vektorjev. Razmik med dvema zaporednima mrežnima točkama v smeri ene od osi je π/L. Število točk v osmini krogelne lupine med k in $k+dk$ je za dovolj velike l, m in n enako prostornini lupine, deljeni s prostornino, ki pripada posamezni mrežni točki, to je $(\pi/L)^3$. Upoštevati moramo še, da sta pri vsakem $\mathbf{k}$ dovoljeni dve polarizaciji, zato

$$dN = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \pi k^2\, dk. \tag{5.3}$$

Zapišemo število lastnih nihanj na enoto volumna

$$\frac{dN}{V} = \frac{k^2}{\pi^2} dk \tag{5.4}$$

in ga prevedemo na frekvenčno odvisnost

$$\frac{dN}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \tag{5.5}$$

Vpeljemo gostoto stanj $\rho(\omega)$, to je število lastnih nihanj na frekvenčni interval[1] na enoto volumna votline

$$\boxed{\rho(\omega) = \frac{dN}{V d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}.} \tag{5.6}$$

Vsote po lastnih nihanjih, to je po dovoljenih vrednostih valovnega števila k, z uporabo gostote stanj spremenimo v integrale po k ali po ω

$$\sum_k \ldots \quad \Rightarrow \quad V \int \rho(k) \ldots dk = V \int \rho(\omega) \ldots d\omega. \tag{5.7}$$

Označimo brezdimenzijski krajevni del rešitve (enačbe 5.1) z $\mathbf{E}_\alpha$, kjer α označuje trojico števil l, m in n in še obe možni polarizaciji. Pripadajoče magnetno polje izračunamo z Maxwellovo enačbo (enačba 1.2)

$$\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = i\omega_\alpha \mathbf{B}_\alpha. \tag{5.8}$$

Polja $\mathbf{E}_\alpha$ in $\mathbf{B}_\alpha$ tvorijo kompleten ortogonalen sistem, zato jih lahko uporabimo za razvoj poljubnega elektromagnetnega polja v votlini

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}} \sum_\alpha p_\alpha(t) \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \quad \text{in} \tag{5.9}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = i\sqrt{\frac{\mu_0}{V}} c_0 \sum_\alpha \omega_\alpha q_\alpha(t) \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{r}). \tag{5.10}$$

Vstavimo splošen razvoj (enačbi 5.9 in 5.10) v Maxwellovi enačbi (enačbi 1.1 in 1.2), upoštevamo zvezo (enačba 5.8) in njej analogno za rotor magnetnega polja. Sledi

$$p_\alpha = \dot{q}_\alpha \quad \text{in} \quad \omega_\alpha^2 q_\alpha = -\dot{p}_\alpha, \tag{5.11}$$

od koder sledi še

$$\ddot{p}_\alpha + \omega_\alpha^2 p_\alpha = 0. \tag{5.12}$$

Ta enačba da seveda pričakovano časovno odvisnost oblike $e^{-i\omega_\alpha t}$.

[1] V tem poglavju bomo ohlapno uporabljali besedo frekvenca tudi za krožno frekvenco. Iz zapisa bo vedno jasno, za katero frekvenco gre.

Naloga 5.1.2 Uporabi razvoj polja (enačbi 5.9 in 5.10) in iz Maxwellovih enačb izpelji enačbo (5.12).

Z upoštevanjem razvoja (enačbi 5.9 in 5.10) in ob ustrezni normalizaciji zapišemo energijo polja ali Hamiltonovo funkcijo

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0})\,dV = \frac{1}{2}\sum_\alpha(p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2). \tag{5.13}$$

Gornji zapis (enačbi 5.12 in 5.13) kaže, da lahko elektromagnetno polje v votlini obravnavamo kot sistem neodvisnih enodimenzionalnih harmonskih oscilatorjev. Pri tem se koeficienti razvoja p_α in q_α obnašajo kot gibalne količine in koordinate.

Prehod v kvantno mehaniko dosežemo tako, da klasičnim spremenljivkam gibalne količine in koordinate priredimo operatorje $\hat{p}_\alpha$ in $\hat{q}_\alpha$, ki morajo zadoščati komutacijskim pravilom

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha,\beta}. \tag{5.14}$$

Iz kvantne mehanike vemo, da so lastne vrednosti energije posameznega harmonskega oscilatorja, opisanega s Hamiltonovo funkcijo (enačba 5.13), diskretne. Njihove vrednosti so enake

$$W_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2\ldots \tag{5.15}$$

Razliki energije harmonskega oscilatorja, če se n spremeni za 1, pravimo foton. Energija fotona je enaka $\hbar\omega$, n pa predstavlja število fotonov. Celotna energija kvantiziranega elektromagnetnega polja v votlini je vsota prispevkov posameznih oscilatorjev, pri čemer ničelno energijo zanemarimo

$$W = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha n_\alpha. \tag{5.16}$$

Tudi v nadaljevanju bomo ničelno energijo izpuščali, saj je to energija osnovnega stanja, ki se ne more sprostiti.

★ Vidna svetloba z valovno dolžino 500 nm ima frekvenco $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Hz. Ustrezna energija fotona je $W = 4 \cdot 10^{-19}$ J oziroma $W = 2,5$ eV. To vrednost si velja zapomniti.

5.2 Sevanje črnega telesa

Obravnavajmo sevanje v votlini, ki je v toplotnem ravnovesju s stenami s temperaturo T. Iz statistične fizike vemo, da verjetnost P, da je v izbranem lastnem stanju votline število fotonov enako n, zapišemo z Boltzmannovo porazdelitvijo

$$P(n) = \frac{e^{-W_n/k_BT}}{\sum_n e^{-W_n/k_BT}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega n}}{\sum_n e^{-\beta\hbar\omega n}} = e^{-\beta\hbar\omega n}(1 - e^{-\beta\hbar\omega}), \tag{5.17}$$

pri čemer je $\beta = 1/k_BT$ in k_B Boltzmannova konstanta.

Povprečno število fotonov v tem stanju je potem

$$\langle n\rangle = \sum_n nP(n) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}. \tag{5.18}$$

Povprečno energijo izbranega lastnega stanja zapišemo kot produkt energije fotona in povprečnega števila fotonov

$$\langle W \rangle = \hbar\omega \langle n \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}. \tag{5.19}$$

Ravnovesno gostoto energije elektromagnetnega polja v votlini na frekvenčni interval izračunamo tako, da povprečno energijo posameznega stanja $\langle W \rangle$ pomnožimo z gostoto stanj $\rho(\omega)$ (enačba 5.6). Dobimo znan izraz za energijo na enoto volumna na enoto frekvence, to je Planckov zakon[2]. Planckov zakon opiše spektralno gostoto energije svetlobe u , izsevane iz črnega telesa, ki je v toplotnem ravnovesju z okolico s temperaturo T

$$u(\omega) = \hbar\omega \langle n \rangle \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}. \tag{5.20}$$

Slika 5.1: Planckov spekter za sevanje črnega telesa pri različnih temperaturah

5.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje

Oglejmo si osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. Naj bo v votlini poleg elektromagnetnega polja še N atomov, ki se med seboj ne motijo. Za začetek naj bodo atomi prav enostavni: imajo naj le dva energijska nivoja z energijama E_1 in E_2 (slika 5.2 a). Pri tem naj bo E_2 višja energija od E_1, razlika med njima pa naj bo

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_0. \tag{5.21}$$

Zaradi interakcije s poljem atomi prehajajo iz nižjega nivoja v višji in obratno. Prehajanje med nivojema opisujejo trije procesi: absorpcija, spontano sevanje in stimulirano sevanje.

[2] Nemški fizik in nobelovec Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947.

Slika 5.2: Shema energijskih nivojev dvonivojskega atoma (a) in treh vrst prehodov med njima: absorpcija (b), spontano sevanje (c) in stimulirano sevanje (d). Črna črta označuje atomski prehod, rdeča pa foton.

Absorpcija fotona

Absorpcija fotona je prehod, pri katerem se foton z ustrezno energijo absorbira, atom pa preide iz nižjega energijskega nivoja v višje (slika 5.2 b). Verjetnost za prehod na časovno enoto, ki jo označimo z r_{12}, je sorazmerna spektralni gostoti energije polja $u(\omega)$, to je energiji na enoto volumna in frekvenčni interval, pri frekvenci prehoda ω_0. Sorazmernostni koeficient označimo z B_{12} in zapišemo

$$r_{12} = B_{12} u(\omega_0). \tag{5.22}$$

To je enostavno razumeti. Več kot je fotonov v votlini pri frekvenci prehoda, več fotonov se lahko absorbira in večja je verjetnost za prehod. Pri absorpciji se seveda število fotonov v enem od lastnih stanj polja pri frekvenci ω_0 zmanjša za ena.

Spontano sevanje

Atom v vzbujenem stanju ni stabilen, temveč se prej ali slej spontano vrne v osnovni nivo, pri čemer izseva foton. Temu pojavu pravimo spontano sevanje ali spontana emisija (slika 5.2 c).

Pri spontanem sevanju je foton izsevan v katerokoli stanje polja v bližini frekvence prehoda. Smer izsevane svetlobe je poljubna, v odsotnosti zunanjega polja pa je poljubna tudi polarizacija izsevane svetlobe. Verjetnost za prehod na časovno enoto označimo z A_{21}. Za dovoljene prehode je vrednost $A_{21} \sim 10^6$–10^8/s, za prepovedane pa okoli $\sim 10^4$/s. Karakteristični (naravni) razpadni čas vzbujenega stanja vpeljemo kot $\tau = 1/A_{21}$.

Zaradi končnega življenjskega časa ima vzbujeno stanje končno spektralno širino. Če ni Dopplerjeve razširitve, je atomska spektralna črta g najpogosteje kar Lorentzove oblike z vrhom pri ω_0 (enačba 2.21)

$$\boxed{g(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}.} \tag{5.23}$$

Funkcija $g(\omega)$ je normirana

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, d\omega = 1, \tag{5.24}$$

za grobe ocene pa se funkcijo g pogosto nadomesti s pravokotnikom širine 2γ in višine $1/2\gamma$.

Stimulirano sevanje

Tretji pojav je prehod atoma iz višjega nivoja v nižjega zaradi interakcije s poljem. Ko na vzbujen atom vpade foton, se atom vrne v osnovni nivo, pri čemer se izseva foton. Temu procesu pravimo stimulirano sevanje ali stimulirana emisija. Tudi verjetnost za stimuliran prehod na časovno enoto r_{21} je sorazmerna s spektralno gostoto energije polja pri frekvenci prehoda ω_0

$$r_{21} = B_{21} u(\omega_0). \tag{5.25}$$

V tem primeru smo sorazmernostni koeficient označili z B_{21}. Kadar pride do stimuliranega sevanja, se število atomov v vzbujenem stanju zmanjša, število fotonov v stanju, ki je prehod povzročilo, pa se poveča. Pri tem je ključnega pomena, da je foton, ki nastane pri stimuliranjem sevanju, enak vpadnemu fotonu. Izsevana svetloba ima tako enako fazo, frekvenco, polarizacijo in smer potovanja kot vpadna. Tipične vrednosti parametra so $B_{21} \sim 10^{16}$–10^{20} $\mathrm{m^3/Js^2}$.

Pomudimo se še nekoliko pri izrazih za absorpcijo (enačba 5.22) in za stimulirano emisijo (enačba 5.25). Zapisani enačbi veljata le, kadar je spektralna gostota elektromagnetnega polja $u(\omega)$ preko celotne spektralne širine prehoda $g(\omega - \omega_0)$ približno konstantna (slika 5.3 a). To je gotovo res, če obravnavamo sevanje v votlini, ki je v termičnem ravnovesju z okolico (črno telo).

Slika 5.3: Pri izračunu verjetnosti za absorpcijo in stimulirano emisijo je pomembna oblika spektralne gostote vpadnega elektromagnetnega polja $u(\omega)$. V prvem primeru (a) je bistveno širša, v drugem (b) pa bistveno ožja od širine atomske spektralne črte $g(\omega - \omega_0)$.

V splošnem primeru, ko se spekter vpadne svetlobe spreminja v območju atomske spektralne črte, moramo sešteti prispevke po ozkih frekvenčnih intervalih

$$r_{12} = B_{12} \int g(\omega - \omega_0)\, u(\omega)\, d\omega. \tag{5.26}$$

Gornji zapis preverimo na primeru spektra črnega telesa, ki se ne spreminja dosti v območju prehoda. Takrat $u(\omega_0)$ postavimo pred integral in po pričakovanju dobimo znano zvezo (enačba 5.22).

Če na atome svetimo s svetlobo s spektrom, ki je ozek v primerjavi s spektralno širino prehoda (na primer iz laserskega resonatorja), je verjetnost za prehod odvisna od tega, kako blizu osrednje frekvence prehoda je frekvenca vpadne svetlobe (slika 5.3 b). Naj bo w_R gostota energije skoraj monokromatske vpadne svetlobe s frekvenco ω_R. Verjetnost za absorpcijo na časovno enoto je potem

$$r_{12} = B_{12} g(\omega_R - \omega_0)\, w_R. \tag{5.27}$$

Koeficiente A_{21}, B_{12} in B_{21}, s katerimi smo opisali spontano sevanje, absorpcijo in stimulirano emisijo, je prvi vpeljal Einstein[3], zato jih imenujemo tudi Einsteinovi koeficienti. Poglejmo si jih podrobneje.

[3] Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.

Einsteinovi koeficienti

Število atomov v določenem atomskem nivoju imenujemo zasedenost stanj. Ker zaenkrat obravnavamo preproste modele atomov z zgolj dvema nivojema, zapišemo samo dve zasedenosti. Naj bo N_1 zasedenost nižjega nivoja, N_2 zasedenost višjega nivoja, skupno število atomov pa $N_1 + N_2 = N$. V prisotnosti svetlobe se število atomov v spodnjem in zgornjem nivoju lahko spreminja, skupno število pa se ohranja.

Obravnavajmo termično ravnovesje, ko je spekter svetlobe bistveno širši od širine atomskega prehoda (slika 5.3 a). Verjetnosti za prehoda potem zapišemo z enačbama (5.22) in (5.25). Zasedenost višjega nivoja N_2 se zmanjšuje zaradi spontanih in stimuliranih prehodov v nižji nivo, povečuje pa se zaradi absorpcije. To zapišemo z enačbo

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - r_{21}N_2 + r_{12}N_1 = -A_{21}N_2 - B_{21}u(\omega_0)N_2 + B_{12}u(\omega_0)N_1. \tag{5.28}$$

Zaradi ohranitve skupnega števila atomov velja

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}. \tag{5.29}$$

V termičnem ravnovesju sta zasedenosti konstantni, tako da lahko zapišemo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}u(\omega_0)N_2 - B_{12}u(\omega_0)N_1 = 0. \tag{5.30}$$

Vemo tudi, da v termičnem ravnovesju za zasedenosti N_1 in N_2 velja Boltzmannova porazdelitev

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2-E_1)} = e^{-\beta\hbar\omega_0}, \tag{5.31}$$

kjer je $\beta = 1/k_BT$. Izrazimo spektralno gostoto $u(\omega_0)$ iz enačbe (5.30)

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}} \tag{5.32}$$

in z uporabo enačbe (5.31) dobimo

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}/B_{12}}{e^{\beta\hbar\omega_0} - B_{21}/B_{12}}. \tag{5.33}$$

Po drugi strani vemo, da v termičnem ravnovesju spektralno gostoto energije sevanja $u(\omega_0)$ opišemo s Planckovim zakonom (enačba 5.20). Iz primerjave obeh zapisov ugotovimo, da morata biti koeficienta B_{21} in B_{12} enaka in določimo zvezo med koeficientoma A_{21} in B_{12}

$$\boxed{A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}B_{12} \qquad \text{in} \qquad B_{12} = B_{21}.} \tag{5.34}$$

Koeficient pred B_{12} v prvi enačbi je ravno enak gostoti stanj elektromagnetnega polja $\rho(\omega)$ (enačba 5.6), pomnoženi z energijo fotona $\hbar\omega$. Videli bomo, da to ni slučaj, saj to izhaja iz verjetnosti za prehod v kvantni elektrodinamiki (poglavje 5.10). Pozoren bralec je lahko tudi opazil, da je z enačbo (5.33), ki smo jo dobili le z uporabo Boltzmannove porazdelitve za atome, že določena oblika Planckove formule, ne da bi kar koli rekli o fotonih.

★ Zveza $B_{12} = B_{21}$ velja le v primeru nedegeneriranih stanj. V realnih sistemih so stanja pogosto degenerirana in je treba gornjo enačbo ustrezno popraviti v

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{g_1}{g_2}, \tag{5.35}$$

pri čemer g_1 in g_2 označujeta degeneriranost stanj.

5.4 Absorpcijski koeficient

Zasedenost osnovnega nivoja v plinu dvonivojskih atomov naj bo N_1, zasedenost vzbujenega pa N_2. Izbran volumen takega plina osvetlimo s snopom svetlobe s frekvenco ω, ki je blizu frekvence atomskega prehoda ω_0. Gostota vpadnega energijskega toka je $j = w_\omega c$ (enačba 1.30), pri čemer je w_ω gostota energije. Obravnavajmo primer, ko je spekter vpadnega snopa ozek v primerjavi s širino atomskega prehoda (slika 5.3 b). V tej obliki je zapis enačb sicer bolj zapleten, a bo bolj priročen pri obravnavi laserja. Privzemimo še, da je stanje stacionarno.

Ko svetlobni snop vpade na plast plina debeline dz, se gostota energijskega toka zmanjša zaradi absorpcije in hkrati poveča zaradi stimulirane emisije (slika 5.4). Spontano sevanje, ki je tudi prisotno, lahko zanemarimo, saj je svetloba izsevana na vse strani enakomerno in le majhen del je izsevan v smeri snopa. Sprememba energije snopa v časovni enoti je enaka razliki med številom absorpcij in stimuliranih prehodov v tem času, pomnoženih z energijo fotona[4]

$$dP = r_{12}\frac{(N_2 - N_1)}{V} S dz\, \hbar\omega = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g w_\omega \hbar\omega S dz, \tag{5.36}$$

pri čemer smo verjetnost za prehod izrazili iz enačbe (5.27).

Slika 5.4: K absorpciji svetlobe v plasti plina

Pri tem S označuje presek snopa, V pa volumen plina. Sledi

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g \hbar\omega \frac{j}{c} dz. \tag{5.37}$$

Priročno je vpeljati presek za absorpcijo

$$\boxed{\sigma(\omega) = \frac{B_{21}\, g \hbar\omega}{c}.} \tag{5.38}$$

Z njim se izraz (5.37) poenostavi v

$$\boxed{\frac{dj}{dz} = \frac{\Delta N}{V}\sigma(\omega) j,} \tag{5.39}$$

kjer ΔN označuje $N_2 - N_1$. Navadno obravnavamo pline, ki so blizu termičnega ravnovesja. V tem primeru je $N_2 < N_1$ in dj negativen, zato pride do absorpcije svetlobe z absorpcijskim koeficientom μ. Zapišemo

$$\frac{dj}{j} = -\mu dz \tag{5.40}$$

[4] Zaradi preglednosti tukaj pišemo obliko atomske spektralne črte kot g, pri čemer je to vrednost Lorentzove krivulje z osrednjo frekvenco ω_0 pri ω, torej $g(\omega - \omega_0)$.

in

$$\mu = \frac{\Delta N}{V}\sigma(\omega) = \frac{\Delta N}{V} B_{21}\, g \frac{\hbar\omega}{c}. \tag{5.41}$$

Makroskopski koeficient absorpcije svetlobe v plinu atomov smo povezali z Einsteinovim koeficientom B_{21}. Povejmo še, da so tipične velikosti presekov za absorpcijo $\sigma \sim 10^{-24}$–10^{-16} m^2.

★ Energija se pri absorpciji v plinu dvonivojskih atomov seveda ne izgublja. Atom, ki je prešel v vzbujeno stanje, se s spontano emisijo vrne nazaj v osnovno, svetloba pa se izseva na vse strani – se siplje.

5.5 Nasičenje absorpcije

Čeprav je videti izraz za zmanjševanje gostote svetlobnega toka pri prehodu skozi absorbirajoči plin (enačba 5.40) preprost, ga ni mogoče enostavno integrirati, saj je absorpcijski koeficient μ odvisen od gostote energijskega toka j. Pri dovolj velikem svetlobnem toku namreč z absorpcijo znaten delež atomov preide v višji nivo, zato se zmanjša razlika ΔN in posledično se zmanjša tudi absorpcijski koeficient μ. Takrat se absorpcija v plinu nasiti in pojavu pravimo nasičenje absorpcije.

Naj na dvonivojski plin vpada snop monokromatske svetlobe. Atomi v plinu prehajajo med nivojema zaradi absorpcije, spontane in stimulirane emisije. Podobno kot smo zapisali termično ravnovesje v primeru širokega spektra (enačba 5.30), zapišemo stacionarno enačbo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}\, g\, \Delta N \frac{j}{c} = 0, \tag{5.42}$$

pri čemer smo za verjetnost za prehod uporabili enačbo (5.27) in upoštevali $w = j/c$. Zasedenost višjega nivoja N_2 lahko izrazimo s celotnim številom atomov N in razliko zasedenosti ΔN

$$N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) + \frac{1}{2}(N_2 - N_1) = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\Delta N. \tag{5.43}$$

S tem lahko izračunamo razliko zasedenosti

$$\Delta N = -\frac{N}{1 + 2\frac{B_{21}g}{cA_{21}} j}. \tag{5.44}$$

Pri majhni gostoti toka j so praktično vsi atomi v osnovnem stanju in prispevajo k absorpciji. Pri velikih gostotah toka pa imenovalec gornjega izraza močno naraste, razlika zasedenosti gre proti nič in absorpcija se zmanjšuje. Ko drugi člen v imenovalcu (enačba 5.44) doseže vrednost 1, pravimo, da gostota energijskega toka doseže vrednost saturacijske gostote. Zapišemo jo kot

$$j_s(\omega) = \frac{cA_{21}}{2B_{21}g} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^2 g}, \tag{5.45}$$

pri čemer smo upoštevali zvezo med koeficientoma A_{21} in B_{21} (enačba 5.34). Kot vidimo, je saturacijska gostota odvisna le od krožne frekvence vpadnega valovanja in vrednosti $g(\omega - \omega_0)$, ki je približno obratna vrednost širine atomskega prehoda. Za črto z valovno dolžino 600 nm in širino 10^8 s^{-1} znaša saturacijska gostota svetlobnega toka okoli 20 mW/cm^2. Tako veliko gostoto svetlobnega toka je v tako ozkem frekvenčnem intervalu z navadnimi svetili praktično nemogoče doseči, medtem ko jo z laserji z lahkoto.

Izraz za razliko zasedenosti stanj zapišemo v preglednejši obliki

$$\Delta N = -\frac{N}{1 + j/j_s(\omega)}. \tag{5.46}$$

Vstavimo gornji izraz v enačbo za zmanjševanje gostote toka (enačba 5.39) in dobimo

$$dj = -\frac{\mu_0}{1 + j/j_s} j\,dz, \tag{5.47}$$

kjer je

$$\mu_0 = \frac{N}{V}\sigma = \frac{N B_{21}\, g\hbar\omega}{Vc} \tag{5.48}$$

absorpcijski koeficient pri majhnih gostotah vpadnega toka.

Enačbo (5.47) brez težav integriramo

$$\ln\frac{j}{j_0} + \frac{j - j_0}{j_s} = -\mu_0 z. \tag{5.49}$$

Z j_0 smo označili začetno gostoto svetlobnega toka. Kadar je ta dosti manjša od j_s, lahko drugi člen v gornji enačbi zanemarimo in gostota svetlobnega toka eksponentno pojema

$$j = j_0 e^{-\mu_0 z}. \tag{5.50}$$

Pri zelo velikih vpadnih gostotah, ko pride do nasičenja absorpcije, lahko prvi člen v izrazu zanemarimo in pride do linearnega zmanjševanja gostote svetlobnega toka

$$j = j_0 - \mu_0 j_s z. \tag{5.51}$$

V primeru močnega vpadnega toka je zasedenost osnovnega in vzbujenega nivoja skoraj enaka in absorpcija je omejena s tem, kako hitro se lahko atomi vračajo v osnovno stanje preko spontanega sevanja.

Slika 5.5: Pojemanje gostote svetlobnega toka v absorbirajočem plinu (enačba 5.49)

5.6 Optično ojačevanje

Do zdaj smo obravnavali prehod svetlobe skozi dvonivojski plin. V termičnem ravnovesju je zasedenost zgornjega nivoja manjša od zasedenosti spodnjega in svetloba, ki vpada na plin, se v njem absorbira. Če uspemo doseči stanje obrnjene zasedenosti, za katerega velja $N_2 > N_1$, se bo snop svetlobe pri prehodu skozi plin ojačeval. Ta pojav je osnova za delovanje laserjev.

Stanje obrnjene zasedenosti seveda ni v termičnem ravnovesju in ga je treba vzdrževati z dovajanjem energije plinu – črpanjem. Načinov črpanja za dosego obrnjene zasedenosti je veliko. Zaenkrat opišimo le nekaj osnovnih mehanizmov, podrobneje jih bomo spoznali na konkretnih primerih laserjev (poglavje 7).

V plinih je najpogostejši način črpanja vzbujanje z električnim tokom. Elektroni, ki so glavni nosilci toka, se zaletavajo v atome ali ione plina in jih vzbujajo v višje nivoje, pri čemer lahko pride do obrnjene zasedenosti med nekim parom nivojev. Tako črpanje uporabljamo na primer v argonovem laserju.

Pogost proces v plinih je tudi prenos energije med atomi s trki. V mešanici dveh plinov, pri katerih se nek nivo enih atomov ujema po energiji z nekim nivojem drugih atomov, lahko vzbujen atom prve vrste pri trku preda energijo brez sevanja atomu druge vrste, ta pa iz osnovnega stanja preide v ustrezen višji nivo. Če je pod tem nivojem še drugo vzbujeno stanje, katerega življenjski čas je krajši od življenjskega časa zgornjega nivoja, pride do obrnjene zasedenosti. Primer uporabe takega črpanja je He-Ne laser.

V trdnih neprevodnih kristalih sta v optičnem področju absorpcija in sevanje navadno posledica primesi. Obrnjeno zasedenost para nivojev primesi najpogosteje dosežemo tako, da kristal obsevamo s svetlobo s frekvenco, ki ustreza prehodu na nek nivo nad izbranim parom. Tako črpanje uporabljamo na primer v Nd:YAG in Ti:safir laserjih.

V polprevodnikih dosežemo obrnjeno zasedenost med prevodnim in valenčnim pasom z vbrizgavanjem elektronov in vrzeli v območje *p-n* spoja z električnim tokom v prevodni smeri.

5.7 Optično črpanje trinivojskega sistema

Kot primer optičnega ojačevanja si oglejmo najpreprostejši model optičnega črpanja. Gre za plin atomov s tremi nivoji, tako imenovani trinivojski sistem (slika 5.6 a). Osnovno stanje, ki ga označimo z $|0\rangle$, naj ima energijo E_0. Poleg tega naj imajo atomi še dve vzbujeni stanji z energijo E_1 (stanje $|1\rangle$) in energijo $E_2 > E_1$ (stanje $|2\rangle$), tako da je energijska razlika med vzbujenima nivojema $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$.

Na tak trinivojski plin svetimo s črpalno svetlobo, ki vzbuja atome iz osnovnega stanja $|0\rangle$ v stanje $|2\rangle$, pri čemer je lahko spektralna gostota u_p črpalne svetlobe široka. Po plinu naj se širi še monokromatska svetloba z gostoto energije w in frekvenco ω, ki je blizu frekvence prehoda ω_0 med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$. Ugotoviti želimo, pri katerih pogojih lahko dosežemo obrnjeno zasedenost med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$ in s tem ojačevanje svetlobe okoli frekvence ω_0 (slika 5.6 b).

★ Trinivojski laserski sistem na sliki (5.6 b) je pravzaprav poseben primer bolj realističnega štirinivojskega sistema, pri katerem gornji črpalni nivo sovpada z gornjim laserskim nivojem. Sicer se tretji vzbujeni nivo, v katerega črpamo, praviloma zelo hitro prazni v drugega vzbujenega, od tam pa počasi v prvega vzbujenega, kot kaže slika (5.6 c). Obravnava štirinivojskih sistemov je bolj zapletena od obravnave trinivojskih sistemov, ki za opis delovanja laserjev povsem zadošča. Podrobneje bomo večnivojske sisteme obravnavali na konkretnih laserskih primerih (poglavje 7).

Slika 5.6: Shema energijskih nivojev trinivojskega sistema in oznake koeficientov za prehode med njimi (a). V plinskih laserjih je stanje obrnjene zasedenosti navadno med vzbujenima stanjema (b), pogosto pa so laserji štiri- ali večnivojski (d).

Zapišimo enačbe za spreminjanje zasedenosti posameznih stanj. Osnovno stanje $|0\rangle$ se prazni zaradi absorpcije črpalne svetlobe in polni zaradi spontanih prehodov iz stanj $|1\rangle$ in $|2\rangle$, stimulirane prehode iz stanja $|2\rangle$ pa bomo zanemarili. Zasedenost stanja $|2\rangle$ se povečuje zaradi absorpcije s spodnjih nivojev in zmanjšuje zaradi spontanega in stimuliranega sevanja. Srednje stanje se polni s stimuliranimi in spontanimi prehodi iz stanja $|2\rangle$ in prazni zaradi absorpcije in spontanih prehodov. Pri tem velja, da je vsota vseh treh zasedenosti enaka številu vseh atomov in $N_0+N_1+N_2=N$. Zasedbene enačbe so tako

$$\frac{dN_0}{dt} = -rN_0 + A_{20}N_2 + A_{10}N_1, \tag{5.52}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1 + B_{21}\,g\,w\,(N_2-N_1) + A_{21}N_2 \quad \text{in} \tag{5.53}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = rN_0 - A_{20}N_2 - A_{21}N_2 - B_{21}\,g\,w\,(N_2-N_1). \tag{5.54}$$

Pri zapisu smo predpostavili, da je $N_0 \approx N \gg N_1, N_2$ in črpanje $B_{20}\,u_p(N_0-N_2)$, ki je praktično konstantno, zapisali s koeficientom r. Mehanizem črpanja smo s tem skrili v r in prav nič ni pomembno, na kakšen način poteka. S tem smo obravnavo posplošili z optičnega črpanja na druge sisteme.

Zanima nas stacionarno stanje, ko so vsi trije časovni odvodi enaki nič. Tako iz druge enačbe sistema (enačba 5.53) sledi

$$B_{21}\,g\,w\,N_2 + A_{21}N_2 = B_{21}\,g\,w\,N_1 + A_{10}N_1 \tag{5.55}$$

in

$$N_2 = \frac{B_{21}\,g\,w + A_{10}}{B_{21}\,g\,w + A_{21}} N_1. \tag{5.56}$$

Brez škode lahko zanemarimo spontano sevanje iz stanja $|2\rangle$ v osnovno stanje. Tako iz prve enačbe sistema (enačba 5.52) dobimo

$$N_1 = \frac{rN}{A_{10}} \tag{5.57}$$

in razliko zasedenosti zapišemo kot

$$N_2 - N_1 = \left(\frac{N_2}{N_1} - 1\right) N_1 = \left(\frac{A_{10}-A_{21}}{A_{21}+B_{21}g\,w}\right)\frac{rN}{A_{10}}. \tag{5.58}$$

Iz gornje enačbe sledi, da pride do obrnjene zasedenosti, kadar je $A_{10} > A_{21}$, torej kadar je razpadni čas stanja $|1\rangle$ krajši od razpadnega časa stanja $|2\rangle$. Tak rezultat smo seveda lahko pričakovali.

V praktičnih primerih navadno velja $A_{10} \gg A_{21}$. Ob upoštevanju zveze $j = wc$ povežemo razliko zasedenosti z gostoto vpadnega svetlobnega toka

$$N_2 - N_1 = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + \frac{B_{21} g j}{c A_{21}}} = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + j/j_s}. \tag{5.59}$$

Konstante smo pospravili v saturacijsko gostoto svetlobnega toka

$$j_s = \frac{cA_{21}}{B_{21} g}. \tag{5.60}$$

★ Vidimo, da je izraz za saturacijsko gostoto toka v trinivojskem sistemu (enačba 5.60) zelo podoben izrazu za saturacijsko gostoto v dvonivojskem sistemu (enačba 5.45), razlikujeta se le v faktorju 2. Do te razlike pride zaradi različnega števila nivojev, saj pogoj $N_1 + N_2 = N$ v trinivojskem sistemu ne velja.

Poglejmo, kaj se zgodi s svetlobo ob vpadu na plast trinivojskega plina. Naj ima vpadna svetloba krožno frekvenco ω in gostoto svetlobnega toka $j = wc$. Račun je zelo podoben računu za absorpcijo (enačba 5.37). Sprememba gostote toka na debelini dz je enaka

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g \frac{\hbar\omega}{c} j\, dz, \tag{5.61}$$

pri čemer gostota toka j nastopa tudi v izrazu za razliko zasedenosti (enačba 5.59). Če to upoštevamo, dobimo diferencialno enačbo za gostoto toka

$$\frac{1}{j}\left(1 + \frac{j}{j_s}\right) dj = G\, dz \tag{5.62}$$

oziroma

$$\boxed{dj = \frac{G}{1 + j/j_s} j\, dz,} \tag{5.63}$$

ki je spet zelo podobna enačbi za absorpcijo (enačba 5.47). Z G smo označili t. i. koeficient ojačenja pri majhni gostoti vpadnega toka. Podan je z

$$G = \frac{N}{V} \frac{r}{A_{21}} \sigma = \frac{rNB_{21}\hbar\omega g}{VcA_{21}}, \tag{5.64}$$

pri čemer smo koeficient ojačenja izrazili s presekom za stimulirano sevanje σ. Rešitev diferencialne enačbe (enačba 5.63) je prikazana na sliki (5.7).

Obnašanje gostote svetlobnega toka ima, tako kot pri absorpciji, dva režima. Pri majhnih gostotah toka $j \ll j_s$ je naraščanje eksponentno

$$j(z) = j_0 e^{Gz}. \tag{5.65}$$

Pri velikih gostotah toka pride do nasičenja in gostota svetlobnega toka narašča linearno

$$j(z) = j_0 + j_s G z. \tag{5.66}$$

V tem primeru je gostota toka tako velika, da vsi atomi, ki jih s črpanjem spravimo v najvišje stanje, preidejo v stanje $|1\rangle$ s stimuliranim sevanjem. Pri konstantnem črpanju je tedaj linearno naraščanje gostote toka razumljivo.

Slika 5.7: Naraščanje gostote svetlobnega toka pri optičnem ojačevanju

Vrnimo se k preseku za stimulirano sevanje σ (enačba 5.64). Opazimo, da je enak preseku za absorpcijo (enačba 5.38) dvonivojskega sistema in tako odvisen od frekvence in sorazmeren vrednosti atomske spektralne črte pri frekvenci prehoda. Za He-Ne laser ($\lambda = 633$ nm in $\Delta\nu \sim 1,5$ GHz) znaša $\sigma \sim 10^{-16}$ m^2, za Nd:YAG (1064 nm in $\Delta\nu \sim 150$ GHz) pa $\sigma \sim 10^{-22}$ m^2. Zaradi različnih presekov, različnih gostot atomov in različnih načinov črpanja se koeficienti ojačenja v večnivojskih sistemih med seboj precej razlikujejo. Tipičen koeficient ojačenja v He-Ne laserju z dolžino $L = 0,5$ m je $GL \sim 1,015$, v Nd:YAG laserju z dolžino ojačevalnega sredstva $L = 10$ cm pa $GL \sim 50$. Pri prvem laserju je sicer velik presek za stimulirano sevanje, vendar je gostota atomov v obrnjeni zasedenosti razmeroma majhna. V drugem primeru pa močno črpanje prevlada nad majhnim presekom in pride do velikega ojačenja.

5.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte

Doslej smo privzeli, da svetijo vsi atomi obravnavane snovi pri isti krožni frekvenci ω_0 in z isto spektralno širino, ki smo jo popisali s funkcijo $g(\omega - \omega_0)$, z vrhom pri ω_0. Če to velja, je razširitev spektralne črte homogena. Funkcija $g(\omega - \omega_0)$ je v tem primeru Lorentzove oblike

$$g_L(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \tag{5.67}$$

s širino črte $\Delta\omega_L = 2\gamma$ (glej sliko 2.4). Primera homogene razširitve sta naravna širina in razširitev zaradi trkov med atomi. Homogena razširitev je pogosto večja od obratne vrednosti razpadnega časa nivoja. V plinu namreč prihaja do trkov, ki lahko zmotijo le fazo sevanja, ne da bi povzročili prehod, razširijo pa spektralno črto. V trdni snovi homogeno razširitev brez prehoda povzročajo termična nihanja lokalnega polja.

Spektralna črta je lahko razširjena tudi zato, ker svetloba, izhajajoča iz različnih atomov, nima povsem iste frekvence. Tedaj govorimo o nehomogeni razširitvi. Najpomembnejši primer nehomogene razširitve je Dopplerjeva razširitev v plinu. Atomi plina vedno sevajo pri praktično isti frekvenci ω_0, vendar jih zaradi gibanja opazovalec v mirujočem (laboratorijskem) sistemu v skladu z Dopplerjevim pojavom zazna pri različnih frekvencah.

Naj se atom giblje s hitrostjo v glede na smer opazovanja. Potem opazovane krožne frekvence posameznih atomov zapišemo kot

$$\omega = \omega_0 - \frac{v}{c}\omega_0 = \omega_0 - k_0 v. \tag{5.68}$$

Označimo z $\mathcal{N}(v)$ porazdelitev gostote atomov po hitrostih, pri čemer se omejimo le na premikanje v smeri opazovanja. V termičnem ravnovesju je $\mathcal{N}(v)$ Maxwellova porazdelitev

$$\mathcal{N}(v) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, \tag{5.69}$$

kjer je m masa posameznega atoma. Porazdelitev atomov po frekvencah izračunamo tako, da hitrost izrazimo iz enačbe (5.68), poleg tega funkcijo $g_D(\omega-\omega_0)$ normiramo. Sledi

$$g_D(\omega-\omega_0) = \frac{c}{\omega_0}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{2k_B T}\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}\right). \tag{5.70}$$

Dopplerjeva razširitev v plinu je torej Gaussove oblike. Njena širina pri polovični višini[5] je

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{mc^2}}\,\omega_0. \tag{5.71}$$

Naloga 5.8.1 Izpelji obliko nehomogeno razširjene črte za Dopplerjevo razširitev (enačba 5.70) in pokaži, da je njena širina podana z enačbo (5.71).

Izračunajmo Dopplerjevo razširitev na primeru He-Ne laserja. Za prehod atoma neona pri 633 nm in temperaturi 300 K je izračunana vrednost $\Delta\omega_D = 8\cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1}$ oziroma $\Delta\nu = 1{,}4$ GHz. Dejanske izmerjene vrednosti širine črte za He-Ne laser znašajo okoli $1{,}5$ GHz, kar je znatno več od naravne širine črte ($1{,}2$ MHz). Še bolj izrazite so razširitve zaradi nehomogenosti v trdninskih laserjih, na primer v Nd:YAG laserju, v katerem je širina črte $\Delta\nu = 150$ GHz. Nehomogena razširitev zaradi Dopplerjevega pojava v redkem plinu ali zaradi nehomogenosti v trdnih snoveh je tako kar nekaj redov velikosti večja od homogene naravne širine in razširitve zaradi trkov.

★ Pri nehomogenih razširitvah bi za bolj natančen izračun morali upoštevati tudi naravno širino posameznega atoma. To bi zapisali s konvolucijo Lorentzove in Gaussove funkcije in dobili tako imenovan Voigtov profil, ki pa ga ne moremo preprosto analitično zapisati.

5.9 *Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte

V razdelku (5.5) smo obravnavali nasičenje absorpcije pri homogeno razširjenem prehodu. Pri nasičenju absorpcije, kadar prevladuje nehomogena razširitev, nastopijo pomembni novi pojavi.

Začnimo z dvonivojskim plinom, na katerega vpada močan snop monokromatske svetlobe s frekvenco ω_S, ki je blizu osrednje frekvence ω_0 Dopplerjevo razširjene črte, in gostoto toka j. S svetlobo lahko sodeluje le skupina atomov, pri kateri se Dopplerjevo premaknjena frekvenca od ω_S ne razlikuje več kot za homogeno širino, ki jo opisuje funkcija $g(\omega-\omega_S)$. Zato ne moremo zapisati zasedbenih enačb za vse atome hkrati, ampak le za tiste, ki imajo hitrost med v in $v+dv$ in ki absorbirajo svetlobo pri frekvenci $\omega_0 - kv$.

Naj bosta $\mathcal{N}_1(v)$ in $\mathcal{N}_2(v)$ hitrostni porazdelitvi atomov v osnovnem in vzbujenem stanju. Gostota $\mathcal{N}_2(v)$ se spreminja podobno kot celotna zasedenost v homogenem primeru (enačba 5.28)

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -A\mathcal{N}_2(v) - B\,g(\omega_S-\omega_0+kv)\frac{j}{c}\left(\mathcal{N}_2(v)-\mathcal{N}_1(v)\right). \tag{5.72}$$

[5] Celotno širino na polovični višini imenujemo FWHM – *Full width at half maximum.*

Upoštevali smo, da je zaradi Dopplerjevega pojava prehod premaknjen k frekvenci $\omega_0 - kv$. Velja

$$\frac{d\mathscr{N}_2(v)}{dt} = -\frac{d\mathscr{N}_1(v)}{dt}. \tag{5.73}$$

Vpeljemo še $\mathscr{Z}(v) = \mathscr{N}_1(v) - \mathscr{N}_2(v)$. Podobno kot v enačbi (5.43) zapišemo

$$\mathscr{N}_2(v) = \frac{1}{2}\mathscr{N}(v) - \frac{1}{2}\mathscr{Z}(v) \tag{5.74}$$

in dobimo

$$\dot{\mathscr{Z}}(v) = -A\mathscr{Z}(v) + A\mathscr{N}(v) - 2Bg(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}\mathscr{Z}(v). \tag{5.75}$$

V stacionarnem stanju je

$$\mathscr{Z}(v) = \frac{\mathscr{N}(v)}{1 + \frac{2B}{Ac}g(\omega_S - \omega_0 + kv)j}. \tag{5.76}$$

Če je gostota vpadnega svetlobnega toka majhna, lahko imenovalec razvijemo

$$\mathscr{Z}(v) \approx \mathscr{N}(v)\left(1 - \frac{2B}{Ac}g(\omega_S - \omega_0 + kv)j\right). \tag{5.77}$$

Porazdelitev $\mathscr{Z}(v)$ je podobna nemoteni porazdelitvi atomov po hitrosti $\mathscr{N}(v)$, le da je pri hitrosti $v = (\omega_0 - \omega_S)/k$ zmanjšana zaradi vpliva vpadne svetlobe. Atomi s to hitrostjo namreč svetlobo absorbirajo in s tem prehajajo v gornje stanje. V porazdelitvi atomov tako nastane vdolbina, ki jo imenujemo Bennettova vdolbina[6] (slika 5.8). Širina vdolbine je določena s homogeno širino prehoda, to je s funkcijo $g(\omega_S - \omega_0 + kv)$, globina pa z gostoto vpadnega toka j.

Slika 5.8: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, kjer zaradi absorbirane svetlobe nastane Bennettova vdolbina. Podobno obliko ima tudi absorpcijski koeficient za testno svetlobo.

Naj na snov poleg močnega vpadnega žarka pri ω_S vpada še šibko valovanje pri frekvenci ω'. Izračunajmo absorpcijski koeficient za valovanje pri ω'. Upoštevati moramo, da k absorpciji prispevajo vsi atomi, katerih hitrost je taka, da je prehod dovolj blizu ω'. Absorpcijski koeficient potem izračunamo s seštevanjem po porazdelitvi $\mathscr{Z}(v)$ (enačba 5.41)

$$\mu(\omega') = \frac{\hbar\omega'}{c}\int \mathscr{Z}(v)Bg(\omega' - \omega_0 + k'v)\,dv. \tag{5.78}$$

[6] Ameriški fizik William Ralph Bennett Jr., 1930–2008.

Homogena razširitev je dosti manjša od Dopplerjeve širine, zato v prvem približku Lorentzovo funkcijo g v enačbi (5.78) nadomestimo kar z $\delta(\omega)$, v izrazu za $\mathscr{Z}$ (enačba 5.76) pa jo pustimo. Tako je absorpcijski koeficient za šibko testno svetlobo

$$\begin{aligned}\mu(\omega') &= \frac{\hbar\omega'}{k'c}B\frac{\mathscr{N}\left(\frac{\omega_0-\omega'}{k'}\right)}{1+\frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S-\omega')} \\ &\approx \hbar B\mathscr{N}\left(\frac{\omega_0-\omega'}{k'}\right)\left(1-\frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S-\omega')\right).\end{aligned} \tag{5.79}$$

V drugi vrstici smo uporabili približek (enačba 5.77). Vidimo, da je odvisnost $\mu(\omega')$ Gaussove oblike z vdolbino pri ω_S in je tako podobna porazdelitvi, kot jo kaže slika (5.8). Odvisnost $\mu(\omega')$ lahko tudi izmerimo, tako da spreminjamo frekvenco testnega snopa ω'.

Merjenje absorpcije s testnim žarkom omogoča opazovanje oblike homogene črte kljub mnogo večji nehomogeni Dopplerjevi razširitvi. V moderni spektroskopiji ima zato ta metoda velik pomen.

Izračunajmo še absorpcijski koeficient za prvi, močan vpadni snop, tako da v gornjem izrazu vstavimo $\omega' = \omega_S$. Vodilni člen $\mathscr{N}((\omega_0-\omega_S)/k)$ opisuje običajno Gaussovo obliko Dopplerjevo razširjene črte, izraz v oklepaju pa da zmanjšanje absorpcije zaradi nasičenja, ki je odvisno le od vrednosti $g(0)$ in zato enako za vse ω_S. Z enim samim vpadnim snopom svetlobe torej vdolbine v absorpciji ne moremo zaznati, saj je izmerjena črta kljub nasičenju Gaussove oblike.

Namesto z dvema snopoma, od katerih šibkemu testnemu snopu spreminjamo frekvenco, lahko vdolbino v porazdelitvi zaznamo tudi z enim samim snopom spremenljive frekvence, ki se po prvem prehodu skozi plin odbije od zrcala in vrne v nasprotni smeri. S tem se v porazdelitvi atomov v spodnjem stanju simetrično pri hitrostih $\pm(\omega_0-\omega_S)/k$ pojavita dve Bennettovi vdolbini (slika 5.9 a). Kadar je ω_S blizu ω_0, se vdolbini vsaj delno prekrivata, stopnja nasičenja se poveča in v krivulji za absorpcijo svetlobe se pojavi vdolbina (slika 5.9 b). Imenujemo jo Lambova vdolbina[7].

Slika 5.9: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, če svetloba prehaja skozi plin v dveh smereh (a). Če frekvenca vpadne svetlobe približno sovpada z osrednjo frekvenco prehoda, se vdolbini prekrivata in absorpcija se zmanjša (b).

Zapišimo enačbe za ta primer. Vpadni snop svetlobe povzroči spremembo zasedenosti pri prehodu skozi plin v obeh smereh, zato je zdaj

$$\mathscr{Z}(v) \approx \mathscr{N}(v)\left(1-\frac{2Bj}{Ac}\left(g(\omega_S-\omega_0+kv)+g(\omega_S-\omega_0-kv)\right)\right). \tag{5.80}$$

[7] Ameriški fizik in nobelovec Willis Eugene Lamb Jr., 1913–2008.

Podobno kot prej izračunamo absorpcijski koeficient za širjenje svetlobe v pozitivni smeri

$$\begin{aligned}\mu_+(\omega_S) &= \frac{\hbar\omega}{c}B\int \mathscr{Z}(v)g(\omega_S-\omega_0+kv)\,dv \\ &\approx \hbar B\mathscr{N}\left(\frac{\omega_S-\omega_0}{k}\right)\left(1-\frac{2Bj}{Ac}\left(g(0)+g(2(\omega_S-\omega_0))\right)\right). \end{aligned} \tag{5.81}$$

Izmerjeni absorpcijski profil je odvisen od frekvence vpadne svetlobe ω_S in ima pri ω_0 vdolbino, ki je podobna homogeno razširjeni črti. Faktor 2 v argumentu funkcije $g(2(\omega_S-\omega_0))$ je posledica našega grobega približka, ko smo v integraciji $g(\omega_S-\omega_0+kv)$ nadomestili kar z δ funkcijo. Natančnejši račun pokaže, da je vrh pri ω_0 kar oblike $g(\omega_S-\omega_0)$.

Naloga 5.9.1 Pokaži, da je rezultat natančnejše izpeljave absorpcijskega koeficienta

$$\mu_+(\omega_S) = \hbar B\mathscr{N}\left(\frac{\omega_S-\omega_0}{k}\right)\left(1-\frac{Bj}{Ac}\left(g(0)+g(\omega_S-\omega_0)\right)\right). \tag{5.82}$$

Pri računu privzemi, da je širina Dopplerjeve porazdelitve bistveno večja od širine homogene razširitve (enačba 5.67) in Maxwellovo porazdelitev postavi pred integral.

5.10 *Izpeljava verjetnosti za prehod

Verjetnosti za prehod atoma iz enega stanja v drugo s sevanjem, ki smo jih opisali s fenomenološkimi Einsteinovimi koeficienti A_{21} in B_{21} (razdelek 5.3), je mogoče izpeljati tudi drugače. Pri tem se poslužimo kvantne elektrodinamike, kar pomeni kvantno obravnavo tako atoma kot elektromagnetnega polja. Povsem strog račun je zahteven in presega okvir te knjige, zato si na kratko oglejmo le, kako pridemo do rezultata z uporabo Fermijevega zlatega pravila.

Postavimo dvonivojski atom v votlino z elektromagnetnim poljem. Izračunajmo verjetnost, da zaradi interakcije s poljem atom preide iz stanja $|2\rangle$ v stanje $|1\rangle$, pri čemer se število fotonov v izbranem stanju elektromagnetnega polja α poveča z n_α na $n_\alpha+1$. V vseh ostalih stanjih polja naj bo število fotonov enako nič.

Med atomom in poljem privzamemo električno dipolno interakcijo

$$\hat{H}_i = -e\hat{E}(\mathbf{r},t)\hat{x}, \tag{5.83}$$

kjer je $\hat{x}$ operator koordinate elektrona v atomu. Privzeli smo, da je nihajoče polje polarizirano v smeri osi x. Stanja celotnega sistema, to je atoma in polja, zapišemo v obliki produkta atomskih stanj in stanja elektromagnetnega polja, pri čemer navedemo število fotonov v posameznih lastnih nihanjih votline α. Zapišemo okrajšano

$$|i,n_\alpha\rangle \equiv |i\rangle|\{n_\alpha\}\rangle. \tag{5.84}$$

Začetno stanje celotnega sistema naj bo tako $|2,n_\alpha\rangle$, kar pomeni, da je atom v vzbujenem stanju (stanju 2), polje pa ima n_α fotonov v enem samem stanju α. Ustrezno končno stanje po prehodu je $|1,n_\alpha+1\rangle$.

V prvem redu teorije motenj je verjetnost za prehod iz začetnega v končno stanje na časovno enoto, pri čemer s funkcijo δ izberemo le prehod, pri katerem se energija ohranja, enaka

$$w_{21} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle 1,n_\alpha+1|\hat{H}_i|2,n_\alpha\rangle|^2\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha). \tag{5.85}$$

Operator elektromagnetnega polja razvijemo po lastnih nihanjih votline (enačba 5.10)

$$\hat{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}}\sum_\alpha \hat{p}_\alpha(t)E_\alpha(\mathbf{r}), \tag{5.86}$$

kjer je $\hat{p}_\alpha$ operator gibalne količine stanja α, E_α pa funkcija, ki opisuje krajevno odvisnost polja. Vemo, da se vsako lastno elektromagnetno nihanje votline obnaša kot harmonski oscilator (enačba 5.13). Vpeljemo kreacijske in anihilacijske operatorje

$$\hat{a}^\dagger_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha\hat{q}_\alpha - i\hat{p}_\alpha) \qquad \text{in} \tag{5.87}$$

$$\hat{a}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha\hat{q}_\alpha + i\hat{p}_\alpha). \tag{5.88}$$

Kreacijski operatorji povečujejo, anihilacijski pa zmanjšujejo število fotonov v danem stanju

$$\hat{a}^\dagger_\alpha|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha+1}|n_\alpha+1\rangle \qquad \text{in} \tag{5.89}$$

$$\hat{a}_\alpha|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha}|n_\alpha-1\rangle. \tag{5.90}$$

Edini od nič različni matrični elementi so tako oblike

$$\langle n_\alpha+1|\hat{a}^\dagger_\alpha|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha+1} \qquad \text{in} \tag{5.91}$$

$$\langle n_\alpha-1|\hat{a}_\alpha|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha}. \tag{5.92}$$

Operatorje $\hat{p}_\alpha$ izrazimo s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji in jih vstavimo v razvoj električnega polja (enačba 5.86). Dobimo

$$\hat{E}(\mathbf{r},t) = -i\sum_\alpha\sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}}\left(\hat{a}^\dagger_\alpha - \hat{a}_\alpha\right)E_\alpha(\mathbf{r}). \tag{5.93}$$

Nadaljujemo z izračunom matričnega elementa. Operator koordinate $\hat{x}$ deluje le na atomski del stanja, $\hat{E}$ pa le na elektromagnetno polje, zato velja

$$\langle 1,n_\alpha+1|\hat{H}_i|2,n_\alpha\rangle = -e\langle 1,n_\alpha+1|\hat{E}\hat{x}|2,n_\alpha\rangle \tag{5.94}$$

$$= -e\langle 1|\hat{x}|2\rangle\langle n_\alpha+1|\hat{E}|n_\alpha\rangle. \tag{5.95}$$

Vstavimo polje, ki smo ga izrazili s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji (enačba 5.93), upoštevamo zvezi (5.91) in (5.92) in zapišemo

$$\begin{aligned}\langle n_\alpha+1|\hat{E}|n_\alpha\rangle &= -i\sum_\beta\sqrt{\frac{\hbar\omega_\beta}{2V\varepsilon_0}}\langle n_\alpha+1|\hat{a}^\dagger_\beta - \hat{a}_\beta|n_\alpha\rangle E_\beta(\mathbf{r}) \\ &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}}\sqrt{n_\alpha+1}\,E_\alpha(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{5.96}$$

Od vseh operatorjev v razvoju polja je namreč od nič različen matrični element le za kreacijski operator za stanje α.

Vpeljemo še simbol za matrični element koordinate med atomskima stanjema $\langle 1|\hat{x}|2\rangle = x_{12}$. Iskana verjetnost za prehod iz začetnega stanja, v katerem je v votlini vzbujen atom in n_α fotonov, v končno stanje, v katerem je atom v osnovnem stanju in $n_\alpha+1$ fotonov v stanju α, je tako

$$w_{21} = \frac{\pi e^2\omega_\alpha x_{12}^2}{V\varepsilon_0}(n_\alpha+1)E_\alpha^2(\mathbf{r})\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha). \tag{5.97}$$

Verjetnost za prehod je sorazmerna z $n_\alpha+1$ in je od nič različna, tudi če je število kvantov polja enako nič. To opisuje spontano sevanje. Prispevek, ki je sorazmeren s številom že prisotnih

fotonov, predstavlja stimulirano sevanje. Verjetnost za prehod vsebuje še kvadrat prostorske odvisnosti polja $E_\alpha^2(\mathbf{r})$. Če ne poznamo natančnega položaja atoma ali če je plin atomov enakomerno porazdeljen po votlini, ta člen nadomestimo s povprečno vrednostjo. Za stoječe valovanje je to 1/2.

Kolikšna pa je verjetnost za spontano emisijo? Spontana emisija je možna v vsa elektromagnetna nihanja votline s pravo frekvenco. Celotno verjetnost za prehod atoma iz vzbujenega stanja v osnovno izračunamo tako, da seštejemo verjetnosti za prehod z izsevanim fotonom v določenem stanju. Spomnimo se, da je ta verjetnost ravno enaka Einsteinovem koeficientu A_{21} (enačba 5.34)

$$A_{21} = \sum_\alpha w_{21} = \sum_\alpha \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V\varepsilon_0}\,\delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \tag{5.98}$$

Za prostorsko odvisnost polja $E^2(\mathbf{r})$ smo vzeli povprečje 1/2. Vsoto po nihanjih lahko z uporabo enačbe (5.7) spremenimo v integral in upoštevamo enačbo (5.6). Dobimo

$$A_{21} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\hbar\varepsilon_0}\int \rho(\omega_\alpha)\omega_\alpha\,\delta(\omega_0 - \omega_\alpha)\,d\omega_\alpha = \frac{e^2\omega_0^3 x_{12}^2}{\varepsilon_0 h c^3}, \tag{5.99}$$

pri čemer smo z $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ označili frekvenco prehoda. Tako smo izpeljali vrednost Einsteinovega koeficienta A_{21}.

★ Pri gornjem izračunu Einsteinovega koeficienta A_{21} smo privzeli, da so vsi dipoli urejeni v smeri svetlobe. Če želimo rezultat izenačiti s koeficientom, ki smo ga vpeljali za izotropno sevanje črnega telesa, ga moramo pomnožiti s faktorjem $\langle\cos^2\vartheta\rangle = 1/3$.

Zaradi spontanega sevanja vzbujeno atomsko stanje nikoli ni popolnoma stacionarno. Poleg tega energija stanja s končnim razpadnim časom ni natančno določena, zato moramo verjetnost za stimulirano sevanje (enačba 5.97) malo popraviti. Delta funkcijo energije nadomestimo s končno široko funkcijo $g(\omega - \omega_0)$, ki ima vrh pri ω_0. Zaradi spremembe integracijske spremenljivke nastopi še dodaten faktor $1/\hbar$ in zapišemo

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V\varepsilon_0\hbar}(n_\alpha + 1)g(\omega_\alpha - \omega_0). \tag{5.100}$$

Poglejmo še Einsteinov koeficient za stimulirano sevanje B_{21}. Lahko ga izrazimo iz enačbe (5.27), če upoštevamo, da je gostota energije polja $n_\alpha\hbar\omega_\alpha/V$

$$B_{21} = \frac{V\,w_{21}}{n_\alpha\,\hbar\omega_\alpha\,g(\omega_\alpha - \omega_0)} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\varepsilon_0\hbar^2}. \tag{5.101}$$

Razmerje Einsteinovih koeficientov izračunamo z uporabo enačb (5.99) in (5.101) in dobimo

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2 c^3}, \tag{5.102}$$

ki se ujema z razmerjem, ki smo ga izpeljali z uporabo Planckove formule (enačba 5.34). Prehojena pot jasno kaže zvezo med spontanim in stimuliranim sevanjem ter gostoto stanj elektromagnetnega polja.

5.11 *Rabijeve oscilacije

Če je svetloba, ki vpada na dvonivojski sistem, zelo močna, lahko v primeru, da je frekvenca vpadne svetlobe ω blizu frekvence prehoda ω_0, pride do periodične izmenjave energije med svetlobnim poljem in dvonivojskim sistemom. Oscilacije števila fotonov oziroma pričakovane vrednosti zasedenosti nivojev imenujemo Rabijeve oscilacije[8].

Obravnavajmo sklopitev dvonivojskega sistema z elektromagnetnim valovanjem v semiklasičnem modelu. To pomeni, da dvonivojski sistem obravnavamo kvantno, svetlobo, ki vpada nanj, pa kot klasično skalarno polje. V odsotnosti električnega polja zapišemo Hamiltonian za elektron kot

$$H_0 = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2|, \tag{5.103}$$

pri čemer je $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0$ frekvenca prehoda. V prisotnosti svetlobnega polja moramo dodati še člen, ki opisuje dipolno interakcijo. Celoten Hamiltonian postane časovno odvisen in ga zapišemo kot

$$H = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2| - e\hat{x}E_0\cos(\omega t). \tag{5.104}$$

Schrödingerjevo enačbo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \tag{5.105}$$

rešujemo z nastavkom

$$|\psi\rangle = c_1(t)e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + c_2(t)e^{-i\omega_2 t}|2\rangle, \tag{5.106}$$

saj je valovna funkcija, ki popisuje stanje sistema, na splošno kombinacija obeh stanj. Nastavek (enačba 5.106) in Hamiltonian (enačba 5.104) vstavimo v enačbo (5.105), ki jo enkrat pomnožimo z $\langle 1|$, drugič pa z $\langle 2|$ in izpeljemo sistem dveh sklopljenih enačb

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\mathscr{V}\cos(\omega t)e^{-i\omega_0 t}c_2 \qquad \text{in} \qquad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\mathscr{V}\cos(\omega t)e^{i\omega_0 t}c_1, \tag{5.107}$$

pri čemer je $\mathscr{V} = -\langle 1|e\hat{x}E_0|2\rangle$. Zapišemo $\cos(\omega t)$ kot kompleksno število in zanemarimo hitro spreminjajočo se komponento pri $\omega_0 + \omega$, tako da enačbi prepišemo v

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}\mathscr{V}e^{-i\Delta t}c_2 \qquad \text{in} \qquad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}\mathscr{V}e^{i\Delta t}c_1, \tag{5.108}$$

kjer je $\Delta = \omega_0 - \omega$. Dodamo začetni pogoj, ki pravi, da je na začetku sistem v osnovnem stanju in torej $c_1(0) = 1$ in $c_2(0) = 0$. Rešitvi enačb (5.108) sta tako

$$c_1(t) = e^{-i\Delta t/2}\left(\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right) \qquad \text{in} \tag{5.109}$$

$$c_2(t) = \frac{\mathscr{V}}{i\hbar\Omega}e^{i\Delta t/2}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \tag{5.110}$$

Pri tem smo vpeljali krožno frekvenco

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\mathscr{V}}{\hbar}\right)^2} = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\langle 1|\hat{x}|2\rangle eE_0}{\hbar}\right)^2} = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \Omega_R^2}. \tag{5.111}$$

Krožno frekvenco $\Omega_R = \mathscr{V}/\hbar$ imenujemo Rabijeva krožna frekvenca.

[8] Ameriški fizik in nobelovec Isidor Isaac Rabi, 1898–1988.

Naloga 5.11.1 Pokaži, da enačbi (5.109) in (5.110) rešita sistem enačb (5.108) ob izbranih začetnih pogojih.

Poglejmo rezultat podrobneje. Verjetnost, da najdemo atom v stanju $|2\rangle$, je enaka

$$P_2(t) = |c_2(t)|^2 = \frac{\mathscr{V}^2}{\hbar^2\Omega^2}\sin^2(\Omega t/2). \tag{5.112}$$

Če je frekvenca vpadne svetlobe točno enaka frekvenci prehoda, je $\Delta = 0$ in $\Omega = \Omega_R = \mathscr{V}/\hbar$. Takrat je amplituda nihanja zasedenosti vzbujenega stanja kar enaka 1 in sistem v celoti periodično prehaja iz osnovnega stanja v vzbujeno in nazaj. To pomeni, da prihaja izmenično do popolne absorpcije svetlobe in do popolne stimulirane emisije. Pri odstopajoči vpadni frekvenci se amplituda nihanja zmanjša, hkrati se poveča frekvenca oscilacij. Frekvenca oscilacij ni odvisna zgolj od frekvence vpadnega valovanja, ampak tudi od amplitude električne poljske jakosti. Groba ocena Rabijeve frekvence je $\Omega_R \sim$ MHz.

Slika 5.10: Rabijeve oscilacije za tri različne vrednosti odstopanja frekvence vpadne svetlobe od frekvence prehoda $\Delta = \omega_0 - \omega$. Z naraščajočim odstopanjem se amplituda oscilacij zmanjšuje, njihova frekvenca pa povečuje.

Omenjeno velja, kadar je vpadna svetloba zelo močna, povsem koherentna in v sistemu ni motenj. V realnih sistemih so prisotni relaksacijski pojavi, kot na primer trki med atomi ali spontana emisija, zato so Rabijeve oscilacije dušene. Zaznamo jih lahko le v času, ki je krajši od obratne vrednosti širine spektralne črte ($\sim 10^{-10}$ s).

★ Rabijeve oscilacije niso omejene samo na optične prehode, ampak se pojavijo pri vrsti dvonivojskih sistemov, ki interagirajo z močnim spreminjajočim se zunanjim poljem. Poznamo jih na primer pri jedrski magnetni resonanci (NMR) ali kvantnih logičnih vezjih.

6. Laser

V prejšnjih poglavjih smo spoznali resonatorje, pojasnili proces ojačevanja svetlobe in opisali črpanje, ki je potrebno za ojačevanje optičnega signala. V tem poglavju bomo vsa ta spoznanja združili in komponente sestavili v eno samo napravo – laser. Zapisali bomo zasedbene enačbe in razložili delovanje laserjev. Spoznali bomo prednosti laserske svetlobe pred svetlobo iz navadnih svetil. Opisali bomo način delovanja sunkovnih laserjev in na koncu predstavili še semiklasični model laserja.

6.1 Laser

Spoznali smo, da se v sredstvu, v katerem med dvema nivojema dosežemo obrnjeno zasedenost, svetloba z ustrezno valovno dolžino ojačuje. Postavimo tako sredstvo v optični resonator. Na začetku nastaja predvsem spontano izsevana svetloba, ki se med zrcaloma resonatorja odbija. V resonatorju se vzbujajo nihanja z nihajnimi frekvencami blizu frekvence atomskega prehoda, pri kateri snov ojačuje. V začetku je ojačenje za izbrana nihanja veliko, z naraščajočo intenziteto pa se ojačenje zmanjšuje, dokler se ne izenači z izgubami. Sistem preide v stacionarno stanje in seva močno koherentno svetlobo. Tak izvor svetlobe imenujemo laser. Beseda laser je nastala iz kratice za *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* – ojačenje svetlobe s stimuliranim sevanjem.

Slika 6.1: Shema laserja s ključnimi deli: ojačevalno sredstvo, črpalni mehanizem in resonator

★ Kot klasično analogijo za laser vzemimo klarinet, ki je sestavljen iz cevi in ustnika. Cev deluje kot resonator, v katerem nastane stojni zvočni val, pri čemer je frekvenca stoječega vala določena z dolžino cevi in s številom vozlov. Naloga ustnika je dovajanje energije in s tem vzdrževanje konstantne amplitude nihanja. To glasbenik doseže s pihanjem v ustnik in tresenjem prožnega jezička, ki s tresljaji proizvaja zvok. Tresenje jezička je približno periodično in vsebuje mnogo različnih frekvenc, tudi take, ki ustrezajo frekvenci stoječih valov v cevi. Ko amplituda tlaka v cevi naraste nad neko mejo, pride do zanimivega pojava. Nihanje tlaka v gornjem koncu cevi povratno deluje na ustnik in ga sili, da niha s frekvenco najmočneje vzbujenega stoječega vala v cevi, druge frekvence pa zamrejo. Moč pihanja gre le še v nihanje jezička s pravo frekvenco in ojačuje nihanje zračnega stolpca. Tako se s povratno zvezo med nihanjem jezička in stoječim valovanjem v cevi vzdržuje stoječe valovanje s konstantno amplitudo.

V grobem ima laser tri ključne sestavne dele: ojačevalno sredstvo, črpalni mehanizem in resonator, ki je v najpreprostejšem primeru sestavljen iz dveh ukrivljenih zrcal (slika 6.1). Črpalni mehanizem vzdržuje obrnjeno zasedenost v ojačevalnem sredstvu, resonator pa omogoča, da se svetloba med številnimi prehodi skozi ojačevalno sredstvo dovolj ojači. Odbojnost vsaj enega od zrcal mora biti manjša od 1, da skozenj lahko izhaja svetloba.

Zaenkrat se omejimo na najpreprostejši model laserja in privzemimo, da frekvenca le enega resonatorskega lastnega nihanja sovpada s frekvenco prehoda aktivne snovi. Ta privzetek v večini laserjev ni avtomatično izpolnjen, vendar ga je pogosto mogoče doseči z dodatnimi elementi v resonatorju. Aktivno snov oziroma ojačevalno sredstvo v laserju stalno črpamo in s tem vzdržujemo obrnjeno zasedenost.

Naj bo W energija svetlobnega valovanja v resonatorju. Zaradi izgub skozi zrcali in zaradi absorpcije ter sipanja v resonatorju se energija na en obhod resonatorja zmanjša za (enačba 4.32)

$$\Delta W_{\text{izgube}} = -\Lambda W = -\left(1-\mathscr{R}_1+1-\mathscr{R}_2+2\alpha L\right)W, \tag{6.1}$$

kjer so Λ celotne izgube, α so izgube na enoto poti zaradi absorpcije in sipanja, L je dolžina resonatorja, $\mathscr{R}_1$ in $\mathscr{R}_2$ pa sta odbojnosti zrcal. V ojačevalnem sredstvu, v katerem vzdržujemo obrnjeno zasedenost, pride do ojačevanja s stimuliranim sevanjem. Energija nihanja resonatorja se tako na en obhod po enačbi (5.63) poveča za

$$\Delta W_{\text{ojačenje}} = \frac{G}{1+W/W_s}\,W\,2L'. \tag{6.2}$$

Vpeljali smo saturacijsko energijo $W_s = V j_s/c$. Dolžino ojačevalnega sredstva, ki se v splošnem razlikuje od dolžine resonatorja L, smo označili z L'. Zapis sicer pogosto poenostavimo in vzamemo $L' = L$, vendar tukaj zaradi jasnosti obdržimo ločen zapis. Privzeli smo tudi, da je ojačenje na en obhod dovolj majhno, da enačbe (5.63) ni treba integrirati.

V stacionarnem stanju se zmanjšanje energije zaradi izgub ravno izenači s povečanjem energije zaradi ojačenja. Zapišemo

$$|\Delta W_{\text{izgube}}| = |\Delta W_{\text{ojačenje}}|, \tag{6.3}$$

od koder sledi

$$\Lambda W = \frac{G\,2L'}{1+W/W_s}\,W. \tag{6.4}$$

Slika 6.2: Za majhne vrednosti ojačenja G ima enačba (6.4) eno samo rešitev pri $W = 0$, pri večjih ojačenjih pa ima tudi neničelno rešitev.

Enačba (6.4) ima pri majhnem ojačenju G eno samo rešitev, to je $W = 0$, pri večjih vrednostih ojačenja G pa obstaja še druga rešitev za energijo svetlobnega nihanja

$$W = W_s \left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1 \right), \tag{6.5}$$

pri čemer je

$$G_{\mathrm{pr}} = \frac{\Lambda}{2L'}. \tag{6.6}$$

Združimo obe rešitvi: energija svetlobe v laserju je pod določeno vrednostjo ojačenja, imenujemo jo ojačenje na pragu delovanja G_{pr}, enaka nič, nad pragom pa linearno narašča z ojačenjem G (slika 6.3). Ojačenje je seveda odvisno od stopnje obrnjene zasedenosti, ta pa je povezana z močjo črpanja.

Slika 6.3: Odvisnost energije svetlobe v laserju od ojačenja

Izhodna moč laserja je enaka energiji, ki zapusti resonator skozi izhodno zrcalo, deljeni s časom obhoda resonatorja $2L/c$

$$P = (1 - \mathscr{R}_1) \frac{c}{2L} W. \tag{6.7}$$

Ker so vsi predfaktorji v gornji enačbi konstantni, je izhodna moč kar sorazmerna z energijo svetlobe v resonatorju. Odvisnost izhodne moči laserja od črpanja je tako do konstante enaka, kot je prikazana na sliki (6.3).

Gostoto svetlobnega toka, ki izhaja iz laserja, potem zapišemo

$$j = \frac{P}{S} = \frac{1}{2}(1 - \mathscr{R}_1) j_s \left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1 \right). \tag{6.8}$$

Gornja enačba seveda velja za ojačenja $G > G_{\mathrm{pr}}$.

Naloga 6.1.1 Izračunaj izhodno moč iz laserja pri dani dolžini resonatorja ($L = L'$), odbojnosti enega zrcala $\mathscr{R}_2 = 1$, notranjih izgubah na enoto dolžine α in ojačenju G. Pokaži, da je izhodna moč največja pri odbojnosti izhodnega zrcala

$$\mathscr{R}_1 = 1 - 2\alpha L \left(\sqrt{\frac{G}{\alpha}} - 1 \right). \tag{6.9}$$

6.2 Zasedbene enačbe

Za podrobnejši opis delovanja laserja zapišemo zasedbene enačbe. Enačbam za zasedenost atomskih nivojev v trinivojskem sistemu (enačbe 5.52–5.54) dodamo še enačbo za energijo lastnega nihanja v resonatorju. Še naprej obravnavajmo primer, ko je vzbujeno le eno lastno resonatorsko stanje, opazujemo pa prehode med prvim in drugim vzbujenim atomskim stanjem (slika 5.6 b).

Preden zapišemo enačbe, napravimo še nekaj poenostavitev. Najprej privzamemo, da je razpadni čas spodnjega atomskega stanja $|1\rangle$, ki ga določa koeficient A_{10}, dosti krajši od razpadnega časa zgornjega stanja $|2\rangle$. Tedaj vsi atomi iz spodnjega stanja zelo hitro preidejo v osnovno stanje in $N_1 \approx 0$, če le ni preveč stimuliranega sevanja. Zanemarimo tudi spontano sevanje iz drugega vzbujenega nivoja $A_{20} \approx 0$. Celoten sistem potem opišemo z dvema spremenljivkama: prva je N_2, ki označuje zasedenost drugega vzbujenega stanja in hkrati približno obrnjeno zasedenost; druga je število fotonov n, ki opisuje energijo v izbranem lastnem stanju resonatorja. Energija polja v resonatorju je $W = \hbar\omega n$ (enačba 5.15), ustrezna gostota energije pa $w = \hbar\omega n/V$, pri čemer je V volumen resonatorja.

Zasedbeni enačbi sta

$$\frac{dN_2}{dt} = rN - A_{21}N_2 - B_{21}gN_2\frac{\hbar\omega}{V}n = rN - A_{21}N_2 - \frac{\sigma c}{V}N_2 n \tag{6.10}$$

in

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma c}{V}N_2(n+1) - \frac{2}{\tau}n. \tag{6.11}$$

Prva enačba sledi neposredno iz enačbe (5.54) ob upoštevanju zgoraj navedenih poenostavitev. Drugo pa dobimo s sledečim razmislekom. Energija svetlobe oziroma število fotonov v resonatorju se povečuje predvsem zaradi stimuliranega sevanja, ki predstavlja zadnji člen v enačbi (6.10). Vemo pa, da je verjetnost za prehod atoma iz višjega v nižje stanje z izsevanjem fotona v izbrano stanje elektromagnetnega polja sorazmerna z $n+1$ (enačba 5.100), kjer je n število fotonov v izbranem stanju. Če torej namesto n v zadnjem členu enačbe (6.10) pišemo $n+1$, opišemo poleg stimuliranega sevanja tudi prispevek spontanega sevanja. Dodamo še člen, s katerim popišemo zmanjševanje energije svetlobe v resonatorju zaradi izgub, kar opišemo z razpadnim časom $\tau/2$ (enačba 4.30).

Gornji enačbi predstavljata sistem dveh sklopljenih diferencialnih enačb za časovni razvoj števila fotonov v resonatorskem stanju in za zasedenost zgornjega atomskega stanja. Enačbi sta nelinearni in nimata analitične rešitve. Vseeno pa lahko nekaj povemo o takem sistemu.

Poglejmo najprej stacionarne rešitve, za katere velja $\dot{N}_2 = 0$ in $\dot{n} = 0$. Iz enačbe (6.10) izrazimo N_2 in ga vstavimo v enačbo (6.11). Sledi

$$\frac{2}{\tau}n(A_{21}V + \sigma c n) = \sigma c r N(n+1). \tag{6.12}$$

Enačbo zapišemo še bolj pregledno, če vpeljemo koeficient ojačenja G (enačba 5.64) in ojačenje na pragu G_{pr} (enačbi 4.34 in 6.6)

$$G_{\mathrm{pr}}n\left(1 + \frac{\sigma c}{VA_{21}}n\right) = G(n+1). \tag{6.13}$$

Vpeljemo še brezdimenzijsko konstanto p, pri čemer upoštevamo zvezo med Einsteinovimi koeficienti (enačba 5.34)

$$p = \frac{VA_{21}}{\sigma c} = \frac{VA_{21}}{B_{21}\hbar\omega g} = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3 g} \approx \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}\Delta\omega. \tag{6.14}$$

V zadnjem izrazu smo privzeli, da je $g \approx 1/\Delta\omega$. Parameter p je približno enak produktu gostote stanj elektromagnetnega polja v resonatorju (enačba 5.6), širine atomskega prehoda in volumna, torej kar številu vseh stanj v frekvenčnem intervalu atomskega prehoda. To število je navadno precej veliko $p \sim 10^8$–10^{10}.

Naloga 6.2.1 Primerjaj izraz za p (enačba 6.14) z izrazom za saturacijsko gostoto toka j_s (enačba 5.60). Pokaži, da velja

$$p = \frac{W_s}{\hbar\omega} \tag{6.15}$$

in je torej p enako številu fotonov v resonatorju, pri katerem pride do nasičenja ojačenja, če je frekvenca nihanja resonatorja blizu centra atomske črte.

Enačbo (6.13) prepišemo

$$\frac{n^2}{p} - \left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right) n - \frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} = 0 \tag{6.16}$$

s pozitivno rešitvijo

$$n = \frac{p}{2}\left(\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right)^2 + \frac{4G}{pG_{\mathrm{pr}}}}\right). \tag{6.17}$$

Ker je p zelo veliko število, lahko koren razvijemo, če le ni ojačenje preveč blizu praga, ko je $G/G_{\mathrm{pr}} \sim 1$.

Pod pragom je $G < G_{\mathrm{pr}}$ in

$$n \approx \frac{p}{2}\left(\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right) + \left(1 - \frac{G}{G_{\mathrm{pr}}}\right) + \frac{2G}{p(G_{\mathrm{pr}} - G)}\right) = \frac{G}{G_{\mathrm{pr}} - G}. \tag{6.18}$$

Pri razvoju korena smo upoštevali, da mora biti pozitiven.

Nad pragom je število fotonov

$$n \approx p\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right) = \frac{W_s}{\hbar\omega}\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right). \tag{6.19}$$

Rezultat, ki je po pričakovanju skladen z enačbo (6.5), si oglejmo podrobneje. Pod pragom so izgube večje od črpanja in gre praktično vsa moč, ki jo dovedemo v sistem, preko spontanega sevanja v veliko število stanj elektromagnetnega polja. Število fotonov v izbranem resonatorskem nihanju je tako okoli ena do neposredne bližine praga, kjer hitro naraste (slika 6.4), nad pragom je reda velikosti p. Nad pragom povsem prevlada stimulirano sevanje v eno samo izbrano nihanje resonatorja. Prehod preko praga je zaradi velikega p tako hiter, da ga ni mogoče izmeriti. Izjema so polprevodniški laserji, katerih volumen – in posledično tudi p – je tako majhen, da je mogoče opaziti zvezen prehod preko praga.

Izračunajmo še stacionarno zasedenost zgornjega atomskega nivoja. Iz enačbe (6.11) sledi

$$N_2 = \frac{2V}{\tau\sigma c}\frac{n}{n+1} \approx \frac{2V}{\tau\sigma c}. \tag{6.20}$$

Slika 6.4: Odvisnost števila fotonov v resonatorju od ojačenja za $p = 10^5$.

Na pragu je po enačbi (6.17) $n = \sqrt{p}$. Sledi

$$N_{2\mathrm{pr}} = \frac{2V}{\tau\sigma c}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1}. \tag{6.21}$$

Ker je p zelo veliko število, iz gornjih enačb sledi, da zasedenost višjega nivoja (oziroma obrnjena zasedenost) narašča do bližine praga, nad pragom pa je praktično konstantna in skoraj natanko enaka kot na pragu. To ni težko razumeti. Nad pragom je število fotonov v resonatorju veliko in linearno narašča z močjo črpanja. S tem se povečuje hitrost praznjenja gornjega atomskega stanja s stimuliranim sevanjem, kar ravno izniči učinek povečanja črpanja. V stacionarno delujočem laserju obrnjene zasedenosti torej ni mogoče povečati nad vrednost na pragu $N_{2\mathrm{pr}}$. To ima pomembne praktične posledice, kot bomo videli v nadaljevanju.

★ Obravnava laserja z zasedbenimi enačbami je seveda zelo groba. Nismo upoštevali, da je prostorska odvisnost polja v delujočem laserju drugačna od lastnega stanja praznega resonatorja. Poleg tega smo privzeli, da so atomi lahko le v lastnih energijskih stanjih, kar je res le v primeru stacionarnih stanj brez zunanjega, časovno odvisnega polja svetlobe. Bolj podroben pristop je semiklasični model, pri katerem za opis svetlobe uporabimo klasično valovno enačbo, za atome pa kvantno mehaniko (glej poglavje 6.12). Ta model zadošča za opis skoraj vseh pojavov v laserjih razen vpliva spontanega sevanja. Za dosledno obravnavo tega je treba svetlobo opisati s pomočjo kvantne elektrodinamike, kar presega okvir te knjige.

Povzemimo na kratko, kaj smo spoznali o delovanju enofrekvenčnega laserja. Pri dovolj velikem ojačenju, ki ravno pokriva izgube resonatorja, je v stacionarnem stanju energija in s tem amplituda izbranega lastnega nihanja resonatorja različna od nič. Frekvenca svetlobe je določena z izbranim lastnim stanjem resonatorja, ki določa tudi prostorsko odvisnost valovanja v resonatorju in obliko izhodnega snopa. V navadnem stabilnem resonatorju je polje po obliki zelo blizu Gaussovemu snopu, zato je tak tudi izhodni snop. Gaussova prostorska odvisnost izhodnega snopa je morda najpomembnejša lastnost laserjev. Gaussov snop se, kot vemo, najmanj širi zaradi uklona in ga je mogoče zbrati v piko približne velikosti valovne dolžine. Laser se tako najbolj približa idealno točkastemu izvoru svetlobe.

6.3 Spektralna širina enega laserskega nihanja

Povejmo še nekaj o spektralni širini svetlobe enofrekvenčnega laserja. Če bi se lastno stanje elektromagnetnega polja v resonatorju obnašalo kot klasično harmonsko nihalo, bi bil spekter laserja neskončno ozek. Vendar imajo laserji končno spektralno širino – v idealnem primeru zaradi kvantizacije elektromagnetnega polja, v praksi pa zaradi zunanjih motenj. Poskusimo oceniti razširitev zaradi vpliva kvantizacije. Zaradi nje je poleg stimuliranega sevanja vedno prisotno tudi spontano sevanje. To predstavlja kvantni šum, ki vodi do razširitve spektra.

Predstavimo amplitudo nihanja $E(t)$ na izbranem mestu v resonatorju kot kompleksno število, ki ga v kompleksni ravnini določata dolžina $|E(t)|$ in faza φ (slika 6.5). Pri tem fazo določimo glede na neko začetno izbrano fazo. Ker je energija svetlobe sorazmerna s številom fotonov, je dolžina $|E(t)|$ sorazmerna s korenom iz števila fotonov v izbranem lastnem nihanju. Stimulirano sevanje, ki ravno pokriva izgube resonatorja, vzdržuje dolžino $|E(t)|$ praktično konstantno, nespremenjena ostaja tudi faza. Spontano sevanje velikosti amplitude nihanja ne spreminja dosti, vendar stohastična narava spontano izsevanih fotonov vpliva na njeno fazo. Majhen prispevek spontanega sevanja preko spreminjajoče se faze skrajša koherenčni čas in določa spodnjo mejo za širino spektralne črte.

Slika 6.5: Amplituda polja v resonatorju in njena sprememba zaradi spontanega sevanja

Pri spontani emisiji se izseva en foton s poljubno fazo. Prispevek h kompleksni amplitudi ima torej dolžino 1 in poljubno smer (slika 6.5). Zanima nas povprečje kvadrata spremembe faznega kota pri enem spontano izsevanem fotonu

$$\overline{(\Delta\varphi_1)^2} = \overline{\left(\frac{\cos\psi}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1}{2\overline{n}}, \tag{6.22}$$

kjer ψ označuje kot med fazo celotnega polja in spontano izsevanega fotona. Zaporedne spontane emisije so med seboj neodvisne, zato izračunamo povprečni kvadrat spremembe faze pri m emisijah tako, da seštejemo povprečne kvadrate za posamezne fotone

$$\overline{\Delta\varphi_m^2} = m\overline{\Delta\varphi_1^2} = \frac{m}{2\overline{n}}. \tag{6.23}$$

Ocenimo še število spontano izsevanih fotonov na časovno enoto. Vemo, da stimulirano sevanje ravno pokrije izgube resonatorja, zato je stimulirano izsevanih fotonov na časovno enoto $2\overline{n}/\tau$. Vemo tudi, da je razmerje med verjetnostjo za stimulirano in spontano sevanje enako številu fotonov v danem stanju polja (enačba 5.97), zato je število spontanih sevanj na časovno enoto kar $2/\tau$. Tako je število spontano izsevanih fotonov v času t enako $m = 2t/\tau$ in

$$\overline{\Delta\varphi^2(t)} = \frac{t}{\overline{n}\tau}. \tag{6.24}$$

Čas t_p, v katerem se faza znatno spremeni, je torej velikostnega reda

$$t_p \sim \overline{n}\tau = \frac{W}{\hbar\omega}\tau = \frac{P}{\hbar\omega}\tau^2. \tag{6.25}$$

Ker je število fotonov v nihanju nad pragom zelo veliko ($\sim 10^9$ v majhnem He-Ne laserju), τ pa je $\sim 10^{-7}$, je karakteristični čas za fazno razširitev idealnega laserja $t_p \sim 100$ s.

Iz enačbe (6.25) vidimo tudi, da je spektralna širina, ki je podana z $1/t_p$, obratno sorazmerna z izhodno močjo laserja. Spodnjo mejo za spektralno širino pri dani izhodni moči laserja podaja Schawlow-Townseva limita[1]

$$\Delta\nu_{\min} = \frac{\pi h \nu}{P} \Delta\nu_R^2, \tag{6.26}$$

pri čemer $\Delta\nu_R$ predstavlja širino nihanja praznega resonatorja.[2] V neposredni bližini praga, kjer je $\overline{n} \sim 1$, je spektralna širina približno enaka širini nihanj praznega resonatorja.

Dejanski laserji seveda nimajo niti približno tako ozkega spektra, kot smo ga pravkar ocenili. Vemo, da je frekvenca laserja določena z dolžino resonatorja ($\nu = Nc/2L$), pri čemer je N zelo veliko celo število. Že majhna sprememba dolžine resonatorja povzroči spremembo frekvence laserja, pri znatnejši spremembi dolžine pa lahko pride tudi do preskoka vzbujenega stanja resonatorja, to je števila N. Dolžina resonatorja se spreminja predvsem zaradi zunanjih mehanskih motenj in zaradi spreminjanja temperature. Če se posebej ne potrudimo s konstrukcijo resonatorja, so fluktuacije frekvence kar reda velikosti razmika med sosednimi stanji resonatorja, to je reda velikosti $\sim$ 100 MHz. Fluktuacije dolžine je mogoče zmanjšati s skrbno konstrukcijo, temperaturno stabilizacijo in uporabo materialov z majhnim toplotnim raztezkom. Na tak način je mogoče dobiti laser z efektivno spektralno širino pod $\sim$ 1MHz.

★ Zapisali smo, da lahko s posebno konstrukcijo laserjev dosežemo spektralno širino pod $\sim$ 1MHz. Vendar najmanjša dosežena spektralna širina znaša $\sim$ 10 mHz, kar je še 8 velikostnih redov manj! Gre za prav poseben laser iz monokristalov silicija, hlajenega na -150 °C. Fluktuacije dolžine resonatorja so pogojene s termičnimi fluktuacijami v odbojnih plasteh, ki znašajo okoli 10^{-17}m. Koherenčna dolžina takega laserja je več milijonov kilometrov[3].

Velja opozoriti, da je narava spektralne razširitve v laserju drugačna kot v navadnih svetilih. V drugem poglavju smo videli, da intenziteta svetlobe navadnega svetila fluktuira na časovni skali koherenčnega časa, ki je obraten spektralni širini (poglavje 2.2). Šum navadnih svetil je torej amplitudno moduliran šum. Pri enofrekvenčnem laserju je drugače. Amplituda in intenziteta izhodne svetlobe sta konstantni, fluktuira le frekvenca oziroma faza. Šum laserja je torej v obliki frekvenčne modulacije.

6.4 Primerjava laserjev in navadnih svetil

Primerjajmo enofrekvenčni laser, v katerem je vzbujeno le eno osnovno stanje resonatorja Gaussove oblike, z navadnim nekoherentnim izvorom svetlobe.

Svetlobni snop iz laserja ima dve takoj očitni odliki: je zelo usmerjen in zelo enobarven. Prva lastnost je posledica tega, da je lastno stanje stabilnega resonatorja Gaussove oblike in je zato tak tudi izhodni snop. Divergenca Gaussovega snopa je posledica uklona in je najmanjša možna. Valovne fronte izhodne svetlobe so gladke in na dani razdalji ves čas enake, zato je laserski snop prostorsko idealno koherenten. Koherenten Gaussov snop lahko z ustrezno optiko zberemo v piko velikosti valovne dolžine, s čimer dosežemo že pri razmeroma majhni izhodni moči zelo veliko gostoto svetlobnega toka. To je zelo uporabno v tehnologiji, na primer za natančno in čisto obdelavo materialov, ter v medicini za zahtevne kirurške posege.

[1] Ameriška fizika in nobelovca Arthur Leonard Schawlow, 1921–1999, in Charles Hard Townes, 1915–2015.

[2] Natančnejši izračun odstopa od preprosto izpeljanega za faktor 2. V zapisanem izrazu je že upoštevan pravilen predfaktor.

[3] Phys. Rev. Lett. **118**, 263202 (2017).

Kako pa je z navadnimi svetili? V njih atomi sevajo neodvisno, zato izsevana svetloba ni prostorsko koherentna. Valovna fronta na danem mestu je nepravilna in se v koherenčnem času znatno spremeni. Vendar tudi iz svetlobe navadnega nekoherentnega svetila lahko pridobimo koherenten snop, če na dano razdaljo od svetila postavimo zaslonko, ki je manjša od koherenčne ploskve na tistem mestu (glej razdelek 2.5). Ocenimo moč tako dobljenega koherentnega snopa za zaslonko.

Svetilo naj ima svetlost B[4]. Moč koherentnega snopa za zaslonko, ki prepušča svetlobo skozi prostorski kot $\Delta\Omega$, je (slika 6.6)

$$P = BS_0\Delta\Omega = \frac{BS_0S_c}{z^2} \sim \frac{BS_0}{z^2}\frac{\lambda^2 z^2}{S_0} = B\lambda^2. \tag{6.27}$$

Pri tem je S_0 površina svetila, z oddaljenost zaslonke od svetila, S_c pa velikost koherenčne ploskve, za katero smo uporabili oceno (enačba 2.35). Da iz $S_0 = 1$ mm^2 velikega svetila dosežemo koherenten snop svetlobe z valovno dolžino okoli 550 nm, mora biti premer zaslonke, ki jo postavimo 1 m od izvora, okoli 0,6 mm. V tem primeru znaša moč, ki prehaja skozi zaslonko, pri svetlosti 100 W/cm^2 le približno $3 \cdot 10^{-7}$ W. Pri podobni divergenci žarka je močno navadno svetilo torej štiri rede velikosti šibkejše od zelo šibkih laserjev z močjo 1 mW.

Slika 6.6: K izračunu moči koherentnega snopa svetlobe iz nekoherentnega svetila

Druga odlična lastnost svetlobe iz enofrekvenčnega laserja je njena zelo majhna spektralna širina. Z nekaj truda je ta lahko pod 1 kHz, emisijske črte v plinu pa so zaradi Dopplerjeve razširitve široke vsaj nekaj GHz, pa še to le v razmeroma redkem in hladnem plinu, kjer je svetlost majhna. Primerjajmo spektralno gostoto moči laserja in navadnih svetil. Majhen He-Ne laser seva 1 mW v približno 10^7 Hz in spektralna gostota moči je $dP/d\nu \sim 10^{-10}$ W/Hz. Po drugi strani zelo svetla živosrebrna svetilka seva v močno razširjene spektralne črte s širino okoli 10 nm, kar ustreza $\sim 10^{13}$ Hz. Spektralna gostota v koherentnem snopu, ki smo ga pripravili iz navadne svetilke, je tako le okoli $3 \cdot 10^{-20}$ W/Hz. Šolski He-Ne laser torej prekaša najmočnejše nekoherentno svetilo za 10 velikostnih redov. Z laserji je seveda mogoče doseči znatno večje moči, v sunkih tipično do okoli 10^{12} W, tako da po spektralni gostoti moči v koherentnem snopu laserji prekašajo običajna svetila 20–25 velikostnih redov. Verjetno v zgodovini težko najdemo še kak drug izum, ki je prinesel tolikšno izboljšavo v neki bistveni količini in tako ni nenavadno, da je prihod laserjev v začetku 60-ih let povzročil preporod optike.

[4] Svetilnost je moč, izsevana v dan prostorski kot $I = dP/d\Omega$; svetlost pa je svetilnost na enoto ploskve $B = I/S = dP/Sd\Omega$.

6.5 *Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo

Laserska svetloba ima končno spektralno širino, ki je v realnih sistemih pogosto pogojena s fluktuacijami dolžine resonatorja ali temperature ojačevalnega sredstva. Eden od načinov zoženja spektralne črte je zato aktivna stabilizacija dolžine resonatorja. Ideja je sledeča: svetlobo, ki izhaja iz laserja, primerjamo z nekim standardom in iz razlike določimo spremembo dolžine. S piezoelektričnim nosilcem nato premaknemo eno od zrcal in popravimo dolžino resonatorja.

Poglavitna težava je najti dovolj stabilen primerjalni standard za frekvenco. Ena možnost je, da izhodno svetlobo usmerimo skozi pomožni interferometer, ki je skoraj v resonanci z laserjem in ima dovolj ozek vrh prepustnosti. Že majhen premik frekvence laserja povzroči spremembo prepuščenega svetlobnega toka. Na prvi pogled je videti, da z uporabo interferometra nismo pridobili, saj je tudi resonančna frekvenca interferometra stabilna le toliko, kot je stabilna njegova dolžina. Vendar je z izolacijo in temperaturno stabilizacijo mogoče ohranjati dolžino praznega resonatorja – interferometra – znatno natančneje kot dolžino resonatorja, v katerem se nahaja aktivno sredstvo, ki mu moramo dovajati energijo.

Druga možnost je stabilizacija laserja na primerno molekularno absorpcijsko črto. Te so v razredčenem plinu lahko zelo ozke, zato je tudi spekter laserja lahko izredno ozek, pod 1 kHz. Pri tem moti Dopplerjeva razširitev absorpcijske črte, ki pa se ji je mogoče izogniti s pojavom nasičenja absorpcije. V poglavju (5.9) smo spoznali, da se pri dvakratnem prehodu monokromatskega snopa svetlobe skozi plin v nasprotnih smereh pojavi v sredini Dopplerjevo razširjene črte Lambova vdolbina, ki ima obliko homogeno razširjene črte (slika 5.9). Homogena širina je navadno mnogo manjša od Dopplerjeve in je zato vdolbina uporabna kot frekvenčni standard.

S spreminjanjem dolžine resonatorja spreminjamo frekvenco laserja in ko se ta znotraj homogene širine približa sredini absorpcijske črte (pri ω_0), se absorpcija zmanjša in moč laserja poveča. To naredimo tako, da je eno od zrcal pritrjeno na piezoelektrični nosilec, na katerega vodimo izmenično napetost s krožno frekvenco Ω. Periodično spreminjanje dolžine laserja vodi do spreminjajoče se izhodne moči. Kadar je krožna frekvenca laserja enaka ω_0, se moč spreminja z dvojno krožno frekvenco modulacije 2Ω. Kadar pa srednja krožna frekvenca laserja odstopa od ω_0, se izhodna moč pri odmiku v zrcala v eno stran spremeni drugače kot v drugo, kar pomeni, da je v izhodnem signalu tudi komponenta s krožno frekvenco Ω. Da držimo srednjo krožno frekvenco laserja enako ω_0, moramo torej meriti komponento izhodne moči pri modulacijski frekvenci in jo s povratno zanko ohranjati na nič.

Napravimo še kvantitativno oceno opisane stabilizacijske sheme. Odvisnost izhodne moči od krožne frekvence laserja ω lahko približno zapišemo v obliki

$$P(\omega) = P_0 + \frac{P_1 \gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \tag{6.28}$$

pri čemer je P_0 moč laserja brez saturacijskega vrha pri ω_0, P_1 povečanje moči pri ω_0 in γ homogena širina črte. Predpostavili smo, da se ojačenje laserja in nehomogeno razširjeni del absorpcije ne spreminjata znatno prek homogene širine absorberja in je zato moč P_0 približno konstantna. Krožno frekvenco laserja moduliramo, tako da je

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega + a \sin \Omega t. \tag{6.29}$$

Z $\Delta\omega$ smo označili odstopanje srednje krožne frekvence laserja od sredine absorpcijske črte ω_0. Če sta a in $\Delta\omega$ majhna v primerjavi s homogeno širino γ, lahko imenovalec v enačbi (6.28) razvijemo

$$P(\omega) = P_0 + P_1 \left(1 - \frac{\Delta\omega^2}{\gamma^2} + \frac{2}{\gamma^2} a \Delta\omega \sin \Omega t - \frac{a^2}{\gamma^2} \sin^2 \Omega t \right). \tag{6.30}$$

Amplituda signala pri krožni frekvenci modulacije Ω je

$$P(\Omega) = \frac{2P_1 a \Delta\omega}{\gamma^2}. \tag{6.31}$$

Najmanjša moč, ki jo ločeno zaznamo na detektorju, je določena s šumom meritve. Kot bomo videli v poglavju (9.9), je najmanjša sprememba svetlobne moči, ki jo lahko izmerimo, enaka

$$P_N \approx \sqrt{\hbar\omega P \frac{1}{\tau}}, \tag{6.32}$$

pri čemer je P celotna vpadna svetlobna moč, τ pa čas meritve. Vzemimo na primer He-Ne laser, stabiliziran na jodove pare. Povprečna moč laserja naj bo $P_0 = 10$ mW in $P_1 = 0,1$ mW. Širina absorpcijske črte je $\gamma = 10^6$ s^{-1}. Izberimo amplitudo modulacije $a = 10^5$ s^{-1} in $\tau = 10^{-4}$ s. Časovna konstanta τ ne sme biti prevelika, določa namreč, kako hitro prilagajamo dolžino laserja. Za najmanjšo zaznavno moč pri Ω dobimo $P(\Omega) = 5 \times 10^{-9}$ W. Najmanjše merljivo odstopanje krožne frekvence laserja je tedaj

$$\Delta\omega_N = \frac{P_N \gamma^2}{2P_1 a} = 250 \text{ s}^{-1}. \tag{6.33}$$

Takšno in še boljšo stabilnost frekvence se danes lahko doseže.

★ Na absorpcijsko črto stabiliziranega laserja navadno ne uporabljamo direktno, temveč z njim kontroliramo drug laser. Del izhodne svetlobe iz obeh laserjev zmešamo na detekcijski fotodiodi. V signalu dobimo utripanje, ki je enako razliki frekvenc obeh laserjev. S spreminjanjem dolžine drugega laserja skrbimo, da je frekvenca utripanja konstantna. Na ta način lahko v ozkem frekvenčnem intervalu še spreminjamo frekvenco drugega laserja. Z opazovanjem utripanja med dvema stabiliziranima laserjema določamo tudi njihovo stabilnost.

6.6 Večfrekvenčni laser

Do zdaj smo obravnavali laserje, v katerih je bilo vzbujeno eno samo stoječe valovanje. Vendar je ojačevalna širina večine aktivnih (ojačevalnih) sredstev navadno večja od razlike med frekvencami posameznih stanj resonatorja. V plinih, na primer, je ojačevalna širina zaradi Dopplerjevega pojava vsaj nekaj GHz, lastne frekvence resonatorja pa so pri 30 cm dolgem resonatorju razmaknjene za 500 MHz. Tako se lahko zgodi, da ojačenje v laserju za več lastnih nihanj hkrati presega ojačenje na pragu. Takrat je v resonatorju vzbujenih več lastnih nihanj in svetloba iz takega večfrekvenčnega laserja ni monokromatska, temveč je sestavljena iz množice ozkih črt znotraj ojačevalnega pasu. Izsevana svetloba ni bistveno bolj monokromatska od ustrezne spektralne komponente svetlečega plina. Ostaja pa seveda prostorsko koherentna.

Za holografijo, interferometrijo in nekatere spektroskopske uporabe potrebujemo ozko spektralno črto. Zato moramo poskrbeti, da je v laserju vzbujeno le eno samo lastno nihanje resonatorja, najbolje tisto, ki je najbližje vrhu ojačenja aktivnega sredstva. To dosežemo tako, da za vsa ostala nihanja povečamo izgube, na primer s Fabry-Perotovim etalonom, ki ga vstavimo v laserski resonator (slika 6.7). Njegova prepustnost je odvisna od krožne frekvence svetlobe ω, debeline ploščice L, lomnega količnika n, odbojnosti na stenah $\mathscr{R}$ in nagiba glede na os resonatorja φ (slika 4.2). Zapišemo jo z enačbo (4.9)

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2} \sin^2\left(\frac{n\omega}{c} L \cos\varphi\right)}. \tag{6.34}$$

Slika 6.7: Shema laserja s Fabry-Perotovim etalonom

Debelino etalona in njegov nagib izberemo tako, da vrh prepustnosti sovpada z izbranim lastnim stanjem resonatorja. Izgube za ostala nihanja, ki bi sicer bila ojačena, se tako povečajo in laser sveti le pri eni sami izbrani frekvenci. Ta proces je shematsko prikazan na sliki (6.8): izmed vseh možnih stanj v resonatorju (a) svetijo le tista, za katere je ojačenje nad pragom (b). Ko v resonator dodamo Fabry-Perotov etalon z razmeroma velikim razmikom med sosednjimi vrhovi prepustnosti (c), je ojačeno eno samo nihanje (d). Ker zadošča že zmerno povečanje izgub, je odbojnost sten etalona navadno dokaj nizka, pod 0,5.

Slika 6.8: Lastne frekvence resonatorja (a) in frekvenčna odvisnost ojačenja z označenim pragom delovanja (b). Z zeleno so označene tiste lastne frekvence, ki se v laserju ojačujejo. Ko dodamo Fabry-Perotov etalon z dano prepustnostjo (c), povečamo izgube za vse načine, ki bi sicer bili ojačeni, razen za enega. Tako dosežemo delovanje laserja pri eni sami frekvenci (d).

Opisali smo, kako v laserju dosežemo delovanje pri enem samem longitudinalnem nihanju. Poleg tega je treba omejiti tudi ojačenje višjih prečnih nihanj. To navadno dosežemo z zaslonkami, saj so snopi višjih redov bolj razširjeni od osnovnega.

★ Nagib etalona omogoča natančno spreminjanje izbrane frekvence, poleg tega pa je nujen, da se neprepuščena svetloba odbije ven iz smeri osi resonatorja. Če bi bila os etalona vzporedna z osjo resonatorja, bi se pojavile dodatne resonance, kar bi močno motilo delovanje laserja. Namesto Fabry-Perotovega etalona se uporabljajo tudi prizme in uklonske mrežice.

6.7 Relaksacijske oscilacije

Stacionarno delovanje laserjev smo že dodobra spoznali. Za obravnavo nestacionarnega delovanja se moramo vrniti k obravnavi zasedbenih enačb (6.10) in (6.11). Na splošno je treba zapisan sistem diferencialnih enačb reševati numerično, vseeno pa lahko nekaj povemo o obnašanju laserja v bližini stacionarnega delovanja.

Spet se omejimo na enofrekvenčni laser, v katerem zasedenost vzbujenega stanja in število fotonov v njem opišemo z enačbama (6.10) in (6.11). Najprej zaradi preglednosti vpeljemo brezdimenzijski čas $t' = tA$ in $\tau' = \tau A$, kar pomeni, da merimo čas v enotah življenjskega časa laserskega nivoja. Ponovno uporabimo parameter $p = VA/(B\hbar\omega g)$ (enačba 6.14), ki pomeni število lastnih stanj elektromagnetnega polja v volumnu V in znotraj spektralne širine laserskega prehoda. Enačbi zapišemo

$$\frac{dN_2}{dt'} = -\frac{nN_2}{p} - N_2 + N_{20} \tag{6.35}$$

$$\frac{dn}{dt'} = \frac{nN_2}{p} - \frac{2}{\tau'}n. \tag{6.36}$$

Pri tem smo vpeljali konstanto $N_{20} = rN/A$, ki ima tudi nazoren pomen. Predstavlja zasedenost, ki bi jo dobili pri danem stacionarnem črpanju, če v izbranem stanju ne bi bilo fotonov in s tem ne stimuliranega sevanja. Meri torej moč črpanja. V enačbi za hitrost spreminjanja števila fotonov smo zanemarili prispevek spontanega sevanja, za katerega smo že ugotovili, da se pozna le do praga.

Poiščimo približne rešitve sistema sklopljenih diferencialnih enačb z linearizacijo. Naj laser najprej deluje stacionarno, v nekem trenutku pa se nekoliko izmakne iz stacionarnega stanja. To se lahko zgodi, na primer, če v nekem trenutku spremenimo moč črpanja. Trenutno zasedenost N_2 in število fotonov n lahko zapišemo v obliki

$$N_2 = N_{2s} + x \quad \text{in} \quad n = n_s + y, \tag{6.37}$$

kjer sta N_{2s} in n_s vrednosti v stacionarnem stanju. Zanju velja

$$N_{2s} = \frac{2p}{\tau'} \quad \text{in} \quad n_s = p\frac{N_{20} - N_{2s}}{N_{2s}} = p(a-1). \tag{6.38}$$

Prva enačba je v skladu s tem, da je stacionarna zasedenost enaka zasedenosti na pragu, ta pa je odvisna od izgub resonatorja. Razmerje $a = N_{20}/N_{2s}$ je mera za moč črpanja in mora biti v delujočem laserju večje od 1. V večini praktičnih primerov doseže vrednosti $a \sim 5$.

Vstavimo nastavka (enačbi 6.37) v enačbi (6.35 in 6.36). Dobimo sistem enačb

$$\frac{dx}{dt'} = -\frac{n_s N_{2s}}{p} - N_{2s} + N_{20} - \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - x \tag{6.39}$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{n_s N_{2s}}{p} - \frac{2}{\tau'}n_s + \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - \frac{2}{\tau'}y. \tag{6.40}$$

Ker sta x in y majhna v primerjavi s stacionarnimi vrednostmi, lahko mešan produkt xy zanemarimo. Vsi členi, ki vsebujejo le stacionarne vrednosti, dajo ravno 0, saj smo jih tako določili. Če upoštevamo še izraza za stacionarni vrednosti (enačbi 6.38), sta linearizirani diferencialni enačbi za odmika od stacionarnih vrednosti

$$\frac{dx}{dt'} = -ax - \frac{2}{\tau'}y \quad \text{in} \quad \frac{dy}{dt'} = (a-1)x. \tag{6.41}$$

Rešitev linearnega sistema diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti rešimo z nastavkom

$$x = x_0 e^{\lambda t'} \quad \text{in} \quad y = y_0 e^{\lambda t'}. \tag{6.42}$$

Dobljeni homogeni sistem linearnih enačb

$$(a+\lambda)x_0 + \frac{2}{\tau'} y_0 = 0 \tag{6.43}$$

$$-(a-1)x_0 + \lambda y_0 = 0 \tag{6.44}$$

ima netrivialno rešitev le, če je njegova determinanta enaka nič

$$\lambda^2 + a\lambda + \frac{2}{\tau'}(a-1) = 0. \tag{6.45}$$

Rešitvi sta

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2}{\tau'}(a-1)}. \tag{6.46}$$

Obnašanje rešitve je odvisno od velikosti brezdimenzijskega relaksacijskega časa nihanja resonatorja $\tau' = A\tau$.

Kratek račun pokaže, da je za $\tau' > 2$ izraz pod korenom za vse vrednosti a pozitiven in laser se vrača v stacionarno stanje eksponentno. Za $\tau' < 2$ pa je koren v določenem območju parametra a imaginaren in laser se vrača v stacionarno stanje z dušenim nihanjem, ki mu pravimo relaksacijske oscilacije. Primer takega nihanja pri vključitvi laserja kaže slika (6.9). Opazimo, da sta tako frekvenca relaksacijskih oscilacij kot tudi karakteristični čas dušenja oscilacij odvisna od parametra a, torej od moči črpanja.

Slika 6.9: Relaksacijske oscilacije števila fotonov laserja po vklopu

Poglejmo še primer. Vzemimo vrednost $\tau \sim 10^{-7}$ s in razpadno konstanto laserskega nivoja $A \sim 10^5$/s. Tedaj je $\tau' \sim 10^{-2}$ in relaksacijske oscilacije se pojavijo pri vseh dosegljivih vrednostih črpanja nad pragom, to je za $a > 1$. Ker a v praksi ni nikoli dosti večji od 3–5, je krožna frekvenca oscilacij v brezdimenzijskih enotah približno enaka $\omega_r' \sim 1/\sqrt{\tau'}$. Ko preidemo nazaj na prave enote časa, dobimo $\omega_r \sim \sqrt{A/\tau}$. Krožna frekvenca relaksacijskih oscilacij je v tem primeru velikostnega reda geometrijske sredine med razpadnima konstantama nihanja resonatorja in atomskega stanja. Tipične vrednosti frekvence relaksacijskih oscilacij so $\sim 10^5$ Hz, karakteristični čas dušenja pa $\sim 10^{-5}$ s.

★ Relaksacijske oscilacije so praktično pomembne, saj določajo zgornjo mejo hitrosti, s katero lahko izhodna moč laserja sledi modulaciji črpanja. Poleg tega se pri tej frekvenci pojavi resonanca, pri kateri se šum črpanja ojačeno prenaša v šum izhodne moči.

6.8 Sunkovni laserji

Kadar potrebujemo veliko izhodno moč svetlobe iz laserja pri zmerni povprečni porabi energije, zvezno delujoči laserji, ki smo jih obravnavali do zdaj, niso primerni. Poslužiti se moramo sunkovnih laserjev, ki v kratkem časovnem intervalu delujejo z zelo veliko izhodno močjo.

Poglejmo primer. Močan zvezno delujoč laser ima izhodno moč 10 kW. Sunkovni laser pa naj oddaja svetlobo v 10 ns dolgih sunkih s povprečno energijo 1 J in s ponovitvijo 1000/s. Povprečna moč, s katero deluje tak laser, je 1 kW, moč, ki jo dosega v sunkih, pa je 100 MW. Tako pri nižji povprečni moči laserja dosežemo moči, ki so za 5–10 velikostnih redov večje od moči zvezno delujočih laserjev.

V grobem ločimo dva načina sunkovnega delovanja laserjev. V prvem primeru periodično spreminjamo črpalno moč, v drugem pa periodično spreminjamo izgube v resonatorju. V slednjo skupino uvrščamo laserje na preklop dobrote in laserje, ki uklepajo faze valovanj.

Obravnavajmo najprej najpreprostejši način, pri katerem periodično moduliramo črpanje. To dosežemo na primer z bliskavko ali drugim sunkovnim laserjem. V intervalu črpanja je ojačenje večje od izgub in svetloba izhaja iz laserja, ko pa črpanja ni, so izgube prevelike in laser ne sveti (slika 6.10 levo). Za dosego velike obrnjene zasedenosti v ojačevalnem sredstvu mora biti sprememba črpanja zelo hitra, da v času preklopa še ne pride do znatnega povečanja števila fotonov. Najbolj pogosto se modulacija črpanja uporablja v polprevodniških laserjih, saj v njih črpanje poteka z električnim tokom, ki ga je zelo preprosto modulirati z razmeroma velikimi frekvencami.

Slika 6.10: Delovanje sunkovnega laserja z periodično moduliranim črpanjem (levo), pri katerem lahko pride do neželenih oscilacij (desno)

Pri modulaciji črpanja se lahko pojavi težava. Ko ob močnem črpanju obrnjena zasedenost znatno preseže zasedenost praga (v nestacionarnem stanju je to mogoče), laser posveti in v kratkem času zasedenost pade nazaj pod prag. Če tedaj črpanje še traja, zasedenost naraste in laser ponovno posveti. To se lahko večkrat ponovi. Razmiki med zaporednimi sunki so reda velikosti periode relaksacijskih oscilacij, so pa lahko precej nepravilni (slika 6.10 desno). Pri takem režimu delovanja v posameznem sunku ne dobimo razpoložljive energije črpanja v enem samem lepo oblikovanem sunku, kar močno omejuje uporabnost tega pristopa.

6.9 Delovanje v sunkih s preklopom dobrote

Namesto modulacije črpanja lahko v sunkovnih laserjih periodično spreminjamo izgube. Čim večje so namreč izgube, višji je prag za delovanje laserja in večja je lahko stopnja obrnjene zasedenosti. Tako v sistemu atomov shranimo več energije, ki se lahko izseva iz sistema preko stimuliranega sevanja. Ko je enkrat ustvarjena velika obrnjena zasedenost, izgube zelo hitro zmanjšamo. Optično ojačenje je veliko in energija svetlobe v kratkem času močno naraste. S tem se tudi obrnjena zasedenost hitro zniža na vrednost močno pod pragom. Predstavljamo si lahko, da dobimo prvi nihaj relaksacijskih oscilacij, le da je začetno stanje daleč od stacionarnega in zato linearni približek ne drži več. Iz laserja dobimo kratek in zelo močan sunek svetlobe, pri čemer je energija sunka skoraj tolikšna kot je bila energija obrnjene zasedenosti. Tipične dolžine sunkov, ki jih dosežemo na ta način, so $t \sim 10$ ns, sunki pa se ponavljajo s frekvenco $\nu \sim 1$–100 kHz. Dogajanje v laserju kaže slika (6.11).

★ V elektrotehniki se izgube resonatorjev podajajo z dobroto Q, to je razmerjem frekvence lastnega stanja in njegove širine. Ker s povečanjem izgub spremenimo širino črte in z njo dobroto, opisano tehniko imenujemo preklop dobrote.

Slika 6.11: Izgube (Λ), relativno ojačenje (G/G_p), zasedenost višjega nivoja (N_2) in izsevana moč laserja (P) v odvisnosti od časa, kadar laser deluje v režimu preklopa dobrote.

Izgube resonatorja je mogoče spreminjati na več načinov. Najpreprosteje je mehansko, na primer z vrtečo prizmo ali zrcalom. Tedaj je resonator uglašen le v kratkem trenutku, ko žarek vpada pravokotno na zrcalo resonatorja. Bolj razširjen način je z vgradnjo elektro-optičnega ali akusto-optičnega modulatorja, o katerih bomo govorili v nadaljevanju (poglavje 10). Na kratko povejmo, da z njimi lahko izgube preklapljamo zelo hitro, saj to naredimo s spreminjajočo se električno napetostjo.

Kot smo že povedali, sistema nelinearnih enačb za zasedenost in število fotonov (enačbi 6.10 in 6.11) ne moremo analitično rešiti. Preden jih podrobneje pogledamo, napravimo nekaj ocen. Dolžina izhodnega sunka je odvisna od hitrosti, s katero se izprazni zgornji laserski nivo. To se ne more zgoditi hitreje kot v nekaj preletih sunka skozi resonator. Trajanje sunka je torej vsaj nekajkrat $2L/c$, to je za 15 cm dolg resonator vsaj nekaj ns.

Ocenimo še hitrost naraščanja števila fotonov na začetku in njegovega upadanja na koncu sunka. Še enkrat zapišemo enačbi za zasedenost in za število fotonov, pri čemer upoštevajmo, da nas zanima le dogajanje v času sunka, ki je zelo kratek v primerjavi z atomskim razpadnim časom, zato ustrezni člen v enačbi (6.10) zanemarimo. Navadno je tudi črpanje prešibko, da bi med sunkom samim znatno vplivalo na zasedenost, zato lahko člen rN izpustimo. Seveda pa je črpanje upoštevano v tem, da je v sistemu velika začetna zasedenost N_{20}. Tako ostane

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{\sigma c}{V} n N_2 \tag{6.47}$$

in

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma c}{V} n N_2 - \frac{2}{\tau} n. \tag{6.48}$$

Na začetku sunka je n majhen, N_2 pa velik in njegova vrednost se ne razlikuje dosti od začetne vrednosti N_{20}. Število fotonov na začetku sunka tako narašča približno eksponentno

$$n(t) = n_0 e^{t N_{20} \sigma c/V} = n_0 e^{t/\tau_r}. \tag{6.49}$$

Začetnega števila fotonov ne poznamo, vemo pa, da je velikostnega reda 1, saj predstavlja spontano emisijo. Da n znatno naraste, recimo nad 10^{10} fotonov, je potreben čas blizu 25 τ_r. Proti koncu sunka N_2 pojema zaradi sevanja svetlobe in člen z N_2 lahko zanemarimo. Ostane samo še en člen, ki da preprosto rešitev

$$n(t) = \tilde{n}_0 e^{-2t/\tau}. \tag{6.50}$$

Eksponentno pojemanje števila fotonov na koncu sunka je torej določeno z izgubami v resonatorju (enačba 4.34).

Dogajanja v vmesnih časih ne moremo enostavno popisati, lahko pa najdemo medsebojno zvezo med n in N_2. Izrazimo dt iz enačbe (6.47) in ga vstavimo v enačbo (6.48). Sledi

$$dn = -dN_2 + \frac{\tilde{N}_2}{N_2} dN_2 \ , \tag{6.51}$$

kjer smo zapisati $\tilde{N}_2 = 2V/(\sigma c \tau)$. Enačbo brez težav integriramo

$$\boxed{n = N_{20} - N_2 + \tilde{N}_2 \ln \frac{N_2}{N_{20}}.} \tag{6.52}$$

Pri tem smo privzeli, da je na začetku sunka $n = 0$ in $N_2 = N_{20}$. Iz dobljene zveze najprej izračunamo, kolikšna je zasedenost na koncu sunka N_{2k}. Izhajamo iz pogoja, da je število fotonov na koncu sunka $n = 0$, kar da transcendentno enačbo za N_{2k}

$$\ln \frac{N_{2k}}{N_{20}} = \frac{N_{2k}}{\tilde{N}_2} - \frac{N_{20}}{\tilde{N}_2}, \tag{6.53}$$

ki jo lahko preprosto numerično rešimo (slika 6.12).

Slika 6.12: Rešitev enačbe (6.53)

Če vpeljemo parametra $x = N_{2k}/\tilde{N}_2$ in $a = N_{20}/\tilde{N}_2$, se enačba prepiše v

$$\ln\frac{x}{a} = x - a. \tag{6.54}$$

Za vrednosti $a < 1$ oziroma $a = N_{20}/\tilde{N}_2$ enačba nima rešitev in v $\tilde{N}_2$ prepoznamo vrednost na pragu delovanja. Kadar je začetna zasedenost N_{20} le malo nad pragom, končna zasedenost N_{2k} ne pade dosti pod prag, zato je izraba energije slabša. Pri večjih začetnih vrednostih N_{20} pade končna zasedenost praktično na nič. Za $a = 2$, na primer, je $x = 0,41$, medtem ko je že pri $a = 4$ vrednost x le še 0,08.

Ko poznamo začetno in končno vrednost zasedenosti, lahko izračunamo celotno energijo sunka $W = \hbar\omega(N_{20} - N_{2k})$. Če je začetna vrednost dovolj nad pragom, lahko končno zasedenost zanemarimo in celotna energija sunka je

$$W \approx \hbar\omega N_{20}. \tag{6.55}$$

Naloga 6.9.1 Trenutna moč, ki izhaja iz laserja, je dana s

$$P = n\hbar\omega\frac{2}{\tau}. \tag{6.56}$$

Pokaži, da je vrh sunka dosežen natanko tedaj, ko pade zasedenost na vrednost pri pragu in je $N_2 = \tilde{N}_2$.

Največja izsevana moč iz laserja je

$$P_{\max} = \frac{n_{\max}\hbar\omega}{2L/c}(1-\mathscr{R}) = \frac{2n_{\max}\hbar\omega}{\tau}, \tag{6.57}$$

pri čemer smo z $n_{\max}$ označili število fotonov v vrhu sunka. Ko vstavimo še vrednost za $n_{\max}$ pri $N_2 = \tilde{N}_2$ (glej nalogo 6.9.1), dobimo

$$P_{\max} = \frac{2\hbar\omega}{\tau}\left(N_{20} - \tilde{N}_2 - \tilde{N}_2\ln(N_{20}/\tilde{N}_2)\right). \tag{6.58}$$

Ker je navadno $N_{20} \gg \tilde{N}_2$, je $n_{\max} \approx N_{20}$ in

$$P_{\max} \approx \frac{2}{\tau}\hbar\omega N_{20}. \tag{6.59}$$

Poglejmo primer. Naj bo presek za stimulirano sevanje $\sigma = B\hbar\omega g/c$ okoli 10^{-19}cm^2 in začetna gostota zasedenosti $N_{20}/V = 10^{19}\text{cm}^3$, kar so tipični podatki za neodimov laser. Tedaj je $\tau_r =$ 30 ps in čas naraščanja sunka okoli ~ 1 ns. Število fotonov se nato zmanjšuje s karakterističnim razpadnim časom resonatorja $\tau/2 \sim 2L/(c(1-\mathscr{R}))$. Za dosego kratkih sunkov svetlobe je zato v laserjih s preklopom dobrote odbojnost izhodnega zrcala navadno dokaj nizka, recimo $0,5$. Pri $L = 15$ cm je tako $\tau = 4$ ns. Celotno trajanje sunka je v izbranem primeru tako $\sim$ 10 ns, pri čemer traja okoli 100 ns od preklopa dobrote do trenutka, ko sunek zraste iz šuma spontanega sevanja. Energija sunka je blizu $N_{20}\hbar\omega$, to je pri aktivnem volumnu $0,5\ \text{cm}^2$ nekaj desetink joula. Od tod lahko ocenimo, da je moč v vrhu sunka velikostnega več 10 MW.

6.10 Uklepanje faz

Krajše sunke kot s preklopom dobrote je mogoče dobiti z uklepanjem faz. Pri tem gre za povsem drugačen način, ki je prav presenetljiva manifestacija koherentnosti laserske svetlobe. Spoznali smo že, da je v laserju navadno vzbujenih več lastnih nihanj hkrati, pri čemer so njihove krožne frekvence enakomerno razmaknjene za $\Delta\omega = \pi c/L$ (enačba 4.5). Celotno električno polje v neki točki v laserju zapišemo kot vsoto

$$E(t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} A_m e^{-i(\omega_0 + m\Delta\omega)t + i\varphi_m(t)}, \tag{6.60}$$

pri čemer je N število vseh vzbujenih nihanj. Upoštevali smo, da ima vsako vzbujeno nihanje lahko poljubno fazo $\varphi_m(t)$, ki je na splošno predvsem zaradi zunanjih motenj slučajna funkcija časa. Zaradi tega se tudi celotno polje v resonatorju slučajno spreminja, kar močno zmanjšuje uporabnost takega laserja.

Denimo, da nekako dosežemo enake faze vseh nihanj. Poleg tega zaradi enostavnosti računa privzemimo, da so enake tudi vse amplitude $A_m = A_0$. Tedaj postane vsota (6.60) geometrijska in jo brez težav seštejemo

$$E(t) = A_0\, e^{i\omega_0 t} \frac{\sin(N\Delta\omega t/2)}{\sin(\Delta\omega t/2)}. \tag{6.61}$$

Moč izhodne svetlobe ima časovno odvisnost (slika 6.13)

$$P(t) = P_0 \frac{\sin^2(N\Delta\omega t/2)}{\sin^2(\Delta\omega t/2)}. \tag{6.62}$$

Izhodna svetloba predstavlja periodično zaporedje sunkov, ki si sledijo s periodo $T = 2\pi/\Delta\omega = 2L/c$, kar je enako času obhoda svetlobe v resonatorju (glej nalogo 6.10.1).

Naloga 6.10.1 Pokaži, da izhodno moč iz laserja v primeru enakih faz vzbujenih lastnih nihanj zapišemo z enačbo (6.62). Pokaži še, da je razmik med posameznimi sunki (vrhovi moči) enak $T = 2L/c$, dolžina posameznega sunka $\tau = T/N$, vrednost moči v vrhu sunka N^2P_0 in povprečna moč NP_0.

Izračunamo lahko tudi dolžino sunkov (glej nalogo 6.10.1)

$$\tau = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_G}. \tag{6.63}$$

Slika 6.13: Valovanja z enako fazo se seštejejo v posamezne vrhove (levo). Časovna odvisnost moči večfrekvenčnega laserja z uklenjenimi fazami je zato v obliki izrazitih sunkov (desno).

Ker je N število vzbujenih lastnih nihanj, ki se med seboj po krožni frekvenci razlikujejo za $\Delta\omega$, je produkt $N\Delta\omega$ ravno enak širini ojačevanja $\Delta\omega_G$. Dolžina sunka je torej obratno sorazmerna s širino ojačevanja aktivnega sredstva. Za dosego zelo kratkih sunkov z metodo uklepanja faz je torej treba uporabiti laser s kar se da veliko širino ojačevanja.

Poglejmo primer. V Ti:safir laserju je širina ojačevalne črte $\Delta\nu_G = 100$ THz, dolžina resonatorja pa naj bo $L = 1,5$ m. Iz takega laserja izhajajo sunki, dolgi $\tau = 1/\Delta\nu_G = 10$ fs, med posameznima sunkoma pa poteče $T = 2L/c = 10$ ns. Izračunamo še število fazno uklenjenih lastnih načinov, ki je $N = T/\tau = 10^6$.

Premislimo še, kakšna je prostorska odvisnost električnega polja v resonatorju. Polje na danem mestu opisuje enačba (6.61). Krajevno odvisnost dobimo, če v enačbi (6.61) parameter t zamenjamo s $(t - z/c)$. To predstavlja svetlobni paket, ki potuje sem in tja med zrcaloma resonatorja. Na izhodnem zrcalu se vsakič del sunka odbije, del pa zapusti resonator (slika 6.14). Razmik med sunki, ki izhajajo iz resonatorja, je $2L$, prostorska dolžina posameznega sunka pa $\tau c = 2L/N$.

Slika 6.14: Prostorska odvisnost fazno uklenjenih sunkov. Pri vsakem odboju del sunka zapusti resonator.

★ V našem računu predpostavka, da so vse amplitude A_m enake, ni ključnega pomena. Če vzamemo, da so amplitude oblike $A_m = A_0 \exp(-(m\Delta\omega/\Delta\omega_G)^2)$, kar je bolj realistično (slika 6.8), vsote (enačba 6.60) ne znamo točno sešteti. Lahko pa jo približno pretvorimo v integral, ki je Fouriereva transformiranka Gaussove funkcije (pri prehodu z diskretne vsote na integral seveda izgubimo periodičnost zaporedja sunkov). Ta je zopet Gaussova funkcija, katere širina je obratna vrednost širine prvotne funkcije, prav podobno, kot smo dobili zgoraj. Odvisnost amplitud vzbujenih lastnih nihanj od m vpliva torej le na točno obliko sunkov.

Pri uklepanju faz je bistvena predpostavka, da so vse faze φ_m enake. V dosedanjem opisu večfrekvenčnih laserjev so resonatorska stanja med seboj neodvisna, zato so v splošnem faze poljubne in se zaradi motenj lahko še spreminjajo. Za dosego istih faz posameznih nihanj moramo poskrbeti posebej. Tako ujemanje oziroma uklepanje faz lahko dosežemo na več načinov. V grobem ločimo dva načina: aktivno in pasivno uklepanje faz.

Pri aktivnem uklepanju faz moduliramo izgube v resonatorju s frekvenco, ki je ravno enaka razliki frekvenc med lastnimi resonatorskimi stanji (slika 6.15 a). Za ta namen dodamo v resonator modulator, na primer akusto-optični modulator (glej poglavje 10). Ko v akusto-optičnem modulatorju vzbudimo stoječe zvočno valovanje, se svetloba na njem uklanja in izgube so velike. Stoječe valovanj periodično izginja in takrat se uklonske izgube zmanjšajo. Če se to dogaja v časovnih razmikih, ki so enaki $T = 2L/c$, se v resonatorju ojačuje le kratek sunek svetlobe. Navadno zadošča razmeroma majhna sinusna modulacija izgub, kjer je relativna prepustnost v minimumu za nekaj desetink manjša od največje. Ta način se uporablja pri šibkejših sunkovnih laserjih, na primer pri Nd:YAG laserjih.

Slika 6.15: Izgube in izhodna moč pri aktivnem in pasivnem uklepanju faz

Kako pri modulaciji pride do uklepanja faz, lahko uvidimo še drugače. Modulacija amplitude m-tega lastnega nihanja povzroči, da se v spektru nihanja pojavita še stranska pasova pri krožnih frekvencah $(\omega_0 + m\Delta\omega) \pm \Delta\omega$. Ta se ravno ujemata z obema sosednjima nihanjema in se konstruktivno prištejeta, če imata enako fazo. Podobno tudi naprej za ostala nihanja. S tem se zmanjšajo izgube in delovanje laserja z uklenjenimi fazami ima najnižji prag.

Pri pasivnem uklepanju faz dodanega elementa ne krmilimo od zunaj, ampak je njegova prepustnost odvisna od intenzitete izbranega nihajnega načina (slika 6.15 b). Ena vrsta pasivnih elementov je plast raztopljenega barvila, ki močno absorbira svetlobo pri majhni gostoti svetlobnega toka, pri veliki gostoti pa svetlobo prepušča, saj pride do nasičenja absorpcije (glej poglavje 5.5). V laserju je po vklopu prisotno predvsem spontano sevanje, ki se pri enem prehodu skozi aktivno snov deloma ojači. Barvilo najmanj absorbira fluktuacijo z največjo intenziteto. Pri dovolj velikem ojačenju se ta izbrana fluktuacija ojačuje, ostale pa ne, zato se spet pojavi fazno uklenjeni sunek. Vzbujeni atomi se morajo čim hitreje vrniti v osnovno stanje, da se svetloba lahko spet absorbira. To pomeni, da mora biti relaksacijski čas barvila krajši od časa obhoda T, tipično je $\sim$ ps.

Drugi način pasivnega uklepanja faz je z uporabo nelinearne optike (glej poglavje 11.9). Z optičnim Kerrovim pojavom se snop vpadne svetlobe zoži in njegova širina je odvisna od njegove intenzitete. Z dodatkom zaslonke poskrbimo, daje prepuščen le zelo močen svetlobni sunek, šibkejši pa so zadušeni. Ta način pogosto uporabimo v Ti:safirnih laserjih, izhodni sunki pa so zelo kratki.

Z uklepanjem faz je mogoče dobiti sunke, krajše od 100 fs. Tak sunek traja le še nekaj deset optičnih period. S posebnimi prijemi jih lahko še skrajšamo na okoli 10 fs (glej podpoglavje 8.5). Zelo kratki svetlobni sunki so uporabni za študij hitre molekularne dinamike in kratkoživih vzbujenih elektronskih stanj v trdnih snoveh. Z uporabo fazno uklenjenih sunkov svetlobe se je časovna ločljivost merilnih metod povečala za več redov velikosti.

6.11 *Frekvenčni glavnik in absolutna meritev frekvence laserja

Iz fazno uklenjenega laserja izhajajo zelo kratki sunki svetlobe, ki so sestavljeni iz velikega števila vzbujenih lastnih nihanj. Spekter izhodne svetlobe tako vsebuje veliko število spektralnih črt, ki so med seboj enakomerno razmaknjene (slika 6.16). Zaradi podobnosti spektra z glavnikom imenujemo tak izvor svetlobe frekvenčni glavnik. Značilna širina ojačenega območja je 300 THz, razmik med posameznimi črtami pa 100 MHz, tako da tipični glavnik vsebuje okoli več milijonov spektralnih črt.

Slika 6.16: Spekter svetlobe iz frekvenčnega glavnika

Frekvence izhodne svetlobe na splošno zapišemo kot

$$\nu = \nu_0 + m\Delta\nu, \tag{6.64}$$

pri čemer je m naravno število, $\Delta\nu = c/2L$ razlika med zaporednima frekvencama in ν_0 frekvenčni zamik. S stabilizacijo $\Delta\nu$ in frekvenčnega zamika ν_0 so frekvence izhodne svetlobe natančno določene, zato frekvenčni glavnik uporabljamo kot referenco za izredno natančno določanje frekvenc. Ko svetloba z neznano frekvenco interferira s svetlobo iz frekvenčnega glavnika, pride do utripanja – pojavi se signal pri razliki obeh frekvenc. Zaradi velikega števila lastnih nihanj in posledično majhnih razlik v frekvencah je frekvenca utripanja navadno v radijskem območju. To pa znamo zelo natančno izmeriti in tako določiti neznano vpadno frekvenco. Na ta način lahko merimo frekvence z natančnostjo do 10^{-18}.[5]

V primeru, da so sunki svetlobe iz laserja povsem periodični in se ujemajo tako v amplitudi kot tudi v fazi, so frekvence izhodne svetlobe kar večkratniki $\Delta\nu$. V praksi se zaradi Gouyeve faze, disperzije in nelinearnosti pojavi zamik v fazi $\Delta\varphi$ in vrh ovojnice sunka na splošno ne sovpada z vrhom amplitude nihanja (slika 6.17). V izrazu za frekvenco izhodne svetlobe se zato pojavi dodatni zamik $\nu_0 \neq 0$ (enačba 6.64). Za absolutno določitev frekvence moramo ta zamik seveda natančno poznati.

[5] Za odkritje sta John L. Hall in Theodor W. Hänsch leta 2005 prejela Nobelovo nagrado.

Slika 6.17: Časovna odvisnost amplitude izhodne svetlobe iz frekvenčnega glavnika

Zamik ν_0 lahko izmerimo z interferometrom, v katerem med seboj primerjamo valovanje pri osnovni in pri podvojeni frekvenci[6]. Valovanje pri osnovni frekvenci najprej frekvenčno podvojimo. To dosežemo z nelinearnimi optičnimi pojavi, ki omogočajo generacijo valovanja pri frekvenci, ji je enaka dvakratni frekvenci vpadnega valovanja (glej poglavje 11.3). Podvojeno frekvenco $2(\nu_0 + m\Delta\nu) = 2\nu_0 + 2m\Delta\nu$ nato primerjamo s frekvenco pri točno dvakrat večjem m, to je pri $\nu_0 + 2m\Delta\nu$. Pri razliki med tema dvema frekvencama, ki je ravno ν_0, se na detektorju pojavi utripanje. Zamik ν_0 na ta način izmerimo, hkrati pa ga s povratno zanko vzdržujemo konstantnega. Ko določimo oba parametra ν_0 in $\Delta\nu$, poznamo absolutne vrednosti frekvenc posameznih spektralnih črt v frekvenčnem glavniku z relativno natančnostjo okoli 10^{-18}.

Definicija metra

Danes je meter je definiran kot pot, ki jo svetloba v vakuumu prepotuje v $1/299\,792\,458$ s. Vendar ni bilo vedno tako. Do šestdesetih let dvajsetega stoletja je bil meter definiran z dolžino prametra, to je palice iz platine in iridija, pri atmosferskem tlaku in temperaturi taljenja ledu.

Leta 1960 so definicijo izboljšali in jo vpeljali glede na svetlobo kriptonove svetilke. Meter je bil definiran kot $1\,650\,763,73$ valovnih dolžin svetlobe, ki jo izseva kriptonov izotop ^{86}Kr med nivojema $2p_{10}$ in $5p_5$. Vendar je širina črte kriptonove svetilke razmeroma velika, zato je bil meter definiran le z relativno negotovostjo 4×10^{-9} oziroma absolutno negotovostjo 4 nm.

Z odkritjem laserjev so hitro spoznali, da definicija s kriptonovo svetlobo ni najprimernejša, saj se je izkazalo, da je njen spekter razmeroma širok in asimetričen. S heterodinsko tehniko so primerjali valovno dolžino svetlobe iz He-Ne laserja, stabiliziranega z metanom ($3,39$ µm), z osnovno cezijevo uro in določili absorpcijsko črto z natančnostjo cezijeve ure. Frekvenca izhodne svetlobe je bila določena na $88,376181627(50)$ THz. Po drugi strani so lahko izmerili valovno dolžino izsevane svetlobe s primerjavo z valovno dolžino kriptonove svetlobe in tako določili hitrost svetlobe na $299\,792\,458$ m/s.

Leta 1983 so definicijo metra vnovič spremenili in jo prek hitrosti svetlobe v vakuumu vezali na enoto sekunde. Ta definicija velja še danes. Sekunda je določena z nihaji cezijevih atomov in to omogoča določitev metra z relativno negotovostjo 10^{-13}.

Z novo definicijo izbira snovi, v kateri pride do sevanja svetlobe, ni več ključnega pomena. Priporočena realizacija definicije metra je tako s He-Ne laserjem, stabiliziranim z jodovo celico, ki z absorpcijo še zmanjša spektralno širino črte. V tem primeru je meter $1\,579\,800,762042(33)$ valovnih dolžin izsevane svetlobe. Laser je tako postal sekundarni standard za dolžino – vendar je laser pri tem le pomožna naprava, standard je ustrezni molekularni prehod.

[6] Tak interferometer imenujemo f–$2f$ interferometer, kar nakazuje na osnovno (f) in podvojeno ($2f$) frekvenco.

6.12 *Semiklasični model laserja

Doslej smo laserje obravnavali le z modelom zasedbenih enačb. Ta je zelo grob, saj smo pri tem zanemarili nekaj pomembnih pojavov. Svetlobo v resonatorju smo opisali le s celotno energijo oziroma številom fotonov in se za njeno valovno naravo nismo menili. Kar privzeli smo, da sta frekvenca delujočega laserja in oblika polja v njem enaki kot za lastno stanje praznega resonatorja. Aktivno snov smo opisali le z zasedenostjo zgornjega in spodnjega laserskega stanja in s tem izpustili možnost, da se zaradi interakcij z elektromagnetnim poljem atomi nahajajo v nestacionarnem, mešanem stanju.

Gornje pomanjkljivosti delno odpravimo s tem, da elektromagnetno polje v resonatorju obravnavamo klasično z valovno enačbo, atome aktivne snovi pa kvantno in upoštevamo, da se pokoravajo Schrödingerjevi enačbi. S tem dobimo semiklasični model laserja. Za še natančnejši opis bi morali obravnavati kvantno tudi svetlobo.

Aktivna snov naj bo množica enakih dvonivojskih atomov s stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$, ki imata energiji E_1 in E_2. Atomi s svetlobo sodelujejo preko dipolne interakcije oblike $H = -eE(t)\hat{x}$, kjer je $E(t)$ polje v resonatorju, ki naj bo zaradi preprostosti polarizirano v smeri osi x. Časovno odvisno stanje atomov zapišimo v obliki

$$|\psi\rangle = c_1(t)|1\rangle \exp(-iE_1 t/\hbar) + c_2(t)|2\rangle \exp(-iE_2 t/\hbar). \tag{6.65}$$

Iz Schrödingerjeve enačbe (enačba 5.105) dobimo za časovna odvoda koeficientov $c_1(t)$ in $c_2(t)$ zvezi (glej enačbi 5.107)

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{\hbar}E(t)Ve^{-i\omega_0 t}c_2 \qquad \text{in} \qquad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{\hbar}E(t)Ve^{i\omega_0 t}c_1, \tag{6.66}$$

pri čemer naj bo $V = -e\langle 1|\hat{x}|2\rangle$ realen in $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$.

Električni dipolni moment atoma v stanju ψ je

$$p = e\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = -(c_1^* c_2 e^{-i\omega_0 t} + c_1 c_2^* e^{i\omega_0 t})V. \tag{6.67}$$

Razdelimo p na dva dela in zapišemo

$$p = p^+ + p^- = -V\left(\eta(t) + \eta^*(t)\right), \tag{6.68}$$

kjer smo vpeljali $\eta(t) = c_1^* c_2 e^{-i\omega_0 t}$.

Zanima nas, kako se dipolni moment spreminja s časom. Zadošča, če poznamo, kako se s časom spreminja parameter $\eta(t)$. Njegov časovni odvod izrazimo iz enačb (6.66) in dobimo

$$\dot{\eta} = -i\omega_0\eta + \frac{i}{\hbar}E(t)V\left(|c_2|^2 - |c_1|^2\right). \tag{6.69}$$

Spomnimo, da je $|c_i|^2$ verjetnost za zasedenost stanja $|i\rangle$. Izraz v oklepaju na desni strani gornje enačbe torej meri razliko zasedenosti obeh stanj, ki jo označimo s ζ. Podobno kot zgoraj izrazimo spreminjanje razlike zasedenosti s časovni odvodom

$$\dot{\zeta} = \frac{2i}{\hbar}E(t)V\left(\eta - \eta^*\right). \tag{6.70}$$

S tem smo iz Schrödingerjeve enačbe dobili enačbi za časovni razvoj dipolnega momenta in obrnjene zasedenosti, ki pa ju moramo še dopolniti.

Naj bo atom na začetku v vzbujenem stanju $|2\rangle$ in naj bo $E(t) = 0$. Začetna vrednost obrnjene zasedenosti je tako $\zeta(0) = 1$. Po enačbi (6.70) naj bi bil odvod obrnjene zasedenosti enak nič in ζ konstantna. Vemo pa, da se atom, ki je v vzbujenem stanju, sčasoma vrne v osnovno stanje. Verjetnost za tak spontan prehod na časovno enoto smo označili z A (glej poglavje 5.3).

Poleg tega moramo upoštevati še črpanje, s katerim vzdržujemo obrnjeno zasedenost in s tem lasersko delovanje. Za podroben opis črpanja bi morali v Hamiltonov operator dodati ustrezne člene in morda upoštevati še druga stanja atomov, vendar nas take podrobnosti na tem mestu ne zanimajo. Če bi ne bilo črpanja, bi bila stacionarna vrednost v odsotnosti laserskega polja

$$\zeta_{\text{stac}} = |c_2|^2 - |c_1|^2 = -1. \tag{6.71}$$

Zaradi črpanja zavzame obrnjena zasedenost neko vrednost $-1 < \zeta_0 < 1$, odvisno od moči črpanja. Enačbi (6.70) dodamo ustrezen člen

$$\dot{\zeta} = A(\zeta_0 - \zeta) - \frac{2i}{\hbar} E(t) V (\eta^* - \eta), \tag{6.72}$$

ki popisuje vpliv črpanja in spontane prehode v nižje stanje.

Dopolnimo še enačbo za časovno spreminjanje električnega dipola (enačba 6.69). Pri $E(t) = 0$ da zapisana enačba časovno odvisnost $\eta \propto e^{-i\omega_0 t}$, to je brez dušenja. Vendar vemo, da polarizacija v mešanem stanju razpada vsaj zaradi spontanega sevanja, lahko pa še zaradi drugih vplivov, na primer trkov z drugimi atomi. Označimo koeficient dušenja polarizacije, ki meri tudi spektralno širino svetlobe, ki jo sevajo atomi pri prehodu $2 \to 1$, z γ. Zapišemo dopolnjeno enačbo

$$\dot{\eta} = -(i\omega_0 + \gamma)\eta + \frac{i}{\hbar} E(t) V \zeta \tag{6.73}$$

in kompleksno konjugirano enačbo

$$\dot{\eta}^* = -(-i\omega_0 + \gamma)\eta^* - \frac{i}{\hbar} E(t) V \zeta. \tag{6.74}$$

Sklopljene diferencialne enačbe popisujejo časovno spreminjanje obrnjene zasedenosti in dipolnega momenta atoma.

★ Enačbe (6.72), (6.73) in (6.74) pogosto imenujemo Maxwell-Blochove ali optične Blochove enačbe[7]. Osnovne Blochove enačbe opisujejo gibanje jedrskega magnetnega momenta v elektromagnetnem polju, zato so jih najprej uporabili za opis jedrske magnetne in elektronske spinske resonance.

Za opis potrebujemo še enačbo za polje $E(t)$. To naredimo klasično, tako da električna poljska jakost zadošča valovni enačbi. Upoštevati moramo, da je v snovi tudi polarizacija različna od nič. Valovna enačba v skalarni obliki je tedaj

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \tag{6.75}$$

pri čemer je v primeru, da so vsi atomi enakovredni, polarizacija enaka

$$P = \frac{N}{V'} p = -\frac{N}{V'} V(\eta + \eta^*) = P^+ + P^-, \tag{6.76}$$

kjer smo z V' označili volumen, N pa število atomov.

[7] Švicarsko-ameriški fizik in nobelovec Felix Bloch, 1905–1983.

Namesto mikroskopske količine ζ lahko uvedemo še gostoto obrnjene zasedenosti $Z = (N/V')\zeta$ in enačbe (6.72), (6.73) in (6.74) prepišemo v obliko

$$\frac{dZ}{dt} = A(Z_0 - Z) + \frac{2i}{\hbar}E\left(P^- - P^+\right), \tag{6.77}$$

$$\frac{dP^+}{dt} = (-i\omega_0 - \gamma)P^+ - \frac{i}{\hbar}EV^2Z, \tag{6.78}$$

$$\frac{dP^-}{dt} = (i\omega_0 - \gamma)P^- + \frac{i}{\hbar}EV^2Z. \tag{6.79}$$

Opozorimo še, da je prehod z enačb (6.72–6.74) na (6.77–6.79) mogoč le, kadar so vsi atomi enakovredni, to je, kadar ni nehomogene razširitve spektra.[8]

Enačbe (6.77–6.79), skupaj z valovno enačbo (enačba 6.75) podajajo semiklasični opis interakcij svetlobe s snovjo. Iz izpeljave je vidno, da je v semiklasičnem opisu spontano sevanje obravnavano pomanjkljivo, le s fenomenološkim nastavkom. To je moč popraviti tako, da tudi elektromagnetno polje kvantiziramo. Kljub tej pomanjkljivosti je s semiklasičnim modelom mogoče zelo podrobno opisati večino pojavov v laserjih in tudi druge probleme širjenja svetlobe po snovi. Je pa reševanje zapisanega sistema nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb na splošno zelo težavno.

Primer enofrekvenčnega laserja

Semiklasične enačbe pobliže spoznajmo na najenostavnejšem primeru. To naj bo laser, v katerem je vzbujeno le eno resonatorsko stanje. Polje ima tedaj obliko

$$E(\mathbf{r},t) = E_\lambda(t)u_\lambda(\mathbf{r}), \tag{6.80}$$

kjer je $u_\lambda(\mathbf{r})$ krajevni del lastnega stanja resonatorja, ki zadošča enačbi

$$\nabla^2 u_\lambda + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2}u_\lambda = 0. \tag{6.81}$$

Funkcija $E_\lambda(t)$ opisuje časovno odvisnost. Za laser v stacionarnem delovanju je periodična, vendar njena krožna frekvenca Ω ni nujno enaka lastni krožni frekvenci praznega resonatorja ω_λ. Krožno frekvenco Ω moramo še izračunati.

Najprej razvijmo po lastnih funkcijah $u_\lambda(\mathbf{r})$ še polarizacijo. Ker so lastne funkcije med seboj ortogonalne, preide valovna enačba (6.75) ob upoštevanju enačbe (6.81) v

$$\omega_\lambda^2 E_\lambda + \frac{d^2E_\lambda}{dt^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{d^2P_\lambda}{dt^2}. \tag{6.82}$$

Razstavimo $E_\lambda(t)$ na dva dela:

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^+(t) + E_\lambda^-(t) = A^+(t)e^{-i\omega_\lambda t} + A^-(t)e^{i\omega_\lambda t}. \tag{6.83}$$

Dejanska krožna frekvenca laserja je blizu ω_λ, zato pričakujemo, da se bosta amplitudi $A^\pm(t)$ v primerjavi z $e^{-i\omega_\lambda t}$ le počasi spreminjali s časom. Izračunajmo

$$\frac{d^2E_\lambda^+}{dt^2} = -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda\frac{dA^+}{dt}e^{-i\omega_\lambda t} \approx -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda\left(\frac{dE_\lambda^+}{dt} + i\omega_\lambda E_\lambda^+\right). \tag{6.84}$$

[8] Kako je v primeru nehomogene razširitve, lahko bralec poišče npr. v H. Haken, *Laser Theory*, Springer Verlag.

Izpustili smo drugi odvod A po času in s tem napravili približek počasno spreminjajoče se amplitude.

Polarizacija snovi je približno periodična s krožno frekvenco ω_0, ki je približno enaka ω_λ. Tudi amplituda polarizacije se le počasi spreminja, zato lahko privzamemo, da je $\ddot{P}_\lambda^+ \approx -\omega_\lambda^2 P_\lambda^+$. Z uporabo tega približka in enačbe (6.84) preide valovna enačba (enačba 6.75) za eno nihanje v

$$\frac{dE_\lambda^+}{dt} = -i\omega_\lambda E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P_\lambda^+. \tag{6.85}$$

Doslej še nismo upoštevali, da je polje v praznem resonatorju dušeno, zato moramo gornjo enačbo še popraviti

$$\frac{dE_\lambda^+}{dt} = \left(-i\omega_\lambda - \frac{1}{\tau}\right) E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P_\lambda^+. \tag{6.86}$$

Kadar v resonatorju ni snovi, je dobljena enačba enaka enačbi (4.61).

Enačbe (6.77–6.79) so nelinearne, zato jih ni moč kar tako prepisati za primer razvoja po lastnih stanjih resonatorja. Pri enačbah za razvoj polarizacije (enačbi 6.78 in 6.79) v zadnjem členu na desni nastopa produkt komponente polja E_λ in obrnjene zasedenosti Z. Bistveno prispeva le krajevno povprečje $\overline{Z}$, ki se s časom le počasi spreminja. Seveda vsebuje Z tudi krajevno odvisne komponente, ki pa so pomembne predvsem zato, ker sklapljajo različna lastna stanja resonatorja, vendar to presega našo trenutno obravnavo. Tako iz enačbe (6.78) dobimo

$$\frac{dP_\lambda^+}{dt} = (-i\omega_0 - \gamma) P_\lambda^+ - \frac{i}{\hbar} V^2 E_\lambda^+ \overline{Z}. \tag{6.87}$$

Enačbo za $\overline{Z}$ dobimo iz (6.77). V zadnjem členu nastopajo produkti $E^\pm P^\pm = E_\lambda^\pm P_\lambda^\pm u_\lambda^2(\mathbf{r})$, ki jih moramo prostorsko povprečiti. Funkcije $u_\lambda(\mathbf{r})$ so normirane, tako da je $\int u_\lambda^2(\mathbf{r})\, dV = V$ in $\overline{u_\lambda^2(\mathbf{r})} = 1$. Sledi

$$\frac{d\overline{Z}}{dt} = A\left(\overline{Z}_0 - \overline{Z}\right) + \frac{2i}{\hbar}\left(E_\lambda^+ + E_\lambda^-\right)\left(P_\lambda^- - P_\lambda^+\right), \tag{6.88}$$

kjer je $\overline{Z}_0$ povprečje nenasičene zasedenosti Z_0. V zadnjem členu nastopajo produkti, ki nihajo s krožnimi frekvencami $\omega_\lambda - \omega_0$ in $\omega_\lambda + \omega_0$. Frekvenci sta si zelo blizu, zato je njuna vsota znatno večja od razlike. Hitro spreminjajoče se člene $E_\lambda^+ P_\lambda^+$ in $E_\lambda^- P_\lambda^-$ izpustimo, saj skoraj nič ne vplivajo na valovanje blizu ω_λ. Časovno odvisnost $\overline{Z}$ tako zapišemo

$$\frac{d\overline{Z}}{dt} = A\left(\overline{Z}_0 - \overline{Z}\right) + \frac{2i}{\hbar}\left(E_\lambda^+ P_\lambda^- - E_\lambda^- P_\lambda^+\right). \tag{6.89}$$

Enačbe (6.86), (6.87) in (6.89), skupaj s konjugirano kompleksnimi enačbami za E_λ^- in P_λ^-, so zaključen sistem, ki opisuje delovanje enofrekvenčnega laserja. Uporabimo jih za izračun krožne frekvence izhodne svetlobe.

Naj bo stanje stacionarno. Tedaj lahko polje zapišemo v obliki $E_\lambda^+ = E_0 e^{-i\Omega t}$, kjer je E_0 realna konstanta, krožna frekvenca svetlobe Ω pa je blizu ω_0 in ω_λ. V stacionarnem stanju ima polarizacija enako časovno odvisnost in $P_\lambda^+ = P_0 e^{-i\Omega t}$. Tedaj je v enačbi (6.89) drugi oklepaj konstanten in povprečna gostota obrnjene zasedenosti $\overline{Z}$ je v stacionarnem stanju od časa neodvisna.

Sistem enačb (6.86), (6.87) in (6.89) tako da

$$\left(i\left(\Omega-\omega_\lambda\right)-\frac{1}{\tau}\right)E_0+\frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0}P_0 = 0 \tag{6.90}$$

$$\left(i\left(\Omega-\omega_0\right)-\gamma\right)P_0-\frac{i}{\hbar}V^2E_0\overline{Z} = 0 \tag{6.91}$$

$$A\left(\overline{Z}_0-\overline{Z}\right)+\frac{2i}{\hbar}E_0\left(P_0^*-P_0\right) = 0. \tag{6.92}$$

Najprej iz druge enačbe izrazimo P_0, ga vstavimo v tretjo in izračunamo $\overline{Z}$. Dobimo

$$\overline{Z}=\overline{Z}_0\left(1+\frac{4V^2}{\hbar^2A}E_0^2\frac{\gamma}{\left(\omega_0-\Omega\right)^2+\gamma^2}\right)^{-1}. \tag{6.93}$$

Ta izraz že poznamo. Vrednost $\pi V^2/\left(\varepsilon_0\hbar^2\right)$ je Einsteinov koeficient B,

ZA FAKTOR 2 RAZLIČNO OD ENAČBE 5.102! Mislim, da je tukaj ok in tam narobe.

E_0^2 je sorazmeren gostoti energije polja v resonatorju, zadnji ulomek v oklepaju pa podaja obliko homogeno razširjene atomske črte (5.67)

$$\overline{Z}=\overline{Z}_0\left(1+\frac{2B}{Ac}g\left(\omega_0-\Omega\right)j\right)^{-1}. \tag{6.94}$$

To je natanko enako izrazu za nasičenje zasedenosti stanj, ki smo ga izpeljali iz zasedbenih enačb v četrtem poglavju (enačba 5.44).

Vstavimo P_0 iz prve enačbe sistema (6.90) v drugo (6.91)

$$E_0\left(-i\Omega+i\omega_\lambda+\frac{1}{\tau}\right)\left(i\Omega-i\omega_0-\gamma\right)=-\frac{V^2\omega_0}{2\hbar\varepsilon_0}E_0\overline{Z}. \tag{6.95}$$

V delujočem laserju je $E_0\neq 0$, zato ga lahko krajšamo. Vrednost $\overline{Z}$ je realna, tako da mora biti imaginarni del leve strani enak nič. Dobimo

$$\left(\Omega-\omega_\lambda\right)\gamma+\left(\Omega-\omega_0\right)\frac{1}{\tau}=0. \tag{6.96}$$

Od tod lahko izračunamo krožno frekvenco laserja

$$\Omega=\frac{\omega_\lambda\gamma+\omega_0\frac{1}{\tau}}{\gamma+\frac{1}{\tau}}. \tag{6.97}$$

Krožna frekvenca torej ni enaka krožni frekvenci praznega resonatorja ω_λ, temveč je premaknjena proti centru atomske črte ω_0. Premik je odvisen od razmerja širine atomske črte in izgub resonatorja.

Gornji primer uporabe semiklasičnih enačb je zelo preprost. Prava moč modela se pokaže pri obravnavi večfrekvenčnega laserja, na primer pri računu uklepanja faz laserskih nihanj, kar pa presega okvir te knjige.

7. Primeri laserjev

V tem poglavju bomo spoznali nekaj najpomembnejših vrst laserjev. V grobem laserje razlikujemo po aktivnem sredstvu (plin, trdna snov, organsko barvilo, polprevodnik), pri čemer tudi pri izbranem sredstvu obstaja veliko različnih izvedb in načinov delovanja. Za vsak obravnavani primer bomo navedli osnovne karakteristike, v podrobnosti izvedbe pa se ne bomo spuščali.

7.1 Laserski sistemi

Laser je lahko dokaj preprosta naprava, z malo sestavnimi deli, lahko pa je zelo velik in zapleten sistem. Večina laserskih sistemov je sestavljena iz osnovnega laserja, ki ni posebno močan, a daje kvaliteten snop svetlobe, in iz enega ali več ojačevalnikov. V njih se svetloba ojačuje v sredstvu, ki je enako kot v osnovnem laserju in ki je v kolikor mogoče visokem stanju obrnjene zasedenosti. V več ojačevalnih korakih se tako doseže zelo velika svetlobna moč.

Pri velikih laserskih močeh nastopi vrsta novih težav. Da gostota svetlobnega toka ne povzroča poškodb optičnih komponent, mora premer ojačevanega snopa (in s tem premer vseh vmesnih ojačevalnih stopenj) naraščati. Na zadnjih stopnjah največjih laserskih sistemov je premer snopa lahko večji od pol metra, kar seveda pomeni, da morajo imeti tolikšno odprtino tudi vse ostale optične komponente. Poleg tega je treba skrbno paziti, da se odbita svetloba ne vrača v prejšnji ojačevalnik ali v osnovni laser in s tem moti njegovo delovanje. Med posamezne ojačevalne stopnje zato damo optične izolatorje, ki temeljijo na Faradayevem pojavu vrtenja polarizacije v snovi z magnetnim poljem.

Slika 7.1: Eden najmočnejših laserskih sistemov na svetu, ki doseže 500 TW moči v sunku. Vir: National Ignition Facility, Livermore, Kalifornija.

Moči svetlobe, ki jih oddajajo najmočnejši laserski sistemi, imajo zelo velike vrednosti. Najmočnejši zvezno delujoči laserji dosegajo moči prek ~ 100 kW. Še bistveno večje moči dosegajo sunkovni laserji, saj lahko v sunku dosežejo moč tudi $\sim 10^{15}$ W. Vendar so sunki s tako veliko svetlobno močjo izredno kratki, tipično reda pikosekunde, tako da znaša celotna energija v sunku "le" $\sim$ kJ. Pomemben parameter pri sunkovnih laserjih je tudi čas, ki poteče med dvema zaporednima sunkoma (repeticija). Najmočnejši laserski sistemi lahko izsevajo največ nekaj sunkov dnevno.

7.2 He-Ne laser

Najprej si oglejmo helij-neon (He-Ne) laser, ki je bil prvi zvezno delujoči laser in je še danes zelo razširjen. Najpogosteje deluje pri valovni dolžini $632,8$ nm v rdečem delu spektra, lahko pa tudi pri infrardečih $1,15$ µm in $3,39$ µm ter nekaterih drugih valovnih dolžinah v oranžnem in zelenem delu spektra. Laser deluje v zveznem načinu delovanja s tipičnimi močmi $0,5$–100 mW.

Ojačevalno sredstvo je plin, mešanica helija in neona, katerih relevantni energijski nivoji so prikazani na sliki (7.2). Atome helija s trki z elektroni vzbudimo v eno izmed dveh dolgoživih metastabilnih stanj 2^3S ali 2^1S z razpadnima časoma $0,1$ ms in 5 µs. Ti dve stanji slučajno praktično sovpadata z dvema stanjema neona ($4s$ in $5s$). Ko heliju dodamo neon, se energija s trki prenese z vzbujenih helijevih atomov na atome neona, ki s tem preidejo v že omenjeni vzbujeni stanji. Helijevi atomi se po trku vrnejo v osnovno stanje, od koder jih lahko ponovno vzbudimo. Prenos energije z atomov helija na atome neona s trki je zelo učinkovit, zato zasedenost vzbujenih neonovih stanj hitro naraste. Ko preseže zasedenost nižjih vzbujenih stanj, pride do obrnjene zasedenosti.

Slika 7.2: Shema energijskih nivojev v He-Ne laserju. Nivoji helija so označeni z modro in nivoji neona z zeleno, laserski prehodi pa z rdečimi barvami in pripisano ustrezno valovno dolžino.

Znano rdečo svetlobo He-Ne laserja z valovno dolžino $632,8$ nm dobimo pri prehodu iz stanja $5s$ v eno od stanj $3p$. Pri tem je življenjski čas stanja $5s$ okoli 100 ns, stanja $3p$ pa okoli 10 ns, zato se spodnji nivo s spontano emisijo hitro prazni v metastabilno stanje $3s$. V njem se atomi nabirajo, saj so dipolni sevalni prehodi v osnovno stanje prepovedani, in atomi le s trki ob steno cevi prehajajo v osnovno stanje. Da pospešimo praznjenje nivoja $3s$ in omogočimo večjo obrnjeno zasedenost, moramo torej zmanjšati premer razelektritvene cevi. Zaradi gibanja atomov je spektralna črta Dopplerjevo razširjena ($\Delta\nu = 1,5$ GHz).

Lasersko delovanje dobimo tudi pri prehodu iz $5s$ v stanje $4p$, pri katerem ima izsevana svetloba valovno dolžino $3,39$ µm. Ojačenje je za ta prehod celo precej večje kot za prehod pri $632,8$ nm, deloma zaradi nižje frekvence (glej zvezo med Einsteinovima koeficientoma A in B, enačba 5.34), deloma pa zaradi kratke življenjske dobe spodnjega laserskega nivoja $4p$. Zato bi pričakovali, da bo He-Ne laser svetil v infrardečem delu in ne vidnem. To delno prepreči absorpcija v steklu, delno pa izgube namerno povečamo s selektivno odbojnostjo resonatorskih zrcal, ki dvigne prag delovanja za $3,39$ µm nad prag za $632,8$ nm. V laser lahko dodamo tudi celico metana, ki infrardeč del svetlobe močno absorbira, vidnega pa ne. Omenimo še prehode iz stanja $4s$, ki ga dosežejo neonovi atomi s trki z vzbujenimi helijevimi atomi iz nivoja 2^3S. Prehod $4s$ v $3p$, ki da svetlobo pri $1,15$ µm, je bil prvi opaženi prehod v He-Ne laserjih.

Tipičen He-Ne laser je razmeroma preprosto zgrajen (sliki 7.3 in 7.4). V razelektritveni cevi (napetost ~ 1 kV), skozi katero teče električni tok (~ 10 mA), se nahaja mešanica helija in neona v razmerju $5:1$–$10:1$. Skupni tlak v cevi je nizek, le okoli 3 mbar, cev pa je tipično dolga okoli $0,5$ m s premerom 1–2 mm. Cev na obeh straneh zapirata okni, ki sta nagnjeni za Brewstrov kot, tako da so izgube pri odboju za eno polarizacijo kar se da majhne. Izhodna svetloba iz laserja je zato seveda polarizirana. V manjših laserjih so namesto Brewstrovih oken na razelektritveno cev privarjena kar resonatorska zrcala, zaradi česar so taki laserji nepolarizirani. Navadno je razelektritvena cev obdana z dvema ukrivljenima zrcaloma, ki imata zelo veliko odbojnost za izbrano valovno dolžino. Nekaj tipičnih podatkov za He-Ne laser je zbranih v tabeli (7.1).

Slika 7.3: Shema He-Ne laserja: R – razelektritvena cev, IZ – izhodno zrcalo, Z – zrcalo z veliko odbojnostjo, B – Brewstrovi okni

Slika 7.4: Primer starejšega He-Ne laserja, izdelanega v Sloveniji

He-Ne laserji so preprosti, stabilni, zanesljivi, poceni, imajo visoko kvaliteto žarka in dolgo služijo (do 50 000 ur). Danes jih sicer izrivajo polprevodniški laserji, vendar so še vedno v uporabi v merilnih napravah, v optičnih čitalnih sistemih, v šolah, v raziskovalnih laboratorijih za interferometrijo, holografijo itd. Na njem je osnovan tudi standard za meter.

7.3 Argonov ionski laser

Kot drugi primer plinskega laserja obravnavajmo argonov ionski (Ar^+) laser, ki je najbolj poznan po zveznem delovanju v modrem in zelenem delu spektra pri valovnih dolžinah $488,0$ nm in $514,5$ nm, deluje pa tudi v bližnjem ultravijoličnem delu spektra. Tipične moči delovanja argonovega laserja so 100 mW–50 W.

Kot večino plinskih laserjev tudi tega črpamo z električnim tokom. Atome argona vzbudimo s trki z elektroni v ione argona, ti pa z nadaljnjimi trki preidejo v vzbujena stanja. Obrnjeno zasedenost dosežemo med nivojema $4p$ in $4s$ (slika 7.5). Ta dva nivoja vsebujeta veliko podnivojev, zato je tudi prehodov med njima zelo veliko. Argonov laser tako seva pri več kot tridesetih različnih valovnih dolžinah, najznačilnejši sta že omenjeni 488 nm in 514,5 nm. Življenjski čas zgornjega nivoja je okoli 10 ns, kar je približno desetkrat več od življenjskega časa spodnjega nivoja, od koder se ioni z rekombinacijo z elektroni vrnejo v osnovno stanje atoma. Tudi pri tem laserju je poglavitni vzrok za razširitev črte Dopplerjev pojav ($\Delta\nu = 3,5$ GHz).

Slika 7.5: Shema energijskih nivojev v Ar^+ laserju

Argonov laser je v osnovi zgrajen podobno kot He-Ne laser. V razelektritveni cevi (tipična dolžina 1 m in premer 1–2 mm) se nahaja argon pri pritisku okoli 10 mbar. Ker gre pri vzbujanju atomov argona za dvostopenjski proces, mora biti električni tok, s katerim dosežemo obrnjeno zasedenost, precej velik, lahko tudi nekaj deset amperov. Pri tipični napetosti nekaj kV to pomeni, da so potrebne velike električne moči, pogosto več deset kW, in močnejši argonovi laserji so zato zaradi velike količine odvečne toplote najpogosteje vodno hlajeni.

Slika 7.6: Poenostavljena shema Ar^+ laserja s prizmo: R – razelektritvena cev, IZ – izhodno zrcalo, Z – zrcalo z veliko odbojnostjo, B – Brewstrovi okni, P – prizma

V argonovih laserjih pogosto ustvarimo vzdolžno magnetno polje, ki preprečuje elektronom, da bi predčasno zapustili ojačevalno območje in trčili v steno. S tem se poveča izhodno moč laserja, hkrati pa preprečuje poškodbe na stenah, ki bi jih lahko povzročili visokoenergijski elektroni. Iz istega razloga so pri močnejših laserjih zrcala izven plinske cevi.

V resonator argonovega laserja moramo vgraditi še element, ki omogoči izbiro ene same spektralne črte. Najpogosteje za ta frekvenčno selektiven element uporabimo kar majhno prizmo pred enim od obeh zrcal (slika 7.6). Zaradi disperzije v prizmi se snopi različnih valovnih dolžin lomijo pod različnimi koti in le tisti snop, ki vpada pravokotno na zrcalo, se ojačuje. Z vrtenjem prizme ali zrcala lahko tako izbiramo valovno dolžino izhodne svetlobe. Nekaj tipičnih podatkov za argonov laser je zbranih v tabeli (7.1).

Argonovi laserji so zanesljivi in dajejo zelo kvaliteten osnovni Gaussov snop pri eni sami frekvenci. Zato se dosti uporabljajo v optični spektroskopiji, interferometriji, holografiji in merilni tehniki. Delujejo v zveznem načinu, zaradi razmeroma široke črte ojačenja pa jih uporabljamo tudi za fazno uklenjene sunkovne laserje z dolžino sunkov okoli 150 ps. V kombinaciji s kriptonovimi laserji, ki so zelo podobni argonovim, le da delujejo v rdečem in oranžnem delu spektra, se uporabljajo tudi v zabavni industriji. V zadnjem času jih vse bolj izrivajo polprevodniški laserji ali pa frekvenčno podvojeni Nd:YAG.

7.4 CO_2 laser

Do zdaj opisani laserji so delovali na elektronskih prehodih v atomih oziroma ionih. Laser na ogljikov dioksid pa deluje na prehode med vibracijskimi stanji molekul CO_2, pri čemer elektroni ostanejo v osnovnem stanju. Zaradi majhnih energijskih razlik med vibracijskimi stanji deluje tak laser v infrardečem delu spektra, najpogosteje pri $9,6\ \mu m$ in $10,6\ \mu m$. Laser deluje v zveznem in v sunkovnem načinu, odlikuje ga pa zelo velik izkoristek ($\sim 30\ \%$) in posledično zelo velike moči, 1 W–10 kW.

Preden opišemo delovanje laserja, si na kratko oglejmo še nihajna stanja molekule ogljikovega dioksida. Molekula CO_2 je v osnovnem stanju linearna molekula (slika 7.7 a). Za molekule take oblike obstajajo trije osnovni načini nihanja atomov glede na težišče: atomi nihajo v smeri pravokotno na os (upogib, slika 7.7 b), atoma kisika nihata simetrično vzdolž osi molekule, ogljik pa pri tem miruje (simetrični razteg, slika 7.7 c) in atoma kisika se gibljeta v isti smeri vzdolž osi, ogljik pa v nasprotni smeri (asimetrični razteg, slika 7.7 d). Pri tem ima najvišjo frekvenco asimetrični razteg, najnižjo pa upogib. Vsako vibracijsko stanje lahko razstavimo na osnovne nihajne načine in ga opišemo s številom energijskih kvantov v posameznem osnovnem nihanju, torej s trojico celih števil (n_1, n_2, n_3). Po dogovoru stanje 100 opisuje osnovni simetrični razteg, stanje 010 osnovni upogib, stanje 001 pa osnovni asimetrični razteg.

Slika 7.7: Molekula CO_2 (a) in trije osnovni načini nihanja molekule: upogib (b), simetrični razteg (c) in asimetrični razteg (d)

Vibracijska stanja molekule vzbudimo z električnim tokom skozi plin. Pri tem v razelektritveno cev dodamo dušik (N_2) in podobno kot pri He-Ne laserju se tudi CO_2 črpa predvsem preko trkov z dušikovimi molekulami. Dušikova molekula je dvoatomna in ima zato zgolj eno vibracijsko stanje, ki po energiji praktično sovpada z energijo stanja 001 (slika 7.8). Iz tega zgornjega stanja prehajajo molekule v stanje 100 (10,6 µm) ali v stanje 020 (9,6 µm). Da pospešimo prehod nazaj v osnovno stanje, plinski mešanici dodamo še helij, s katerim trkajo molekule. Razmerje parcialnih tlakov je navadno 1:1:8 za CO_2:N_2:He pri tlaku 1 mbar. Pri tako nizkih tlakih je poglavitna razširitev spektralne črte Dopplerjeva, ki pa je v primerjavi z ostalimi plinskimi laserji zaradi nizih frekvenc zelo majhna, le okoli 70 MHz. V laserskih sistemih, kjer je tlak višji, prevlada razširitev zaradi medmolekulskih trkov. Pri tlakih okoli 20 bar znaša razširitev že okoli 500 GHz, kar omogoča izdelavo fazno uklenjenih sunkovnih laserjev s sunki dolžine ~ 1 ps. Nekaj tipičnih podatkov za laser na ogljikov dioksid je zbranih v tabeli (7.1).

Slika 7.8: Shema vibracijskih nivojev v CO_2 laserju

Najpreprostejši laser na ogljikov dioksid je po svoji zgradbi podoben drugim plinskim laserjem. Razelektritvena cev (polmer ~ 1 cm in dolžina 0,5–2 m) je na obeh koncih zaključena z Brewstrovima oknoma in zrcaloma. Vsi optični elementi v laserju morajo biti seveda prepustni oziroma odbojni za infrardeč del svetlobe. Ker lahko deluje laser pri zelo veliko različnih valovnih dolžinah, dodamo frekvenčno selektiven člen, na primer uklonsko mrežico (slika 7.9).

Slika 7.9: Poenostavljena shema najpreprostejšega CO_2 laserja: R – razelektritvena cev, IZ – izhodno zrcalo, Z – zrcalo z veliko odbojnostjo, B – Brewstrovi okni, U – uklonska mrežica

Laserji na ogljikov dioksid se največ uporabljajo v industriji za zahtevne obdelave materialov, na primer za rezanje kovin, vrtanje, ablacijo, varjenje, pa tudi za vojaške in medicinske namene. Obdelava z laserji omogoča veliko natančnost, čistočo in je zelo fleksibilna.

Laser	He-Ne	Ar^+	CO_2	ekscimer
Valovna dolžina λ	$632,8$ nm	488 in $514,5$ nm	$9,6$ in $10,6$ µm	UV
Verjetnost za spontani prehod A	$3,4 \times 10^6/\mathrm{s}$	$7,8 \times 10^7/\mathrm{s}$	$0,25/\mathrm{s}$	$\sim 10^8/\mathrm{s}$
Presek za stimulirano emisijo σ	3×10^{-17} m^2	$2,6 \times 10^{-16}$ m^2	3×10^{-22} m^2	10^{-20} m^2
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	$1,5 \times 10^9$ Hz	$3,5 \times 10^9$ Hz	7×10^7 Hz	10^{13} Hz
Obrnjena zasedenost $\Delta N/V$	$5 \times 10^{15}/\mathrm{m}^3$	$2 \times 10^{15}/\mathrm{m}^3$	$3 \times 10^{21}/\mathrm{m}^3$	$10^{20}/\mathrm{m}^3$

Tabela 7.1: Izbrani podatki za He-Ne, Ar^+, CO_2 in tipičen ekscimerni laser

7.5 Ekscimerni laser

Ekscimerji (*excited dimer, excimer*) so vzbujena vezana stanja dveh atomov, ki bi se v osnovnem stanju ne vezala. Za laserje so zanimivi predvsem ekscimerji težkih žlahtnih plinov in halogenov, na primer Ar_2^* (126 nm), Kr_2^* (146 nm), Xe_2^* (172 nm), ArF (193 nm), KrF (248 nm), XeCl (308 nm), ArBr (161 nm), NeF (108 nm) ... Te molekule obstajajo samo v vzbujenem stanju, v osnovnem stanju pa je odbojna sila med atomoma prevelika in molekula neobstojna. Vsi našteti primeri oddajajo lasersko svetlobo v ultravijoličnem delu, ki ga drugi laserski sistemi le težko pokrivajo. Ekscimerni laserji delujejo v sunkih, pri čemer je tipična oddana energija v sunku ~ 1 J, dolžina sunka 10–100 ns pri repeticiji ~ 100 Hz.

Vezano stanje dveh atomov dobimo, kadar je ionizacijska energija prvega atoma manjša od vsote elektronske afinitete drugega atoma in elektrostatične energije vezave obeh ionov. Vzemimo za primer klor in kripton. Ionizacijska energija kriptona v osnovnem stanju je 14 eV, v vzbujenem pa 5 eV. Elektronska afiniteta klora je 3,75 eV in elektrostatična vezavna energija KrCl okoli 7 eV. Tako je za nastanek molekule KrCl v osnovnem stanju potrebno dodati okoli 4 eV, pri tvorbi molekule v vzbujenem stanju pa se sprosti okoli 6 eV. Približno obliko celotne potencialne energije molekule KrCl v osnovnem in vzbujenem stanju kaže slika (7.10). Molekula, ki je vezana v vzbujenem stanju, po sevalnem prehodu v osnovno stanje takoj razpade, zato je zelo lahko doseči obrnjeno zasedenost. Pri tem je razpadni čas vezanega stanja $\sim$ 10 ns, spodnjega nevezanega pa okoli $0,1$ ps. Da nastanejo ekscimeri, vzbujamo mešanico plinov (žlahtnega plina ali mešanice žlahtnega in halogenega plina) v heliju. Pritisk je razmeroma velik (~ 3 bar), zato plin v cevi vzbujamo prečno. Velika je tudi spektralna širina prehoda ($\Delta\nu = 10^{13}$ Hz). Nekaj tipičnih podatkov za ekscimerne laserje je zbranih v tabeli (7.1).

Ekscimerni laserji delujejo v sunkih s precej veliko energijo in se uporabljajo v industriji materialov, mikroprocesorjev, fotolitografiji in medicini, predvsem oftalmologiji in kirurgiji.

Slika 7.10: Shema energije v odvisnosti od razdalje med jedroma atomov. V vzbujenem stanju se atoma povežeta v molekulo, po prehodu v nižji nivo pa atoma disociirata.

7.6 Neodimov laser

Druga skupina laserjev, ki jo bomo obravnavali, so trdninski laserji. Taki laserji temeljijo na elektronskih prehodih v ionih primesi, ki jih dodamo v kristal ali steklo, črpamo pa jih optično. Primesi so navadno redke zemlje ali prehodne kovine, kristali pa oksidi ali fluoridi. Izdelava ojačevalnih sredstev na osnovi stekla je bistveno bolj preprosta in poceni, vendar ima steklo precej nižjo toplotno prevodnost od kristalov in se zato bolj greje. Začeli bomo z opisom dveh primerov neodimovega laserja, Nd:YAG in Nd:steklo. Podobne laserje dobimo, če v YAG kristalu namesto z neodimom itrijeve ione nadomestimo z iterbijem (1030 nm) ali erbijem (2940 nm).

7.6.1 Nd:YAG

V Nd:YAG laserju je ojačevalno sredstvo itrij-aluminijev granat ($Y_3Al_5O_{12}$, YAG) s primesmi neodimovih ionov Nd^{3+}. Neodimov laser deluje pri valovni dolžini $1,064$ µm ali frekvenčno podvojeni 532 nm. Laser deluje v zveznem načinu pri močeh do 5 kW ali sunkovnem z dolžino sunkov okoli 100 ns in energijo sunka ~ 1 J.

Neodimov laser je primer štirinivojskega laserskega sistema, pri čemer je laserski prehod med stanjema $^4F_{3/2}$ in $^4I_{11/2}$ iona neodima (slika 7.11). S svetlobo višje frekvence (tipično okoli 800 nm) črpamo elektrone v višje nivoje, ki hitro preidejo v zgornji laserski nivo. Življenjski čas zgornjega nivoja je okoli 230 µs, spodnjega pa precej krajši, zato je lahko doseči veliko obrnjeno zasedenost. Spodnje stanje je dovolj visoko nad osnovnim, da pri sobni temperaturi v ravnovesju ni znatno zasedeno. Razširitev črte je homogena in je predvsem posledica termičnega nihanja kristalne mreže ($\Delta\nu = 130$ GHz). Prag neodimovega laserja za zvezno delovanje je nizek in ga je lahko doseči, prav tako dobro neodimov laser deluje v sunkih, predvsem s preklopom dobrote.

Slika 7.11: Shema energijskih nivojev v Nd^{3+} laserju

Laser črpamo z diodnimi laserji ali močnimi ksenonovimi svetilkami za zvezno delovanje ter podobnimi bliskovnimi lučmi za sunkovno delovanje (slika 7.12 a). Aktivna snov v laserju je v obliki paličice dolžine od nekaj cm do dobrih 10 cm in širine ~ 1 cm. V kristalu YAG neodimovi ioni nadomestijo približno 1 % itrijevih, zato ojačevalno sredstvo na videz ni prozorno, temveč rahlo rožnato (slika 7.12 b). Aktivna paličica in svetilka sta vgrajeni v cilindrično ali eliptično votlino z zrcalnimi ali belimi stenami, tako da se čim večji del črpalne svetlobe absorbira v laserski paličici (slika 7.12 c).

Slika 7.12: Ksenonova bliskovna svetilka (a), ojačevalno sredstvo v Nd:YAG laserju (b) in shema eliptične črpalne votline (c)

Pri črpanju s ksenonovo svetilko je le manjši del izsevane svetlobe v absorpcijskih pasovih, zato je izkoristek črpanja razmeroma slab, tipično pod 1 %. Za izhodno moč zvezno delujočega Nd:YAG laserja $\sim$ 10 W je tako potrebna električna moč $\sim$ kW. Velika večina porabljene moči gre v gretje, zato je v laserjih z nekoliko večjo povprečno močjo potrebno vodno hlajenje. Gretje povzroča tudi toplotne deformacije laserske paličice, kar lahko močno spremeni lastnosti resonatorja. Toplotni učinki so ena poglavitnih praktičnih težav pri izdelavi neodimovih laserjev s klasičnimi svetilkami. Danes zato zvezno delujoče neodimove laserje črpamo z diodnimi laserji, ki svetijo v območju največje absorpcije Nd^{3+}. Črpanje je lahko prečno ali vzdolžno (slika 7.13). Pri diodnem črpanju je izkoristek dosti večji in je manj gretja, kar omogoča bolj kompaktno konstrukcijo in boljšo stabilnost izhodne moči.

Slika 7.13: Shema vzdolžnega diodnega črpanja Nd:YAG laserja. O – ojačevalno sredstvo, IZ – izhodno zrcalo, D – dikroično zrcalo, prepustno za črpalno svetlobo in odbojno za lasersko, DL – diodni laser za črpanje, L – leča

Neodimovi laserji so zelo razširjeni, tako v osnovni kot tudi v frekvenčno podvojeni različici. Najbolj uporabni so za obdelavo materialov (vrtanje, varjenje, litografija) ter v medicini (dermatologija in endoskopska kirurgija). Pomemben proizvajalec sunkovnih Nd:YAG laserjev za medicinske namene je podjetje Fotona d.o.o. iz Ljubljane.

Laser	Nd:YAG	Nd:steklo	Ti:safir
Valovna dolžina	1064 nm	1050 nm	660 – 1180 nm
Verjetnost za spontani prehod A	$4 \times 10^3/\mathrm{s}$	$3 \times 10^3/\mathrm{s}$	$3 \times 10^5/\mathrm{s}$
Presek za stimulirano emisijo σ	$3 \times 10^{-23}\ \mathrm{m}^2$	$3 \times 10^{-24}\ \mathrm{m}^2$	$3 \times 10^{-23}\ \mathrm{m}^2$
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	$1,3 \times 10^{11}$ Hz	7×10^{12} Hz	1×10^{14} Hz
Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$	$1,6 \times 10^{23}/\mathrm{m}^3$	$8 \times 10^{23}/\mathrm{m}^3$	$6 \times 10^{23}/\mathrm{m}^3$

Tabela 7.2: Tipični podatki za Nd:YAG, Nd:steklo in Ti:safirni laser

7.6.2 Nd:steklo

Namesto v kristal lahko neodimove ione Nd^{3+} vgradimo tudi v steklo. Laser z Nd:steklo ojačevalnim sredstvom deluje pri valovni dolžini $1,050$ µm v sunkovnem načinu s preklopom dobrote ali z uklepanjem faz z energijami sunkov ~ 1 J. Zaradi amorfne strukture stekla in posledično nehomogenega lokalnega polja je laserska črta nehomogeno razširjena ($\Delta\nu = 7$ THz). Ojačenje je manjše kot v Nd:YAG in za prag laserskega delovanja je potrebna precej večja črpalna moč. Laserji Nd:steklo se zato uporabljajo le v sunkovnem načinu in za tako delovanje so celo primernejši od Nd:YAG laserjev. Zaradi manjšega ojačenja pri dani obrnjeni zasedenosti je v laserju s preklopom dobrote mogoče doseči večjo načrpanost preden pride do praznjenja zaradi ojačevanja spontanega sevanja v enem preletu paličice. Problem teh laserjev predstavlja nizka toplotna prevodnost stekla, ki omejuje repeticijo sunkov. Velika širina spektralne črte je zelo primerna za delovanje v načinu uklepanja faz, s katerim dosegamo ultrakratke sunke (~ 100 fs).

★ Energije izsevanih sunkov je mogoče še povečati z ojačevalniki. Med največjimi je laserski sistem Nd:steklo v Rochestru (New York), ki ga uporabljajo za raziskave fuzije. Okoli 1 ns dolg sunek iz osnovnega laserja razdelijo na deset ojačevalnih vej, ki so dolge po 180 m. Končna energija sunka je nad ~ 1 MJ. Z njim z vseh strani posvetijo na kroglico iz devterija in tritija, ki se dovolj segreje in stisne, da pride do njunega zlivanja. Vršna moč laserskega sunka je okoli 10^{15} W. Če laserski snop zberemo na površino 1 mm^2, dobimo električno poljsko jakost okoli 5×10^{11} V/m, kar je približno enako električnemu polju v vodikovem atomu.

7.7 Ti:safir laser

Titan-safirni laser je trdninski laser, pri katerem so v kristal safirja Al_2O_3 primešani ioni titana Ti^{3+}. Njegova najpomembnejša značilnost je zvezna nastavljivost valovne dolžine v zelo širokem frekvenčnem pasu (600–1180 nm) z največjo učinkovitostjo pri okoli 800 nm. Deluje v zveznem načinu z močmi do 50 W in sunkovno v fazno uklenjenem načinu z dolžino sunkov do 10 fs z vršnimi močmi nad 10^{12} W.

Slika 7.14: Energijski nivoji v Ti:safir laserju. Dva nivoja sta zaradi vibracij razcepljena na veliko število podnivojev, ki pa se med seboj deloma prekrivajo. Zelo podobna je tudi shema energijskih nivojev organskih barvil.

Ojačevalno sredstvo v Ti:safir laserju je aluminijev oksid, v katerem približno $0,2$ % aluminijevih ionov nadomestimo s titanovimi. Titanovi ioni imajo v taki konfiguraciji zgolj eno vzbujeno stanje, vendar se zaradi sklopitve s fononi vibracijski nivoji posameznega stanja med seboj prekrivajo in prehod je močno razširjen. Z optičnim črpanjem vzbudimo titanov ion iz osnovnega stanja v eno izmed vibracijskih stanj vzbujenega stanja. Ion nato hitro preide v najnižje vzbujeno stanje. Laserski prehod poteka med nižjem vzbujenim stanjem in enim od vibracijskih nivojev osnovnega stanja (slika 7.14). Življenjski čas vzbujenega stanja je kratek ($3,2$ µs), širina črte pa največja med vsemi trdninskimi laserji ($\Delta\nu = 100$ THz). Ker je vrh absorpcijskega pasu blizu 500 nm, laser črpamo z zeleno svetlobo (argonov laser za zvezno delovanje oziroma frekvenčno podvojen neodimov laser za sunkovno). Najpomembnejša uporaba Ti:safir laserjev je v raziskovalnih laboratorijih za ustvarjanje zelo kratkih sunkov svetlobe z dolžino ~ 10 fs. Prevedeno v dolžino, ki jo svetloba v tem času prepotuje, je to le nekaj valovnih dolžin svetlobe.

7.8 Laserji na organska barvila

Naslednja skupina laserjev so laserji na organska barvila, v katerih je organsko barvilo raztopljeno v tekočini, praviloma vodi ali alkoholu. To so bili prvi laserji z veliko spektralno širino in nastavljivo valovno dolžino delovanja. Delujejo lahko kot zvezni laserji in z izbiro barvila lahko dosežemo delovanje v območju 300–1500 µm pri močeh do ~ 2 W, široka spektralna širina pa omogoča sunkovno delovanje z uklepanjem faz z nekaj femtosekundnimi sunki pri energiji sunka nekaj 100 J.

Shema energijskih nivojev molekule tipičnega organskega barvila je zelo podobna shemi energijskih nivojev titan-safirnega laserja (slika 7.14). Vsi elektronski nivoji so razcepljeni v vibracijske in rotacijske podnivoje. V toplotnem ravnovesju je molekula na dnu osnovnega elektronskega stanja S_0. Z absorpcijo vidne svetlobe primerne frekvence preide v neko vzbujeno singletno stanje S_1. Preko trkov z molekulami topila vzbujena barvilna molekula zelo hitro, v času okoli pikosekunde, preide na dno vzbujenega stanja, od koder s sevanjem preide nekam v osnovno stanje S_0, od tam pa s trki hitro nazaj na dno osnovnega stanja. Ker sta obe elektronski stanji zaradi vibracij in rotacij razširjeni, sta absorpcijska in emisijska fluorescenčna črta široki ($\Delta\nu = 30$ THz). Energija izsevane svetlobe je zmanjšana za energijo prehodov s trki, zato je emisijska črta premaknjena k nižjim frekvencam od absorpcijske. Absorpcijski in fluorescenčni spekter prehoda $S_0 - S_1$ za barvilo rodamin 6G kaže slika (7.15).

Slika 7.15: Absorpcijski in emisijski spekter barvila rodamin 6G, ki se uporablja v laserjih

Valovna dolžina	300–1500 µm
Verjetnost za spontani prehod A	$\sim 10^8/\mathrm{s}$
Presek za stimulirano emisijo σ	$3 \times 10^{-20}\ \mathrm{m}^2$
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	3×10^{13} Hz
Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$	$\sim 10^{22}/\mathrm{m}^3$

Tabela 7.3: Tipični podatki za laserje na organska barvila

Laser na organska barvila lahko deluje pri vseh frekvencah znotraj široke fluorescenčne črte. Zato moramo v resonator vgraditi frekvenčno selektiven element, s katerim nastavljamo frekvenco izhodne svetlobe. Uporabna je prizma, kot v primeru argonovega laserja, ali pa eno od zrcal nadomestimo z uklonsko mrežico, ki je zasukana pod takim kotom, da se po osi resonatorja odbije svetloba izbrane valovne dolžine. Barvilne laserje črpamo ali z bliskovno svetilko ali z drugim laserjem primerne valovne dolžine, na primer argonovim ali ekscimernim laserjem.

Slabost laserjev na organska barvila je njihova degradacija. Barvila v laserjih je treba pogosto menjati (tipično na 100 ur delovanja), poleg tega je ravnanje z njimi zahtevno, saj je veliko barvil in topil strupenih in korozivnih. Laserji na organska barvila so uporabni v spektroskopiji, za ločevanje izotopov, v medicini (dermatologija, odstranjevanje ledvičnih kamnov) ...

7.9 Vlakenski laserji

Posebna vrsta laserjev so vlakenski laserji, v katerih predstavlja aktivno sredstvo optično vlakno, dopirano z ioni redkih zemelj. (Za podroben opis optičnih vlaken glej poglavje 8) Valovna dolžina, pri kateri oddajajo svetlobo, je odvisna od snovi, s katerimi je vlakno dopirano. Najpogosteje je to erbij (1550 nm), iterbij ($\sim$ 1100 nm) ali neodim (1064 nm). Vlakenske laserje odlikuje izredno velik izkoristek (tipično okoli 70–80 %, lahko tudi več) in posledično zelo velika moč (do 20 kW). Za njih sta značilni tudi izredno velika kakovost žarka (faktor $M^2 < 1,1$, glej enačbo 3.24) in razmeroma majhna občutljivost na zunanje motnje. Delujejo lahko v zveznem ali sunkovnem načinu.

Slika 7.16: Energijski nivoji v erbijevem vlakenskem laserju (levo) in absorpcijski ter emisijski spekter za erbij (desno). Dodaten vrh pri 980 nm ni prikazan.

Oglejmo si vlakenski laser, katerega vlakno je dopirano z ioni erbija (masni delež ~ 1 %). Vlakna so pogosto dodatno dopirana z iterbijem, kar poveča absorpcijo črpalne svetlobe in s tem izkoristek laserja. Laser črpamo optično z lasersko diodo pri 980 nm ali 1480 nm, laserski prehodi pa se zgodijo ob povratku v osnovno stanje. Osnovno stanje je razcepljeno v več podnivojev (slika 7.16), zato je valovna dolžina oddane svetlobe v razmeroma širokem intervalu 1520–1560 nm. Velika spektralna širina omogoča delovanje z uklepanjem faz.

Zgradba vlakenskih laserjev se razlikuje od do zdaj opisanih. Glavna razlika je seveda v resonatorju, ki je v tem primeru kar optično vlakno. Tipičen premer je ~ 5 µm in dolžina več metrov. Na koncih vlakna lahko postavimo dikroični zrcali, ki omogočata longitudinalno sklopitev črpalnega žarka v vlakno. Namesto navadnih zrcal se pogosto uporabi periodične strukture na koncih vlakna, na katerih se valovanje izbrane valovne dolžine Braggovo odbija (slika 7.17). S selektivnim odbojem se širina spektra izhodnega valovanja bistveno zmanjša.

Navadno uporabljamo vlakna, ki so sestavljena iz sredice in dveh plaščev. Laserska svetloba ostaja ujeta v sredici vlakna, črpalno pa vodimo po notranjem plašču. To omogoča bistveno lažjo sklopitev črpalnega žarka v vlakno, poleg tega povečanje efektivnega polmera žarka vodi do manjših vršnih intenzitet in manjše verjetnosti pojava neželenih nelinearnih pojavov (poglavje 11.17).

Slika 7.17: Shema vlakenskega laserja: LD – črpalna laserska dioda, BPS – Braggova periodična struktura, V – optično vlakno

Vlakenski laserji se uporabljajo v telekomunikacijah, saj oddajajo svetlobo valovnih dolžin, pri katerih je v vlaknih najmanjša disperzija (poglavje 8.4). Velika intenziteta svetlobe omogoča obdelavo, varjenje, vrtanje in rezanje kovin. Zaradi svojih mehanskih lastnosti so primerni tudi za premično lasersko obdelavo snovi.

Valovna dolžina	1550 nm
Verjetnost za spontani prehod A	$\sim 90/\mathrm{s}$
Presek za stimulirano emisijo σ	$7 \times 10^{-25}\ \mathrm{m}^2$
Spektralna širina črte $\Delta\nu$	3×10^{12} Hz
Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$	$\sim 10^{24}/\mathrm{m}^3$

Tabela 7.4: Tipični podatki za erbijev vlakenski laser

★ Namesto vlaken, dopiranih z ioni redkih zemelj, lahko za izdelavo vlakenskih laserjev izkoristimo pojav stimuliranega Ramanovega sipanja (glej poglavje 11.16). Pri tem pojavu se črpalni žarek svetlobe neelastično siplje, ojači pa se žarek pri nižji frekvenci. Razlika frekvenc ustreza vibracijskim prehodom molekul, ki prevzamejo preostanek energije. Signal, ki se pri prehodu ojačuje, ostaja pretežno ujet v vlakno z Braggovimi periodičnimi strukturami na koncih. Zavedati se moramo razlike med navadnim laserjem, ki deluje zaradi vzpostavljene obrnjene zasedenosti, in Ramanskim laserjem, v katerem pride do ojačenja sipane svetlobe.

7.10 Polprevodniški laserji

Danes so nedvomno najpomembnejši polprevodniški oziroma diodni laserji. Njihove glavne značilnosti so veliko ojačenje in zato majhna dimenzija ($\sim$ 10–100 µm), nizka cena, velik izkoristek ($\sim$ 50 %) in neposredno črpanje z električnim tokom. Za črpanje zadoščajo majhni tokovi (tipično $\sim$ 100 mA), kar omogoča zelo hitro modulacijo (več 10 GHz) svetlobne moči s spreminjajočim se črpanjem. Slabost polprevodniških laserjev je razmeroma širok spekter in posledično majhna koherenca. Polprevodniški laserji delujejo v območju valovnih dolžin od $\sim$ 375 nm do več µm. Izhodne moči so zelo odvisne od valovne dolžine: v UV območju so razmeroma nizke ($\sim$ 100 mW), sicer pa dosegajo vrednosti $\sim$ 3 W.

Na hitro lahko rečemo, da delovanje diodnih laserjev temelji na rekombinaciji elektronov iz prevodnega pasu z vrzelmi v valenčnem pasu, pri čemer se izseva foton. Ta proces je lahko spontan, kot v svetlečih diodah, lahko pa tudi stimuliran, kar vodi do ojačenja svetlobe in laserskega delovanja. Za podrobnejšo razlago ojačenja v polprevodniških laserjih moramo poznati osnove polprevodniške fizike, zato jo na kratko ponovimo.

Energijski pasovi v polprevodnikih

V trdnih snoveh elektroni niso lokalizirani in zaradi interakcij med sosednjimi atomi se sicer ostra elektronska stanja razširijo v elektronske pasove. Pasovi se lahko prekrivajo (kovine), lahko pa se med najvišjim polno zasedenim (valenčnim) pasom in najnižjim nezasedenim (prevodnim) pasom pojavi energijska reža. Če je velikost energijske reže E_g nekaj kT, je snov polprevodnik (tabela 7.5), sicer je izolator.

Snov	InSb	InAs	Ge	Si	GaAs	GaP
E_g [eV]	0,17	0,36	0,67	1,124	1,43	2,26

Tabela 7.5: Širina energijske reže v nekaterih polprevodnikih

Ko na polprevodnik vpade foton z energijo $\hbar\omega > E_g$, se foton absorbira, elektron iz valenčnega pasu preide v prevodni pas, v valenčnem pasu pa ostane vrzel. Pričakovali bi, da se tak elektron, ki je medtem hitro prešel v dno prevodnega pasu, spontano vrne v valenčni pas, pri čemer se svetloba izseva. Vendar je pri prehodu treba upoštevati tudi ohranitev gibalne količine. Pri najobičajnejših polprevodnikih, siliciju in germaniju, leži vrh valenčnega pasu pri valovnem vektorju $\mathbf{k} = 0$, dno prevodnega pasu pa pri $\mathbf{k} \neq 0$ (slika 7.18 a). Prehod elektrona preko take indirektne reže je malo verjeten, saj mora zaradi ohranitve gibalne količine priti še do interakcije s fononom. Prehod je veliko bolj verjeten v snoveh z direktno režo, pri katerih ležita tako dno prevodnega kot vrh valenčnega pasu pri $\mathbf{k} = 0$ (slika 7.18 b). Snovi z direktno režo so na primer GaAs in druge spojine elementov tretje in pete skupine, ki so najbolj uporabni za izdelavo diodnih laserjev.

V najpreprostejši sliki obliko prevodnega pasu v bližini minimuma opišemo s parabolično odvisnostjo od velikosti valovnega vektorja $\mathbf{k}$

$$E_p = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p}. \tag{7.1}$$

Pri tem m_p označuje efektivno maso elektrona v prevodnem pasu, ki upošteva interakcije z mrežo in se zato razlikuje od mase prostega elektrona m_0.

Slika 7.18: Energijski pasovi v polprevodniku, kjer modra označuje valenčni pas, zelena pa prevodnega. Reža je indirektna (a) ali direktna (b). V vzbujenem stanju (c) so najnižja mesta v prevodnem pasu zasedena in najvišja mesta valenčnega pasu izpraznjena.

Podobno z efektivno maso zapišemo energijo vrzeli v valenčnem pasu

$$E_v = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_v}. \tag{7.2}$$

Zapišimo še gostoti stanj na energijski interval za prevodni in valenčni pas. Izhajamo iz zveze $\rho(k)dk = k^2 dk/\pi^2$ (enačba 5.4) in z upoštevanjem gornjih zvez dobimo

$$\rho_p(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_p}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E-E_g} \qquad \text{in} \qquad \rho_v(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_v}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{-E}. \tag{7.3}$$

Pri tem sta ključna parametra efektivna masa elektronov in vrzeli. Ti dve masi sta značilni za posamezen polprevodnik in znašata, na primer v GaAs, $m_p = 0{,}067\ m_0$ in $m_v = 0{,}5\ m_0$. Gostota stanj za vrzeli je v GaAs zato približno dvajsetkrat večja od gostote stanj za elektrone.

Verjetnost za zasedenost stanj je podana s Fermi-Diracovo funkcijo

$$f_p(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T}+1}, \tag{7.4}$$

kjer E_F označuje Fermijevo energijo. Pri $T = 0$ so vsa stanja pod Fermijevo energijo zasedena, nad njo pa prazna in Fermijeva energija leži v energijski reži (slika 7.19 a). Pri končni temperaturi se na dnu prevodnega pasu nahajajo termično vzbujeni elektroni, na vrhu valenčnega pasu pa vrzeli (slika 7.19 b). Verjetnost za pojav vrzeli v valenčnem pasu je $f_v = 1 - f_p$.

Slika 7.19: Verjetnost za zasedenost stanj. Pri $T = 0$ je valenčni pas poln, prevodni pa prazen (a). Pri končni temperaturi termično vzbujeni elektroni preidejo v prevodni pas (b). Za opis neravnovesnega stanja uporabimo dve Fermijevi energiji F_v in F_p, za vsak pas svojo (c).

★ E_F se določi iz pogoja, da je število elektronov v prevodnem pasu enako številu vrzeli v valenčnem pasu in $N_{p0} = N_{v0}$. Fermijeva energija leži na sredini energijske reže le v primeru, da sta efektivni masi za elektrone in vrzeli enaki. Sicer pride do premika Fermijeve energije proti pasu z manjšo efektivno maso.

Število elektronov v prevodnem pasu na prostorninsko enoto izračunamo kot produkt gostote stanj in verjetnost, da je stanje zasedeno, integrirano po celotnem energijskem pasu

$$N_{p0} = \int_{E_g}^{\infty} \rho_p(E) f_p(E)\, dE. \tag{7.5}$$

Število vrzeli v valenčnem pasu je

$$N_{v0} = \int_{-\infty}^{0} \rho_v(E) f_v(E)\, dE. \tag{7.6}$$

Število elektronov v prevodnem pasu (in vrzeli v valenčnem) je pri $T = 0$ enako nič in tudi pri končnih temperaturah ostaja razmeroma nizko. Znatno ga lahko povečamo, če polprevodnik dopiramo in s tem povišamo Fermijevo energijo.

Dopiranje polprevodnika pomeni nadzorovano dodajanje ustreznih nečistoč. Če dodamo donorske primesi, ki povečajo število elektronov v snovi, govorimo o polprevodniku tipa n, če pa dodajamo akceptorske snovi, ki elektrone sprejemajo, govorimo o polprevodniku tipa p. Primeri donorjev za GaAs so žveplo, selen ali telur, primer akceptorjev pa cink in kadmij.

Zaradi primesi se v energijski reži pojavi dodatni energijski nivo, pri čemer je donorski nivo navadno tik pod prevodnim pasom, akceptorski pa tik nad valenčnim. V tipu n se Fermijeva energija premakne navzgor, pri močnem dopiranu lahko tudi v prevodni pas. V tem primeru so zasedena vsa stanja v valenčnem pasu in vsa stanja do Fermijeve energije v prevodnem. Podobno je v močno dopiranjem tipu p, v katerem se Fermijeva energija pomakne navzdol in število vrzeli v valenčnem pasu močno naraste. Prosta so tako vsa stanja v prevodnem pasu in stanja do Fermijeve energije v valenčnem pasu.

★ Zgolj z dopiranjem se verjetnost za prehod in izsevanje fotona ne spremeni. V n tipu, na primer, se število elektronov v prevodnem pasu sicer znatno poveča, vendar v prevodnem pasu ni dovolj ustreznih vrzeli, s katerimi bi se elektroni lahko rekombinirali.

Ko elektrone vzbudimo iz valenčnega v prevodni pas, se v valenčnem pasu pojavijo vrzeli. Dokler ne pride do rekombinacije (tipično nekaj ns), vlada v prevodnem pasu kvazi-termično ravnovesje, saj je relaksacija elektronov znotraj pasu bistveno hitrejša (tipično ps). Za veliko populacijo elektronov v prevodnem in veliko populacijo vrzeli v valenčnem pasu Fermijeva funkcija ni več dobra za opis zasedenosti stanj (sliki 7.18 c in 7.19 c). Uporabimo koncept kvazi-Fermijevih nivojev F_p in F_v, s katerima opišemo porazdelitvi v vsakem pasu posebej, za prevodni in valenčni pas

$$f_p(E) = \frac{1}{e^{(E-F_p)/k_BT} + 1} \quad \text{in} \quad f_v(E) = \frac{1}{e^{(E-F_v)/k_BT} + 1}. \tag{7.7}$$

V termičnem ravnovesju je razlika med kvazi-Fermijevima energijama $F_p - F_v$ enaka nič, z naraščajočim vzbujanjem pa se razlika povečuje.

Ojačenje svetlobe v polprevodnikih

Posvetimo na polprevodnik v vzbujenem stanju s svetlobo s krožno frekvenco ω. Vpadna svetloba povzroča prehode med stanji z energijo E_a v valenčnem in med stanji z energijo E_b v prevodnem pasu (slika 7.18 b). Če je prehodov iz prevodnega pasu v valenčnega več kot prehodov v obratni smeri, pride do ojačenja svetlobe.

Za zapis verjetnosti za prehod med dvema stanjema v časovni enoti uporabimo Fermijevo zlato pravilo. Verjetnost, da je zgornje stanje zasedeno, je $f_p(E_b)$, verjetnost za zasedenost spodnjega stanja pa je $1-f_v(E_a)$. Verjetnost za prehod pri določenem valovnem vektorju je

$$w_s(k) = \frac{2\pi}{\hbar}|H_{pv}|^2\delta(E_b - E_a - \hbar\omega)f_p(E_b)[1-f_v(E_a)], \tag{7.8}$$

kjer je $H_{pv} = \langle p|\hat{x}|v\rangle E$ matrični element za dipolni prehod v svetlobnem polju E med prevodnim in valenčnim pasom. Podobno je verjetnost za absorpcijo

$$w_a(k) = \frac{2\pi}{\hbar}|H_{pv}|^2\delta(E_b - E_a - \hbar\omega)f_v(E_a)[1-f_p(E_b)]. \tag{7.9}$$

Upoštevamo enačbi (7.1) in (7.2) in zapišemo razliko energij

$$E_b - E_a = E_g + \frac{\hbar^2k^2}{2}(\frac{1}{m_p}+\frac{1}{m_v}) = E_g + \frac{\hbar^2k^2}{2m_r}, \tag{7.10}$$

kjer smo z $m_r = m_v m_p/(m_v+m_p)$ označili reducirano maso elektrona in vrzeli.

Število spontanih emisij oziroma absorpcij na enoto volumna v danem času izračunamo tako, da verjetnosti za prehod integriramo po vseh $\mathbf{k}$. Razliko med številom spontanih emisij in absorpcij na enoto volumna je

$$\begin{aligned} N_{pv} - N_{vp} &= \int (w_s - w_a)\,\rho(k)\,dk \\ &= \frac{2}{\pi\hbar}\int |H_{pv}|^2\,(f_p(E_b)-f_v(E_a))\,\delta\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m_r}+E_g-\hbar\omega\right)k^2\,dk. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Upoštevali smo, da je gostota stanj $\rho(k) = k^2\,dk/\pi^2$. Vpeljemo novo spremenljivko

$$X = \frac{\hbar^2k^2}{2m_r} + E_g - \hbar\omega \tag{7.12}$$

in zapišemo integral

$$N_{pv} - N_{vp} = \frac{1}{\pi\hbar}\left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int |H_{pv}|^2\,(f_p(E_b)-f_v(E_a))\sqrt{(X-E_g+\hbar\omega)}\,\delta(X)dX. \tag{7.13}$$

Z upoštevanjem lastnosti funkcije δ lahko zapišemo

$$N_{pv} - N_{vp} = \frac{1}{\pi\hbar}\left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\hbar\omega - E_g}\,(f_p(E_b)-f_v(E_a))\,. \tag{7.14}$$

Poglejmo rezultat podrobneje. Da je število prehodov iz prevodnega v valenčni pas večje od števila prehodov v obratno smer in torej pride do ojačenja vpadne svetlobe in ne njene absorpcije, mora biti $N_{pv} - N_{vp} > 0$. Sledi pogoj

$$\frac{1}{e^{(E_b-F_p)/k_BT}+1} > \frac{1}{e^{(E_a-F_v)/k_BT}+1}. \tag{7.15}$$

Upoštevamo, da je $E_b - E_a = \hbar\omega$ in da mora biti število prehodov realno, in dobimo pogoj za ojačevanje

$$\boxed{E_g \le \hbar\omega < F_p - F_v.} \tag{7.16}$$

Energija fotonov, ki naj se v snovi ojačujejo, mora biti po pričakovanjih večja od energije reže, sicer ne pride niti do absorpcije niti do ojačenja. Gornja zveza pa pove tudi, da za ojačenje svetlobe ne zadošča le nekaj vzbujenih elektronov in nekaj ustreznih vrzeli. V prevodnem pasu mora biti toliko elektronov, da pri neki energiji zasedejo vsaj polovico stanj, hkrati pa mora biti v valenčnem pasu toliko vrzeli, da je vsaj polovica stanj nezasedena. Ojača se torej le svetloba z energijo fotonov, ki je manjša od razlike med kvazi-Fermijevema nivojema.

Koeficient ojačenja vpadne svetlobe pri dani krožni frekvenci ω je

$$\gamma(\omega) = K\sqrt{\hbar\omega - E_g}\,(f_p(E_b) - f_v(E_a))\,, \tag{7.17}$$

pri čemer za ojačenje velja

$$dj = \gamma(\omega)\,jdz. \tag{7.18}$$

Z naraščajočo stopnjo vzbujenosti koeficient ojačenja razumljivo narašča, manjša pa se z naraščajočo temperaturo. Njegovo odvisnost od energije vpadnih fotonov kaže slika (7.20) in vidimo, da se z naraščajočo temperaturo zmanjšuje tudi širina ojačevalnega pasu.

Slika 7.20: Ojačenje v polprevodniku kot funkcija energije fotonov. Črna črta velja pri $T = 0$ in rdeča pri $T > 0$. Pri frekvencah, večjih od $(F_p - F_v)/\hbar$, pride do absorpcije svetlobe.

★ Iz enačbe (7.17) za ojačenje v polprevodnikih je še enkrat jasna glavna razlika med navadnimi in polprevodniškimi laserji: v navadnih laserjih je obrnjena zasedenost podvržena Boltzmannovi statistiki, v polprevodniških pa zasedenost stanj opišemo s Fermi-Diracovo porazdelitvijo.

Spoj *p-n*

Svetloba se v polprevodniku ojačuje le, če je na istem mestu v prevodnem pasu dovolj veliko število elektronov, v valenčnem pasu pa zadosti vrzeli. Za delovanje polprevodniškega laserja moramo torej s črpanjem vzdrževati neravnovesno stanje, podobno kot smo pri navadnih laserjih vzdrževali obrnjeno zasedenost.

Neravnovesno stanje dosežemo tako, da v degeneriran polprevodnik tipa p z veliko vrzeli dovolj hitro dodajamo elektrone v prevodni pas. To lahko storimo preko spoja *p-n*, na katerega priključimo napetost v prevodni smeri. Najpreprostejši primer spoja *p-n* je spoj dveh kosov iste snovi, ki je na eni strani dopirana z akceptorji (p) in na drugi z donorji (n). Ko staknemo območji p in n, elektroni iz območja z višjo koncentracijo difundirajo v območje z nižjo koncentracijo, vrzeli pa ravno obratno. Ob spoju nastane v stacionarnem stanju ozek pas, tako imenovani izpraznjeni sloj, v katerem ni prostih nosilcev naboja. Na strani n ostanejo pozitivni donorski ioni, na strani p pa negativni akceptorski ioni, ki ustvarjajo električno polje. Nastalo polje preprečuje nadaljnjo difuzijo nosilcev naboja. V ravnovesju se Fermijeva energija na obeh straneh izenači, prevodni in valenčni pas pa se ukrivita.

Slika 7.21: Energijska pasova v močno dopiranem spoju *p-n* (levo) in ista pasova ob priključeni napetosti U v prevodni smeri (desno). F_p in F_v označujeta kvazi-Fermijevi energiji, senčen del pa aktivno območje, v katerem pride do rekombinacije elektronov in vrzeli.

Ko na spoj priključimo napetost v prevodni smeri (torej pozitivno napetost na stran p), se potencialni skok zmanjša. Pri tem je potencialna razlika kar sorazmerna s priključeno napetostjo U. Fermijevi energiji na p in n strani se razmakneta in v ozkem območju v bližini spoja pride do hkratne zasedenosti elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu (slika 7.21). To imenujemo aktivno območje, saj v njem prihaja do rekombinacij in do nastanka fotonov.

Pri nizkih priključenih napetostih oziroma nizkih tokovih skozi spoj *p-n* prihaja do spontane rekombinacije in nizke izsevane moči svetlobe. Pri večjih napetostih, ko je $e_0U \approx E_g$, pride do velikih koncentracijah nosilcev naboja in stimuliranih rekombinacij, ki omogočajo optično ojačenje. Takrat presežemo prag delovanja diodnega laserja. Ojačenje v polprevodniških laserjih je precej veliko, lahko več od 100 /cm, zato je mogoče dobiti delujoč laser že v zelo majhnem aktivnem območju, lahko tudi le nekaj mikronov. Običajni polprevodniški laserji so tako dolgi okoli do $0,25$ mm.

Zgradba laserja

Prvi polprevodniški laser (1962) je bil narejen iz GaAs in je oddajal svetlobo pri 850 nm. Shema takega laserja je na sliki (7.22). Svetloba se ojačuje v tanki aktivni plasti in iz laserja izhaja v smeri vzdolžno z laserjem. Vidimo, da polprevodniški laser nima navadnega resonatorja iz dveh odbojnih zrcal, ampak se svetloba odbija kar na gladko odklanih stranskih ploskvah kristala. Zaradi velikega lomnega količnika (npr. $n = 3,5$ za GaAs) je odbojnost dovolj velika za učinkovito delovanje.

Slika 7.22: Shema preprostega polprevodniškega laserja (levo) in porazdelitev svetlobne intenzitete na spoju *p-n*. Tipična širina je 100–200 µm, dolžina 200–500 µm, debelina aktivne plasti pa le ~ 1 µm. Svetlobni profil v laserju (desno). Svetloba se ojači v aktivnem območju (vijolična), v območju p in n pa se absorbira.

Opisani polprevodniški laserji imajo kar nekaj slabosti. So zelo močno dopirani, dobro delujejo le močno hlajeni (prvotno pri 77 K), poleg tega je snop v takih laserjih pogosto širši od debeline aktivnega območja. Debeline aktivnega območja ne moremo nadzorovano spreminjati, saj je odvisna od difuzije in rekombinacije. Tipično znaša ~ 1 µm, širina žarka pa nekaj mikronov več, zato znaten del svetlobe potuje po območju p in n, kjer pride do absorpcije in do povečanih izgub ter segrevanja. Tokovi, potrebni za delovanje takega laserja, so visoki (~ 100 kA/cm^2 pri sobni temperaturi), kakovost žarka pa razmeroma slaba.

Bistveno izboljšano delovanje je v tako imenovanih heterostrukturah. Gre za dvojni spoj p-n, v katerem sta spojeni dve različni snovi, aktivno območje (tipično debelo le okoli 100 nm) pa se nahaja med polprevodnikoma tipa p in n.[1] Najpomembnejši primer je plast p-GaAs, ki se nahaja med plastjo n-$Al_xGa_{1-x}As$ in p-$Al_xGa_{1-x}As$ (slika 7.23). Elektroni v tem primeru tečejo iz tipa n v prevodni pas aktivne plasti GaAs, vrzeli pa iz tipa p v valenčni pas. Tak laser deluje v območju od 750 nm do 880 nm, odvisno od x in koncentracije primesi. Drug pomemben primer je laser z $In_xGa_{1-x}As_{1-y}P_y$, ki seva svetlobo z valovno dolžino med $1,1$ µm in $1,6$ µm. To ga naredi še posebej pomembnega za optične komunikacije, v katerih se najpogosteje uporablja svetlobo pri $1,3$ µm in $1,55$ µm. Prvi primer si oglejmo podrobneje.

★ Pri izdelavi heterostruktur je ključno najti snovi, ki lahko rastejo skupaj. Take plastne strukture naredijo z epitaksialno rastjo, zato morajo biti medatomske razdalje različnih materialov čim bolj enake, sicer pride do defektov in slabšega delovanja. GaAs in AlAs imata enako strukturo in praktično enako medatomsko razdaljo, zato lahko brez škode na strukturi atome galija zamenjamo z atomi aluminija. Tipične vrednosti x v $Al_xGa_{1-x}As$ so $0,3$. S spreminjanjem koncentracije aluminija x lahko zvezno spreminjamo širino energijske reže ($E_g \approx 1,42 + 1,3x$ eV) in lomni količnik zlitine ($n \approx 3,5 - 0,71x$).

Heterostruktura ima nekaj poglavitnih prednosti. Zlitina z aluminijem ima večjo energijsko režo od čistega GaAs, zato mejni plasti ustvarita potencialno bariero, ki preprečuje difuzijo nosilcev naboja iz aktivne plasti (slika 7.23). Tako ostane koncentracija elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu že pri razmeroma majhnih tokovih velika in svetloba se ojačuje. Druga prednost je manjši lomni količnik zlitine, zaradi katerega ostane svetloba ujeta v aktivni plasti, podobno kot v valovnem vodniku. Ker manjši del svetlobe potuje izven aktivnega območja, je ojačenje večje, poleg tega se zaradi večje energijske reže občutno zmanjša absorpcija izven aktivnega območja. Skupaj z zmanjšano debelino aktivnega območja to vodi do znižanja tokov, potrebnih za delovanje laserja, za približno dva reda velikosti (~ 1 kA/cm^2). Z uporabo heterostrukture se tudi izboljša izkoristek in zmanjša gretje.

Slika 7.23: Shema laserja z dvojno heterostrukturo (levo) oblika energijskih pasov na spoju pri napetosti, priključeni v prevodni smeri. V aktivnem območju je število elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu zelo veliko, zato pride do močnega ojačenja svetlobe.

[1] Za iznajdbo heterostruktur sta Zhores I. Alferov in Herbert Kroemer leta 2000 prejela Nobelovo nagrado.

Pri strukturi, ki jo kaže slika (7.23), je aktivna plast v prečni smeri praktično neomejena, zato lahko hkrati sveti mnogo prečnih nihanj. Posledično je prečna koherenca snopa razmeroma slaba in delovanje laserja nestabilno. To slabost popravijo tako, da plasti ob straneh pojedkajo, da ostane le kakih 5 µm širok pas (7.24). Odjedkani material nadomestijo s čistim $Al_xGa_{1-x}As$, tako da je aktivno območje z vseh strani obdano s snovjo z večjim lomnim količnikom in laserski snop ostane ujet v pravokoten valovni vodnik. Izhodni snop je zaradi oblike aktivne snovi eliptičen s premerom okoli 1 µm v navpični in 5 µm v prečni smeri. To da v večji oddaljenosti snop z divergenco kakih 50 ° v navpični in okoli 5 ° v prečni smeri. Če potrebujemo cilindrično simetričen snop, ga moramo popraviti z ustreznimi cilindričnimi lečami.

Slika 7.24: Shema laserja z dvojno heterostrukuro z dodatno prečno omejitvijo.

Omenili smo, da polprevodniški laserji nimajo posebnih zrcal. Zaradi velikega lomnega količnika polprevodnika se dovolj svetlobe odbije na mejni ploskvi. Naloga resonatorja pa ni samo odboj svetlobe, ampak tudi izbira posameznega nihajnega načina. Ker tega z odbojem na ploskvi ne dosežemo, pogosto uporabimo periodične strukture, na katerih se svetloba selektivno Braggovo odbije. Druga možnost je periodično spreminjajoča se debelina plasti, na kateri pride do porazdeljene povratne sklopitve (*distributed feedback*).

Večja odbojnost mejnih ploskev je nujna v laserjih, pri katerih svetloba ne izhaja iz tanke aktivne plasti vzporedno z ravnino spoja *p-n*, ampak izhaja v smeri pravokotno na aktivno plast. To so tako imenovani VCSEL (*Vertical cavity surface-emitting laser*). Ker je sevalna površina večja in ojačevalno sredstvo krajše, je ojačenje na prelet manjše in mora biti odbojnost resonatorja toliko večja. Kvaliteta žarka je občutno boljša kot v navadnih diodnih laserjih, poleg tega ima izhodni žarek manjšo divergenco.

Posebna vrsta polprevodniških laserjev so nizko-dimenzionalni laserji. V njih je velikost aktivnega območja vsaj v eni smeri primerljiva z medatomsko razdaljo (tipično $\sim$ 10 nm). Najpreprostejši je laser s potencialno jamo (*Quantum well laser*), ki je po svoji zgradbi zelo podoben heterostrukturnim (slika 7.24), le da so dimenzije precej manjše. Zaradi majhne dimenzije se v taki snovi bistveno zmanjša gostota stanj. Za dosego zahtevane razlike med kvazi-Fermijevih nivojev – in s tem doseči prag za delovanje laserja – je zato potrebna precej manjša gostota nosilcev naboja in tok, potreben za delovanje laserja, se zniža.

V kvantnih pikah, ki so kvantno omejene v vseh treh smereh, so stanja diskretna in pasov ni več. Ker pa je tehnološko zelo zahtevno izdelati povsem enake kvantne pike, je spekter izsevane svetlobe iz skupine kvantnih pik zelo nehomogeno razširjen.

Diodni laserji so danes eni najpomembnejših laserjev. Uporabljamo jih v vsakodnevnih napravah (tiskalnikih, optičnih čitalcih), v medicini, industriji, izrednega pomena so za telekomunikacije, pogosto pa jih uporabljamo tudi za črpanje trdninskih ali vlakenskih laserjev. Poleg že naštetih prednosti jih odlikuje tudi zelo dolg življenjski čas (do 50 000 ur).

7.10.1 Svetlobne diode - LED

Svetlobne diode danes so eno najbolj razširjenih izvorov svetlobe in nadomeščajo navadne žarnice ali svetilke. Oddajajo svetlobo od UV do IR, odlikujeta jih dober izkoristek (nad 25 %) in dolga življenjska doba (do 50 000 ur).

Svetlobne diode delujejo podobno kot polprevodniški laserji. Na spoju *p*-*n* prihaja do spontane emisije fotonov zaradi rekombinacij elektronov in vrzeli. Za razliko od laserjev svetlobne diode nimajo praga delovanja, ampak začnejo svetiti, čim je na spoj priključena napetost v prevodni smeri. Zaradi spontane narave prehodov je svetloba, ki jo oddajajo svetloben diode, nekoherentna in nepolarizirana.

Prve svetlobne diode so bile izdelane iz GaAsP in so oddajale svetlobo pri 710 nm. Pomemben napredek je bila izdelava svetlobnih diod, ki so oddajale svetlobo v modrem delu spektra.[2] Te so sestavljene iz dvojne heterostrukture, v kateri je plast InGaN, dopiranega s cinkom, med plastema *p*-AlGaN in *n*-AlGaN.

Belo svetlobo iz LED svetil lahko dobimo z mešanjem svetlobe iz treh različnih diod, rdeče, zelene in modre. Bolj primeren je pristop z uporabo ene same diode, ki oddaja svetlobo v modrem delu spektra, ki pa jo prevlečemo z molekulami fosforja. Fosfor modro svetlobo absorbira in spontano izseva svetlobo pri nižjih frekvencah oziroma daljših valovnih dolžinah. Z ustrezno izbiro parametrov dobimo belo svetlobo ceneje in preprosteje kot s tremi ločenimi diodami.

★ Posebna vrsta svetlobnih diod so organske svetlobne diode (OLED). Te so narejene iz organskih snovi, ki se obnašajo kot organski polprevodniki. Z spreminjanjem kemijske sestave se spreminja valovno dolžino, ki jo LED oddaja. Njihova poglavitna prednost je preprosta izdelava, saj je proizvodnja organski spojin preprostejša in cenejša od rasti kristalov.

[2] Za iznajdbo modrih LED so Isamu Akasaki, Hiroshi Amano in Shuji Nakamura leta 2014 prejeli Nobelovo nagrado.

8. Optična vlakna

Moderna komunikacijska tehnologija zahteva vedno hitrejši prenos vedno večje količine podatkov. Navadne kovinske vodnike so zato v računalniških in telekomunikacijskih povezavah nadomestila optična vlakna, ki jih odlikujejo majhne izgube, neobčutljivost na elektromagnetne in medsebojne motnje ter zmožnost prenosa izjemno velike količine podatkov. V tem poglavju bomo opisali mehanizme prenosa podatkov po optičnih vodnikih in spoznali omejitve pri prenosu, predvsem disperzijo in izgube, ter načine, kako se z njimi spopadamo.

8.1 Planparalelni vodnik

Geometrijski opis

Klasično pojasnimo delovanje optičnih vlaken s totalnim odbojem na meji med dvema dielektrikoma. Kadar prehaja svetloba iz snovi z večjim lomnim količnikom v sredstvo z manjšim lomnim količnikom, se pri vpadnih kotih, ki so večji od kritičnega kota, totalno odbije.

Slika 8.1: Klasična razlaga valovnega vodnika

Najpreprostejši optični vodnik je planparalelna plast dielektrika, ki je obdana s snovjo z manjšim lomnim količnikom (slika 8.1). Plasti z večjim lomnim količnikom (n_1) rečemo sredica, okoliški snovi z lomnim količnikom $n_2 < n_1$ pa plašč. Žarek potuje po vodniku, če je vpadni kot na mejo med sredico in plaščem ϑ večji od kota totalnega odboja ϑ_c, za katerega velja

$$\sin \vartheta_c = \frac{n_2}{n_1}. \tag{8.1}$$

Obstaja torej največji vpadni kot $\alpha_{\max}$, pri katerem se vpadna svetloba ujame v vlakno. Z njim povezana je numerična odprtina (apertura) vlakna, ki jo izračunamo kot

$$NA = \sin \alpha_{\max} = n_1 \sin \beta_{\max} = n_1 \sin(\pi/2 - \vartheta_c) = n_1 \cos \vartheta_c = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_c}. \tag{8.2}$$

Upoštevajoč enačbo (8.1) numerično odprtino zapišemo kot

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \tag{8.3}$$

Razlika med lomnima količnikoma sredice in plašča je navadno majhna, tipično le nekaj stotink, zato je numerična odprtina optičnih vodnikov $NA \lesssim 0,1$. Kot, pod katerim lahko vpada svetloba v vodnik (ali vlakno), da se vanj ujame, je tako navadno le nekaj stopinj.

Valovni opis

Za natančen opis širjenja svetlobe po vodnikih ali vlaknih[1], ki imajo polmer sredice od nekaj do nekaj deset mikrometrov, geometrijska optika ne zadošča. Rešiti moramo Maxwellove enačbe (enačbe 1.1–1.4) z ustreznimi robnimi pogoji (enačbe 1.9–1.12), kar je za cilindrična vlakna dokaj dolg in zapleten račun. Zato določimo najprej osnovne značilnosti valovanja, ki se širi po planparalelnem vodniku.

Glede na smer polarizacije električne poljske jakosti ločimo dva primera (slika 8.2). Če je smer električne poljske jakosti valovanja vzporedna z mejnima ploskvama (smer y), govorimo o transverzalnem električnem (TE) valovanju. V nasprotnem primeru, ko je z mejnima ploskvama vzporedna magnetna poljska jakost in leži električna poljska jakost v ravnini xz, govorimo o transverzalnem magnetnem (TM) valovanju.

Slika 8.2: Polarizaciji TE (levo) in TM (desno) valovanj v valovnem vodniku

Geometrijskemu žarku, ki pod kotom potuje po sredici in se na njeni meji odbija, ustreza v valovni sliki val, ki ima prečno komponento valovnega vektorja k_x različno od nič. Ker je valovanje v prečni smeri omejeno na sredico končne debeline (naj bo debelina sredice enaka a), lahko k_x zavzame le diskretne vrednosti. Te so v grobem približno enake $N\pi/a$, pri čemer je N celo število. Pravimo, da vsak N določa en rod valovanj v vodniku. Po drugi strani obstaja največji k_x, za katerega približno velja

$$k_{x\max} \approx k_0 \sin\alpha_{\max} = k_0 n_1 \cos\vartheta_c = k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \tag{8.4}$$

Število rešitev za k_x je tako omejeno in točno določeno, odvisno pa je od razlike lomnih količnikov in od debeline vodnika oziroma polmera vlakna. V nadaljevanju bomo spoznali, da v optičnih vlaknih en rod vselej obstaja, za razliko od dielektričnih in kovinskih vodnikov, kakršne poznamo iz mikrovalovne tehnike, po katerih se pod določeno frekvenco valovanje ne more širiti. Enorodovna optična vlakna, torej vlakna, po katerih se širi en sam rod, imajo še posebej lepe lastnosti za uporabo v komunikacijskih sistemih.

Povejmo še nekaj o hitrosti valovanja v vodniku. Naj bo β velikost komponente valovnega vektorja vzdolž smeri z in odvisnost polja od koordinate vzdolž vodnika $\exp(i\beta z)$. Po Pitagorovem izreku velikost valovnega vektorja v sredici vodnika zapišemo kot

$$k_1 = n_1\frac{\omega}{c_0} = \sqrt{\beta^2 + k_x^2}. \tag{8.5}$$

Vidimo, da za dano vrednost k_x zveza med valovnim številom β in krožno frekvenco ω ni linearna. Fazna hitrost valovanja $v_f = \omega/\beta$ je tako odvisna od krožne frekvence in pride do disperzije. Grupna hitrost $v_g = d\omega/d\beta$ se zaradi nelinearne zveze med β in ω razlikuje od fazne hitrosti in njena frekvenčna odvisnost ima pomembne posledice za uporabo vlaken pri prenosu podatkov.

[1] Dogovorimo se, da besedo vlakno uporabljamo za cilindrične strukture, besedo vodnik pa za planparalelne in njim podobne strukture.

8.2 Račun lastnih rodov v planparalelnem vodniku

Poiščimo rešitve valovne enačbe v planparalelnem vodniku. To je preprost dvodimenzionalen model optičnega vlakna, ki je sestavljen iz plasti prozornega dielektrika z lomnim količnikom n_1 in plašča z lomnim količnikom n_2. Zaradi enostavnosti privzamemo, da je plašč na obeh straneh sredice enak. Sredica naj bo debela a, izhodišče koordinatnega sistema si izberemo na sredini plasti. Ločimo tri območja, kjer rešujemo valovno enačbo: območje II označuje sredico, območji I in III pa sta v plašču nad sredico oziroma pod njo.

Slika 8.3: K izračunu lastnih rodov v simetričnem planparalelnem vodniku

Krajevni del valovne enačbe, ki jo rešujemo, opisuje Helmholtzeva enačba (enačba 1.21)

$$\nabla^2\mathbf{E} + n^2(x)\,k_0^2\,\mathbf{E} = 0, \tag{8.6}$$

kjer je $k_0 = \omega/c$, $n(x)$ pa nezvezno spremeni vrednost ob prehodu iz sredice v plašč. Nastavek za rešitev naj bo oblike

$$\mathbf{E}(x,z) = \mathbf{e}\psi(x)\,e^{i\beta z}. \tag{8.7}$$

Omejimo se le na primer TE polarizacije (za izračun lastnih rodov TM polariziranega valovanja glej nalogo 8.2.1). Vstavimo nastavek (enačba 8.7) v enačbo (8.6) in dobimo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(k_0^2 n_1^2 - \beta^2\right)\psi = 0 \qquad \text{v sredici (območje II)} \tag{8.8}$$

in

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(k_0^2 n_2^2 - \beta^2\right)\psi = 0 \qquad \text{v plašču (območji I in III).} \tag{8.9}$$

Iz zveze (enačba 8.5) sledi $k_0^2 n_1^2 - \beta^2 = k_x^2$, zato lahko rešitve prve enačbe zapišemo v obliki

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = C\cos(k_x x) + D\sin(k_x x), \tag{8.10}$$

rešitve v plašču pa so oblike

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(-\kappa x) + B\exp(\kappa x) \quad \text{in} \quad \psi_{\mathrm{III}}(x) = F\exp(-\kappa x) + G\exp(\kappa x), \tag{8.11}$$

pri čemer smo vpeljali $\kappa^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2$.

Da valovanje ostane ujeto v vlakno, mora biti κ realno število. Le tako namreč dosežemo eksponentno pojemanje električne poljske jakosti z oddaljenostjo od sredice, sicer je valovanje v vseh treh območjih oscilatorno in ni ujeto v vlakno.

Iz zahteve, da sta k_x in κ realna, sledi pogoj za valovno število β

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1. \tag{8.12}$$

Poleg tega zahteva po končnosti rešitve da pogoj, da je v območju I (pri $x > a/2$) koeficient $B = 0$, v območju III (pri $x < -a/2$) pa $F = 0$. Hitro ugotovimo, da so zaradi simetrije vlakna lastne rešitve lahko le sode ali lihe funkcije.

Sode rešitve

Poglejmo najprej sode rešitve. V sredici bo različen od nič samo C, v območjih I in III pa bosta amplitudi enaki in $A = G$ (slika 8.4 a). Dobimo

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(-\kappa x), \tag{8.13}$$
$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = C\cos(k_x x), \tag{8.14}$$
$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = A\exp(\kappa x). \tag{8.15}$$

Zvezo med koeficientoma A in C določimo z upoštevanjem robnih pogojev. Na meji med sredico in plaščem morata biti tangencialni komponenti električne in magnetne poljske jakosti zvezni (enačbi 1.11 in 1.12). Iz tega izpeljemo pogoj, da se za TE valovanje na meji ohranja amplituda električne poljske jakosti. Pri $x = a/2$ zapišemo

$$A\exp(-\kappa a/2) = C\cos(k_x a/2). \tag{8.16}$$

Drugi pogoj sledi iz zveze $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}$, ki izhaja neposredno iz Maxwellove enačbe (1.2). Ker se na meji ohranja tangencialna komponenta $\mathbf{H}$, to je v tem primeru H_z, se posledično ohranja odvod električne poljske jakosti dE_y/dx. Pri $x = a/2$ velja

$$-A\kappa\exp(-\kappa a/2) = -Ck_x\sin(k_x a/2). \tag{8.17}$$

Enačbo za k_x izpeljemo iz zahteve, da sta gornja robna pogoja hkrati izpolnjena. Izraza za robna pogoja delimo in dobimo sekularno enačbo za sode rešitve

$$\boxed{\frac{\kappa}{k_x} = \tan\frac{k_x a}{2}.} \tag{8.18}$$

Rešitve enačbe so diskretne in vsaki vrednosti k_x ustreza en sodi rod oziroma sodi lastni način. Pri tem je zveza med κ in k_x

$$\boxed{\kappa^2 + k_x^2 = k_0^2\left(n_1^2 - n_2^2\right).} \tag{8.19}$$

Lihe rešitve

Oglejmo si še lihe rešitve v planparalelnem vodniku. V sredici je od nič različen le D, polji v plašču pa sta nasprotno enaki in $A = -G$ (slika 8.4 b). Sledi

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(-\kappa x), \tag{8.20}$$
$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = D\sin(k_x x), \tag{8.21}$$
$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = -A\exp(\kappa x). \tag{8.22}$$

Z upoštevanjem zveznosti električne poljske jakosti in njenega odvoda na meji med sredico in plaščem zapišemo robna pogoja pri $x = a/2$

$$A\exp(-\kappa a/2) = D\sin(k_x a/2) \tag{8.23}$$

in

$$-\kappa A\exp(-\kappa a/2) = Dk_x\cos(k_x a/2). \tag{8.24}$$

Ustrezna sekularna enačba za lihe rešitve je

$$\boxed{-\frac{k_x}{\kappa} = \tan\frac{k_x a}{2}.} \tag{8.25}$$

Slika 8.4: Prečne oblike električne poljske jakosti za sode (a) in lihe (b) rodove v simetričnem planparalelnem valovnem vodniku. Modra barva označuje sredico, beli del pa plašč vodnika.

★ Če ne prej, je bralec ob slikah (8.4) zagotovo opazil podobnost s kvantnim delcem, ujetim v končni enodimenzionalni potencialni jami. Svetloba, ujeta v vodnik ali vlakno, ustreza vezanim stanjem delca, numerična odprtina pa je tisti parameter, ki določa globino potencialne jame. Pri majhnih vrednostih obstaja samo ena rešitev za vezano stanje, pri globlji jami je rešitev več. Podobno kot v kvantni mehaniki tudi v tem primeru ena rešitev za vezano stanje vedno obstaja.

Sekularnih enačb za lastne rodove (enačbi 8.18 in 8.25) ne moremo rešiti analitično. Rešujemo jih numerično, zelo nazorna pa je tudi grafična predstavitev (slika 8.5). Enačbo za sode rodove (enačba 8.18) pomnožimo s $k_x a$ in narišemo funkcijo $k_x a \tan(k_x a/2)$ (črne črte). Enačbo za lihe rodove (enačba 8.25) preoblikujemo in narišemo $-k_x a \cot(k_x a/2)$ (rdeče črte). Nato pri danih parametrih n_1, n_2, a in k_0 narišemo krožnico za κa, ki sledi iz enačbe (8.19)

$$(\kappa a)^2 + (k_x a)^2 = k_0^2 a^2 \left(n_1^2 - n_2^2\right) = k_0^2 a^2 NA^2. \tag{8.26}$$

Število presečišč krivulj s krožnico določa število lastnih rodov v vodniku, lega presečišča pa pripadajočo vrednost k_x. Na sliki so narisane tri krožnice za tri različne debeline vodnika a (pri istih lomnih količnikih in isti valovni dolžini svetlobe). V najtanjšem vodniku (zelena črta) je presečišče le eno in tak vodnik imenujemo enorodovni vodnik. Z večanjem debeline število presečišč in s tem število lastnih rodov narašča in taki vodniki so večrodovni. Lastni rodovi v večrodovnem vodniku so izmenično sodi in lihi, začenši z osnovnim rodom, ki je vedno sod.

Slika 8.5: K izračunu k_x v valovnem vodniku za TE polarizacijo. Število presečišč krožnice s krivuljami določa število lastnih rodov v vodniku. Zelena krožnica prestavlja enorodovni vodnik, turkizna dvorodovnega in modra petrodovnega s tremi sodimi in dvema lihima rešitvama.

S slike (8.5) razberemo še eno pomembno lastnost vodnikov. Ne glede na to, kako majhen je polmer krožnice, krožnica vedno seka črno krivuljo. To pomeni, da v še tako tankem vodniku vsaj ena rešitev za k_x vedno obstaja in ta je vedno soda.

Ocenimo še število lastnih rodov v vodniku. S slike (8.5) vidimo, da je največja možna vrednost k_x omejena s polmerom krožnice $k_0 aNA$, ki ga imenujemo tudi normirana frekvenca V. Do te vrednosti je po ena rešitev na vsak interval dolžine π, izmenično soda in liha, zato je celotno število rodov za eno polarizacijo

$$N \approx \frac{k_0 aNA}{\pi} = \frac{V}{\pi}. \tag{8.27}$$

Za enorodovni vodnik velja $V < \pi$ oziroma $a < \lambda/2NA$. Tipičen enorodovni vodnik ima tako debelino $a \lesssim 5$ µm, večrodovni vodnik z okoli 20 rodovi pa $a \sim 50$ µm.

Naloga 8.2.1 Ponovi izračun za TM valovanje in pokaži, da sta sekularni enačbi enaki

$$\frac{\kappa}{k_x}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \tan\frac{k_x a}{2} \qquad \text{in} \qquad -\frac{k_x}{\kappa}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \tan\frac{k_x a}{2}. \tag{8.28}$$

Namig: Zapiši enačbe za magnetno poljsko jakost **H** in upoštevaj ustrezne robne pogoje.

Podoben račun lahko naredimo tudi za TM valovanje (glej nalogo 8.2.1). Zaradi drugačnih robnih pogojev se sekularni enačbi razlikujeta od tistih za TE polarizacijo. Razlika je v faktorju $(n_1/n_2)^2$, ki pa je v tipičnem vodniku zelo blizu ena. Zato se tudi rešitve za prečno komponento k_x le malo razlikujejo. Bolj pomembna je ugotovitev, da je število dovoljenih rodov za TM polarizacijo enako številu dovoljenih rodov za TE polarizacijo, saj je največji k_x v obeh primerih določen z enakim polmerom krožnice V. Vse lastne rodove, ki se širijo v danem vodniku, torej zajamemo z opisom TE sodih in lihih ter TM sodih in lihih rodov.

Ugotovili smo, da je električna poljska jakost tudi izven sredice vodnika različna od nič. Poglejmo še, kako je z energijskim tokom. Čeprav se velika večina pretaka po sredici, delež, ki se pretaka po plašču, ni vedno zanemarljiv. To posebej velja za višje rodove. Delež energijskega toka, ki se pretaka po sredici, izračunamo z integralom

$$\Gamma = \frac{\int_{-a/2}^{a/2} j\,dS}{\int_{-\infty}^{\infty} j\,dS}. \tag{8.29}$$

Naloga 8.2.2 Pokaži, da je razmerje med energijskim tokom P_p, ki se pretaka po plašču, in energijskim tokom, ki se pretaka po sredici vodnika P_s, za sode rodove enako

$$\frac{P_p}{P_s} = \frac{n_2}{n_1}\frac{2k_x}{\kappa}\frac{\cos^2(k_x a/2)}{k_x a + \sin(k_x a)}, \tag{8.30}$$

in za lihe rodove

$$\frac{P_p}{P_s} = \frac{n_2}{n_1}\frac{2k_x}{\kappa}\frac{\sin^2(k_x a/2)}{k_x a - \sin(k_x a)}. \tag{8.31}$$

8.3 Cilindrično vlakno

Do zdaj smo obravnavali ravninski valovni vodnik. V praksi svetlobo navadno usmerjamo po optičnih vlaknih, ki imajo cilindrično geometrijo. Najpreprostejši primer je cilindrično vlakno, v katerem je lomni količnik cilindrične sredice konstanten in nekoliko večji od lomnega količnika plašča. Navadno je $n_1 - n_2 \sim 0,001$. Pogosto se uporablja bolj zapletene konstrukcije, pri katerih se lomni količnik sredice spreminja z oddaljenostjo od osi. Z zapletenejšo geometrijo namreč zmanjšamo disperzijo v vlaknu in s tem povečamo zmogljivost prenašanja velike količine podatkov na dolge razdalje – najzmogljivejša komercialna vlakna zmorejo prenos več deset terabitov na sekundo[2].

Račun za širjenje svetlobe po cilindričnem vlaknu s homogeno sredico je podoben kot za planparalelni vodnik, vendar je precej bolj zapleten. V cilindrični geometriji namreč ni delitve na čiste električne in magnetne transverzalne valove, saj so robni pogoji sklopljeni. Na splošno se rešitve izražajo v obliki kombinacij Besslovih funkcij. Izkaže se, da je osnovni rod, ki se širi po cilindričnem vlaknu, po obliki zelo podoben osnovnemu Gaussovemu snopu, zato je sklopitev laserskih snopov v optična vlakna zelo učinkovita. Tudi v cilindričnih vlaknih obstaja končno število lastnih rodov, ki je odvisno od polmera sredice in lomnih količnikov sredice in plašča. Če je polmer zadosti majhen (razlika lomnih količnikov navadno je), obstaja le en lastni rod in optično vlakno je enorodovno. Sicer je vlakno večrodovno.

Valovna enačba v cilindričnem vlaknu

Točen izračun za rodove v cilindričnem vlaknu presega okvire te knjige, zato si oglejmo le izhodiščne enačbe in rešitve.[3] Za jakost električnega in magnetnega polja velja Helmholtzeva enačba (enačba 1.21)

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n^2(r)\, k_0^2 \mathbf{E} = 0, \tag{8.32}$$

pri čemer je $n(r < a) = n_1$ lomni količnik sredice in $n(r > a) = n_2$ lomni količnik plašča, ki je dovolj debel, da njegova debelina ne vpliva na potovanje svetlobe. $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ sta vektorja in imata po tri komponente, ki pa so med seboj odvisne. Izračunajmo naprej E_z z nastavkom

$$E_z = R(r) e^{i\nu\varphi} e^{i\beta z}, \tag{8.33}$$

pri čemer je ν celo število zaradi zahteve po enoličnosti rešitve pri spremembi kota za 2π. Za $R(r)$ v sredici vlakna velja enačba

$$r^2 R(r)'' + rR(r)' + (k_s^2 r^2 - \nu^2) R(r) = 0, \tag{8.34}$$

kjer je

$$k_s^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2, \tag{8.35}$$

in v plašču

$$r^2 R(r)'' + rR(r)' + (-\kappa^2 r^2 - \nu^2) R(r) = 0, \tag{8.36}$$

kjer je

$$\kappa^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2. \tag{8.37}$$

[2] Za doprinos k razvoju in uporabi optičnih vlaken je leta 2009 Charles K. Kao prejel Nobelovo nagrado.

[3] Točen izračun lahko bralec poišče npr. v C. C. Davis, *Lasers and Electro-optics*, Cambridge University Press.

V enačbah (8.34) in (8.36) prepoznamo Besslovo diferencialno enačbo. Upoštevajoč le funkcije, ki na izbranem območju ne divergirajo, zapišemo rešitve v sredici kot

$$E_z(r,\varphi,z) = AJ_\nu(k_s r)\sin(\nu\varphi)e^{i\beta z} \quad \text{in} \quad H_z(r,\varphi,z) = BJ_\nu(k_s r)\cos(\nu\varphi)e^{i\beta z}. \tag{8.38}$$

Podobno zapišemo tudi rešitve v plašču

$$E_z(r,\varphi,z) = CK_\nu(\kappa r)\sin(\nu\varphi)e^{i\beta z} \quad \text{in} \quad H_z(r,\varphi,z) = DK_\nu(\kappa r)\cos(\nu\varphi)e^{i\beta z}. \tag{8.39}$$

Pri tem so A,B,C in D konstante, $J_\nu(x)$ je Besslova funkcija prve vrste reda ν, $K_\nu(x)$ pa je modificirana Besslova funkcija druge vrste reda ν (slika 8.6).

Slika 8.6: Besslove funkcije: (a) Besslove funkcije prve vrste $J_0(x)$ (črna), $J_1(x)$ (rdeča) in $J_2(x)$ (modra), ki predstavljajo oblike rešitev v sredici vlakna, in (b) modificirane Besslove funkcije druge vrste $K_0(x)$ (črna), $K_1(x)$ (rdeča) in $K_2(x)$ (modra), ki prestavljajo rešitev v plašču vlakna.

Ko enkrat poznamo komponenti E_z in H_z, lahko z uporabo Maxwellovih enačb izračunamo še preostale komponente. Nato z upoštevanjem robnih pogojev zapišemo štiri enačbe za pet neznank (A,B,C,D in β), tako da ostane ena spremenljivka (amplituda polja) prosta. Na ta način izračunamo celotni jakosti električnega in magnetnega polja v vlaknu in podobno kot pri valovnem vodniku tudi tukaj zapišemo sekularno enačbo, ki jo moramo rešiti numerično. Pri vsakem ν obstaja več rešitev, zato lastne rodove označujemo s parom indeksov ν in m, npr. TE_{01} ali HE_{31}.

TE in TM rodovi

Najprej si oglejmo rešitve, pri katerih je $\nu = 0$ in so tako neodvisne od kota φ. V klasični sliki so to žarki, ki potujejo po osi vlakna. Iz robnih pogojev sledi, da gre za transverzalne TE rodove, za katere velja $E_z = 0$, $E_r = 0$ in $E_\varphi \propto J_1(k_s r)$. Električno poljsko jakost za TE zapišemo kot

$$\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_\varphi J_1(k_s r). \tag{8.40}$$

Podobno lahko prepoznamo tudi TM rodove, pri katerih je $H_z = 0$, $H_r = 0$ in $H_\varphi \propto J_1(k_s r)$. Ustrezna električna poljska jakost za TM rodove je

$$\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_r J_1(k_s r). \tag{8.41}$$

Amplitudi električne poljske jakosti sta za TE in TM rodove enaki, zato sta enaki tudi sliki gostote svetlobnega toka (slika 8.7). Opazimo, da je v osi vlakna gostota svetlobnega toka enaka nič, zato sklepamo, da to niso osnovni načini širjenja svetlobe po cilindričnem vlaknu.

Slika 8.7: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za rodova TE_{01} in TM_{01}

Podobno kot smo zapisali sekularno enačbo v valovnem vodniku (enačbi 8.18 in 8.25), tudi tukaj zapišemo enačbo za dovoljene vrednosti k_s. Ob približku, da se lomna količnika sredice in plašča le malo razlikujeta, je poenostavljena enačba za TE valovanje

$$-k_s a \frac{J_0(k_s a)}{J_1(k_s a)} = \kappa a \frac{K_0(\kappa a)}{K_1(\kappa a)}, \tag{8.42}$$

pri čemer velja zveza $\kappa^2 + k_s^2 = (NA)^2 k_0^2$. Zaporedne rešitve enačbe ustrezajo rodovom TE_{0m}. Če želimo izračunati še valovne vektorje za rodove TM_{0m}, moramo levo stran enačbe (8.42) pomnožiti z $(n_1/n_2)^2$. Ker je ta faktor približno enak ena, se rešitve enačb med seboj le malo razlikujejo.

Slika 8.8: K izračunu prečnih komponent valovnega vektorja k_s v cilindričnem vlaknu za TE polarizacijo. Leva stran sekularne enačbe je narisana s črno, desna stran pa za tri različne vrednosti parametra $V = k_0 a NA$.

Zapisano sekularno enačbo rešujemo numerično, lahko pa se je lotimo grafično in na sliki (8.8) poiščemo presečišča krivulj. Na sliki je leva stran enačbe prikazana s črno barvo, desna pa za tri različne vrednosti $V = k_0 a NA$. Pri velikem V (modra črta) ima sistem tri rešitve, pri srednjem V (turkizna črta) eno rešitev, pri majhnem V (zelena črta) pa se krivulji ne sekata. To pomeni, da pri dovolj majhnem polmeru vlakna TE rod ne obstaja.

Zapišimo to ugotovitev še matematično. Desna stran enačbe da realne rešitve za $k_s a \leq V$. Po drugi strani pa leva stran enačbe postane pozitivna šele pri $J_0(k_s a) = 0$, to je pri $k_s a = 2,405$. Da ima tak sistem vsaj eno rešitev, mora veljati $V > 2,405$. Polmer, pri katerem se TE_{01} (ali TM_{01}) valovanje z dano valovno dolžino sploh širi po vlaknu, je torej navzdol omejen z

$$a \geq \frac{2,405}{k_0 NA}. \tag{8.43}$$

Hibridni HE in EH rodovi

Poglejmo zdaj rešitve, pri katerih je $\nu \neq 0$. V tem primeru je vseh šest komponent električnega in magnetnega polja valovanja različnih od nič in vsi rodovi imajo tudi komponento v smeri z. Take rodove imenujemo hibridni rodovi in jih označimo s HE, če je E_z razmeroma velik ali vsaj primerljiv z E_r in E_φ, oziroma z EH, če je H_z po velikosti primerljiv s H_r in H_φ ali večji od njiju.

Sekularna enačba za hibridne rodove je precej bolj zapletena in je ne bomo zapisali. Oglejmo si le njihovo obliko (slika 8.9). Najpomembnejši hibridni rod je HE_{11}, ki je sorazmeren z $J_0(k_s r)$ in zato v središču različen od nič. To je osnovni rod, za katerega rešitev sekularne enačbe vedno obstaja in se zato širi po še tako tankem vlaknu.

Slika 8.9: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za rodove HE_{11}, HE_{21}, HE_{31} in EH_{11}

Po obliki je osnovni HE_{11} rod zelo podoben Gaussovemu profilu $\exp(-r^2/w^2)$, zato ga lahko razmeroma dobro opišemo z Gaussovim približkom. Pri tem efektivni polmer snopa w izračunamo po Marcusejevi formuli[4]

$$w = (0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6})\, a, \tag{8.44}$$

pri čemer je $V = k_0 a NA$. Podobnost profila osnovnega HE_{11} roda z Gaussovo funkcijo omogoča zelo dobro sklopitev Gaussovih snopov, ki izhajajo iz laserja, v cilindrična vlakna.

[4] D. Marcuse, Bell Syst. Tech. J. 56, 703 (1977).

Na sliki (8.9) je poleg osnovnega HE_{11} roda še nekaj primerov višjih rodov. Opazimo, da imajo vsi rodovi, razen osnovnega, v osi vlakna minimum. Poleg tega opazimo tudi podobnost med oblikami posameznih rodov, do katere pride zaradi majhne razlike med lomnima količnikoma sredice in plašča ($n_1 \approx n_2$). V takem primeru se sekularne enačbe poenostavijo, nekateri rodovi so med seboj degenerirani in dajo enako rešitev. Poleg rodov z enako obliko in različno polarizacijo so tako med seboj degenerirani še $HE_{\nu+1,m}$ in $EH_{\nu-1,m}$ rodovi. Degenerirane rodove lahko združimo v linearne kombinacije teh valov in nastanejo pretežno linearno polarizirani LP rodovi.

LP rodovi

Za praktično uporabo so najpomembnejši linearno polarizirani (LP) rodovi. Taki rodovi niso točne rešitve valovne enačbe v cilindrični geometriji, ampak jih zapišemo kot linearno kombinacijo lastnih rodov, ki so zaradi majhne razlike med lomnima količnikoma sredice in plašča degenerirani. Tudi te rodove označimo z dvema indeksoma: prvi določa število azimutalnih vozlov, drugi pa število radialnih vrhov. Poglejmo nekaj primerov (slika 8.10).

Osnovni LP_{01} je kar približno enak osnovnemu HE_{11} rodu. Električna poljska jakost je

$$\mathbf{E}_{\mathrm{LP01}} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_0(k_s a), \tag{8.45}$$

saj ima dve možni smeri polarizacije. Na splošno so LP_{0m} zelo podobni rodovom HE_{1m}.

Višje rodove, na primer LP_{11} sestavimo kot linearno kombinacijo TE_{01} ali TM_{01} in HE_{21}. Električna poljska jakost v LP_{11} je tako

$$\mathbf{E}_{\mathrm{LP11}} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_1(k_s a) \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix} \tag{8.46}$$

kar opisuje štiri različne oblike rodov LP_{11}.

Tudi LP_{21} rodovi, ki nastanejo kot kombinacija HE_{31} in EH_{11} rodov, imajo štiri oblike

$$\mathbf{E}_{\mathrm{LP21}} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_2(k_s a) \begin{Bmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{Bmatrix}. \tag{8.47}$$

Linearno polarizirani LP rodovi imajo precejšnjo uporabno vrednost. To so namreč rodovi, ki jih v vlaknu vzbudimo, ko nanj posvetimo s polarizirano lasersko svetlobo. Zavedati pa se moramo, da to niso lastni rodovi vlakna, ampak njihove linearne kombinacije, ki po vlaknu potujejo z malenkost različnimi hitrostmi. Polarizacija svetlobe se zato vzdolž vlakna ne ohranja povsem.

★ Število rodov v večrodovnem cilindričnem vlaknu pri izbrani normirani frekvenci $V = k_0 a NA$ lahko približno ocenimo z uporabo asimptotičnega razvoja Besslovih funkcij za velike argumente. Približna ocena vključuje vse dovoljene rešitve pri vsaki vrednosti ν in dve polarizaciji. To vodi do rezultata

$$N = \frac{4V^2}{\pi^2}. \tag{8.48}$$

V vlaknu s polmerom sredice 20 μm in numerično aperturo 0,2 se tako pri valovni dolžini 1 μm lahko širi 256 rodov.

Slika 8.10: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za približno linearne rodove LP_{01}, LP_{02}, LP_{11} in LP_{21}.

Cilindrično vlakno s paraboličnim profilom lomnega količnika

Čeprav je račun lastnih načinov v cilindričnem vlaknu zapleten, lahko razmeroma enostavno poiščemo rešitve za vlakno, v katerem je dielektrična konstanta kvadratna funkcija radialne koordinate r.

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_1 - Cr^2, \tag{8.49}$$

pri čemer je sprememba navadno majhna. Zapišemo še enačbo z lomnimi količniki in vpeljemo brezdimenzijski parameter Δ

$$n^2\,(r < a) = n_1^2 - \Delta^2 \frac{r^2}{a^2}, \tag{8.50}$$

pri čemer a označuje polmer sredice vlakna. Enačbo lahko tudi razvijemo za majhno razliko Δ in za vse smiselne vrednosti r ima tudi lomni količnik parabolični profil. Parabolična sredica je seveda omejena, okoli nje pa je plašč s konstantnim lomnim količnikom $n_2 \approx n_1 - \Delta^2/2n_1$ (slika 8.11). Tipičen polmer sredice a je nekaj deset mikrometrov, plašča pa približno petkrat toliko.

Slika 8.11: Parabolični profil lomnega količnika sredice zmanjša disperzijo v vlaknu. Plašč je praviloma bistveno debelejši od sredice vlakna.

Električno poljsko jakost za izbrano polarizacijo zapišemo v obliki

$$E = E_0\,\psi(x,y)\,e^{i\beta z - i\omega t}. \tag{8.51}$$

Pri tem smo zanemarili, da zaradi odvisnosti od prečnih koordinat in pogoja $\nabla\cdot\mathbf{D} = 0$ polje ne more imeti povsod iste smeri; za bolj natančen račun bi morali zapisati enačbo za vektorsko polje. Vstavimo približni nastavek (enačba 8.51) in krajevno odvisnost lomnega količnika (enačba 8.50) v valovno enačbo (enačba 1.13)

$$\nabla_\perp^2\,\psi + \left[k_0^2\left(n_1^2 - \Delta^2\frac{r^2}{a^2}\right) - \beta^2\right]\psi = 0. \tag{8.52}$$

Rešitve lahko zapišemo v obliki

$$\psi(x,y) = X(x)Y(y), \tag{8.53}$$

od koder sledita dve neodvisni enačbi

$$X'' - \frac{k_0^2\Delta^2}{a^2}X\,x^2 - \lambda_1 X = 0 \qquad \text{in} \qquad Y'' - \frac{k_0^2\Delta^2}{a^2}Y\,y^2 - \lambda_2 Y = 0, \tag{8.54}$$

pri čemer sta λ_1 in λ_2 konstanti. Opazimo, da sta enačbi popolnoma enaki enačbama za krajevni del lastnih funkcij harmonskega oscilatorja v kvantni mehaniki. Rešitev posamezne enačbe je tako produkt Gaussove in Hermitove funkcije

$$X_n(x) = e^{-\xi^2x^2/2}H_n(\xi x), \tag{8.55}$$

pri čemer je $\xi = \sqrt{k_0\Delta/a}$.

Naloga 8.3.1 Uporabi nastavek (enačba 8.55) in pokaži, da reši enačbo (8.54). Pri tem si pomagaj z diferencialno enačbo za Hermitove polinome

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n\right) H_n(x) = 0. \tag{8.56}$$

Lastne vrednosti enačbe so oblike

$$\beta_{mn}^2 = n_1^2 k_0^2 \left(1 - \frac{2\Delta}{k_0 n_1^2 a}(m+n+1)\right). \tag{8.57}$$

Drugi člen v oklepaju je navadno zelo majhen, zato lahko izraz razvijemo in

$$\beta_{mn} = n_1 k_0 \left(1 - \frac{\Delta}{k_0 n_1^2 a}(m+n+1)\right) = n_1 k_0 - \frac{\Delta(m+n+1)}{n_1 a}. \tag{8.58}$$

Ob privzetku, da je parameter Δ neodvisen od krožne frekvence, je grupna hitrost

$$v_g = \left(\frac{d\beta_{mn}}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c_0}{n_1} \tag{8.59}$$

in torej enaka za vse rodove. To je pomembna značilnost vlakna s paraboličnim profilom lomnega količnika. V dejanskem vlaknu je seveda taka odvisnost mogoča le v omejenem območju sredice, zato je tudi gornja analiza le približna in velja dobro za tiste rodove, ki se ne raztezajo dosti izven sredice.

Neodvisnost grupne hitrosti od roda je praktično zelo pomembna. Grupna hitrost namreč določa čas potovanja svetlobnega sunka, ki lahko predstavlja en bit informacije. Če se po vlaknu širi več rodov z različnimi grupnimi hitrostmi, se sunek po prehodu skozi vlakno razširi, kar – kot bomo podrobneje videli v naslednjem razdelku – omejuje uporabno dolžino vlakna. Temu se sicer lahko izognemo z uporabo enorodovnih vlaken, ki pa so dražja, poleg tega morata divergenca in polmer svetlobnega snopa natančno ustrezati značilnostim enorodovnega vlakna, da se izognemo izgubam. Zato se za krajše povezave (do nekaj 100 m) uporabljajo večrodovna vlakna, ki imajo sredico s približno paraboličnim profilom lomnega količnika.

8.4 Disperzija

Pri prenosu velike količine podatkov na daljavo je zelo pomembno, da se oblika svetlobnih sunkov, ki prenašajo informacijo, čim bolj ohranja. Na obliko sunka močno vpliva disperzija, to je odvisnost fazne in grupne (skupinske) hitrosti valovanja od krožne frekvence. Zaradi disperzije se kratki sunki, ki potujejo po vlaknu, podaljšajo in tako omejujejo količino informacije, ki jo lahko prenašamo po vlaknu dane dolžine. Največja količina vhodnih podatkov na časovno enoto je kar obratno sorazmerna z dolžino izhodnih sunkov svetlobe.

Slika 8.12: Zaradi disperzije se sunki svetlobe, ki potujejo skozi vlakno, podaljšajo, zato jih na izhodu iz vlakna ne moremo več ločiti.

Pri potovanju svetlobe po optičnih vlaknih poznamo tri vrste disperzije: rodovno, materialno in valovodno. V večrodovnih vlaknih je povsem prevladujoča rodovna disperzija, ki je posledica dejstva, da se različni rodovi po vlaknu širijo z različnimi hitrostmi. V enorodovnih vlaknih rodovne disperzije ni, zato prideta do izraza materialna disperzija, ki se pojavi zaradi odvisnosti lomnega količnika vlakna od valovne dolžine svetlobe, in valovodna disperzija, ki se pojavi zaradi nelinearne zveze med valovnim številom β in krožno frekvenco valovanja.

Rodovna disperzija

Na primeru planparalelnega vodnika smo pokazali, da vsaki rešitvi sekularnih enačb (enačbi 8.18 in 8.25) ustreza en lastni rod v vlaknu. Ker se vrednosti k_x za različne rodove med seboj razlikujejo in so posledično vrednosti β za vsak rod drugačne, se posamezni rodovi po vlaknu širijo z različnimi hitrostmi. Kratek sunek svetlobe, sestavljen iz več različnih rodov, se tako po prehodu skozi vlakno razdeli na posamezne delne sunke oziroma se efektivno podaljša. Izračunajmo razliko med časom, ki ga za širjenje po vlaknu dane dolžine potrebuje osnovni rod, in časom, ki ga za isto razdaljo potrebuje zadnji še dovoljeni rod.

Osnovni rod določa prva rešitev sekularne enačbe in je zato pripadajoča vrednost k_x zelo majhna oziroma v približku $k_s \approx 0$. Ustrezno valovno število je po enačbi

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 n_1^2 - k_x(\omega)^2} \tag{8.60}$$

kar približno enako $\beta_0 \approx k_0 n_1$. Za zadnji še dovoljeni rod velja $k_x a \approx V$ in $\beta_N \approx k_0 n_2$, pri čemer je n_2 lomni količnik plašča. Zapišemo še grupno hitrost, s katero potujejo sunki svetlobe po vlaknu

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}. \tag{8.61}$$

Za prehod vlakna z dolžino L potrebuje osnovni rod

$$t_0 = \frac{L}{v_{g0}} = L\frac{d\beta_0}{d\omega} = L\frac{n_1}{c_0}, \tag{8.62}$$

zadnji rod pa

$$t_N = \frac{L}{v_{gN}} = L\frac{d\beta_N}{d\omega} = L\frac{n_2}{c_0}. \tag{8.63}$$

Podaljšanje sunka zaradi rodovne disperzije je potem

$$\boxed{\tau \approx \frac{L}{c_0}(n_1 - n_2).} \tag{8.64}$$

Največja frekvenca modulacije vhodnega signala, pri kateri izhodne sunke še zaznamo ločeno, je približno obratno sorazmerna z dolžino izhodnih sunkov. Za 1 km dolgo vlakno z $\Delta n = 0,05$ je tako modulacijska frekvenca oziroma količina podatkov v časovni enoti le okoli 10 MHz. Čeprav lahko disperzijo zmanjšamo s paraboličnim profilom lomnega količnika, so večrodovna vlakna za prenos podatkov na dolge razdalje praktično neuporabna.

★ Med rodovno disperzijo uvrščamo tudi polarizacijsko disperzijo, do katere pride zaradi različnih hitrosti valovanj z različnima polarizacijama. V idealnem cilindričnem vlaknu potujeta obe polarizaciji z enako hitrostjo. V realnem vlaknu pa pride na nečistočah in asimetrijah v vlaknu do različnih hitrosti za različni polarizaciji. Ker so nečistoče slučajno in neodvisno razporejene, tako disperzijo zelo težko odpravimo.

Materialna disperzija

Optična vlakna so navadno narejena iz stekla, katerega lomni količnik je odvisen od valovne dolžine svetlobe. Zaradi tako imenovane materialne disperzije različne spektralne komponente svetlobnega sunka po vlaknu potujejo z različnimi hitrostmi in sunek se po prehodu skozi vlakno podaljša. Pri obravnavi se omejimo na enorodovna vlakna, v katerih rodovne disperzije ni.

Ker je sunek svetlobe končno dolg, je končna tudi njegova spektralna širina $\Delta\lambda = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$. Dolžino sunka τ po prehodu skozi vlakno dolžine L približno zapišemo kot

$$\tau = \frac{dt}{d\lambda}\Delta\lambda = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{L}{v_g}\right) = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}\left(L\frac{d\beta}{d\omega}\right). \tag{8.65}$$

Za enorodovno vlakno velja $k_x \approx 0$ in $\beta \approx n_1\omega/c_0$, pri čemer valovodne disperzije zaenkrat ne upoštevamo. Velja

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{n_1}{c_0} + \frac{\omega}{c_0}\frac{dn_1}{d\omega} = \frac{n_1}{c_0} - \frac{\lambda}{c_0}\frac{dn_1}{d\lambda}, \tag{8.66}$$

od koder sledi

$$\tau = \Delta\lambda L\left(-\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2n_1}{d\lambda^2}\right). \tag{8.67}$$

Če vpeljemo D_m kot koeficient materialne disperzije

$$D_m = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2n_1}{d\lambda^2}, \tag{8.68}$$

zapišemo dolžino sunka po prehodu skozi vlakno kot

$$\tau = |D_m| L \Delta\lambda. \tag{8.69}$$

Koeficient disperzije navadno izrazimo v enotah ps/nm km, njegova vrednost pa je lahko pozitivna ali negativna, zato smo v končnem izrazu za dolžino sunka dodali absolutno vrednost. V snoveh, ki jih uporabljamo za izdelavo optičnih vlaken, je $D_m \sim 10$ ps/nm km, lahko pa seže tudi do več 100 ps/nm km, odvisno seveda od valovne dolžine in izbrane snovi.

Materialno disperzijo lahko zmanjšamo na več načinov. Lahko uporabimo čim bolj enobarven vir svetlobe, da zmanjšamo $\Delta\lambda$. Za izbrano snov lahko celo izberemo valovno dolžino, pri kateri je koeficient materialne disperzije enak nič. Za SiO_2 je to pri okoli 1300–1500 nm, odvisno od dopiranja stekla. Še najbolj uporabna je rešitev, pri kateri z materialno disperzijo izničimo vpliv valovodne disperzije in na ta način zmanjšamo skupno disperzijo v vlaknu.

Valovodna disperzija

Spomnimo se, da v optičnem vodniku velja nelinearna zveza med prečno (k_x) in vzdolžno (β) komponento valovnega vektorja (enačba 8.60). Pri tem k_x izračunamo numerično iz sekularne enačbe, rešitev pa je odvisna od valovne dolžine svetlobe. Tudi v cilindričnih vlaknih je valovno število β nelinearna funkcija krožne frekvence, zato pride do disperzije. Izhajamo iz zveze (enačba 8.65)

$$\tau = \frac{dt}{d\lambda}\Delta\lambda = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}\left(L\frac{d\beta}{d\omega}\right). \tag{8.70}$$

Upoštevamo zvezo med valovno dolžino in krožno frekvenco in za podaljšanje začetnega kratkega sunka dobimo

$$\tau = -\frac{\lambda^2}{2\pi c_0}\frac{d^2\beta}{d\lambda^2}L\Delta\lambda. \tag{8.71}$$

Ko vpeljemo D_v kot koeficient valovodne disperzije

$$D_v = -\frac{\lambda^2}{2\pi c_0}\frac{d^2\beta}{d\lambda^2}, \tag{8.72}$$

se izraz za dolžino sunka poenostavi v

$$\tau = |D_v| L\Delta\lambda. \tag{8.73}$$

Koeficient valovodne disperzije je praviloma najmanjši, $D_v \sim 1$–10 ps/nm km. Znaten postane v enorodovnih vlaknih v območju, kjer je materialna disperzija zelo majhna ali celo enaka nič. V vlaknih s homogeno sredico se valovodni disperziji ne moremo izogniti, lahko pa jo pri dani valovni dolžini približno izničimo z materialno (slika 8.13).

Ker ima sunek svetlobe vedno neko končno spektralno širino, disperzije v optičnem vlaknu nikoli ne moremo povsem odpraviti. Pri celotni disperziji 5 ps/nm km in spektralni širini 1 nm znaša v 100 km dolgem vlaknu najvišja frekvenca modulacije vhodnega signala, ki ga na izhodu še lahko razločimo, okoli 2 GHz. V nadaljevanju bomo videli, da je pri prenosu podatkov v vlaknih poglavitni omejujoči faktor ravno disperzija in ne absorpcija.

Slika 8.13: Odvisnost koeficientov disperzije od valovne dolžine v SiO_2 vlaknu. D_m je koeficient materialne disperzije, D_v valovodne, D pa je vsota obeh. Pri valovni dolžini okoli 1450 nm se materialna in valovodna disperzija odštejeta in skupna disperzija je praktično enaka nič.

★ Na valovodno disperzijo je mogoče vplivati tudi s konstrukcijo vlakna. Pokazali smo že, da v idealnem primeru v vlaknu s paraboličnim profilom lomnega količnika disperzije ni. V praksi je sredica sestavljena iz več plasti z različnimi lomnimi količniki in različnimi debelinami, s čimer se prispevek valovodne disperzije spremeni. Na ta način lahko položaj ničle celotne disperzije premaknemo k valovni dolžini izvora oziroma k valovni dolžini, pri kateri je v vlaknu najmanj absorpcije in izgub.

8.5 *Potovanje kratkega sunka po enorodovnem vlaknu

Podaljšanje sunka zaradi disperzije

Poglejmo si podrobneje, kako po enorodovnem vlaknu ali drugem sredstvu z disperzijo potuje kratek sunek valovanja z dano začetno obliko. Sunek zapišemo kot

$$E(x,y,z,t) = \psi(x,y)\, a(z,t), \tag{8.74}$$

kjer je $\psi(x,y)$ lastna rešitev prečnega dela valovne enačbe, ki določa zvezo $\beta(\omega)$. Funkcija $a(z,t)$ opisuje obliko in potovanje sunka v smeri z. Pri $z=0$ jo razvijemo po krožnih frekvencah z ustreznimi amplitudnimi faktorji

$$a(0,t) = \int \tilde{A}(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega. \tag{8.75}$$

Ko sunek potuje vzdolž osi z, vsaki komponenti pripišemo ustrezen fazni faktor $i\beta(\omega)z$. Tako velja

$$a(z,t) = \int \tilde{A}(\omega)\, e^{i\beta(\omega)z - i\omega t} d\omega. \tag{8.76}$$

Osnovni sunek naj bo približno monokromatičen s krožno frekvenco ω_0, kar pomeni, da je mnogo daljši od optične periode. Potem lahko $\beta(\omega)$ razvijemo okoli ω_0, pri čemer vpeljemo razliko krožnih frekvenc $\Omega = \omega - \omega_0$

$$\beta(\omega_0+\Omega) \approx \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}\Omega + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\Omega^2 = \beta(\omega_0) + \beta'\Omega + \frac{1}{2}\beta''\Omega^2. \tag{8.77}$$

Enačbo (8.76) prepišemo v

$$a(z,t) = \int \tilde{A}(\Omega)\, e^{i\beta(\omega_0+\Omega)z - i(\omega_0+\Omega)t} d\Omega = e^{i\beta(\omega_0)z - i\omega_0 t} A(z,t). \tag{8.78}$$

Funkcija $A(z,t)$ predstavlja prostorsko in časovno odvisnost ovojnice sunka. Z upoštevanjem razvoja (enačba 8.77) jo zapišemo kot

$$A(z,t) = \int \tilde{A}(\Omega) \exp\left(i\beta'\Omega z + \frac{i}{2}\beta''\Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega. \tag{8.79}$$

Odvajajmo ovojnico najprej po z

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} = \int \tilde{A}(\Omega) \left(i\beta'\Omega + \frac{i}{2}\beta''\Omega^2\right) \exp\left(i\beta'\Omega z + \frac{i}{2}\beta''\Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega, \tag{8.80}$$

nato pa še enkrat

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial t} = \int \tilde{A}(\Omega)\, (-i\Omega) \exp\left(i\beta'\Omega z + \frac{i}{2}\beta''\Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega \tag{8.81}$$

in dvakrat parcialno po t

$$\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2} = \int \tilde{A}(\Omega)\, \left(-\Omega^2\right) \exp\left(i\beta'\Omega z + \frac{i}{2}\beta''\Omega^2 z - i\Omega t\right) d\Omega. \tag{8.82}$$

Primerjamo izračunane odvode in dobimo enačbo

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} = -\beta'\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2}\beta''\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}. \tag{8.83}$$

Enačbo lahko nekoliko poenostavimo z vpeljavo novih neodvisnih spremenljivk

$$\begin{aligned} \tau &= t - \beta' z \quad \text{in} \\ \zeta &= z. \end{aligned} \tag{8.84}$$

Uporabimo verižno pravilo odvajanja in dobimo

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(-\beta'\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{8.85}$$

in

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{8.86}$$

Z novima spremenljivkama se enačba (8.83) prepiše v

$$\beta''\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - 2i\frac{\partial A}{\partial \zeta} = 0. \tag{8.87}$$

Poglejmo enačbo podrobneje. Če ni disperzije in je $\beta'' = 0$, se A vzdolž koordinate ζ ne spreminja. To pomeni, da se oblika sunka ob odsotnosti disperzije ohranja in sunek poljubne začetne oblike nepopačen potuje po vlaknu z grupno hitrostjo $1/\beta'$.

Če je disperzija različna od nič, ostaneta v enačbi oba člena. Opazimo, da ima enačba enako obliko kot obosna valovna enačba, ki smo jo v drugem poglavju uporabili za obravnavo koherentnih snopov (enačba 3.5). Razlika med obosno valovno enačbo in enačbo (8.87) je v tem, da vlogo prečne koordinate prevzame čas τ. To, kar je bila prej širina snopa, je zdaj torej dolžina sunka. Spomnimo se, da obosno valovno enačbo rešijo Gaussovi snopi (enačba 3.29).

★ Podobnost med pojavoma seže dlje od formalne oblike. Pri snopih, ki so omejeni v prečni smeri, disperzija fazne in grupne hitrosti po prečnih komponentah valovnega vektorja povzroča spreminjanje prečnega preseka snopa. Pri časovno omejenih sunkih v sredstvu s frekvenčno disperzijo se namesto preseka sunka spreminja njegova vzdolžna oblika oziroma njegova dolžina.

Celotnega računa ni treba ponavljati, namesto tega kar v izrazu za Gaussove snope (enačba 3.29) napravimo ustrezno zamenjavo spremenljivk. Iz enačbe (8.87) razberemo, da valovnemu številu k pri snopih ustreza parameter $\mu = (d^2\beta/d\omega^2)^{-1}$. Poleg tega vpeljemo dolžino sunka σ, ki ustreza polmeru Gaussovega snopa w, in parameter b, ki ustreza krivinskemu radiju R. Oba parametra sta seveda odvisna od ζ, tako kot sta parametra w in R odvisna od z.

Na podlagi analogije zapišemo obliko podaljšanega Gaussovega sunka

$$A(\zeta,\tau) = \frac{A_0}{\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right)\exp\left(-i\frac{\mu\tau^2}{2b}\right)e^{i\phi(\zeta)}. \tag{8.88}$$

Pri tem za dolžino sunka σ velja enaka zveza kot za polmer Gaussovega snopa (enačba 3.20)

$$\sigma^2 = \sigma_0^2\left(1+\left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)^2\right). \tag{8.89}$$

Tu je σ_0 trajanje sunka pri $\zeta = 0$, to je na začetku, kjer je sunek najkrajši. Krivinskemu radiju valovnih front (enačba 3.25) v tem primeru ustreza količina $b = \zeta\left(1+\zeta_0^2/\zeta^2\right)$. Po analogiji s snopi lahko sklepamo, da se najmanj podaljšuje ravno sunek z Gaussovo časovno odvisnostjo.

Slika 8.14: Primerjava širitve Gaussovega snopa in podaljšanja Gaussovega sunka

Zanimivo je pogledati odvod faze po τ, ki predstavlja spremembo krožne frekvence glede na centralno krožno frekvenco sunka ω_0

$$\omega - \omega_0 = \frac{\mu\tau}{b}. \tag{8.90}$$

Za pozitivne vrednosti μ je krožna frekvenca na začetku sunka, to je pri $\tau < 0$, manjša od ω_0, z naraščajočim časom pa se linearno povečuje proti koncu sunka. Obnašanje je torej podobno čirikanju, ki ga poznamo iz nelinearne optike (slika 11.14 a).

★ Pri $\zeta = 0$ je sunek najkrajši možen pri dani spektralni širini. Lahko si mislimo, da je sunek najkrajši, to je omejen s Fourierevo transformacijo spektra, kadar se vse frekvenčne komponente seštejejo z isto fazo, to je pri $\zeta = 0$. Da nastanejo najkrajši sunki, kadar je faza vseh delnih valov enaka, smo spoznali že pri fazno uklenjenih sunkih iz večfrekvenčnih laserjev (poglavje 6.10). Pri potovanju sunka se zaradi disperzije faze frekvenčnih komponent različno spreminjajo in sunek se podaljša. Pri tem je pomemben drugi odvod valovnega števila po krožni frekvenci. Linearno spreminjanje faze namreč ne povzroči razširitve, temveč le spremembo v grupni in fazni hitrosti.

Naloga 8.5.1 Naj bo vpadni sunek svetlobe Gaussove oblike $E(x,y,z=0,t) = \psi(x,y)e^{-at^2-i\omega_0 t}$. Pokaži, da je ustrezna funkcija $\tilde{A}(\Omega)$ oblike

$$\tilde{A}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\Omega^2/4a}. \tag{8.91}$$

Nato vpelji novi spremenljivki τ in ζ in z neposredno integracijo (enačba 8.79) pokaži, da je podaljšan sunek pri $z \neq 0$ enak ovojnici, zapisani z enačbo (8.88), pri čemer je

$$\zeta_0 = \frac{\mu}{2a}. \tag{8.92}$$

Naloga 8.5.2 Uporabi enačbo (8.89) in pokaži, da je podaljšanje Gaussovega sunka svetlobe oblike $I \propto \exp(-2\tau^2/\sigma^2)$ pri dani dolžini vlakna enako

$$\sigma(L) = \sigma_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2L}{\sigma_0^2 \mu}\right)^2} \tag{8.93}$$

in za velike dolžine enako izrazu, ki smo ga izračunali pri valovodni disperziji (enačba 8.73).

Kompenzacija disperzije

Razširitev sunka zaradi pozitivne disperzije je pri $\mu > 0$ mogoče kompenzirati s parom vzporednih uklonskih mrežic, kot kaže slika (8.15). Prva mrežica različne frekvenčne komponente razkloni, druga pa ponovno zbere, vendar so pri tem optične poti za različne komponente različno dolge. Vzporednost uklonskih mrežic zagotavlja vzporednost izhodnih žarkov, vendar so različne komponente vpadne svetlobe med seboj razmaknjene (slika 8.15 a). V praksi zato uporabimo ali dva para uklonskih mrežic ali pa zrcalo, ki svetlobo usmeri po isti poti nazaj.

Slika 8.15: Kompenzacija disperzije z uklonskima mrežicama (a) in shema z oznakami (b)

Naj na par vzporednih uklonskih mrežic vpada ravni val pod kotom α, odbije pa naj se pod kotom $\beta = \beta(\omega)$ (slika 8.15 b). Pot, ki jo prepotuje žarek od vpada na mrežico do izhoda iz sistema (med točkama A in B), je enaka

$$P = \frac{L}{\cos\beta}\left(1 + \cos(\alpha + \beta)\right). \tag{8.94}$$

Zaradi uklona velja zveza $\sin\alpha - \sin\beta = \lambda/\Lambda$, pri čemer je λ valovna dolžina svetlobe, Λ pa perioda uklonske mrežice. Pri fazi moramo upoštevati še fazni premik na drugi mrežici

$$\Phi_m = \frac{2\pi}{\Lambda} L \tan\beta = qL\tan\beta. \tag{8.95}$$

Celotna sprememba faze je tako $\Phi = \omega P/c + \Phi_m$.

Naloga 8.5.3 Pokaži, da je drugi odvod faze po krožni frekvenci enak

$$\frac{d^2\Phi}{d\omega^2} = -\frac{Lcq^2}{\sqrt{\omega^2 - (\omega\sin\alpha - cq)^2}^{3/2}}. \tag{8.96}$$

Račun v nalogi (8.5.3) pokaže, da je disperzija, ki je določena z drugim odvodom faze po krožni frekvenci (enačba 8.96), vedno negativna. Par vzporednih uklonskih mrežic torej deluje kot sredstvo z negativno disperzijo in sunek, ki se je razširil zaradi potovanja po sredstvu s pozitivno disperzijo, lahko ponovno skrajša do meje, določene s širino spektra.

★ Postopek kompenzacije disperzije se uporablja za pridobivanje zelo močnih zelo kratkih sunkov svetlobe. Sunku iz fazno uklenjenega barvilnega ali Ti:safirnega laserja se najprej v nelinearnem sredstvu razširi spekter, hkrati se sunek tudi časovno podaljša. Podaljšan sunek lahko ojačimo, česar s prvotnim kratkim in razmeroma močnim sunkom ne bi mogli narediti. Razširjen in ojačen sunek nato s parom uklonskih mrežic skrajšamo za faktor 10–100 glede na prvotno dolžino sunka. Tako nastanejo zelo močni sunki svetlobe, dolgi le okoli 10 fs, kar je le še nekaj optičnih period[5].

[5] Za to odkritje sta leta 2018 Donna Strickland in Gérard Mourou prejela Nobelovo nagrado.

8.6 Izgube in ojačenje v optičnih vlaknih

Pri prenosu informacij z optičnimi vlakni je poleg disperzije, ki signal popači, treba upoštevati tudi izgube, ki signal oslabijo. Do izgub pride predvsem zaradi absorpcije svetlobe v vlaknu, Rayleighovega sipanja na fluktuacijah gostote, sipanja na nečistočah in upognjenosti vlakna. Do izgub pa prihaja tudi stikih med vlakni. Za prenos na dolge razdalje je tako potreben razmeroma močen signal, ki pa ne sme biti premočen, saj lahko v vlaknu pride do nelinearnih optičnih pojavov. V praksi zato optični signal, ki potuje po čezoceanskih vlaknih, ojačujemo in s tem nadomestimo izgube.

Za merilo izgub v vlaknu vpeljemo atenuacijski koeficient, merjen v decibelih ali dB/km

$$A[dB] = -10\log_{10}\frac{j(z)}{j(0)}, \tag{8.97}$$

pri čemer je $j(z)$ gostota svetlobnega toka po prepotovani razdalji z, $j(0)$ pa vpadna gostota svetlobnega toka. Če se po prepotovanem kilometru signal zmanjša na primer na polovico, so izgube 3 dB/km. Pri izdelavi optičnih vlaken se najpogosteje uporablja kremenovo steklo, ki ima pri valovni dolžini $1,55$ µm izgube okoli $0,2$ dB/km. Za primerjavo: navadno steklo ima pri vidni svetlobi atenuacijski koeficient okoli 1000 dB/km.

Slika 8.16: Izgube v vlaknu v odvisnosti od valovne dolžine: vijolična črta – UV absorpcija, črna črta – IR absorpcija, zelena črta – absorpcija na OH ionih in modra črta – izgube zaradi Rayleighovega sipanja. Z rdečo črto so označene skupne izgube.

Slika (8.16) prikazuje odvisnost izgub od valovne dolžine za dobro enorodovno vlakno iz kremenovega stekla. Celotne izgube (rdeča črta) so sestavljene iz vrste različnih prispevkov. Pri kratkih valovnih dolžinah je absorpcija velika zaradi elektronskih prehodov v steklu (vijolična črta). Širina reže za SiO_2 je namreč okoli $8,9$ eV, kar ustreza valovni dolžini okoli 140 nm. Pri velikih valovnih dolžinah pride do absorpcije zaradi vibracijskih prehodov (črna črta). Čeprav so ti prehodi pri nižjih frekvencah, so vrhovi zelo široki in sežejo do okoli 1500 nm. Absorpcija na nečistočah lahko ob pazljivi izdelavi postane skoraj v celotnem območju praktično zanemarljiva. Najbolj problematična nečistoča je voda oziroma OH^- ioni, ki imajo velik dipolni moment in izrazito absorpcijo pri 1380 nm (zelena črta). Zelo pomemben prispevek k izgubam, posebej pri krajših valovnih dolžinah, je Rayleighovo sipanje na fluktuacijah gostote, saj je sorazmerno z λ^{-4} (modra črta).

Sipanje na fluktuacijah gostote predstavlja poglavitni del izgub v vlaknu. Na splošno so gostotne fluktuacije v steklu zaradi amorfne zgradbe neizogibne, v vlaknih pa so navadno še precej večje. Med izdelavo steklo namreč močno segrejejo (na okoli 2000 °C), da lahko iz njega vlečejo vlakno, termične fluktuacije gostote pa pri hitrem ohlajanju ostanejo zamrznjene v vlaknu.

S slike je razvidno, da so skupne izgube najmanjše okoli $1,55$ µm, zato se to območje največ uporablja za prenos signalov na velike razdalje. Izgube so tako majhne, da omogočajo prenos signala do nekaj sto kilometrov brez vmesnega ojačevanja. Teh izgub na vlaknih se ne bo dalo več kaj dosti izboljšati, saj so že zdaj na meji, določeni s termičnimi fluktuacijami. Pri dolžini optičnih zvez tako izgube niso več glavna omejitev, ampak je to popačitev signala zaradi disperzije.

Pri prenosu signalov z optičnimi vlakni vpeljemo različne pasove, ki ustrezajo različnim valovnim dolžinam. Pri valovnih dolžinah 1260–1360 nm je tako imenovani pas O (*original*), ki so ga sprva uporabljali zaradi razpoložljivih virov svetlobe in nizke disperzije. Sledita pas E (*extended*, 1360–1460 nm) in pas S (*short*, 1460–1530 nm). Najširše uporabljan je pas C (*conventional*) pri valovnih dolžinah 1530–1565 nm, sledita mu še pas L (*long*, 1565–1625 nm) in pas U (*ultralong*, 1625–1675 nm).

Po optičnem vlaknu lahko prenašamo več signalov hkrati, če za vsakega posebej uporabimo drugo valovno dolžino. Temu procesu pravimo razvrščanje po valovni dolžini (WDM – *wavelength-division multiplexing*) in z njim dosežemo vzporeden prenos podatkov in hitrosti prenosa do 100 Tb/s.

Shematsko je tak način prenosa podatkov prikazan na sliki (8.17). Oddajniki (O) oddajo sunke svetlobe, ki se rahlo razlikujejo v valovni dolžini. Z multiplekserjem (M) signale iz različnih kanalov zberemo in jih usmerimo v enorodovno vlakno. Vlakno prenaša signal, vmes ga po potrebi ojačimo (A), nato z demultiplekserjem (DM) signal razstavimo na posamezne kanale, ki jih zaznamo z ločenimi detektorji (D). Razlika v valovnih dolžinah med posameznimi signali je tipično $0,8$ nm. Zanimivo je tudi, da so (de)multiplekserji pasivni in za svoje delovanje ne potrebujejo elektrike.

Slika 8.17: Shematski prikaz prenosa več signalov hkrati po enorodovnem vlaknu

*Izgube v ukrivljenem vlaknu

V vseh primerih do zdaj smo privzeli, da je vlakno povsem ravno oziroma da so mejne ploskve valovnega vodnika vzporedne. Kadar je vlakno ukrivljeno, del valovanja uhaja v plašč in izgube pri prenosu se povečajo. Te izgube postanejo znatne, kadar je krivinski radij ukrivljenega vlakna tipično centimeter ali manj. Poglejmo si pojav podrobneje na planparalelnem vodniku.

Naj bo vodnik dvodimenzionalna plast debeline a z lomnim količnikom n_1, ki je obdana s snovjo z lomnim količnikom n_2. Vodnik naj zdaj ne bo raven, temveč ukrivljen s krivinskim radijem R, tako da tvori del kolobarja z notranjim radijem $R-a/2$ in zunanjim radijem $R+a/2$. Privzamemo, da je $R \gg a$ (slika 8.18).

Slika 8.18: K izračunu izgub v ukrivljenem vodniku

Zapišimo Helmholtzevo enačbo (enačba 1.21) v cilindrični geometriji

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2}+k_0^2 n^2(r)\,E=0, \tag{8.98}$$

kjer ima $n(r)$ vrednost n_1 v sredici in n_2 v plašču. Pri tem ne pozabimo, da r ni več radialna koordinata vlakna, ampak označuje oddaljenost od središča krivine. Zanimajo nas rešitve oblike

$$E(r,\varphi)=\psi(r)\,e^{im\varphi}, \tag{8.99}$$

kjer bomo privzeli, da je $\psi(r)$ znatna le v sredici.

Naj bo $z=R\varphi$ dolžina loka vzdolž sredine sredice. Tedaj je faza nastavka (enačba 8.99) enaka $m\varphi=mz/R$ in valovno število $\beta=m/R$. Ker je valovna dolžina svetlobe dosti manjša od R, je m zelo veliko število. Funkcija ψ zadošča enačbi

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}+\left(k_0^2 n^2(r)-\frac{m^2}{r^2}\right)\psi=0. \tag{8.100}$$

Rešitve gornje enačbe za ψ so kombinacije Besslovih funkcij reda m, kar pa zaradi velikosti m ni posebno zanimivo.

Dosti več bomo izvedeli, če se problema lotimo malo drugače. Namesto r in φ vpeljemo koordinati $x=r-R$ in $z=R\varphi$. S tem preidemo nazaj na koordinate planparalelne plasti in iščemo popravke valovne enačbe v sredici (8.8), ki so reda $1/R$. Zapišemo

$$\frac{m^2}{r^2}=\frac{m^2}{(R+x)^2}\approx\frac{m^2}{R^2}\left(1-2\frac{x}{R}\right)=\beta^2\left(1-2\frac{x}{R}\right). \tag{8.101}$$

Z upoštevanjem gornje zveze enačbo (8.100) nadomestimo s približno enačbo za prečno obliko polja

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(k_0^2 n^2(r)-\beta^2\right)\psi+\frac{1}{R}\left(\frac{d\psi}{dx}+2\beta^2 x\psi\right)=0. \tag{8.102}$$

Člen, ki vsebuje prvi odvod $d\psi/dx$, lahko odpravimo z nastavkom

$$\psi(x)=e^{-x/2R}\zeta(x) \tag{8.103}$$

in dobimo

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\left(k_0^2 n^2(r)-\beta^2-\frac{1}{4R^2}\right)\zeta+\frac{2\beta^2}{R}x\zeta=0. \tag{8.104}$$

Gornja enačba je podobna enačbi za izračun lastnih rodov v planparalelnem vodniku (8.8), pri čemer se β^2 poveča za $1/4R^2$. Poleg tega je prisoten dodatni člen, ki je linearen v x. Če ponovno naredimo primerjavo med lastnimi načini v valovnem vodniku in stanji delca, ujetega v končno potencialno jamo, ta člen ustreza potencialni energiji delca v konstantnem zunanjem električnem polju (slika 8.19). Podobno kot lahko ujeti delci uhajajo iz potencialne jame v prisotnosti zunanjega polja (tunelirajo), uhaja tudi svetloba iz ukrivljenega vlakna.

Po analogiji s kvantno mehaniko, kjer ukrivljenost vodnika ustreza električni poljski jakosti, lahko izgube iz vodnika (oziroma delež prepuščene svetlobe) zapišemo kot

$$A \propto e^{-CR}, \tag{8.105}$$

pri čemer je C konstanta, odvisna od lomnih količnikov sredice in plašča, od polmera vlakna ter od valovne dolžine potujoče svetlobe.

Slika 8.19: Lastni načini širjenja svetlobe po ravnem vodniku so analogni stanjem delca v končni potencialni jami (levo). Načini širjenja po ukrivljenem vodniku pa so podobni stanjem delca v konstantnem zunanjem električnem polju (desno). Zaradi spremenjenega potenciala delci tunelirajo, svetloba pa uhaja iz ukrivljenega vlakna.

Ojačevanje v vlaknih

Zaradi izgub pri prenosu signalov na več tisoč kilometrov dolge razdalje je treba signal med prenosom ojačevati. To lahko naredimo elektronsko, kjer optični signal pretvorimo v električnega, tega ojačimo in ga nato pretvorimo nazaj v optičnega. Precej bolj priročna rešitev je optično ojačevanje v vlaknu samem.

V ta namen se najpogosteje uporablja vlakno, dopirano z erbijevimi ioni[6]. Na določenih razdaljah (na okoli 100 km) svetlobo iz navadnega vlakna sklopimo v vlakno, v katerem so erbijevi ioni. S črpalnim laserjem erbijeve ione vzbudimo, da dosežemo obrnjeno zasedenost. Ko na dopirani del vlakna vpade svetlobni sunek z valovno dolžino okoli 1550 nm, pride do stimulirane emisije in sunek se ojači. Gre za povsem enak princip ojačevanja svetlobe, kot ga poznamo iz delovanja laserja, le da tukaj svetloba ni ujeta v resonator, ampak se postopoma ojačuje vzdolž vlakna. Pri tem se intenziteta črpalnega laserja postopoma zmanjšuje, kar omejuje dolžino, na kateri se signal ojačuje. Spektralna širina ojačenja je zaradi sklopitev z ioni v steklu razmeroma široka, tudi 40 nm. To pomeni, da se hkrati ojačujejo signali različnih valovnih dolžin, kar je še posebej uporabno pri prenosu več signalov naenkrat.

V praksi se uporabljajo vlakna, v katerih je delež erbijevih ionov okoli $\sim 10^{-4}$. Črpalni laser je polprevodniški laser, ki deluje pri valovni dolžini 900 nm ali 1,48 nm z močjo okoli 20–100 mW. Na ta način lahko v 10–30 m dolgih odsekih vlaken dosežemo več 1000-kratno ojačenje (30–40 dB), kar je dovolj za kompenzacijo izgub.

[6]EDFA - *Erbium-doped fiber amplifier*, ojačevalnik na vlakno, dopirano z erbijem

8.7 Sklopitev svetlobe v optične vodnike

Do zdaj smo govorili o svetlobi, ki potuje po valovnem vodniku ali optičnem vlaknu. Kako pa svetlobo sploh sklopimo v vodnik? Poznamo več načinov sklopitve, obravnavali bomo čelno sklopitev, bočno sklopitev s prizmo in bočno sklopitev s periodično strukturo. Prvi način navadno uporabljamo pri cilindričnih vlaknih, ostala dva načina pa najpogosteje pri planarnih valovodnih strukturah.

Čelna sklopitev

Sklopitev svetlobe v večrodovno vlakno lahko obravnavamo geometrijsko, kot smo to naredili na začetku poglavja (slika 8.1). Izračunali smo, da je največji vpadni kot, pod katerim se svetloba še sklopi v vlakno, določen z numerično odprtino vlakna $\sin\alpha_{\max} = NA$ (enačba 8.2).

Za bolj natančen izračun izkoristka sklopitve svetlobe v optično vlakno vpeljemo tako imenovani prekrivalni integral, ki pove, kolikšen delež vpadne svetlobe z električno poljsko jakostjo $E(r,\varphi)$ se sklopi z izbranim rodom vlakna. To naredimo tako, da vpadni val razvijemo po lastnih rodovih vlakna, iz ortogonalnosti pa sledi prekrivalni integral, ki ga moramo seveda ustrezno normirati. Za sklopitev v rod, označen z indeksoma n in m, zapišemo prekrivalni integral kot

$$\eta = \frac{|\int E(x,y)E^*_{n,m}(x,y)dx\,dy|^2}{(\int |E(x,y)|^2 dx\,dy)\,(\int |E_{n,m}(x,y)|^2 dx\,dy)}, \tag{8.106}$$

oziroma v cilindričnih koordinatah

$$\eta = \frac{|\int E(r,\varphi)E^*_{n,m}(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi|^2}{(\int |E(r,\varphi)|^2 r\,dr\,d\varphi)\,(\int |E_{n,m}(r,\varphi)|^2 r\,dr\,d\varphi)}. \tag{8.107}$$

Točen račun gornjega integrala je na splošno precej zapleten, saj vsebuje integrale Besslovih funkcij. V primeru osnovnega roda račun poenostavimo, tako da prečno odvisnost polja nadomestimo z Gaussovim profilom z ustreznim efektivnim polmerom (po enačbi 8.44).

Bočna sklopitev

Neposredna sklopitev svetlobe v optični vodnik preko plašča ni mogoča. V vodniku je namreč lomni količnik sredice vedno večji od lomnega količnika plašča, zato dovolj velikega vstopnega kota, pod katerim bi se svetloba ujela v sredico, ni mogoče doseči. Za sklopitev preko stranice zato uporabimo drugačen pristop, navadno s prizmo ali s periodično strukturo na vlaknu.

V prvem primeru uporabimo prizmo, kot kaže slika (8.20 a). Lomni količnik prizme je pri tem večji od lomnega količnika plašča $n_p > n_2$. Vhodni žarek vpada na prizmo, se ob prehodu vanjo lomi, nato pa se na stranici, ki je vzporedna z vodnikom, totalno odbije. V tankem vmesnem območju med prizmo in sredico vodnika se pojavi evanescentni val s komponento valovnega vektorja $\beta_v = k_0 n_p \sin\alpha$ v smeri vzporedno z vodnikom.

Pogoj za uspešno sklopitev v vlakno je ujemanje vzdolžne komponente valovnega vektorja vpadne svetlobe β_v z vzdolžno komponentno valovnega vektorja β_n tistega rodu, ki ga želimo vzbuditi. S spreminjanjem vpadnega kota α spreminjamo β_v in v vodniku vzbujamo različne rodove. Pri tem mora biti razdalja med prizmo in vodnikom dovolj majhna (tipično reda valovne dolžine svetlobe), da se v valovod ob izpolnjenem pogoju ujemanja faze sklopi znaten delež vpadne svetlobe.

Slika 8.20: Dva primera bočne sklopitve svetlobe v valovni vodnik: sklopitev s prizmo (a) in sklopitev s periodično strukturo (b)

Tudi sklopitev s periodično strukturo na valovnem vodniku (slika 8.20 b) deluje na ujemanju vzdolžnih komponent valovnega vektorja vpadnega vala in valovnega vektorja ustreznega rodu. Ko vpade val pod kotom α glede na valovni vodnik, periodična struktura na vodniku spremeni njegovo fazo za večkratnik $2\pi z/\Lambda$, pri čemer je Λ perioda strukture. Če dosežemo, da se komponenta novega valovnega vektorja $\beta = k_0 n_2 \sin\alpha + 2\pi/\Lambda$ izenači s komponento valovnega vektorja za izbrani rod v vlaknu, se vpadna svetloba sklopi v vlakno.

★ Oba opisana načina za sklopitev svetlobe v vlakno lahko uporabimo tudi za sklopitev svetlobe iz vlakna, pri čemer mora biti ravno tako izpolnjen pogoj ujemanja faz. Sklapljanje svetlobe skozi prizmo je uporabno tudi za raziskave tankih plasti snovi. Iz pogoja za ujemanje faz lahko določimo lastnosti tanke plasti, na primer njen lomni količnik.

8.8 Sklopitev med optičnimi vodniki

Čelna sklopitev dveh vlaken

Pri telekomunikacijah z optičnimi vodniki so spoji med posameznimi vodniki neizogibni. V idealnem primeru sta vodnika povsem enaka in se natančno stikata, tako da na spoju ne prihaja do dodatnih izgub ali popačenja signala. Čim pa se pojavijo odstopanja v velikosti polmera sredice, razlike v vrednostih lomnih količnikov ali nenatančna poravnava sredice, na spoju pride do izgub. Tipično znašajo izgube na spoju vlaken do okoli 0,2–0,5 dB.

Omejimo se na spoj enorodovnih vlaken, v katerih krajevni del električne poljske jakosti osnovnega roda zapišemo kot

$$E(r,\varphi,z) = \psi(r,\varphi)e^{i\beta z}. \tag{8.108}$$

Podobno kot smo zapisali prekrivalni integral pri sklopitvi svetlobe v vlakno (enačba 8.107), vpeljemo prekrivalni integral za izračun sklopitve med dvema vlaknoma, ki pove, kolikšen delež svetlobe moči iz prvega vlakna se sklopi v osnovni rod v drugem vlaknu. Sklopitveni faktor je

$$\eta = \frac{|\int \psi_1(r,\varphi)\psi_2^*(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi|^2}{(\int |\psi_1|^2 r\,dr\,d\varphi)(\int |\psi_2|^2 r\,dr\,d\varphi)}, \tag{8.109}$$

pri čemer z indeksom 1 označimo osnovni rod v prvem vlaknu, z indeksom 2 pa v drugem. Tudi tukaj račun poenostavimo in namesto Besslovega profila uporabimo Gaussov profil z ustreznim efektivnim polmerom snopa (enačba 8.44).

Izračunajmo za primer sklopitveni faktor in izgube na spoju dveh vlaken z rahlo različnima polmeroma. Po Marcusejevi formuli najprej določimo efektivna polmera Gaussovih snopov v obeh vlaknih w_1 in w_2. Prečni profil v vlaknih je potem

$$\psi_{1,2} = A_{1,2} e^{-r^2/w_{1,2}^2}. \tag{8.110}$$

Vstavimo gornja nastavka v prekrivalni integral (enačba 8.109) in dobimo

$$\eta = \frac{|\int A_1 e^{-r^2/w_1^2} A_2 e^{-r^2/w_2^2} 2\pi r dr|^2}{\left(\int A_1^2 e^{-2r^2/w_1^2} 2\pi r dr\right)\left(A_2^2 e^{-2r^2/w_2^2} 2\pi r dr\right)}, \tag{8.111}$$

od koder sledi

$$\eta = \frac{4 w_1^2 w_2^2}{(w_1^2 + w_2^2)^2}. \tag{8.112}$$

Kadar sta polmera vlaken enaka, je prekrivanje popolno in $\eta = 1$. Z naraščajočo razliko med polmeroma pa vrednost η pojema. Pri tem ni pomembno, ali ima večji polmer prvo ali drugo vlakno, v obeh primerih pride do izgube signala. Intuitivno razumemo, da se signal izgubi pri prehodu iz večjega v manjše vlakno, obratno pa je tudi res, saj se v širšem končnem vlaknu poleg osnovnega vzbudijo tudi višji rodovi.

Pri prehodu iz vlakna z $w = 10$ µm v vlakno s polmerom $w = 8$ µm (ali obratno), je sklopitveni faktor (oziroma razmerje med prepuščeno in vpadno intenziteto svetlobe) enak $0,95$. Po enačbi (8.97) so izgube za izračunano sklopitev enake $0,21$ dB.

Naloga 8.8.1 Izračunaj prekrivalni integral (enačba 8.111) in pokaži veljavnost enačbe (8.112). Poleg tega pokaži tudi, da je sklopitveni faktor za dve enaki vzporedni vlakni, ki sta iz osi izmaknjeni za Δ, enak

$$\eta = \exp\left(-\frac{\Delta^2}{w^2}\right). \tag{8.113}$$

Vzdolžna sklopitev

Ob prenosu signala po optičnem valovodu večina energijskega toka potuje po sredici, energijski tok pa seže tudi izven nje, v plašč (enačba 8.29). Če sta dva vzporedna valovoda dovolj blizu, da se evanescentni električni polji enega in drugega vodnika v plašču prekrivata, pride do sklopitve vodnikov in prenosa energijskega toka iz enega vodnika v drugega.

Slika 8.21: Sklopitev med dvema vzporednima vodnikoma

Za podrobnejšo obravnavo bi morali zapisati Maxwellove enačbe z ustreznimi robnimi pogoji in jih rešiti za sklopljen primer dveh vzporednih vodnikov. Tak račun je izredno zapleten, zato se bomo poslužili približka šibke sklopitve in privzeli, da so rodovi v vodnikih taki, kot če bi vodniki ne bili sklopljeni. Sklopitev torej ne bo spremenila oblike lastnih rodov, bo pa spremenila njihovo amplitudo, ki bo tako postala odvisna od vzdolžne koordinate z.

Imejmo dva enorodovna vodnika z lomnima količnikoma sredice n_1 in n_2 in enako debelino a, med njima in okoli njiju pa naj bo snov z lomnim količnikom n_0. Širina reže med vodnikoma naj bo $2d$. Potem zapišemo električni poljski jakosti v prvem in drugem vodniku kot

$$E_1(x,z) = A(z)\psi_1(x)e^{i\beta_1 z} \quad \text{in} \tag{8.114}$$

$$E_2(x,z) = B(z)\psi_2(x)e^{i\beta_2 z}, \tag{8.115}$$

pri čemer se $A(z)$ in $B(z)$ le počasi spreminjata s koordinato z. Skupna električna poljska jakost, ki je v našem približku kar vsota prispevkov E_1 in E_2, mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla^2 E(x,z) + k_0^2 n(x)^2 E(x,z) = 0. \tag{8.116}$$

Pri tem smo z $n(x)$ označili prečno odvisnost lomnega količnika. Vstavimo nastavek za električno poljsko jakost v gornjo enačbo in zapišemo

$$Ae^{i\beta_1 z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1(x) - \beta_1^2\psi_1 + k_0^2 n(x)^2\psi_1\right) + \\ Be^{i\beta_2 z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_2(x) - \beta_2^2\psi_2 + k_0^2 n(x)^2\psi_2\right) + 2i\beta_1 A'\psi_1 e^{i\beta_1 z} + 2i\beta_2 B'\psi_2 e^{i\beta_2 z} = 0. \tag{8.117}$$

Pri tem smo člena z drugim odvodom $\partial^2 A/\partial z^2$ in $\partial^2 B/\partial z^2$ zanemarili. Zapišimo enačbi za nemoteni funkciji ψ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1(x) + \left(k_0^2 n_1(x)^2 - \beta_1^2\right)\psi_1 = 0 \tag{8.118}$$

in

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_2(x) + \left(k_0^2 n_2(x)^2 - \beta_2^2\right)\psi_2 = 0. \tag{8.119}$$

Lomna količnika $n_1(x)$ in $n_2(x)$ sta tukaj tudi funkciji prečne koordinate. Naj bo $n_1(x)$ povsod enak n_0 razen v sredici prvega vodnika, kjer je n_1, in naj bo $n_2(x)$ povsod enak n_0, razen v sredici drugega vlakna, kjer je enak n_2. Sledi

$$Ae^{i\beta_1 z}k_0^2\left(n(x)^2 - n_1(x)^2\right)\psi_1 + Be^{i\beta_2 z}k_0^2\left(n(x)^2 - n_2(x)^2\right)\psi_2 + \\ 2i\beta_1 A'\psi_1 e^{i\beta_1 z} + 2i\beta_2 B'\psi_2 e^{i\beta_2 z} = 0. \tag{8.120}$$

Enačbo pomnožimo s kompleksno konjugirano vrednostjo ψ_1^* in integriramo po x. Upoštevamo, da se funkciji ψ_1 in ψ_2 le malo prekrivata, in zapišemo

$$\frac{dA}{dz} = iAK_{11} + iBe^{i(\beta_2-\beta_1)z}K_{12}, \tag{8.121}$$

pri čemer sta

$$K_{11} = \frac{k_0^2}{2\beta_1}\int \psi_1^*\psi_1(n^2 - n_1^2)dx \qquad \text{in} \qquad K_{12} = \frac{k_0^2}{2\beta_1}\int \psi_1^*\psi_2(n^2 - n_2^2)dx. \tag{8.122}$$

Koeficient K_{11} določa spremembo faze v vlaknu zaradi prisotnosti drugega vlakna, kar lahko zanemarimo. Tako ostane samo sklopitveni člen

$$\frac{dA}{dz} = iBe^{i(\beta_2-\beta_1)z}K_{12} \tag{8.123}$$

in podobno za B

$$\frac{dB}{dz} = iAe^{i(-\beta_2+\beta_1)z}K_{21}. \tag{8.124}$$

Prvo enačbo odvajamo, upoštevamo drugo in zapišemo

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - i\Delta\beta\frac{\partial A}{\partial z} + K_{12}K_{21}A = 0. \tag{8.125}$$

Enačbo rešujemo z nastavkom

$$A = e^{i\Delta\beta z/2}\left(a_1 e^{i\gamma z} + a_2 e^{-i\gamma z}\right). \tag{8.126}$$

Naloga 8.8.2 Pokaži, da nastavek (enačba 8.126) reši enačbo (8.125) in pokaži, da med parametri enačb velja sledeča zveza

$$\gamma^2 = K^2 + \frac{\Delta\beta^2}{4}, \tag{8.127}$$

pri čemer je $K = \sqrt{K_{12}K_{21}}$ in $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$. Nato uporabi enačbo (8.123) in pokaži, da je rešitev za amplitudo B enaka izrazu v enačbi (8.128).

Ko poznamo A, lahko z uporabo enačbe (8.123) izračunamo še B

$$B = \frac{1}{K_{21}}e^{-i\Delta\beta z/2}\left(\left(\frac{\Delta\beta}{2}+\gamma\right)a_1 e^{i\gamma z} + \left(\frac{\Delta\beta}{2}-\gamma\right)a_2 e^{-i\gamma z}\right). \tag{8.128}$$

Naj bo $A(z=0) = A_0$ in $B(z=0) = 0$. To pomeni, da potuje svetloba na začetku le po prvem vlaknu, potem pa se sklopi v drugega. S tema začetnima pogojema zapišemo izraza za A in B

$$A = A_0 e^{i\Delta\beta z/2}\left(\cos(\gamma z) - \frac{i\Delta\beta}{2\gamma}\sin(\gamma z)\right) \quad \text{in} \quad B = A_0 e^{-i\Delta\beta z/2}\frac{iK_{21}}{\gamma}\sin(\gamma z). \tag{8.129}$$

Moč, ki se pretaka po posameznem vlaknu, je tako z upoštevanjem zveze (8.127)

$$P_1 = P_0\left(\cos^2(\gamma z) + \frac{\Delta\beta^2}{4\gamma^2}\sin^2(\gamma z)\right) = P_0\left(1 - \frac{K^2}{\gamma^2}\sin^2(\gamma z)\right) \tag{8.130}$$

in

$$P_2 = P_0\frac{K^2}{\gamma^2}\sin^2(\gamma z). \tag{8.131}$$

Privzeli smo, da velja $|K_{12}| = |K_{21}| = K$. Obe funkciji sta oscilirajoči in svetloba se periodično pretaka med vlaknoma s periodo π/γ (slika 8.22). Amplituda prenosa je odvisna od sklopitvenega faktorja K in ujemanja valovnih števil v obeh vlaknih. Večji koeficient K in manjše odstopanje $\Delta\beta$ vodita v večji prenos svetlobnega toka v drugo vlakno.

Slika 8.22: Prenos svetlobnega toka med dvema sklopljenima vodnikoma. V prvem primeru (a) sta vodnika različna, v drugem primeru (b) pa sta vodnika enaka in pride do popolnega prenosa.

Če sta vlakni enaki, je $\Delta\beta = 0$ in $\gamma = K$, tako da pride do popolnega prenosa svetlobnega toka iz enega vlakna v drugo in seveda tudi obratno. Takrat veljata enačbi

$$P_1 = P_0 \cos^2(\gamma z) \quad \text{in} \tag{8.132}$$

$$P_2 = P_0 \sin^2(\gamma z). \tag{8.133}$$

Na ta način lahko v drugo vlakno sklopimo poljuben delež vpadne svetlobe. Do celotnega prenosa svetlobnega toka v drugo vlakno pride pri dolžini sklopitve $L = \pi/2\gamma$. Pri dolžini $L = \pi/4\gamma$ sklopimo eno polovico gostote vpadnega svetlobnega toka in govorimo o 3-dB sklopitvi.

★ Pri izbrani dolžini sklopitve med vlaknoma je intenziteta svetlobe, ki preide v drugo vlakno, močno odvisna od parametra γ, torej od prekrivalnega integrala in od razlike $\Delta\beta$. Z rahlim spreminjanjem parametrov, na primer lomnega količnika enega od vlaken, lahko spreminjamo delež svetlobe v drugem vlaknu. V ta namen pogosto uporabimo elektro-optični pojav in s spreminjanjem priključene napetosti na enem od vlaken natančno določimo delež svetlobe, ki preide v drugo vlakno.

8.9 *Vpliv spremembe lomnega količnika vlakna na širjenje svetlobe

Sprememba lomnega količnika sredice ali plašča vlakna povzroči spremembo valovnega števila β za izbran rod. V enorodovnih vlaknih je to mogoče izkoristiti za izdelavo senzorjev, na primer temperature ali tlaka. Spremembo valovnega števila, do katere pride zaradi zunanjih vplivov, izmerimo preko spremembe faze valovanja na izhodu iz vlakna z ustrezno sestavljenim interferometrom. Ker je dolžina vlakna lahko velika (v nekaj centimetrov velik tulec lahko brez težav navijemo kilometre vlakna), je celotna sprememba faze velika že pri majhnih spremembah merjene količine. Po drugi strani pa že majhna sprememba valovnega števila povzroča neželene spremembe faze in odboje pri prenosu informacij. V tem razdelku zato poglejmo, kako se spremeni valovno število pri dani spremembi lomnega količnika in koliko svetlobe se odbije.

Obravnavajmo rod z vzdolžno komponento valovnega vektorja β_{lm} in prečnim profilom $\psi_{lm}(r,\varphi)$. Ta mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla_\perp^2 \psi_{lm} + \left(\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2\right)\psi_{lm} = 0. \tag{8.134}$$

Naj se dielektrična konstanta na delu vlakna spremeni za $\delta\varepsilon$. Posledično se na tem mestu spremenita tudi valovno število $\beta = \beta_{lm} + \delta\beta$ in prečna oblika $\psi = \psi_{lm} + \delta\psi$.

Tudi popravljena funkcija ψ mora zadoščati enačbi (8.134), zato za perturbacijo velja

$$\nabla_\perp^2 \delta\psi + \left(\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2\right)\delta\psi + \delta\varepsilon\, k_0^2 \psi_{lm} = 2\beta_{lm}\delta\beta\, \psi_{lm}, \tag{8.135}$$

pri čemer smo zanemarili produkte majhnih količin. Množimo obe strani enačbe s ψ_{lm}^*, integriramo po preseku vlakna in dobimo

$$\begin{aligned} &\int \psi_{lm}^* \nabla_\perp^2 \delta\psi\, dS + \int \left(\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2\right)\delta\psi\, \psi_{lm}^* dS + k_0^2 \int \delta\varepsilon\, |\psi_{lm}|^2\, dS \\ = \;& 2\beta_{lm}\,\delta\beta \int |\psi_{lm}|^2\, dS. \end{aligned} \tag{8.136}$$

Prvi člen na levi preoblikujmo z uporabo zvez

$$\int (u\nabla_\perp^2 v - v\nabla_\perp^2 u)\, dS = \int \nabla_\perp \cdot (u\nabla_\perp v - v\nabla_\perp u)\, dS = \oint (u\nabla_\perp v - v\nabla_\perp u)\cdot d\mathbf{s}. \tag{8.137}$$

Funkciji ψ_{lm} in $\delta\psi$ opisujeta vodene valove, zato morata iti njune vrednosti za velike r proti nič. Posledično gre proti nič tudi integral po krivulji $d\mathbf{s}$ in velja

$$\int \psi_{lm}^* \nabla_\perp^2 \delta\psi\, dS = \int \delta\psi \nabla_\perp^2 \psi_{lm}^*\, dS. \tag{8.138}$$

Funkcija ψ_{lm}^* zadošča enačbi (8.134), zato se v enačbi (8.136) prvi in drugi člen odštejeta. Iskan popravek k valovnemu številu je tako

$$\delta\beta = \frac{k_0^2 \int \delta\varepsilon\, |\psi_{lm}|^2\, dS}{2\,\beta_{lm} \int |\psi_{lm}|^2\, dS}. \tag{8.139}$$

★ Ta rezultat je seveda analogen kvantno-mehanskemu rezultatu, ki sledi iz teorije motenj za spremembo energije lastnega stanja delca pri majhni spremembi Hamiltonovega operatorja. Rezultat je tudi intuitivno razumljiv: v najnižjem redu je $\delta\beta$ sorazmerna s uteženim povprečjem $\delta\varepsilon$, pri čemer je utež ψ_{lm}.

Sprememba valovnega števila $\delta\beta$ v delu vlakna ne povzroči le spremembe faze, ampak tudi delni odboj. To je le nekoliko druga oblika odboja na (zvezni ali ostri) meji dveh dielektrikov ali, splošneje, odboja valovanja na območju, kjer se spremeni fazna hitrost valovanja. Amplitudo odbitega valovanja, do katerega pride na območju vlakna, kjer se spreminja β, najpreprosteje dobimo z uporabo enačbe za odboj na meji dveh dielektrikov pri pravokotnem vpadu. Odbita amplituda je tedaj (enačba 1.41)

$$E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_0, \tag{8.140}$$

pri čemer n_1 in n_2 označujeta nespremenjen in rahlo spremenjen lomni količnik sredice vlakna.

Mislimo si, da je sprememba β na delu vlakna sestavljena iz majhnih stopničastih sprememb $\Delta\beta_i$ na intervalih Δz. Za ravno valovanje je sprememba fazne hitrosti sorazmerna s spremembo lomnega količnika, zato iz enačbe (8.140) sledi, da je prispevek k odbitem valovanju na stopničasti spremembi $\Delta\beta_i$ enak

$$\Delta E_i = \frac{\Delta\beta_i}{2\,\beta} E_0. \tag{8.141}$$

Privzeli smo, da je delež odbitega valovanja tako majhen, da ni treba upoštevati spremembe amplitude vpadnega vala E_0. Celotno odbito valovanje je vsota prispevkov na posameznih stopnicah $\Delta\beta_i$, pri čemer moramo upoštevati še različne faze delno odbitih valovanj

$$E_r = \sum \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} e^{2i\beta z_i} E_0 = \frac{1}{2\beta} \sum \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z_i} \Delta z E_0. \tag{8.142}$$

Preidemo z vsote na integral in zapišemo amplitudo odbitega valovanja

$$E_r = \frac{E_0}{2\beta} \int \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z} dz. \tag{8.143}$$

Za primer poglejmo linearno spremembo lomnega količnika in linearno spremembo valovnega števila za $\Delta\beta$ na razdalji L. Krajši račun pokaže, da je delež intenzitete odbitega valovanja

$$\frac{I_r}{I_0} = \left(\frac{\Delta\beta}{2\beta} \frac{\sin \beta L}{\beta L} \right)^2. \tag{8.144}$$

Odbojnost je največja, kadar je $L \ll 1/\beta$, torej kadar je sprememba β ostra stopnica. Čim počasnejša je sprememba, tem manj je odboja. Kadar je $\sin \beta L = 0$, pride do destruktivne interference vseh delnih odbojev in odbojnost je enaka nič.

Naloga 8.9.1 Naj se valovno število ob prehodu spreminja kot funkcija erf

$$\beta(z) = \beta_0 + \frac{2\Delta\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z/a} e^{-t^2} dt. \tag{8.145}$$

Pokaži, da je amplituda odbitega valovanja za majhne spremembe $\Delta\beta$ enaka

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{\Delta\beta}{\beta_0} e^{-a^2\beta_0^2}. \tag{8.146}$$

Po pričakovanju je odbojnost največja pri $a \to 0$, to je v primeru ostre stopnice.

---

9. Detektorji svetlobe

V tem poglavju bomo spoznali detektorje svetlobe, ki so nujni za kvantitativno obravnavo optičnih pojavov in sprejemanje optičnih signalov. Podrobneje bomo spoznali načine delovanja in specifikacije posameznih vrst detektorjev. Največ pozornosti bomo posvetili danes najbolj razširjenim polprevodniškim detektorjem. Na koncu bomo spoznali še šum pri detekciji, ki omejuje najmanjši signal, ki ga z detektorjem še lahko izmerimo.

9.1 Osnovne karakteristike detektorjev

Osnovna naloga optičnih detektorjev je spremeniti vpadni svetlobni signal v nek drug signal, ki ga lahko natančno merimo. Navadno sta to električni tok ali električna napetost, ki pa sta sorazmerna z močjo vpadne svetlobe in ne z amplitudo električne poljske jakosti. Pri navadni detekciji se tako podatek o fazi valovanja izgubi. V grobem delimo detektorje v dve skupini, na termične in kvantne.

Termični detektorji zaznavajo svetlobo preko povišanja temperature senzorja zaradi absorbirane svetlobe. Taki detektorji zaznavajo energijo vpadle svetlobe. Njihov odziv je razmeroma počasen, zato jih uporabljamo predvsem za merjenje optične moči, lahko tudi zelo velike. Po drugi strani pa je odziv termičnih detektorjev neodvisen od valovne dolžine vpadne svetlobe, zaradi česar so termični detektorji uporabni na širokem območju od globokega ultravijoličnega do daljnega infrardečega dela svetlobe. Uporaba prevlada predvsem v infrardečem, teraherčnem ali celo mikrovalovnem delu spektra, kjer so drugi detektorji bistveno manj občutljivi. Primeri termičnih detektorjev so bolometer, termočlen in piroelektrični detektor.

Druga skupina so kvantni detektorji, ki temeljijo na fotoefektu. V njih se vpadni fotoni absorbirajo in povzročijo pojav prostih nosilcev naboja, tako da iz snovi izbijejo elektron ali v snovi ustvarijo par elektron–vrzel. Kvantni detektorji zaznavajo število vpadnih fotonov. Odlikuje jih zelo hiter odziv (tipično pod µs) in velika občutljivost. Njihova poglavitna slabost je omejen obseg valovnih dolžin, pri katerih zaznavajo svetlobo, poleg tega jih je za optimalno delovanje treba hladiti. Primeri so vakuumske, polprevodniške in plazovne fotodiode.

Slika 9.1: Primerjava spektralnega odziva termičnega in kvantnega detektorja

Osnovne karakteristike, ki omogočajo primerjavo detektorjev in določajo njihovo uporabnost, so občutljivost, spektralni odziv, odzivni čas in najmanjši merljivi signal:

1. Občutljivost $\mathscr{R}$ pove, koliko je izhodnega signala na enoto vpadnega svetlobnega toka. Enota za občutljivost je A/W, če merimo tok, ali V/W, če na izhodu zaznavamo napetost.
2. Spektralni odziv pove, kako se občutljivost spreminja z valovno dolžino $\mathscr{R}(\lambda)$. Pri termičnih detektorjih je $\mathscr{R}(\lambda)$ konstanta[1], medtem ko kvantni detektorji delujejo le v določenem območju valovnih dolžin, ki je odvisen od snovi, iz katere je detektor narejen.
3. Odzivni čas pove, kako hitro se detektor odzove na spremembo optičnega signala. Predvsem optične telekomunikacije zahtevajo izredno hiter odziv.
4. Najmanjši merljivi signal je določen s svetlobno močjo, pri kateri postane razmerje med signalom (S –*signal*) in šumom (N – *noise*) enako $S/N = 1$.

9.2 Termični detektorji

Termične detektorje se zaradi njihovega razmeroma počasnega odziva uporablja predvsem za merjenje vpadne moči in za detekcijo svetlobe tistih valovnih dolžin, za katere ni drugih preprostih ali učinkovitih detektorjev. Zelo so uporabni v daljnem infrardečem območju ali za detekcijo velikih vpadnih moči.

Delovanje termičnih detektorjev temelji na spremembi temperature zaradi absorpcije svetlobe. Detektorji se med seboj razlikujejo predvsem v načinu pretvorbe spremembe temperature v električni signal. Tipalo termičnih detektorjev mora biti pri vseh vrstah dobro počrnjeno, da absorbira svetlobo v čim širšem spektralnem območju. Čeprav je njihova občutljivost načeloma neodvisna od valovne dolžine vpadne svetlobe, se v praksi pojavijo omejitve zaradi prepustnosti okna in absorpcijskega spektra črnega nanosa. Tipala so majhna, zato da dosežemo čim hitrejši odziv, ki pa je kljub temu navadno počasnejši od 1 ms. Sodobnejši detektorji se po odzivnem času že približujejo kvantnim, saj dosegajo odzivne čase tudi do ~ 10 µs. Termične detektorje uporabljamo pri sobni temperaturi, za zahtevne meritve pa jih hladimo na nekaj K.

Obravnavajmo termični detektor, katerega tipalo naj ima toplotno kapaciteto C. Toplota se s tipala odvaja v toplotni zalogovnik s temperaturo T_0, toplotne izgube pa označimo z Λ. Ko na tipalo vpada svetloba z močjo P, začne temperatura tipala T zaradi absorpcije svetlobe naraščati, hkrati pa se tipalo ohlaja zaradi odtekanja toplote. Zapišemo

$$\frac{dW}{dt} = C\frac{dT}{dt} = P - \Lambda(T - T_0). \tag{9.1}$$

V stacionarnem stanju (ob konstantnem vpadnem svetlobnem toku) se temperatura tipala ne spreminja in razlika temperature tipala in zalogovnika je

$$T - T_0 = \frac{P}{\Lambda}. \tag{9.2}$$

Občutljivost detektorja, ki je sorazmerna z razliko temperatur, je obratno sorazmerna s toplotnimi izgubami. Za večjo občutljivost moramo toplotne izgube detektorja kar se da zmanjšati.
Po enačbi (9.1) se temperatura približuje stacionarni vrednosti s časovno konstanto

$$\tau = \frac{C}{\Lambda}. \tag{9.3}$$

Odzivni čas je torej sorazmeren s kapaciteto senzorja, zato so tipala praviloma zelo majhna.

[1] Občutljivost je konstantna le v območju konstantnega albeda, ki pa je lahko zelo široko.

Iz enačbe (9.3) sledi, da moramo za dosego čim krajšega odzivnega časa toplotne izgube kar se da povečati. Velike izgube sicer skrajšajo odzivni čas, vendar tudi zmanjšajo občutljivost (enačba 9.2), zato termični detektorji ne morejo imeti hkrati velikega in hitrega odziva. Če želimo toplotne izgube povečati in s tem skrajšati odzivni čas, detektorje hladimo z zrakom ali celo z vodo, navzdol pa so toplotne izgube omejene s sevanjem.

Podrobneje poglejmo odziv termičnega detektorja od vpadne moči. Naj se vpadna moč spreminja s časom, temperatura na detektorju pa temu sledi z določeno zakasnitvijo. Odziv najlepše izračunamo v Fourierevem prostoru. Vpadno moč in temperaturo izrazimo kot

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\omega e^{i\omega t} d\omega \quad \text{in} \quad T = T_0 + \int_{-\infty}^{\infty} T_\omega e^{i\omega t} d\omega. \tag{9.4}$$

To vstavimo v enačbo (9.1) in zapišemo

$$\int_{-\infty}^{\infty} i\omega T_\omega e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} (P_\omega - \Lambda T_\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{9.5}$$

Enačbi zadostimo, če izenačimo člene pred vsako spektralno komponento posebej

$$i\omega T_\omega = \frac{1}{C} \left(P_\omega - \Lambda T_\omega \right). \tag{9.6}$$

Če vpeljemo odzivni čas τ (enačba 9.3), dobimo

$$T_\omega = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{1}{1 + i\omega\tau} \right) P_\omega = \frac{P_\omega}{\Lambda} \left(\frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \right). \tag{9.7}$$

Imaginarni del predstavlja fazni zamik, amplituda odziva, ki nas zanima, pa je podana kot realni del. Iz računa je razvidno, zakaj detektor sledi le počasnim spremembam signala.

Naloga 9.2.1 Pokaži, da je odziv termičnega detektorja na sunek oblike $P(t) = P_0 \delta(t - t_0)$

$$T(t) = \frac{P_0}{\tau\Lambda} e^{-(t-t_0)/\tau}. \tag{9.8}$$

Bolometer

Bolometer je termični detektor, pri katerem zaznavamo spremembo električne upornosti zaradi spremembe temperature tipala[2]. Tipalo je praviloma počrnjena tanka ploščica, navadno je narejena iz termistorja[3], polprevodnika ali superprevodnika. Tipalo preko referenčnega upora priključimo na napetost, preko kondenzatorja pa merimo napetost na njem. Za meritve konstantnega svetlobnega toka tipalo navadno vežemo v Wheatstonov mostiček. V obeh primerih za referenčni upor vzamemo enako tipalo, ki pa ga zaščitimo pred vpadno svetlobo, tako da postane sistem neobčutljiv na morebitne spremembe temperature okolice.

Termistorji imajo približno eksponentno odvisnost upornosti od temperature, zato imajo bolometri s termistorjem razmeroma veliko občutljivost. Občutljivost pri neki tipični velikosti upora R znaša $\mathscr{R} \sim 100$ V/W. Poleg tega so robustni, stabilni in delujejo pri sobni temperaturi. Odzivni časi so okoli $\tau \sim 1$–20 ms. Pri polprevodniških bolometrih upornost pojema eksponentno s temperaturo. Primerni so za detekcijo teraherčnih valovanj, vendar mora biti za ta namen bolometer (npr. germanijev) hlajen s tekočim helijem. Tako lahko dosežemo občutljivosti večje od $\mathscr{R} \sim 10^8$ V/W. Zelo občutljivi so tudi detektorji s superprevodnimi tipali, saj je odvisnost upornosti od temperature v bližini prehoda v superprevodno stanje zelo velika ($\mathscr{R} \sim 10^3$ V/W).

[2] Prvi bolometer je leta 1881 naredil ameriški fizik, astronom in letalski inženir Samuel Pierpont Langley, 1834–1906.

[3] Termistor je upornik, katerega upornost se spreminja s temperaturo.

Slika 9.2: Shema bolometra

Slika 9.3: Bolometer za merjenje prasevanja. Premer kovanca za primerjavo je 18 mm. Vir: NASA/JPL-Caltech.

Termočlen

Termočlen je sestavljen iz dveh različnih vodnikov. En spoj vodnikov počrnimo, drugega, referenčnega, pa zaščitimo pred svetlobo. Zaradi vpadne svetlobe se počrnjeni spoj segreje, med obema spojema nastane temperaturna razlika in zaradi termoelektričnega pojava tudi električna napetost, ki jo lahko merimo. Pri tem pazimo, da je električna prevodnost vodnikov čim večja, njihova toplotna prevodnost pa čim manjša. Odzivni čas termočlenov je $\tau \sim 10$–20 ms, občutljivost pa $\mathscr{R} \sim 10$ V/W. Ker so napetosti, ki se pojavijo med stikoma, razmeroma majhne (~ 100 µV/K) pogosto vežemo več (nekaj deset) termočlenov zaporedno v termobaterijo. Občutljivost s tem naraste na $\mathscr{R} \sim 200$ V/W, podaljša pa se časovna konstanta na $\tau \sim 10$–2000 ms. Prednost termočlenov je, da za svoje delovanje ne potrebujejo zunanjega napajanja.

Piroelektrični detektor

Piroelektriki so snovi brez centra inverzije, v katerih je lastna električna polarizacija odvisna od temperature (npr. $LiTaO_3$, triglicin sulfat TGS in vsi feroelektriki). Piroelektrični detektor je narejen iz ploščice piroelektrične snovi med dvema elektrodama oziroma ploščama kondenzatorja. Ko se ploščica zaradi absorbirane svetlobe segreje, se ji spremeni polarizacija. Med elektrodama se pojavi premikalni tok, ki ga merimo na merilnem uporniku.

Zveza med spremembo temperature in spremembo električne polarizacije P_{el} je

$$dP_{\mathrm{el}} = a\,dT, \tag{9.9}$$

kjer je a piroelektrični koeficient.

Med elektrodama s površino S preteče naboj

$$de = I\,dt = S\,dP_{\mathrm{el}} = Sa\,dT. \tag{9.10}$$

Tok skozi tipalo je

$$I = Sa\frac{dT}{dt}. \tag{9.11}$$

Piroelektrični detektor je torej občutljiv na časovni odvod temperature detektorja, s tem pa tudi na spreminjanje vpadne svetlobne moči. V stacionarnem stanju detektor ne proizvaja električnega toka, zato moramo za merjenje konstantnega svetlobnega toka vpadno svetlobo modulirati. Navadno to naredimo kar z mehanskim zaklopom. Piroelektrični detektorji se večinoma uporabljajo kot preprosti infrardeči detektorji. Njihova občutljivost je $\mathscr{R} \sim 1\ \mu\mathrm{A/W}$, odzivni čas pa je odvisen od upornika v vezju, ampak lahko doseže vrednosti $\tau \sim 10\ \mu\mathrm{s}$.

Poglejmo temperaturni odziv na tipalu. Izhajamo iz enačb (9.4), (9.7) in (9.11) in izračunajmo tok I v odvisnosti od krožne frekvence modulacije.

$$I = Sa\frac{dT}{dt} = Sa\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} T_\omega e^{i\omega t}d\omega = Sa\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{P_\omega}{1+i\omega\tau}\right)i\omega\, e^{i\omega t}d\omega. \tag{9.12}$$

Sledi

$$I_\omega = \frac{i\omega\, SaP_\omega/\Lambda}{1+i\omega\tau} = \frac{SaP_\omega}{\Lambda}\frac{(\omega^2\tau + i\omega)}{1+(\omega\tau)^2}. \tag{9.13}$$

Pri majhnih frekvencah tok narašča, pri velikih frekvencah pa postane neodvisen od frekvence modulacije vpadne svetlobe. Vendar to še ne pomeni, da lahko moduliramo s poljubno veliko frekvenco. Poleg relaksacijskega časa detektorja ima namreč karakteristični čas tudi elektronsko vezje, ki določa zgornjo mejo za frekvenco modulacije. Ta je enak $\tau_e = RC_e$, pri čemer sta R upornost sistema in C_e električna kapaciteta detektorja.

Slika 9.4: Spektralni odziv piroelektričnega detektorja na eni strani določajo toplotne izgube Λ in toplotna kapaciteta detektorja C, navzgor pa odziv omejuje odziv elektronskega vezja τ_e.

Naloga 9.2.2 Piroelektrični detektor naredimo iz kristala $LiTaO_3$ s koeficientom piroelektričnosti $a = 2,3\times 10^{-4}\ \mathrm{As/m^2K}$ in povprečno dielektričnostjo $\varepsilon = 50$. Izračunaj dovoljeno električno upornost sistema, da detektor deluje za frekvence do 1 MHz. Dimenzija detektorja je $S = 1\ \mathrm{cm}^2$ in debelina $d = 1$ mm.

9.3 Fotoefekt

Delovanje kvantnih detektorjev temelji na fotoefektu. To je pojav, pri katerem vpadni fotoni iz snovi izbijajo elektrone. Izbiti elektroni lahko ubežijo kot prosti elektroni (t. i. zunanji fotoefekt), ali pa ostanejo ujeti v snovi – a mobilni – in tako povečajo njeno prevodnost (notranji fotoefekt). V obeh primerih pride do fotoefekta le, če je energija vpadnih fotonov večja od neke določene energije. Pod to vrednostjo fotoefekta ni, ne glede na moč vpadne svetlobe. Fotoefekt je prvič opazil Hertz[4] leta 1887, za njegovo razlago leta 1905 pa je Einstein[5] dobil Nobelovo nagrado.

Poglejmo najprej zunanji fotoefekt, pri katerem elektron postane povsem prost. Da se to sploh lahko zgodi, mora biti energija vpadnega fotona dovolj velika, da elektron premaga potencialno bariero in izstopi iz prevodnega pasu (slika 9.5 a). Najmanjšo energijo, ki je za to potrebna, imenujemo v kovinah izstopno delo Φ. Če je energija fotona večja, gre preostanek energije v kinetično energijo izbitega elektrona.

Slika 9.5: Shema energijskih pasov in zunanjega fotoefekta v kovini (a) in polprevodniku (b) ter notranjega fotoefekta v polprevodniku (c). Φ označuje izstopno delo, E_g širino reže med valenčnim in prevodnim pasom polprevodnika, E_a pa elektronsko afiniteto.

Zunanji fotoefekt poteka tudi v polprevodnikih (slika 9.5 b), v katerih foton izbije elektron iz valenčnega pasu. Da lahko elektron zapusti snov, mora biti njegova energija večja od vsote energije reže in elektronske afinitete. Z uporabo ustreznih materialov lahko dosežemo negativno elektronsko afiniteto in je zato potrebna energija fotona kar enaka širini energijske reže.

Izstopno delo za kovine Φ je od okoli 2 eV za cezij pa do okoli 6 eV za platino. Ustrezna valovna dolžina svetlobe, ki še povzroči fotoefekt, je

$$\lambda \leq \frac{hc}{\Phi}. \tag{9.14}$$

V ceziju tako povzroči fotoefekt svetloba z valovno dolžino, krajšo od 580 nm, v platini pa svetloba z $\lambda < 200$ nm. Da lahko fotoefekt izkoristimo za detektorje vidne svetlobe, uporabimo druge snovi, na primer Cs-Te, Cs-Sb, Na-K-Sb-Cs ali GaAs:Cs. Tako lahko zaznavamo fotone z valovnimi dolžinami od ultravijoličnega pa vse do bližnjega infrardečega valovanja.

Pri notranjem fotoefektu (slika 9.5 c) elektron snovi ne zapusti, ampak zgolj preide iz enega energijskega pasu v drugega. Tipično to poteka v polprevodnikih, kjer absorpcija fotona povzroči nastanek para elektron–vrzel, prag za nastanek para pa določa širina reže med energijskima nivojema.

Primeri detektorjev, ki temeljijo na zunanjem fotoefektu, so fotocelice in fotopomnoževalke, na notranjem fotoefektu pa temeljijo na primer fotoprevodniki, polprevodniške in plazovne fotodiode.

[4] Nemški fizik Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894.
[5] Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.

Za zdaj smo napisali, da fotoefekt poteče, ko foton izbije elektron. Vendar pri tem ni uspešen prav vsak foton, zato vpeljemo še parameter, ki ga imenujemo kvantni izkoristek η. Ta parameter pove verjetnost, da vpadni foton z valovno dolžino λ oziroma frekvenco ν iz snovi izbije elektron. Električni tok, ki steče pri vpadni svetlobni moči P, je tako

$$I = \eta e_0 \frac{n_F}{t} = \eta \frac{e_0 P}{h\nu}, \tag{9.15}$$

kjer n_F označuje število vpadnih fotonov v času t. Kvantni izkoristek je močno odvisen od valovne dolžine vpadne svetlobe in seveda od snovi, na katero svetloba vpada. Za fotone z energijo, ki je manjša od izstopnega dela oziroma od širine energijske reže, je kvantni izkoristek praktično enak nič, nato pa strmo naraste in lahko doseže vrednosti, večje od 90 %. Podrobneje ga bomo obravnavali pri posameznih primerih detektorjev.

★ V praksi ločimo dve vrsti kvantnega izkoristka: zunanji in notranji. Zunanji je vpeljan kot razmerje med številom izbitih elektronov in fotonov, ki vpadejo na detektor. Ker se ob vpadu na detektor vedno nekaj fotonov odbije ali siplje, vpeljemo še notranji kvantni izkoristek kot razmerje števila elektronov in fotonov, ki se dejansko absorbirajo v detektorju. Zunanji izkoristek je vedno manjši od notranjega in je neke vrste efektivni izkoristek.

Iz enačbe (9.15) hitro izračunamo še občutljivost detektorja

$$\mathscr{R} = \frac{I}{P} = \frac{\eta e_0}{h\nu}. \tag{9.16}$$

9.4 Vakuumska fotodioda (fotocelica) in fotopomnoževalka

Fotocelica

Najpreprostejši kvantni detektor na zunanji fotoefekt je fotocelica ali vakuumska fotodioda (slika 9.6). Fotocelica deluje tako, da svetloba vpada na katodo, zaprto v vakuumirani stekleni bučki, in tam povzroči fotoefekt. Izbiti elektroni se pod zunanjo napetostjo V pospešijo do anode in z ampermetrom (A) merimo električni tok, ki steče med katodo in anodo. Ker je tok sorazmeren s številom vpadnih fotonov, lahko na ta način izmerimo moč vpadne svetlobe.

Slika 9.6: Shema fotocelice, v kateri poteka fotoefekt. Vpadna svetloba iz kovinske katode izbije elektrone, zaradi česar med katodo in anodo steče tok.

Območje detekcije fotocelice je določeno z izstopnim delom kovine, iz katere fotoni izbijajo elektrone. Potrebno energijo fotona lahko precej zmanjšamo, če namesto čistih kovin uporabimo bi- ali večalkalne katode (npr. Na_2KSbCs), ali pa polprevodnike, na katere nanesemo tanko plast Cs ali Cs_2O. To omogoča zaznavanje svetlobe do valovnih dolžin okoli 1600 nm. Na ultravijoličnem območju je delovanje omejeno na okoli 160 nm zaradi neprepustnosti stekla, iz katerega je narejena bučka.

Slika 9.7: Kvantni izkoristek fotocelic za različne snovi. Povzeto po Hamamatsu Photonics.

Odzivni čas vakuumske fotodiode je odvisen od časa preleta elektronov od katode do anode. Da je ta čas čim krajši, je napetost na fotocelici velika, pogosto več kV, kar omogoča zelo kratke odzivne čase, tudi do $0,1$ ns. Enostavnost in hitrost sta torej prednosti fotocelice, njena glavna pomanjkljivost pa je razmeroma nizek kvantni izkoristek. Izkoristek je seveda močno odvisen od valovne dolžine vpadnega valovanja in snovi, iz katere je narejena katoda. Največje vrednosti, ki jih dosega, so okoli 40 %, pogosto pa bistveno manj (slika 9.7). Vrednosti so razmeroma nizke, saj se izbiti elektroni gibljejo v vse smeri in se pogosto sipljejo, preden sploh dosežejo površino katode.

Dodaten problem fotocelic je, da pri končnih temperaturah prihaja do spontane oddaje elektronov. Nekaj električnega toka zato teče tudi v popolni temi. To je tako imenovani temni tok in tipično dosega vrednosti okoli 10^{-15} A, lahko pa tudi do več nA. Za občutljive meritve je treba zato vakuumsko fotodiodo hladiti.

Naloga 9.4.1 Izračunaj občutljivost fotocelice na osnovi GaAs za valovanje z valovno dolžino $\lambda = 620$ nm. Kvantni izkoristek odčitaj s slike (9.7).

Fotopomnoževalka

Fotopomnoževalke so fotocelice z vgrajenim ojačenjem. Ojačenje dosežemo tako, da izbit elektron najprej pospešimo z napetostjo 100–150 V na vmesno elektrodo, tako imenovano dinodo, iz katere izbije več ($\sim$ 5–10, redkeje tudi do 40) sekundarnih elektronov. Izbiti elektroni potujejo do naslednje dinode, ki je pod višjo pozitivno napetostjo (tipično okoli 100 V višjo), kjer ponovno izbijejo elektrone, ki vpadejo na naslednjo dinodo, ki je pod še višjo napetostjo ... Pomnoževanje se večkrat ponovi (navadno okoli desetkrat), število elektronov eksponentno narašča in na en vpadni foton lahko na anodo vpade 10^9 elektronov. Občutljivost fotopomnoževalk je precej večja od občutljivosti vakuumske fotodiode in dosega odzivnost na anodi do $\mathscr{R} \sim 10^6$ A/W. Fotopomnoževalka tako omogoča štetje posameznih fotonov, po drugi strani pa moramo pri navadnih osvetlitvah paziti, da fotopomnoževalke ne osvetlimo preveč.

Slika 9.8: Shema fotopomnoževalke. Vpadna svetloba iz katode izbije elektrone, ti pa iz dinod izbijajo dodatne elektrone in izhodni signal se močno ojači.

Fotopomnoževalke imajo zelo kratek odzivni čas, ki je odvisen od postavitve dinod. Posamezni elektroni do anode potujejo različno dolgo, zato je sunek na izhodu razširjen, tipično okoli $\sim 0,1$–20 ns. Za manj zahtevne aplikacije pogosto merimo kar povprečni tok z anode. Kadar pa opazujemo posamezne fotone, zaznamo na izhodu zaporedje sunkov. Takrat lahko amplituda izhodnega signala močno niha, saj je koeficient ojačenja odvisen od števila izbitih elektronov, kar pa je statistični proces.

9.5 Fotoprevodni detektorji

Fotoprevodni detektorji[6] so detektorji, ki temeljijo na notranjem fotoefektu. Vpadni foton z dovolj veliko energijo se absorbira, vendar ne izbije elektrona v prostor, ampak ga iz valenčnega pasu dvigne v prevodnega. Pri tem nastane par elektron–vrzel. Ob priključeni napetosti se nosilci naboja začnejo premikati in steče tok, ki ga merimo. Z naraščajočim številom fotonov se prevodnost fotoprevodnika veča, zato lahko z merjenjem upornosti določimo intenziteto vpadne svetlobe. Tipično so fotoprevodniki iz polprevodnikov, lahko pa so tudi iz izolatorjev.

Da foton lahko vzbudi elektron iz valenčnega v prevodni pas, mora biti njegova energija dovolj velika. V čistih (nedopiranih) polprevodnikih to pomeni, da mora biti energija fotona večja od širine reže. Za silicij, na primer, je širina reže $1,1$ eV in največja valovna dolžina, ki jo še lahko zaznavamo, je okoli $1,1$ µm. V germaniju je reža $0,67$ eV (do $1,8$ µm) in v PbS $0,37$ eV (do $3,4$ µm). Za detekcijo daljših valovnih dolžin ne uporabljamo polprevodnikov z manjšo energijsko režo, ampak dopirane polprevodnike (slika 9.9). Z dodatnim energijskim nivojem med valenčnim in prevodnim pasom občutno zmanjšamo potrebno energijo vpadnih fotonov. Vendar je pri nizkih energijah prispevek termično vzbujenih elektronov že tako velik, da je treba detektorje hladiti, navadno s tekočim dušikom ali celo tekočim helijem. Primer fotoprevodnih detektorjev je germanij, dopiran s cinkom, s katerim lahko zaznavamo svetlobo do okoli 40 µm. Pri tem ga hladimo na 4 K, da zmanjšamo pojav termično vzbujenih nosilcev naboja.

[6] Fotoprevodne detektorje včasih imenujemo tudi fotouporniki.

Slika 9.9: Shema prehoda elektrona v fotoprevodniku: prehod v čistem polprevodniku (a), n-dopiranem polprevodniku (b) in p-dopiranem polprevodniku (c). Z dopiranjem povečamo območje delovanja detektorja v infrardečem delu spektra.

Izračunajmo električni tok, ki steče skozi fotoprevodnik, ko nanj posvetimo. Gostota električnega toka j je enaka vsoti prispevkov elektronov in vrzeli

$$j = e_0 n_v v_v + e_0 n_e v_e, \tag{9.17}$$

pri čemer n_v in n_e pomenita gostoto vrzeli in elektronov v snovi, v_v in v_e pa njihove hitrosti. Hitrost premikanja je sorazmerna z električno poljsko jakostjo E, ki je priključena na vzorec, sorazmernostni faktor pa je gibljivost β. Ko posvetimo na vzorec, se n_v in n_e povečata za Δn_v in Δn_e, gostota električnega toka pa naraste za

$$\Delta j = e_0 \Delta n_v v_v + e_0 \Delta n_e v_e. \tag{9.18}$$

V stacionarnem stanju se število nosilcev naboja ne spreminja in velja (enačba 9.15)

$$0 = \frac{dn_v}{dt} = \frac{\eta_v P}{h\nu(Sl)} - \frac{\Delta n_v}{\tau_v} \tag{9.19}$$

in podobno za elektrone. Pri tem je η kvantni izkoristek, P moč vpadne svetlobe, Sl prostornina detektorja in τ življenjski čas vrzeli oziroma elektrona. Ko stacionarno vrednost Δn_v in Δn_e vstavimo v enačbo (9.18), dobimo

$$\Delta j = e_0 \frac{\eta_v P \tau_v}{h\nu(Sl)} \beta_v E + e_0 \frac{\eta_e P \tau_e}{h\nu(Sl)} \beta_e E. \tag{9.20}$$

Če vpeljemo še napetost $U = E/l$, zapišemo celotni tok skozi fotoprevodnik zaradi vpadle svetlobe kot

$$\Delta I = S\Delta j = \frac{e_0 U P}{h\nu l^2} \left(\eta_v \tau_v \beta_v + \eta_e \tau_e \beta_e\right). \tag{9.21}$$

Pogosto je gibljivost elektronov znatno večja od gibljivosti vrzeli (npr. $0,135\ \mathrm{m^2/V\,s}$ proti $0,048\ \mathrm{m^2/V\,s}$ za silicij), zato prvi člen v oklepaju zanemarimo in zapišemo

$$\boxed{\Delta I = G\left(\frac{e_0 \eta_e}{h\nu}\right) P,} \tag{9.22}$$

pri čemer je koeficient ojačenja

$$G = \frac{\beta_e \tau_e U}{l^2} = \frac{\tau_e}{\tau}. \tag{9.23}$$

Vpeljali smo še čas preleta $\tau = l/v_e = l/\beta_e E = l^2/\beta_e U$.

Koeficient G opiše ojačenje signala. Njegova vrednost je odvisna od vrste snovi in gibljivosti nosilcev naboja v njej, velikosti detektorja in tudi priključene napetosti, zato lahko G zavzame vrednosti od manj kot ena pa vse do 10^6.

Fotoprevodniki so uporabni na širokem spektralnem območju, od ultravijoličnega do daljnega infrardečega valovanja. V vidnem in bližnjem infrardečem delu svetlobe se uporablja pretežno silicijeve fotoprevodnike, germanijeve pa za valovne dolžine do $1,8$ µm. Za zaznavanje valovnih dolžin med okoli 2 µm in 7 µm so najprimernejši InAs, InSb in PbS detektorji, pri še daljših valovnih dolžinah pa se uporablja germanij, dopiran z zlatom, bakrom, cinkom, borom ... Kvantni izkoristek takih detektorjev je razmeroma velik ($\eta = 0,5$ za Ge:Cu), vendar je lahko faktor ojačenja $G \ll 1$ (npr. $G = 0,03$ za Ge:Hg).

Hitrost odziva fotoprevodnika je odvisna od časa preleta nosilcev naboja τ, ki je določen z geometrijo detektorja in priključene napetosti, in od karakterističnega časa elektronskega vezja. Tipični odzivni časi so okoli mikrosekunde, vendar lahko sežejo tudi do desetin milisekund, ali v izjemnih primerih do nanosekund za zelo majhne detektorje. S skrajšanjem rekombinacijskega časa lahko sicer skrajšamo odzivni čas detektorja, vendar hkrati zmanjšamo tudi njegovo občutljivost.

★ Fotoprevodni detektorji so narejeni iz zelo tankih plasti fotoprevodnika, saj fotoprevodnik močno absorbira svetlobo. Tako za absorpcijo 70–90% vpadne svetlobe zadošča le 1–2 µm debela plast. Elektrode se pogosto prepletajo, da se zmanjša dolžina preleta l in s tem poveča ojačenje signala G.

9.6 Polprevodniške fotodiode

Drugi primer detektorjev, ki temeljijo na notranjem fotoefektu, so polprevodniške fotodiode. Te so danes najpogostejša in najbolj razširjena vrsta detektorjev svetlobe, uporabljamo jih med drugim tudi v fotoaparatih in sončnih celicah. Fotodiode so sestavljene iz p- in n-dopiranega polprevodnika (p-n fotodiode) ali pa je med njima še plast nedopiranega (intrinzičnega) polprevodnika (p-i-n fotodioda). Ko svetloba vpada na spoj različno dopiranih polprevodnikov, se fotoni absorbirajo in nastajajo pari elektron–vrzel. Nosilci naboja potujejo v različnih smereh, elektroni stečejo v eno smer, vrzeli pa v nasprotno. Odvisno od načina delovanja merimo tok, ki steče skozi spoj, ali napetost, ki se pojavi na spoju.

Spektralni odziv fotodiod je odvisen od energijske reže polprevodnika, iz katerega je fotodioda narejena. Silicijeve fotodiode so tako uporabne za zaznavanje valovnih dolžin do največ okoli $1,1$ µm, za večje valovne dolžine (do $1,6$ µm) uporabljamo InGaAs. Izkoristek fotodiod je navadno zelo velik in presega 50 %, pri energiji fotonov blizu energijske reže je vrednost izkoristka kar blizu 1. Za razliko od fotoprevodnikov fotodiode signala ne ojačujejo, imajo pa praviloma hitrejši odziv, tipično okoli nanosekunde.

Fotodioda lahko deluje v različnih načinih (slika 9.10). Lahko jo priključimo v prevodni smeri, najpogosteje jo priključimo v zaporni smeri, saj je v tem primeru tok skozi diodo linearno sorazmeren z intenziteto vpadne svetlobe, lahko je dioda kratko sklenjena, lahko pa je dioda v odprtem električnem krogu, v t.i. fotovoltaičnem načinu. V nadaljevanju bomo vse primere podrobneje spoznali.

Slika 9.10: Različne vezave fotodiode: v prevodni smeri (a), v zaporni smeri (b), kratko sklenjena (c) in v fotovoltaičnem načinu (d)

Spoj *p-n*

Obnovimo, kaj se zgodi ob spoju p- in n- tipa polprevodnika. Pri tem tip p označuje polprevodnik, dopiran s trivalentnimi akceptorskimi primesmi, ki v snovi ustvarijo vrzeli. Energijski nivo primesi je malo nad vrhom valenčnega pasu, zato je Fermijeva energija polprevodnika premaknjena navzdol proti valenčnemu pasu (slika 9.11 a). Po drugi strani tip n označuje polprevodnike s petvalentnimi donorskimi primesmi, ki v snov prinesejo dodatne elektrone. Njihov energijski nivo je malo pod prevodnim pasom, zaradi česar je Fermijeva energija pomaknjena navzgor proti prevodnemu pasu (slika 9.11 b).

Ko staknemo polprevodnik tipa p s polprevodnikom tipa n, elektroni z območja z višjo koncentracijo (tip n) difundirajo v območje z nižjo koncentracijo (tip p), kjer se rekombinirajo z vrzelmi. Ob spoju tako nastane ozek pas, imenujemo ga izpraznjeni sloj, kjer ni več prostih nosilcev naboja. Tipično je širok 10 nm–1 µm. Po rekombinaciji ostanejo na strani n pozitivno nabiti donorski atomi, na strani p pa negativno nabiti akceptorski atomi, ki povzročijo nastanek električnega polja. Nastalo polje, ki kaže od n proti p, zaustavi rekombinacijo, saj odbija elektrone in vrzeli od spoja in v ravnovesju se Fermijeva energija izenači. Potencialni skok je približno enak $\Delta E \approx E_d - E_a$, kar je le malo manj od širine reže E_g (slika 9.11 c). Tipična jakost električnega polja na spoju je 10^5–10^7 V/m.

Slika 9.11: Shema energijskih nivojev v p- (a) in n-tipu (b) polprevodnika ter na spoju p-n (c), v katerem se Fermijevi energiji izenačita. Med obema polprevodnikoma nastane izpraznjeni sloj, kar povzroči pojav električnega polja.

Priključimo na tako diodo napetost U, tako da je pozitivna na p strani diode. Takrat pravimo, da smo na diodo priključili napetost v prevodni smeri. Ker lahko energijske pasove razumemo kot potencialno energijo elektronov, s priključeno pozitivno napetostjo zmanjšamo razliko potencialnih energij in elektroni lažje prehajajo iz dela n v del p . Zaradi zmanjšanja potencialne razlike med stranjo p in n za e_0U pride do povečanja toka večinskih elektronov iz n v p za faktor $\exp(e_0U/kT)$, tok manjšinskih elektronov iz p v n pa ostaja enak, saj ni odvisen od globine potencialnega skoka (slika 9.12 a).

Slika 9.12: Shema energijskih nivojev na spoju *p*-*n*, ko na spoj priključimo napetost v prevodni smeri (a) in v zaporni smeri (b). Če v izpraznjenem sloju pride do absorpcije fotona in nastanka para elektron–vrzel, elektron "zdrsi" proti strani *n*, vrzel pa proti strani *p*.

Povsem enak razmislek lahko naredimo, če priključimo na stran *n* pozitivni pol, na stran *p* pa negativnega, če torej priključimo napetost v zaporni smeri. V tem primeru potencialna razlika naraste in tok večinskih elektronov se zmanjša za faktor $\exp(-e_0|U|/kT)$, tok manjšinskih elektronov pa ostane nespremenjen (slika 9.12 b).

Celotni tok skozi spoj *p*-*n* je sestavljen iz prispevkov elektronov in vrzeli. Opiše ga karakteristična enačba diode (slika 9.13)

$$I = I_0(e^{e_0U/kT} - 1). \tag{9.24}$$

Pri tem I_0 označuje tok manjšinskih nosilcev naboja[7] in je navadno zelo majhen. Njegova vrednost je odvisna od snovi, površine detektorja, poleg tega pa je eksponentno odvisna od temperature. Znaša tipično okoli 10^{-15}–10^{-5} A, pri čemer najmanjše vrednosti dosežemo le ob močnem hlajenju.

Slika 9.13: Karakteristika $I(U)$ neosvetljene fotodiode (modra črta) in osvetljene fotodiode (rdeče črte). Naraščajoča intenziteta vpadne svetlobe krivuljo premika navzdol. S simboli so označene točke delovanja za različne načine.

[7] Pravimo mu tudi zaporni tok, tok nasičenja ali temni tok. Slednje ime izhaja iz tega, da ta tok teče skozi fotodiodo tudi v odsotnosti vpadne svetlobe.

Delovanje fotodiode

Ko na polprevodnik vpade foton, ki ima energijo večjo od širine reže, lahko vzbudi elektron iz valenčnega v prevodni pas in nastane par elektron–vrzel. Če se to zgodi v izpraznjenem sloju spoja *p-n*, steče elektron pod vplivom električnega polja na stran *n*, vrzel pa na stran *p* (slika 9.12 c). Premik nosilcev naboja, do katerega pride zaradi absorpcije fotona, torej vedno povzroči pojav električnega toka v zaporni smeri. Njegova velikost je odvisna od moči vpadne svetlobe in jo zapišemo kot (enačba 9.15)

$$I_f = e_0 \frac{\eta P}{h\nu}, \tag{9.25}$$

pri čemer je η kvantni izkoristek, P označuje moč vpadne svetlobe, ν pa njeno frekvenco. Celoten tok skozi fotodiodo je vsota diodnega toka in toka zaradi vpadne svetlobe, zato karakteristiko fotodiode zapišemo kot

$$I = I_0(e^{e_0 U/kT} - 1) - I_f. \tag{9.26}$$

Vpadna svetloba povzroči zmanjšanje električnega toka skozi diodo, kar na sliki (9.13) predstavlja premik karakteristične krivulje diode v vertikalni smeri navzdol (rdeče črte). Naraščajoča intenziteta svetlobe premika krivuljo proti bolj negativnim vrednostim tokov.

Prvi način delovanja fotodiode, ki ga bomo obravnavali, je fotovoltaični način. To je način, pri katerem električni tokokrog ni sklenjen (slika 9.10 d), zato ob absorpciji fotona in nastanku para elektron–vrzel tok ne more steči. Še vedno pa se izbiti elektron pod vplivom električnega polja na spoju premakne proti območju *n*, vrzel pa proti območju *p*. Na diodi se tako pojavi napetost, katere vrednost lahko izračunamo iz karakteristične enačbe diode, če upoštevamo, da je $I = 0$. Sledi

$$U_p = \frac{kT}{e_0} \ln\left(1 + \frac{I_f}{I_0}\right). \tag{9.27}$$

Pri večji intenziteti vpadne svetlobe, ko se karakteristična krivulja pomika navzdol (slika 9.13), se rešitev gornje enačbe po abscisi premika proti desni. Večja intenziteta vpadne svetlobe tako pomeni večjo pozitivno napetost na diodi, zato tudi odzivnost v tem primeru merimo v V/W. Pri dovolj velikih vpadnih močeh je zveza med vpadno močjo in fotonapetostjo logaritemska. Fotovoltaična oziroma odprta vezava fotodiode omogoča zaznavanje vpadne moči v zelo širokem intervalu.

Drugi način delovanja je kratko sklenjena fotodioda (slika 9.10 c). V tem primeru je napetost na diodi vedno enaka nič, prav tako je enak nič tok skozi diodo v odsotnosti svetlobe. Ko posvetimo na diodo, nastanejo pari elektron–vrzel in steče električni tok. Tok skozi tokokrog je v primeru kratko sklenjene diode kar enak toku zaradi vpadne svetlobe I_f (slika 9.13).

Najbolj splošno uporaben način za detekcijo svetlobe je način, v katerem napetost na diodo priključimo v zaporni smeri (slika 9.10 b). Takrat se tok skozi diodo spreminja linearno z močjo vpadne svetlobe (enačba 9.26), odziv pa je hitrejši kot pri kratko sklenjeni diodi. Če dodamo v tokokrog zaporedno vezan še nek upornik, se odziv spremeni. Zvezo med napetostjo in tokom zapišemo kar z Ohmovim zakonom $U = -|U_0| - RI$. Na sliki to predstavlja premico, ki seka karakteristične krivulje. Ker upornost upornika ni enaka nič, se po grafu (slika 9.13) ne premikamo več navpično navzdol, ampak pod kotom proti desni. Način, ko v tokokrog s fotodiodo vežemo še Ohmski upor, se uporablja tudi v sončnih celicah.

Naloga 9.6.1 V sončnih celicah želimo iz vpadne svetlobne moči pridobiti kar največ električne moči. Pokaži, da električna moč na uporniku, preko katerega sklenemo fotodiodo, pri nekem R zavzame največjo vrednost. Poišči R za primer $I_0 = 10^{-9}$ A, $I_f = 10^{-3}$ A in $T = 300$ K.

Prednosti merjenja ob napetosti v zaporni smeri je več. Zaradi priključene napetosti se zmanjša čas preleta nosilcev naboja in posledično se zmanjša odzivni čas detektorja. Dodatno se poveča širina izpraznjenega pasu (naloga 9.6.2), kar zmanjša kapaciteto spoja (spoj *p-n* namreč deluje kot kondenzator in časovni odziv je odvisen od njegove kapacitete) in s tem odzivni čas. Povečana izpraznjena plast vodi tudi do večjega območja, v katerem lahko pride do absorpcije fotonov.

Naloga 9.6.2 Pokaži, da je debelina izpraznjene plasti je enaka $d = d_p + d_n$, kjer sta

$$d_{p,n} = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0(\Delta E_0 - e_0 U)}{e_0}\frac{(N_d/N_a)^{\pm 1}}{N_a + N_d}}. \tag{9.28}$$

Pri tem N_a in N_d označujeta gostoti akceptorskih in donorskih atomov, ΔE_0 je ravnovesni potencialni skok med stranjo n in p, U pa priključena napetost.
Namig: zapiši Gaussov zakon in upoštevaj zvezo $d_n N_d = d_p N_a$.

Povejmo še nekaj o zgradbi fotodiode. Shema preproste fotodiode je prikazana na sliki (9.14 a). Na dnu je elektroda, sledi plast n, nad njo je tanka plast p, na katero vpada svetloba. Bistveno je, da je osvetljena plast tanka, da svetloba lahko prodre v bližino spoja. Zato so debeline zgornje plasti tipično submikronske. Na fotodiode pogosto nanesemo še dodatno antirefleksijsko plast (SiO_2). Fotoobčutljivi del komercialnih fotodiod meri tipično od nekaj 100 μm^2 pa do več 100 mm^2. Pri tem imajo večje diode seveda počasnejši odziv.

Slika 9.14: Sheme fotodiod: *p-n* fotodioda (a), *p-i-n* fotodioda (b), ki se od navadne *p-n* razlikuje po vmesni plasti intrinzičnega polprevodnika, in Schottkyjeva fotodioda (c). Temno siva barva označuje elektrode, svetlo modra območje n, temnejša modra območje p, svetlo siva pa območje intrinzičnega polprevodnika.

★ Poleg do zdaj obravnavanih fotodiod poznamo tudi heterostrukturne fotodiode, kjer sta p in n del narejena iz druge snovi. Poseben primer so Schottkyjeve fotodiode[8], kjer eno plast polprevodnika nadomestimo z zelo tanko plastjo kovine (slika 9.14 c). Te so uporabne predvsem pri visokih energijah (v UV območju), saj je v navadnih fotodiodah absorpcija za te valovne dolžine prevelika, na površini pride do rekombinacije in zmanjšanja kvantnega izkoristka. Odziv Schottkyjevih fotodiod je zelo hiter, saj nizka upornost kovine občutno zmanjša RC konstanto spoja. Odzivni časi dosegajo pikosekundne vrednosti.

[8] Nemški fizik Walter Hans Schottky, 1886–1976.

Fotodioda *p-i-n*

Fotodiode *p-i-n* se od navadnih *p-n* razlikujejo po tem, da med *p*- in *n*-plast vključimo še plast nedopiranega polprevodnika (slika 9.14 b). S tem se bistveno poveča debelina izpraznjene plasti, ki postane praktično neodvisna od priključene napetosti. Povečanje izpraznjene plasti omogoča zaznavanje bistveno večjega deleža vpadne svetlobe, poleg tega pa zmanjša kapaciteto spoja in s tem njegovo *RC* konstanto. Slabost dodatnega sloja je povečanje časa preleta čez izpraznjeno plast, vendar lahko z ustrezno optimizacijo konstrukcije dosežemo odzivne čase nekaj deset ps.

Slika 9.15: Kvantni izkoristek nekaterih *p-i-n* (Si in Ge) in Schottkyjevih (Au-Si in Ag-ZnS) fotodiod

9.7 Plazovne fotodiode

Ko smo risali karakteristiko fotodiode (slika 9.13), nismo narisali popolne slike. Pri velikih negativnih napetostih se namreč karakteristika znatno spremeni (slika 9.16), česar ne moremo popisati s preprosto enačbo. Pri zapornih napetostih, ki za nekajkrat presegajo širino energijske reže (tipično 100–500 V), pride do naglega povečanja električnega toka. Ob absorpciji fotona nastanejo mobilni nosilci naboja, ki se v električnem polju tako pospešijo, da s trki ustvarjajo nove pare elektron–vrzel. Novonastali pari ustvarjajo nove pare in pride do "plazu", podobno kot v fotopomnoževalki. En foton sproži cel plaz elektronov, zato pravimo, da je plazovna dioda fotodioda z notranjim ojačenjem. Pri tem je faktor ojačenja tipično 30–300 in plazovne fotodiode lahko uporabimo za detekcijo posameznih fotonov. Slabost je, da je faktor ojačenja odvisen od temperature in je zato za natančne meritve potrebna temperaturna stabilizacija.

Napetost, pri kateri deluje plazovna fotodioda, je priključena v zaporni smeri in je tik pod prebojno napetostjo. Ker že majhna odstopanja v napetosti povzročijo veliko spremembo v toku, moramo napetost držati kar se da stabilno. Le to omogoča linearen odziv fotodiode od moči vpadne svetlobe. Plazovne fotodiode so praviloma zelo hitre ($\sim$ 50 ps) in zelo občutljive. Z ojačenjem signala se ojači tudi šum, a je povečanje pogosto manjše kot bi bil prispevek k šumu na zunanjih elektronskih ojačevalcih.

Slika 9.16: Karakteristika plazovne fotodiode

9.8 CCD in CMOS detektorji

Do zdaj smo obravnavali detektorje, ki zaznavajo pretok vpadnih fotonov in spreminjanje pretoka v času. Dodatno informacijo dobimo, če več fotodetektorjev sestavimo v dvodimenzionalno matriko, saj lahko detektorji hkrati zaznavajo količino vpadne svetlobe iz različnih delov prostora. Podatke iz posameznih detektorjev sestavimo v sliko, pri čemer en detektor podaja informacijo o številu vpadnih fotonov v dani časovni enoti za en slikovni element – piksel . Času zajemanja, ki predstavlja integracijski čas, pravimo tudi čas osvetlitve. Slikovni detektorji z veliko ločljivostjo so sestavljeni iz več milijonov ali celo milijard posameznih polprevodniških detektorjev in so nepogrešljivi v fotoaparatih, kamerah, mikroskopiji in astronomiji.

Podrobneje bomo obravnavali dve vrsti matričnih detektorjev, to sta CCD (*Charge-Coupled-Device*)[9] in CMOS (*Complementary Metal-Oxide-Semiconductor*)[10]. Omenjeni vrsti detektorjev sta si po načinu zaznavanja svetlobe zelo podobni, razlika je predvsem v postopku, kako iz posameznega detektorja pridobimo podatek o številu vpadnih fotonov oziroma številu vzbujenih elektronov.

★ Slikovni detektorji so seveda lahko sestavljeni tudi iz drugih vrst svetlobnih detektorjev, ki smo jih obravnavali v prejšnjih razdelkih. Lahko so iz mikrobolometrov ali fotoprevodnikov (za IR svetlobo), Schottkyjevih fotodiod (npr. PtSi, ki seže od UV do okoli 6 µm) ali plazovnih fotodiod.

CCD

Detektorji CCD so sestavljeni iz posameznih tako imenovanih MOS (*Metal-Oxide-Semiconductor* – kovina-oksid-polprevodnik) kondenzatorjev. Njihova osnova je dopiran silicij, vmesna plast med polprevodnikom in prevodno elektrodo pa je navadno zelo tanka plast (pod 100 nm) SiO_2 (slika 9.17). Prevodna elektroda je bila prvotno iz kovine (npr. aluminija) in je elementu detektorja dala tudi ime. Danes je kovino večinoma nadomestil polikristalni silicij (polisilicij), ime pa je ostalo. Tipična dolžina stranice posameznega elementa znaša okoli 5–40 µm.

Foton skozi tanko prozorno elektrodo vpade na polprevodnik, v katerem ustvari par elektron–vrzel. Pozitivna napetost na elektrodi elektrone privlači, vendar jih vmesna plast izolatorja tik pod površino ustavi in elektroni tako ostanejo ujeti v potencialni jami pod elektrodo. Število ujetih elektronov je sorazmerno številu vpadlih fotonov v času zajemanja slike, pomnoženih s kvantnim izkoristkom pri dani valovni dolžini.

[9] Za izum CCD detektorjev sta Willard S. Boyle in George E. Smith leta 2009 prejela Nobelovo nagrado.

[10] Teh dveh oznak za detektorje praviloma ne prevajamo. Opisujeta strukturo in delovanje naprave in nista vezani zgolj na detekcijo svetlobe.

Slika 9.17: Shema MOS strukture (a), na kateri temeljijo CCD in CMOS slikovni detektorji. Osnova je polprevodnik (p), na katerem je plast dielektrika (SiO_2), na njej pa elektroda (siva). Ob absorpciji svetlobe se pojavijo fotoelektroni, te pa pozitivna napetost na elektrodi drži ujete v potencialno jamo (vijolična). Prenos elektronov v detektorju CCD (b).

S spreminjanjem napetosti na posameznih elektrodah lahko naboj, ki se lokalno nabere v plasti pod izolatorjem v danem času, postopoma prenesemo od posameznega piksla do izhodne stopnje. Najprej poteka prenos iz enega elementa na drugega znotraj vrstic, nato pa še po celotnem zadnjem stolpcu (slika 9.18 a). Na koncu signal sproti ojačujemo, pretvorimo v napetost, to pa v digitalni zapis. Številu elektronov iz posameznega slikovnega elementa določimo digitalno vrednost glede na barvno globino: 8-bitni zapis slike, na primer, vsakemu elementu priredi vrednost od 0 do 255, 16-bitni pa od 0 do 65535.

Delovanje detektorjev CCD temelji na zaporednem odčitavanju števila fotoelektronov v posameznem slikovnem elementu. Ta način je razmeroma počasen in omejuje hitrost zajemanja slike. Med prenašanjem nabojev do izhoda namreč slike ne moremo zajemati, saj bi prišlo do popačenja signala. Pomanjkljivost se večinoma rešuje tako, da le del celotnega zaslona zajema svetlobo, drugi del pa je namenjen pretakanju elektronov in omogoča nemoteno praktično neprestano zajemanje slike. Ker se s tem količina zajete svetlobe zmanjša, se na vsak element doda lečo, ki svetlobo zbere na detektor. S tem postanejo slikovni detektorji CCD hitrejši in bolj občutljivi. Poleg tega jih odlikuje tudi razmeroma nizek šum, ki se ga da s hlajenjem še dodatno zmanjšati.

Slika 9.18: Shema zajemanja slike s slikovnima detektorjema CCD (a) in CMOS (b). Puščice označujejo premikanje fotoelektronov.

★ Pri zajemanju slike ne potrebujemo vedno največje ločljivosti, ki jo omogoča detektor. Zato se pogosto poslužujemo združevanja sosednjih elementov, t. i. bininga (*binning*), na primer 2×2 ali 4×4. Z združevanjem pikslov sicer zmanjšamo ločljivost slike, vendar hkrati skrajšamo čas njenega zajemanja in zmanjšamo razmerje signal proti šumu.

CMOS

Osnovni element detektorjev CMOS je enak kot za detektorje CCD (slika 9.17 a). Bistvena razlika je v načinu zajemanja fotoelektronov. Pri detektorjih CCD je branje fotoelektronov zaporedno, pri detektorjih CMOS pa poteka branje vseh slikovnih elementov hkrati, pri čemer ima vsak piksel tudi svoj ojačevalnik (slika 9.18 b). Zaradi sprotnega odčitavanja vseh pikslov naenkrat so detektorji CMOS bistveno hitrejši od CCD. Odlikuje jih tudi nizka poraba energije in nizka cena. Njihova poglavitna slabost je večji šum in manjša občutljivost, saj del zaslona, kjer so ojačevalniki, slike ne more zajemati.

Barvno zajemanje slik

Detektorji zaznavajo število vpadnih fotonov oziroma število fotoelektronov. Za nastanek barvne slike moramo vpadne fotone ločiti še po valovni dolžini, kar naredimo z barvnimi filtri. Namesto enega elementa, ki bi podal informacijo o intenziteti vpadne svetlobe, uporabimo štiri senzorje v kvadratni mreži: enega za zaznavanje rdeče svetlobe, enega za modro in dva za zeleno svetlobo. Večji delež zelenih elementov je zaradi večje občutljivosti človeškega očesa na zeleno barvo. Intenziteto svetlobe na posameznem slikovnem elementu dane barve nato odčitamo, kot je opisano zgoraj.

9.9 Šum pri optični detekciji

Pri vsakršni detekciji svetlobe je vedno prisoten tudi šum. Beseda šum označuje naključne fluktuacije na izhodu iz detektorja, ki jih ne moremo ločiti od signala. Z različnimi pristopi lahko šum zmanjšamo, povsem pa ga ne moremo nikoli odpraviti. Obravnava šuma je zato najbolj pomembna pri zaznavanju šibkih signalov svetlobe. Ključen parameter je najmanjša moč vpadne svetlobe, ki jo še lahko ločimo od šuma, pod to vrednostjo pa se signal v šumu izgubi (slika 9.19).

Slika 9.19: Če je signal velik v primerjavi s šumom, ga na detektorju lahko zaznamo (zgoraj). Pod določeno vrednostjo postane velikost signala primerljiva s šumom in signala ne zaznamo več (spodaj).

Na podlagi fizikalnega izvora ločimo več vrst šuma:

1. šum štetja, do katerega pride zaradi diskretne (kvantne) narave fotonov,
2. termični šum, do katerega pride zaradi termičnih fluktuacij,
3. šum temnega toka, ki predstavlja spontani nastanek para elektron–vrzel oziroma spontano emisijo elektronov in
4. šum sevanja ozadja.

Šum štetja

Naj na detektor vpada svetloba s konstantno vpadno močjo P. Ker je svetloba sestavljena iz diskretnih fotonov, fotoni na detektor vpadajo posamezno in enkrat jih vpade malo več, drugič malo manj. Vpadna moč je zato dejansko povprečna moč $\overline{P}$ in število vpadnih fotonov na časovno enoto Φ je povprečna vrednost števila vpadnih fotonov na časovno enoto

$$\overline{\Phi} = \frac{\overline{P}}{h\nu}. \tag{9.29}$$

Pri vpadu fotonov gre za diskretne in neodvisne procese, zato za njihov vpad skoraj vedno velja Poissonova porazdelitev (slika 9.20). Verjetnost, da v času τ, ki predstavlja čas merjenja, na detektor vpade n fotonov, je tako

$$p(n) = \frac{\overline{n}^n e^{-\overline{n}}}{n!}, \tag{9.30}$$

pri čemer je povprečno število vpadnih fotonov v tem časovnem intervalu enako $\overline{n} = \overline{\Phi}\tau$.

Slika 9.20: Poissonova porazdelitev verjetnosti za $\overline{n} = 2$ (modra), $\overline{n} = 5$ (rdeča) in $\overline{n} = 10$ (zelena). Porazdelitev je diskretna, črta je zgolj vodilo.

Fluktuacije števila fotonov, ki vpadejo na detektor v danem časovnem intervalu, označimo z $\Delta n = n - \overline{n}$. V povprečju je ta vrednost seveda enaka nič, zato sta bolj merodajni količini varianca, ki je enaka (glej nalogo 9.9.1)

$$\sigma^2 = \overline{(\Delta n)^2} = \overline{(n-\overline{n})^2} = \overline{n}, \tag{9.31}$$

in standardni odklon

$$\sigma = \sqrt{\overline{(\Delta n)^2}} = \sqrt{\overline{n}}. \tag{9.32}$$

Standardni odklon, ki je merilo za velikost šuma, torej narašča korensko z naraščajočim povprečnim številom vpadnih fotonov $\overline{n}$.

Naloga 9.9.1 Pokaži, da je povprečje Poissonove porazdelitve (enačba 9.30) vedno pri $n = \overline{n}$ in standardni odklon $\sigma = \sqrt{\overline{n}}$.

Vendar nas absolutni šum večinoma ne zanima, saj je pri detekciji ključno razmerje med signalom in šumom. Označimo ga s *SNR* (*Signal to Noise Ratio* – razmerje signal proti šumu)[11]. V primeru Poissonove porazdelitve in šuma štetja velja

$$SNR = \frac{\overline{n}}{\sigma} = \sqrt{\overline{n}}. \tag{9.33}$$

Vidimo, da razmerje signal proti šumu z naraščajočim številom vpadlih fotonov narašča, relativni šum pa ob večji vpadni moči svetlobe pojema. Za primer poglejmo dva primera. V prvem je povprečno število vpadlih fotonov v danem časovnem intervalu 10^6, v drugem pa 100. Pri vpadu močnejšega signala na detektorju zaznavamo $10^6 \pm 1000$ fotonov, pri vpadu šibkejšega pa 100 ± 10. Čeprav je absolutni šum v prvem primeru stokrat večji, je relativni šum stokrat manjši. Za zmanjšanje šuma štetja mora biti torej signal kar se da velik.

★ Razmerje signal proti šumu *SNR* lahko vpeljemo na več načinov. Prvi je ta, ki smo ga uporabili mi, pri katerem velja $SNR = \overline{n}/\sigma = \overline{n}$. V tem primeru gre za *SNR* optične moči oziroma števila fotonov in nastalega električnega toka. Lahko pa vpeljemo tudi SNR_e električne moči na detektorju. Zaradi kvadratne zveze med električnim tokom in električno močjo velja $SNR_e = SNR^2 = \overline{n}$.

Pri šumu štetja gre za osnovno značilnost svetlobe, zato je ta vrsta šuma prisotna pri prav vseh načinih detekcije. Podrobneje si oglejmo, kako se šum štetja izraža pri detekciji s fotodiodami.

Naj svetloba s povprečno močjo $\overline{P}$ vpada na fotodiodo. Povprečno število fotoelektronov $\overline{N}$, ki se pojavijo v časovnem intervalu τ, je kar enako številu vpadnih fotonov, pomnoženim s kvantnim izkoristkom.

$$\overline{N} = \overline{n}\eta = \frac{\overline{P}\tau}{h\nu}\eta. \tag{9.34}$$

Povprečni električni tok, ki steče skozi detektor, je

$$\overline{I} = \frac{\overline{N}e_0}{\tau}, \tag{9.35}$$

varianca izhodnega električnega toka pa je

$$\overline{(\Delta I)^2} = \overline{(I-\overline{I})^2} = \overline{(N-\overline{N})^2}\,\frac{e_0^2}{\tau^2} = \overline{N}\,\frac{e_0^2}{\tau^2} = \overline{I}\,\frac{e_0}{\tau}, \tag{9.36}$$

pri čemer smo upoštevali enačbo (9.31). Vpeljemo še pasovno širino detekcije[12], ki je po dogovoru $\Delta\nu_B = 1/(2\tau)$, in zapišemo

$$\overline{(\Delta I)^2} = 2\overline{I}\,e_0\,\Delta\nu_B. \tag{9.37}$$

Šum na izhodu je tako sorazmeren s povprečno intenziteto signala in s pasovno širino detekcije oziroma obratno sorazmeren z dolžino merjenja. Zapišemo še razmerje signal proti šumu

$$SNR = \frac{\overline{I}}{\sqrt{\overline{(\Delta I)^2}}} = \sqrt{\frac{\overline{I}}{2e_0\,\Delta\nu_B}}. \tag{9.38}$$

Po pričakovanjih je to razmerje večje pri večjem povprečnem signalu in pri daljši meritvi.

[11] Pogosto se uporablja tudi oznako S/N. Tukaj smo jo zaradi jasnosti zamenjali, saj N označuje število elektronov.
[12] Pri detekciji signala navadno uporabljamo čas osvetlitve τ, pri telekomunikacijah pa pasovno širino $\Delta\nu_B$.

Termični šum

Termični šum imenujemo tudi Johnsonov[13] ali Nyquistov[14] ali Johnson-Nyquistov[15] šum. Do njega pride zaradi termično vzbujenega naključnega gibanja elektronov. Premiki elektronov na danem uporniku povzročijo majhne kratkotrajne fluktuacije v napetosti. V povprečju napetost sicer ostaja enaka nič, njena varianca pa je od nič različna. Termični šum nastaja samo v uporniških elementih sistema, saj le ti lahko sprejemajo in oddajajo energijo, v kapacitivnih in induktivnih elementih pa ne.

Načinov izpeljave termičnega šuma na uporniku je več. Mi ga obravnavajmo na preprostem vezju, v katerem sta povezana upornik z upornostjo R in kondenzator s kapaciteto C. Izvorov napetosti ni, zaradi naključnega gibanja elektronov pa se pojavljajo fluktuacije v napetosti ΔU, ki predstavljajo prostostno stopnjo v sistemu. Iz termodinamike vemo, da je povprečna energija sistema, ki je v ravnovesju, $kT/2$ na vsako prostostno stopnjo. Povprečna energija na kondenzatorju je pri napetosti ΔU tako enaka

$$\overline{W} = \frac{C\overline{(\Delta U)^2}}{2} = \frac{kT}{2}. \tag{9.39}$$

Ko se na kondenzatorju pojavi napetost, steče skozi upornik električni tok. Tudi tukaj lahko zapišemo energijo

$$\overline{W} = \overline{P}\tau = \frac{kT}{2}, \tag{9.40}$$

pri čemer je t odzivni čas vezja in je enak $\tau = RC$. Največja povprečna moč, ki jo lahko dobimo iz takega vezja, je enaka

$$\overline{P} = \frac{R\overline{(\Delta I)^2}}{2}, \tag{9.41}$$

pri čemer ΔI označuje fluktuacije električnega toka skozi upornik. Iz zgornjih enačb sledi

$$\overline{(\Delta I)^2} = \frac{kT}{R^2C}. \tag{9.42}$$

Vpeljemo še pasovno širino detekcije, ki pa je v primeru eksponentnega odziva vezja enaka $\Delta\nu_B = 1/4\tau = 1/4RC$. Iz tega sledi zveza

$$\boxed{\overline{(\Delta I)^2} = \frac{4kT\Delta\nu_B}{R}.} \tag{9.43}$$

Podobno lahko zapišemo še za fluktuacije napetosti

$$\boxed{\overline{\Delta U^2} = 4kTR\Delta\nu_B.} \tag{9.44}$$

Termični šum je odvisen od temperature in od upornosti detektorja oziroma vezja, preko katerega zaznavamo signal. En način za zmanjšanje termičnega šuma je povečanje upornosti detektorja, vendar na ta način zmanjšamo njegovo hitrost odziva. Tipične upornosti, ki se uporabljajo pri hitrih detektorjih, so tako $R \sim 50\ \Omega$. Drugi način za zmanjševanje termičnega šuma je hlajenje. Na ta način lahko termični šum zelo zmanjšamo, nikoli pa ga ne moremo povsem odpraviti.

[13] Švedsko-ameriški elektroinženir in fizik John Bertrand Johnson, 1887–1970.
[14] Švedsko-ameriški elektroinženir Harry Nyquist, 1889–1976.
[15] Johnson je bil prvi, ki je pojav opazoval, Nyquist pa je kmalu za eksperimentom podal teoretično razlago.

Šum temnega toka

Natančna opazovanja pokažejo, da na večini kvantnih detektorjev zaznamo nek majhen izhodni signal tudi v odsotnosti vpadne svetlobe. To je tako imenovani temni tok, do katerega pride zaradi spontanega nastanka para elektron–vrzel ali spontane emisije elektronov (glej enačbo 9.24). Izraza za temni tok tukaj ne bomo izpeljevali[16], povejmo le, da je sorazmeren s površino diode S in eksponentno odvisen od temperature T in energijske reže polprevodnika E_g

$$I_0 = j_0 S e^{-E_g/kT}. \tag{9.45}$$

Zaradi diskretne narave elektronov se – podobno kot v primeru diskretnih vpadnih fotonov – tudi tukaj pojavi šum štetja, le da namesto povprečne vrednosti signala zaradi vpadne svetlobe nastopa temni tok. Enačbo (9.37) zato zapišemo kot

$$\overline{(\Delta I)^2} = 2 I_0 e_0 \Delta\nu_B. \tag{9.46}$$

Manjši šum je pri detektorjih, ki imajo manjši temni tok, na primer pri siliciju. Germanij ima na splošno večji temni tok in zato tudi več šuma temnega toka. Pomembno vlogo ima tudi temperatura, saj v temnem toku nastopa v eksponentu. S hlajenjem lahko šum temnega toka znatno zmanjšamo.

Šum zaradi sevanja ozadja

Kot že ime pove, pride do te vrste šuma zaradi sevanja ozadja pri končni temperaturi. Okolico obravnavamo kot črna telesa in spekter njihovega sevanja opisuje Planckov zakon (enačba 5.20 in slika 5.1). Z naraščajočo temperaturo telesa se spektralni vrh pomika k nižjim valovnim dolžinam in s tem v infrardeč del spektra ali celo v vidno svetlobo. Sevanje ozadja predstavlja zato največji problem pri meritvah v območju valovnih dolžin okoli 10–30 µm, v katerem znatno sevajo še telesa pri sobni temperaturi. Detektorjem za infrardeče valovanje zato pogosto zmanjšamo aperturo na najmanjšo možno, poleg tega jih izoliramo od okolice in hladimo.

Sevanje ozadja je neodvisno od vpadnega signala. Ker detektor ne loči fotonov, ki vpadejo nanj kot signal, in tistih, ki vpadejo nanj iz ozadja, se prispevek ozadja kar prišteje signalu. Šum štetja (enačba 9.37) se tako poveča na

$$\overline{(\Delta I)^2} = \frac{2\eta e_0^2 \Delta\nu_B}{h\nu} \overline{(P + P_o)}, \tag{9.47}$$

pri čemer P_o označuje moč vpadne svetlobe iz ozadja.

★ V detektorjih, v katerih pride do notranjega ojačevanja (npr. fotopomnoževalka ali plazovna fotodioda), se skupaj s signalom ojači tudi šum. Če se signal ojači za faktor G, se za isti faktor povečajo tudi šum štetja, šum ozadja in šum temnega toka. Poleg tega pride do ojačenja šuma zaradi naključnega večanja števila elektronov med pomnoževanjem signala. V tem primeru nastopi še dodaten faktor, večji od ena, ki je odvisen od snovi, strukture in ojačenja fotodetektorja. Tipična vrednost je okoli 1,5–2, lahko pa doseže vrednosti tudi nad 10.

[16] Glej npr. N. W. Ashcroft in N. D. Mermin, *Solid State Physics*.

Seštevanje šumov

Spoznali smo, da je več vrst šuma, ki so pri različnih pogojih različno pomembni. Na splošno lahko vse prispevke združimo v skupni šum, pri čemer seštevamo kvadrate odstopanj

$$\overline{(\Delta I)^2} = \overline{\Delta I^2}_{\text{štetja}} + \overline{\Delta I^2}_{\text{termični}} + \overline{\Delta I^2}_{\text{temni}} + \overline{\Delta I^2}_{\text{ozadja}}. \tag{9.48}$$

Če vstavimo izraze za tokove (enačbe 9.37, 9.43, 9.46 in 9.47), sledi

$$\boxed{\overline{(\Delta I)^2} = \left(2\bar{I}\,e_0 + \frac{4kT}{R} + 2I_0\,e_0 + 2I_o\,e_0\right)\Delta\nu_B.} \tag{9.49}$$

Posamezne prispevke lahko pogosto zanemarimo, odvisno seveda od intenzitete signala, načina detekcije, sevanja ozadja ... Izraz za razmerje signal proti šumu na splošno zapišemo kot

$$SNR = \frac{\bar{I}}{\sqrt{\left(2\bar{I}\,e_0 + 2I_0\,e_0 + 2I_o\,e_0 + \frac{4kT}{R}\right)\Delta\nu_B}}. \tag{9.50}$$

Iz zapisanega razberemo, da so razen šuma štetja vsi prispevki v imenovalcu neodvisni od intenzitete vpadne svetlobe. Le-ta je pri majhnih intenzitetah majhen in celoten šum zato praktično konstanten. V tem primeru *SNR* narašča kvadratno z intenziteto vpadne svetlobe. Pri velikih intenzitetah šum štetja prevlada nad ostalimi prispevki in odvisnost *SNR* od intenzitete postane linearna.

Naloga 9.9.2 Oceni šum štetja, termični šum in šum temnega toka na silicijevi fotodiodi, če nanjo vpada svetloba z valovno dolžino $\lambda = 850$ nm in vpadno močjo $P = 0,1$ mW. Kvantni izkoristek diode je 85 %, spektralna širina $\Delta\nu_B = 150$ MHz, temni tok 10 nA, skupna upornost 50 Ω in temperatura 300 K. Pokaži, da je razmerje signal proti šumu $SNR \sim 250$.

Pomemben parameter, ki ga pogosto vpeljemo, je *NEP* (*Noise Equivalent Power* – moč, ki ustreza šumu). Gre za vpadno moč svetlobe, ki je po velikosti primerljiva s šumom, in zato predstavlja spodnjo mejo še možne detekcije. To se navadno zgodi pri zelo nizkih močeh vpadne svetlobe, pri katerih je šum štetja zanemarljiv. Pogoj, pri katerem je $SNR = 1$, zapišemo kot

$$NEP\,\frac{e_0}{h\nu}\eta \approx \sqrt{\left(2I_0\,e_0 + \frac{4kT}{R}\right)\Delta\nu_B}. \tag{9.51}$$

Sledi

$$NEP = \frac{h\nu}{\eta\,e_0}\sqrt{\left(2I_0\,e_0 + \frac{4kT}{R}\right)\Delta\nu_B}. \tag{9.52}$$

Naloga 9.9.3 Izračunaj *NEP* za primer germanijeve diode pri vpadni svetlobi z valovno dolžino $\lambda = 1,5$ µm in kvantnim izkoristkom $\eta = 0,5$. Temperatura detektorja je $T = 300$ K in temni tok $I_0 = 15$ µA. Skupna upornost je $R = 2$ kΩ, pasovna širina zajemanja svetlobe pa $\Delta\nu_B = 150$ MHz.

★ Zaradi priročnosti je pogosto podan *NEP* na koren spektralne širine, saj ta ni karakteristična za detektor, ampak je odvisna od časa zajemanja. Podatek, ki ga navedejo proizvajalci detektorjev, je *NEP* v enotah $\mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. Tipične vrednosti so 10^{-11}–10^{-15} $\mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, pri čemer najmanjše vrednosti dosegajo silicijeve fotodiode.

9.10 Heterodinska detekcija

Heterodinska detekcija (pogosto imenovana tudi koherentna detekcija) je poseben način detekcije svetlobe, ki omogoča zaznavanje zelo šibkih signalov. Za razliko od direktne detekcije, ki smo jo obravnavali do zdaj in pri kateri pride do neposredne zaznave vpadnega fotona, gre pri heterodinski detekciji za zaznavanje valovanja z amplitudo in fazo. Pri takem pristopu detektor svetlobe osvetlimo hkrati s signalom in z močno referenčno svetlobo, katere frekvenca se le malo razlikuje od frekvence signala. Privzamemo, da sta oba snopa koherentna v času trajanja signala.

Slika 9.21: Shema heterodinske detekcije

Vpadni signal zapišemo z

$$E_s = E_{s0}\cos(\omega_s t + \phi), \tag{9.53}$$

referenčnega pa z

$$E_r = E_{r0}\cos(\omega_r t), \tag{9.54}$$

pri čemer je E_{r0} konstanta. Če so valovne fronte obeh vpadnih snopov poravnane[17], je intenziteta svetlobe, ki vpada na detektor, enaka

$$I = |E|^2 = |E_s + E_r|^2 = E_{s0}^2\cos^2(\omega_s t + \phi) + E_{r0}^2\cos^2(\omega_r t) + 2E_{s0}E_{r0}\cos(\omega_s t + \phi)\cos(\omega_r t). \tag{9.55}$$

Prva dva člena v izrazu se zelo hitro spreminjata in zato predstavljata zgolj izpovprečen konstanten prispevek. Zanimiv je tretji člen, ki ga lahko zapišemo kot

$$E_{s0}E_{r0}\left(\cos(\omega_s t + \omega_r t + \phi) + \cos(\omega_s t - \omega_r t + \phi)\right). \tag{9.56}$$

Člen z vsoto obeh krožnih frekvenc se zelo hitro spreminja in se zato izpovpreči, drugi člen pa ne in ga lahko zaznavamo. Pri tem smo privzeli, da je razlika krožnih frekvenc dovolj majhna, da seže v odzivno območje detektorja. Poseben primer, ko sta frekvenci povsem enaki, imenujemo homodinski režim detekcije.

Ker je referenčni žarek navadno bistveno močnejši od signalnega, je celotna intenziteta na detektorju enaka

$$I = |E|^2 \approx \frac{1}{2}E_{r0}^2 + E_{s0}E_{r0}\cos(\omega_s t - \omega_r t + \phi). \tag{9.57}$$

[17] Dodaten pogoj je, da imata vpadna snopa isto polarizacijo in čim bolj podoben polmer.

S tem znatno pridobimo na občutljivosti, saj na detektorju ne zaznavamo kvadrata majhnega signala $|E_{s0}|^2$, ampak majhen signal, pomnožen z velikim referenčnim.

Poglejmo še razmerje *SNR* za primer heterodinske detekcije. Največji prispevek k šumu je zaradi šuma štetja referenčne svetlobe, saj je ta praviloma bistveno močnejša od signala

$$\overline{(\Delta I)^2} = 2I_r e_0 \Delta\nu_B = \frac{\varepsilon_0}{2} e_0^2 \Delta\nu_B \frac{\eta S E_{r0}^2}{h\nu}, \tag{9.58}$$

pri čemer smo z I_r označili tok, ki steče zaradi referenčne svetlobe, S pa je površina detektorja.

Signal v tem primeru ni več celotni vpadni signal, ampak kombinirani izhod iz detektorja, ki ga zaznavamo le pri razliki krožnih frekvenc $\omega_s - \omega_r$. Sledi

$$SNR = \frac{\frac{\varepsilon_0 e_0 \eta S}{2h\nu} E_{s0} E_{r0}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2} e_0^2 \Delta\nu_B \frac{\eta S E_{r0}^2}{h\nu}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \eta S}{2h\nu\Delta\nu_B}} E_{s0}. \tag{9.59}$$

Če to primerjamo z vrednostjo *SNR* pri navadni detekciji (enačba 9.38), vidimo, da se razmerje signal proti šumu pri isti pasovni širini izboljša za faktor $\sqrt{2}$ (oziroma še več, če je prisoten še kakšen drug šum). Ker je pri navadni detekciji težko meriti pri tako majhni pasovni širini, je razmerje signal proti šumu v primeru heterodinske detekcije posledično praviloma znatno večje od razmerja, ki ga dosežemo pri navadni detekciji. Prednost heterodinskega načina detekcije je tudi, da je neobčutljiv za svetlobo iz ozadja in se zato pogosto uporablja za detekcijo infrardečega valovanja.

10. Modulacija svetlobe

Pri obravnavi širjenja svetlobe skozi snov je najpomembnejši parameter lomni količnik oziroma tenzor dielektričnosti. V tem poglavju bomo spoznali, kako lahko z zunanjim poljem vplivamo na lomni količnik in tako na širjenje svetlobe skozi snov. To omogoča spreminjanje – modulacijo – lastnosti svetlobe z zunanjim poljem. En primer uporabe smo že spoznali pri obravnavi laserja, kjer za preklop dobrote potrebujemo element, ki hitro spreminja prepustnost. Še pomembnejša je modulacija valovanja pri optičnem prenosu informacij.

Svetlobno valovanje lahko moduliramo na več načinov. Z ustreznim moduliranjem lomnega količnika lahko valovanju spreminjamo amplitudo ali frekvenco oziroma fazo (slika 10.1).

Slika 10.1: Amplitudno (levo) in fazno oziroma frekvenčno moduliran signal (desno)

Delovanje optičnih modulatorjev temelji na različnih pojavih. V tem poglavju bomo podrobneje spoznali dva načina, to sta elektro-optični in elasto-optični pojav. Pri prvem pride do spremembe lomnega količnika snovi pod vplivom zunanjega električnega polja, pri drugem pa zaradi mehanske deformacije. Kadar mehansko deformacijo povzroči zvočno valovanje, takim modulatorjem pravimo akusto-optični. Na koncu bomo spoznali še zelo pomemben primer elektro-optičnih modulatorjev na osnovi tekočih kristalov.

10.1 Elektro-optični pojav

Elektro-optični pojav opisuje spremembe optičnih lastnosti snovi (dielektričnosti in lomnega količnika) pod vplivom zunanjega električnega polja. Omejimo se na statično zunanje polje oziroma na polje, ki se spreminja s frekvenco, ki je bistveno manjša od optične frekvence. Omejitev na nizko frekvenco je potrebna zato, da optično polje še lahko obravnavamo linearno. Kako je v nasprotnem primeru, ko je frekvenca polja primerljiva z optično frekvenco, smo na široko obravnavali v poglavju o nelinearni optiki (poglavje 11).

Vzemimo optično anizotropno snov z nemotenim tenzorjem dielektričnosti $\underline{\tilde{\varepsilon}}$. V snoveh brez absorpcije ali optične aktivnosti je tenzor $\underline{\tilde{\varepsilon}}$ realen in simetričen, zato ga lahko diagonaliziramo (enačba 1.60). Lastne vrednosti ε_1, ε_2 in ε_3 ustrezajo kvadratom treh lomnih količnikov n_1^2, n_2^2 in n_3^2, ki so na splošno različni.

Zaradi priročnosti namesto dielektričnega tenzorja vpeljemo inverzni dielektrični tenzor

$$\underline{b} = \underline{\varepsilon}^{-1}. \tag{10.1}$$

V lastnem nemotenem sistemu ga preprosto zapišemo kot

$$\underline{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 1/\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3^2 \end{bmatrix}. \tag{10.2}$$

Ko priključimo zunanje polje, se tenzor $\underline{\tilde{b}}$ spremeni. Pri elektro-optičnem pojavu so spremembe tenzorja dielektričnosti zaradi vpliva zunanjega polja navadno majhne in lahko spremembo komponente δb_{ij} zapišemo kot potenčno vrsto zunanjega polja E, pri čemer upoštevajmo zgolj prva dva člena v razvoju

$$\delta b_{ij} = r_{ijk} E_k + q_{ijkl} E_k E_l. \tag{10.3}$$

Prvi člen je linearno sorazmeren z zunanjim poljem in opisuje linearni elektro-optični ali Pockelsov pojav[1]. Tenzor tretjega ranga r_{ijk} imenujemo elektro-optični tenzor ali tudi Pockelsov tenzor. Pockelsov tenzor je različen od nič v snoveh brez centra inverzije, značilne vrednosti Pockelsovega tenzorja pa so okoli $r \sim 10^{-12}$–10^{-10} m/V.

Kvadratnemu elektro-optičnemu pojavu pravimo Kerrov pojav[2], tenzorju q_{ijkl} pa Kerrov tenzor. Kerrov pojav je praviloma precej šibkejši od Pockelsovega, vendar je različen od nič v vseh snoveh, ne glede na njihove simetrijske lastnosti, torej tudi v tekočinah. Značilna vrednost Kerrovega tenzorja je $q \sim 10^{-24}$ m^2/V^2. Navadno ločimo dva primera Kerrovega pojava: Kerrov elektro-optični pojav pri zunanjih poljih z nizko frekvenco, in optični Kerrov pojav, ki smo ga podrobneje spoznali pri obravnavi nelinearnih optičnih pojavov (poglavje 11.9).

Pri uporabi trdnih kristalov navadno prevlada linearni člen, zato se osredotočimo le nanj in zapišemo

$$\delta b_{ij} = r_{ijk} E_k. \tag{10.4}$$

Elektro-optični ali Pockelsov tenzor

Simetrija snovi pomembno vpliva na obliko tenzorjev, ki opisujejo njene lastnosti. Pockelsov tenzor $\underline{r}$ je tenzor tretjega ranga, zato je lahko različen od nič le v kristalih brez centra inverzije.

Naloga 10.1.1 Razmisli, zakaj je v kristalih s centrom inverzije tenzor $\underline{r}$ vedno enak nič.

Ker je inverzni dielektrični tenzor $\underline{b}$ vedno simetričen, je v prvih dveh indeksih simetričen tudi $\underline{r}$

$$r_{ijk} = r_{jik}. \tag{10.5}$$

V najmanj simetričnem primeru triklinskega kristala ima tako namesto 27 zgolj 18 neodvisnih komponent, v kristalih z višjo simetrijo pa še precej manj.

[1] Nemški fizik Friedrich Carl Alwin Pockels, 1865–1913.
[2] Škotski fizik John Kerr, 1824–1907.

Podobno kot nelinearno susceptibilnost (poglavje 11.1) lahko tudi elektro-optični tenzor zaradi simetrije zapišemo le z dvema komponentama. Prva dva indeksa, v katerih je r_{ijk} simetričen, združimo v enega z vrednostmi od 1 do 6 po dogovoru

$$xx = 1 \qquad yz = zy = 4 \tag{10.6}$$

$$yy = 2 \qquad zx = xz = 5 \tag{10.7}$$

$$zz = 3 \qquad xy = yx = 6 \tag{10.8}$$

in r_{ijk} postane matrika velikosti 6×3, simetrični tenzor drugega ranga b_{ij} pa šestdimenzionalen vektor. Nekaj primerov Pockelsovih tenzorjev pri različnih kristalnih simetrijah je podanih v tabeli (10.1).

Kristal	Grupa	Neničelne komponente tenzorja r	Vrednost (10^{-12} m/V)
$BaTiO_3$	4mm	$r_{xzx} = r_{yzy} = r_{zxx} = r_{zyy} = r_{51} = r_{42}$ $r_{xxz} = r_{yyz} = r_{13} = r_{23}$ $r_{zzz} = r_{33}$	(pri 1,55 µm) $r_{51} = 800$ $r_{13} = 8$ $r_{33} = 28$
KDP	$\bar{4}2$m	$r_{yzx} = r_{zyx} = r_{xzy} = r_{zxy} = r_{41} = r_{52}$ $r_{xyz} = r_{yxz} = r_{63}$	$r_{41} = 8,77$ $r_{63} = -10,3$
GaAs ZnTe	$\bar{4}3$m	$r_{yzx} = r_{zyx} = r_{xzy} = r_{zxy} = r_{xyz} = r_{yxz}$ $= r_{41} = r_{52} = r_{63}$	(pri 10,6 µm) $r_{41} = 1,5$ (pri 3,4 µm) $r_{41} = 4,2$
$LiNbO_3$	3m	$r_{xzx} = r_{zxx} = r_{yzy} = r_{zyy} = r_{51} = r_{42}$ $r_{xxz} = r_{yyz} = r_{13} = r_{23}$ $r_{zzz} = r_{33}$ $r_{yyy} = -r_{xxy} = -r_{xyx} = -r_{yxx} =$ $= r_{22} = -r_{12} = -r_{61}$	$r_{51} = 32,6$ $r_{13} = 9,6$ $r_{33} = 30,9$ $r_{22} = 6,8$

Tabela 10.1: Koeficienti Pockelsovega tenzorja za nekaj izbranih snovi. Če ni navedeno drugače, veljajo vrednosti pri valovni dolžini okoli 600 nm.

★ Komponente elektro-optičnega tenzorja zaradi nazornosti pogosto ponazarjamo grafično. V matriki 6×3 s piko označimo komponente, ki so enake nič, s polnim krožcem neničelne komponente, povezava med komponentami pomeni njihovo enakost, prazen krožec in črtkana črta pa označujeta neničelno komponento nasprotnega predznaka. Kot primer sta podana prikaza tenzorjev za GaAs (levo) in $LiNbO_3$ (desno).

10.2 Longitudinalna modulacija

Poglejmo podrobneje, kako električno polje spremeni optične lastnosti elektro-optičnega kristala in kako to vpliva na svetlobo, ki potuje skozi tak kristal. Navadno se uporabljajo kristali, ki so dvolomni že brez zunanjega polja. Kot primer vzemimo kristal KH_2PO_4 (KDP), ki ima tetragonalno simetrijo ($\bar{4}2m$). Kot razberemo iz tabele (10.1), ima elektro-optični tenzor dve neodvisni komponenti: $r_{41} = r_{52} = 8,77 \times 10^{-12}$ m/V in $r_{63} = -10,3 \times 10^{-12}$ m/V.

Kristal naj bo odrezan po kristalografskih oseh. Svetloba naj skozi kristal potuje v smeri optične osi, to je po dogovoru smer z, v isti smeri pa na kristal priključimo polje E_z. Ker je smer električnega polja vzporedna s smerjo širjenja svetlobe, taki postavitvi pravimo longitudinalna in pojavu longitudinalna modulacija.

Slika 10.2: Shema longitudinalne modulacije signala. Ker je polje priključeno v smeri potovanja svetlobe, morata biti elektrodi transparentni. Z uporabo polarizatorja in analizatorja sestavimo amplitudni modulator (glej razdelek 10.4).

Inverzni dielektrični tenzor brez zunanjega polja za optično enoosni KDP zapišemo kot

$$\underline{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}, \tag{10.9}$$

kjer sta n_o in n_e redni in izredni lomni količnik. Ko priključimo polje E_z, se tenzor dielektričnosti zaradi Pockelsovega pojava spremeni. Upoštevamo, da sta $E_x = E_y = 0$ in da so od nič različni le r_{41}, r_{52} in r_{63}. Sprememba inverznega tenzorja je potem po enačbi (10.4)

$$\begin{aligned}
\delta b_{xx} &= r_{xxx}E_x + r_{xxy}E_y + r_{xxz}E_z = 0, \\
\delta b_{xy} &= \delta b_{yx} = r_{xyx}E_x + r_{xyy}E_y + r_{xyz}E_z = r_{63}E_z, \\
\delta b_{xz} &= \delta b_{zx} = r_{xzz}E_z = 0, \\
\delta b_{yy} &= r_{yyz}E_z = 0, \\
\delta b_{yz} &= \delta b_{zy} = r_{yzz}E_z = 0, \\
\delta b_{zz} &= r_{zzz}E_z = 0.
\end{aligned} \tag{10.10}$$

Vidimo, da je zaradi simetrije večina členov enaka nič, se pa zaradi zunanjega električnega polja v smeri z pojavi izvendiagonalna komponenta δb_{xy}

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & r_{63}E_z & 0 \\ r_{63}E_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & r_{63}E_z & 0 \\ r_{63}E_z & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \tag{10.11}$$

Če želimo izračunati, kako se po kristalu pod napetostjo širi vpadni svetlobni snop, moramo gornji tenzor diagonalizirati. Lastne vrednosti novega tenzorja in pripadajoče nove lastne osi so

$$\lambda_1 = \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \tag{10.12}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \tag{10.13}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{n_e^2} \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1). \tag{10.14}$$

Os z se ohranja, drugi dve novi lastni osi pa sta zasukani za kot 45 ° glede na prvotni osi x in y. V novem koordinatnem sistemu je inverzni dielektrični tenzor diagonalen in enak

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 + r_{63}E_z & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 - r_{63}E_z & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \tag{10.15}$$

Spomnimo se, da potuje svetloba skozi kristal vzdolž osi z. Brez zunanjega električnega polja je kristal enoosen z optično osjo v smeri z. Lomni količnik je neodvisen od polarizacije vpadnega valovanja in je enak n_o. Ko priključimo polje, postane kristal optično dvoosen, saj so vse tri lastne vrednosti tenzorja dielektričnosti različne.

Slika 10.3: Optično enoosen kristal postane pod napetostjo dvoosen. Indikatrisa, ki je pravokotno na optično os brez priključenega polja krožnica (polna črta), se pod vplivom napetosti spremeni v elipso (črtkana črta). Pri tem sta osi elipse zasukani za kot 45 ° glede na prvotni osi x in y.

Za žarek, ki potuje vzdolž osi z, torej obstajata dve lastni smeri x' in y' z ustreznima novima lastnima količnikoma, ki ju izrazimo kot

$$\frac{1}{n_{x'}^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \frac{1}{n_{y'}^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z. \tag{10.16}$$

Za vsa eksperimentalno dosegljiva polja velja $rE \ll 1/n_o^2$ in gornja izraza lahko razvijemo za majhne popravke

$$n_{x'} = \sqrt{\frac{n_o^2}{1 + n_o^2 r_{63}E_z}} \approx n_o\sqrt{1 - n_o^2 r_{63}E_z} \approx n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{63}E_z. \tag{10.17}$$

Nova lomna količnika sta tako

$$n_{x'} \approx n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z \quad \text{in} \tag{10.18}$$

$$n_{y'} \approx n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z. \tag{10.19}$$

Različni lastni polarizaciji ob priključenem zunanjem polju potujeta vzdolž osi z z različnima hitrostma. Kadar polarizacija vpadnega valovanja ne sovpada z novima lastnima osema x' ali y', je svetloba po preletu kristala na splošno eliptično polarizirana. Ko svetloba prepotuje dolžino kristala L, pride med lastnima polarizacijama do fazne razlike

$$\Delta\phi = k_0 n_{y'} L - k_0 n_{x'} L = \frac{\omega}{c_0} L n_o^3 r_{63} E_z = \frac{\omega}{c_0} n_o^3 r_{63} U, \tag{10.20}$$

pri čemer smo upoštevali zvezo $U = E_z L$.

Vpeljemo karakteristično napetost U_π (imenovano tudi π-napetost), pri kateri je fazna razlika enaka π in kristal deluje kot ploščica $\lambda/2$

$$U_\pi = \frac{\pi c_0}{\omega n_o^3 r_{63}} = \frac{\lambda}{2 n_o^3 r_{63}}. \tag{10.21}$$

Za kristal KDP je π-napetost pri valovni dolžini 633 nm okoli 9000 V, kar je precej velika napetost. Velike delovne napetosti so značilne za kristalne elektro-optične modulatorje in so njihova glavna pomanjkljivost.

10.3 Transverzalna modulacija

Iz praktičnih razlogov je navadno preprosteje priključiti električno polje v smeri, ki je pravokotna na smer širjenja svetlobe. Taki postavitvi pravimo transverzalna in pojavu transverzalna modulacija. Tudi to postavitev obravnavajmo na primeru. Za zgled vzemimo kristal $LiNbO_3$, ki ima trigonalno simetrijo (3m) in po tabeli (10.1) štiri neodvisne komponente: $r_{51} = r_{42}, r_{13} = r_{23}, r_{33}$ in $r_{22} = -r_{12} = -r_{61}$.

Naj se svetloba širi vzdolž osi z, ki je hkrati tudi optična os, električno polje pa priključimo v smeri y (slika 10.4). Krajši račun pokaže, da je inverzni dielektrični tenzor v polju enak

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 - r_{22}E_y & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 + r_{22}E_y & r_{51}E_y \\ 0 & r_{51}E_y & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \tag{10.22}$$

Tudi v tem primeru tenzor diagonaliziramo in poiščemo nove lastne vrednosti. Če privzamemo, da je sprememba zaradi električnega polja majhna ($rE \ll 1$), lahko zanemarimo člene, v katerih rE nastopa v kvadratni obliki. Nove lastne vrednosti so tako

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_y, \tag{10.23}$$

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y \quad \text{in} \tag{10.24}$$

$$\lambda_3 \approx \frac{1}{n_e^2}. \tag{10.25}$$

Slika 10.4: Shema transverzalne modulacije signala

Izračunamo še ustrezne lomne količnike

$$n_{x'} \approx n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{22} E_y, \tag{10.26}$$

$$n_{y'} \approx n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{22} E_y \quad \text{in} \tag{10.27}$$

$$n_z' \approx n_e. \tag{10.28}$$

Kako pa je z novimi lastnimi osmi? Hitro ugotovimo (enačba 10.22), da se ob priključenem polju os x ohranja. Pojavi se torej zasuk okoli osi x, ki ga označimo s kotom ϑ. Račun pokaže, da je za smiselne vrednosti električnega polja ta kot zelo majhen ($\vartheta \approx r_{51} E_y / (1/n_o^2 - 1/n_e^2) \sim 1$ mrad), tako da lahko v približku rečemo, da se lastne osi ohranjajo.

Če potuje svetloba vzdolž osi z, sta torej lomna količnika za polarizaciji v smeri x in y približno enaka $n_{x'}$ in $n_{y'}$, fazna razlika med polarizacijama po preletu kristala z dolžino L pa je

$$\Delta\phi = k_0 n_{y'} L - k_0 n_{x'} L = \frac{\omega}{c_0} L n_o^3 r_{22} E_y = \frac{\omega}{c_0} L n_o^3 r_{22} \frac{U}{d}. \tag{10.29}$$

Pri tem moramo ločiti med L, ki je dolžina kristala v smeri z, in d, ki je širina kristala v smeri, v kateri priključimo napetost. Karakteristična π-napetost je

$$\boxed{U_\pi = \frac{\lambda d}{2 L n_o^3 r_{22}}.} \tag{10.30}$$

Za izbran kristal ($d = 5$ mm, $L = 1$ cm) je π-vrednost napetosti pri valovni dolžini 633 nm okoli 2000 V. S tanjšanjem kristala lahko to napetost še zmanjšamo.

★ Transverzalno modulacijo lahko dosežemo tudi tako, da se žarek širi vzdolž osi y, električno polje pa priključimo vzdolž optične osi z. V tem primeru se lastne osi ohranijo in kristal ostane optično enoosen. Vendar ima tudi ta rešitev določene slabosti. Ker je kristal že sam po sebi dvolomen, povzroči zunanje polje le majhno dodatno fazno razliko, zato je najbolje, če je dolžina kristala taka, da velja $k_0 L(n_o - n_e) = 2N\pi$. Pri tem pa nastopi težava. Pogoj je lahko zaradi temperaturnega raztezanja in odvisnosti lomnih količnikov od temperature izpolnjen le pri eni temperaturi, poleg tega se mora svetloba širiti natančno v smeri y. Zato dvolomnost nemotenega kristala navadno kompenziramo, tako da postavimo dva enako dolga kristala zapored, pri čemer sta optični osi med seboj pravokotni, modulacijska napetost na drugem kristalu pa ima nasproten predznak. Tedaj se fazna razlika med obema polarizacijama zaradi naravne dvolomnosti odšteje, zaradi modulacijske napetosti pa sešteje.

10.4 Amplitudna modulacija

Poglejmo, kako lahko elektro-optični pojav izkoristimo za modulacijo amplitude svetlobnega snopa. Pod vplivom polja pride v kristalu do faznega zamika med polarizacijama, ki je sorazmeren napetosti (enačbi 10.20 in 10.29). Če za tak kristal postavimo analizator, lahko z napetostjo spreminjamo moč prepuščene svetlobe – amplitudno moduliramo signal.

Vrnimo se k longitudinalni modulaciji (slika 10.2). Naj bo vpadna električna poljska jakost E_0 polarizirana v smeri y. Ko priključimo napetost, sta novi lastni osi zasukani za kot 45 ° glede na prvotni lastni osi (slika 10.3). Vpadno valovanje zato razstavimo na komponenti x' in y'

$$\mathbf{E}_0 = E_0\,\mathbf{e}_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{x'} + \mathbf{e}_{y'}\right). \tag{10.31}$$

Po kristalu se komponenti širita z različnima hitrostma, zato pride med njima do fazne razlike $\Delta\phi$ (enačba 10.20). Ob izstopu iz kristala je tako

$$\mathbf{E}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(e^{ik_0 n_{x'} L}\mathbf{e}_{x'} + e^{ik_0 n_{y'} L}\mathbf{e}_{y'}\right) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{ik_0 n_{x'} L}\left(\mathbf{e}_{x'} + e^{i\Delta\phi}\mathbf{e}_{y'}\right). \tag{10.32}$$

Analizator na izhodni strani naj bo obrnjen v smeri x, to je pravokotno na smer vpadne polarizacije. Prepušča le projekcijo obeh lastnih polarizacij na os x

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{ik_0 n_{x'} L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Delta\phi}\right)\mathbf{e}_x. \tag{10.33}$$

Gostota prepuščenega svetlobnega toka ob vpadnem toku j_0 je tako

$$j = \frac{1}{4} j_0 \left|1 - e^{i\Delta\phi}\right|^2 = \frac{1}{2} j_0 (1 - \cos\Delta\phi). \tag{10.34}$$

Preoblikujemo izraz in zapišemo prepustnost takega modulatorja ob upoštevanju enačbe (10.20)

$$T = \frac{j}{j_0} = \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi n_o^3 r_{63} U}{\lambda}\right)^2. \tag{10.35}$$

Slika 10.5: Prepustnost amplitudnega modulatorja v odvisnosti od faznega zamika $\Delta\phi$, sorazmernega priključeni napetosti U (rdeča črta). Če pred vzorec dodamo ploščico $\lambda/4$, pride do faznega zamika $\pi/2$ in odvisnost prepustnosti od priključene napetosti je približno linearna (modra črta).

Ko je napetost na kristalu enaka nič, je gostota prepuščenega svetlobnega toka $j = 0$. To je pričakovano, saj sta analizator in polarizator prekrižana, vpadni žarek pa se širi vzdolž lastne osi kristala. Prepustnost doseže največjo vrednost, ko je $\Delta\phi = \pi$, kar je ravno pri π-napetosti. Ko torej napetost povečamo z 0 na U_π, se prepustnost modulatorja spremeni z 0 na 1 (slika 10.5).

Pogosto želimo, da je zveza med modulacijsko napetostjo in izhodno gostoto toka linearna. To lahko dosežemo, če modulator deluje v okolici $\Delta\phi = \pi/2$ (slika 10.5). Ena rešitev je dodati stalno visoko napetost, signal pa modulirati okoli te vrednosti. Precej bolj praktičen pristop je z uporabo ploščice $\lambda/4$, ki jo dodamo med polarizator in kristal, tako da se pojavi stalni fazni premik $\pi/2$ med rednim in izrednim valom. Potem lahko z razmeroma majhno napetostjo linearno amplitudno moduliramo svetlobo.

10.5 Fazna in frekvenčna modulacija

Svetlobo amplitudno moduliramo, tako da z zunanjim poljem spremenimo fazi lastnih valov, zaradi česar postane linearno polarizirano vpadno valovanje po prehodu kristala eliptično polarizirano. Spremembo polarizacije z analizatorjem prevedemo v spremembo amplitude.

Pogosto je bolje modulirati fazo vpadne svetlobe. Tudi to si oglejmo na primeru longitudinalne modulacije. Fazno oziroma frekvenčno modulacijo dosežemo tako, da vhodno polarizacijo izberemo vzporedno eni od novih lastnih osi kristala, na primeri osi x', izhodni polarizator pa odstranimo (slika 10.6).

Slika 10.6: Shema fazne modulacije signala. Vpadna polarizacija je vzporedna eni od novih lastnih osi kristala, ki se pojavijo pod vplivom zunanjega polja.

Celoten fazni zamik po preletu skozi kristal zapišemo kot

$$\phi = k_0 n_{x'} L - \omega_0 t = \frac{\omega_0}{c_0} L \left(n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} \frac{U}{L} \right) - \omega_0 t, \tag{10.36}$$

pri čemer smo lomni količnik zapisali skladno z enačbo (10.18). Opazimo, da je fazni zamik odvisen od priključene zunanje napetosti. Pri stalni napetosti je ta fazni zamik konstanten, mi pa si oglejmo, kaj se zgodi, ko na kristal priključimo spreminjajočo se napetost.

Obravnavajmo dva primera. V prvem primeru naj bo napetost linearna funkcija časa

$$U = U_0 + \frac{\Delta U}{\Delta t} t. \tag{10.37}$$

Celotna faza prepuščenega valovanja je potem

$$\phi = \frac{\omega_0}{c_0} L n_o - \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2 c_0} \left(U_0 + \frac{\Delta U}{\Delta t} t \right) - \omega_0 t. \tag{10.38}$$

Krožno frekvenco valovanja v danem trenutku izračunamo kot negativni odvod faze po času

$$\omega = -\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0}\frac{\Delta U}{\Delta t} = \omega_0 + \Delta\omega. \tag{10.39}$$

Linearno spreminjajoča se modulacijska napetost da torej konstanten frekvenčni premik. Dosegljive spremembe frekvence so seveda dokaj majhne, do nekaj 100 MHz, saj so omejene s hitrostjo spreminjanja napetosti. Napetost seveda tudi ne more neomejeno naraščati. Kadar se napetost vrača na nič, pride do frekvenčnega premika v nasprotni smeri, ki pa ga lahko zanemarimo, če je čas vračanja bistveno krajši od časa naraščanja.

Poglejmo še primer, ko se priključena napetost periodično spreminja kot $U = U_0 \sin(\omega_m t)$. Vstavimo izraz v enačbo (10.36) in zapišemo fazo izhodnega valovanja

$$\phi = \frac{\omega_0}{c_0} L n_o - \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0 \sin(\omega_m t) - \omega_0 t. \tag{10.40}$$

V primeru linearno spreminjajoče se napetosti smo na tem mestu fazo odvajali in dobili krožno frekvenco, ki je bila konstantna. V tem primeru z odvajanjem dobimo krožno frekvenco, ki se spreminja s časom. Zato se računa lotimo drugače. Konstantni člen v gornjem izrazu, ki predstavlja le konstantni fazni premik, lahko izpustimo in zapišemo električno poljsko jakost prepuščenega valovanja

$$E = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0 \sin(\omega_m t)\right) = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta \sin(\omega_m t)\right), \tag{10.41}$$

pri čemer je

$$\delta = \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0. \tag{10.42}$$

Z uporabo Jacobi-Angerjevih[3] identitet

$$\begin{aligned} \cos(\delta \sin x) &= J_0(\delta) + 2J_2(\delta)\cos 2x + 2J_4(\delta)\cos 4x + \ldots \quad \text{in} \\ \sin(\delta \sin x) &= 2J_1(\delta)\sin x + 2J_3 \sin 3x + 2J_5 \sin 5x + \ldots \end{aligned} \tag{10.43}$$

je izhodno polje mogoče zapisati v obliki

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= J_0(\delta)\cos(\omega_0 t) + \\ &+ J_1(\delta)\cos(\omega_0 + \omega_m)t - J_1(\delta)\cos(\omega_0 - \omega_m)t + \\ &+ J_2(\delta)\cos(\omega_0 + 2\omega_m)t + J_2(\delta)\cos(\omega_0 - 2\omega_m)t + \\ &+ J_3(\delta)\cos(\omega_0 + 3\omega_m)t - J_3(\delta)\cos(\omega_0 - 3\omega_m)t + \ldots \end{aligned} \tag{10.44}$$

Naloga 10.5.1 Z uporabo Jacobi-Angerjevih identitet (enačbi 10.43) pokaži, da električno polje izhodne svetlobe ob priključeni napetosti $U_0 \sin(\omega_m t)$ ustreza polju v enačbi (10.44).

Zaradi periodične fazne modulacije se v spektru izhodne svetlobe pojavijo stranski pasovi, ki se od osnovne krožne frekvence ω_0 razlikujejo za večkratnike modulacijske krožne frekvence ω_m. Njihova amplituda je podana z vrednostjo Besslovih funkcij pri δ. Ker je vrednost δ navadno majhna, za opis pogosto zadošča le prvi člen.

[3] Nemška matematika Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851, in Carl Theodor Anger, 1803–1858.

Elektro-optični pojav izkoriščamo tudi za uklanjanje žarkov. Najpreprostejši primer deflektorja je trikotna prizma z elektrodama na osnovnih ploskvah. Svetloba se ob prehodu skozi prizmo lomi v odvisnosti od njenega lomnega količnika, tega pa lahko spreminjamo z napetostjo na elektrodah. Praktično je bolj uporabna dvojna prizma. Sestavljena je iz dveh enakih prizem, ki skupaj tvorita kvader, pri tem pa optični osi zgornje in spodnje prizme kažeta v nasprotni smeri. S spreminjanjem napetosti, ki jo priključimo prečno na smer razširjanja svetlobe, lahko zelo hitro in zelo natančno spreminjamo smer izhodnega žarka. Vendar ta pristop ni splošno uveljavljen, predvsem zaradi velike napetosti, ki je potrebna za znatno uklanjanje. Veliko bolj razširjen je akusto-optični pojav, ki ga bomo spoznali v nadaljevanju.

Slika 10.7: Shema elektro-optičnega deflektorja

Elektro-optični pojav ima dva prispevka: neposrednega, kjer zunanje polje vpliva neposredno na elektronsko polarizirnost, in posredno spremembo lomnega količnika zaradi piezoelektrične deformacije. Pri nizkih frekvencah sta prispevka primerljiva, pri velikih frekvencah pa deformacija kristala ne more slediti modulacijski napetosti in ostane le neposredni prispevek. Pri akustičnih resonancah, ko modulacija v kristalu vzbudi stoječe zvočno valovanje, se piezoelektrični prispevek resonančno poveča. Pogoj za akustično resonanco je, da je dimenzija kristala mnogokratnik polovice valovne dolžine akustičnega vala v kristalu. Pri kristalih velikosti $\sim$ cm in hitrosti zvočnih valov okoli 5000 m/s so resonance v območju od nekaj sto kHz do nekaj deset MHz.

Pri visokih frekvencah postane pomembna tudi električna vezava modulatorja, saj kristal predstavlja kapacitivno breme. Njegova impedanca pojema z rastočo frekvenco, zato je vedno večji del padca napetosti na notranjem uporu izvora napetosti. Pomagamo si z vzporedno vezavo tuljave, tako da je resonančna frekvenca $1/(LC)$ nastalega nihajnega kroga enaka modulacijski frekvenci, z dodatnim uporom pa spreminjamo širino resonance. Tipična moč, ki je potrebna za modulacijo, je nekaj 10 W, kar je za visokonapetosten in hiter izvor že znatna moč.

10.6 Elasto-optični in akusto-optični pojav

Pri elasto-optičnem pojavu dielektrične lastnosti snovi in njen lomni količnik spreminjamo z mehansko deformacijo. Tudi tu opišemo pojav s spremembo inverznega dielektričnega tenzorja

$$\underline{b} = \tilde{\underline{b}} + \delta\underline{b}, \tag{10.45}$$

pri čemer je $\tilde{\underline{b}}$ tenzor v odsotnosti mehanske deformacije, $\delta\underline{b}$ pa sprememba tenzorja zaradi deformacije snovi. V prvem približku jo zapišemo kot

$$\delta b_{ij} = p_{ijkl} S_{kl}. \tag{10.46}$$

Sprememba tenzorja je sorazmerna s tenzorjem deformacije snovi (Greenovim tenzorjem[4]) v linearnem približku

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \tag{10.47}$$

pri čemer je $\mathbf{u}$ vektor deformacije.

[4] Angleški matematični fizik George Green, 1793–1841.

Vpeljali smo še sorazmernostni faktor p_{ijkl}, ki ga imenujemo elasto-optični tenzor. Tenzor $\underline{p}$ je različen od nič v vsaki snovi, saj povezuje dva simetrična tenzorja drugega ranga. Posledično je simetričen v prvem in drugem paru indeksov

$$p_{ijkl} = p_{jikl} = p_{ijlk} = p_{jilk}. \tag{10.48}$$

V najbolj splošnem primeru triklinske kristalne simetrije ima tako 36 neodvisnih komponent, v bolj simetričnih snoveh pa se število neodvisnih komponent še zmanjša. Če vpeljemo skrajšan zapis indeksov ($xx = 1, yy = 2, zz = 3, yz = zy = 4, zx = xz = 5, xy = yx = 6$), zapišemo tenzor za primer izotropne snovi kot

$$\underline{p}_{\text{izo}} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix}, \tag{10.49}$$

pri čemer je $p_{44} = \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12})$. Koeficienti tenzorja so brezdimenzijski, njihova tipična vrednost pa je $p \sim 0,1$. Za vodo, na primer, velja $p_{11} \simeq p_{12} = 0,31$ in $p_{44} = 0$, za $LiNbO_3$ pa $p_{11} = -0,02, p_{12} = 0,08, p_{13} = 0,13, p_{14} = -0,08, p_{31} = 0,17, p_{33} = 0,07, p_{41} = -0,15, p_{44} = 0,12$.

Iz enačbe (10.46) izrazimo spremembo dielektričnega tenzorja

$$\delta\varepsilon_{ij} = -\tilde{\varepsilon}_{ii}\tilde{\varepsilon}_{jj}p_{ijkl}S_{kl}, \tag{10.50}$$

kjer smo privzeli, da je nemoteni $\tilde{\varepsilon}$ diagonalen. Ob mehanski deformaciji torej v splošnem tudi izotropna snov postane dvolomna. Dvojni lom, ki se pojavi v deformirani snovi, izkoriščamo na primer za študij mehanskih napetosti v modelih, ki so izdelani iz prozorne plastične snovi. Nas bo v nadaljevanju zanimal uklon svetlobe na periodični modulaciji lomnega količnika, ki nastane zaradi zvočnega valovanja v snovi. Takemu pojavu pravimo tudi akusto-optični pojav.

Naloga 10.6.1 Po izotropni snovi se širi longitudinalno valovanje vzdolž smeri z, tako da deformacijo v snovi zapišemo kot

$$\mathbf{u} = A\cos(qz - \Omega t)\mathbf{e}_z. \tag{10.51}$$

Pokaži, da je taka snov dvolomna z optično osjo vzdolž osi z, lastni lomni količniki pa so

$$n_{x'} \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{12} qA\sin(qz - \Omega t)) \tag{10.52}$$

$$n_{y'} \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{12} qA\sin(qz - \Omega t)) \tag{10.53}$$

$$n'_z \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{11} qA\sin(qz - \Omega t)), \tag{10.54}$$

kjer je n lomni količnik v odsotnosti motnje.

10.7 Uklon svetlobe na zvočnem valovanju

Vzbudimo v plasti prozorne izotropne snovi zvočno valovanje z valovno dolžino Λ, ki potuje v smeri x. To naredimo tako, da na eno stran snovi priključimo piezoelektrik, ki se pod izmenično napetostjo periodično krči in razteza s krožno frekvenco Ω. Na drugo stran damo akustični absorber ali reflektor, tako da lahko v snovi vzbudimo tudi stoječe valovanje. Zaradi zvočnega valovanja se v snovi periodično spreminja gostota in z njo lomni količnik (glej nalogo 10.6.1)

$$n = \tilde{n} + \delta n \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x - \Omega t\right). \tag{10.55}$$

V zgoščini je lomni količnik nekoliko večji kot v razredčini, zato je optična pot na takem mestu skozi plast daljša. Ravno svetlobno valovanje, ki vpada na plast pravokotno glede na smer širjenja zvoka, po izstopu zato nima povsod enake faze, valovno čelo pa je periodično modulirano s periodo valovne dolžine zvočnega valovanja. Zvočno valovanje v snovi torej deluje kot optična fazna mrežica. Tipična frekvenca, s katero vzbujamo elastično deformacijo, je okoli $\Omega/2\pi \sim 50$ MHz, ustrezna valovna dolžina pa okoli $\Lambda \sim 100$ µm. Frekvence, ki so v uporabi, navadno sežejo od nekaj MHz prek 10 GHz. Čeprav so vse te frekvence daleč nad slišnimi, taka valovanja imenujemo zvočna oziroma akustična.

Slika 10.8: Vpadna svetloba se na zvočnem valovanju v snovi uklanja.

Oglejmo si dva limitna primera. V prvem primeru je debelina plasti, v kateri vzbujamo zvočno valovanje, zelo majhna in $d \ll \Lambda^2/\lambda$ (slika 10.9 a). Takrat modulator deluje kot tanka uklonska mrežica in pojavi se veliko uklonskih vrhov, intenziteta posameznega žarka pa je razmeroma majhna. Kote, pod katerimi se pojavijo ojačitve, izračunamo po preprosti enačbi

$$\Lambda(\sin\vartheta - \sin\beta) = N\lambda, \tag{10.56}$$

pri čemer je λ valovna dolžina svetlobe v snovi, N pa celo število. Takemu pojavu pravimo Raman-Nathov uklon[5]. Opazimo ga pri razmeroma nizkih zvočnih frekvencah (pod ~ 10 MHz) in majhnih debelinah (pod ~ 1 cm) pri poljubnem vpadnem kotu ϑ.

V nasprotnem limitnem primeru se svetloba uklanja na ravnih zvočnih valovih in modulator deluje kot debela uklonska mrežica (slika 10.9 b). Na splošno je delež uklonjene svetlobe na taki mrežici neuporabno majhen. Znaten postane le tedaj, kadar je izpolnjen Braggov pogoj[6]

$$2\Lambda\sin\vartheta = N\lambda. \tag{10.57}$$

Ker je valovna dolžina svetlobe precej manjša od valovne dolžine zvočnega valovanja, je ϑ praviloma zelo majhen $\vartheta \sim 10^{-2}$.

[5] Indijski fizik in nobelovec Sir Chandrasekhara Venkata Raman, 1888–1970, in indijski fizik N. S. Nagendra Nath.

[6] Angleška znanstvenika in nobelovca oče in sin Sir William Henry Bragg, 1862–1942, in Sir William Lawrence Bragg, 1890–1971.

Slika 10.9: Ob vpadu svetlobe na tanko plast, v kateri je vzbujeno zvočno valovanje, se pojavi veliko uklonskih vrhov (a), na debeli plasti pa je opazen zgolj en uklonjen vrh, pa še ta le ob izpolnjenem Braggovem pogoju (b).

Poglejmo natančneje, kako pridemo do gornjega pogoja. Zapišimo pogoj za ohranitev gibalne količine fotona pri sipanju na zvočnem valu

$$\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{q} = \mathbf{k}_1, \tag{10.58}$$

kjer je $\mathbf{k}_0$ valovni vektor vpadne svetlobe, $\mathbf{k}_1$ valovni vektor uklonjene svetlobe, $\mathbf{q}$ pa valovni vektor zvočnega vala. Znak plus velja, kadar potuje zvok proti projekciji $\mathbf{k}_0$ na $\mathbf{q}$, negativen predznak pa ob potovanju zvoka v nasprotno smer. Frekvenca zvočnega vala je dosti nižja od frekvence svetlobe, zato se frekvenca svetlobe pri sipanju le malo spremeni in $|\mathbf{k}_0| \approx |\mathbf{k}_1|$. Tedaj je $|\mathbf{q}| = q = 2k_0 \sin\vartheta$ (glej sliko 10.10), od koder sledi Braggov pogoj (enačba 10.57). Obenem je vpadni kot enak izhodnemu, kar pomeni, da se na zvočnem valu Braggovo sipana svetloba zrcalno odbije. Razmere so torej povsem analogne Braggovemu sipanju rentgenske svetlobe na kristalnih ravninah. Kot bomo pokazali v nadaljevanju, je ob izpolnjenem Braggovem pogoju mogoče doseči, da se vsa vpadna svetloba uklanja.

Slika 10.10: K izpeljavi Braggovega pogoja

★ Naredimo še oceno izračuna, kdaj je v veljavi Raman-Nathov in kdaj Braggov režim. Izhajajmo iz pogoja, da je laserski snop na poti skozi plast zvočnega valovanja tako ozek, da ostane v celoti znotraj ene razredčine ali zgoščine. Širino razredčin in zgoščin ocenimo na $\Lambda/2$, to pa je potem tudi približno premer laserskega snopa $2w$. Dolžina, znotraj katere se snop še ne razširi znatno, je območje bližnjega polja $2z_0 = 2\pi w^2/\lambda$ (enačba 3.21). Največja dolžina poti, pri kateri je pogoj izpolnjen in snop ostane znotraj ene razredčine ali zgoščine, je tako

$$d_c \sim 2z_0 \sim \frac{2\pi w^2}{\lambda} \sim \frac{\pi\Lambda^2}{8\lambda}. \tag{10.59}$$

Pri debelinah $d \ll d_c$ velja Raman-Nathov približek, pri debelinah $d \gg d_c$ pa Braggov uklon. Poglejmo primer. Če svetloba z $\lambda = 1$ µm vpade na kristal, v katerem je vzbujeno zvočno valovanje s frekvenco $\Omega/2\pi = 50$ MHz in pripadajočo valovno dolžino $\Lambda = 0,1$ mm, je mejna debelina $d_c \sim 6$ mm.

Če je zvočno valovanje potujoče, kar smo v gornji obravnavi že privzeli s tem, da smo mu pripisali natanko določen valovni vektor $\mathbf{q}$, se spremeni tudi frekvenca sipanega vala zaradi Dopplerjevega premika pri odboju na zvočnem valovanju, ki potuje s hitrostjo v_z. Upoštevati moramo le projekcijo na smer vpadne in odbite svetlobe, zato je

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm\frac{2v_z \sin\vartheta}{c} = \pm\frac{2\Omega\Lambda\sin\vartheta}{2\pi c} = \pm\frac{\Omega}{\omega}, \tag{10.60}$$

pri čemer smo uporabili Braggov pogoj (enačba 10.57). Sprememba frekvence sipane svetlobe je torej kar enaka frekvenci zvočnega valovanja. To je seveda v skladu z gornjo zahtevo, da se pri uklonu na zvočnem valovanju ohranja skupna energija vpadnega fotona in kvanta zvočnega valovanja (fonona), ki se pri sipanju absorbira ali pri njem nastane.

Malenkost drugačno je obnašanje, ko v snovi vzbudimo stoječe zvočno valovanje. Takrat lahko sipanje obravnavamo kot vsoto sipanja na dveh valovanjih z valovnima vektorjema $\mathbf{q}$ in $-\mathbf{q}$. Smer Braggovo sipanega vala je obakrat enaka, krožna frekvenca pa se enkrat poveča, drugič zmanjša za Ω. Zato se pojavi utripanje sipanega vala s krožno frekvenco 2Ω.

Uporaba akusto-optičnih modulatorjev

Spoznali smo, da lahko z zvočnim valovanjem spreminjamo smer vpadne svetlobe. Bistvena razlika od navadnih uklonskih mrežic je dinamičnost akusto-optičnih modulatorjev, saj lahko uklonski kot svetlobe hitro spreminjamo. Poglavitna omejitev je, da mora biti vsaj približno izpolnjen Braggov pogoj. S kombinacijo dveh med seboj pravokotnih akusto-optičnih modulatorjev lahko žarek premikamo po ravnini, kar s pridom uporabljamo v različnih optičnih napravah, na primer v optičnih pincetah, optičnih čitalcih ali optičnih litografskih zapisovalnikih.

Z vklapljanjem in izklapljanjem zvočnega valovanja, ki ga vzbujamo s piezoelektričnim elementom, na katerega pritisnemo izmenično napetost, lahko moduliramo intenziteto direktnega svetlobnega snopa. To potrebujemo na primer pri preklapljanju dobrote laserskega resonatorja (poglavje 6.9). Akusto-optične modulatorje uporabljamo tudi za uklepanje faz v laserskem resonatorju (poglavje 6.10). Če je v Braggovem elementu prisotno stoječe zvočno valovanje, je amplituda direktnega snopa modulirana s frekvenco zvoka. Kadar je frekvenca zvoka ravno enaka razmiku frekvenc laserskih nihanj, lahko nastanejo uklenjene faze vzbujenih nihanj in s tem kratki sunki svetlobe.

Naslednji primer uporabe je spreminjanje frekvence svetlobe. Možne so spremembe do nekaj 100 MHz, kar je ravno primerno za uporabo v laserskih merilnikih hitrosti, kjer merimo frekvenco utripanja med referenčno svetlobo in svetlobo, odbito od merjenega predmeta. Če ima referenčna svetloba isto frekvenco kot merilni snop, ni mogoče določiti predznaka hitrosti predmeta, če pa referenčni svetlobi nekoliko spremenimo frekvenco, se pojavi utripanje tudi tedaj, ko predmet miruje. Frekvenca utripanja se poveča ali zmanjša glede na predznak hitrosti predmeta.

Zanimiva je tudi uporaba Braggovega elementa za izdelavo hitrega frekvenčnega analizatorja električnih signalov. Piezoelektrični element vzbujamo z električnim signalom, ki ima neznan spekter. Enak spekter imajo tudi vzbujeni zvočni valovi, pri čemer vsakemu valu določene frekvence ustreza določen kot odklona svetlobnega snopa. Za Braggovim elementom postavimo lečo. Vsak delni uklonjeni snop da v goriščni ravnini svetlo točko, katere položaj je odvisen od kota odklona in torej od frekvence zvočnega vala. Spekter zaznamo z vrstičnim detektorjem. Akusto-optični element oziroma Braggova celica torej frekvenčni spekter zvočnih valov prevede v prostorski spekter prepuščene svetlobe. Prostorski spekter svetlobe pa lahko analiziramo z lečo, ki v goriščni ravnini da prostorsko Fourierevo transformiranko svetlobnega snopa pred lečo.

10.8 *Račun akusto-optičnega pojava

Izračunajmo gostoto energijskega toka svetlobe, ki se uklanja na zvočnem valovanju. Izhajamo iz valovne enačbe v nehomogenem sredstvu, kar je dokaj težaven problem in se moramo zateči k približkom. Uporabili bomo metodo sklopljenih valov.

Naj vzporeden snop zvočnega valovanja s širino d in valovnim vektorjem $\mathbf{q}$ potuje v smeri x. Nanj pod kotom ϑ glede na os z (normalo na kristal) vpada ravno svetlobno valovanje z valovnim vektorjem $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) = k(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$. Vse valovanje, vpadno na levi od zvočnega snopa in izhodno na njegovi desni, obravnavajmo znotraj snovi, da ni treba upoštevati še loma, ki le zaplete izraze.

Privzemimo, da se v snovi zaradi zvočnih valov spremeni le velikost dielektrične konstante. Ob upoštevanju zveze med spremembo dielektričnosti in deformacijo v zvočnem valu (enačba 10.50) spremembo dielektričnosti zapišemo kot

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \delta\varepsilon = \tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^2 p S_0 \sin(qx - \Omega t). \tag{10.61}$$

Zaradi spremembe dielektričnosti pride do pojava dodatne električne polarizacije δP

$$\delta P = \varepsilon_0 \delta\varepsilon E = -\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}^2 p S_0 \sin(qx - \Omega t) E. \tag{10.62}$$

Dodatna polarizacija v valovno enačbo doprinese nehomogen člen, podobno kot pri nelinearni optiki (enačba 11.11). Zapišemo

$$\nabla^2 E - \frac{\tilde{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial E^2}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2}, \tag{10.63}$$

pri čemer smo privzeli, da je $\nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$, čeprav je ε funkcija kraja.

Enačbo (10.63) brez dodane polarizacije δP rešijo ravni valovi z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$ in krožno frekvenco ω. Tej rešitvi se primešajo valovi z valovnim vektorjem $\mathbf{k} \pm n\mathbf{q}$ in krožno frekvenco $\omega \pm n\Omega$. Zato iščemo rešitve v obliki vsote ravnih valov, torej Fouriereve vrste

$$E = \sum_n A_n(z) e^{in(qx-\Omega t)} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}. \tag{10.64}$$

Zaradi sklopitve preko δP smo dopustili, da so amplitude A_n funkcije z. Če je $\delta\varepsilon$ dovolj majhen, se $A_n(z)$ le počasi spreminjajo.

Izračunajmo

$$\nabla^2 E = \sum_n \left(-(k_z^2 + (k_x + nq)^2) A_n(z) + 2ik_z A_n'(z)\right) e^{i((k_x+nq)x + k_z z - (\omega + n\Omega)t)}. \tag{10.65}$$

Člene z A_n'' lahko izpustimo, če je le $k_z A_n' \gg A_n''$ oziroma kadar se A_n spreminjajo počasi v primerjavi z $\exp(ik_z z)$. Drugi odvod polarizacije po času da

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2} = &-\frac{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}^2 p S_0}{2i} \sum_n A_n(z) \exp\left(i((k_x + nq)x + k_z z - (\omega + n\Omega)t)\right) \cdot \\ &\left(-(n\Omega + \omega + \Omega)^2 e^{i(qx - \Omega t)} + (n\Omega + \omega - \Omega)^2 e^{i(-qx + \Omega t)}\right),\end{aligned} \tag{10.66}$$

drugi odvod polja po času pa

$$\frac{\partial E^2}{\partial t^2} = -\sum_n (n\Omega + \omega)^2 A_n(z) e^{in(qx-\Omega t)} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}. \tag{10.67}$$

Vstavimo izraze (10.65), (10.66) in (10.67) v valovno enačbo (10.63) in izenačimo člene z isto časovno in prostorsko odvisnostjo, na primer s $k_z z + (k_x + mq)x - (\omega + m\Omega)t$. Sledi

$$-\left(k_z^2 + (k_x + mq)^2\right) A_m + 2ik_z A_m' + \frac{\tilde{\varepsilon}}{c^2}(m\Omega + \omega)^2 A_m = \tag{10.68}$$

$$= \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}^2 p S_0}{2i}(\omega + m\Omega)^2 (A_{m-1} - A_{m+1}). \tag{10.69}$$

Upoštevamo, da je

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\tilde{\varepsilon}\omega^2}{c^2} \tag{10.70}$$

in naredimo približek $(\omega + m\Omega)^2 \approx \omega^2$. Sledi

$$A_m' + i\beta_m A_m + \xi(A_{m+1} - A_{m-1}) = 0, \tag{10.71}$$

kjer sta

$$\beta_m = \frac{mq}{k_z}(k_x + \frac{1}{2}mq) \quad \text{in} \quad \xi = -\frac{\tilde{\varepsilon} p S_0 k^2}{4k_z}. \tag{10.72}$$

Reševanje sistema enačb (10.71) je težavno, zato poiščimo rešitve le v treh pomembnih limitnih primerih. Amplituda vala, ki vpada z leve, naj bo $A_0(0) = A_0$, za ostale pa naj velja $A_n(0) = 0$.

Braggov uklon ob šibki pretvorbi

Najprej privzemimo, da je $\xi d \ll 1$, da je torej velikost $\delta\varepsilon$ majhna in debelina zvočnega snopa ne prevelika. Tedaj pri vseh z in za pozitivne m velja $A_{m+1} \ll A_m$ in lahko člen A_{m+1} v enačbi (10.71) izpustimo. S tem zapišemo preprost sistem enačb

$$A_m' + i\beta_m A_m = \xi A_{m-1}, \tag{10.73}$$

ki jih lahko zapored integriramo

$$A_m(z) = \xi e^{-i\beta_m z} \int_0^z A_{m-1}(z') e^{i\beta_m z'} dz'. \tag{10.74}$$

Podobne izraze izpeljemo za negativne m.

Poglejmo posebej prvi uklonjeni val z amplitudo A_1. Po predpostavki, da je $A_{\pm 1} \ll A_0$, se le malo energije uklanja iz osnovnega vala in lahko privzamemo, da je $A_0(z)$ skoraj konstanta. Potem lahko integral v enačbi (10.74) izračunamo

$$A_1(d) = A_0 \xi d \frac{\sin \beta_1 d/2}{\beta_1 d/2} e^{-i\beta_1 d/2}, \tag{10.75}$$

pri čemer je d debelina plasti zvočnega valovanja. Funkcija $A_1(d)$ ima vrh pri $\beta_1 = 0$, to je po enačbi (10.72) pri

$$k_x + \frac{q}{2} = k \sin\vartheta + \frac{q}{2} = 0 \qquad \text{ali} \qquad 2\Lambda \sin\vartheta = -\lambda. \tag{10.76}$$

Vidimo, da predstavlja $\beta_1 = 0$ ravno pogoj za Braggovo sipanje vpadnega vala.

Delež moči uklonjenega vala je

$$\boxed{\frac{I_1}{I_0} = \left|\frac{A_1}{A_0}\right|^2 = (\xi d)^2 \left(\frac{\sin \beta_1 d/2}{\beta_1 d/2}\right)^2.} \tag{10.77}$$

Če je Braggov pogoj izpolnjen, je $I_1/I_0 = (\xi d)^2$ in naraščanje parabolično. To seveda lahko velja le, dokler je $\xi d \ll 1$. Kadar intenziteta uklonjenega žarka tako naraste, da ta pogoj ni več izpolnjen, je treba v računu upoštevati tudi zmanjšanje moči vpadnega snopa.

Braggov uklon ob znatni pretvorbi

Drug primer naj bo približek, da sta le A_0 in A_1 različna od nič, opustimo pa omejitev $\xi d \ll 1$. Ta približek je smiseln, saj je Braggov pogoj hkrati lahko izpolnjen le za en uklonjen val, na primer $m = 1$. Tedaj so vse ostale amplitude $A_{m,m\neq 0,1}$ majhne in ne vplivajo na A_1. Zaradi velike pretvorbe $A_0(z)$ ne smemo več obravnavati kot konstante. Upoštevamo izpolnjen Braggov pogoj (enačba 10.76) in iz sistema enačb (10.71) sledi

$$\begin{aligned} A_0' + \xi A_1 &= 0 \\ A_1' - \xi A_0 &= 0. \end{aligned} \tag{10.78}$$

Ob začetnih pogojih $A_0(0) = A_0$ in $A_1(0) = 0$ sta rešitvi gornjih enačb

$$A_0(d) = A_0 \cos(\xi d) \tag{10.79}$$

in

$$A_1(d) = A_0 \sin(\xi d). \tag{10.80}$$

Če je izpolnjen Braggov pogoj, se moč vpadnega vala na razdalji $\pi/(2\xi)$ skoraj vsa pretoči v uklonjeni snop, nato pa zopet nazaj (slika 10.11). Za čim bolj učinkovito delovanje akusto-optičnega modulatorja seveda želimo doseči ravno take pogoje.

Slika 10.11: Relativna intenziteta prepuščenega (črna) in uklonjenega (rdeča) valovanja na zvočnem valovanju v odvisnosti od debeline plasti zvočnega valovanja.

V gornja izraza vstavimo še parameter ξ, ki je podan z enačbo (10.72). Razmerje med intenziteto uklonjenega in vpadnega snopa je tako

$$\boxed{\frac{I_1}{I_0} = \sin^2\left(\frac{\pi n_0^3 p S_0 d}{2\lambda \cos\vartheta}\right),} \tag{10.81}$$

pri čemer je $n_0 = \sqrt{\tilde{\varepsilon}}$. Poiščimo še amplitudo deformacije S_0. Za longitudinalne (zvočne) valove v snovi oblike $u = u_0 \cos(qx - \Omega t)$ je deformacija

$$S_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} = -u_0 q \sin(qx - \Omega t). \tag{10.82}$$

Povprečna gostota energijskega toka zvočnega valovanja je

$$j_z = \frac{1}{T}\int_0^T v_z \left(\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho v_z^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dt = \frac{1}{2}\rho v_z^3 S_0^2, \tag{10.83}$$

kjer je v_z hitrost zvoka v snovi in ρ gostota snovi. Sledi

$$S_0 = \sqrt{\frac{2j_z}{\rho v_z^3}}. \tag{10.84}$$

Praktično je vpeljati merilo uporabnosti neke snovi za akusto-optični modulator. To je koeficient

$$M = \frac{n_0^6 p^2}{\rho v_z^3}. \tag{10.85}$$

Večja kot je vrednost koeficienta M, bolj izrazit je akusto-optični pojav v dani snovi. Izkoristek pretvorbe s koeficientom M potem zapišemo kot

$$\frac{I_1}{I_0} = \sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda\cos\vartheta}\sqrt{\frac{j_z M}{2}}\right). \tag{10.86}$$

Poglejmo primer. V kremenu z gostoto $\rho = 2,2\cdot 10^3$ kg/m^3 je hitrost zvoka $v_z = 6000$ m/s, $n_0 = 1,46$ in $p = 0,2$. To da $M = 8\cdot 10^{-16}$ m^2/W. Pri gostoti zvočnega toka 10 W/cm^2 in valovni dolžini svetlobe 633 nm pride do popolnega prenosa moči v uklonjeni snop pri debelini $d \sim 3$ cm. Upoštevana gostota zvočnega toka je kar velika in je ni prav lahko doseči, zato so uklonski izkoristki navadno nekaj manjši od 1.

★ Opisani račun izkoristka uklona na zvočnih valovih je uporaben tudi pri računu izkoristka holograma. V primeru faznega holograma je račun povsem enak in jasno kaže razliko med tankim in debelim hologramom. Kako pa je z izkoristkom amplitudnega holograma, kjer je modulirana absorpcija v snovi, lahko bralec izračuna sam ali najde v literaturi.[7]

Raman-Nathov uklon

Oglejmo si še tretji primer. Izhajamo iz sistema enačb (10.71), ki smo ga zaenkrat rešili za primer Braggovega uklona oziroma v njegovi bližini. Enačbe je preprosto rešiti še v primeru tanke mrežice oziroma t. i. Raman-Nathovega približka. Vpeljimo novo neodvisno spremenljivko $\zeta = 2\xi z$. Zveza (10.71) preide v

$$2\frac{dA_m(\zeta)}{d\zeta} + A_{m+1}(\zeta) - A_{m-1}(\zeta) = \frac{\beta_m}{i\xi}A_m. \tag{10.87}$$

Člen na desni lahko izpustimo, če je

$$\frac{\beta_m}{\xi} = \left|\frac{4mq}{\tilde{\varepsilon}pS_0k}(\sin\vartheta + \frac{mq}{2k})\right| \ll 1, \tag{10.88}$$

oziroma če je valovna dolžina zvoka dovolj velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Potem v enačbi (10.87) prepoznamo rekurzijsko zvezo za Besslove funkcije

$$2J_n' + J_{n+1} - J_{n-1} = 0 \tag{10.89}$$

z rešitvijo $A_m(z) = A_0 J_m(2\xi z)$. Kadar je $2\xi d$ ničla funkcije J_0, prvič je to pri $2\xi d \approx 2,4$, se vsa energija ukloni iz vpadnega snopa, vendar se v tem primeru razporedi v mnogo uklonjenih snopov.

[7] H. Kogelnik, Bell Syst. Tech. J. 48, 2909 (1969).

10.9 Modulacija s tekočimi kristali

Nematični tekoči kristali

Za konec opišimo še modulacijo svetlobe s tekočimi kristali. Tekoči kristali so anizotropne kapljevine. To pomeni, da so tekoči kot kapljevine, imajo pa določene anizotropne lastnosti kot trdni kristali. Tekoče kristale tvorijo podolgovate ali ploščate molekule, ki odražajo različne stopnje urejenosti.

Omejimo se na najosnovnejši primer, to so podolgovate organske molekule v nematični fazi tekočega kristala. Navadno so to molekule z razmeroma togim jedrom iz dveh ali treh benzenovih obročev, ki imajo na koncih krajše ali daljše alifatske verige (slika 10.12). Značilnost nematične faze je, da so v njej težišča molekul neurejena, enako kot v navadni tekočini, osi molekul pa so v povprečju urejene v določeno smer. Pravimo, da imajo molekule v nematiku orientacijsko ureditev dolgega dosega. Če nematik segrejemo, preide v izotropno tekočo fazo, če pa ga ohladimo, neposredno ali prek drugih tekočekristalnih faz preide v trdno kristalno obliko.

Smer povprečne urejenosti podolgovatih molekul opišemo z enotskim vektorjem **n**, ki ga imenujemo direktor. Smeri **n** in $-\mathbf{n}$ sta enakovredni, saj molekule z enako verjetnostjo kažejo v smer $+\mathbf{n}$ kot v $-\mathbf{n}$. Stopnja urejenosti v mikroskopski sliki ni prav velika, povprečen odklon molekul od **n** je nekaj deset stopinj, odvisno seveda od temperature.

Slika 10.12: Molekula enega najbolj razširjenih tekočih kristalov, 4-ciano-4'pentil-bifenila ali 5CB (levo) in shematski prikaz nematične faze z označenim direktorjem (desno)

Molekule so v nematični fazi v povprečju orientacijsko urejene, zato se nematik obnaša kot enoosni dvolomni kristal. Njegova optična os je vzporedna z **n**, lastni vrednosti dielektričnega tenzorja pa sta $\varepsilon_\perp$ in $\varepsilon_\parallel$, ki ustrezata rednemu (n_o) in izrednemu (n_e) lomnemu količniku. Ker je optična polarizirnost benzenovih obročev vzdolž osi molekul precej večja kot v prečni smeri, je razlika med rednim in izrednim lomnim količnikom v nematiku razmeroma velika, navadno med $0,1$ in $0,2$, seveda spet odvisno od temperature.

V povprečju so molekule urejene v smeri direktorja. Če se smer direktorja lokalno spremeni, je energija takega deformiranega stanja nekoliko večja od energije homogenega urejenega stanja. Tekoči kristal na drugače orientiran delček snovi zato deluje z navorom v smeri zmanjševanja nehomogenosti **n**. To lastnost, ki je značilna za tekoče kristale, imenujemo orientacijska elastičnost. Vendar so v makroskopskem vzorcu nematičnega tekočega kristala elastični navori prešibki, da bi uredili celoten vzorec, zato se na splošno smer direktorja **n** po vzorcu neurejeno spreminja. Da dobimo urejene vzorce, ki jih potrebujemo za izdelavo optičnih naprav, moramo ureditev vzorca vsiliti. To naredimo z zunanjim električnim ali magnetnim poljem, ali pa vzorce pripravimo dovolj tanke, da ureditev vsilijo mejne površine.

Poglejmo, kako nastane urejen vzorec v tankih plasteh. Če površino, ki je v stiku s tekočim kristalom, ustrezno pripravimo (prevlečemo s posebnimi plastmi ali mehansko obdelamo), se molekule tekočega kristala tik ob površini uredijo v dani smeri. Tako na primer podrgnjena tanka plast najlona uredi **n** ob površini v smeri drgnjenja vzporedno s površino (slika 10.13 a). Po drugi strani pa tanka plast lecitina ali surfaktanta silana uredi direktor pravokotno na površino (slika 10.13 b). Ti dve snovi imata namreč polarno glavo, ki se adsorbira na stekleno površino, in alifatsko verigo, ki stoji približno pravokotno na površino. Zato se tudi alifatski repi molekul tekočega kristala uredijo pravokotno na steklo. V obeh primerih, vzporedni (planarni) ali pravokotni (homeotropni) ureditvi ob steni, se urejenost zaradi orientacijske elastičnosti ohranja tudi stran od stene, tako da lahko brez težav naredimo urejene vzorce debeline do kakih 200 μm. Pri večjih debelinah so elastični navori prešibki in v vzorcu nastanejo defekti.

Slika 10.13: Ureditev tekočega kristala navadno vsilimo z urejevalno površino. Dva primera sta planarna ureditev (a), kjer je direktor vzporeden z urejevalno površino, in homeotropna ureditev (b), kjer je direktor pravokoten na mejno ploskev.

Na ureditev molekul tekočega kristala vpliva zunanje električno ali magnetno polje. Zaradi urejenosti molekul električna (ali magnetna) susceptibilnost nematičnega tekočega kristala ni skalar, temveč ima dve različni lastni vrednosti, eno za smer vzporedno z **n**, drugo za pravokotno nanj. Zato je elektrostatična energija odvisna od kota med zunanjim poljem **E** in direktorjem **n**. Pri konstantnem zunanjem električnem polju gostoto električne energije zapišemo kot

$$w_{el} = -\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}. \tag{10.90}$$

Električno polje lahko razstavimo na del, ki je vzporeden z **n**, in del, ki je pravokoten nanj

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{E} - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}). \tag{10.91}$$

Potem je

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_\perp\mathbf{E} + \varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}, \tag{10.92}$$

pri čemer je $\varepsilon_a = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$ anizotropni del dielektrične konstante. Anizotropni del gostote energije je tako do konstante

$$\boxed{w_a = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})^2.} \tag{10.93}$$

Če je $\varepsilon_a > 0$, se molekule tekočega kristala uredijo v smeri zunanjega polja, v nasprotnem primeru pa pravokotno nanj.

Urejenost tekočekristalnega vzorca je tako odvisna od orientacijske elastičnosti, robnih pogojev, ki jih določimo z obdelavo mejne površine, in od jakosti ter smeri zunanjega električnega ali magnetnega polja.

Tekočekristalni prikazovalnik

Vzemimo tanko plast tekočega kristala med dvema površinama, ki vsiljujeta vzporedno planarno ureditev. Vzorec je urejen in homogen, optična os leži v ravnini plasti. Če dodamo na površini še prozorni elektrodi, lahko z zunanjo napetostjo spreminjamo orientacijo molekul v plasti in tako tudi smer optične osi. Dovolj velika napetost zasuče **n** in optična os se postavi pravokotno na stene, razen tik ob površini. Tipično so take napetosti okoli nekaj voltov.

Ta pojav lahko izkoristimo za izdelavo preprostega optičnega preklopnika. Naj debelina plasti d ustreza debelini ploščice $\lambda/2$ za izbrano valovno dolžino svetlobe

$$d(n_e - n_o) = (2N+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{10.94}$$

kjer je N celo število, n_e izredni in n_o redni lomni količnik. Ker je v nematikih $n_e - n_o \sim 0,1$, je ustrezna debelina d nekaj µm. Tak vzorec damo med dva prekrižana polarizatorja s prepustno smerjo pod kotom 45 ° glede na **n** oziroma optično os. Vzorec, ki deluje kot ploščica $\lambda/2$, polarizacijo svetlobe z izbrano valovno dolžino zasuče za 90 ° in svetloba prehaja skozi analizator. Ko priključimo napetost, se optična os obrne v smeri polja. Polarizacija vpadne svetlobe se pri prehodu skozi plast ohrani in analizator je ne prepusti. Z električnim poljem smo torej preklopili iz stanja, ki prepušča svetlobo, v stanje, ki svetlobe ne prepusti. Vendar ima tak preklopnik nekaj slabosti. Prepustnost je odvisna od valovne dolžine svetlobe in od temperature, poleg tega mora biti debelina plasti povsod povsem enaka. Zato se v praksi uporablja zasukan nematik.

Zasukan nematik nastane tako, da površini, ki vsiljujeta planarno ureditev, zasučemo za kot 90 ° eno glede na drugo (slika 10.14 a), zato se **n** v plasti zvezno zavrti. Pokazali bomo, da polarizacija svetlobe, ki je ob vstopu v plast polarizirana v smeri urejanja, pri prehodu skozi plast približno sledi **n** in je ob izstopu iz plasti pravokotna na vpadno polarizacijo. Ko priključimo električno polje, se direktor obrne v smer pravokotno na plast tekočega kristala (slika 10.14 b). V tem primeru se polarizacija ne zasuče in analizator svetlobe ne prepusti. Plast med prekrižanima polarizatorjema brez polja torej prepušča svetlobo, s poljem pa ne. Pri tem delovanje prikazovalnika ni dosti odvisno niti od debeline plasti niti od valovne dolžine svetlobe.

★ Tekočekristalni zasloni, ki jih uporabljamo v praksi, so precej bolj zapleteni. Najpreprostejši so črno-beli prikazovalniki, ki delujejo z odbito svetlobo (npr. v žepnih računalih), zato imajo za analizatorjem odbojno površino. Večina sodobnih prikazovalnikov (npr. računalniški ali telefonski zasloni) ima svoj izvor svetlobe, praviloma so to LED ali fluorescenčna svetila. Barve dosežemo z barvnimi filtri (rdečim, modrim in zelenim) na vsakem pikslu posebej, natančno krmiljenje pikslov pa s tankoplastnimi tranzistorji (*Thin film transistors*, TFT). Veliko sodobnejših zaslonov ima tekoče kristale urejene planarno, tekočekristalne zaslone pa lahko z dodatnimi plastmi naredimo tudi občutljive na dotik.

10.10 *Račun prehoda svetlobe skozi zasukan nematik

Pokazati moramo še, da polarizacija svetlobe pri prehodu skozi zasukan nematik približno sledi zasuku optične osi. Vzemimo vzorec, kakršen je na sliki (10.14 a) in ga obravnavajmo kot lokalno optično enoosno snov. Pri $z = 0$ naj bo optična os v smeri x, ko se premikamo vzdolž osi z, pa naj se optična os suče v ravnini xy. Kot med optično osjo in osjo x tako zapišemo

$$\varphi = qz. \tag{10.95}$$

Slika 10.14: a) V zasukani nematični celici polarizacija sledi smeri zasukanega direktorja in analizator (A) prepušča svetlobo. b) V električnem polju (**E**) se tekočekristalne molekule zasučejo v smer polja. Polarizacija svetlobe se ohranja in analizator (A) svetlobe ne prepušča.

Slika 10.15: Na močno povečani sliki računalniškega tekočekristalnega zaslona se jasno vidi, da je vsak piksel sestavljen iz treh barv.

Poleg zasukane nematične celice je pomemben primer snovi s takimi lastnostmi holesterični tekoči kristal, ki je zelo podoben nematičnemu, le da so molekule kiralne in se **n** spontano suče okoli smeri, pravokotne na **n**. Zanimajmo se le za širjenje svetlobe v smeri z. Tedaj potrebujemo le del dielektričnega tenzorja v xy ravnini.

Naloga 10.10.1 Pokaži, da se dielektrični tenzor v zasukani nematični plasti zapiše kot

$$\varepsilon(z) = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon_a \cos(2qz) & \frac{1}{2}\varepsilon_a \sin(2qz) \\ \frac{1}{2}\varepsilon_a \sin(2qz) & \bar{\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon_a \cos(2qz) \end{bmatrix}, \tag{10.96}$$

kjer je z razdalja od plasti, v kateri je direktor obrnjen v smeri x, povprečna vrednost $\bar{\varepsilon}$ pa

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_\parallel + \varepsilon_\perp}{2}. \tag{10.97}$$

Namig: Zasukan tenzor $\varepsilon(z)$ pri danem z izračunamo iz nezasukanega $\tilde{\varepsilon}$ s transformacijo

$\varepsilon(z) = A(\varphi) \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot A(\varphi)^{\mathrm{T}}$, pri čemer je $A(\varphi)$ rotacijska matrika.

Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) hitro uvidimo, da je valovna enačba za valovanje s krožno frekvenco ω v našem primeru oblike

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(z)\mathbf{E} = 0 \tag{10.98}$$

ali po komponentah, upoštevajoč tenzor dielektričnosti (enačba 10.96)

$$\frac{d^2E_x}{dz^2} + (\beta^2 + \alpha^2\cos(2qz))E_x + \alpha^2 E_y \sin(2qz) = 0 \tag{10.99}$$

in

$$\frac{d^2E_y}{dz^2} + \alpha^2 E_x \sin(2qz) + (\beta^2 - \alpha^2\cos(2qz))E_y = 0, \tag{10.100}$$

kjer je $\alpha^2 = \varepsilon_a\omega^2/(2c^2)$ in $\beta^2 = \bar{\varepsilon}\omega^2/c^2$. S tem smo dobili sistem dveh sklopljenih diferencialnih enačb, ki ga lahko rešimo.

Za reševanje je ugodno vpeljati krožni polarizaciji $E_+ = E_x + iE_y$ in $E_- = E_x - iE_y$. Enačbi (10.99) in (10.100) prepišemo v

$$-\frac{d^2E_+}{dz^2} = \beta^2 E_+ + \alpha^2 E_- e^{2iqz} \tag{10.101}$$

in

$$-\frac{d^2E_-}{dz^2} = \alpha^2 E_+ e^{-2iqz} + \beta^2 E_-. \tag{10.102}$$

Lastne rešitve poiščemo v obliki

$$E_+ = Ae^{i(k+q)z} \tag{10.103}$$

in

$$E_- = Be^{i(k-q)z}. \tag{10.104}$$

Nastavek reši sistem enačb (10.101) in (10.102), natanko takrat, kadar A in B rešita sistem homogenih linearnih enačb

$$\left((k+q)^2 - \beta^2\right)A - \alpha^2 B = 0 \tag{10.105}$$

in

$$-\alpha^2 A + \left((k-q)^2 - \beta^2\right)B = 0. \tag{10.106}$$

Sistem je netrivialno rešljiv, če je determinanta koeficientov enaka nič

$$\left(k^2 + q^2 - \beta^2\right)^2 - 4k^2q^2 - \alpha^4 = 0. \tag{10.107}$$

Spomnimo se, da sta β in α sorazmerna z ω, zato dobljena enačba predstavlja disperzijsko relacijo – zvezo med ω in k – za svetlobo v zasukanem sredstvu

$$\left(k^2 + q^2 - \frac{\bar{\varepsilon}\omega^2}{c^2}\right)^2 - 4k^2q^2 - \frac{\varepsilon_a^2\omega^4}{4c^4} = 0. \tag{10.108}$$

Da dobimo disperzijsko odvisnost $k(\omega)$, moramo rešiti gornjo kvadratno enačbo. Vendar za razlago delovanja zasukane nematične celice zadošča približek $q \ll \alpha$ in $q \ll \beta$, saj je perioda sukanja optične osi velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Tedaj lahko q v disperzijski zvezi (enačba 10.107) zanemarimo in velja

$$k^2 = \begin{cases} \beta^2 + \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\parallel} \\ \beta^2 - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}. \end{cases} \tag{10.109}$$

Ti vrednosti ustrezata velikosti valovnega vektorja za izredni in redni val v navadnem enoosnem kristalu. Vstavimo ju v enačbi (10.103 in 10.104) in za polarizaciji lastnih valov dobimo $B = \pm A$. Izračunajmo še obe kartezični komponenti električnega polja za prvo rešitev

$$E_x = \frac{1}{2}(E_+ + E_-) = \frac{1}{2}Ae^{ikz}(e^{iqz} + e^{-iqz}) = Ae^{ikz}\cos qz \tag{10.110}$$

$$E_y = \frac{1}{2i}(E_+ - E_-) = \frac{1}{2i}Ae^{ikz}(e^{iqz} - e^{-iqz}) = Ae^{ikz}\sin qz. \tag{10.111}$$

Zasuk polarizacije torej res sledi zasuku optične osi. Druga rešitev da val, ki je polariziran pravokotno na lokalno optično os in se prav tako suče z njo. Pri tem se prvi val širi kot izredni val s fazno hitrostjo c/n_e, drugi pa kot redni val s c/n_o. Če na zasukano nematično celico vpada svetloba, ki je polarizirana ali vzporedno z optično osjo ob meji ali pravokotno nanjo, se pojavi na izhodni strani polarizacija, zasukana za enak kot, kot je zasukana optična os. V primeru, da vpadna polarizacija ne sovpada z eno od lastnih osi, jo razstavimo na obe lastni in po prehodu skozi tekoči kristal zopet sestavimo, s čemer seveda na splošno nastane eliptična polarizacija.

★ Disperzijsko zvezo (enačbi 10.107 in 10.108) lahko rešimo (slika 10.16). Pri izbrani vrednosti α obstajajo pri vseh frekvencah, razen v ozkem območju – rečemo mu frekvenčna reža – štiri realne rešitve za k, po dve za valovanji v pozitivni in v negativni smeri. V območju reže je en par rešitev imaginaren. Vsaki vrednosti k pripada neko razmerje amplitud A in B, ki ga izračunamo iz enačb (10.105) in (10.106) in ki določa polarizacijo lastnega vala. Polarizacije lastnih valov so na splošno eliptične in pri dani frekvenci med seboj niso pravokotne, saj zapisani sistem enačb ne predstavlja čisto navadnega problema lastnih vektorjev simetrične matrike. V območju frekvenčne reže le en par rešitev predstavlja potujoč val, drug pa polje, ki eksponentno pojema v sredstvo. Zato se svetloba s frekvenco v reži in z ustrezno polarizacijo totalno odbije. Pojav v zasukanih nematskih celicah ni opazen, saj je tam $q \ll \alpha$. Če pa je perioda vijačnice primerljiva z valovno dolžino svetlobe, kot na primer v holesteričnih tekočih kristalih, pride do značilnega obarvanega videza. Pojav je povsem analogen Braggovemu odboju na kristalih.

Slika 10.16: Rešitve disperzijske zveze (enačba 10.107) v zasukanem nematiku ali holesteriku pri danem α. Razen v frekvenčni reži (modra pasova) obstajajo štiri rešitve za vsako frekvenco.

10.11 Račun preklopa v tekočem kristalu – Frederiksov prehod

Ob opisu tekočekristalnih prikazovalnikov smo omenili, da lahko z dovolj velikim zunanjim električnim poljem molekule tekočega kristala, razen tik ob urejevalni površini, obrnemo v smeri polja. Izračunajmo jakost polja, ki je potrebna za ta zasuk.

Energija nematičnega tekočega kristala je najnižja, kadar je direktor **n** povsod obrnjen v isto smer. Povečanje energije zaradi krajevne odvisnosti **n** zapišemo z orientacijsko elastično energijo oziroma Frankovo prosto energijo[8]

$$F_e = \frac{1}{2}\int \left\{K_1(\nabla\cdot\mathbf{n})^2 + K_2\left(\mathbf{n}\cdot(\nabla\times\mathbf{n})\right)^2 + K_3\left(\mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{n})\right)^2\right\} dV. \tag{10.112}$$

Pri tem so K_1, K_2 in K_3 tri Frankove elastične konstante, ki so odvisne od snovi in tudi od temperature. Prvi člen predstavlja povečanje energije zaradi deformacije v obliki pahljače, drugi zaradi zasuka in tretji zaradi upogiba (slika 10.17).

Slika 10.17: Trije načini deformacije ureditve tekočega kristala so pahljačasta deformacija, zasuk in upogib.

V zunanjem električnem polju se energija tekočega kristala dodatno spremeni. Navadno je neodvisna količina električna poljska jakost, saj je polje posledica zunanje napetosti na elektrodah. Ustrezni člen v prosti energiji je tedaj (enačbi 10.90 in 10.92)

$$F_{el} = -\int \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dV = -\frac{1}{2}\int \left(\varepsilon_0\varepsilon_\perp \mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})^2\right) dV = F_0 + F_{el,a}. \tag{10.113}$$

Prvi člen je neodvisen od **n**, zato ni pomemben pri izračunu preklopa. Prosta energija nematičnega tekočega kristala v električnem polju je tako

$$F = F_e + F_{el} = F_0 + F_e + F_{el,a} = F_0 + F_e - \int \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})^2 dV, \tag{10.114}$$

kjer F_0 predstavlja del proste energije, ki je neodvisen od **n**. Tekoči kristal je v ravnovesju, ko je prosta energija najmanjša. Kadar je $\varepsilon_a > 0$, se zato skuša **n** postaviti vzporedno s poljem, popoln zasuk pa onemogoča mejna urejevalna plast. Da lahko z minimizacijo F izrazimo $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, moramo torej poznati še robne pogoje.

Poglejmo primer. Naj bo nematični tekoči kristal med dvema vzporednima steklenima ploščama, med katerima je razmik d. Na obeh ploščah naj bo **n** vzporeden s površino in obrnjen v isto smer, tako da je brez zunanjega polja **n** povsod enako usmerjen. Naj bo to smer x. Na stekleni plošči dodamo elektrodi, ki ustvarjata polje pravokotno na prvotno smer direktorja, naj bo to smer z. Ko priključimo polje, je energijsko ugodnejše, da se molekule vsaj delno zasučejo v smer polja. Ta zasuk opišemo s komponento vektorja **n** v smeri z

$$\mathbf{n}(z) = (n_x(z), 0, n_z(z)). \tag{10.115}$$

[8] Angleški fizik Sir Frederick Charles Frank, 1911–1998.

Robni pogoj, kateremu mora direktor zadostiti, je $n_z(0) = n_z(d) = 0$. Približno rešitev zato iščemo z nastavkom

$$n_z(z) = a\sin(qz), \qquad q = \frac{\pi}{d}, \tag{10.116}$$

ki ni nič drugega kot prvi člen razvoja prave rešitve v Fourierevo vrsto. Ker je direktor enotski vektor, velja

$$n_x = \sqrt{1 - a^2\sin^2(qz)} \approx 1 - \frac{a^2}{2}\sin^2(qz). \tag{10.117}$$

Vzdolž smeri x in y se direktor ne spreminja, zato velja

$$\nabla \times \mathbf{n} = (0, \frac{dn_x}{dz}, 0) \tag{10.118}$$

in

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}) = (-n_z\frac{dn_x}{dz}, 0, n_x\frac{dn_x}{dz}). \tag{10.119}$$

Površinska gostota proste energije je tako do konstante

$$\begin{aligned} F_S &= \frac{1}{2}\int\left(K_1\left(\frac{dn_z}{dz}\right)^2 + K_3(n_x^2+n_z^2)\left(\frac{dn_x}{dz}\right)^2 - \varepsilon_0\varepsilon_a(n_zE)^2\right)dz = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^d \left(K_1q^2a^2\cos^2(qz) + K_3q^2a^4\sin^2(qz)\cos^2(qz) - \varepsilon_0\varepsilon_aE^2a^2\sin^2(qz)\right)dz = \\ &= \frac{d}{4}\left(K_1q^2a^2 + \frac{1}{4}K_3q^2a^4 - \varepsilon_0\varepsilon_aE^2a^2\right). \end{aligned} \tag{10.120}$$

V našem primeru smo integral lahko izračunali, saj smo uporabili nastavek (enačba 10.116). Sicer bi morali uporabiti Euler-Lagrangeevo metodo za minimizacijo proste energije, ki jo poznamo iz variacijskega računa.

Zdaj lahko poiščemo amplitudo deformacije a, pri kateri je prosta energija najmanjša in odvod $dF_S/da = 0$. Tedaj mora biti a rešitev enačbe

$$2(K_1q^2 - \varepsilon_0\varepsilon_aE^2)a + K_3q^2a^3 = 0. \tag{10.121}$$

Rešitvi sta

$$a = 0 \tag{10.122}$$

in

$$a^2 = 2\frac{\varepsilon_0\varepsilon_aE^2 - K_1q^2}{K_3q^2}. \tag{10.123}$$

Pri majhnih poljih, ko je $\varepsilon_0\varepsilon_aE^2 < K_1q^2$, je fizikalno smiselna le prva rešitev, ki predstavlja vzorec brez deformacije. Pri velikih poljih postane stabilna druga rešitev. Takrat deformacija v sredini plasti hitro naraste, tako da se $\mathbf{n}$ postavi skoraj popolnoma v smer zunanjega polja. Tedaj naša rešitev seveda ni dobra, saj smo pri računu privzeli, da je $n_z \ll 1$. Prehodu iz nedeformiranega stanja v deformirano stanje pravimo Frederiksov prehod[9]. Na njem temelji preklapljanje optičnih prikazovalnikov na nematične tekoče kristale.

[9] Ruski fizik Vsevolod Konstantinovič Frederiks, tudi Fréedericksz, 1885–1944.

Izračunajmo še kritično jakost električnega polja, pri kateri pride do prehoda v deformirano fazo. To se zgodi pri

$$\varepsilon_0 \varepsilon_a E_c^2 - K_1 q^2 = 0 \tag{10.124}$$

oziroma

$$E_c = \frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_a}}. \tag{10.125}$$

V tipičnem tekočekristalnem prikazovalniku je napetost, potrebna za prehod, $U = E_c d \sim 3\mathrm{V}$.

Poglejmo še, kako narašča amplituda deformacije v bližini prehoda. Iz enačbe (10.123) sledi

$$a = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_a}{K_3 q^2}(E^2 - E_c^2)}. \tag{10.126}$$

Pogosto naredimo približek enakih konstant, kjer privzamemo, da so vse Frankove elastične konstante enake vrednosti. V tem približku je

$$a \approx \sqrt{\frac{2(E^2 - E_c^2)}{E_c^2}} \tag{10.127}$$

in amplituda korensko narašča s naraščajočim poljem (slika 10.18). Tak prehod je fazni prehod drugega reda, saj količina, ki opisuje prehod (amplituda deformacije a) zvezno preide iz vrednosti $a = 0$ v končno vrednost.

Slika 10.18: Kvalitativno obnašanje amplitude deformacije a ob Frederiksovem prehodu

Naloga 10.11.1 Izračunaj Frederiksov prehod v zasukani nematični celici (kot zasuka med zgornjo in spodnjo mejno ploskvijo naj bo $\pi/2$) in pokaži, da je kritično polje za prehod enako

$$E_c = \frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_a}}\sqrt{1 + \frac{K_3 - 2K_2}{4K_1}}. \tag{10.128}$$

Namig: uporabi nastavek $\varphi = z\pi/2d$ in $\vartheta = a\sin(\pi z/d)$.

11. Nelinearna optika

Pri obravnavi svetlobnega valovanja v snovi smo doslej vedno privzeli linearno zvezo med polarizacijo in jakostjo električnega polja. To je seveda približek, ki je dovolj dober le pri razmeroma majhnih jakostih polja. Kadar doseže električna poljska jakost velike vrednosti – in v laserskih snopih jih nedvomno lahko doseže – je treba upoštevati tudi višje člene v razvoju. Takrat govorimo o nelinearni optiki, saj zveza med polarizacijo in električnim poljem ni linearna. V tem poglavju bomo spoznali zanimive pojave, ki jih povzroči nelinearni del polarizacije, med drugim optično frekvenčno podvajanje, optično parametrično ojačevanje, optično usmerjanje, samozbiranje laserskega snopa, optične solitone in optično fazno konjugacijo.

11.1 Nelinearna susceptibilnost

V linearnem približku odziva snovi velja, da je polarizacija snovi $\mathbf{P}$ linearna funkcija električne poljske jakosti svetlobe $\mathbf{E}$. Takrat zapišemo (enačba 1.7)

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\underline{\varepsilon} - 1) \cdot \mathbf{E}. \tag{11.1}$$

Če uvedemo tenzor linearne susceptibilnosti

$$\chi^{(1)} = \underline{\varepsilon} - 1, \tag{11.2}$$

lahko linearni odziv snovi zapišemo strnjeno kot

$$\mathbf{P}_{\mathrm{L}} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E}. \tag{11.3}$$

Ta približek je dober za majhne jakosti električnega polja. Pri večjih poljih postanejo pomembni tudi členi višjega reda v razvoju polarizacije po $\mathbf{E}$

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathrm{L}} + \mathbf{P}_{\mathrm{NL}} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E}\,\mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\,\mathbf{E}\,\mathbf{E} + \ldots} \tag{11.4}$$

Vpeljali smo nelinearni susceptibilnosti $\chi^{(2)}$ in $\chi^{(3)}$, ki sta tenzorja tretjega in četrtega ranga. Za bolj nazorno predstavo izpišimo notranja produkta tenzorjev z vektorji še po komponentah

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},2})_i = \varepsilon_0 \sum_{j,k} \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k = \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k \tag{11.5}$$

in

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},3})_i = \varepsilon_0 \sum_{j,k,l} \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l = \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l, \tag{11.6}$$

pri čemer smo uporabili Einsteinov zapis seštevanja po indeksih. Značilne vrednosti susceptibilnosti v trdnih snoveh so $\chi^{(1)} \sim 1$, $\chi^{(2)} \sim 10^{-11}$ m/V in $\chi^{(3)} \sim 10^{-22}$ m^2/V^2. Obravnavali bomo samo snovi, v katerih ni izgub in so susceptibilnosti realne.

Naloga 11.1.1 Pokaži, da so gostote svetlobnega toka, pri katerih dosežemo znaten nelinearen prispevek k polarizaciji in velja

$$\frac{P_{NL}}{P_L} \sim 10^{-5},$$

velikostnega reda 1 $\mathrm{MW/cm^2}$. Ker so take vrednosti z navadnimi svetili povsem nedosegljive, je bilo mogoče nelinearne optične pojave opazovati šele po iznajdbi laserjev.

Tenzor $\chi^{(2)}$ je od nič različen le v snoveh, ki nimajo centra inverzije. Ker lahko v produktu (enačba 11.5) vrstni red $E_j E_k$ zamenjamo, mora biti tenzor invarianten na zamenjavo

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj}. \tag{11.7}$$

Zaradi te simetrije lahko vpeljemo poenostavljen zapis, pri katerem prvi indeks prepišemo ($x = 1, y = 2, z = 3$), zadnja dva indeksa pa združimo. Dogovorjene oznake so $xx = 1, yy = 2, zz = 3, yz = zy = 4, xz = zx = 5, xy = yx = 6$. Tako na primer χ_{xxz} zapišemo kot χ_{15}. Namesto splošnega tenzorja tretjega ranga smo s tem uvedli matriko velikosti 3×6, v kateri je zaradi simetrijskih lastnosti kristala navadno le nekaj komponent različnih od nič.

Kadar je v snovi absorpcija dovolj majhna, lahko matriko poenostavimo z dodatnim približkom, tako imenovano Kleinmanovo domnevo[1]. Ta pravi, da je

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj} = \chi_{kij} = \chi_{kji} = \chi_{jik} = \chi_{jki}. \tag{11.8}$$

Kristal	Grupa	Neničelne komponente tenzorja χ	Vrednosti (10^{-12} m/V)
$BaTiO_3$	4mm	$\chi_{xxz} = \chi_{yyz} = \chi_{xzx} = \chi_{yzy} = \chi_{15} = \chi_{24}$ $\chi_{zxx} = \chi_{zyy} = \chi_{31} = \chi_{32}$ $\chi_{zzz} = \chi_{33}$	$\chi_{15} = 42,6$ $\chi_{31} = 45,2$ $\chi_{33} = 16,0$
KDP	$\bar{4}2$m	$\chi_{xyz} = \chi_{yxz} = \chi_{xzy} = \chi_{yzx} = \chi_{14} = \chi_{25}$ $\chi_{zxy} = \chi_{zyx} = \chi_{36}$	$\chi_{14} = 0,88$ $\chi_{36} = 1,12$
Telur	32	$\chi_{xxx} = -\chi_{xyy} = -\chi_{yyx} = -\chi_{yxy} =$ $= \chi_{11} = -\chi_{12} = -\chi_{26}$ $\chi_{xyz} = \chi_{xzy} = -\chi_{yxz} = -\chi_{yzx} = \chi_{14} = -\chi_{25}$	$\chi_{11} = 1300$ $\chi_{14} \approx 0$
$LiNbO_3$	3m	$\chi_{xxz} = \chi_{yyz} = \chi_{xzx} = \chi_{yzy} = \chi_{15} = \chi_{24}$ $\chi_{zxx} = \chi_{zyy} = \chi_{31} = \chi_{32}$ $\chi_{zzz} = \chi_{33}$ $-\chi_{xxy} = -\chi_{xyx} = \chi_{yyy} = -\chi_{yxx} =$ $= -\chi_{16} = \chi_{22} = -\chi_{21}$	$\chi_{31} = -11,9$ $\chi_{33} = 68,8$ $\chi_{22} = 5,52$

Tabela 11.1: Koeficienti nelinearne susceptibilnosti za nekaj izbranih snovi

[1] D. A. Kleinman, Phys. Rev. 126, 1977 (1962).

Poglejmo primer. Vzemimo barijev titanat ($BaTiO_3$) s točkovno grupo 4mm. To pomeni, da ima 4-števno os simetrije in dve zrcalni ravnini, od katerih ena preslika $x \to -x$ ali $y \to -y$, druga pa $x \to y$ in $y \to x$. Od nič različni elementi susceptibilnosti so tako samo

$$\chi_{xxz} = \chi_{xzx} = \chi_{yyz} = \chi_{yzy}, \quad \chi_{zzz} \quad \text{in} \quad \chi_{zxx} = \chi_{zyy}. \tag{11.9}$$

Z upoštevanjem Kleinmanove domneve se število različnih členov še zmanjša in ostaneta le dva

$$\chi_{xxz} = \chi_{xzx} = \chi_{yyz} = \chi_{yzy} = \chi_{zxx} = \chi_{zyy} \quad \text{in} \quad \chi_{zzz}. \tag{11.10}$$

Primerjajmo gornjo trditev s tabelo (11.1). V tabeli so navedene izmerjene nelinearne susceptibilnosti[2] in vidimo, da Kleinmanova domneva ni povsem točna, je pa razmeroma dober približek.

11.2 Nelinearni optični pojavi drugega reda

Vzemimo optično nelinearen kristal s $\chi^{(2)} \neq 0$. V smeri pravokotno glede na njegovo mejno ploskev naj vpadata dve valovanji s frekvencama[3] ω_1 in ω_2. Zaradi nelinearne sklopitve nastajajo v snovi nova valovanja z različnimi kombinacijami frekvenc (slika 11.1). Tako poleg valovanj z osnovnima frekvencama izhajajo iz kristala tudi valovanja pri dvakratnikih obeh vstopnih frekvenc, pri njuni vsoti, razliki in celo pri frekvenci nič. Oglejmo si te pojave podrobneje.

Slika 11.1: Shematski prikaz nastanka valovanj pri nelinearnih optičnih pojavih drugega reda in spekter izhodne svetlobe.Intenzitete izhodnih žarkov niso risane v merilu.

★ Nastanku valovanja pri podvojeni frekvenci oziroma optičnemu frekvenčnemu podvajanju pravimo tudi SHG (*Second harmonic generation*), nastanku valovanja pri vsoti frekvenc SFG (*Sum frequency generation*), nastanku valovanja pri razliki frekvenc DFG (*Difference frequency generation*) in pojavu statičnega polja pri $\omega = 0$ optično usmerjanje (*Optical rectification*).

Navadna valovna enačba ne velja za opis pojavov pri velikih intenzitetah vpadnih valovanj, saj pride do pojava nelinearne polarizacije. Valovanje opišemo z nelinearno valovno enačbo

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}. \tag{11.11}$$

Naloga 11.2.1 Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpelji nelinearno valovno enačbo (enačba 11.11), pri čemer upoštevaj enačbo (11.4). Pomagaj si z identiteto

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

[2] Izmerjene vrednosti, ki jih najdemo v literaturi, se od vira do vira pogosto znatno razlikujejo.
[3] Tudi v tem poglavju bomo ω namesto krožna frekvenca pogosto imenovali zgolj frekvenca.

Nehomogene valovne enačbe na splošno ne znamo rešiti in se moramo zateči k približkom. Prva poenostavitev, ki jo naredimo, je omejitev na vzporedna vpadna žarka, ki se širita v smeri osi z. Poleg tega se omejimo na izračun samo enega nastalega valovanja in privzamemo, da je neodvisno od drugih nastalih valovanj. Ta omejitev ni huda. Dokler sta namreč amplitudi valovanj pri vsoti in razliki frekvenc majhni, ju lahko obravnavamo vsako posebej. Ni sicer nujno, da sta amplitudi obeh nastalih valov vedno majhni, vendar je lahko, kot bomo videli pozneje, le eno valovanje naenkrat po jakosti primerljivo z vpadnim.

V snovi so tako prisotna tri valovanja: dve vpadni in tretje, novo nastalo. Zapišemo jih z

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{2}\left[A_1(z)\,e^{i(k_1z-\omega_1t)}+A_1^*(z)\,e^{-i(k_1z-\omega_1t)}\right],\\
\mathbf{E}_2 &= \frac{\mathbf{e}_2}{2}\left[A_2(z)\,e^{i(k_2z-\omega_2t)}+A_2^*(z)\,e^{-i(k_2z-\omega_2t)}\right] \quad \text{in}\\
\mathbf{E}_3 &= \frac{\mathbf{e}_3}{2}\left[A_3(z)\,e^{i(k_3z-\omega_3t)}+A_3^*(z)\,e^{-i(k_3z-\omega_3t)}\right]. \qquad (11.12)
\end{aligned}$$

Polja smo zapisali v realni obliki s kompleksno konjugiranimi deli, saj valovna enačba (enačba 11.11) ni linearna. Upoštevali smo tudi, da so zaradi nelinearnih pojavov amplitude funkcije kraja, za katere privzamemo, da se le počasi spreminjajo. Njihova kompleksna vrednost dopušča pojav dodatnega faznega zamika. Za valovna števila velja $k_n^2=\varepsilon_n\omega_n^2/c_0^2$, pri čemer je ε_n dielektrična konstanta pri frekvenci ω_n in polarizaciji $\mathbf{e}_n$, indeks $n=1...3$ pa označuje valovanje. S tem nastavkom vsako od treh valovanj pri konstantni amplitudi reši linearni del valovne enačbe.

Naša naloga je ugotoviti, kako se zaradi nelinearnih pojavov spreminjajo amplitude posameznih valovanj. Nastavek za polje, ki bo približno rešil nelinearno valovno enačbo, je tako

$$\mathbf{E}(z,t)=\sum_{n=1}^{3}\frac{\mathbf{e}_n}{2}\left[A_n(z)\,e^{i(k_nz-\omega_nt)}+A_n^*(z)\,e^{-i(k_nz-\omega_nt)}\right]. \qquad (11.13)$$

Izračunajmo najprej

$$\nabla^2\mathbf{E}=-\sum_{n=1}^{3}\frac{\mathbf{e}_n}{2}\left[k_n^2A_n(z)-2ik_n\frac{dA_n(z)}{dz}\right]e^{i(k_nz-\omega_nt)}+\text{k. k.} \qquad (11.14)$$

S k. k. smo označili kompleksno konjugirani del. Upoštevali smo, da se amplituda $A_n(z)$ le počasi spreminja s krajem in smo zato njen drugi odvod po kraju zanemarili. Izračunamo še drugi odvod po času

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{3}\frac{\mathbf{e}_n}{2}\left(-\omega_n^2\right)\left[A_n(z)\,e^{i(k_nz-\omega_nt)}+\text{ k. k.}\right]. \qquad (11.15)$$

Nelinearna polarizacija vsebuje produkte polj, ki nihajo z vsemi možnimi vsotami in razlikami parov frekvenc ω_1, ω_2 in ω_3. Dobimo[4]

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\text{NL}}=\varepsilon_0\chi^{(2)}:\mathbf{E}\mathbf{E}=\varepsilon_0\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}&\left(\frac{1}{4}\chi^{(2)}:\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\right)A_n(z)A_m(z)e^{i(k_n+k_m)z-i(\omega_n+\omega_m)t}+\\
&\left(\frac{1}{4}\chi^{(2)}:\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\right)A_n(z)A_m^*(z)e^{i(k_n-k_m)z-i(\omega_n-\omega_m)t}+\text{k.k.} \qquad (11.16)
\end{aligned}$$

[4]Spomnimo, da je $\chi^{(2)}:\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m$ notranji produkt tenzorja z enotskima vektorjema polarizacije, katerega i-ta komponenta se izračuna kot $\sum_{jk}\chi^{(2)}_{ijk}\mathbf{e}_{nj}\mathbf{e}_{mk}$. Indeksa n in m označujeta valovanje, i, j in k pa kartezične koordinate.

Da je valovna enačba (enačba 11.11) izpolnjena ob vsakem času t, se morajo ujemati izrazi pri istih časovnih odvisnostih, to je pri istih frekvencah. Najprej zberemo člene pri $\omega_n = \omega_3$ in $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Zapišemo

$$ik_3 \mathbf{e}_3 \frac{dA_3}{dz} e^{ik_3 z} = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega_3^2}{4} \chi^{(2)} : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 A_1 A_2 e^{i(k_1+k_2)z}. \tag{11.17}$$

Množimo še obe strani skalarno z $\mathbf{e}_3$, upoštevajmo zvezo med k_3 in ω_3 in ravnajmo podobno še za drugi dve valovanji. Tako dobimo sistem sklopljenih enačb za amplitude valovanj v optično nelinearnem sredstvu

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\omega_3 \chi_{ef}}{4c_0 n_3} A_1 A_2 \, e^{-i\Delta k z} \tag{11.18}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2 \chi_{ef}}{4c_0 n_2} A_1^* A_3 \, e^{i\Delta k z} \tag{11.19}$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1 \chi_{ef}}{4c_0 n_1} A_2^* A_3 \, e^{i\Delta k z}. \tag{11.20}$$

Pri tem je efektivna susceptibilnost

$$\chi_{ef} = \mathbf{e}_3 \cdot \chi : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \sum_{ijk} \chi_{ijk}^{(2)} e_{3i} e_{1j} e_{2k}. \tag{11.21}$$

Ker polarizacijski vektorji niso nujno vzporedni s koordinatnimi osmi, χ_{ef} niso čiste kartezične komponente tenzorja nelinearne susceptibilnosti.

Naloga 11.2.2 Pokaži, da iz Kleinmanove domneve (enačba 11.8) sledi, da so efektivne susceptibilnosti χ_{ef} v vseh treh enačbah (11.18–11.20) enake.

Naloga 11.2.3 Pokaži, da nastavek za polje v nelinearni snovi (enačba 11.13) reši nelinearno valovno enačbo (enačba 11.11), in pokaži, da spreminjanje amplitude posameznih valovanj ustreza enačbam (11.18–11.20).

Z Δk smo označili razliko valovnih vektorjev

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2. \tag{11.22}$$

Čeprav je $\omega_3 - \omega_2 - \omega_1 = 0$, je Δk navadno različen od nič zaradi frekvenčne disperzije lomnega količnika. Videli bomo, da je to ključnega pomena za vrsto nelinearnih optičnih pojavov.

Zapisani sistem diferencialnih enačb (enačbe 11.18–11.20) opisuje več pojavov, odvisno od začetnih pogojev in relativnih intenzitet. Opisali bomo nekaj najpomembnejših primerov.

11.3 Optično frekvenčno podvajanje

Obravnavajmo optično nelinearno sredstvo, na katerega vpadata valovanji $\mathbf{E}_1$ in $\mathbf{E}_2$. Naj bosta frekvenci vpadnih valovanj enaki $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, valovanji pa razlikujemo zaradi možnosti dveh različnih polarizacij. Takrat je $\omega_3 = 2\omega$ in govorimo o najpreprostejšem in tudi najpomembnejšem optičnem nelinearnem pojavu – frekvenčnem podvajanju. Pogosto ga uporabljamo za pridobivanje laserskih snopov pri krajših valovnih dolžinah, na primer pri Nd:YAG laserju, ko infrardeče izhodno valovanje (1064 nm) pretvorimo v vidno svetlobo zelene barve (532 nm).

Zanima nas, kako se $A_3(z) = A_{2\omega}(z)$ spreminja vzdolž nelinearnega kristala pri začetnem pogoju $A_{2\omega}(0) = 0$. Privzemimo še, da se pretvori le manjši del vpadnega energijskega toka, tako da sta amplitudi $A_1 = A_2 = A_0$ približno konstantni. Tedaj lahko enačbo za $A_3(z)$ (enačba 11.18) brez težav integriramo do dolžine kristala L in zapišemo

$$A_{2\omega}(L) = \frac{i\omega\chi_{ef}A_0^2}{2c_0n_{2\omega}}e^{-i\Delta kL/2}\frac{\sin\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\frac{\Delta kL}{2}}L, \tag{11.23}$$

kjer smo z $n_{2\omega}$ označili lomni količnik pri dvojni frekvenci. Iz tega izraza izračunamo izhodno gostoto svetlobnega toka pri dvojni frekvenci

$$j_{2\omega}(L) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n_{2\omega}c_0|A_3|^2 = \frac{\omega^2\chi_{ef}^2}{2n_{2\omega}n_\omega^2c_0^3\varepsilon_0}j_\omega^2L^2\left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\frac{\Delta kL}{2}}\right)^2. \tag{11.24}$$

Gostota energijskega toka frekvenčno podvojene svetlobe torej narašča s kvadratom intenzitete vpadne svetlobe. Naj bo S presek snopa. Potem je razmerje med energijskim tokom pri podvojeni in osnovni frekvenci (izkoristek pretvorbe) enako

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^2\chi_{ef}^2}{2Sn_{2\omega}n_\omega^2c_0^3\varepsilon_0}P_\omega L^2\left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\frac{\Delta kL}{2}}\right)^2. \tag{11.25}$$

Poglejmo si faktor $\sin^2(\Delta kL/2)/(\Delta kL/2)^2$, katerega odvisnost od $\Delta kL/2$ je prikazana na sliki (11.2). Vidimo, da je zaradi tega faktorja na poti, daljši od $2\pi/\Delta k$, stopnja pretvorbe zelo majhna.

Slika 11.2: Izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje je sorazmeren s funkcijo $(\sin(x)/x)^2$, pri čemer je $x = \Delta kL/2$.

Poglejmo primer. Faktor Δk je različen od nič zaradi odvisnosti lomnih količnikov od valovne dolžine. V KDP je redni lomni količnik pri 1000 nm 1,496 in pri 500 nm 1,514. Vrednost, pri kateri pade intenziteta frekvenčno podvojenega valovanja na nič $L_c = 2\pi/\Delta k$, je tako le okoli 30 µm. Na večjih dolžinah postane stopnja pretvorbe zanemarljivo majhna.

★ Pri izpeljavi frekvenčnega podvajanja iz enačb za nelinearne pojave drugega reda (enačbe 11.18–11.20) moramo biti pazljivi. Uporabili smo splošne enačbe in tako privzeli, da je vpadno valovanje sestavljeno iz dveh ločenih valovanj s frekvenco ω z gostoto svetlobnega toka j_ω. Lahko pa frekvenčno podvajanje obravnavamo z enim vpadnim valovanjem s frekvenco ω in gostoto svetlobnega toka $2j_\omega$, ki nelinearno interagira samo s sabo. Takrat je zapis enačb za predfaktor drugačen, končen rezultat pa seveda enak.

Za visok izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje je pomembno, da je Δk čim manjši oziroma da se faze valovanj čim bolj ujemajo. Če uspemo doseči, da je $\Delta k = 0$, je vrednost faktorja $\sin(\Delta kL/2)/(\Delta kL/2)$ največja in neodvisna od dolžine poti L. V tem primeru izkoristek pretvorbe narašča sorazmerno s kvadratom poti

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^2 \chi_{ef}^2}{2Sn_{2\omega}n_\omega^2 c_0^3 \varepsilon_0} P_\omega L^2. \tag{11.26}$$

Za uporabno pretvorbo v frekvenčno podvojeno valovanje je torej treba doseči fazno ujemanje valovnih vektorjev pri osnovni in podvojeni frekvenci. Kako to naredimo, bomo spoznali v nadaljevanju.

Naloga 11.3.1 Pokazali smo, da gostota svetlobnega toka frekvenčno podvojenega valovanja $j_{2\omega}$ narašča sorazmerno s kvadratom dolžine kristala (enačba 11.24). Takšna odvisnost velja le, če je $j_{2\omega}$ bistveno manjša od j_ω oziroma $A_3 \ll A_1, A_2$. Pokaži, da v nasprotnem primeru gostota svetlobnega toka frekvenčno podvojenega valovanja $j_{2\omega}(L)$ narašča kot

$$j_{2\omega}(L) = j_\omega \tanh^2\left(\chi_{ef}\omega L\sqrt{\frac{j_\omega}{2n_{2\omega}n_\omega^2 c_0^3 \varepsilon_0}}\right) = j_\omega \tanh^2(\kappa L), \tag{11.27}$$

pri čemer je j_ω gostota svetlobnega toka pri osnovni frekvenci.

Namig: upoštevaj, da se celotna energija ohranja.

Slika 11.3: Izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje. Če privzamemo, da se gostota svetlobnega toka osnovnega žarka ne zmanjšuje, je odvisnost parabolična (rdeča krivulja), kar je dober približek le za majhne gostote toka. Bolj natančen izračun pokaže, da je izkoristek pretvorbe sorazmeren s $\tanh^2(\kappa L)$ (črna krivulja).

Kaj pa se zgodi, kadar pogoj ujemanja faz ni izpolnjen in $\Delta k \neq 0$? Takrat dolžino kristala L v enačbi (11.25) okrajšamo in izkoristek pretvorbe z naraščajočim L sinusno niha med nič in neko največjo vrednostjo. Omenjen pojav lahko opazimo, če uporabimo klinast vzorec, ki se mu debelina spreminja, ali pa če vzorec sučemo in tako spreminjamo razliko faz. Pojav, imenujemo ga Makerjeve oscilacije[5], uporabljamo za merjenje nelinearne susceptibilnosti kristalov.

[5] P. D. Maker et al., Phys. Rev. Lett. 8, 21 (1962).

Ujemanje faz

Poglejmo, kako lahko dosežemo ujemanje faz, ki je nujno za učinkovito optično frekvenčno podvajanje. Spomnimo se, da je pogoj za ujemanje faz

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = k_3^{2\omega} - k_1^{\omega} - k_2^{\omega} = \frac{2\omega}{c_0} n_3 - \frac{\omega}{c_0} n_1 - \frac{\omega}{c_0} n_2 = 0. \tag{11.28}$$

Iz tega sledi pogoj

$$n_1^{\omega} + n_2^{\omega} = 2n_3^{2\omega}, \tag{11.29}$$

pri čemer smo lomnim količnikom pripisali frekvenco. Da lahko zadostimo temu pogoju, izkoristimo dvojni lom v anizotropnih kristalih. Omejimo se le na optično enoosne kristale brez absorpcije in z normalno disperzijo, pri katerih oba lomna količnika naraščata s frekvenco.

Za razumevanje je najbolj nazoren grafični prikaz (slika 11.4), pri katerem rišemo presek ploskve lomnega količnika z ravnino, določeno z optično osjo in valovnim vektorjem (glej poglavje 1.8). Za vsako smer valovnega vektorja obstajata dve rešitvi: rednemu žarku, katerega polarizacija je pravokotna na omenjeno ravnino, ustreza krožnica s polmerom n_o, izrednemu, katerega polarizacija leži v ravnini, pa elipsa s polosema n_o in n_e. Rdeča barva nakazuje presek ploskve pri vpadni frekvenci, modra pa pri podvojeni. Ekscentričnost elipse in frekvenčna disperzija sta zaradi večje nazornosti močno pretirani.

Podrobneje poglejmo primer s slike (a), za katerega velja $n_e > n_o$. Opazimo, da se v neki točki rdeča elipsa, ki ustreza vpadnemu valovanju, seka z modro krožnico, ki ustreza valovanju s podvojeno frekvenco. Pri tem kotu $\sphericalangle(\mathbf{k}, z)$ je torej redni lomni količnik pri dvojni frekvenci enak izrednemu količniku pri osnovni frekvenci. Če izberemo izredno polarizacijo vpadnega valovanja, je za podvojeno valovanje z redno polarizacijo pri kotu ϑ_m izpolnjen pogoj ujemanja faz (enačba 11.29). Takrat leži polarizacija vpadnega valovanja v ravnini optične osi in smeri širjenja, polarizacija izhodnega frekvenčno podvojenega žarka pa je pravokotna na optično os. Zapišimo ta razmislek še z enačbo.

V obravnavanem primeru mora biti lomni količnik za redno polarizirano valovanje pri podvojeni frekvenci $n_o^{2\omega}$ enak lomnemu količniku za izredno polarizirano valovanje pri osnovni frekvenci n^{ω}. Lomni količnik za izredno valovanje je seveda odvisen od kota (enačba 1.61)

$$\frac{1}{(n^{\omega}(\vartheta))^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{(n_o^{\omega})^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{(n_e^{\omega})^2} = \frac{1}{(n_o^{2\omega})^2}. \tag{11.30}$$

Sledi izraz

$$\cos^2\vartheta_m = \frac{(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{\omega})^{-2}}{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_e^{\omega})^{-2}}, \tag{11.31}$$

iz katerega lahko izračunamo kot ϑ_m, pri katerem pride do ujemanja faz. Pri optično enoosnih kristalih je pogoj ujemanja faz določen s kotom širjenja svetlobe glede na smer optične osi v kristalu in obstaja cel stožec dovoljenih smeri.

Naloga 11.3.2 Pokaži, da v primeru negativne anizotropije pogoj za ujemanje faz zapišemo kot

$$\cos^2\vartheta_m = \frac{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}}{(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}}. \tag{11.32}$$

Slika 11.4: Štirje primeri, pri katerih je izpolnjen pogoj za ujemanje faz. Ujemanje faz prve vrste za pozitivno anizotropno snov (a), ujemanje faz prve vrste za negativno anizotropno snov (b) ter ujemanje faz druge vrste za pozitivno (c) in negativno (d) anizotropno snov. Za razlago glej besedilo.

S slike (11.4 c in d) lahko razberemo, da obstaja še en primer, pri katerem je izpolnjen pogoj za ujemanje faz. Kot zgled t. i. ujemanja faz druge vrste obravnavajmo primer na sliki (c). Vzemimo različno polarizirani vhodni valovanji z ustreznima različnima lomnima količnikoma n_o^{ω} in $n^{\omega}(\vartheta)$. Enačba (11.29) je izpolnjena, kadar je povprečje lomnih količnikov vhodnih valovanj enako lomnemu količniku frekvenčno podvojenega žarka $n_o^{2\omega}$. To se zgodi pri tistem kotu ϑ_m, pri katerem je modra krožnica ravno na sredini med rdečo krožnico in elipso. Za praktično uporabo je ta izbira, kadar obstaja, celo ugodnejša, saj je pri njej kot ujemanja faz bliže $\pi/2$. Ujemanje faz je zato manj občutljivo na majhna odstopanja v kotu ali na temperaturne spremembe lomnih količnikov. Račun kota ϑ_m za ta primer je bolj zahteven, saj je treba rešiti enačbo četrte stopnje.

Efektivna susceptibilnost

Na izhodno moč frekvenčno podvojenega snopa poleg faznega faktorja bistveno vpliva tudi efektivna susceptibilnost χ_{ef} (enačba 11.21). Ta je odvisna od polarizacij vhodnega in izhodnega žarka ter seveda od simetrije kristala. Ugotovili smo že, da je v optično enoosnem kristalu kriterij ujemanja faz izpolnjen na stožcu okoli optične osi, pri čemer je stožec določen z izračunanim kotom ϑ_m (enačbi 11.31 in 11.32). Drugi kot, ki določa smer širjenja v ravnini, pravokotni na

optično os, izberemo tako, da izkoristimo največje komponente nelinearne susceptibilnosti.

Oglejmo si kot primer KDP (KH_2PO_4), ki je negativno anizotropen z vrednostmi $n_o^\omega = 1,4942$, $n_e^\omega = 1,4603$, $n_o^{2\omega} = 1,5129$ in $n_e^{2\omega} = 1,4709$ (slika 11.4 b). Valovna dolžina osnovnega snopa naj bo 1064 nm. Zaradi negativne anizotropije za izračun kota ujemanja faz uporabimo enačbo (11.32) in dobimo $\vartheta_m = 41,25°$. Poleg tega iz tabele (11.1) razberemo, da ima nelinearna susceptibilnost v tetragonalni simetriji $\bar{4}2m$ od nič različne komponente χ_{xyz}, χ_{xzy} χ_{zxy}, χ_{zyx}, χ_{yzx} in χ_{yxz}. Zaradi poenostavitve privzamemo, da so njihove vrednosti enake.

Naj se osnovno in frekvenčno podvojeno valovanje širita v smeri **s**. Pomagamo si s sliko (11.5) in zapišemo vektor **s**, pri čemer φ označuje kot med osjo x in projekcijo **s** na ravnino xy

$$\mathbf{s} = (\cos\varphi \sin\vartheta_m, \sin\varphi \sin\vartheta_m, \cos\vartheta_m). \tag{11.33}$$

Slika 11.5: K izračunu efektivne susceptibilnosti. Črtkan krog opisuje osnovno ploskev stožca, ki je določen s ϑ_m, pikčast krog pa njegovo projekcijo na ravnino xy. Rdeč vektor označuje polarizacijo redno polariziranega valovanja, moder pa polarizacijo izredno polariziranega valovanja.

Naša naloga je poiskati kot φ, pri katerem je χ_{ef} največji in s tem največja tudi moč frekvenčno podvojenega valovanja. Iz pogoja za ujemanje faz smo določili, da mora biti vpadna svetloba redno polarizirana, izhodna frekvenčno podvojena pa izredno polarizirana. Pri tem je redna polarizacija pravokotna na os z (optično os) in hkrati pravokotna na smer vektorja **s**. Zapišemo jo kot

$$\mathbf{e}_o = (e_{ox}, e_{oy}, e_{oz}) = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0). \tag{11.34}$$

To najlažje preverimo, tako da postavimo vektor **s** enkrat v ravnino xz in drugič v ravnino yz. Izredna polarizacija leži v ravnini, ki jo tvori vektor **s** z osjo z, hkrati pa je pravokotna na vektor **s**, tako da jo zapišemo kot

$$\mathbf{e}_e = (e_{ex}, e_{ey}, e_{ez}) = (-\cos\varphi\cos\vartheta_m, -\sin\varphi\cos\vartheta_m, \sin\vartheta_m). \tag{11.35}$$

Zdaj lahko izračunamo efektivno susceptibilnost (enačba 11.21), pri čemer upoštevamo, da sta žarka 1 in 2 pri osnovni frekvenci redno polarizirana, žarek z oznako 3 pa opisuje izredno polariziran žarek pri podvojeni frekvenci

$$\chi_{ef} = \sum_{ijk} \chi_{ijk} e_{3i} e_{1j} e_{2k} = \sum_{ijk} \chi_{ijk} e_{ei} e_{oj} e_{ok}. \tag{11.36}$$

Krajši račun pokaže, da je zaradi oblike tenzorja nelinearne susceptibilnosti v izbranem primeru od nič različna le ena komponenta nelinearne polarizacije, komponenta z. Zapišemo

$$\chi_{ef} = \chi_{zxy} e_{ez} e_{ox} e_{oy} + \chi_{zyx} e_{ez} e_{oy} e_{ox}. \tag{11.37}$$

Sledi

$$P_z^{2\omega} = -2\varepsilon_0\,\chi_{zxy}E_0^2\cos\varphi\sin\varphi\sin\vartheta_m = -\varepsilon_0\,\chi_{zxy}E_0^2\sin(2\varphi)\sin\vartheta_m. \tag{11.38}$$

Nelinearna polarizacija je največja pri $\varphi = \pi/4$, največji χ_{ef} pa je

$$\chi_{ef} = \sin\vartheta_m\chi_{zxy} \approx 0,66\,\chi_{zxy} \approx 0,74\ \mathrm{pm/V}. \tag{11.39}$$

Naloga 11.3.3 Izračunaj največjo možno efektivno nelinearno susceptibilnost za frekvenčno podvajanje svetlobe z valovno dolžino 10 µm v kristalu telurja s simetrijsko grupo 32 (glej tabelo 11.1). Lomni količniki: $n_o^\omega = 4,7969$, $n_e^\omega = 6,2455$, $n_o^{2\omega} = 4,8657$ in $n_e^{2\omega} = 6,3152$.

★ Namesto zvezne svetlobe za optično podvajanje frekvenc pogosto uporabimo laserske sunke, saj je vršna moč zelo velika in je zato velika tudi pretvorba v frekvenčno podvojen signal. Vendar je treba biti pri tem pazljiv, saj lahko zaradi disperzije grupne hitrosti osnovni in podvojeni signal ne potujeta z enakima hitrostma. Navadno podvojeni signal potuje počasneje in zaostaja za osnovnim, zato lahko iz kristala izhaja razmeroma sploščen in precej razvlečen frekvenčno podvojen sunek svetlobe. Pojav je izrazit predvsem pri podvajanju v ultravijolični del spektra.

11.4 Frekvenčno podvajanje Gaussovih snopov

Doslej smo vpadni in frekvenčno podvojeni snop obravnavali kot ravni valovanji, ki sta bili razsežni v prečni smeri. Izračunali smo, da v primeru ujemanja faz ($\Delta k = 0$) moč frekvenčno podvojene svetlobe narašča s kvadratom dolžine poti po nelinearnem sredstvu. Pretvorba v frekvenčno podvojeno svetlobo je po enačbi (11.25) tem učinkovitejša, čim večja je gostota svetlobnega toka pri osnovni frekvenci. Zato v praksi vpadno svetlobo vselej zberemo in tako povečamo gostoto toka. Pri tem moramo paziti, da je nelinearni kristal odporen proti poškodbam zaradi velike gostote svetlobnega toka. Odpornost in možnost izpolnitve kriterija ujemanja faz sta poglavitna kriterija pri izbiri snovi za frekvenčno podvajanje.

Poglejmo, kako se enačbe spremenijo, če je vpadni snop pri osnovni frekvenci Gaussove oblike. Rezultat lahko ocenimo, če vzamemo, da je efektivna dolžina za pretvorbo L kar enaka dolžini območja bližnjega polja; izven tega območja je gostota toka znatno manjša, s tem pa tudi izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeni snop. Celotna dolžina L je (enačba 3.21)

$$L = 2z_0 = 2\frac{\pi w_0^2}{\lambda/n} = \frac{nw_0^2\omega}{c_0} \quad \text{in} \quad w_0^2 = \frac{c_0 L}{n\omega}. \tag{11.40}$$

Pri zapisu preseka vpadnega snopa upoštevajmo še faktor ena polovica, do katerega pridemo, če integriramo intenziteto snopa po celotni površini (glej nalogo 3.3.2). Sledi

$$S = \frac{1}{2}\pi w_0^2 = \frac{\pi c_0 L}{2n\omega}. \tag{11.41}$$

Daljše ko je grlo in večja dolžina L, na kateri pride do frekvenčnega podvajanja, večji je tudi presek snopa S in zato intenziteta svetlobe manjša, kar zmanjša učinek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje. V enačbi (11.24) upoštevamo ujemanje faz in S pri podvojeni frekvenci. Tako velja

$$\boxed{\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^3\chi_{ef}^2}{2\pi n_{2\omega}n_\omega c_0^4\varepsilon_0}P_\omega L.} \tag{11.42}$$

Ob optimalnem fokusiranju je izkoristek pretvorbe torej sorazmeren z dolžino kristala.

Naloga 11.4.1 Naj na 1 cm dolg kristal KH_2PO_4. vpada svetloba z valovno dolžino $1,06$ µm in vhodno močjo $P_\omega = 5$ kW. Efektivna nelinearna susceptibilnost je $\chi_{ef} = 7 \cdot 10^{-13}$ m/V, $\Delta k = 0$ in $n = 1,5$. Pokaži, da je faktor pretvorbe v frekvenčno podvojeno svetlobo okoli 27 %. Da je Rayleighova dolžina $2z_0 = 1$ cm, mora biti polmer grla okoli 40 µm. Gostota svetlobnega toka v kristalu je pri tem $2 \cdot 10^8$ W/cm^2, kar je že blizu praga za poškodbe, predvsem na vstopni ali izstopni ploskvi.

11.5 *Račun podvajanja Gaussovih snopov

V prejšnjem razdelku smo na hitro grobo ocenili vpliv oblike Gaussovih snopov na frekvenčno podvajanje. Naredimo zdaj še natančnejši izračun. Vrnimo se k valovni enačbi (enačba 11.11), vpadna snopa naj bosta pri frekvencah ω_1 in ω_2, nastajajoč snop pa pri frekvenci $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Vsako od polj naj ima obliko

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{2}\left[\tilde{A}_i(r,z)\, e^{i(k_i z - \omega_i t)} + \tilde{A}_i^*(r,z)\, e^{-i(k_i z - \omega_i t)}\right], \tag{11.43}$$

pri čemer je $\tilde{A}(r,z)$ funkcija tako vzdolžne kot tudi prečne koordinate. Privzeli bomo, da se vzdolž smeri z le počasi spreminja. Zaradi poenostavljenega zapisa vpeljemo novo spremenljivko

$$\psi_i = \sqrt{\frac{n_i}{\omega_i}}\tilde{A}_i. \tag{11.44}$$

Tako je nastavek za električno poljsko jakost

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{2}\sqrt{\frac{\omega_i}{n_i}}\psi_i(r,z)e^{i(k_i z - \omega_i t)} + \text{ k. k.} \tag{11.45}$$

Vstavimo nastavek (enačbe 11.45) v valovno enačbo (enačba 11.11) in ločimo na levi in desni člene z enako časovno odvisnostjo. Zaradi počasnega spreminjanja vzdolž smeri z lahko zanemarimo tudi druge odvode ψ po z. Od tod sledi sklopljen sistem obosnih enačb

$$\nabla_\perp^2 \psi_1 + 2ik_1\psi_1' = -\frac{k_1}{2}\kappa\psi_2^*\psi_3 e^{i\Delta k z} \tag{11.46}$$

$$\nabla_\perp^2 \psi_2 + 2ik_2\psi_2' = -\frac{k_2}{2}\kappa\psi_1^*\psi_3 e^{i\Delta k z} \tag{11.47}$$

$$\nabla_\perp^2 \psi_3 + 2ik_3\psi_3' = -\frac{k_3}{2}\kappa\psi_1\psi_2 e^{-i\Delta k z} \tag{11.48}$$

s pripadajočim sistemom konjugiranih enačb. Pri tem je

$$\kappa = \frac{\chi_{ef}}{c_0}\sqrt{\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{n_1 n_2 n_3}}. \tag{11.49}$$

S črtico smo označili odvajanje po z. Gornji sistem enačb je očitno posplošitev sistema enačb (11.18–11.20) za primer, ko je valovanje odvisno tudi od prečne koordinate. Reševanje tega nelinearnega sistema parcialnih diferencialnih enačb je na splošno zelo zapleteno.

Poglejmo le najenostavnejši primer frekvenčnega podvajanja, ko je $\omega_3 = 2\omega_1 = 2\omega$. Vpadna snopa naj bosta enaka in Gaussove oblike (enačba 3.29), njuna amplituda pa naj bo enaka A_1

$$\psi_1 = \psi_2 = A_1\frac{1}{1 + iz/z_1}\exp\left(-\frac{r^2}{w_1^2(z)} + \frac{ik_1 r^2}{2R_1(z)}\right). \tag{11.50}$$

Privzemimo še, da je izpolnjen pogoj za ujemanje faz ($\Delta k = 0$) in da je ψ_3 dovolj majhen, da zmanjševanja ψ_1 ni treba upoštevati. Tudi za podvojeni snop privzemimo Gaussovo obliko, njegova amplituda A_3 pa naj le počasi narašča. Zapišemo ga kot

$$\psi_3 = A_3(z)\psi_{3H}(z,r) = A_3(z)\frac{1}{1+iz/z_3}\exp\left(-\frac{r^2}{w_3^2(z)}+\frac{ik_3r^2}{2R_3(z)}\right), \tag{11.51}$$

pri čemer ψ_{3H} reši homogeno obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Ko izraza za ψ_1 in ψ_3 vstavimo v tretjo enačbo sistema sklopljenih enačb (11.48), ostane na levi le člen oblike $2ik_3A_3'(z)\psi_{3H}$. Tako dobimo pogoj

$$A_3'(z)\frac{1}{1+iz/z_3}\exp\left(-\frac{r^2}{w_3^2(z)}+\frac{ik_3r^2}{2R_3(z)}\right) = \frac{i\kappa}{4}A_1^2\frac{1}{(1+iz/z_1)^2}\exp\left(-\frac{2r^2}{w_1^2(z)}+\frac{ik_1r^2}{R_1(z)}\right). \tag{11.52}$$

Poiščimo rešitev te enačbe v obliki, za katero velja $w_{30}^2 = w_{10}^2/2$. Tedaj je

$$z_3 = \frac{k_3w_{30}^2}{2} = \frac{2k_1w_{10}^2}{4} = z_1 \tag{11.53}$$

in je tudi $w_3^2(z) = w_1^2(z)/2$. Poleg tega je $R_3(z) = R_1(z)$ in lahko na obeh straneh krajšamo eksponentna faktorja. Ostane

$$A_3'(z) = \frac{i\kappa}{4}A_1^2\frac{1}{1+iz/z_1}. \tag{11.54}$$

Gornjo enačbo seveda brez težav integriramo. Naj bo grlo vpadnega snopa ravno na sredini nelinearnega sredstva, tako da integriramo od $-L/2$ do $L/2$

$$\begin{aligned} A_3(L) &= \frac{i\kappa}{4}A_1^2\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{1+iz/z_1} = \frac{\kappa}{4}A_1^2z_1\ln\frac{1+i\frac{L}{2z_1}}{1-i\frac{L}{2z_1}} = \\ &= \frac{\kappa}{2}A_1^2z_1\arctan\frac{L}{2z_1}\,. \end{aligned} \tag{11.55}$$

Moč Gaussovega snopa je

$$P_i = \frac{1}{2}\pi w_{i0}^2\frac{1}{2}c_0n_i\varepsilon_0E_{i0}^2 = \frac{\pi}{4}w_{i0}^2\varepsilon_0c_0\omega_iA_i^2, \tag{11.56}$$

tako da je izkoristek pri frekvenčnem podvajanju Gaussovega snopa

$$\begin{aligned} \frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{A_3^2}{A_1^2} &= \frac{\chi_{ef}^2\omega^3P_\omega z_1}{\pi c_0^4\varepsilon_0n_\omega n_{2\omega}}\arctan^2\left(\frac{L}{2z_1}\right) \\ &= \frac{\chi_{ef}^2\omega^3P_\omega}{\pi c_0^4\varepsilon_0n_\omega n_{2\omega}}\frac{L}{2}\arctan^2\left(\frac{L}{2z_1}\right)\frac{1}{L/2z_1}. \end{aligned} \tag{11.57}$$

Funkcija $(\arctan^2 x)/x$ zavzame največjo vrednost 0,64 pri $x = L/2z_1 = 1,39$. Pri dani dolžini nelinearnega sredstva L je torej izkoristek največji, kadar je $z_1 = 0,36L$, kar je malo manj kot pri preprosti oceni $z_1 = 0,5L$ (enačba 11.40). Največji izkoristek frekvenčnega podvajanja Gaussovih snopov je tako

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = 0,64\frac{\omega^3\chi_{ef}^2}{2\pi n_{2\omega}n_\omega c_0^4\varepsilon_0}P_\omega L. \tag{11.58}$$

S preprosto oceno, ki smo jo naredili v prejšnjem razdelku (enačba 11.42), smo tako rezultat le malo zgrešili, v obeh primerih pa izkoristek narašča linearno z dolžino kristala.

11.6 Optično parametrično ojačevanje

Oglejmo si še en zelo uporaben primer mešanja treh valovanj, ki ga opisujejo enačbe (11.18–11.20). Gre za optično parametrično ojačevanje, pri katerem nelinearne optične pojave izkoristimo za ojačenje optičnih signalov. Imejmo razmeroma šibek vhodni signal pri frekvenci ω_1, ki ga želimo ojačiti, in močno črpalno valovanje pri frekvenci $\omega_3 > \omega_1$. Zaradi nelinearnosti v snovi intenziteta valovanja pri ω_1 narašča, intenziteta valovanja pri ω_3 se zmanjšuje, hkrati pa zaradi ohranitve energije nastaja dodatno valovanje pri razliki frekvenc $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. Proces parametričnega ojačevanja si torej lahko predstavljamo kot pretvorbo enega fotona pri frekvenci ω_3 v dva fotona pri ω_1 in ω_2. Parametrično ojačevanje pogosto uporabljamo za ojačenje šibkih signalov v infrardečem delu spektra.

Slika 11.6: Shematski prikaz nastanka valovanj pri optičnem parametričnem ojačevanju

Izhajamo iz splošnih enačb za nelinearne optične pojave drugega reda (enačbe 11.18–11.20).

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\omega_3\chi_{ef}}{4c_0n_3}A_1A_2\,e^{-i\Delta kz}, \tag{11.59}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2\chi_{ef}}{4c_0n_2}A_1^*A_3\,e^{i\Delta kz} \quad \text{in} \tag{11.60}$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1\chi_{ef}}{4c_0n_1}A_2^*A_3\,e^{i\Delta kz}. \tag{11.61}$$

Privzamemo, da je črpalno valovanje vselej dosti močnejše od drugih dveh ($A_3 \gg A_1, A_2$) in njegova jakost približno konstantna $A_3 = A_{30}$. Poskrbimo še, da je izpolnjen pogoj za ujemanje faz $\Delta k = 0$, začetna pogoja pa zapišemo kot $A_1(z=0) = A_{10}$ in $A_2(z=0) = 0$. Ko vse to upoštevamo, dobimo dve sklopljeni enačbi

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1\chi_{ef}}{4c_0n_1}A_2^*A_{30} \quad \text{in} \tag{11.62}$$

$$\frac{dA_2^*}{dz} = -\frac{i\omega_2\chi_{ef}}{4c_0n_2}A_1A_{30}^*. \tag{11.63}$$

Enačbi lahko rešimo, tako da prvo odvajamo po z in vanjo vstavimo drugo enačbo. Sledi

$$\frac{d^2A_1}{dz^2} = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}A_1 = \kappa^2A_1 \tag{11.64}$$

in podobno za A_2

$$\frac{d^2A_2}{dz^2} = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}A_2 = \kappa^2A_2. \tag{11.65}$$

Ob upoštevanju začetnih pogojev izračunamo rešitev za naraščanje amplitude signalnega žarka z začetno amplitudo A_{10}

$$A_1 = A_{10}\cosh(\kappa L). \tag{11.66}$$

Hkrati z njim narašča tudi amplituda dodatnega nedejavnega (*idle*) žarka, ki nastane med procesom ojačenja

$$A_2 = A_{20}\sinh(\kappa L). \tag{11.67}$$

V gornjih enačbah je L dolžina nelinearnega sredstva,

$$\kappa^2 = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2 n_1 n_2} \tag{11.68}$$

in

$$A_{20} = i\sqrt{\frac{\omega_2 n_1}{\omega_1 n_2}}A_{10}. \tag{11.69}$$

Na začetku intenziteti obeh valovanj naraščata približno eksponentno na račun črpalnega valovanja (slika 11.7). Ko postane njuna intenziteta znatna in se začne A_3 zmanjševati, je treba to seveda upoštevati pri izračunu. Rešiti je treba bolj zahteven sistem treh sklopljenih enačb, podobno – a še bolj zapleteno – kot v nalogi (11.3.1).

Slika 11.7: Normirani intenziteti ojačenega žarka in dodatnega nedejavnega žarka, ki nastane zaradi ohranitve energije. Naraščajoči funkciji sta seveda samo približek, ki velja, dokler je ojačenje majhno in se intenziteta črpalnega žarka ne zmanjšuje znatno.

Naloga 11.6.1 Pokaži, da sta izraza za amplitudi polji A_1 in A_2 (enačbi 11.66 in 11.67) rešitvi sklopljenih enačb (11.62 in 11.63) ob parametrih A_{20} in κ, kot sta zapisana v enačbah (11.68) in (11.69).

Do zdaj smo vedno privzeli, da je izpolnjen pogoj ujemanja faz in $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = 0$. Ta pogoj lahko izpolnimo na enak način kot pri podvajanju frekvence: v dvolomnem kristalu izberemo ustrezne polarizacije in smer širjenja svetlobe glede na optično os, tako da velja $\omega_3 n_3 = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2$.

Lahko na primer vzamemo izredno polarizacijo za črpalno valovanje in redni polarizaciji za obe ojačevani valovanji, podobno kot pri podvajanju frekvence. Tedaj mora biti izpolnjen naslednji pogoj

$$\left[\left(\frac{\cos\vartheta_m}{n_o^{\omega_3}}\right)^2+\left(\frac{\sin\vartheta_m}{n_e^{\omega_3}}\right)^2\right]^{-1/2}=\frac{\omega_1}{\omega_3}n_o^{\omega_1}+\frac{\omega_2}{\omega_3}n_o^{\omega_2}. \tag{11.70}$$

Naloga 11.6.2 Obravnavali smo optično parametrično ojačevanje, ko je bil izpolnjen kriterij za ujemanje faz. Pokaži, v primeru neujemanja faz $\Delta k \neq 0$ amplitudi ojačevanega in dodatnega žarka naraščata kot

$$A_1 = A_{10}\left(\cosh(\kappa z)-\frac{i\Delta k z}{2\kappa}\sinh(\kappa z)\right)e^{\frac{i\Delta k z}{2}} \tag{11.71}$$

in

$$A_2 = A_{20}\sinh(\kappa z)e^{\frac{i\Delta k}{2}}, \tag{11.72}$$

pri čemer sta

$$\kappa^2=\frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}-\frac{\Delta k^2}{4} \tag{11.73}$$

in

$$A_{20}=i\sqrt{\frac{\omega_2 n_1}{\omega_1 n_2}}\sqrt{1+\frac{\Delta k^2}{4\kappa^2}}\,A_{10}. \tag{11.74}$$

Hitro uvidimo, da so gornje enačbe v limitnem primeru, ko se faze ujamejo in je $\Delta k = 0$, enake enačbam (11.66, 11.67 in 11.68).

Za konec ocenimo koeficient ojačenja v kristalu $LiNbO_3$, v katerem želimo ojačiti svetlobo z valovno dolžino $\lambda = 1$ µm. Črpamo z laserjem z valovno dolžino okoli 500 nm in gostoto svetlobnega toka 5 MW/cm^2. Lomni količnik snovi je $n = 2,2$, efektivna nelinearna susceptibilnost pa $\chi_{ef} = 5$ pm/V. Vstavimo podatke v enačbo (11.68) in izračunamo vrednost $\kappa \sim 0,15$ /cm. Porast intenzitete vpadne svetlobe v 1 cm dolgem kristalu je tako le približno 2 %.

Optični parametrični oscilator (OPO)

Gornji izračun kaže, da optično parametrično ojačevanje svetlobe pri prehodu skozi kristal ni prav veliko kljub dokaj močnemu črpalnemu žarku. Zato je smiselno, da svetloba večkrat preleti ojačevalno sredstvo in se postopoma ojačuje. To naredimo tako, da optično ojačevalno sredstvo zapremo v optični resonator in signal se ob vsakem obhodu ojači. Sestavili smo t. i. optični parametrični oscilator (slika 11.8).

V optičnem resonatorju je odbojnost zrcal za črpalni žarek (ω_3) zelo majhna, odbojnost za ojačeni žarek pa blizu ena. Valovanje pri ω_1, ki se v parametričnem oscilatorju ojačuje, nastane spontano, prav tako valovanje pri $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. Njuni frekvenci sta dodatno določeni s pogojem za ujemanje faz $k_3 - k_1 - k_2 = 0$, hkrati pa mora ojačevano nihanje sovpadati z lastnim nihanjem resonatorja. S sukanjem ojačevalnega kristala lahko na ta način spreminjamo ojačeno frekvenco in naredili smo nastavljiv izvor svetlobe, navadno v infrardečem delu spektra.

Slika 11.8: Shematski prikaz tipičnega optičnega parametričnega oscilatorja. Ojačevalno sredstvo zapremo med resonatorja, da se signalni žarek (ω_1) ob vsakem preletu ojači.

Za delovanje oscilatorja mora biti jakost črpalnega žarka tako velika, da je ojačenje na obhod večje od izgub. Izračunajmo za primer zgoraj narisanega oscilatorja. Signal z močjo P_0 se ob prehodu skozi ojačevalno sredstvo ojači (enačba 11.66)

$$P_1 = P_0 \cosh^2(\kappa L), \tag{11.75}$$

hkrati pa se zaradi izhodnega zrcala z odbojnostjo $\mathscr{R}$ in notranjih izgub Λ_0 intenziteta žarka zmanjšuje. Pogoj ujemanja faz je izpolnjen le v eni smeri in se svetloba ojačuje le enkrat na celoten obhod. Ob preletu v drugo smer je namreč $\Delta k \neq 0$ in žarek se ne ojačuje. V stacionarnem stanju je moč žarka po obhodu P_2 enaka začetni moči P_0 in ojačenje je ravno enako izgubam

$$P_2 = P_1\,(1-\Lambda_0)\mathscr{R} = P_0\,(1-\Lambda_0)\mathscr{R}\cosh^2(\kappa L) = P_0 \tag{11.76}$$

oziroma

$$\cosh^2(\kappa L) = \frac{1}{(1-\Lambda_0)\mathscr{R}}. \tag{11.77}$$

Iz gornjega pogoja določimo parameter κ, po enačbi (11.68) pa mejno amplitudo in intenziteto črpalnega žarka. Nadaljujmo še prejšnji primer ojačenja svetlobe v 1 cm dolgem kristalu $LiNbO_3$. Če je odbojnost izhodnega zrcala $\mathscr{R} = 0,85$, notranje izgube $\Lambda_0 = 0,05$ in prečni presek žarka 10 μm^2, je moč praga $P_{\omega_3} = 5$ W.

★ Optični parametrični oscilator oddaja svetlobo, podobno kot laser. Tudi sicer sta si do neke mere podobna: oba sistema potrebujeta močen črpalni mehanizem, oba sistema sta sestavljena iz resonatorja, v katerem se žarek velikokrat odbije in postopoma ojačuje, in oba oddajata koherentno svetlobo pri točno določeni valovni dolžini. Vendar je med parametričnim oscilatorjem in laserjem velika razlika. Pri laserju pride do ojačenja svetlobe zaradi obrnjene zasedenosti stanj, pri oscilatorju pa zaradi nelinearnega optičnega pojava. Ker pri oscilatorju energija ni shranjena v snovi, ampak se signal ojačuje sproti, je zelo pomembno, da sunek črpalnega laserja vpade na kristal istočasno kot ojačevan žarek. Velika prednost oscilatorjev pred laserji je zvezno nastavljiva frekvenca delovanja v zelo širokem frekvenčnem območju, saj ni določena s prehodom med nivoji, ampak z izpolnjevanjem pogoja za ujemanje faz.

11.7 Optično usmerjanje in teraherčno valovanje

Ko smo obravnavali nelinearne optične pojave drugega reda, smo zapisali različne frekvence, ki so vsebovane v izhodnem signalu (slika 11.1). Eno izmed izhodnih valovanj ima tudi frekvenco enako nič, kar pomeni, da je to statično električno polje. Iz analogije z elektronskimi vezji, kjer izmenično napetost z usmernikom spremenimo v enosmerno napetost, pojav imenujemo optično usmerjanje, saj iz svetlobnega valovanja nastane statično polje. Tako statično polje navadno ni veliko, saj sunek svetlobe z vršno močjo nekaj MW tipično povzroči nekaj deset mV napetosti v smeri prečno na smer potovanja svetlobe.

Naloga 11.7.1 Pokaži, da je napetost, ki se pojavi pri optičnem usmerjanju, približno enaka

$$U = \frac{\chi P_0}{n^3 \varepsilon_0 c_0 a}, \tag{11.78}$$

pri čemer je P_0 moč vpadne svetlobe, n lomni količnik snovi in a širina kristala.
Namig: nelinearni kristal obravnavaj kot ploščati kondenzator in zapiši polarizacijo.

Oceni še napetost, če je $\chi = 3$ pm/V, $P_0 = 1$ MW, $n = 2,2$ in $a = 5$ mm.

Precej bolj uporaben je pojav, ko na nelinearen kristal posvetimo z ultrakratkimi sunki svetlobe, tipično okoli ps ali krajšimi. Spomnimo se, da je povsem monokromatsko valovanje lahko samo tako, ki je časovno neomejeno in ima neskončen koherenčni čas (enačba 2.16). Čim je valovanje časovno omejeno, ima njegov spekter končno širino, pri čemer imajo krajši sunki svetlobe širši spekter valovanja.

Ko z ultrakratkim sunkom osvetlimo optično nelinearen kristal, v kristal vstopajo vse frekvence z danega intervala $\omega \pm \Delta\omega/2$. Optično usmerjanje ni več popolno, saj se frekvence ne odštejejo povsem, ampak se namesto statičnega polja pojavi sunek svetlobe s širokim spektrom, ki sega od ničelne frekvence do neke največje vrednosti. Celotna spektralna širina tega signala je približno enaka spektralni širini vstopnega sunka, ta pa je obratno sorazmerna z njegovo dolžino. Ocenimo te vrednosti še numerično.

Slika 11.9: Shematski prikaz nastanka teraherčnega valovanja v optično nelinearnem sredstvu

Vzemimo kratek sunek svetlobe dolžine τ s spektralno širino $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi = 1/\pi\tau$. Če je sunek svetlobe dolg 1 ps, je razlika v frekvencah spektra

$$\Delta\nu = \frac{1}{3 \times 10^{-12}\ \mathrm{s}} = 0,3\ \mathrm{THz}. \tag{11.79}$$

Valovanje, ki nastane pri takem optičnem kvazi-usmerjanju, ima torej frekvence v teraherčnem področju in naredili smo izvor teraherčnega valovanja.

Teraherčno valovanje, to je elektromagnetno valovanje s frekvencami v območju od 0,3 do 3 THz oziroma z valovnimi dolžinami med 0,1 in 1 mm, se uporablja za neinvazivno slikanje in preiskave tkiv in materialov. Kristali, ki se najpogosteje uporabljajo za nastanek teraherčnega valovanja, so ZnTe, GaP, GaSe in GaAs.

11.8 Nelinearni pojavi tretjega reda

Doslej smo obravnavali najnižji red nelinearnosti, katerega glavni učinek je mešanje treh frekvenc, na primer optično frekvenčno podvajanje ali optično parametrično ojačevanje. Ti pojavi so možni le v kristalih brez centra inverzije. Naslednji člen razvoja nelinearne polarizacije po električnem polju obstaja v vsaki snovi. V njem nastopa polje v tretji potenci

$$\mathbf{P}_{\mathrm{NL},3} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\,\mathbf{E}\mathbf{E} \tag{11.80}$$

oziroma izpisano po komponentah

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},3})_i = \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l. \tag{11.81}$$

Pri tem je $\chi^{(3)}$ tenzor četrtega ranga, njegova tipična velikost je okoli 10^{-22} m^2/V^2. Na splošno ima 81 različnih neodvisnih komponent, to število pa se lahko zelo zmanjša zaradi simetrije snovi. V izotropni snovi je tako 21 neničelnih elementov, od katerih so le trije neodvisni.

Če vsebuje vpadno polje le eno frekvenco, se zaradi nelinearnosti tretjega reda pojavi polarizacija pri 3ω in ω. Pri dveh vpadnih frekvencah ω_1 in ω_2 so možne kombinacije $2\omega_1 \pm \omega_2$ in $\omega_1 \pm 2\omega_2$, pri treh vpadnih frekvencah pa vse možne vsote in razlike frekvenc, to so ω_1, ω_2, ω_3, $3\omega_1$, $3\omega_2$, $3\omega_3$, $\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $\omega_1+\omega_2-\omega_3$, $\omega_1-\omega_2+\omega_3$, $-\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $2\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_1 \pm \omega_3$, $2\omega_2 \pm \omega_1$, $2\omega_2 \pm \omega_3$, $2\omega_3 \pm \omega_1$, $2\omega_3 \pm \omega_2$. Možnosti je torej precej več kot pri nelinearnosti drugega reda in računi so zato precej bolj zapleteni.

Obravnava nastanka valovanja pri kombinaciji frekvenc je zelo podobna obravnavi podvajanja frekvence in parametričnemu ojačevanju. V enačbah za nastanek novega valovanja ali ojačevanje katerega od vpadnih snopov spet nastopi fazni faktor, ki vsebuje razliko vseh valovnih vektorjev $\Delta\mathbf{k}$. Da je intenziteta novega valovanja znatna, mora biti $\Delta kL \simeq 0$, spet mora biti torej izpolnjen pogoj ujemanja faz. Ker v tem primeru nastopajo na splošno štirje valovni vektorji, je seveda tudi pri izbiri geometrije in polarizacij za ujemanje faz precej več možnosti.

Omejimo se na najpreprostejši primer, pri katerem ima vpadno valovanje le eno frekvenco. Takrat se pojavi valovanje pri potrojeni frekvenci, pa tudi pri frekvenci, ki je enaka vpadni. Pojavi se torej polarizacija pri vpadni frekvenci, ki spremeni obnašanje osnovnega žarka, in žarek vpliva sam nase. Ti pojavi, ki jih poimenujemo s predpono *samo-*, kot na primer samozbiranje, so značilni za nelinearne pojave tretjega reda.

11.9 Optični Kerrov pojav

Naj valovanje vpada na nelinearno snov, za katero velja $\chi^{(2)} = 0$. Polarizacija je potem enaka vsoti linearnega in nelinearnega dela tretjega reda (enačba 11.4)

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\,\mathbf{E}\,\mathbf{E}. \tag{11.82}$$

Ker obravnavamo nelinearne pojave, moramo tudi v tem primeru zapisati realna električna polja. To naredimo z vsoto dveh kompleksno konjugiranih členov

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{e}}{2}(Ae^{i(kz-\omega t)} + A^* e^{-i(kz-\omega t)}). \tag{11.83}$$

Podobno zapišemo tudi polarizacijo, pri čemer nas zanimajo samo členi, ki nihajo s frekvenco ω

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{e}}{2}(P_\omega e^{i(kz-\omega t)} + P_\omega^* e^{-i(kz-\omega t)}). \tag{11.84}$$

Ti členi nastopijo v primeru, ko v izrazu **E E E** vzamemo dvakrat nekonjugirani del, enkrat pa konjugiranega. To lahko naredimo na tri možne načine, zato nastopajo trije enaki členi. Sledi

$$\frac{\mathbf{e}}{2}P_{\omega,\mathrm{NL}} = 3\frac{1}{8}AA^*\left(\varepsilon_0\chi^{(3)}\vdots\mathbf{e}\,\mathbf{e}\,\mathbf{e}\right)A. \tag{11.85}$$

Celotna polarizacija je

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi^{(1)}\cdot\mathbf{E} + \frac{3}{4}|A|^2\left(\varepsilon_0\chi^{(3)}\vdots\mathbf{e}\,\mathbf{e}\right)\mathbf{E}. \tag{11.86}$$

Z upoštevanjem zveze med amplitudo polja in povprečno gostoto energijskega toka (enačba 1.30) zapišemo

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\left(\chi^{(1)} + \frac{3}{4}\frac{2j}{\varepsilon_0\tilde{n}c_0}\chi^{(3)}\vdots\mathbf{e}\,\mathbf{e}\right)\mathbf{E}. \tag{11.87}$$

Z $\tilde{n}$ smo označili lomni količnik pri frekvenci ω. Faktor v oklepaju ni nič drugega kot efektivna susceptibilnost, ki je neposredno povezana z lomnim količnikom snovi $\chi_{ef} = \varepsilon - 1 = n^2 - 1$. Gornja enačba torej opisuje pojav, pri katerem vpadna svetloba vpliva na lomni količnik snovi. Gre za podoben učinek kot pri navadnem Kerrovem pojavu, pri katerem se lomni količnik spremeni pod vplivom zunanjega električnega polja (enačba 10.3). Opisani optični ekvivalent zato imenujemo optični Kerrov pojav[6].

Poglejmo pojav podrobneje na primeru izotropne snovi. Na snov naj vpada valovanje, ki je polarizirano v smeri x, tako da ima nelinearna polarizacija le komponento

$$P_{\mathrm{NL},x} = \varepsilon_0\left(\chi_{xx} + \frac{3}{4}\chi_{xxxx}\frac{2j}{\varepsilon_0\tilde{n}c_0}\right)E = \varepsilon_0\chi_{ef}E = \varepsilon_0(n^2-1)E. \tag{11.88}$$

Izrazimo še efektivni lomni količnik

$$n \approx \tilde{n} + \frac{3\chi_{xxxx}}{4\varepsilon_0 c_0\tilde{n}^2}j, \tag{11.89}$$

ki ga lahko zapišemo v obliki

$$\boxed{n = \tilde{n} + n_2 j,} \tag{11.90}$$

pri čemer smo vpeljali nelinearni lomni količnik

$$\boxed{n_2 = \frac{3\chi_{xxxx}}{4\varepsilon_0 c_0\tilde{n}^2}.} \tag{11.91}$$

Efektivni lomni količnik snovi je torej odvisen od gostote svetlobnega toka, ki vpada nanjo. Tipične vrednosti nelinearnega lomnega količnika za vidno svetlobo so 10^{-20} m^2/W. V tekočini CS_2 je $n_2 = 3,2\cdot 10^{-18}$ m^2/W, v nekaterih drugih snoveh (npr. polprevodnikih) je lahko vrednost n_2 večja še za več velikostnih redov, n_2 pa je lahko tudi negativen.

Zanimivi posledici lomnega količnika, odvisnega od gostote svetlobnega toka vpadne svetlobe, sta samozbiranje svetlobnega snopa in širjenje solitonov po optičnih vodnikih, kar si bomo pogledali v naslednjih razdelkih.

★ Ničesar nismo povedali o ujemanju faz, ki je sicer nujno potrebno za učinkovite nelinearne optične pojave. V tem primeru vpada na snov en sam laserski žarek in pogoj ujemanja faz je vedno izpolnjen.

[6] Škotski fizik John Kerr, 1824–1907.

Snov	$\chi^{(3)}$ (m^2/V^2)	n_2 (m^2/W)
steklo BK7	$2{,}8 \times 10^{-22}$	$3,2 \times 10^{-20}$
voda	$2,5 \times 10^{-22}$	$4,1 \times 10^{-20}$
GaAs	$1,4 \times 10^{-18}$	$3,3 \times 10^{-17}$
ZnSe	$6,2 \times 10^{-20}$	$3,0 \times 10^{-18}$
CS_2	$3,1 \times 10^{-20}$	$3,2 \times 10^{-18}$
polimer 4BCMU	$-1,2 \times 10^{-19}$	$-1,5 \times 10^{-17}$

Tabela 11.2: Nelinearna susceptibilnost tretjega reda in nelinearni lomni količnik za nekaj snovi

11.10 Samozbiranje in krajevni solitoni

Za začetek si oglejmo pojav samozbiranja svetlobe. Osnovni Gaussov snop (enačba 3.29) naj vpada na sredstvo, v katerem je lomni količnik odvisen od gostote energijskega toka vpadne svetlobe po enačbi (11.90). Naj bo $n_2 > 0$, tako da je lomni količnik v sredini snopa večji od nemotenega lomnega količnika na robu. V osi snopa se optična pot zaradi optično gostejšega sredstva podaljša in valovna fronta v osi zaostaja glede na fronte na robu snopa. Če je zaostajanje dovolj veliko, lahko krivinski radij valovne fronte postane negativen in snop se ne širi, temveč oži (slika 11.10). Temu pojavu pravimo samozbiranje. Samozbiranje je pri dovolj veliki moči snopa lahko tako veliko, da pride do katastrofične zožitve snopa in s tem do tolikšnega povečanja gostote svetlobnega toka, da nastanejo poškodbe v snovi.

Slika 11.10: V Gaussovem snopu je intenziteta valovanja odvisna od prečne koordinate r, zato je tudi lomni količnik nelinearnega sredstva odvisen od nje. To vodi do samozbiranja svetlobe. Na sliki so fronte vpadnega Gaussovega snopa narisane kot ravni valovi.

Naloga 11.10.1 Gaussov snop svetlobe z močjo P in polmerom w naj vpada pravokotno na ploščico kristala debeline d. Pokaži, da ploščica deluje na snop kot leča z goriščno razdaljo

$$f = \frac{\pi w^4}{8 n_2 d P}, \tag{11.92}$$

pri čemer je n_2 nelinearni lomni količnik.

Zaradi uklona se Gaussov snop širi, pojav samozbiranja pa ima ravno nasprotni učinek. Snop samemu sebi ustvarja valovni vodnik, v katerem je v sredi lomni količnik večji kot na robu. Pri določeni moči snopa je tako možno doseči, da se oba pojava po velikosti ravno izenačita. Snop, ki se širi po snovi, ima tako konstanten polmer, valovne fronte pa so ravne – nastane t. i. krajevni soliton.

Ocenimo, pri kateri moči vpadne svetlobe pride do pojava krajevnih solitonov. Vzemimo, da je na izbranem mestu valovna fronta ravna. Lahko si mislimo, da je tam ravno grlo Gaussovega snopa. Brez samozbiranja bi bil na razdalji dolžine bližnjega polja z_0 krivinski radij valovne fronte (enačba 3.25)

$$R(z_0) = z_0 \left(1 + \left(\frac{z_0}{z_0}\right)^2\right) = 2z_0. \tag{11.93}$$

Po enačbi (11.90) je odvisnost lomnega količnika približno

$$n(r) = \tilde{n} + n_2 j_0 e^{-2r^2/w_0^2}. \tag{11.94}$$

Razlika med lomnim količnikom na osi (pri $r = 0$) in pri $r = w_0$ od osi je kar približno $\Delta n = j_0 n_2$. Zaradi tega je na poti od grla do z_0 razlika optičnih poti med žarkoma na osi $(r = 0)$ in pri $r = w_0$ enaka $\Delta n z_0 = n_2 j_0 z_0$ in valovna fronta se ukrivi na nek krivinski radij $-R$. Iz preproste geometrije velja zveza

$$\Delta n z_0 = R - R\sqrt{1 - \frac{w_0^2}{R^2}} \approx \frac{w_0^2}{2R} \tag{11.95}$$

Da valovna fronta ostane ravna, se morata krivinska radija zaradi uklona (enačba 11.93) in samozbiranja (enačba 11.95) ravno izenačiti. Od tod sledi

$$\Delta n = \frac{w_0^2}{4z_0^2}. \tag{11.96}$$

Moč snopa, pri katerem se polmer ne spreminja, je potem

$$P_s = \frac{1}{2}\pi w_0^2 j_0 = \frac{1}{2}\pi w_0^2 \frac{\Delta n}{n_2} = \frac{1}{2}\pi w_0^2 \frac{w_0^2}{4z_0^2}\frac{1}{n_2} = \frac{\lambda^2}{8\pi n_2}, \tag{11.97}$$

pri čemer smo upoštevali zvezo med z_0 in w_0 (enačba 3.21).

Pri moči, ki je manjša od kritične P_s, se vpadli Gaussov snop širi, čeprav nekoliko počasneje kot v sredstvu s konstantnim lomnim količnikom. Če pa je moč znatno večja od kritične moči, lahko pride do katastrofičnega samozbiranja in porušitve snovi. Zanimivo je, da kritična moč, pri kateri se pojavijo solitoni, ni odvisna od začetnega polmera snopa.

Naloga 11.10.2 Nariši skico k enačbi (11.95) in izpelji izraz za moč, pri kateri pride do pojava solitonov (enačba 11.97).

Izračunaj še kritično moč za pojav solitonov v CS_2, če je valovna dolžina vpadnega valovanja 1 µm, nelinearni lomni količnik te tekočine pa je $n_2 = 3,2 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{m^2/W}$.

Eksperimentalna metoda, s katero merimo nelinearni lomni količnik, je tako imenovana metoda vzdolžnega premika (*Z-scan*). Optično nelinearno sredstvo (naj ima $n_2 > 0$) postavimo v zožan laserski snop (slika 11.11). Zaradi samozbiranja deluje vzorec kot leča, njena goriščna razdalja pa je odvisna od intenzitete snopa in od nelinearnega lomnega količnika. Ko vzorec premikamo vzdolž snopa, se skupna efektivna goriščna razdalja leče in nelinearne snovi spreminja in žarek na detektorju je enkrat bolj zbran, drugič manj. Za lege vzorca desno od prvotnega gorišča ($z > 0$), je skupna goriščna razdalja daljša od goriščne razdalje leče, snop je bolj zbran (pikčasta črta) in signal na detektorju (D) naraste. Za lege vzorca levo od prvotnega gorišča ($z < 0$) je ravno obratno, snop se razširi (črtkana črta) in signal na detektorju se zmanjša. Za snovi z negativnim nelinearnim lomnim količnikom je odziv ravno nasprotnega predznaka. Pri določanju nelinearnega lomnega količnika je ključno uporabiti zaslonko (Z), s katero omejimo premer vpadnega snopa pred detektorjem. Če zaslonko odstranimo in merimo odvisnost celotne vpadne intenzitete od lege vzorca, nelinearnega lomnega količnika ne moremo meriti, lahko pa določimo nelinearni absorpcijski koeficient.

Slika 11.11: Shema metode vzdolžnega premika

11.11 *Izpeljava krajevnih solitonov

Za podrobnejšo obravnavo krajevnih solitonov moramo rešiti valovno enačbo v obosnem približku. Začnimo s krajevnim delom valovne enačbe za monokromatsko valovanje v skalarni obliki (enačba 1.21)

$$\nabla^2 E + n^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} E = 0. \tag{11.98}$$

Polje zapišemo v obliki počasi spreminjajoče se amplitude in faznega faktorja, podobno kot smo to naredili pri izpeljavi Gaussovega snopa (enačba 3.4)

$$E = \psi(\mathrm{r}, z) e^{ik_0 z}, \tag{11.99}$$

kjer je $k_0 = \tilde{n}\omega/c_0$ valovno število brez upoštevanja nelinearnosti. Funkcija $\psi(\mathbf{r}, z)$ naj se v smeri osi z le počasi spreminja, tako da lahko drugi odvod po z zanemarimo in zapišemo

$$\nabla_\perp^2 \psi + \frac{\omega^2}{c_0^2}(n^2 - \tilde{n}^2)\psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{11.100}$$

Upoštevamo odvisnost lomnega količnika od intenzitete, pri čemer zanemarimo člen z n_2^2, ker je gotovo majhen. Sledi

$$\nabla_\perp^2 \psi + 2k_0^2 \frac{n_2}{\tilde{n}} j\psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{11.101}$$

Izrazimo še gostoto svetlobnega toka z amplitudo električne poljske jakosti

$$\nabla_\perp^2 \psi + k_0^2 n_2 \varepsilon_0 c_0 |\psi|^2 \psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{11.102}$$

Preden se lotimo reševanja gornje enačbe, vpeljimo še

$$\kappa = k_0^2 n_2 \varepsilon_0 c_0 \tag{11.103}$$

in novo spremenljivko vzdolž osi z

$$\zeta = \frac{z}{2k_0}. \tag{11.104}$$

S tem preide enačba (11.102) v standardno obliko nelinearne Schrödingerjeve enačbe, le da namesto odvoda po času tukaj nastopa odvod po koordinati ζ. Sledi

$$\boxed{i\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \nabla_\perp^2 \psi + \kappa |\psi|^2 \psi = 0.} \tag{11.105}$$

V treh dimenzijah je reševanje enačbe (11.105) težavno in analitične rešitve niso znane. V dveh dimenzijah pa stacionarno rešitev znamo poiskati. Stacionarni rešitvi se vzdolž ζ lahko spreminja le faza, zato rešitev iščemo v obliki

$$\psi = e^{i\eta^2 \zeta} u(x), \tag{11.106}$$

kjer je η konstanta, katere pomen bomo videli v nadaljevanju, funkcija $u(x)$ pa naj bo realna. Uporabimo gornji nastavek v enačbi (11.105) in dobimo

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \eta^2 u - \kappa u^3. \tag{11.107}$$

Z množenjem obeh strani z u' lahko enačbo enkrat integriramo

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \eta^2 u^2 - \frac{1}{2}\kappa u^4. \tag{11.108}$$

Ločimo spremenljivki in zapišemo

$$\int_{\eta\sqrt{2/\kappa}}^{u} \frac{du}{\sqrt{\eta^2 u^2 - \frac{1}{2}\kappa u^4}} = x - x_0, \tag{11.109}$$

pri čemer smo uvedli integracijsko konstanto x_0 in integracijsko mejo postavili tako, da so vrednosti pod korenom pozitivne. Integral brez težav izračunamo

$$\frac{1}{\eta} \ln\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{u}{\eta + \sqrt{\eta^2 - \kappa u^2/2}}\right) = x - x_0 \tag{11.110}$$

in izrazimo iskano funkcijo $u(x)$

$$u = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \frac{2\eta}{e^{\eta(x-x_0)} + e^{-\eta(x-x_0)}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \frac{\eta}{\cosh \eta (x - x_0)}. \tag{11.111}$$

Po enačbi (11.106) je rešitev

$$\psi(x,z) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\, \eta\, \frac{e^{i\eta^2 \zeta}}{\cosh \eta (x - x_0)}. \tag{11.112}$$

Vidimo, da predstavlja spremenljivka $1/\eta$ karakteristično širino snopa, x_0 pa je le njegov prečni premik, ki ga lahko brez škode postavimo na $x_0 = 0$. Tako lahko zapišemo celotno polje stacionarnega snopa

$$E_s(x,z) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \frac{\eta}{\cosh(\eta x)} \exp\left(ik_0 z\left(1 + \frac{\eta^2}{2k_0^2}\right)\right). \tag{11.113}$$

Gostota svetlobnega toka je neodvisna od koordinate z in je sorazmerna kvadratu amplitude polja

$$\boxed{j_s(x,z) = j_0 \frac{1}{\cosh^2(\eta x)}.} \tag{11.114}$$

Slika 11.12: Prečni profil krajevnega solitona v 2D. Vzdolž koordinate z se profil ohranja.

Če se vrnemo k izrazu za električno poljsko jakost (enačba 11.113), vidimo, da parameter η nastopa tudi v faznem faktorju. To pomeni, da je od njega odvisna tudi konstanta širjenja in s tem fazna hitrost

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\tilde{n}\left(1 + \frac{\eta^2}{2k_0^2}\right)}. \tag{11.115}$$

Fazna hitrost omejenih snopov oziroma solitonov je torej vedno manjša od fazne hitrosti ravnih valov. Bolj ko je snop omejen, manjša je fazna hitrost, za velike polmere snopa pa doseže limitno vrednost $c_0/\tilde{n}$.

Moč dvodimenzionalnega snopa je enaka integralu gostote svetlobnega toka (enačba 11.114) po x. Integriramo in zapišemo

$$P_s = \int j_s dx \propto \int |E_s|^2 dx = \frac{2}{\kappa}\eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 \eta x} = \frac{4\eta}{\kappa}. \tag{11.116}$$

Moč stacionarnega snopa – solitona – v dveh dimenzijah je torej obratno sorazmerna s širino snopa $1/\eta$. Zato tudi pri poljubno veliki moči obstaja stacionarna širina. To je bistvena razlika med obravnavanim dvo- in tridimenzionalnim primerom, kjer se snop z nadkritično močjo skrči v singularnost.

11.12 Optični solitoni

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da pojav samozbiranja lahko izniči širjenje svetlobnega snopa zaradi uklona, tako da ima pri ustrezni moči snop vzdolž smeri širjenja konstantno širino in obliko. Takim snopom smo rekli krajevni solitoni. Povsem podoben pojav poznamo tudi v časovni domeni, kjer se pojavijo časovni ali optični solitoni.

Sunek svetlobe naj se širi po valovnem vodniku. Zaradi disperzije je lomni količnik odvisen od frekvence valovanja in sunek svetlobe se med potovanjem po vodniku podaljšuje. Več o tem bomo spoznali pri obravnavi disperzije v optičnih vlaknih (poglavje 8.4). Ob primernih pogojih lahko nelinearna odvisnost lomnega količnika $n(j)$ ravno izniči disperzijo $n(\lambda)$ in sunek ohranja obliko. Sunkom svetlobe, ki potujejo po sredstvu brez spremembe oblike, pravimo optični solitoni. Posebej so pomembni v optičnih vlaknih, kjer želimo vpliv disperzije zaradi učinkovitosti prenosa informacije kar se da zmanjšati.

Pojava optičnih solitonov ni težko pojasniti. Naj na optično nelinearno sredstvo vpade sunek svetlobe, ki je Gaussove oblike v času

$$j(t) = j_0 e^{-2t^2/\tau^2}. \tag{11.117}$$

Faza takega sunka je

$$\phi(t) = k_o n z - \omega_0 t = k_0(\tilde{n} + n_2 j)z - \omega_0 t = \phi_0 + k_0 n_2 z j - \omega_0 t, \tag{11.118}$$

krožna frekvenca pa

$$\omega = -\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - k_0 n_2 z \frac{dj}{dt}. \tag{11.119}$$

Če vstavimo časovno obliko sunka svetlobe (enačba 11.117), vidimo, da se frekvenca takega sunka spreminja s časom

$$\omega = \omega_0 + \frac{4k_0 n_2 z j_0}{\tau^2} t\, e^{-2t^2/\tau^2}. \tag{11.120}$$

Začetnemu delu sunka (pri $t < 0$) se krožna frekvenca zmanjša, zadnjemu delu sunka (pri $t > 0$) pa se poveča (slika 11.13). Ta pojav spreminjanja frekvence znotraj kratkega sunka imenujemo čirikanje (*chirping*), po podobnosti z oglašanjem črčkov.

Slika 11.13: Zaradi nelinearnega lomnega količnika pride do frekvenčnega premika v sunku svetlobe.

Pri prehodu optičnega sunka z osnovno krožno frekvenco ω_0 se različnim delom sunka frekvenca različno spremeni (slika 11.14 a), začetnemu delu se zmanjša, končnemu pa poveča. Po drugi strani pa v snoveh poznamo barvno disperzijo, kar pomeni, da se valovanja z različnimi frekvencami širijo z različnimi hitrostmi. Pojav disperzije je še bolj zapleten pri potovanju sunkov svetlobe, kar bomo podrobneje obravnavali pri optičnih vlaknih (poglavje 8.5). Zaenkrat povejmo le, da je pomemben parameter disperzija grupne hitrosti, ki je sorazmerna z drugim odvodom lomnega količnika po valovni dolžini (enačba 8.68)

$$D = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2n}{d\lambda^2}. \tag{11.121}$$

Pri določenih pogojih (izbrana snov in določeno frekvenčno območje) lahko dosežemo, da potuje del valovanja z daljšo valovno dolžino počasneje kot del valovanja s krajšo valovno dolžino (slika 11.14 b). V tem primeru končni del sunka dohiteva sprednjega in učinek disperzije ravno izniči učinek nelinearnosti. Nastane signal, ki ohranja svojo obliko – soliton.

Slika 11.14: Čirikanje sunkov svetlobe zaradi nelinearnega pojava (a). Z ustrezno disperzijo lahko čirikanje izničimo (b) in nastane sunek svetlobe, ki oblike ne spreminja – soliton.

11.13 *Izpeljava optičnih solitonov

Za matematični opis optičnih solitonov izhajamo iz nelinearne valovne enačbe (enačba 11.11), ki jo zapišemo v skalarni obliki

$$\nabla^2 E - \frac{n^2}{c_0^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}, \tag{11.122}$$

pri čemer je P_{NL} nelinearna polarizacija tretjega reda (enačba 11.6). Namesto v časovni domeni je enačbo prikladnejše reševati v frekvenčni domeni, zato namesto E in P_{NL} vpeljemo Fourierevi transformiranki $\tilde{E}$ in $\tilde{P}$.

Sledi

$$\nabla^2\tilde{E} + \frac{n^2}{c_0^2}\omega^2\tilde{E} = -\mu_0\omega^2\tilde{P}. \tag{11.123}$$

Gornjo enačbo rešujemo z nastavkoma

$$\tilde{E} = \tilde{A}(z,\omega-\omega_0)e^{ik_0z} \tag{11.124}$$

in

$$\tilde{P} = \tilde{B}(z,\omega-\omega_0)e^{ik_0z}, \tag{11.125}$$

pri čemer je ω_0 osrednja krožna frekvenca svetlobnega sunka in $k_0 = \omega_0 n/c_0$. Vpeljemo še $\Omega = \omega - \omega_0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\tilde{A}(z,\Omega)e^{ik_0z} = -\mu_0\omega^2\tilde{B}(z,\Omega)e^{ik_0z}. \tag{11.126}$$

Da lahko rešimo to enačbo, naredimo nekaj približkov. Ker je $\omega \approx \omega_0$, na desni strani enačbe nadomestimo frekvenco z osrednjo frekvenco. Poleg tega upoštevamo, da se amplituda glede na valovno dolžino le počasi spreminja, zato drugi odvod zanemarimo in

$$2ik_0\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z} + (k^2-k_0^2)\tilde{A} = -\mu_0\omega_0^2\tilde{B}. \tag{11.127}$$

Če je disperzija šibka, lahko zapišemo $k^2-k_0^2$ kot razliko kvadratov, $k(\omega_0+\Omega)$ pa razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli osrednje krožne frekvence ω_0 do tretjega člena. Sledi

$$k^2-k_0^2 \approx 2k_0(k-k_0) \approx 2k_0(k'\Omega + \frac{1}{2}k''\Omega^2), \tag{11.128}$$

pri čemer $'$ označuje odvod po krožni frekvenci, in prepišemo enačbo v

$$2ik_0\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z} + 2k_0(k'\Omega + \frac{1}{2}k''\Omega^2)\tilde{A} = -\mu_0\omega_0^2\tilde{B}. \tag{11.129}$$

Vrnimo se v časovno domeno, tako da naredimo inverzno Fourierevo transformacijo. Naj bo $A(z,t)$ kompleksna amplituda električne poljske jakosti in inverzna transformiranka funkcije $\tilde{A}(z,\Omega)$, funkcija $B(z,t)$ pa naj bo amplituda polarizacije in inverzna transformiranka funkcije $\tilde{B}(z,\Omega)$. Sledi

$$i(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t})A - \frac{1}{2}\frac{d^2k}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{\mu_0\omega_0^2}{2k_0}B, \tag{11.130}$$

pri čemer smo z $v_g = d\omega/dk = 1/k'$ označili grupno hitrost. Vpeljemo novo spremenljivko

$$\tau = t - \frac{z}{v_g}, \tag{11.131}$$

s katero opišemo obliko sunka $A_S(z,\tau)$, kot ga vidi opazovalec, ki se giblje z grupno hitrostjo skupaj s sunkom. Uporabimo pravilo verižnega odvajanja

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A_S}{\partial z} + \frac{\partial A_S}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial A_S}{\partial z} - \frac{1}{v_g}\frac{\partial A_S}{\partial \tau}. \tag{11.132}$$

Podobno naredimo še za odvod po času τ, ki pa se ne razlikuje od odvoda po času t

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A_S}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial A_S}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial A_S}{\partial \tau} \tag{11.133}$$

in

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A_S}{\partial \tau^2}. \tag{11.134}$$

Vstavimo še amplitudo nelinearne polarizacije (enačba 11.86), pri čemer izraz popravimo za faktor 4, ker smo drugače vpeljali parameter A. Dobimo

$$B = 3\varepsilon_0 \chi |A|^2 A \tag{11.135}$$

in enačbo (11.130) zapišemo kot

$$i\frac{\partial A_S}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{d^2k}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A_S}{\partial \tau^2} + \kappa |A_S|^2 A_S = 0. \tag{11.136}$$

Pri tem je parameter

$$\kappa = \frac{3\omega_0 \chi}{2c_0 \tilde{n}} = 2\omega_0 \varepsilon_0 n_2 \tilde{n} \tag{11.137}$$

sorazmeren nelinearnemu lomnemu količniku n_2 (enačba 11.91). Enačba (11.136) ni nič drugega kot nelinearna Schrödingerjeva enačba, ki smo jo zapisali že pri izpeljavi krajevnih solitonov (enačba 11.105). Enačbi se razlikujeta v tem, da ima vlogo prečne koordinate x tukaj čas τ in rešitve nimajo več konstantnega premera, ampak imajo konstantno dolžino sunka. Stacionarne rešitve obstajajo le v primeru, kadar je $d^2k/d\omega^2 < 0$ oziroma kadar ima drugi odvod nasprotni predznak od nelinearnega lomnega količnika n_2. Kot pri krajevnih solitonih tudi tukaj vpeljemo parameter η, ki je sorazmeren z energijo solitona (enačba 11.116). Sledi

$$A_S(z,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\eta \frac{e^{i\eta^2 z}}{\cosh\left(\eta\tau\sqrt{2\left|\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|^{-1}}\right)} \tag{11.138}$$

oziroma

$$A(z,t) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\eta \frac{e^{i\eta^2 z}}{\cosh\left(\eta(t-\frac{z}{v_g})\sqrt{2\left|\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|^{-1}}\right)}. \tag{11.139}$$

Zapisana je oblika solitona, ki potuje z grupno hitrostjo v_g in pri tem ohranja obliko. Zaradi tega so solitoni izredno zanimivi za prenos velike gostote informacij na velike razdalje, saj se izognemo omejitvam zaradi disperzije.

★ Ena izmed snovi, ki izpolnjuje pogoj, da je k'' nasprotnega predznaka kot n_2, so kremenova optična vlakna. Pri valovnih dolžinah vidne svetlobe to sicer ne velja, velja pa za $\lambda \gtrsim 1{,}3$ µm. Pogoj je torej izpolnjen pri valovnih dolžinah okoli $1{,}5$ µm, ki se navadno uporabljajo pri prenosu signalov po optičnih vlaknih, in signal lahko potuje brez podaljševanja.

11.14 Optična fazna konjugacija

Optična fazna konjugacija je zanimiv in danes tudi praktično pomemben pojav, pri katerem nastane iz danega valovanja novo valovanje, ki ima enake valovne fronte, vendar potuje v nasprotni smeri od prvotnega valovanja. Novo valovanje je tako, kot bi začetnemu valovanju obrnili predznak časa in ga "zavrteli nazaj".

Vzemimo optično nelinearno snov, na katero posvetimo z dvema močnima ravnima snopoma v nasprotnih smereh. To sta črpalna snopa in njuna valovna vektorja naj bosta $\mathbf{k}_1$ in $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$. Poleg njiju naj na snov vpada še tretji, signalni snop, ki ni nujno ravni val (slika 11.15). Signalni snop interferira s prvim črpalnim valom in s tem zaradi nelinearnosti tretjega reda povzroči modulacijo lomnega količnika. Ta je skoraj periodična, če je signalni val podoben ravnemu valu. Na modulaciji lomnega količnika se drugo črpalno valovanje uklanja. Uklonjeno valovanje je enake oblike kot signalno, le potuje v nasprotni smeri, saj ima drugo črpalno valovanje nasprotno smer od prvega. Črpalni valovanji sta seveda enakovredni in ni mogoče ločiti med valovanjem, s katerim signalno valovanje interferira, in valovanjem, ki se uklanja.

Slika 11.15: Optična fazna konjugacija. Dva močna črpalna žarka (modra) vpadata na optično nelinearno snov v nasprotnih smereh, vpadni signal (rdeč) pa se odbije v smer, iz katere vpada.

Optična fazna konjugacija je zelo podobna holografiji, le da pri holografiji najprej zapišemo predmetni snop, ki ga kasneje reproduciramo, pri fazni konjugaciji pa zapis začetnega valovanja in njegova reprodukcija potekata sočasno.

Naj se signalno valovanje razširja v smeri z. Zapišemo ga

$$E_3 = \Re\left(A_3(z)\, e^{i(kz-\omega t)}\right). \tag{11.140}$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da je novonastalo valovanje sorazmerno

$$E_4 \propto \Re\left(A_3^*(z)\, e^{i(-kz-\omega t)}\right). \tag{11.141}$$

Zaradi nasprotnega predznaka k potuje nastalo valovanje v obratni smeri od signalnega valovanja. Poleg tega je kompleksno konjugirana tudi njegova amplituda. To seveda ne vpliva na obliko valovnih front, saj so te popolnoma enake kot pri signalnem valovanju. Zaradi lastnosti, da lahko novo valovanje iz signalnega nastane tako, da krajevni del kompleksno konjugiramo, nastalemu valovanju pravimo fazno konjugirano valovanje.

Uporabna posledica fazne konjugacije je prikazana na sliki (11.16). Najpreprostejši primer je vpad ravnega vala (a), ki se ne odbije po odbojnem zakonu (slika zgoraj), ampak se odbije v smer, iz katere je vpadel na snov (slika spodaj). Drugi primer je krogelni val ali v približku tudi Gaussov snop (b). Ko vpade na navadno zrcalo (zgoraj), se njegova divergenca ohranja in žarek se še naprej razširja. Na fazno konjugiranem zrcalu se krogelni val spet zbere v izvoru (spodaj).

Slika 11.16: Primerjava odbojev na navadnem zrcalu (zgoraj) in faznem konjugatorju (spodaj): odboj ravnega vala (a), odboj krogelnega valovanja (b) in odboj popačenega vala (c). Valovne fronte vpadnega vala so označene s polno črto, odbitega pa s črtkano.

Tretji primer je sredstvo, ki valovanju doda naključno fazo, zato po prehodu valovne fronte niso več gladke (c). Od navadnega zrcala se popačen snop odbije, pri ponovnem prehodu skozi sredstvo pa se popačenje še poveča. Povsem drugačno je obnašanje pri odboju na faznem konjugatorju. Ko popačen snop vpade na fazni konjugator, v njem generira fazno konjugiran snop, ki potuje v nasprotni smeri in ima enako nepravilne valovne fronte kot vpadni val. Po prehodu skozi nepravilno sredstvo se neravnosti valovne fronte izničijo in nastanejo enake gladke valovne fronte ravnega vala kot na začetku. To lastnost popravljanja valovne fronte je mogoče koristno uporabiti, na primer namesto enega zrcala v laserskem resonatorju.

★ Omenili smo že, da se fazno konjugirana zrcala uporabljajo v laserjih za izničenje popačenj Gaussovega snopa. Drug primer uporabe je pri optični astronomiji ali optičnih komunikacijah skozi atmosfero. Naključne spremembe gostote v atmosferi signalu dodajo naključni fazni premik, ki signal popači. Če se signal odbije od zrcala nazaj proti izvoru, je torej dvakratno popačen. Če pa se odbije od fazno konjugiranega zrcala, se vpliv nehomogenosti atmosfere ravno izniči in na prenos signala ne vpliva, poleg tega je šibek vpadni signal lahko še dodatno ojačen.

11.15 *Izpeljava optične fazne konjugacije

Poglejmo podrobneje, kako v nelinearnem sredstvu nastane fazno konjugiran val. Kot kaže slika (11.15), je celotno polje v nelinearnem sredstvu vsota štirih valovanj, dveh močnih črpalnih (oznaki 1 in 2), signalnega (oznaka 3) in odbitega (oznaka 4)

$$E = \frac{1}{2}A_1 e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \frac{1}{2}A_2 e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \frac{1}{2}A_3(z)\, e^{ikz-i\omega t} + \frac{1}{2}A_4(z)\, e^{-ikz-i\omega t} + \text{k.k.} \quad (11.142)$$

S k.k. smo spet označili kompleksno konjugirane člene. Vsa valovanja naj imajo enako frekvenco, zaradi enostavnosti še privzemimo, da so enake tudi vse polarizacije. Račun poenostavimo še s privzetkom, da sta črpalna vala E_1 in E_2 dosti močnejša od E_3 in E_4, tako da sta njuni amplitudi konstantni, $E_3(z)$ in $E_4(z)$ pa se le počasi spreminjata.

Vstavimo E v valovno enačbo z nelinearno polarizacijo (enačba 11.11)

$$\nabla^2 E + \varepsilon \frac{\omega^2}{c_0^2} E = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}. \tag{11.143}$$

Pri tem je $\varepsilon\,\omega^2/c_0^2 = k^2$, P_{NL} pa je po enačbi (11.80) enak $P_{\mathrm{NL}} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3$, kjer je $\chi^{(3)} = \chi$ efektivna nelinearna susceptibilnost za izbrano polarizacijo vseh polj.

Ker je E zapisan kot vsota osmih členov (enačba 11.142), vsebuje produkt E^3 kar 512 členov. Vendar se njihovo število znatno zmanjša, če upoštevamo le tiste z enako časovno odvisnostjo oziroma enako frekvenco. Poleg tega nas ne zanimajo različne kombinacije valovnih vektorjev, ampak k enačbi za E_3 prispevajo le tisti členi s krajevnim faznim faktorjem $\exp(ikz)$, k enačbi za E_4 pa tisti z $\exp(-ikz)$. Sledi

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{NL}\,3,4} &= \frac{1}{8}\varepsilon_0 \chi [(6A_1A_2A_4^* + 6A_1A_1^*A_3 + 6A_2A_2^*A_3 + 3A_3A_3^*A_3 + 6A_4A_4^*A_3)\, e^{ikz-i\omega t} \\ &+ (6A_1A_2A_3^* + 6A_1A_1^*A_4 + 6A_2A_2^*A_4 + 6A_3A_3^*A_4 + 3A_4A_4^*A_4)\, e^{-ikz-i\omega t}]. \end{aligned} \tag{11.144}$$

Če zanemarimo še člene, v katerih nastopata A_3 in A_4 v višjih potencah, dobimo

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{NL}\,3,4} &= \frac{3}{4}\varepsilon_0 \chi [\left(A_1A_2A_4^* + |A_1|^2 A_3 + |A_2|^2 A_3\right) e^{ikz-i\omega t} \\ &+ \left(A_1A_2A_3^* + |A_1|^2 A_4 + |A_2|^2 A_4\right) e^{-ikz-i\omega t}]. \end{aligned} \tag{11.145}$$

Vstavimo gornji izraz v valovno enačbo (enačba 11.143) in upoštevamo, da se $A_i(z)$ le počasi spreminja (kar pomeni, da zanemarimo drugi odvod po z). Sledi

$$ik\frac{dA_3}{dz} = -\frac{3}{4}\mu_0\varepsilon_0\chi\omega^2 \left(A_1A_2A_4^* + (|A_1|^2 + |A_2|^2)A_3\right) \tag{11.146}$$

in

$$-ik\frac{dA_4}{dz} = -\frac{3}{4}\mu_0\varepsilon_0\chi\omega^2 \left(A_1A_2A_3^* + (|A_1|^2 + |A_2|^2)A_4\right). \tag{11.147}$$

Drugi člen na desni že poznamo: opisuje odvisnost lomnega količnika od intenzitete črpalnih valov, torej optični Kerrov pojav, in je zato le dodaten prispevek k fazi. Vpeljimo novi amplitudi, ki se od prejšnjih razlikujeta zgolj v faznem faktorju.

$$\tilde{A}_3 = A_3 \exp\left(-i\frac{3\chi\omega}{4c_0 n}(|A_1|^2 + |A_2|^2)z\right) \tag{11.148}$$

in

$$\tilde{A}_4 = A_4 \exp\left(i\frac{3\chi\omega}{4c_0 n}(|A_1|^2 + |A_2|^2)z\right). \tag{11.149}$$

Ko novi amplitudi vstavimo v diferencialni enačbi (enačbi 11.146 in 11.147), se Kerrov prispevek k fazi ravno odšteje in enačbi se prepišeta v

$$\frac{d\tilde{A}_3}{dz} = i\frac{3\chi\omega}{4c_0 n}A_1A_2\tilde{A}_4^* \quad \text{in} \quad \frac{d\tilde{A}_4}{dz} = -i\frac{3\chi\omega}{4c_0 n}A_1A_2\tilde{A}_3^*. \tag{11.150}$$

Vpeljemo še sklopitveno konstanto

$$\kappa = \frac{3\chi\omega}{4c_0 n}A_1A_2. \tag{11.151}$$

Enačbi se poenostavita v

$$\frac{d\tilde{A}_3}{dz} = i\kappa\tilde{A}_4^* \quad \text{oziroma} \quad \frac{d\tilde{A}_3^*}{dz} = -i\kappa^*\tilde{A}_4 \quad \text{in} \quad \frac{d\tilde{A}_4}{dz} = -i\kappa\tilde{A}_3^*. \tag{11.152}$$

Zelo težaven problem nelinearne valovne enačbe smo prevedli na linearen sistem dveh preprostih sklopljenih enačb za amplitudi signalnega in odbitega vala. Rešitvi sistema enačb (11.152) sta

$$\tilde{A}_3^*(z) = C_1\cos(|\kappa|z) + C_2\sin(|\kappa|z) \tag{11.153}$$

$$\tilde{A}_4(z) = D_1\cos(|\kappa|z) + D_2\sin(|\kappa|z). \tag{11.154}$$

Z upoštevanjem zveze, ki izhaja iz prve diferencialne enačbe (enačba 11.152), zapišemo

$$C_1 = \frac{i\kappa^*}{|\kappa|}D_2 \qquad \text{in} \qquad C_2 = -\frac{i\kappa^*}{|\kappa|}D_1. \tag{11.155}$$

Potrebujemo še robne pogoje za obe valovanji. Z leve, pri $z = 0$, poznamo $\tilde{A}_3^*(0)$, pri $z = L$ pa ne more biti odbitega vala in je zato $\tilde{A}_4(L) = 0$. S tem določimo konstanti D_1 in D_2

$$D_2 = -\frac{i|\kappa|}{\kappa^*}\tilde{A}_3^*(0) \qquad \text{in} \qquad D_1 = -D_2\tan(|\kappa|L). \tag{11.156}$$

Gornje enačbe združimo in zapišemo amplitudi znotraj nelinearne snovi

$$\tilde{A}_3(z) = \tilde{A}_3(0)\frac{\cos(|\kappa|(L-z))}{\cos(|\kappa|L)} \tag{11.157}$$

in

$$\tilde{A}_4(z) = \tilde{A}_3^*(0)\frac{i\kappa}{|\kappa|}\frac{\sin(|\kappa|(L-z))}{\cos(|\kappa|L)}.$$

Izračunajmo še amplitudi odbitega in prepuščenega vala. Amplituda odbitega vala pri $z = 0$ je

$$\boxed{\tilde{A}_4(0) = \tilde{A}_3^*(0)\frac{i\kappa}{|\kappa|}\tan(|\kappa|L),} \tag{11.158}$$

amplituda prepuščenega pri $z = L$ pa

$$\boxed{\tilde{A}_3(L) = \frac{\tilde{A}_3^*(0)}{\cos(|\kappa|L)}.} \tag{11.159}$$

Oglejmo si gornja rezultata. Vidimo, da je odbiti val sorazmeren kompleksno konjugirani amplitudi vpadnega vala, kar smo omenili že v prejšnjem razdelku. Poleg konjugirane amplitude ima tudi natanko nasproten valovni vektor, zato tudi ime fazno konjugiran val. Zanimiva je tudi njegova velikost. Ker je lahko $\tan(|\kappa|L) > 1$, je odbit val lahko močnejši od vpadnega. To ojačenje odbitega vala gre seveda na račun moči črpalnih valov. V našem računu bi lahko amplituda odbite svetlobe narasla proti neskončnosti, vendar zapisane enačbe takrat niso več veljavne, saj smo privzeli, da sta signalni in odbiti žarek precej šibkejša od črpalnih.

Poglejmo še prepuščeni žarek. Ker je $\cos(x) \leq 1$, je amplituda prepuščenega žarka vedno večja od amplitude vpadnega. To pomeni, da smo na račun črpalnih žarkov dobili prepustnost, ki je vedno večja od 100 %, in odbojnost, ki je lahko večja od 100 %.

Pri računu smo predpostavili, da je vpadni signal ravni val. Če je njegova amplituda odvisna še od prečne koordinate, ga lahko razvijemo po ravnih valovih in zgoraj izpeljana enačba (11.158) velja za vsako komponento posebej. Odbite komponente so sorazmerne s konjugiranimi komponentami signalnega valovanja z nasprotnim valovnim vektorjem in dajo skupaj valovno fronto enake oblike kot pri signalnem valovanju, le giblje se v nasprotni smeri.

11.16 Stimulirano Ramanovo in stimulirano Brillouinovo sipanje

Ko svetloba vpade na snov, se je del siplje. Poleg elastičnega Rayleighovega sipanja, pri katerem se energija vpadlih fotonov (in z njo frekvenca) svetlobe ohranja, pride tudi do sipanja, pri katerem se energija izhodnih fotonov razlikuje od energije vpadnih.

Če se energija fotonov spremeni zaradi prehajanja molekul snovi med različnimi vibracijskimi ali rotacijskimi stanji, govorimo o Ramanovem sipanju[7]. Do tega pojava lahko pride tako v plinih in tekočinah kot tudi v trdnih snoveh. Navadno ločimo dva primera: Stokesovo sipanje[8], pri katerem foton odda energijo molekuli, in anti-Stokesovo sipanje, pri katerem foton prejme energijo od vzbujene molekule. V prvem primeru je frekvenca sipane svetlobe $\nu_s = \nu_0 - \nu_v$, kjer ν_0 označuje frekvenco vpadne svetlobe, ν_v pa vibracijsko frekvenco, v drugem primeru pa $\nu_{as} = \nu_0 + \nu_v$. Slednji procesi so razmeroma redki, zato je intenziteta anti-Stokesovega sipanja še znatno šibkejša od že tako šibkega Stokesovega sipanja. Tipični Ramanov premik $\nu_0 - \nu_s$ znaša okoli 10^{12}–10^{13} Hz. Drug zanimiv primer je, kadar pride do spremembe energije fotonov zaradi vzbujanja akustičnih valov (fononov). Takrat govorimo o Brillouinovem sipanju[9]. Tipičen Brillouinov premik je $\sim 10^{10}$Hz.

Slika 11.17: Prehodi med energijskimi nivoji za Ramanovo sipanje in shema Brillouinovega sipanja. Pri Stokesovem sipanju snov prevzame energijo (a), pri anti-Stokesovem sipanju energijo odda (b). Pri Brillouinovem sipanju svetloba vzbuja akustične valove (c) in se na njih odbije.

Stimulirano Ramanovo sipanje

Pri spontanem Ramanovem sipanju se svetloba siplje na termično vzbujenih fluktuacijah v snovi. Če pa se svetloba siplje na fluktuacijah, ki jih je povzročilo vpadno svetlobno polje, govorimo o stimuliranem Ramanovem sipanju. Dosežemo ga tako, da na snov poleg osnovnega žarka s frekvenco ν_0 usmerimo dodaten Stokesov žarek s frekvenco ν_s, ki stimulira določen prehod. Fotoni osnovnega žarka se absorbirajo in izhajajo fotoni pri ν_s. Več absorbiranih fotonov pomeni več Stokesovega sipanja in proces se ojačuje. Tako pride do resonančnega ojačenja svetlobe pri ν_s oziroma do stimuliranega Ramanovega sipanja. Moč svetlobe pri ν_s, ki je po fazi in smeri enaka vpadni, se eksponentno povečuje na račun črpalnega žarka, do določene meje, seveda.

Obravnavajmo stimulirano Ramanovo sipanje v klasičnem približku in snov opišemo z N neodvisnimi enodimenzionalnimi harmonskimi oscilatorji. Nihanje posameznega oscilatorja zadošča enačbi

$$\frac{d^2X(z,t)}{dt^2} + \gamma\frac{dX}{dt} + \omega_v^2 X = \frac{F(z,t)}{m}. \tag{11.160}$$

[7] Indijski fizik in nobelovec Sir Chandrasekhara Venkata Raman, 1888–1970.
[8] Irski fizik in matematik Sir George Gabriel Stokes, 1819–1903.
[9] Francoski fizik Léon Nicolas Brillouin, 1889–1969.

Pri tem je X koordinata, γ koeficient dušenja, m masa in F zunanja sila. Glavna predpostavka modela je, da polarizirnost molekul ni konstantna, ampak odvisna od "raztega" nihajoče molekule oziroma oscilatorja. Polarizirnost α razvijemo v Taylorjevo vrsto do prvega člena

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1+N\alpha) = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 N\left(\alpha_0 + \frac{d\alpha}{dX}X\right). \tag{11.161}$$

Silo na en oscilator izračunamo kot odvod energije po koordinati

$$F = \frac{dW}{dX} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{d\alpha}{dX}\overline{E^2}. \tag{11.162}$$

Električno poljsko jakost smo zapisali kot povprečje, saj so optične frekvence tako hitre, da jim molekule ne morejo slediti. Celotno električno polje zapišemo kot vsoto osnovnega in Stokesovega polja

$$E(z,t) = \frac{1}{2}\left(E_0(z)e^{-i\omega_0 t} + E_s(z)e^{-i\omega_s t} + k.k.\right) \tag{11.163}$$

in povprečje kvadrata

$$\overline{E^2} = \frac{1}{4}\left(2E_0E_s^* e^{-i(\omega_0-\omega_s)t} + k.k.\right). \tag{11.164}$$

Vstavimo zapisano električno poljsko jakost najprej v izraz za silo (enačba 11.162), nato pa v enačbo oscilatorja (enačba 11.160). Sledi

$$\frac{1}{2}\left(\omega_v^2 - \omega^2 - i\omega\gamma\right)\tilde{X} = \frac{\varepsilon_0}{4m}\frac{d\alpha}{dX}E_0E_s^*, \tag{11.165}$$

pri čemer je

$$X(z,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{X}e^{-i\omega t} + k.k.\right) \tag{11.166}$$

in $\omega = \omega_0 - \omega_s$. Oscilatorji torej nihajo s kompleksno amplitudo

$$\tilde{X} = \frac{\varepsilon_0\frac{d\alpha}{dX}E_0E_s^*}{2m\left(\omega_v^2 - (\omega_0-\omega_s)^2 - i(\omega_0-\omega_s)\gamma\right)}. \tag{11.167}$$

Zdaj lahko zapišemo polarizacijo $P = \varepsilon_0 N\alpha E$ in nelinearni del polarizacije je

$$P_{\mathrm{NL}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 N\frac{d\alpha}{dX}\left(\tilde{X}e^{-i(\omega_0-\omega_s)t} + k.k.\right)\cdot\left(E_0(z)e^{-i\omega_0 t} + E_s(z)e^{-i\omega_s t} + k.k.\right). \tag{11.168}$$

Omejimo se le na polarizacijo pri krožni frekvenci ω_s in zapišemo

$$P_{\mathrm{NL},\omega_s} = \varepsilon_0\chi_{ef}E_s = \frac{\varepsilon_0^2 N}{8m}\left(\frac{d\alpha}{dX}\right)^2\frac{|E_0|^2}{\omega_v^2 - (\omega_0-\omega_s)^2 + i(\omega_0-\omega_s)\gamma}E_s. \tag{11.169}$$

Efektivna susceptibilnost za svetlobo pri krožni frekvenci ω_s je torej kompleksna in sorazmerna intenziteti vpadne laserske svetlobe pri osnovni krožni frekvenci ω_0. V resonanci, ko je $\omega_0 - \omega_s = \omega_v$, je efektivna susceptibilnost imaginarna in negativnega predznaka, kar ima, kot bomo videli, zelo pomembne fizikalne posledice. Iz gornjega izraza je tudi razvidno, zakaj gre pri stimuliranem Ramanovem sipanju za nelinearen optični pojav tretjega reda.

Kompleksna susceptibilnost pomeni kompleksni lomni količnik. Če upoštevamo le prve člene v razvoju, se vpadna svetloba po snovi širi kot

$$E_s(z) = E_s(0)\exp\left(ikz + ikz\frac{1}{2}\Re(\chi) - kz\frac{1}{2}\Im(\chi)\right). \tag{11.170}$$

Naloga 11.16.1 Izpelji enačbo (11.170), tako da iz efektivne susceptibilnosti izračunaš lomni količnik, in pokaži, da je $\Im(\chi)$ vedno negativen.

Ker je imaginarni del efektivne susceptibilnosti vedno negativen (naloga 11.16.1), električna poljska jakost eksponentno narašča na račun črpalnega laserskega snopa. Največjo ojačenje je seveda v primeru, ko je sistem v resonanci in razlika frekvenc vpadne svetlobe ravno enaka vibracijski frekvenci. Če zanemarimo izgube, lahko zapišemo

$$|E_s(L)|^2 = |E_s(0)|^2 e^{G_R jL}. \tag{11.171}$$

Vrednosti G_R za najmočnejša nihanja so $0,024$ cm/MW za CS_2, $0,029$ cm/MW za $LiNbO_3$ in $0,0008$ cm/MW za SiO_2. V meter dolgem odseku vlakna pride tako pri gostoti svetlobnega toka 10^{10} W/m^2 do faktorja ojačenja $1,08$, na vlaknu dolžine 20 m pa do faktorja 5.

★ Pojav stimuliranega Ramanovega sevanja je posebej pomemben v ojačenje signala v optičnih vlaknih, predvsem zaradi velike intenzitete na velikih dolžinah.

Stimulirano Brillouinovo sipanje

Stimulirano Brillouinovo sipanje je pojav, pri katerem vpadlo svetlobno valovanje vzbudi akustični val (fonon), nato pa se na njem siplje. Poleg vpadne svetlobe pri ν_0 se tako pojavi še Stokesova svetloba pri frekvenci $\nu_s = \nu_0 - \nu_f$, pri čemer ν_f označuje frekvenco akustičnega vala (slika 11.17 c). Interferenca vpadnega in Stokesovega valovanja, ki ima komponento ravno pri ν_f, povratno povečuje intenziteto vzbujenega zvočnega valovanja, njegovo povečanje pa vodi do večje intenzitete Stokesovega valovanja. Pride do pozitivne povratne zanke in eksponentnega ojačenja svetlobe. Najmočnejši pojav je ravno v nasproti smeri od vpadne svetlobe, v smeri naprej pa Brillouinovega sipanja ni. Če bi namreč vstopna in izstopna svetloba bili vzporedni, bi bila razlika njunih valovnih vektorjev enaka nič.

Računa za Brillouinovo sipanje ne bomo naredili, ga pa lahko bralec poišče v literaturi[10]. Poglavitno je, da tudi pri stimuliranem Brillouinovem sipanju pride do eksponentnega ojačenja signala pri zmanjšani frekvenci

$$|E_s(z)|^2 = |E_s(L)|^2 e^{G_B j(L-z)}. \tag{11.172}$$

Pri zapisu smo upoštevali, da se val širi in ojačuje v nasprotni smeri od vpadnega. Vrednosti parametra G_B so na primer $0,13$ cm/MW za CS_2 in $0,0045$ cm/MW za SiO_2. Ker je koeficient G_B odvisen od zunanjih parametrov, na primer od temperature ali pritiska, lahko stimulirano Brillouinovo sipanje uporabimo tudi za senzoriko.

11.17 Nelinearni pojavi v optičnih vlaknih

V osmem poglavju smo podrobno obravnavali nelinearne optične pojave v snovi. Spoznali smo nelinearne pojave drugega reda, do katerih pride v snoveh brez centra inverzije, in nelinearne pojave tretjega reda, do katerih pride v vseh snoveh ob dovolj velikih vpadnih močeh svetlobe. Na kratko povzemimo, kako se ti pojavi odražajo v optičnih vodnikih.

[10] Npr. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press.

Pojavi drugega reda

Optična vlakna so praviloma narejena iz SiO_2, za katerega zaradi simetrije molekul velja, da je $\chi^{(2)} = 0$. Nelinearnih pojavov drugega reda zato ne opazimo, razen izjemoma na morebitnih nepravilnostih v steklu. Da bi izkoristili nelinearne optične pojave drugega reda in v vodnikih dosegli na primer optično frekvenčno podvajanje, morajo biti vodniki zgrajeni iz snovi, ki imajo nelinearno susceptibilnost različno od nič. Prednost vodnikov pred navadnimi kristali je v tem, da svetloba znotraj sredice vodnika potuje brez uklona. Posledično je pretvorba iz osnovne v frekvenčno podvojeno svetlobo, ki je sorazmerna s kvadratom dolžine poti (enačba 11.26), zelo učinkovita. Seveda mora biti izpolnjen tudi pogoj za ujemanje faz. To omogoča rodovna disperzija, zaradi katere lahko rodova pri osnovni in podvojeni frekvenci potujeta po vodniku z enako komponento valovnega vektorja β.

Pojavi tretjega reda

V navadnih optičnih vlaknih prevladujejo nelinearni pojavi tretjega reda, ki jih v grobem delimo v dve skupini. Prva vključuje neelastično sipanje (Ramanovo in Brillouinovo), druga pa pojave, ki temeljijo na optičnem Kerrovem pojavu.

Obravnavajmo najprej stimulirano Ramanovo sipanje (SRS), ki smo ga spoznali v poglavju (11.16). Spomnimo se, da se pri SRS intenziteta svetlobe pri vpadni frekvenci zmanjšuje, na njen račun pa se eksponentno povečuje intenziteta valovanja z malenkost nižjo frekvenco. Razlika frekvenc ustreza vibracijskemu prehodu molekul v snovi. SRS v telekomunikacijskih vlaknih vodi do popačenja signala in povečanja spektralne širine. Po drugi strani stimulirano Ramanovo sipanje izkoriščamo za ojačenje signala v vodnikih. Če v vlakno posvetimo z močno črpalno svetlobo, katere frekvenca se od signalnega žarka razlikuje za vibracijsko frekvenco ($\sim$ 13 THz), se signalni žarek ojači. Ker je spekter SiO_2 razmeroma širok ($\sim$ 5 THz), tega pogoja ni težko izpolniti.

Pri stimuliranem Brillouinovem sipanju (SBS) pride do odboja vpadne svetlobe na optično vzbujenem akustičnem valu v snovi (poglavje 11.16). Signal v smeri naprej oslabi, pojavi pa se odbit val, katerega intenziteta narašča eksponentno z intenziteto vpadne svetlobe. Neželenemu pojavu se lahko izognemo z zmanjšanjem vpadne moči (pod $\sim$ 100 mW na kanal) ali povečanjem spektralne širine vpadne svetlobe.

Druga skupina nelinearnih pojavov temelji na spreminjanju lomnega količnika z intenziteto vpadne svetlobe (optični Kerrov pojav, poglavje 11.9). Opišimo tri pojave:

1. Samo-fazna modulacija ali lastna fazna modulacija (*SPM – Self-phase modulation*). Različni deli sunka zaradi različne intenzitete občutijo različen lomni količnik in pride do tako imenovanega čirikanja (enačba 11.120 in slika 11.13). Pojav vodi do spektralne razširitve in zaradi disperzije tudi do časovnega podaljšanja sunka. Z ustrezno disperzijo dosežemo krajšanje sunkov ali pojav optičnih solitonov (poglavje 11.12).
2. Navzkrižna fazna modulacija (*CPM – Cross-phase modulation*). Ko po vlaknu potuje več svetlobnih sunkov hkrati, prvi sunek povzroči spremembo lomnega količnika, drugi sunki pa to spremembo občutijo. Gre za medsebojno motnjo med sunki, ki vodi do spektralne razširitve. Pojav lahko izkoristimo za krajšanje sunkov ali za izdelavo optičnih stikal, saj lahko z zunanjim kontrolnim žarkom spreminjamo fazo izbranega sunka.
3. Sklopitev štirih valov (*FWM – Four-wave mixing*). Če po vlaknu potuje več valovanj z različnimi frekvencami, pride zaradi nelinearne sklopitve do pojava valovanj pri dodatnih frekvencah (vsotah in razlikah obstoječih valovanj). To se pojavi predvsem v vlaknih z

zelo majhno disperzijo, v katerih pride do ujemanja faz.

Stvarno kazalo

Čirikanje, 162, 255, 266
Črpanje, 81, 94, 138
Štirinivojski sistem, 81, 124, 126, 128
Šum, 194
    štetja, 194, 195
    seštevanje, 199
    sevanja ozadja, 194, 198
    temnega toka, 194, 198
    termični, 194, 197
Življenjski čas nihanj, 63, 96

Absorpcija, 78, 164, 177
Absorpcija fotona, 75, 82
Absorpcijski koeficient, 78, 80, 86
Aktivno območje, 139
Akusto-optični modulator, 216
Akusto-optični pojav, 113, 212, 214, 217
AlGaAs, 140
Atenuacijski koeficient, 164
Avtokorelacijska funkcija, 28

$BaTiO_3$, 24, 204, 231, 232
Bennettova vdolbina, 86
Besslov snop, 45
    divergenca, 45
Bining, *glej* Združevanje pikslov
Bolometer, 176, 178, 192
Boltzmannova porazdelitev, 73, 77
Braggov odboj, 59, 133, 141, 215, 226
Braggov uklon, 214, 218, 219
Brewstrov kot, 16
Brewstrovo okno, 16
Brillouinovo sipanje, 263
    stimulirano, 263, 266

$CaCO_3$, *glej* Kalcit
CS_2, 249–251, 265

Detektor, 176
    CCD, 192
    CMOS, 192, 194
    kvantni, 176, 181
    najmanjši merljivi signal, 177
    občutljivost, 177, 182
    odzivni čas, 177, 178, 190
    spektralni odziv, 177, 186
    termični, 176, 177
DFG, *glej* Generacija razlike frekvenc
Dielektričnost, 9, 21, 217, 221
    inverzna, 203, 212
Disperzija, 114, 144, 156, 255, 256
    kompenzacija, 163
    materialna, 158
    podaljšanje sunka, 160
    polarizacijska, 157
    rodovna, 157, 266
    valovodna, 158
Dobrota resonatorja, 63, 108
Dopplerjeva razširitev, 29, 54, 84, 85, 122, 124, 126
Dvolomnost, 23, 208, 213, 237
    dvoosne snovi, 21, 206, 208
    enoosne snovi, 21, 22, 205, 206, 221, 223, 237
Dvonivojski sistem, 74, 77, 85, 88, 91

Einsteinovi koeficienti, 76, 88, 90
Elasto-optični pojav, 212
Elasto-optični tenzor, 213
Električna polarizacija, 9, 217, 230, 248, 264
Električno polje
    gostota, 9, 21
    jakost, 9, 11, 230
Elektro-optična modulacija
    amplitudna, 202, 209
    fazna, 202, 210
    frekvenčna, 202, 210
    linearna, 210
    longitudinalna, 205, 209, 210
    transverzalna, 207
Elektro-optični deflektor, 212
Elektro-optični pojav, 173, 202
    kvadratni, *glej* Kerrov pojav
    linearni, *glej* Pockelsov pojav
Elektro-optični tenzor, 203
Elektromagnetno valovanje, 11, 71
Energijska reža, 134
Energijski nivoji
    argon, 124

CO_2, 126
ekscimer, 127
He-Ne, 122
Nd:YAG, 128
Ti:safir, 130
Erbij, 128, 132, 167
Evanescentno polje, 17, 168, 170

Fabry-Perotov interferometer, 53, 55, 64, 69, 102, 103
Faktor M^2, 40
Fermi-Diracova porazdelitev, 135
Fermijeva energija, 135
Fotocelica, *glej* Fotodioda, vakuumska
Fotodioda, 186, 196
p-i-n, 186, 190, 191
p-n, 186, 190
fotovoltaik, 186, 188, 189
heterostrukturna, 190
kratko sklenjena, 186, 188, 189
plazovna, 176, 181, 191, 192, 198
polprevodniška, 176, 181, 199
prevodna smer, 186, 187
Schottkyjeva, 190, 192
vakuumska, 176, 181
zaporna smer, 186, 188, 189, 191
Fotoefekt, 176, 181
notranji, 181, 184, 186
zunanji, 181
Foton, 73
Fotona d.o.o., 129
Fotopomnoževalka, 181, 184, 198
Fotoprevodnik, 181, 184, 192
Fotoupornik, *glej* Fotoprevodnik
Fouriereva optika, 38
Fouriereva spektroskopija, 32
Frankova prosta energija, 227
Fraunhoferjev uklon, 20, 34, 37, 44
Frederiksov prehod, 227
Frekvenčni glavnik, 114
Fresnel-Kirchhoffov integral, 18
Fresnelov uklon, 19, 34, 37, 38, 44
Fresnelove enačbe, 15
Fresnelovo število, 20, 55, 62
FTIR, 32

GaAs, 134, 183, 204, 247, 250
GaAsP, 142
GaP, 134, 247
GaSe, 247
Gaussov snop, 39, 42, 56
bližnje polje, 40
divergenca, 40
efektivni polmer, 152, 169
faza, 42
frekvenčno podvajanje, 240, 241
grlo, 40
intenziteta, 42
krivinski radij, 41
polmer, 39
Gaussov sunek, 161
Generacija razlike frekvenc, 232
Generacija vsote frekvenc, 232
Germanij, 134, 184, 186, 198, 199
Gibljivost, 185
Gostota električnega toka, 185
Gostota energije, 11, 12, 74, 222
Gostota energijskega toka, 11, 12, 148, 220, 254
Gostota stanj, 53, 72, 77, 135, 141
Gostota svetlobnega toka, *glej* Gostota energijskega toka
Gouyeva faza, 42, 43, 61, 114

Hamiltonova funkcija, 73, 91
Harmonski oscilator, 73, 89, 155, 263
Helmholtzeva enačba, 11, 38, 45, 145, 149, 166
Hermite-Gaussovi snopi, 43, 66
Heterodinska detekcija, 115, 200
Heterostruktura, 140
Hitrost valovanja, 10, 21
fazna, 144
grupna, 144, 156, 161, 257
solitonov, 254
Hologram, 220
Homodinska detekcija, 200
Huygensovo načelo, 19

InAs, 134
Infrardeče valovanje, 17, 32, 122, 125, 128, 132, 140, 164, 176, 180, 181, 183, 184, 186, 192, 198, 201, 234, 243, 245
InGaAs, 186
InSb, 134
Intenziteta, 29
Interferenca, 25, 28, 32, 35
Iterbij, 128, 132
Izgube v optičnih vlaknih, 164
Rayleighovo sipanje, 164

spoj dveh vlaken, 169
ukrivljeno vlakno, 165
Izgube v resonatorju, 63, 67, 93, 94, 96, 108
Izhodna moč laserja, 95
Izstopno delo, 181

Johnson-Nyquistov šum, *glej* Šum, termični
Johnsonov šum, *glej* Šum, termični
Jonesov vektor, 13
Jonesova matrika, 13

Kalcit, 24
Karakteristika diode, 188
Karakteristika fotodiode, 189, 191
KDP, 24, 204, 205, 207, 231, 235, 239, 241
Kerrov pojav, 203
optični, 114, 248, 261, 266
Kerrov tenzor, 203
KH_2PO_4, *glej* KDP
Kirchhoffov integral, 18, 64
Kleinmanova domneva, 231, 234
Koeficient M, 220
Koeficient ojačenja, 83, 96
Koherenčna dolžina, 28
Koherenčna ploskev, 33, 34, 101
Koherenčna razdalja, 26, 32
Koherenčni čas, 25, 28, 30
Koherenca, 25
časovna, 25, 27
prostorska, 26, 32
Kompleksna ukrivljenost, 42
Kompleksni krivinski radij, 42
Kvantizacija polja, 71, 88
Kvantni izkoristek, 182, 185
notranji, 182
zunanji, 182
Kvazi-Fermijeva energija, 136

Laguerre-Gaussovi snopi, 44
Lambova vdolbina, 87, 102
Laser, 93, 121
argonov, 81, 124, 127
CO_2, 125, 127
ekscimerni, 127
enofrekvenčni, 100
He-Ne, 48, 81, 84, 85, 99, 101, 103, 115, 122, 127
kvantne pike, 141
Nd:steklo, 129, 130
Nd:YAG, 81, 84, 85, 111, 113, 128, 129, 234
organska barvila, 131, 163
polprevodniški, 81, 97, 134
Ramanski, 133
s potencialno jamo, 141
Ti:safir, 81, 114, 129, 130, 163
VCSEL, 141
večfrekvenčni, 103
vlakenski, 29, 59, 132
zgradba, 123, 124, 126, 129, 133, 139
Laserski sistemi, 121
Lastne frekvence resonatorja, 53, 54, 61
LED, 29, *glej* Svetlobne diode
$LiNbO_3$, 24, 204, 207, 213, 231, 245, 246, 265
$LiTaO_3$, 179, 180
Lomni količnik, 10, 21, 22, 143, 202, 206, 213, 214, 221, 237
efektivni, 249
izredni, 22
nelinearni, 249
redni, 22
Lomni zakon, 14, 23

Magnetizacija, 9
Magnetna permeabilnost, 9
Magnetno polje
gostota, 9, 11
jakost, 9
Makerjeve oscilacije, 236
Marcusejeva formula, 152, 170
Matrike ABCD, 49, 51, 60
Maxwell-Blochove enačbe, 117
Maxwellova porazdelitev, 85
Maxwellove enačbe, 9
robni pogoji, 10
Meter, 115
Metoda sklopljenih valov, 217
Metoda vzdolžnega premika, 252
Michelsonov interferometer, 27
Multipleksiranje, 165

Nasičena absorpcija, 79, 102, 113
stabilizacija frekvence, 102
nehomogeno razširjene črte, 85
Navzkrižna fazna modulacija, 266
Navzkrižna korelacijska funkcija, 33
Nedejavni žarek, 244
Nelinearna optika, 230
drugega reda, 232, 266
tretjega reda, 248, 266
v vlaknih, 265

Neodim, 132
NEP, 199
Neujemanje faz, 245
Ničelna energija, 73
Normirana frekvenca, 148
Notranje ojačenje, 191, 198
Numerična odprtina, 143
Nyquistov šum, *glej* Šum, termični

Obosna valovna enačba, 38, 43, 56, 161, 242, 252
Obrnjena zasedenost, 81, 82, 96, 108, 167
Ojačenje s stimuliranim sevanjem, *glej* Stimulirano sevanje
Ojačenje signala, 186
Ojačenje svetlobe v polprevodnikih, 136
Ojačevanje s stimuliranim sevanjem, *glej* Stimulirano sevanje
Omejen snop, 37
Operator
  anihilacijski, 89
  kreacijski, 89
Optična fazna konjugacija, 259, 260
Optična os, 22
Optična pinceta, 216
Optični parametrični oscilator, 245
Optični vodnik, 143
  število rodov, 148
  enorodovni, 144, 147
  lastni rodovi, 145
  lihi rodovi, 146
  plašč, 143
  planparalelni, 143, 145, 165
  sodi rodovi, 146
  sredica, 143
  TE rodovi, 145
  TM rodovi, 148
  večrodovni, 147
Optično črpanje, 82
Optično frekvenčno podvajanje, 232, 234, 240, 266
Optično ojačevanje, 81, 84, 93
  v vlaknih, 167, 265
Optično parametrično ojačevanje, 243
Optično usmerjanje, 232, 246
Optično vlakno, 132, 143, 149
  dopirano z erbijem, 167
  EH rodovi, 152
  enorodovno, 144, 149, 160, 164
  HE rodovi, 152
  LP rodovi, 153
  parabolični profil, 155
  TE rodovi, 150
  TM rodovi, 150
  večrodovno, 149, 157

Paraksialna enačba, *glej* Obosna valovna enačba
Parametrično ojačevanje, *glej* Optično parametrično ojačevanje
Pasovna širina detekcije, 196
PbS, 184
π-napetost, 207, 208, 210
Piksel, 192, 194
Piroelektrični detektor, 176, 179
Planckov zakon, 74, 198
Ploščica $\lambda/2$, 14, 207, 223
Ploščica $\lambda/4$, 14, 210
Ploskev valovnega vektorja, 21
Pockelsov pojav, 203
Pockelsov tenzor, *glej* Elektro-optični tenzor
Poissonova porazdelitev, 195
Polarizacija, 13
  cirkularna, 13
  eliptična, 13, 21
  linearna, 13
  TE, 15, 144
  TM, 15, 144
Polprevodniška fotodioda, *glej* Fotodioda, polprevodniška
Polprevodnik, 134
  izpraznjeni sloj, 187
  tip *n*, 136, 187
  tip *p*, 136, 187
Porazdeljena povratna sklopitev, 141
Poyntingov izrek, 11
Poyntingov vektor, 11, 45
Prag delovanja laserja, 95, 97, 139
Preklop dobrote, *glej* Sunkovni laser
Prekrivalni integral, 168, 169
Presek za absorpcijo, 78, 84
Presek za stimulirano sevanje, 83, 84
Preslikava z lečo, 46

Rabijeva frekvenca, 91
Rabijeve oscilacije, 91
Raman-Nathov uklon, 214, 220
Ramanovo sipanje, 133, 263
  anti-Stokesovo, 263
  stimulirano, 263, 266
  Stokesovo, 263

Ravni val, 12, 26, 37, 38, 71
Rayleighova dolžina, 40
Rayleighovo območje, *glej* Območje bližnjega polja
Rayleighovo sipanje, 164, 263
Razmerje signal proti šumu, 177, 196
Razpadni čas, 75
Relaksacijske oscilacije, 105–107
Resonator, 53, 93
    ciklični, 59
    koncentrični, 57, 58
    konfokalni, 57, 58, 62, 65
    nestabilni, 59
    odprti, 54
    parametrični oscilator, 245
    planparalelni, 56–58, 62
    simetrični, 57

Samo-fazna modulacija, 266
Samozbiranje, 248, 250
Saturacijska energija, 94
Saturacijska gostota toka, 79, 83
Schrödingerjeva enačba, 91
    nelinearna, 253, 258
Sekularna enačba
    lihi rodovi, 146
    sodi rodovi, 146
    TE rodovi, 151
Semiklasični model, 91, 116
Sevanje črnega telesa, 29, 32, 74, 76, 198
SFG, *glej* Generacija vsote frekvenc
SHG, *glej* Optično frekvenčno podvajanje
Silicij, 134, 184–186, 192, 198, 199
SiO_2, 158, 159, 164, 190, 192, 258, 265, 266
Sklopitev štirih valov, 266
Sklopitev med valovodi, 169
    3-dB sklopitev, 173
Sklopitev resonatorja
    z okolico, 66
    z resonatorjem, 70
Sklopitev v optično vlakno, 168
    čelna sklopitev, 168
    bočna sklopitev, 168
SNR, *glej* Razmerje signal proti šumu
Soliton
    krajevni, 250–252
    optični, 255, 256, 266
Spekter, 29, 114
    Gaussov, 29, 31, 85
    Lorentzov, 29, 31, 63, 75, 84
    Planckov, 32
    Voigtov, 85
Spektralna črta, 75, 98, 102
    homogena razširitev, 84, 128
    nehomogena razširitev, 84, 130
Spektralna gostota energije, 74–77
Spektralna gostota moči, 101
Spoj *p-n*, 138, 142, 187
Spontano sevanje, 75, 82, 90, 93, 99
Stabilnost resonatorja, 55, 57, 60
Standardni odklon, 195
Stimulirano sevanje, 76, 82, 90, 99, 167
Stoječe valovanje, 53, 55, 66, 71
Sunkovni laser, 107, 108, 111, 114
    preklop črpanja, 107
    preklop dobrote, 108, 216
Susceptibilnost
    efektivna, 234, 238, 264
    električna, 9
    kompleksna, 264
    linearna, 230
    magnetna, 9
    nelinearna, 230, 231
    nelinearna, efektivna, 249
Svetilnost, 101
Svetlobe diode, 142
Svetlobne diode
    OLED, 142
Svetlost, 101

Tekočekristalni prikazovalnik, 223
Tekoči kristali, 24, 221
    5CB, 221
    direktor, 221
    holesterik, 226
    nematik, 221
    zasukan nematik, 223
Telur, 24, 231, 240
TEM_{00}, 43
$TEM_{n,m}$, 43
Temni tok, 183, 188, 198
Teraherčno valovanje, 176, 178, 246
Termistor, 178
Termočlen, 176, 179
TGS, 179
Tirna vrtilna količina, 45
Totalni odboj, 17, 59, 143, 168
Trinivojski sistem, 81, 96, 122

Ujemanje faz, 236, 237, 240, 242, 244, 248,

266
Uklepanje faz, 111, 114, 162, 163, 216
aktivno, 113
pasivno, 113
Uklon, 17, 37, 64, 213, 214
Uklonska mrežica, 126, 132, 163, 214, 216
Ultravijolično valovanje, 124, 127, 164, 176, 181, 183, 186, 190, 240

Valovna enačba, 10, 149
nelinearna, 232, 256, 261
Valovni vektor, 12, 71, 144
Valovno število, 11, 145
van Cittert-Zernikov izrek, 34
Varianca, 195
Verjetnost za prehod, 75, 88

Wiener-Hinčinov izrek, 30

Youngov poskus, 25, 32

Z-scan, *glej* Metoda vzdolžnega premika
Zaporni tok, *glej* Temni tok
Zasedbene enačbe, 96, 116
Zasedenost stanj, 77
Združevanje pikslov, 193
ZnSe, 250
ZnTe, 204, 247