# FOTONIKA

Martin ČOPIČ
Mojca VILFAN

Recenzenti: ***

Lektor: ***

Risbe in diagrami: Mojca Vilfan in Andrej Petelin

Oblikovanje, postavitev in prelom: Mojca Vilfan

Naslovne slike poglavij: Mojca Vilfan, Martin Rigler (str. 120 in 176), Andrej Petelin (str. 37), ESO (str. 93), Irena Drevenšek (str. 140), in NASA (str. 238)

©*Kopiranje in razmnoževanje besedila ali njegovih delov ter slik je dovoljeno samo z odobritvijo avtorjev knjige.*

LJUBLJANA, 2019

# Kazalo


1 Elektromagnetno valovanje . . . . . 9
1.1 Maxwellove enačbe 9
1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor 10
1.3 Monokromatski elektromagnetni val 11
1.4 Ravni val 12
1.5 Polarizacija EM valovanja 13
1.6 Lom in odboj EM valovanja 15
1.7 Uklon svetlobe 17
1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh 21

2 Koherenca . . . . . 25
2.1 Youngov poskus 25
2.2 Koherenca navadnih svetil 26
2.3 Časovna koherenca 27
2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom 29
2.5 Prostorska koherenca 32

3 Koherentni snopi svetlobe . . . . . 37
3.1 Omejen snop svetlobe 37
3.2 Obosna valovna enačba 38
3.3 Osnovni Gaussov snop 39
3.4 Snopi višjega reda 43
3.5 Besslov snop 45
3.6 Transformacije snopov z lečami 46
3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki 49
3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija 51

4 Optični resonatorji . . . . . 53
4.1 Odprti resonatorji 53
4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih 56
4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom 59

4.4 Resonančne frekvence 60
4.5 Izgube v resonatorjih 62
4.6 *Obravnava resonatorjev z uklonskim integralom 64
4.7 *Sklopitev resonatorja z okolico 66
4.8 *Sklopitev dveh resonatorjev 70

5 Interakcija svetlobe s snovjo . . . . . 71
5.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja 71
5.2 Sevanje črnega telesa 73
5.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje 74
5.4 Absorpcijski koeficient 78
5.5 Nasičenje absorpcije 79
5.6 Optično ojačevanje 81
5.7 Optično črpanje trinivojskega sistema 81
5.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte 84
5.9 *Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte 85
5.10 *Izpeljava verjetnosti za prehod 88
5.11 *Rabijeve oscilacije 91

6 Laser . . . . . 93
6.1 Laser 93
6.2 Zasedbene enačbe 95
6.3 Spektralna širina enega laserskega nihanja 98
6.4 Primerjava laserjev in navadnih svetil 100
6.5 Večfrekvenčni laser 101
6.6 Relaksacijske oscilacije 103
6.7 Sunkovni laserji 105
6.8 Delovanje v sunkih s preklopom dobrote 106
6.9 Uklepanje faz 108
6.10 *Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo 111
6.11 *Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra 113
6.12 *Semiklasični model laserja 115

7 Primeri laserjev . . . . . 120
7.1 Laserski sistemi 120
7.2 He-Ne laser 121
7.3 Argonski ionski laser 123

7.4 Laser na ogljikov dioksid 124
7.5 Ekscimerni laser 126
7.6 Neodimov laser 127
7.6.1 Nd:YAG . . . . . 127
7.6.2 Nd:steklo . . . . . 129
7.7 Titan-safirni laser 129
7.8 Laserji na organska barvila 130
7.9 Vlakenski laserji 131
7.10 Polprevodniški laserji 133
7.10.1 Svetlobne diode - LED . . . . . 139

8 Nelinearna optika . . . . . 140
8.1 Nelinearna susceptibilnost 140
8.2 Nelinearni optični pojavi drugega reda 142
8.3 Optično frekvenčno podvajanje 144
8.4 Frekvenčno podvajanje Gaussovih snopov 150
8.5 *Račun podvajanja Gaussovih snopov 151
8.6 Optično parametrično ojačevanje 153
8.7 Optično usmerjanje in teraherčno valovanje 156
8.8 Nelinearni pojavi tretjega reda 158
8.9 Optični Kerrov pojav 158
8.10 Samozbiranje in krajevni solitoni 160
8.11 *Izpeljava krajevnih solitonov 162
8.12 Optični solitoni 165
8.13 *Izpeljava optičnih solitonov 166
8.14 Optična fazna konjugacija 169
8.15 *Izpeljava optične fazne konjugacije 170
8.16 Stimulirano Ramanovo in stimulirano Brillouinovo sipanje 173

9 Modulacija svetlobe . . . . . 176
9.1 Elektro-optični pojav 176
9.2 Longitudinalna modulacija 179
9.3 Transverzalna modulacija 181
9.4 Amplitudna modulacija 183
9.5 Fazna in frekvenčna modulacija 184
9.6 Elasto-optični in akusto-optični pojav 186
9.7 Uklon svetlobe na zvočnem valovanju 188

9.8 *Račun akusto-optičnega pojava 191
9.9 Modulacija s tekočimi kristali 195
9.10 *Račun prehoda svetlobe skozi zasukan nematik 198
9.11 Račun preklopa v tekočem kristalu – Frederiksov prehod 201

10 Optična vlakna . . . . . 204
10.1 Planparalelni vodnik 204
10.2 Račun lastnih rodov v planparalelnem vodniku 206
10.3 Cilindrično vlakno 210
10.4 Disperzija 217
10.5 *Potovanje kratkega sunka po enorodovnem vlaknu 221
10.6 Izgube in ojačenje v optičnih vlaknih 225
10.7 Sklopitev svetlobe v vlakna 230
10.8 *Vpliv spremembe lomnega količnika vlakna na širjenje svetlobe 234
10.9 Nelinearni pojavi v optičnih vlaknih 236

11 Detektorji svetlobe . . . . . 238
11.1 Osnovne karakteristike detektorjev 238
11.2 Termični detektorji 239
11.3 Fotoefekt 243
11.4 Vakuumska fotodioda (fotocelica) in fotopomnoževalka 244
11.5 Fotoprevodni detektorji 246
11.6 Polprevodniške fotodiode 248
11.7 Plazovne fotodiode 253
11.8 CCD in CMOS detektorji 254
11.9 Šum pri optični detekciji 256
11.10 Heterodinska detekcija 262

# Predgovor

Fotonika je veda o svetlobi. Obsega izredno široka področja nastanka svetlobe in svetlobnih virov, uporabe svetlobe v različne namene, širjenja optičnih signalov in njihovega spreminjanja ter zaznavanja svetlobe. V zadnjih desetletjih je zato fotonika doživela izreden razcvet v raziskavah in tehnološki uporabi.

V pričujoči knjigi bomo obravnavali osnove fotonike. Po kratki ponovitvi splošne optike bomo spoznali delovanje laserjev in lastnosti laserske svetlobe, nadaljevali z nelinearnimi optičnimi pojavi in modulacijo svetlobe ter zaključili s prenosom in detekcijo laserskih signalov. Učbenik je zato primeren predvsem za študente II. stopnje fizike, ki že imajo znanje optike in zahtevanih matematičnih prijemov, ga pa priporočava vsakemu, ki ga področje fotonike zanima. Bralcu v razmislek sva dodala nekaj nalog, zahtevnejša podpoglavja pa so označena z zvezdico.

Prvotno gradivo za učbenik je nastalo po zapiskih s predavanj pri predmetu Elektrooptika in kasneje Fotonika ter Fizika laserjev. Gradivo sva dopolnila, posodobila in prilagodila obravnavani snovi pri predmetih Fotonika I in Fotonika II. Za pomoč pri pripravi se najlepše zahvaljujeva prof. dr. Ireni Drevenšek Olenik, ki je kot dolgoletna predavateljica Fotonike znatno pripomogla k oblikovanju te knjige, in Andreju Petelinu za pomoč pri delu ter ostalim sodelavcem z Odseka za kompleksne snovi Instituta “Jožef Stefan” za sodelovanje pri pripravi.

Avtorja

# Priporočena dodatna literatura


- A. Yariv in P. Yeh, Photonics, Sixth Edition, Oxford University Press, 2007.
- B. E. A. Saleh in M. C. Teich, Fundamentals of Photonics, 2nd Edition, Wiley, New Jersey, 2007.
- G. A. Reider, Photonics, An Introducion, Springer, Berlin, 2016.
- W. T. Silfvast, Laser Fundamentals, Second Edition, Cambridge University Press, 2008.
- C. C. Davis, Lasers and Electro-Optics, Cambridge University Press, 2006.
- O. Svelto, Principles of Lasers, Fifth Edition, Springer, New York, 2010
- K. F. Renk, Basics of Laser Physics, Second Edition, Springer, Berlin, 2017.
- J. W. Goodman, Statistical Optics, Second Edition, Wiley, New Jersey, 2015.
- W. Demtröder, Laser Spectroscopy, Fifth Edition, Springer, Berlin, 2014.
- G. New, Introduction to Nonlinear Optics, Cambridge University Press, 2011.
- R. W. Boyd, Nonlinear Optics, Third Edition, Academic Press, 2008.
- V. Degiorgio in I. Cristiani, Photonics, A Short Course, Springer International, 2016.

# 1. Elektromagnetno valovanje

Za začetek bomo osvežili osnove teorije elektromagnetnega polja in elektromagnetnega valovanja. Obnovili bomo zapis Maxwellovih enačb in valovne enačbe, opisali osnovne pojave valovanja (lom, odboj in uklon) in si na kratko ogledali razširjanje svetlobe v anizotropnih snoveh.

## 1.1 Maxwellove enačbe

Elektromagnetno polje v praznem prostoru opišemo z dvema vektorskima poljema, električnim in magnetnim, ki sta na splošno funkciji lege $\mathbf{r}$ in časa $t$. Vsaki točki v prostoru lahko priredimo jakost električnega polja $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ in gostoto magnetnega polja $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Za opis elektromagnetnega polja v snovi vpeljemo dve dodatni količini. To sta gostota električnega polja $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ in jakost magnetnega polja $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$. Vse te količine povezujejo Maxwellove enačbe[1]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_e \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1.4}$$

Pri zapisu enačb smo upoštevali tudi izvore polj, to je gostoto električnega toka $\mathbf{j}_e(\mathbf{r},t)$ in gostoto naboja $\rho_e(\mathbf{r},t)$, ki pa ju bomo v nadaljevanju izpuščali.

Poleg Maxwellovih enačb veljata zvezi

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{in} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}, \tag{1.6}$$

kjer $\mathbf{P}$ označuje električno polarizacijo, to je gostoto električnih dipolov, $\mathbf{M}$ pa magnetizacijo, to je gostoto magnetnega momenta. Polarizacija in magnetizacija sta odvisni od zunanjih polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{B}$. Na splošno sta njuni odvisnosti zelo zapleteni, v izotropnih in linearnih snoveh[2] pa se zvezi poenostavita v

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\mathbf{E} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{M} = \frac{(\mu - 1)}{\mu \mu_0}\mathbf{B} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu - 1)\mathbf{H}. \tag{1.7}$$

Vpeljali smo električno ($\chi_e$) in magnetno ($\chi_m$) susceptibilnost ter dielektričnost $\varepsilon$ in magnetno permeabilnost $\mu$. Ko združimo gornje enačbe, lahko zapišemo dve konstitutivni relaciji

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu}. \tag{1.8}$$

V linearnih anizotropnih snoveh moramo namesto skalarnih vrednosti $\varepsilon$ in $\mu$ zapisati tenzorje.

[1] Škotski fizik James Clerk Maxwell, 1831–1879.

[2] Med nelinearne snovi, za katere napisani zvezi ne veljata, sodijo na primer feroelektriki in feromagneti.

### Robni pogoji

Navedene Maxwellove enačbe zadoščajo za opis elektromagnetnega polja v neomejeni snovi, kjer so vse komponente polj zvezne funkcije. Za obravnavo v omejeni snovi moramo vedeti tudi, kaj se z elektromagnetnim poljem zgodi na meji dveh sredstev. Pri prehodu iz enega dielektrika v drugega se ohranjata normalni komponenti gostote električnega in magnetnega polja ter tangentni komponenti jakosti električnega in magnetnega polja (slika 1.1)

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{1.9}$$
$$B_{1n} = B_{2n} \tag{1.10}$$
$$E_{1t} = E_{2t} \tag{1.11}$$
$$H_{1t} = H_{2t}. \tag{1.12}$$

Privzeli smo, da na meji med dielektrikoma ni površinskih tokov ali nabojev, sicer bi morali robna pogoja za $D_n$ in $H_t$ ustrezno popraviti. Na meji dielektrika z idealnim prevodnikom (kovino, zrcalom) so robni pogoji drugačni. Za magnetno polje jih ne moremo preprosto zapisati, za električno polje pa velja, da mora biti tangentna komponenta jakosti električnega polja enaka nič. Posledica tega pogoja je, da se pri pravokotnem vpadu na zrcalo faza valovanja spremeni za $\pi$.

Slika 1.1: Na meji med dvema dielektrikoma brez površinskih tokov in nabojev se ohranjata tangentni komponenti $E_t$ in $H_t$ ter normalni komponenti $D_n$ in $B_n$.

## 1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor

Večinoma bomo obravnavali elektromagnetna valovanja v izotropnih, homogenih in linearnih snoveh brez zunanjih izvorov in nosilcev naboja ($\mathbf{j}_e = 0$ in $\rho_e = 0$). Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpeljemo valovno enačbo za jakost električnega in gostoto magnetnega polja

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in} \quad \nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.13}$$

Pri tem je hitrost valovanja v snovi enaka

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c_0}{n}. \tag{1.14}$$

Magnetne in dielektrične lastnosti snovi smo pospravili v lomni količnik $n$, ki pove, kolikokrat je hitrost svetlobe v snovi manjša od hitrosti svetlobe v praznem prostoru. Velja

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{1.15}$$

Za izotropno in nemagnetno snov ($\mu = 1$) je lomni količnik $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Vpeljimo še vektor gostote energijskega toka, to je Poyntingov vektor[3] $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{1.16}$$

Iz lastnosti vektorskega produkta sledi, da je smer energijskega toka vedno pravokotna na smeri $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$. Gostoto energijskega toka $j$, to je količino energije, ki v danem času preteče skozi dano ploskev z normalo $\hat{\mathbf{n}}$, izračunamo kot časovno povprečje projekcije Poyntingovega vektorja

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle . \tag{1.17}$$

Gostoti energijskega toka, predvsem gostoti svetlobnega toka, pravimo tudi intenziteta.

Poyntingov izrek, ki ga lahko izpeljemo neposredno iz Maxwellovih enačb in konstitutivnih relacij, predstavlja izrek o ohranitvi energije. Za valovanje v homogeni izotropni snovi tako velja

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1.18}$$

kjer je $w$ celotna gostota energije elektromagnetnega polja. Zapišemo jo kot

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{B}^2}{\mu\mu_0}. \tag{1.19}$$

Valovno enačbo in ohranitvene zakone lahko zapišemo tudi za anizotropne, nehomogene ali nelinearne snovi. Nekaj teh primerov bomo srečali v nadaljevanju in jih bomo obravnavali sproti.

## 1.3 Monokromatski elektromagnetni val

Reševanje valovne enačbe si navadno poenostavimo s kompleksnim zapisom jakosti električnega in magnetnega polja. Račun si oglejmo na primeru monokromatskega elektromagnetnega vala. Nastavek za monokromatski val s krožno frekvenco $\omega$ naj bo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) \qquad \text{in} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}), \tag{1.20}$$

kjer sta $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ časovno neodvisna vektorja jakosti električnega in gostote magnetnega polja s kompleksno amplitudo. Podobno lahko vpeljemo tudi kompleksne vektorje $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ in $\mathbf{H}$, ki opisujejo realne količine (polarizacijo, magnetizacijo, gostoto električnega in jakost magnetnega polja). V nadaljevanju bomo večinoma pisali polja v kompleksni obliki, pri čemer se bomo držali gornje definicije. Zavedati pa se moramo, da je uporaba kompleksnega zapisa zgolj računski pripomoček, na koncu je treba rezultate vedno izraziti z realnimi količinami.

Če vstavimo nastavka za monokromatski val (enačbi 1.20) v valovni enačbi (enačbi 1.13), dobimo Helmholtzevi enačbi[4] za kompleksna vektorja jakosti električnega in gostoto magnetnega polja. V homogenem in izotropnem sredstvu ju zapišemo kot

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.21}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \tag{1.22}$$

kjer je $k = nk_0 = n\omega/c_0$ valovno število. Vpeljemo lahko tudi kompleksni Poyntingov vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}). \tag{1.23}$$

[3] Angleški fizik John Henry Poynting, 1852–1914.
[4] Nemški fiziolog in fizik Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821–1894.

**Naloga 1.3.1** Upoštevajoč izraz za Poyntingov vektor $\mathbf{S}$ (enačba 1.16) pokaži, da lahko gostoto svetlobnega toka $j$ (oziroma povprečje projekcije Poyntingovega vektorja) izrazimo s kompleksnim Poyntingovim vektorjem $\mathbf{S}(\mathbf{r})$

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \Re(\mathbf{S}(\mathbf{r})). \tag{1.24}$$

## 1.4 Ravni val

Osnovna rešitev valovne enačbe (enačba 1.13) je ravni val. Nastavek, ki predstavlja ravni val in hkrati reši Helmholtzevo enačbo (enačba 1.21), je oblike

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} \tag{1.25}$$

in podobno za magnetno polje

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}, \tag{1.26}$$

pri čemer sta vektorja $\mathbf{E}_0$ ter $\mathbf{B}_0$ od kraja in časa neodvisna. Velikost valovnega vektorja $\mathbf{k}$ je valovno število $k = nk_0$, kjer je $n$ lomni količnik izotropne in homogene snovi.

Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledijo zveze o ortogonalnosti količin električnega in magnetnega polja. Vedno sta med seboj pravokotna vektorja jakosti električnega $\mathbf{E}$ in magnetnega polja $\mathbf{H}$ (naloga 1.4.1), ki sta po definiciji tudi vedno pravokotna na Poyntingov vektor $\mathbf{S}$ (enačba 1.16). V izotropnih snoveh je Poyntingov vektor vzporeden valovnemu vektorju, zato sta v izotropnih snoveh $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ hkrati pravokotna na valovni vektor $\mathbf{k}$. Elektromagnetno valovanje je torej transverzalno valovanje. Zaradi enolične zveze med električnim in magnetnim poljem zadošča za opis ravnega vala le eno polje, navadno se odločimo za električno.

**Naloga 1.4.1** Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) pokaži, da za ravni val vedno velja

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}. \tag{1.27}$$

Izpelji še zvezi

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad \text{in} \tag{1.28}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega\mu\mu_0 \mathbf{H}_0, \tag{1.29}$$

iz katerih izhaja, da v izotropni snovi velja $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k}$.

Energijski tok je pri ravnem valu v izotropni snovi vedno v smeri valovnega vektorja, pravokotno na valovne fronte. Iz definicije za gostoto svetlobnega toka (enačba 1.24) ter Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledi

$$j = \Re\left(\frac{1}{4}E_0 H_0^* + \frac{1}{4}E_0^* H_0\right) = \frac{1}{2}c\varepsilon\varepsilon_0 |E_0|^2 = \frac{1}{2}c_0 n\varepsilon_0 |E_0|^2. \tag{1.30}$$

Gostota svetlobnega toka je torej sorazmerna s kvadratom amplitude jakosti električnega polja. Poglejmo nekaj primerov. Gostoti toka $j = 1\ \mathrm{kW/m^2}$ (približna gostota svetlobnega toka s Sonca na Zemljinem površju) v praznem prostoru ustreza jakost električnega polja $E_0 = 868\ \mathrm{V/m}$, gostoti $j = 1\ \mathrm{W/\mu m^2}$ (intenziteta močno zbranega laserskega žarka) pa $E_0 = 27\ \mathrm{MV/m}$.

Zapišimo še povprečno gostoto energije valovanja. K energiji prispevata tako magnetno kot električno polje. Oba prispevka sta enaka, zato velja

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_0 |E_0|^2 + \frac{1}{4}\frac{|B_0|^2}{\mu\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 |E_0|^2 . \tag{1.31}$$

Povprečna gostota energije $w$, pomnožena s hitrostjo svetlobe v snovi, da gostoto energijskega toka $j$ oziroma intenziteto svetlobe

$$j = cw. \tag{1.32}$$

Gornji izraz nazorno kaže, da je intenziteta svetlobe pravzaprav pretok energije. To si lahko predstavljamo, če vzamemo valj s prečnim presekom $S$ in dolžino $c\Delta t$. V volumnu $Sc\Delta t$ je potem shranjene $wSc\Delta t$ energije. Energija, ki preteče skozi presek $S$ v času $\Delta t$, je ravno $cw$.

Intenziteta ravnega vala je neodvisna od kraja in časa, iz česar sledi, da je povsod po prostoru enaka. Če bi hoteli izračunati energijo, ki jo nosi ravni val, bi opazili, da je ta energija neskončna. To seveda ni mogoče, zato se je vedno treba zavedati, da je ravni val le idealiziran, a nazoren in praktičen približek elektromagnetnega vala.

## 1.5 Polarizacija EM valovanja

Jakost električnega polja elektromagnetnega valovanja je v izotropnem sredstvu vedno pravokotna na smer valovnega vektorja[5]. Vektor $\mathbf{E}$ tako leži v ravnini, ki je pravokotna na smer valovnega vektorja, njegovo smer pa opiše polarizacija.

Električno polje ravnega vala lahko razstavimo na dve medsebojno pravokotni komponenti vektorja $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Ti dve komponenti nihata sinusno z enako frekvenco, lahko pa se razlikujeta v amplitudi in fazi. Na splošno je ravni val eliptično polariziran in vrh vektorja električne poljske jakosti $\mathbf{E}$ v ravnini, ki je pravokotna na smer širjenja, orisuje elipso. Kadar je elipsa izrojena v daljico, govorimo o linearno polariziranem valu, kadar pa je krog, govorimo o cirkularno polariziranem valu. Poljubno polarizacijo lahko vedno zapišemo kot vsoto dveh linearno ali dveh cirkularno polariziranih valovanj.

Priročen zapis polarizacije je s kompleksnim Jonesovim vektorjem[6] $\mathbf{J}$. Za monokromatski ravni val, ki se širi v smeri $z$ in ima komponenti $E_x$ in $E_y$, je Jonesov vektor

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|E_0|}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} . \tag{1.33}$$

Dodali smo normalizacijski faktor $|E_0| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}$, da je Jonesov vektor normiran in $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}^* = 1$. Ravni val, linearno polariziran v smeri $x$, tako zapišemo kot $\mathbf{J} = (1,0)$, val, ki je linearno polariziran pod kotom 45° glede na osi $x$ in $y$, pa je $\mathbf{J} = (1,1)/\sqrt{2}$. Za zapis cirkularno polariziranega valovanja ni enotnega dogovora, tukaj zapišimo desno cirkularno polarizirano valovanje kot $\mathbf{J} = (1,-i)/\sqrt{2}$, levo cirkularno polarizirano pa z $\mathbf{J} = (1,i)/\sqrt{2}$. V našem zapisu je desno polariziran val tisti val, pri katerem se električna poljska jakost na danem mestu vrti v desno, če gledamo proti izvoru valovanja.

[5] Na splošno velja $\mathbf{E} \perp \mathbf{S}$ (enačba 1.16) in $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$ (naloga 1.4.1). To velja tudi v anizotropnih sredstvih, vendar je tam $\mathbf{E} \nparallel \mathbf{D}$ in $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{S}$.

[6] Ameriški fizik Robert Clark Jones, 1916–2004.

Zapis z Jonesovim vektorjem je prikladen, saj omogoča preprost izračun prehoda ravnega vala skozi optične elemente, ki spreminjajo polarizacijo, a ohranjajo njegovo obliko. Na splošno se pri prehodu skozi optični element spremeni kompleksna amplituda $\mathbf{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y})$

$$E_{2x} = A_{11}E_{1x} + A_{12}E_{1y} \tag{1.34}$$
$$E_{2y} = A_{21}E_{1x} + A_{22}E_{1y}, \tag{1.35}$$

pri čemer so komponente $A_{ij}$ odvisne od lastnosti elementa. Enačbi zapišemo v matrični obliki $\mathbf{E}_2 = A \cdot \mathbf{E}_1$ oziroma z Jonesovimi vektorji $\mathbf{J}_2 = A \cdot \mathbf{J}_1$, kjer $\mathbf{J}_1$ in $\mathbf{J}_2$ opisujeta polarizaciji vstopnega in izstopnega vala, $A$ pa je Jonesova matrika. Jonesova matrika za prehod skozi linearni polarizator, ki polarizira v smeri $x$, je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.36}$$

za polarizator, orientiran pod kotom 45 ° glede na os $x$, pa

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.37}$$

Oglejmo si še dva zanimiva primera. Jonesova matrika za optični element, ki eni komponenti doda fazni zamik $\pi$ (tak element imenujemo ploščica $\lambda/2$), je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.38}$$

Ploščica $\lambda/2$ tako spremeni desno cirkularno polariziran val v levo polariziran in obratno, linearno polariziran val pa prezrcali čez koordinatno os. Podobno je Jonesova matrika za element, ki eni komponenti doda fazni zamik $\pi/2$ (imenujemo ga ploščica $\lambda/4$), enaka

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

Ploščica $\lambda/4$ linearno polarizirano valovanje z Jonesovim vektorjem $(1,1)/\sqrt{2}$ spremeni v levo cirkularno polarizirano valovanje, cirkularno polarizirano valovanje pa nazaj v linearno.

---

**Naloga 1.5.1** Pokaži, da je Jonesova matrika za polarizator, ki prepušča polarizacijo pod kotom $\vartheta$ glede na os $x$, podana z matriko

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & \sin^2\vartheta \end{bmatrix}. \tag{1.40}$$

Namig: matriko $A'$, ki opisuje polarizator v smeri $x$, zapiši v zasukanem koordinatnem sistemu $A = R(\vartheta) \cdot A' \cdot R(\vartheta)^{\mathrm{T}}$, kjer je $R(\vartheta)$ rotacijska matrika.

---

## 1.6 Lom in odboj EM valovanja

Na ravni meji med dvema izotropnima dielektrikoma se del svetlobe odbije po odbojnem zakonu, ki pravi, da je odbojni kot enak vpadnemu, del pa lomi po lomnem zakonu

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2. \tag{1.41}$$

S kotoma $\vartheta_1$in $\vartheta_2$ smo označili vpadni in lomni kot, $n_1$in $n_2$ pa sta lomna količnika prve in druge snovi (slika 1.2). Poglejmo, kaj se pri lomu in odboju zgodi s polarizacijo valovanja. Dogovorimo se, da valovanje, pri katerem je električna poljska jakost pravokotna na vpadno ravnino, imenujemo transverzalno električno (TE) valovanje. Kadar leži jakost električnega polja v vpadni ravnini in je na vpadno ravnino pravokotna jakost magnetnega polja, govorimo o transverzalnem magnetnem valovanju (TM).

Slika 1.2: Lom elektromagnetnega valovanja na meji dveh izotropnih dielektrikov. Levo: transverzalno električno (TE) valovanje. Desno: transverzalno magnetno (TM) valovanje.

Z $E_1$ označimo amplitudo jakosti električnega polja vpadnega valovanja, z $E_2$ prepuščenega in z $E_3$ odbitega. Nato vpeljemo amplitudno prepustnost $t$ in amplitudno odbojnost $r$, ki pa sta odvisni od vpadne polarizacije. Zapišemo

$$E_{2\mathrm{TE}} = t_{\mathrm{TE}} E_{1\mathrm{TE}} \qquad E_{3\mathrm{TE}} = r_{\mathrm{TE}} E_{1\mathrm{TE}} \tag{1.42}$$

$$E_{2\mathrm{TM}} = t_{\mathrm{TM}} E_{1\mathrm{TM}} \qquad E_{3\mathrm{TM}} = r_{\mathrm{TM}} E_{1\mathrm{TM}}. \tag{1.43}$$

Koeficiente $r$ in $t$ izračunamo iz robnih pogojev (enačbe 1.9–1.12). Enačbe, ki opisujejo odvisnost odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota za različni vpadni polarizaciji, imenujemo Fresnelove enačbe[7]. Za TE polarizacijo velja

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \quad \text{in} \quad t_{\mathrm{TE}} = 1 + r_{\mathrm{TE}} = \frac{2 n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \tag{1.44}$$

in za TM polarizacijo

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{n_1 \cos \vartheta_2 - n_2 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1} \quad \text{in} \quad t_{\mathrm{TM}} = (1 + r_{\mathrm{TM}}) \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} = \frac{2 n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}. \tag{1.45}$$

[7] Francoski fizik in inženir Augustin Jean Fresnel, 1788–1827.

Na splošno sta odbojnost $r$ in prepustnost $t$ kompleksni količini, saj iz lomnega zakona sledi, da je $\cos\vartheta_2 = \sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\vartheta_1}$ lahko kompleksen. Velikost števila $|r|$ tako predstavlja odbojnost, argument $\arg\{r\}$ pa spremembo faze pri odboju.

Amplitudna odbojnost $r$ in amplitudna prepustnost $t$ povesta, kako se spremeni kompleksna amplituda jakosti električnega polja pri odboju oziroma lomu. Razmerje med intenziteto odbite in vpadne svetlobe $\mathscr{R}$ oziroma intenziteto prepuščene in vpadne svetlobe $\mathscr{T}$ izračunamo kot

$$\mathscr{R} = |r|^2 \qquad \text{in} \qquad \mathscr{T} = 1-\mathscr{R}. \tag{1.46}$$

Slednja enačba sledi iz ohranitve energije. Na splošno $\mathscr{T}$ ni enak $|t|^2$, saj energijski tok potuje po različnih snoveh in v različnih smereh. Velja zveza

$$\mathscr{T} = \frac{n_2\cos\vartheta_2}{n_1\cos\vartheta_1}|t|^2. \tag{1.47}$$

Najpreprostejši primer je pravokotni vpad svetlobe na mejo dveh sredstev. Zaradi simetrije sta v tem primeru odbojnost in prepustnost neodvisni od polarizacije. Sledi

$$r_{\mathrm{TE}} = r_{\mathrm{TM}} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \quad \text{in} \quad t_{\mathrm{TE}} = t_{\mathrm{TM}} = \frac{4n_1n_2}{n_1+n_2}. \tag{1.48}$$

Ob pravokotnem vpadu iz zraka na steklo ($n_2 \approx 1{,}5$) je tako odbojnost

$$\mathscr{R} = \left(\frac{1-n_2}{1+n_2}\right) \approx 0{,}04. \tag{1.49}$$

Poglejmo še odvisnost odbojnosti in prepustnosti od vpadnega kota (slika 1.3). Pri tem je pomembno, ali se svetloba lomi v optično gostejše ($n_1 < n_2$) ali v optično redkejše sredstvo ($n_1 > n_2$). Najprej obravnavajmo primer loma v optično gostejšo snov (sliki a in c). Vidimo, da je pri nekem kotu, imenujemo ga Brewstrov kot[8], odbojnost za TM polarizirano valovanje enaka nič. Posledično je ob vpadu pod Brewstrovim kotom odbito valovanje vedno TE polarizirano. Vse TM valovanje je prepuščeno, zato pri Brewstrovem kotu velja $\mathscr{T}_{\mathrm{TM}} = 1$ in $\mathscr{T}_{\mathrm{TE}} < 1$.

---

**Naloga 1.6.1** Pokaži, da Brewstrov kot izračunamo kot

$$\vartheta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{1.50}$$

---

Negativen predznak odbojnosti $r_{\mathrm{TE}}$ pomeni, da ima odbiti TE polarizirani val pri vpadu na optično gostejše sredstvo nasprotno fazo od vpadnega. Za TM val je faza pri vpadnih kotih, manjših od Brewstrovega, nasprotna, pri večjih vpadnih kotih pa ima odbita svetloba enako fazo kot vpadna.

Pri vpadu na optično redkejše sredstvo (sliki 1.3 b in d) je pomemben še en kot, to je mejni kot totalnega odboja $\vartheta_T = \arcsin(n_2/n_1)$. Pri vpadnih kotih, ki so večji od $\vartheta_T$, se svetloba v celoti odbije in govorimo o totalnem ali popolnem odboju. Kljub temu električna poljska jakost v optično redkejšem sredstvu ni enaka nič, saj se tam pojavi evanescentno polje. To je polje, ki se širi v smeri mejne ravnine, njegova amplituda pa pojema eksponentno z oddaljenostjo od nje. Vdorna globina je odvisna od valovne dolžine valovanja, lomnega količnika snovi in tudi od vpadnega kota. Čeprav se v optično redkejši snovi pojavi električno polje, je Poyntingov vektor v smeri pravokotno na mejno ploskev v povprečju enak nič in zato ne pride do prenosa energije v drugo snov.

[8] Škotski fizik in znanstvenik Sir David Brewster, 1781–1868.

Slika 1.3: Amplitudna odbojnost $r$ za obe vpadni polarizaciji (a, b) in razmerje med intenziteto odbite in vpadne svetlobe $\mathscr{R}$ za obe polarizaciji v odvisnosti od vpadnega kota (c, d). Za primer na slikah (a) in (c) velja $n_1 < n_2$, za primer na slikah (b) in (d) pa $n_1 > n_2$. Z zeleno je označen Brewstrov kot $\vartheta_B$, z vijolično pa mejni kot totalnega odboja $\vartheta_T$.

★ Prozorne ploščice, ki so postavljene pod Brewstrovim kotom glede na smer vpadne svetlobe, imenujemo Brewstrova okna. Njihova značilnost je, da eno polarizacijo (TM) prepustijo v celoti, druge polarizacije (TE) pa se del odbije, del pa prepusti. Brewstrova okna so zelo uporabna pri izdelavi resonatorjev plinskih laserjev, saj so izgube za izbrano polarizacijo zelo majhne, za drugo pa razmeroma velike.

★ Pri prehodu skozi optične elemente se – razen TM polariziranega valovanja pri Brewstrovem kotu – vedno nekaj svetlobe odbije. Da zmanjšamo te izgube, optične elemente navadno prekrijemo z antirefleksno plastjo, to je nanosom ene ali več primerno debelih plasti dielektrikov z ustreznimi lomnimi količniki. Zaradi destruktivne interference se količina odbite svetlobe z izbrano valovno dolžino občutno zmanjša. Ker so laserji koherentni izvori svetlobe s točno določeno valovno dolžino, za zmanjšanje izgub, na primer v resonatorju laserja, uporabljamo optične elemente (leče, kristale, akusto-optične modulatorje ... ) z ustrezno antirefleksno plastjo.

## 1.7 Uklon svetlobe

Kadar svetloba vpade na oviro, za oviro nastane senca. Nastala senca ni ostra, ampak ima zaradi uklona zabrisane robove. Obravnave uklona svetlobe na odprtinah ali zaslonkah se lotimo z uporabo skalarnega približka teorije elektromagnetnega polja. To pomeni, da vpliva polarizacije ne upoštevamo. Ta je pomemben zgolj pri zelo majhnih odprtinah, kjer je velikost odprtine po velikosti podobna valovni dolžini svetlobe $a \sim \lambda$. Vendar so tudi v tem primeru uklonske slike za različne polarizacije podobne, razlikujejo pa se po intenziteti uklonjene svetlobe.

★ Primer, kjer skalarni približek ne da pravih rezultatov, je uklon na mrežici, narejeni iz zelo tankih prevodnih žic. Takšna mrežica deluje kot polarizator za vpadno elektromagnetno valovanje. Elektromagnetni val s polarizacijo, ki je vzporedna žicam, pri prečkanju v žicah inducira tok in val se delno odbije in delno absorbira. Za valovanje, ki je polarizirano pravokotno na žice, je inducirani tok bistveno manjši, saj je tok omejen na smer vzdolž žice. Posledično je val, polariziran pravokotno na žice, prepuščen, val, polariziran vzporedno z žicami, pa ne. Takšni polarizatorji se večinoma uporabljajo v mikrovalovni tehniki, vendar se v zadnjih letih z razvojem in izboljšavo litografskih postopkov vse pogosteje uporabljajo tudi v bližnjem infrardečem delu svetlobe.

Pri velikostih odprtin $a \gg \lambda$ torej uporabimo skalarno obliko valovne enačbe (enačba 1.13)

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{1.51}$$

Časovna odvisnost polja $E$ je harmonična funkcija in je sorazmerna z $e^{-i\omega t}$. Z uporabo Greenovega izreka jakost polja $E_P$ v točki prostora $P$ izrazimo s poljem na poljubni ploskvi, ki to točko obkroža. Zvezo opisuje Kirchhoffov integral[9]

$$E_P = -\frac{1}{4\pi}\oint \left( E\,\mathbf{n}\cdot\nabla\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{n}\cdot\nabla E \right) dS, \tag{1.52}$$

kjer je $\mathbf{n}$ normala na ploskev, po kateri teče integral, $r$ pa oddaljenost od P do dela ploskve $dS$.

Naj svetloba iz točkastega izvora v točki $S$ (slika 1.4) vpada na zaslon z odprtino poljubne oblike. Izračunajmo skalarno polje v točki $P$ na drugi strani zaslona. Vpadno svetlobo zapišemo kot

$$E = A\frac{e^{ikr'}}{r'}, \tag{1.53}$$

kjer je $r'$ razdalja od izvora do točke na zaslonu, A pa zaradi ohranitve energije konstanta.

Integracijska ploskev je lahko poljubna sklenjena ploskev, ki objema točko $P$. Izberemo ploskev, ki zajema odprtino na zaslonu, poleg tega pa naredimo še dva približka: jakost polja $E$ in njen gradient doprineseta k integralu le na odprtini, na preostanku ploskve pa sta njuna prispevka zanemarljivo majhna; vrednost $E$ in njen gradient sta na odprtini takšna, kot da zaslona ne bi bilo. Približka sta precej groba, vendar se izkaže, da se kljub temu dobro ujemata z eksperimentalno določeno uklonsko sliko, s čimer upravičimo njuno uporabo.

Slika 1.4: Integracijska ploskev v Kirchhoffovem integralu zajema odprtino in objema točko $P$.

Kirchhoffov integral za točkast izvor svetlobe se zapiše kot integral po odprtini

$$E_P = -\frac{ikAe^{-i\omega t}}{4\pi}\int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'}\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}')\right) dS. \tag{1.54}$$

Imenujemo ga Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral.

**Naloga 1.7.1** Uporabi Kirchhoffov integral (enačba 1.52) in pokaži, da za primer krožnega vpadnega vala (enačba 1.53) polje v točki $P$ zapišemo s Fresnel-Kirchhoffovim integralom (enačba 1.54). Pri tem privzemi, da je oddaljenost točke $P$ od odprtine $r \gg \lambda$.

[9] Nemški fizik Gustav Robert Kirchhoff, 1824–1887.

Oglejmo si poseben primer, ko leži točkast izvor svetlobe na osi okrogle odprtine. Polje v točki $P$ izračunamo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi}\int E_S \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1\right)dS, \tag{1.55}$$

pri čemer $E_S$ predstavlja kompleksno amplitudo vpadnega polja v odprtini

$$E_S = A\frac{e^{ikr'}}{r'}. \tag{1.56}$$

Zgornja oblika Fresnel-Kirchhoffovega integrala ni pravzaprav nič drugega kot matematičen zapis Huygensovega načela[10]. Spomnimo se, da Huygensovo načelo pravi, da lahko vsako točko valovne fronte obravnavamo kot izvor novega krogelnega vala. Točno to je zapisano tudi v gornjem integralu. Vpadni val $E_S$ v vsakem od elementov odprtine $dS$ vzbudi krogelno valovanje s kompleksno amplitudo

$$E = A_0\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{1.57}$$

polje v izbrani točki $P$ pa je vsota prispevkov posameznih krogelnih valovanj. Za razliko od osnovnega Huygensovega načela, v Fresnel-Kirchhoffovem integralu (enačba 1.55) nastopa še faktor $(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1)$, ki poskrbi, da ni valovanja v smeri nazaj proti izvoru. Tudi faktor $-i$ manjka v osnovnem Huygensovem načelu, pomeni pa, da je uklonjeno valovanje fazno zakasnjeno za $\pi/2$ glede na osnovno valovanje $E_S$.

Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral uporabno razširimo z dodatkom prepustnostne funkcije odprtine $T$. Z njo na splošno popišemo amplitudne in fazne spremembe, do katerih pride na raznih odprtinah, lečah, uklonskih mrežicah ... Razširjen uklonski integral zapišemo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi}\int T(r')E_S(r')\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r}\left(\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1\right)dS, \tag{1.58}$$

pri čemer smo upoštevali tudi splošno obliko vpadnega vala $E_S(r')$.

### Fraunhoferjev in Fresnelov približek

Izračun Fresnel-Kirchhoffovega integrala (enačba 1.52) je na splošno zelo zapleten, zato se pogosto poslužujemo dveh približkov: Fraunhoferjevega[11] in Fresnelovega.

Slika 1.5: K izračunu Fraunhoferjevega in Fresnelovega uklona

[10] Nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens, 1629–1695.
[11] Nemški fizik Joseph von Fraunhofer, 1787–1826.

Izhajamo iz Fresnel-Kirchhoffovega integrala za točkast izvor (enačba 1.54) in zapišemo lego točke $P$ s koordinatami $x, y$ in $z$, razdaljo $r$ pa s koordinatami točke $P$ in koordinatama na zaslonu $x'$ in $y'$ (slika 1.5). Privzamemo, da je oddaljenost do zaslona $z$ bistveno večja od prečnih dimenzij $x$ in $y$. Zapišemo razdaljo $r$ in jo razvijemo

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \approx z + \frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z}. \tag{1.59}$$

Vstavimo razvoj v uklonski integral (enačba 1.55), pri čemer $r$ v imenovalcu nadomestimo kar z $z$. Pridemo do Fresnelovega uklonskega približka

$$E_P(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \int\int E_S\, e^{ik((x-x')^2+(y-y')^2)/2z} dx'dy'. \tag{1.60}$$

Kadar je oddaljenost do zaslona dovolj velika oziroma prečne dimenzije dovolj majhne, da zadošča razvoj do linearnih členov, govorimo o Fraunhoferjevem uklonu in uklonski integral je

$$E_P(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda z} e^{ik(z+(x^2+y^2)/2z)} \int\int E_S\, e^{-ik(xx'+yy')/z} dx'dy'. \tag{1.61}$$

V njem prepoznamo Fourierevo transformacijo polja $E_S$. Fraunhoferjeva uklonska slika velja za razmeroma velike oddaljenosti zaslona od uklonske odprtine, ko lahko uklonjeni val dovolj dobro opišemo z ravnim valom. Bolj zapleteno Fresnelovo uklonsko sliko moramo uporabiti, kadar obravnavamo primer bližnjega polja. Mejo med Fraunhoferjevim in Fresnelovim približkom kvalitativno določa Fresnelovo število

$$F = \frac{a^2}{L\lambda}. \tag{1.62}$$

Pri tem je $a$ karakteristična dimenzija odprtine, $L$ tipična oddaljenost zaslona od odprtine ter $\lambda$ valovna dolžina svetlobe. V grobem velja, da lahko Fraunhoferjev približek uporabimo, kadar je $F < 1$ in je odstopanje faze od ravnega vala znotraj odprtine majhno. Sicer moramo uklon obravnavati v Fresnelovem približku ali celo v polni obliki.

Slika 1.6: Značilna uklonska slika odprtine v Fraunhoferjevem (a) in Fresnelovem režimu (b)

**Naloga 1.7.2** Pokaži, da je v Fraunhoferjevi uklonski sliki uklon na okrogli odprtini podan z

$$I_P = I_0 \frac{4J_1(ka\rho/z)}{ka\rho/z}, \tag{1.63}$$

kjer je $a$ polmer odprtine, $J_1(x)$ je Besslova funkcija in $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

## 1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh

Do zdaj smo obravnavali elektromagnetno valovanje v izotropnih snoveh, v katerih je dielektričnost skalar in hitrost valovanja neodvisna od njegove smeri. Na splošno so snovi anizotropne, dielektričnost je tenzor, hitrost potovanja svetlobe skozi snov pa je odvisna od smeri širjenja in od polarizacije valovanja.

Gostoto električnega polja v anizotropni snovi zapišemo kot

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \mathbf{E}, \tag{1.64}$$

kjer je $\underline{\varepsilon}$ tenzor drugega ranga in ima na splošno devet komponent.

V dielektričnih snoveh, v katerih ne pride do optične aktivnosti ali absorpcije, je tenzor realen in simetričen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$. Tak tenzor lahko vedno diagonaliziramo, torej poiščemo koordinatni sistem, v katerem je diagonalen. V takem koordinatnem sistemu velja

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \mathbf{E} \tag{1.65}$$

in

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1, \\ D_2 &= \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2, \\ D_3 &= \varepsilon_0 \varepsilon_3 E_3. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Glavne osi novega koordinatnega sistema določajo smeri, vzdolž katerih sta jakost in gostota električnega polja vzporedni, iz lastnih vrednosti pa izračunamo tri lomni količnike $n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$. Snovi, za katere so vse tri vrednosti $n_i$ različne, imenujemo optično dvoosne snovi, medtem ko sta v optično enoosnih snoveh dve lastni vrednosti enaki $n_1 = n_2$. Če so enake vse tri lastne vrednosti, je snov izotropna.

### Ploskev valovnega vektorja

V anizotropnih snoveh je lomni količnik odvisen od smeri širjenja svetlobe in izkaže se, da tudi od njene polarizacije. Poglejmo najprej preprost primer, ko se svetloba širi vzdolž lastne osi, naj bo to os $z$. Če je vpadno valovanje polarizirano vzdolž lastne osi $x$, se pri prehodu skozi kristal polarizacija valovanja ohrani, lomni količnik za tak val je $n_1$. Podobno velja za val, polariziran v smeri $y$, za katerega je lomni količnik enak $n_2$. Če polarizacija valovanja, ki se širi vzdolž lastne osi $z$, ne sovpada z lastnima osema $x$ ali $y$, nastane po prehodu skozi kristal iz vpadnega linearno polariziranega valovanja na splošno eliptično valovanje. Lastni komponenti namreč potujeta različno hitro, zato pride med njima do faznega zamika.

Za poljubno smer širjenja valovanja in poljubno polarizacijo je račun razmeroma zapleten. Formalen pristop izhaja iz valovne enačbe (enačba 1.13), v kateri moramo upoštevati tudi električno polarizacijo $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\underline{\varepsilon} - I)\mathbf{E}$. Iz nje sledi sistem enačb za komponente valovnega vektorja in električne poljske jakosti.

Rešitev tega sistema najbolj nazorno predstavimo s ploskvijo valovnega vektorja, ki je sklenjena dvolistna ploskev (slika 1.7). Dvolistnost ploskve vodi pri vsakem valovnem vektorju **k** do dveh rešitev in dveh različnih lomnih količnikov, od katerih vsak ustreza eni od ortogonalnih polarizacij. Točke, v katerih se ploskev dotika sama sebe in sta lomna količnika za obe polarizaciji enaka, določajo smeri optičnih osi.

Slika 1.7: Dvolistna ploskev valovnega vektorja, pri čemer zaradi nazornosti rišemo le prvi oktant. V dvoosnem kristalu (levo) sta dve optični osi. Druga os ni narisana, leži pa simetrično glede na os $z$. Privzeli smo, da velja $n_1 < n_2 < n_3$. V optično enoosnem kristalu (desno) je le ena optična os, po dogovoru je to os $z$. Rdeče puščice označujejo ustrezno polarizacijo.

### Optično enoosni kristali

V optično enoosnih kristalih sta dve lastni vrednosti enaki. Lastne vrednosti izberemo tako, da velja $n_1 = n_2 \neq n_3$. Navadno vpeljemo nove oznake: $n_1 = n_2 = n_o = n_\perp$, ki ga imenujemo redni (*ordinary*) lomni količnik, in $n_3 = n_e = n_\parallel$, ki je izredni (*extraordinary*) lomni količnik. V eni smeri sta lomna količnika za obe polarizaciji enaka in tisti smeri pravimo optična os. Po dogovoru je to os $z$. Hitrost valovanja, ki se širi vzdolž optične osi, je tako neodvisna od njegove polarizacije. Ker je optična os samo ena, imenujemo kristal optično enoosen.

Za lažjo predstavo si oglejmo ploskev valovnega vektorja (slika 1.7, desno). V tem primeru ni treba obravnavati celotne ploskve, ampak zaradi rotacijske simetrije zadošča, da narišemo presek ploskve valovnega vektorja z ravnino, ki jo določata optična os in valovni vektor **k** (vpadno ravnino). Pomemben je le kot $\vartheta$ med valovnim vektorjem **k** in optično osjo $z$, zato si lahko drugo koordinatno os poljubno izberemo. Tukaj izberemo os $y$ (slika 1.8).

Za vsako smer valovnega vektorja, torej za vsak kot $\vartheta$, obstajata dve rešitvi, ki pripadata dvema lastnima polarizacijama z ustreznima lomnima količnikoma. Lomni količnik za žarek, ki je polariziran pravokotno na vpadno ravnino, je neodvisen od $\vartheta$. To je redni žarek, njegov lomni količnik pa je vedno $n_o$, ne glede na vpadni kot. Na skici temu žarku ustreza krožnica.

Žarek, katerega polarizacija leži v vpadni ravnini, je izredni žarek. Pripadajoč lomni količnik je odvisen od kota $\vartheta$ in ga izračunamo iz sledeče enačbe elipse s polosema $n_o$ in $n_e$:

$$\frac{1}{n^2(\vartheta)} = \frac{\cos^2\vartheta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{n_e^2}. \tag{1.67}$$

Navadno sta pri ravnem valu vektorja **E** in **D** vzporedna, prav tako **k** in **S**. Žarek se širi v smeri valovnega vektorja, valovne fronte pa so pravokotne nanj. To velja tudi za redni žarek v anizotropnih snoveh. Izredni žarek pa ima, kot že ime nakazuje, "izredne" lastnosti. Vektorja **E** in **D** nista vzporedna, zato tudi valovni vektor **k** ni vzporeden energijskemu toku oziroma Poyntingovemu vektorju **S** (slika 1.8 c). Smer energijskega toka, ki ni enaka smeri valovnega vektorja, določimo kot normalo na elipso pri kotu $\vartheta$.

Slika 1.8: V optično enoosnih kristalih je lomni količnik odvisen od smeri valovnega vektorja **k** in polarizacije. Poznamo pozitivno anizotropne snovi, pri katerih je $n_e > n_o$ (a) in negativno anizotropne snovi, kjer velja $n_e < n_o$ (b). V obeh primerih je redni žarek polariziran pravokotno na vpadno ravnino. Zanj velja, da je $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ in $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$ (c, zgoraj). Polarizacija izrednega žarka leži v vpadni ravnini. Smer **S** ni vzporedna z valovnim vektorjem **k**, prav tako valovne fronte niso pravokotne nanjo (c, spodaj). Primer je narisan za pozitivno anizotropno snov.

### Dvojni lom

Ko vpade žarek na snov, se lomi. Hitrost valovanja – in s tem tudi kot, pod katerim se lomi – je v anizotropnih snoveh odvisna od polarizacije. Na splošno se pojavita dva lomljena žarka z različnima polarizacijama, kar da ime pojavu: dvolomnost (slika 1.9). Pri zapisu lomnega zakona (enačba 1.41) v anizotropnih snoveh moramo biti pazljivi.

Za redni val s TE polarizacijo (pravokotno na vpadno ravnino) velja navadni lomni zakon, pri čemer je lomni količnik snovi enak rednemu lomnemu količniku $n_o$

$$\sin\vartheta_1 = n_o \sin\vartheta_o. \tag{1.68}$$

Pri zapisu smo privzeli, da je lomni količnik snovi, iz katere valovanje prehaja v anizotropno snov, enak 1. Za izredni val s TM polarizacijo (električna poljska jakost leži v vpadni ravnini) prav tako zapišemo lomni zakon

$$\sin\vartheta_1 = n(\vartheta_e)\sin\vartheta_e, \tag{1.69}$$

le da je lomni količnik $n(\vartheta_e)$ odvisen od smeri širjenja valovanja in je določen z enačbo elipse (enačba 1.67).

Kadar vpada valovanje pravokotno na izotropno snov, se žarek ne lomi. V dvolomnih snoveh pa lahko tudi pri pravokotnem vpadu pride do razklona svetlobe (slika 1.9 b). Kadar je optična os nagnjena glede na vpadnico, sta valovna vektorja obeh prepuščenih žarkov sicer vzporedna valovnemu vektorju vpadnega žarka ($\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_o \parallel \mathbf{k}_e$), razlikujeta pa se smeri Poyntingovih vektorjev ($\mathbf{S}_1 \parallel \mathbf{S}_o \nparallel \mathbf{S}_e$). Ob prehodu skozi plast anizotropne snovi tako svetloba potuje v dveh smereh in nastaneta dve sliki z medsebojno pravokotnima polarizacijama (slika 1.10) .

Slika 1.9: Dvojni lom. Pri poševnem vpadu na anizotropno snov se valovanje loči na dva različno polarizirana žarka (a). Če je optična os usmerjena pod poljubnim kotom glede na normalo mejne ravnine, pride do razklona svetlobe tudi pri pravokotnem vpadu. Valovna vektorja sta tudi v tem primeru kolinearna, Poyntingova vektorja pa imata različne smeri (b).

Slika 1.10: Dvojni lom v kristalu kalcita (islandski dvolomec). Po prehodu skozi kristal nastaneta dve razmaknjeni sliki in z linearnim polarizatorjem pokažemo, da imata sliki različni polarizaciji.

| Snov | $n_o$ | $n_e$ |
|---|---|---|
| $CaCO_3$ (kalcit) | 1,6557 | 1,4849 |
| $BaTiO_3$ | 2,4042 | 2,3605 |
| $LiNbO_3$ | 2,2864 | 2,2022 |
| $KH_2PO_4$ (KDP) | 1,5074 | 1,4669 |
| tekoči kristal 5CB (25 °C) | 1,5319 | 1,7060 |
| telur ($\lambda = 10$ µm) | 4,7969 | 6,2455 |

Tabela 1.1: Redni in izredni lomni količniki za nekaj izbranih optično enoosnih kristalov. Razen v primeru telurja veljajo vrednosti za svetlobo z valovno dolžino 633 nm.

# 2. Koherenca

V tem poglavju bomo spoznali koherenco. To je lastnost valovanja, ki je tesno povezana s pojavom interference. Ohlapno pravimo, da je koherentno tisto valovanje, s katerim se posrečijo interferenčni poskusi.

## 2.1 Youngov poskus

Interferenčnih pojavov ni mogoče opazovati z vsakim svetlobnim izvorom. Da bi to razumeli, si oglejmo interferenco valovanja, ki vpada na dve ozki reži (tako imenovani Youngov poskus[1]). Navadno predpostavimo, da sta obe reži osvetljeni z istim ravnim valom. Delni valovanji, ki izhajata iz rež, imata tako ves čas poskusa enako polarizacijo, enako frekvenco in enako fazno razliko. Zaradi različnih dolžin poti obeh delnih valovanj od reže do dane točke na zaslonu nastane na oddaljenem zaslonu interferenčni vzorec (slika 2.1). Vendar se interferenca pojavi le v primeru, ko je faza valovanja, ki vpada na reži, konstantna. Svetloba s konstantno fazo je koherentna in nastane, na primer, v kvalitetnem laserju. Svetloba iz običajnih svetil ima spremenljivo fazo in zato ne da interferenčnega vzorca. Zanjo pravimo, da ni koherentna.

Slika 2.1: Youngov poskus na dveh režah. Le če je vpadno valovanje koherentno (levo), se pojavi na zaslonu interferenčni vzorec. Nekoherentno valovanje s spremenljivo fazo (desno) ne da interferenčnega vzorca.

Svetloba navadnih svetil, na primer plinskih razelektritvenih cevi, je zaradi vrste nastanka kaotične narave. Atomi sevajo neodvisno, zato se faza izsevanega valovanja spreminja. Približno konstantna je le znotraj nekega karakterističnega časa. Če je pri interferenčnem poskusu karakteristični čas spreminjanja faze krajši od zakasnitve med valovanjema, ki nastane zaradi različno dolgih poti, pride na danem mestu zaslona do izmenično konstruktivne in destruktivne interference. Ker je čas spreminjanja praviloma bistveno krajši od časa opazovanja interference, utripanje svetlobe na zaslonu ni vidno. Interferenčni poskus se ne posreči zaradi majhne časovne koherence, karakterističnemu času spreminjanja faze pa rečemo koherenčni čas $t_c$. Časovno koherenco bomo natančneje obravnavali v razdelku (2.3), zaenkrat povejmo le, da je časovna koherenca vezana na fazno razliko med dvema točkama, ki ležita vzdolž smeri širjenja valovanja.

[1] Angleški znanstvenik Thomas Young, 1773–1829.

Poleg časovne koherence na interferenčno sliko pomembno vpliva tudi prostorska koherenca, ki je posledica končne dimenzije svetila. Svetloba, ki na reži vpada iz različnih delov svetila, ima namreč različno fazo zaradi razlike v dolžini poti od svetila do rež. Ta faza se prišteje fazni razliki zaradi različno dolgih poti od rež do zaslona, zato se interferenčne proge na zaslonu nekoliko premaknejo. Če je fazna razlika žarkov iz različnih delov svetila večja od fazne razlike za režami, se celotna interferenčna slika na zaslonu izpovpreči. Interferenca se pri Youngovem poskusu pojavi, kadar sta reži razmaknjeni le toliko, da je povprečna fazna razlika manjša od $2\pi$. Največjemu prečnemu razmiku, ki še da interferenco, rečemo prečna koherenčna razdalja $d_c$. Prostorska koherenca, ki jo bomo podrobneje spoznali v razdelku (2.5), je torej vezana na fazno razliko med dvema točkama, ki ležita prečno na smer širjenja valovanja.

Poudarimo še enkrat, da je pojem koherence statističen. Če je koherenčni čas $t_c$ dolg v primerjavi s časom opazovanja, se seštevajo amplitude valovanj in pojavi se interferenčna slika. Ta se slučajno spreminja z značilnim časom $t_c$. Če pa so razlike poti večje od $ct_c$ ali razmik rež večji od $d_c$, gledamo le povprečno sliko in interferenčne proge izginejo.

## 2.2 Koherenca navadnih svetil

Obravnavajmo plinsko razelektritveno cev in z ustreznim filtrom izberimo eno samo spektralno črto. Ta črta naj ima osrednjo frekvenco $\nu_0$ in končno frekvenčno širino $\Delta\nu$, ki je kombinacija naravne širine, razširitve zaradi trkov med atomi in Dopplerjevega pojava (glej poglavje 5.8). Privzemimo, da je glavni prispevek k razširitvi spektralne črte zaradi medatomskih trkov, razširitev, povezano z Dopplerjevim pojavom, pa zanemarimo.

Celotna izsevana svetloba je vsota delnih valov, ki izhajajo iz posameznih atomov in so med seboj neodvisni. Vsak delni val ohranja med trkoma, to je v intervalu $t_c$, konstantno fazo. Valovni paket dolžine $t_c$ mora tako vsebovati frekvence v pasu $\Delta\nu$, za katerega velja $t_c\Delta\nu \sim 1$. Koherenčni čas je torej kar reda velikosti obratne vrednosti spektralne širine svetlobe. Povsem monokromatsko valovanje bil imelo neskončen koherenčni čas in bi bilo popolno koherentno.

Zapišimo še izsevano polje takega svetila. Jakost električnega polja v izbrani točki prostora je vsota delnih valov, ki izvirajo iz raznih delov izvora. Vsak atom v izvoru, naj jih bo $N$, seva neodvisno, zato so tudi delna valovanja med seboj neodvisna. Posamična valovanja ohranjajo konstantno fazo v času med dvema trkoma atoma $t_c$. Zaradi enostavnosti privzemimo, da so amplitude $E_1$ in polarizacije izsevanih polj posameznih atomov enake. Električno poljsko jakost $E$ v izbrani točki prostora potem zapišemo kot vsoto posameznih prispevkov

$$E = E_1 \sum_{n=1}^{N} e^{i\phi_n(t)}. \tag{2.1}$$

kjer se faza polja $\phi_n(t)$, ki ga izseva posamezni atom, naključno spremeni ob trku z drugim atomom. Povprečje vsote polj je nič, povprečni kvadrat skupnega polja, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka, pa je $NE_1^2$. Zaradi slučajnosti faz je slučajna tudi faza celotnega polja in se gotovo povsem spremeni v času, ko se spremeni faza posameznih prispevkov, to je $t_c$. S tako svetlobo bomo videli interferenco na režah, če bo razlika poti delnih valovanj manjša od $ct_c$.

Oglejmo si izračun na primeru. Imejmo $N = 100$ neodvisnih atomov, ki se jim faza naključno spreminja s karakterističnim časom $t_c = 10/\nu$, kjer je $\nu$ frekvenca valovanja. Na sliki (2.2) sta prikazana časovna poteka amplitude $E$ (enačba 2.1) in $|E|^2$, ki je sorazmeren z intenziteto svetlobe. Za primerjavo je prikazan tudi ravni val $E = \sqrt{N}E_1 e^{-i\omega t}$ s konstantno fazo in njegova intenziteta. Intenziteta ravnega vala je konstantna, medtem ko je povprečna intenziteta svetlobe navadnega svetila približno konstantna le znotraj $t_c$.

Slika 2.2: Zgoraj: shematski prikaz električne poljske jakosti ravnega vala s konstantno fazo (rdeča črta) in električne poljske jakosti navadnega svetila (modra črta) kot funkcije časa. Faza polja se naključno spreminja s karakterističnim časom $t_c$. Spodaj: intenziteta ravnega vala (rdeča črta) in intenziteta svetlobe navadnega svetila (modra črta) kot funkciji časa. Modra črtkana črta je povprečna intenziteta $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t+t')E^*(t+t')dt'$ s časom integracije $T = t_c$.

## 2.3 Časovna koherenca

Časovno koherenco je najpreprosteje obravnavati z Michelsonovim interferometrom[2], ki je prikazan na sliki (2.3).

Slika 2.3: Michelsonov interferometer. Svetlobo iz izvora $P$ usmerimo preko kolimacijske leče (L) na polprepustno zrcalo (PZ), s čimer jo razdelimo na dva snopa. S premikanjem enega zrcala (Z) spreminjamo zakasnitev enega delnega žarka. Interferenco opazujemo na detektorju.

[2] Ameriški fizik in nobelovec Albert Abraham Michelson, 1852–1931.

Valovanje iz točke $P$ na polprepustnem zrcalu razdelimo na dva delna snopa, nato enega s premikanjem zrcala zakasnimo za $\tau = 2x/c$. S kolimacijsko lečo dosežemo, da je čim več žarkov, ki izhajajo iz $P$, vzporednih z osjo interferometra. Dokler je zakasnitev $\tau$ manjša od koherenčnega časa $t_c$, bosta snopa med seboj interferirala. S spreminjanjem lege zrcala se tako na detektorju izmenično pojavijo ojačitve in oslabitve. V primeru, da snop svetlobe ni povsem vzporeden, se na detektorju pojavijo osvetlitve v obliki interferenčnih krogov. Pri zakasnitvah, ki so večje od koherenčnega časa, ni stalne fazne povezave, interferenčna slika se spreminja in v daljših časih izpovpreči. Zapišimo to ugotovitev še matematično.

Svetlobni tok na detektorju je sorazmeren s kvadratom električne poljske jakosti obeh delnih valovanj

$$|E_d(t)|^2 = |E(t) + E(t+\tau)|^2 = |E(t)|^2 + |E(t+\tau)|^2 + 2\Re E(t)E^*(t+\tau). \tag{2.2}$$

Zakasnitev $\tau$ je določena s premikom pomičnega zrcala $\tau = 2x/c$. Navadno opazujemo v času $T$, ki je dolg v primerjavi s koherenčnim časom, zato svetlobni tok povprečimo po času

$$\begin{aligned} \langle |E_d(t)|^2 \rangle &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |E_d(t)|^2\, dt \\ &= 2\langle |E|^2 \rangle + 2\Re\langle E(0)E^*(\tau)\rangle = 2\langle |E|^2 \rangle + 2\Re G(\tau). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Prvi člen je vsota povprečnih svetlobnih tokov obeh delnih snopov. Privzeli smo, da je polje v povprečju stacionarno in je zato povprečje neodvisno od izbire časovnega intervala. Drugi člen opisuje interferenco. Za opis smo vpeljali časovno avtokorelacijsko funkcijo električnega polja

$$G(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t+\tau)\, dt. \tag{2.4}$$

Za majhne zakasnitve $\tau$ na detektorju zaznamo interferenco. Pri zakasnitvah, ki so precej večje od koherenčnega časa $t_c$, sta polji $E(0)$ in $E(\tau)$ statistično neodvisni in povprečje produkta je enako produktu povprečij. Ker je $\langle E(t)\rangle = 0$, pri velikih zakasnitvah $\tau$ interferenčni člen izgine in svetlobni tok je enak vsoti tokov posameznih delnih snopov.

Priročno je vpeljati normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)}. \tag{2.5}$$

Za povsem koherentno valovanje je $|g(\tau)| = 1$, za povsem nekoherentno valovanje je $|g(\tau)| = 0$, za delno koherentna pa $0 < |g(\tau)| < 1$. Praviloma se vrednost $|g(\tau)|$ z naraščajočim $\tau$ zmanjšuje, saj postaja valovanje za velike časovne zamike vedno manj korelirano. Ohlapno povedano je koherenčni čas zakasnitev, pri kateri postane vrednost avtokorelacijske funkcije majhna. Koherenčni čas $t_c$ lahko tudi bolj natančno definiramo z normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$t_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2\, d\tau. \tag{2.6}$$

Zakasnitev delnih valov je pogosto posledica različno dolgih optičnih poti, zato namesto koherenčnega časa uporabljamo tudi koherenčno dolžino $l_c = ct_c$. Pri tem moramo paziti, da koherenčne dolžine, ki jo izpeljemo iz časovne koherence, ne zamenjamo s prečno koherenčno razdaljo, o kateri bomo govorili v nadaljevanju.

**Naloga 2.3.1** Pokaži, da v navedenih avtokorelacijskih funkcijah $g(\tau)$ spremenljivka $t_c$ ustreza koherenčnemu času, kot je definiran v enačbi (2.6), in izračunaj $|g(t_c)|$ za oba primera.

$$g(\tau) = \begin{cases} \exp\left(i\omega_0\tau - |\tau|/t_c\right), \\ \exp\left(i\omega_0\tau - \pi\tau^2/2t_c^2\right), \end{cases} \tag{2.7}$$

Ob nalogi (2.4.2) in v razdelku (5.8) bomo spoznali, da sta to avtokorelacijski funkciji za svetlobo z Lorentzovim spektrom (razširitev spektralne črte zaradi trkov) in Gaussovim spektrom (Dopplerjeva razširitev).

Poglejmo še nekaj značilnih koherenčnih dolžin. Koherenčna dolžina svetlobe, izsevane iz črnega telesa, je $l_c = ct_c \approx \hbar c/k_B T$ (glej nalogo 2.4.3). Svetloba s Sonca ($T \approx 6000$ K) ima tako koherenčno dolžino zgolj $\sim 0,4$ µm. Svetloba, izsevana iz LED sijalk, ima koherenčno dolžino $\sim$ 20–100 µm. Če želimo povečati koherenčno dolžino taki svetlobi, jo moramo usmeriti na ustrezne filtre in ji s tem zmanjšati spektralno območje. Ožje spektralno območje ima na primer živosrebrna svetilka, zato je koherenčna dolžina svetlobe za izbrano spektralno črto do okoli 50 cm. Koherenčna dolžina laserjev z ozko spektralno črto je tipično okoli 100 m, v nekaterih vlakenskih laserjih pa koherenčna dolžina presega 100 km.

## 2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom

Spoznali smo, da je monokromatski ravni val povsem koherenten in njegov korelacijski čas neskončen. Obravnavajmo zdaj koherenco poljubnega valovanja, ki je v povprečju stacionarno. To pomeni, da se v času meritve povprečna intenziteta ne spreminja. Vzamemo vzorec valovanja, ki traja čas $T$, in ga razvijemo v Fourierevo vrsto

$$E(t) = \sum_n A_n(\omega) e^{-in\Delta\omega t}, \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.8}$$

Amplitude $A_n(\omega)$ so slučajne spremenljivke, ki predstavljajo delež polja pri krožni frekvenci $\omega = n\Delta\omega$, čas $T$ pa označuje čas opazovanja in mora biti bistveno daljši od $t_c$. Zapišimo amplitude $A_n$

$$A_n(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\, e^{i\omega t}\, dt. \tag{2.9}$$

Vemo, da je kvadrat $|A_n(\omega)|^2$ sorazmeren gostoti svetlobnega toka pri krožni frekvenci $\omega$. Potem lahko vpeljemo spekter $S(\omega)$, ki podaja intenziteto svetlobe pri $\omega$, deljeno z intervalom $\Delta\omega$[3]

$$S(\omega) = \frac{|A_n(\omega)|^2}{\Delta\omega} = \frac{T}{2\pi}|A_n(\omega)|^2. \tag{2.10}$$

Vstavimo še amplitudo $A_n$ (enačba 2.9) in dobimo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\int\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t')\, e^{-i\omega(t'-t)}\, dt\, dt'. \tag{2.11}$$

[3]Gostota svetlobnega toka je $j = \varepsilon\varepsilon_0 c|E|^2/2$ z enotami W/m$^2$. Zaradi poenostavitve bomo namesto $j$ pogosto pisali intenziteto $I = |E|^2$, konstantne člene pa dodali le, če bomo rabili točno numerično vrednost.

Uvedemo novo spremenljivko $\tau = t' - t$ in zapišemo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t+\tau)\,dt. \tag{2.12}$$

Opazimo, da je integral po $t$ ravno enak korelacijski funkciji $G(\tau)$. Ker je $T \gg t_c$, je korelacijska funkcija na mejah integracije po enaka $\tau$ nič, zato smo meje integracije po $\tau$ lahko raztegnili do neskončnosti. Zveza, ki smo jo dobili, je Wiener-Hinčinov izrek[4]

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega.} \tag{2.13}$$

Spekter svetlobe je torej Fouriereva transformiranka avtokorelacijske funkcije svetlobnega polja. Pri tem ne pozabimo, da je spekter, ki smo ga zapisali z enačbo (2.12), zapisan za izbran vzorec valovanja, ki traja čas $T$, in je tudi slučajna spremenljivka. Povprečen spekter dobimo tako, da naredimo limito $T \to \infty$.

$$\langle S(\omega)\rangle = \lim_{T\to\infty} S(\omega). \tag{2.14}$$

★ Zaradi priročnosti smo zapisali spekter in Wiener-Hinčinov izrek s krožno frekvenco. Podobno lahko vpeljemo tudi spekter na frekvenčni interval in Wiener-Hinčinov izrek se prepiše v

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}\,d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)e^{i2\pi\nu\tau}\,d\nu. \tag{2.15}$$

Iz Wiener-Hinčinovega izreka (enačba 2.13) neposredno sledi, da je koherenca povezana s spektrom. Koherenčni čas $t_c$ je tako povezan s spektralno širino svetlobe $\gamma$, za katero velja (glej nalogo 2.4.1)

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{t_c}.} \tag{2.16}$$

---

**Naloga 2.4.1** Formalno lahko vpeljemo spektralno širino kot

$$\gamma = \frac{1}{2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|s(\omega)|^2\,d\omega}; \quad \text{kjer je} \quad s(\omega) = \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega} = \frac{S(\omega)}{G(0)} \tag{2.17}$$

normirani spekter. Z uporabo enačbe za koherenčni čas $t_c$ (enačba 2.6) pokaži, da je spektralna širina obratno sorazmerna s koherenčnim časom (enačba 2.16) ne glede na obliko spektra. Namig: Uporabi Parsevalov izrek, ki pravi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega, \tag{2.18}$$

kjer je

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \tag{2.19}$$

Fouriereva transformiranka funkcije $f(t)$.

---

[4] Ameriški matematik Norbert Wiener, 1894–1964, in ruski matematik Aleksander Jakovljevič Hinčin, 1894–1959.

Za zgled Wiener-Hinčinovega izreka vzemimo primer, ki je predstavljen na sliki (2.2). Ker so trki med atomi naključni, je avtokorelacijska funkcija eksponentno pojemajoča

$$g(\tau) = e^{i\omega_0\tau} e^{-\tau/t_c}, \tag{2.20}$$

spekter take svetlobe pa je Lorentzove oblike (glej nalogo 2.4.2)

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}, \tag{2.21}$$

pri čemer je $\gamma = 1/t_c$ spektralna širina. Normirani spekter $s(\omega)$ in ustrezna avtokorelacijska funkcija $g(\tau)$ sta prikazana na sliki (2.4). Točke na grafih predstavljajo spekter in izračunano avtokorelacijsko funkcijo za integracijski čas $T = 100t_c$. Za primerjavo sta z rdečo krivuljo prikazana tudi pričakovan spekter (enačba 2.21) in avtokorelacijska funkcija (enačba 2.20). Zaradi končnega časa $T$ pri izračunu povprečja se spekter iz simulacije nekoliko razlikuje od pričakovane vrednosti.

Slika 2.4: Spekter in avtokorelacijska funkcija valovanja s slike (2.2)

**Naloga 2.4.2** Imejmo dve vrsti svetlobe. Prva naj ima avtokorelacijsko funkcijo, ki je eksponentno pojemajoča, druga pa ima avtokorelacijsko funkcijo Gaussove oblike (enačbi 2.7). Pokaži, da sta njuna spektra oblike

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \quad \text{in} \quad s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\gamma} \exp\Big(-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\pi\gamma^2}\Big), \tag{2.22}$$

kjer je $\gamma = 1/t_c$ spektralna širina.

Spektralne črte atomov so pogosto Lorentzove oblike, kar je posledica eksponentnega razpada stanj (naravna širina). Dodatno se spektralne črte razširijo zaradi trkov med atomi, vendar tudi to vodi do približno Lorentzove oblike spektra. V plinih je pogosto prevladujoča razširitev črt zaradi Dopplerjevega pojava (glej razdelek 5.8). Spekter Dopplerjevo razširjene svetlobe je, kot bomo videli v nadaljevanju, Gaussove oblike. V tem primeru iz enačbe (2.13) sledi, da je tudi avtokorelacijska funkcija Gaussove oblike.

**Naloga 2.4.3** Numerično pokaži, da je koherenčni čas svetlobe, ki jo oddaja črno telo s temperaturo $T$, približno enak $t_c \approx \hbar/k_B T$. Normirani spekter sevanja črnega telesa zapišemo kot Planckov spekter

$$s(\omega) = \frac{15}{\pi^4}\frac{\hbar^4\omega^3}{(kT)^4} / \left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right) \quad \text{za } \omega > 0, \text{ sicer } s(\omega) = 0. \tag{2.23}$$

★ V prejšnjem razdelku smo videli, da časovno avtokorelacijsko funkcijo merimo z Michelsonovim interferometrom. Dobljena povezava med merjeno avtokorelacijo in izračunanim spektrom je osnova za Fourierevo spektroskopijo[5], ki ima nekatere pomembne prednosti pred drugimi metodami in se danes precej uporablja, posebej v infrardečem delu EM valovanja.

## 2.5 Prostorska koherenca

Vrnimo se k Youngovemu poskusu in obravnavi interference na dveh ozkih režah. Osvetljujmo zdaj reži s svetilom končnih razsežnosti. Svetilo naj sveti skoraj enobarvno svetlobo in naj bo na simetrali med režama, kot kaže slika (2.5).

Žarka, ki izhajata iz sredine svetila (polna črta), opravita do rež v ravnini A enako dolgo pot in povzročita na zaslonu B interferenčne proge. Žarka, ki izhajata iz roba izvora (prekinjena črta), imata do rež različno dolgo pot, zato nastane med njima fazna razlika že do ravnine A, ki se prišteje fazni razliki do ravnine B. Interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, so premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Ker so žarki z roba statistično neodvisni od žarkov iz sredine, z njimi ne interferirajo. Celotni interferenčni vzorec je zato kar vsota interferenčnih vzorcev žarkov iz različnih delov svetila. Če je razlika poti za žarke iz različnih delov velikosti valovne dolžine $\lambda$, se celotna interferenčna slika na zaslonu B izpovpreči.

Slika 2.5: Shema interferenčnega eksperimenta z razsežnim svetilom

Razdaljo med režama $d_c$, pri kateri interferenčne proge izginejo, imenujemo prečna koherenčna razdalja. Zanjo velja približno

$$\delta s = d_c \sin\varphi \approx d_c \frac{R}{z} \sim \lambda \;\Rightarrow\; d_c \sim \frac{z\lambda}{R}. \tag{2.24}$$

Pogosto je v uporabi tudi pojem koherenčna ploskev, to je območje, v katerem je fazna razlika v povprečju konstantna. Velikost te ploskve je približno $d_c^2$. V območju koherenčne ploskve so tudi valovne fronte približno gladke.

[5] Francoski matematik in fizik Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830.

Zapišimo gornje ugotovitve nekoliko bolj natančno. Na zaslonu $B$ izmerimo gostoto svetlobnega toka, ki je sorazmerna povprečju kvadrata električne poljske jakosti valovanj, ki izhajata iz obeh odprtin

$$\begin{aligned}\langle|E_d|^2\rangle &= \langle|K_1E_1+K_2E_2|^2\rangle \\ &= |K_1|^2\langle|E_1|^2\rangle + |K_2|^2\langle|E_2|^2\rangle + 2\Re K_1K_2^*\langle E_1(0)E_2^*(\tau)\rangle.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Pri tem je je $\tau = d\sin\vartheta/c$ zakasnitev valovanja iz druge odprtine glede na valovanje iz prve, faktorja $K_1$ in $K_2$ pa sta določena z uklonom na posameznih odprtinah. Interferenčna slika je vsebovana v podobnem členu kot pri Michelsonovem interferometru, le da nastopa v tem primeru namesto avtokorelacijske funkcije navzkrižna korelacijska funkcija polj $E_1$ in $E_2$ iz obeh odprtin.

Kako je interferenčni člen povezan z lastnostmi svetila, brez težav doženemo v izbranem primeru skoraj enobarvne svetlobe z osrednjo krožno frekvenco $\omega$. Tedaj lahko za zakasnitve $\tau$, ki so krajše od koherenčnega časa, zapišemo

$$E_2(\tau) = E_2(0)\,e^{-i\omega\tau} \tag{2.26}$$

in

$$\langle E_1(0)E_2^*(\tau)\rangle = \langle E_1(0)E_2^*(0)\rangle e^{i\omega\tau} = J(P_1,P_2)\,e^{i\omega\tau}. \tag{2.27}$$

Faktor $\Re e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) = \cos(kd\sin\vartheta)$ da interferenčne proge za koherentno osvetlitev zaslona, povprečje produkta polj v odprtinah ob istem času $J(P_1,P_2) = \langle E(P_1,0)E^*(P_2,0)\rangle$ pa meri stopnjo prečne koherence med obema odprtinama. Od velikosti tega člena je odvisen kontrast interferenčnih prog. Izračunajmo ga.

Polje v posamezni odprtini je vsota prispevkov iz celega izvora.

$$E(P_j) = -\frac{i}{\lambda}\int E(\xi,\eta)\frac{e^{iks_j}}{s_j}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.28}$$

Pri tem je $s_j$ razdalja med točko $(\xi,\eta)$ na izvoru in točko $P_j(x_j,y_j)$ na reži v ravnini A (glej sliko 2.5). Faktor pred integralom $-i/\lambda$ izhaja iz uklonske teorije (enačba 1.54). Tako je

$$J(P_1,P_2) = \frac{1}{\lambda^2}\int\int\langle E(\xi,\eta)E^*(\xi',\eta')\rangle\frac{e^{ik(s_1-s_2')}}{s_1s_2'}\,d\xi\,d\eta\,d\xi'd\eta'. \tag{2.29}$$

V izbranem svetilu sevajo atomi neodvisno. Valovanji iz dveh točk svetila, ki sta razmaknjeni za več kot $\lambda$, sta neodvisni in povprečje njunega produkta je enako nič. Tako približno velja

$$\langle E(\xi,\eta)E^*(\xi',\eta')\rangle = \frac{\lambda^2}{\pi}\cdot\delta(\xi-\xi',\eta-\eta')\langle|E(\xi,\eta)|^2\rangle. \tag{2.30}$$

Faktor $\lambda^2/\pi$ poskrbi za ustrezno normalizacijo. Naj bo oddaljenost svetila od zaslona $A$ veliko večja od dimenzije svetila ($z \gg R$), tako da lahko imenovalec pod integralom v izrazu (2.29) nadomestimo z $z^2$ in postavimo pred integral. Sledi

$$J(P_1,P_2) = \frac{1}{\pi z^2}\int\langle|E(\xi,\eta)|^2\rangle e^{ik(s_1-s_2)}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.31}$$

Izraz lahko še nekoliko poenostavimo, če razvijemo $s_1$ in $s_2$ do drugega reda

$$s_j = \sqrt{z^2+(x_j-\xi)^2+(y_j-\eta)^2} \approx z + \frac{(x_j-\xi)^2+(y_j-\eta)^2}{2z}. \tag{2.32}$$

Pri tem sta $(x_j, y_j)$ koordinati točke $P_j$. Pišimo še $\langle |E(\xi,\eta)|^2 \rangle = I(\xi,\eta)$, ki je do konstante natančno enak intenziteti valovanja, ter $x_2 - x_1 = \Delta x$ in $y_2 - y_1 = \Delta y$. S tem dobimo znani rezultat, tako imenovani van Cittert-Zernikov izrek[6]

$$J(\Delta x, \Delta y) = \frac{e^{-i\phi}}{\pi z^2} \int I(\xi,\eta) e^{ik(\Delta x \xi + \Delta y \eta)/z} d\xi\, d\eta. \tag{2.33}$$

Faza

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda z}[(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)] \tag{2.34}$$

meri skupni premik interferenčnih prog, do katerega pride, kadar svetilo ne leži na isti osi kot odprtini v zaslonu. Kadar ležita odprtini v ravnini $A$ simetrično glede na os svetila, je faza $\phi$ enaka nič.

Dobljeni rezultat si je vredno nekoliko ogledati. Prečno prostorsko korelacijsko funkcijo $J(P_1, P_2)$, ki določa kontrast interferenčnih prog, smo izrazili kot 2-D Fourierevo transformiranko intenzitete svetlobe na samem svetilu (enačba 2.33).

★ Ob tem se spomnimo, da velja podobna zveza med električno poljsko jakostjo v osvetljeni odprtini in njeno Fraunhoferjevo uklonsko sliko (enačba 1.61), pri čemer so količine, ki nastopajo v obeh zvezah, povsem različne. Različna je tudi veljavnost obeh izrazov: medtem ko je Fraunhoferjeva uklonska formula veljavna le v veliki oddaljenosti, za opis uklonske slike v bližnjem polju pa je treba uporabiti Fresnelov izraz (enačba 1.60), je rezultat za $J(P_1, P_2)$ (enačba 2.33) veljaven v obeh območjih.

Ker je velikost svetila končna, $J(P_1, P_2)$ pri dovolj veliki razdalji med točkama $P_1$ in $P_2$ gotovo pade na nič. Največja razdalja, do katere je $J(P_1, P_2)$ še različna od nič, je ravno prečna koherenčna razdalja $d_c$, ustrezna ploskev pa je koherenčna ploskev $S_c$. Iz izraza za koherenčno razdaljo (enačba 2.24) jo lahko ocenimo

$$S_c \sim \frac{(\lambda z)^2}{S_0} \sim \frac{\lambda^2}{\Omega_0}, \tag{2.35}$$

kjer je $S_0$ površina svetila, $\Omega_0$ pa prostorski kot, pod katerim je videti svetilo v ravnini $A$.

Oglejmo si primer. Naj bo svetilo v obliki kroga s polmerom $R$, obe odprtini v zaslonu naj imata koordinati $y$ enaki nič, razmik med režama v smeri $x$ pa naj bo $d$. Prečno korelacijsko funkcijo izračunamo iz enačbe (2.33) in dobimo (glej nalogo 2.5.1)

$$J(0, \Delta y) = 2\frac{R^2 I_0}{z^2} \frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z}, \tag{2.36}$$

kjer je $J_1(x)$ Besslova funkcija. V ničlah Besslove funkcije pade prečna korelacijska funkcija $J$ na nič in interferenčnega vzorca ne vidimo. Za prečno koherenčno razdaljo je zato smiselno vzeti ravno prvo ničlo Besslove funkcije $J_1$, to je pri

$$d_c \approx 3{,}83\frac{z}{kR} = 0{,}61\frac{\lambda z}{R}. \tag{2.37}$$

[6] Nizozemski fizik Pieter Hendrik van Cittert, 1889–1959, in nizozemski fizik in nobelovec Frits Zernike, 1888–1966.

**Naloga 2.5.1** Pokaži, da prečno korelacijsko funkcijo za okroglo svetilo s polmerom $R$, pri čemer odprtini na zaslonu ležita simetrično na osi $y$ v razmiku $d$, zapišemo z enačbo (2.36).

Doslej smo obravnavali le valovanje v središču interferenčne slike na zaslonu $B$, to je pri tako majhnih kotih $\vartheta$, da je zakasnitev manjša od koherenčnega časa. Pri večjih kotih moramo upoštevati še vpliv končnega koherenčnega časa, zaradi česar se kontrast interferenčnih prog še dodatno zmanjšuje. Interferenčna slika je tako produkt časovnega in prostorskega dela.

V primeru dveh zelo tankih rež z razmikom $d$ nastanejo na zaslonu $B$ uklonski vrhovi. Za nekaj različnih razmikov med odprtinama $d$ je intenziteta svetlobe na zaslonu prikazana na sliki (2.6). Če je $d \ll \lambda z/R$ (slika a), je modulacija interferenčnih prog v sredini popolna in se zaradi končnega koherenčnega časa zmanjšuje le pri večjih kotih $\vartheta$. Pri nekaj večjem razmiku (slika b) tudi v sredini kontrast ni več popoln. Obenem se interferenčne proge zgostijo. Kadar je $d \approx 3,83\, z/kR$, dosežemo prvo ničlo Besslove funkcije $J_1(x)$ in interferenčni vzorec prvič izgine (slika c). Takrat je razdalja med režama ravno enaka prečni koherenčni razdalji valovanja. Pri še večjih razmikih (slika d) je Besslova funkcija negativna in ponovno se pojavijo interferenčne proge, vendar so slabše izražene in z nasprotno fazo, kar da v sredini temno progo.

Slika 2.6: Interferenčna slika na zaslonu $B$ za različne vrednosti razmikov med odprtinama: a) $d = z/kR$, b) $d = 2z/kR$, c) $d = 3,832\, z/kR$ in d) $d = 5,136\, z/kR$. Z večanjem razdalje med režama se proge zgostijo in kontrast se zmanjša. Koherenčni čas svetlobe je $t_c = 10/\omega$, kar še dodatno zmanjšuje modulacijo interferenčnih prog. Pri $d = 3,832\, z/kR$ dosežemo prvo ničlo Besslove funkcije in interferenčni vzorec popolnoma izgine. Nato se interferenčne proge zopet pojavijo, vendar z manjšim kontrastom in nasprotno fazo.

Merjenje prečne koherenčne razdalje svetlobe zvezd je osnova za Michelsonovo metodo določanja zvezdnih premerov. Svetlobo izbrane zvezde zberejo v teleskop preko dveh manjših parov zrcal, kjer sta zunanji zrcali na pomičnih rokah, tako da ju je mogoče razmikati. Glavno zrcalo teleskopa zbere svetlobna snopa v goriščni ravnini, kjer nastanejo interferenčne proge, če le pomični zrcali nista preveč razmaknjeni. Iz razmika, pri katerem interferenčne proge izginejo, je mogoče določiti premere bližnjih svetlih zvezd. Za zvezdo s polmerom $10^6$ km v razdalji 5 svetlobnih let je prečna koherenčna razdalja za zeleno svetlobo okoli 15 m, kar je z Michelsonovim zvezdnim interferometrom mogoče izmeriti. Pri zvezdah, ki so dlje od nekaj deset svetlobnih let, metoda odpove.

# 3. Koherentni snopi svetlobe

V tem poglavju bomo zapisali obosni približek valovne enačbe in spoznali njeno osnovno rešitev: Gaussov snop. Obravnavali bomo snope osnovnega in višjega reda ter se naučili računati prehode Gaussovih snopov skozi optične elemente.

## 3.1 Omejen snop svetlobe

Pri obravnavi elektromagnetnega valovanja pogosto uporabljamo približek ravnih valov. Ti so v smeri pravokotno na smer širjenja neomejeni in so zato lahko le idealizacija. Čim raven val usmerimo skozi odprtino v zaslonu, nastane omejen snop svetlobe. V snopu svetlobe valovna čela niso ravna in meje snopa niso vzporedne, ampak se snop zaradi uklona širi (slika 3.1).

Slika 3.1: Omejen snop nastane ob prehodu ravnega vala skozi končno odprtino.

V veliki oddaljenosti od zaslona polje izračunamo s Fraunhoferjevo uklonsko teorijo (glej poglavje 1.7). Vendar za oceno kota širjenja računa niti ne potrebujemo. Velja približno

$$\vartheta \sim \frac{\lambda}{a}, \tag{3.1}$$

kjer je $a$ polmer odprtine v zaslonu. Opis polja v bližini zaslona je zahtevnejši, saj je treba uporabiti Fresnelov približek (enačba 1.60). Območje bližnjega polja seže do $b$, ki ga lahko ocenimo s slike (3.1)

$$\frac{a}{b} \sim \vartheta \sim \frac{\lambda}{a} \qquad \text{in tako} \qquad b \sim \frac{a^2}{\lambda}. \tag{3.2}$$

Včasih taki približni oceni zadoščata. Bolj kvantitativen opis omejenih snopov bi lahko dobili s Fraunhoferjevo in Fresnelovo uklonsko teorijo, kar pa ni najudobnejša pot. Lotimo se naloge raje z uporabo približka obosne valovne enačbe.

---

**Naloga 3.1.1** Pokaži, da je Fraunhoferjeva uklonska slika reže, katere prepustnost se v radialni smeri spreminja kot Gaussova funkcija $T(\xi,\eta) = e^{-(\xi^2+\eta^2)/w_0^2}$, podana z Gaussovo funkcijo oblike $E(x,y,z) \propto e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)}$ in določi odvisnost $w(z)$. Izračunaj še uklonsko sliko v bližnjem polju po Fresnelovi uklonski teoriji.

---

## 3.2 Obosna valovna enačba

Obravnavo začnemo z valovno enačbo in monokromatskim valovanjem s krožno frekvenco $\omega$. Ustrezna Helmholtzeva enačba je (enačba 1.21)

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \tag{3.3}$$

kjer je $k = n\omega/c_0$ valovno število in $n$ lomni količnik sredstva, po katerem se valovanje širi. Zaradi enostavnosti obravnavamo le eno polarizacijo, tako da $E$ pišemo kot skalar. Iščemo rešitev za omejen snop, ki se širi približno vzdolž osi $z$. Uporabimo nastavek

$$E = E_0 \psi(\mathbf{r}, z) e^{ikz}, \tag{3.4}$$

kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor v ravnini $xy$, prečni na smer širjenja svetlobe. Glavni del odvisnosti od koordinate $z$ smo zapisali v faktorju $e^{ikz}$, tako da lahko privzamemo, da se $\psi$ v smeri $z$ le počasi spreminja. Vstavimo gornji nastavek v Helmholtzevo enačbo (enačba 3.3) in pri tem zanemarimo druge odvode po $z$, saj je zaradi počasnega spreminjanja $\partial^2\psi/\partial z^2$ majhen v primerjavi s $k\partial\psi/\partial z$ in $k^2\psi$. Dobimo obosno ali paraksialno valovno enačbo

$$\boxed{\nabla_\perp^2 \psi = -2ik\frac{\partial \psi}{\partial z}.} \tag{3.5}$$

★ Opazimo, da je obosna valovna enačba enaka Schrödingerjevi enačbi za prost delec v dveh dimenzijah, v kateri ima koordinata $z$ vlogo časa. Omejenemu snopu v kvantni mehaniki ustreza lokaliziran delec – valovni paket. Ta se s časom širi, kar v optiki ustreza pojavu uklona.

Zapišimo nastavek za ravni val v obliki

$$\psi = e^{ik_1 x + ik_2 y} e^{-i\beta z}. \tag{3.6}$$

Da bo gornji nastavek rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5), mora veljati

$$\beta = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \tag{3.7}$$

Ko vstavimo nastavek za $\psi$ v izraz za polje $E$ (enačba 3.4), dobimo ravni val, za katerega velja

$$k_3 = k - \beta = k - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \tag{3.8}$$

Pri tem $k_3$ označuje vzdolžno in $k_1$ ter $k_2$ prečni komponenti valovnega vektorja, $k$ pa je valovno število. Za ravni val, ki je rešitev Helmholtzeve enačbe (enačba 3.3) in ne obosnega približka, velja

$$k_3 = \sqrt{k^2 - (k_1^2 + k_2^2)}. \tag{3.9}$$

Vidimo, da sledi enačba (3.8) iz enačbe (3.9) z razvojem za majhne vrednosti $k_1$ in $k_2$. To pove, da je približek obosne enačbe dober, kadar je razmerje prečne in vzdolžne komponente valovnega vektorja majhno. Takrat je majhen tudi kot širjenja snopa in člene, višje od kvadratnih, lahko zanemarimo. To pa je tudi območje veljavnosti Fresnelove uklonske teorije.

★ Časovno odvisnost poljubnega začetnega stanja v kvantni mehaniki navadno izračunamo tako, da v nekem začetnem trenutku paket razvijemo po lastnih stanjih energije – ravnih valovih. Rešitev v poljubnem kasnejšem trenutku je potem dana v obliki Fourierevega integrala. Ta pot je zelo uporabna tudi v optiki in je osnova sklopa računskih metod, znanih pod imenom Fouriereva optika. V našem primeru z njo brez težav pridemo nazaj do Fresnelove uklonske formule.

## 3.3 Osnovni Gaussov snop

Naša naloga je poiskati rešitve obosne enačbe, ki popišejo omejene snope. Iz kvantne mehanike vemo, da je najbolj lokaliziran in se najpočasneje širi valovni paket Gaussove oblike. Zato poskusimo najti rešitev obosne enačbe (enačba 3.5) z nastavkom

$$\psi(r,z) = e^{ikr^2/2q(z)}\, e^{-i\phi(z)}, \tag{3.10}$$

kjer funkcija $q(z)$ opisuje širjenje snopa v prečni smeri, $\phi(z)$ pa opisuje počasno spreminjanje faze snopa vzdolž osi $z$. Vstavimo nastavek (enačba 3.10) v obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Zaenkrat se omejimo le na radialno simetrične rešitve in v cilindričnih koordinatah zapišemo

$$\nabla_\perp^2 \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2}\right)\psi \tag{3.11}$$

in

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(-\frac{ikr^2}{2q^2} q(z)' - i\phi'\right)\psi. \tag{3.12}$$

Tako iz obosnega približka (enačba 3.5) sledi

$$\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} = ik\left(\frac{ikr^2}{q^2} q(z)' + 2i\phi'\right). \tag{3.13}$$

Gornja zveza mora veljati pri vsakem $r$, zato so koeficienti pri $r^2$ na obeh straneh enačbe enaki in členi brez odvisnosti od $r$ prav tako. Sledi

$$q(z)' = 1 \qquad \text{in} \qquad \phi' = -\frac{i}{q}. \tag{3.14}$$

Z integracijo dobimo najprej

$$q = z - iz_0, \tag{3.15}$$

kjer smo z $-iz_0$ označili integracijsko konstanto. Integriramo še enačbo za fazo

$$\phi = \int_0^z -\frac{idz}{z - iz_0} = -i\ln(1 + i\frac{z}{z_0}). \tag{3.16}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \psi &= \exp\left(i\frac{kr^2}{2(z-iz_0)}\right)\exp\left(-\ln(1+i\frac{z}{z_0})\right) = \\ &= \frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}}\exp\left(-\frac{kr^2 z_0}{2(z_0^2+z^2)} + \frac{ikr^2 z}{2(z_0^2+z^2)}\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Najprej podrobneje poglejmo realni del eksponenta, ki opisuje širjenje snopa. Polmer snopa $w$, ki je funkcija koordinate $z$, opišemo z enačbo

$$w^2 = \frac{2z_0}{k}\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right). \tag{3.18}$$

V izhodišču pri $z = 0$ je snop najožji in pravimo, da je tam grlo snopa. Polmer snopa v grlu označimo z $w_0$ in zapišemo hiperbolično zvezo $w(z)$

$$\boxed{w^2 = w_0^2\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right).} \tag{3.19}$$

Pri tem velja

$$w_0^2 = \frac{2z_0}{k} \tag{3.20}$$

oziroma

$$\boxed{z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}.} \tag{3.21}$$

Dolžina $z_0$ je razdalja, pri kateri preide snop v asimptotično enakomerno širjenje. Čeprav smo vpeljali grlo kot najožji del snopa (pri $z = 0$), uporabljamo izraz grlo tudi za celotno območje, znotraj katerega se snop ne razširi znatno. Njegovo dolžino določa ravno parameter $z_0$, tako da je dolžina celotnega grla $2z_0$. Območju grla pravimo območje bližnjega polja ali Rayleighovo območje in dolžini $z_0$ Rayleighova dolžina[1]. Dolžina $z_0$ označuje tudi oddaljenost od grla, pri kateri začne veljati Fraunhoferjev uklonski približek.

Slika 3.2: Gaussov snop s karakterističnimi parametri

Zapišimo še kot divergence snopa v velikih oddaljenostih. Polovični kot širjenja je

$$\vartheta = \lim_{z\to\infty} \frac{dw}{dz} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.22}$$

Celotna divergenca snopa pa

$$\boxed{\theta = 2\frac{w_0}{z_0} = \frac{2\lambda}{\pi w_0}.} \tag{3.23}$$

Izraza za območje bližnjega polja (enačba 3.21) in divergenco (enačba 3.22) sta v skladu z ocenama, ki smo ju napravili v začetku poglavja (enačbi 3.1 in 3.2). Faktor $1/\pi$ je značilen za Gaussov snop, ki ima od vseh možnih oblik najmanjšo divergenco.

Za določanje kakovosti dejanskega laserskega snopa in njegovega odstopanja od idealnega Gaussovega snopa se pogosto vpelje faktor $M^2$

$$\theta = M^2 \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.24}$$

Dobri laserji dosegajo vrednost $M^2 \sim 1$, pri močnejših trdninskih ali polprevodniških laserjih pa je lahko $M^2 \sim 30$ ali več. V grobem velja, da $M^2$ narašča z močjo laserja in oblika snopa močnih laserjev navadno znatno odstopa od oblike idealnega Gaussovega snopa.

[1] Angleški fizik in nobelovec John William Strutt, 3. baron Rayleighški; lord Rayleigh, 1842–1919.

Vrnimo se k imaginarnemu delu eksponenta v enačbi (3.17). Vpeljemo količino

$$R = z\left(1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right), \tag{3.25}$$

ki meri krivinski radij valovnih front pri oddaljenosti od grla $z$. To najlažje uvidimo, če zapis imaginarnega dela primerjamo z zapisom za krogelni val, razvit po majhnih odmikih $r$ od osi $z$

$$\frac{1}{R}e^{ikR} = \frac{1}{R}e^{ik\sqrt{z^2+r^2}} \approx \frac{1}{R}e^{ikz+ikr^2/2R}. \tag{3.26}$$

Upoštevali smo, da je na osi $z = R$.

**Naloga 3.3.1** Pokaži, da je največja ukrivljenost valovnih front snopa (in s tem najmanjši $R$) ravno pri $z = \pm z_0$. Izračunaj še ukrivljenost front v grlu in v veliki oddaljenosti od grla.

Na sliki (3.3) so prikazane valovne fronte ravnega vala, Gaussovega snopa (enačba 3.29) in krogelnega vala (enačba 3.26). Vidimo, da je v grlu Gaussov snop podoben ravnemu valu (ukrivljenost front je zelo majhna in $R \to \infty$). Za velike oddaljenosti krivinski radij valovnih front postaja kar enak oddaljenosti $z$. Snop je tako podoben delu krogelnega vala, le da je faza Gaussovega snopa zamaknjena za $\pi/2$ glede na krogelni val.

Slika 3.3: Ravni val, Gaussov snop ter krogelni val. V grlu je Gaussov snop podoben ravnemu valu, pri velikih oddaljenostih od grla pa krogelnemu valu.

Ostane še faktor pred eksponentom v izrazu (3.17). Ta faktor meri zmanjševanje amplitude električne poljske jakosti v snopu in s tem poskrbi za ohranitev energijskega toka ob širjenju žarka, poleg tega pa še dodatno spremeni fazo. Zapišemo ga v obliki

$$\frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{z}{z_0})^2}}e^{-i\eta(z)} = \frac{w_0}{w}e^{-i\eta(z)}, \tag{3.27}$$

pri čemer je

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.28}$$

Dodatna faza $\eta$, imenujemo jo tudi Gouyeva faza[2], je posledica povečane fazne hitrosti valovanja, kadar je valovanje omejeno v prečni smeri. Podoben pojav bomo srečali tudi pri valovanju, ki je omejeno v valovode (poglavje 10).

S tem lahko končno zapišemo izraz za električno poljsko jakost osnovnega Gaussovega snopa[3]

$$E(r,z,t) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{ikz-i\omega t} e^{-r^2/w^2(z)} e^{ikr^2/2R(z)} e^{-i\eta(z)}. \tag{3.29}$$

Intenziteta svetlobe je sorazmerna z $E(r,z)E^*(r,z)$ in zanjo velja

$$I(r,z) = I_0 \frac{w_0^2}{w^2(z)} e^{-2r^2/w^2(z)}. \tag{3.30}$$

Slika 3.4: Upodobitev intenzitete svetlobe v Gaussovem snopu za $z > 0$

**Naloga 3.3.2** Pokaži, da je celotna svetlobna moč v snopu enaka $P = \frac{1}{2}\pi w_0^2 I_0$.

Povejmo še nekaj o parametru $q(z)$, ki smo ga uporabili pri izračunu Gaussovega snopa v nastavku (enačba 3.10). Spomnimo se, da parameter $q$ narašča linearno z oddaljenostjo od grla

$$q(z) = z - iz_0. \tag{3.31}$$

Parameter $q$ imenujemo kompleksni krivinski radij, njegov inverz pa kompleksna ukrivljenost

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} + i\frac{2}{kw^2}. \tag{3.32}$$

**Naloga 3.3.3** Uporabi enačbi (3.21 in 3.25) in izpelji gornji izraz za kompleksno ukrivljenost.

Izkazalo se bo, da je kompleksni krivinski radij zelo uporaben pri obravnavi preslikav Gaussovih snopov z lečami.

[2]Francoski fizik Louis Georges Gouy, 1854–1926.
[3]Nemški matematik, fizik in astronom Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.

## 3.4 Snopi višjega reda

Osnovna rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5) je Gaussov snop (enačba 3.29). Poleg te rešitve obstaja še veliko drugih rešitev, prav tako omejenih v prečni smeri. V kartezičnih koordinatah tako rešijo obosno valovno enačbo Hermite-Gaussovi snopi[4]

$$\psi_{n,m}(x,y) = \frac{w_0}{w} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left(\frac{ik(x^2+y^2)}{2q} - i\eta_{n,m}\right), \tag{3.33}$$

kjer so $H_n$ Hermitovi polinomi stopnje $n$ (npr. $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$ ...). V to se lahko prepričamo, če izraz vstavimo v obosno valovno enačbo (enačba 3.5) in upoštevamo zvezo med Hermitovimi polinomi

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \tag{3.34}$$

Osnovni Gaussov snop je očitno poseben primer gornje rešitve za $n = m = 0$. Polmer snopa $w(z)$ in kompleksni krivinski radij $q(z)$ sta za vse $n$ in $m$ enaka kot za osnovni snop in podana z enačbama (3.19) in (3.31). Razlika je v fazi, ki je odvisna tudi od $n$ in $m$

$$\eta_{n,m}(z) = (n+m+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.35}$$

Nekaj višjih redov Hermite-Gaussovih snopov je na sliki (3.5), kjer rišemo $|\psi_{n,m}(x,y,0)|$. Indeksa $n$ in $m$ določata število vozlov v prečnih smereh $x$ in $y$, širina snopa pa narašča z $n$ in $m$.

Slika 3.5: Prečni profil absolutne vrednosti električne poljske jakosti Hermite-Gaussovih snopov v grlu za različne vrednosti $(n,m)$

**Naloga 3.4.1** Pokaži, da za Hermite-Gaussove snope višjih redov efektivni polmer snopa narašča sorazmerno s korenom iz števila prečnih vozlov $w_{eff} \propto w\sqrt{n+m}$.
Namig: pri zapisu prečne odvisnosti polja upoštevaj le vodilni člen Hermitovih polinomov in določi razdaljo od središča snopa, pri kateri je amplituda polja $\psi$ največja.

[4] Francoski matematik Charles Hermite, 1822–1901.

Hermite-Gaussovi snopi (enačba 3.33) tvorijo popoln ortogonalen sistem funkcij koordinat $x$ in $y$

$$\int \psi^*_{n,m}(x,y)\psi_{n',m'}(x,y)\,dxdy = \pi w_0^2\, 2^{n+m-1} n!\, m!\, \delta_{n,n'}\, \delta_{m,m'}. \tag{3.36}$$

Polje nekega valovanja, ki ga poznamo v ravnini $z = 0$, lahko pri poljubnem $z$ izračunamo z razvojem po Hermite-Gaussovih snopih. Pri tem je izbira polmera grla $w_0$ poljubna, bo pa seveda vplivala na hitrost konvergence razvoja. Na tak način lahko obravnavamo uklon na odprtini, kjer je očitno smiselno vzeti $w_0$ približno enak dimenziji odprtine. Dobljeni rezultat je enako natančen kot Fresnelov uklonski integral.

Pri velikih $z$, kjer velja Fraunhoferjeva uklonska teorija, je polje Fouriereva transformiranka polja pri $z = 0$. Hermite-Gaussovi snopi ohranjajo prečno obliko, ki pa se z naraščajočim $z$ širi. To je v skladu s tem, da je Fouriereva transformiranka Hermite-Gaussove funkcije $H_n(x)e^{-x^2/2}$ kar Hermite-Gaussova funkcija.

V cilindričnih koordinatah imajo snopi višjega reda obliko Laguerre-Gaussovih snopov[5]

$$\psi_{p,l}(r,\varphi,z) = \frac{w_0}{w}\left(\frac{\sqrt{2}r}{w}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) e^{\pm il\varphi} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q} - i\eta_{p,l}\right), \tag{3.37}$$

kjer so $L_p^l$ pridruženi Laguerrovi polinomi (npr. $L_0^l(x) = 1, L_1^l(x) = -x+l+1, L_2^l(x) = x^2/2 - (l+2)x + (l+2)(l+1)/2$ ...) in

$$\eta_{p,l}(z) = (2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.38}$$

Podobno kot je v kartezičnem primeru red polinoma določal število prečnih ničel, določa $p$ v cilindričnem primeru število vozelnih črt, kjer je gostota svetlobnega toka enaka nič. Na sliki (3.6) je prikazanih nekaj oblik amplitud $|\Re\psi_{p,l}(r,\varphi,0)|$. Pri zapisu intenzitete, ki je sorazmerna s $\psi\psi^*$, člen s kotno odvisnostjo $\exp(il\varphi)$ odpade in slike intenzitete Laguerre-Gaussovih snopov so radialno simetrične.

Slika 3.6: Prečni profil realnega dela električne poljske jakosti Laguerre-Gaussovih snopov v grlu za različne vrednosti $(p,l)$

Navadno želimo, da iz laserja izhaja čim čistejši osnovni snop, vendar lahko pogosto opazimo tudi snope višjega reda. Da dobimo le osnovni snop, je treba posebej paziti pri konstrukciji laserja.

[5] Francoski matematik Edmond Nicolas Laguerre, 1834–1886.

Valovne fronte Laguerre-Gaussovih snopov imajo pri $l \neq 0$ obliko vijačnic. Poyntingov vektor pri njih ni vzporeden z osjo žarka, ampak ima komponento tudi v prečni smeri. Ta spreminja smer, zato pride do pojava vrtilne količine v smeri osi snopa in snop na snov deluje z navorom. Pravimo, da Laguerre-Gaussovi snopi nosijo t.i. tirno vrtilno količino. V kvantni mehaniki funkcija $\psi_{p,l}$ predstavlja foton s tirno vrtilno količino $L = \hbar l$, medtem ko leva in desna cirkularna polarizacija predstavljata spin fotona.

Slika 3.7: Valovna fronta Laguerre-Gaussovega snopa

## 3.5 Besslov snop

Poglejmo še poseben primer omejenega snopa, to je Besslov snop[6]. Nastavek za eksaktno rešitev valovne enačbe (enačba 1.13), pri čemer obravnavamo polje skalarno, naj bo

$$E = E_0 \psi(x,y) e^{i\beta z - i\omega t}. \tag{3.39}$$

Funkcija $\psi$ mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla_\perp^2 \psi + k_\perp^2 \psi = 0 \tag{3.40}$$

pri $k_\perp^2 = k^2 - \beta^2$. V cilindričnih koordinatah ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) se enačba prepiše v

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k_\perp^2 \psi = 0. \tag{3.41}$$

Rešitve gornje enačbe so s faznim faktorjem pomnožene Besslove funkcije

$$\psi_m(r,\varphi) = J_m(k_\perp r) e^{im\varphi}, \tag{3.42}$$

kjer je $J_m$ Besslova funkcija, $m$ pa celo število. Za $m = 0$ je rešitev osnovi Besslov snop

$$E(r,z,t) = E_0 J_0(k_\perp r) e^{i\beta z - i\omega t}. \tag{3.43}$$

Valovne fronte Besslovega snopa so ravne in snop nima divergence. Vendar pa Besslov snop ni omejen v pravem smislu. Za velike oddaljenosti od osi snopa $r$ intenzitetni profil namreč pojema kot $I \propto J_0^2(k_\perp r) \sim (2/\pi k_\perp r)\cos^2(k_\perp r - \pi/4)$. Energija takega snopa ni omejena znotraj efektivnega radija, kot je to pri Gaussovih snopih. Za konstrukcijo Besslovih snopov bi (tako kot za konstrukcijo ravnega vala) potrebovali neskončno energije, kar je seveda nemogoče. Lahko pa ustvarimo dobre približke Besslovih snopov, ki imajo pomembne in uporabne lastnosti.

[6] Nemški astronom, matematik in fizik Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846.

Slika 3.8: Prečni presek in profil intenzitete Besslovega snopa

Z uporabo stožčaste leče (aksikona) lahko Gaussov snop preoblikujemo v približek Besslovega snopa (slika 3.9). Na plašču stožčaste leče se namreč Gaussov snop zlomi in valovni vektorji nastalega snopa opisujejo stožec, kar je sicer lastnost Besslovih snopov. Dobljeni snop je približek Besslovega snopa, vendar le na določenem območju, dolgem $z_{max}$. Znotraj tega območja je divergenca snopa praktično enaka nič. Poleg manjše divergence imajo ti snopi še lastnost regeneracije. To pomeni, da se snop v senčni strani za objektom, ki ga osvetljuje (na primer v optični pinceti), regenerira. Profil snopa v senčni strani (daleč stran od objekta) je tako enak profilu snopa pred objektom.

Slika 3.9: Nastanek približka Besslovega snopa na stožčasti leči

## 3.6 Transformacije snopov z lečami

Vrnimo se h Gaussovim snopom in poglejmo, kaj se zgodi z njimi pri prehodu skozi optične elemente. Začnemo z enostavno tanko lečo z goriščno razdaljo $f$. V geometrijski optiki je krivinski radij krogelnega vala, ki izhaja iz točke na osi, kar enak razdalji do točke. Leča točko na optični osi preslika v točko na osi, od tod pa sledi, da se krogelni val s krivinskim radijem $R_1$ po prehodu skozi lečo spremeni v val s krivinskim radijem $R_2$. Pri tem velja zveza

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}. \tag{3.44}$$

Dogovorimo se, da je krivinski radij v točki $z$ pozitiven, če je središče krožnice pri $z' \leq z$.

Kako pa je z Gaussovim snopom? Polmer snopa $w$ se pri prehodu skozi tanko lečo ne spremeni, zato velja po enačbah (3.32) in (3.44) za kompleksni krivinski radij tik pred lečo in tik za njo

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f}. \tag{3.45}$$

Kompleksni krivinski radij $q$ je po enačbi (3.31) linearna funkcija koordinate $z$ in za opis Gaussovega snopa zadošča, če v neki točki $z$ poznamo $q$. Iz realnega dela določimo ukrivljenost front, iz imaginarnega pa polmer snopa. Enačba (3.45) torej zadošča za račun prehoda snopa skozi poljuben sistem leč brez aberacij.

Kot primer poglejmo, kako z zbiralno lečo zberemo Gaussov snop.

Slika 3.10: Prehod Gaussovega snopa skozi tanko lečo. Grlo velikosti $w_{01}$ v oddaljenosti $x_1$ od gorišča leče $F$ se preslika v grlo velikosti $w_{02}$ v oddaljenosti $x_2$ od gorišča leče $F$.

Vpadni snop naj ima grlo s polmerom $w_{01}$ in parametrom $z_{01} = \pi w_{01}^2/\lambda$. Lega grla je v točki, ki je za $x_1$ oddaljena od levega gorišča leče $F$ (slika 3.10). Naj bosta

$$q_1^F = x_1 - iz_{01} \qquad \text{in} \qquad q_2^F = -x_2 - iz_{02} \tag{3.46}$$

kompleksna krivinska radija v levem in desnem gorišču, pri čemer je koordinatna os $z$ usmerjena v desno, gledamo pa referenčno glede na lego grla vsakega posameznega snopa. Za vrednosti $q$ tik pred lečo in tik za njo velja tudi

$$q_1 = q_1^F + f \qquad \text{in} \qquad q_2 = q_2^F - f. \tag{3.47}$$

Od tod z uporabo enačbe (3.45) izpeljemo zvezo za $q$ v goriščih v kompaktni obliki

$$\boxed{q_1^F q_2^F = -f^2.} \tag{3.48}$$

Enačba je po obliki podobna enačbi za oddaljenost slike od gorišča v geometrijski optiki, pomen pa ima drugačen. Uporabimo enačbi (3.46) in zapišimo posebej realni in imaginarni del

$$x_1 x_2 = f^2 - z_{01} z_{02} \qquad \text{in} \qquad \frac{x_1}{z_{01}} = \frac{x_2}{z_{02}}. \tag{3.49}$$

Dobimo enačbi za preslikavo Gaussovega snopa z lečo z goriščno razdaljo $f$. Prva enačba

$$\boxed{x_2 = \frac{x_1 f^2}{x_1^2 + z_{01}^2}} \tag{3.50}$$

določa lego grla preslikanega snopa na desni strani leče, druga pa povečavo

$$\boxed{\frac{w_{02}}{w_{01}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}.} \tag{3.51}$$

Enačba (3.50) se ujema z izrazom za preslikavo točke v geometrijski optiki le, kadar je $z_{01} \ll x_1$. Kadar je $z_{01} \gg f$, je val na leči pri vsakem $x_1$ skoraj raven in $x_2 \to 0$, kar pomeni, da leži grlo na desni strani v gorišču. V praksi za Gaussove snope, ki izhajajo iz laserjev, pogosto ne velja ne prva ne druga limita, zato je treba uporabiti zapisani izraz (enačba 3.50). Tudi velikost polmera grla na desni, podana z enačbo (3.51), je precej drugačna kot v geometrijski optiki.

Za primer vzemimo snop iz He-Ne laserja (valovna dolžina 632,8 nm), ki ima grlo s polmerom $w_{01} = 0,5$ mm na izhodnem ogledalu in je 50 cm oddaljeno od leče z goriščno razdaljo $f = 25$ cm. Za tak snop je $z_{01} = 124$ cm. Po enačbi (3.50) leži grlo za lečo v oddaljenosti 1 cm od gorišča in torej 26 cm za lečo, po enačbi (3.51) pa izračunamo polmer $w_{02} = 100$ µm. Enačbe geometrijske optike bi dale popolnoma napačen položaj grla 50 cm za lečo, polmer grla pa 0,5 mm. Po drugi strani bi približek, da je vpadni snop kar raven, dal grlo na desni v gorišču s približno pravim polmerom. Zakaj da približek ravnih valov bolj pravilen rezultat, lahko hitro uvidimo, če pogledamo Rayleighovo dolžino snopa $z_{01}$: snop vpada na lečo še v območju bližnjega polja ($x_1 + f < z_{01}$), kjer je približno oblike ravnih valov.

Če postavimo gorišče leče v grlo snopa ($x_1 = 0$), je grlo na desni strani tudi v gorišču ($x_2 = 0$). Razmerje polmerov grl na eni in drugi strani leče lahko izračunamo

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{x_2}{x_1} = \frac{f^2}{z_{01}^2} \qquad \text{in} \qquad \frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f}{z_{01}}. \tag{3.52}$$

Velikost grla na desni strani je tako

$$w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01}}. \tag{3.53}$$

Če želimo doseči kar se da majhno grlo po prehodu skozi lečo, mora biti polmer vpadnega snopa kar se da velik. Vpadni snop je tako smiselno razširiti, vendar je polmer snopa lahko največ enak polmeru leče $a$. Najmanjša velikost grla, ki jo še lahko dosežemo z zbiralno lečo, je tako

$$\boxed{w_{02\,\mathrm{min}} = \frac{\lambda f}{\pi a} \sim \lambda.} \tag{3.54}$$

Dobri mikroskopski in fotografski objektivi dosegajo $f/a \simeq 1$, zato je mogoče z njimi Gaussov snop zbrati v piko velikosti $\sim \lambda$.

Omenili smo, da je treba za dosego majhnega polmera grla za lečo snop pred lečo čim bolj razširiti. Razširitev vpadnega snopa naredimo s teleskopom (slika 3.11), katerega značilnost je, da je razmik med lečama enak vsoti goriščnih razdalj leč in zato gorišči leč sovpadata. Povečava teleskopa je pri taki postavitvi leč enaka razmerju med goriščnima razdaljama (glej nalogo 3.6.1).

Slika 3.11: Prehod Gaussovega snopa skozi teleskop iz leč z goriščnima razdaljama $f_1$ in $f_2$. Pri teleskopu gorišči leč sovpadata.

**Naloga 3.6.1** Dve leči z goriščnima razdaljama $f_1$ in $f_2$ naj bosta na medsebojni razdalji $d = f_1 + f_2$. Pokaži, da je povečava takega teleskopa enaka

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f_2}{f_1}. \tag{3.55}$$

## 3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki

Preden se lotimo splošnejšega zapisa preslikav Gaussovega snopa, se spomnimo, kako obravnavamo preslikave v geometrijski optiki. Slika nastane kot presečišče žarkov, ki izhajajo iz točke predmeta pred optičnim sistemom. Žarek je pravokoten na valovne ploskve, pri čemer moramo vzeti še limito, ko gre valovna dolžina proti nič. Ukrivljenost valovne fronte je neposredno povezana s spreminjanjem naklona žarkov, pri čemer bomo privzeli, da so nakloni žarkov glede na os majhni.

Žarek v izbrani ravnini $z$ lahko opišemo z dvema parametroma: oddaljenostjo $y$ od osi in naklonom $\vartheta$ glede na os sistema. Ti dve količini sta med seboj neodvisni in ju sestavimo v vektor

$$\begin{bmatrix} y \\ \vartheta \end{bmatrix}. \tag{3.56}$$

Preslikavo žarka zapišemo kot matriko, ki deluje na vpadni vektor in ga preslika v izhodni vektor (slika 3.12)

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.57}$$

Slika 3.12: Preslikave žarkov lahko obravnavamo z matrikami. Optični element, ki ga predstavlja matrika $M$, preslika žarek $(y_1, \vartheta_1)$ v $(y_2, \vartheta_2)$.

Matrike $M$ so na splošno oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{3.58}$$

zato jih imenujemo tudi matrike ABCD. Poglejmo nekaj primerov.

Pri premiku za $d$ vzdolž osi se zaradi končnega naklona spremeni odmik od osi, naklon pa ostane enak

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + d\vartheta_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

Matrika za premik $d$ vzdolž osi $z$ je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

Poglejmo še matriko za prehod skozi lečo. Pri prehodu skozi tanko lečo se spremeni nagib žarka. Če je žarek pred lečo vzporeden z osjo, gre za lečo skozi gorišče, zato

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -\frac{y_1}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Pri tem koeficientov $B$ in $D$ še ne poznamo. Določimo jih iz drugega pogoja, ki pravi, da se žarek, ki gre skozi lečo na osi, ne spremeni

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.63}$$

Sledi $B = 0$ in $D = 1$. Matrika za prehod skozi lečo je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.64}$$

Podobno izpeljavo kot za prehod skozi lečo naredimo za odboj na sferičnem zrcalu s krivinskim radijem $R$. Pripadajoča matrika je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.65}$$

pri čemer je $R > 0$ za konkavna zrcala. Matrika za odboj na ravnem zrcalu je identiteta.

Matriko sestavljene optične naprave zapišemo kot produkt matrik posameznih komponent. Pri tem moramo paziti na vrstni red množenja, saj množenje matrik ni komutativno. Matriko preslikave z dvema optičnima elementoma, pri čemer žarek najprej preide element z indeksom 1 in nato element z indeksom 2, zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2A_1 + B_2C_1 & A_2B_1 + B_2D_1 \\ C_2A_1 + D_2C_1 & C_2B_1 + D_2D_1 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

V sistemu z več elementi zapišemo produkt matrik za vse elemente, pri čemer ne smemo pozabiti na premike med elementi.

Poglejmo primer. Žarek naj najprej prepotuje razdaljo $d$, nato pa ga usmerimo na tanko lečo z goriščno razdaljo $f$. Matrika za celoten prehod je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix}. \tag{3.67}$$

★ Opisani matrični formalizem je zelo prikladen predvsem za računanje prehoda svetlobe skozi zapletene optične sisteme, saj ga je prav lahko izvesti z računalnikom. Poleg tega je enolično povezan z matričnim formalizmom izračuna kompleksne ukrivljenosti Gaussovih snopov, zato omogoča preprost prenos rezultatov geometrijske optike v optiko snopov.

## 3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija

Poskusimo zdaj zapisati podoben matrični formalizem še za kompleksne krivinske radije. Za opis Gaussovega snopa zadošča, da v izbrani ravnini $z$ poznamo kompleksni krivinski radij $q$. Vemo, da je $q$ linearna funkcija premika po $z$ (enačba 3.31). Izračunali smo tudi že, kako se $q$ spremeni pri prehodu skozi tanko lečo (enačba 3.45).

Pri premiku iz ravnine $z_1$ v ravnino $z_2$, ki je premaknjena za $d$, se $q$ spremeni

$$q_2 = q_1 + d. \tag{3.68}$$

Po enačbi (3.45) je pri prehodu skozi lečo

$$q_2 = \frac{q_1 f}{f - q_1} = \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1}. \tag{3.69}$$

Premik in leča dasta skupaj

$$q_2 = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1 + d}{f} + 1} = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1}{f} - \frac{d}{f} + 1}. \tag{3.70}$$

V vseh treh primerih lahko transformacijo kompleksnega krivinskega radija $q$ zapišemo v obliki ulomljene linearne preslikave

$$\boxed{q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}.} \tag{3.71}$$

Ko koeficiente preslikave razvrstimo v matriko

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

in iz gornjih enačb razberemo koeficiente matrik za opisane preslikave, vidimo, da so povsem enaki koeficientom matrik ABCD, ki jih poznamo iz geometrijske optike. Hitro lahko tudi preverimo, da je matrika za premik in lečo, ki jo dobimo iz preslikave (enačba 3.70), enaka produktu matrike za premik in matrike za lečo (enačba 3.67).

Omenimo še eno lastnost matrik ABCD. Kadar po prehodu skozi optične elemente snop svetlobe preide v snov z enakim lomnim količnikom kot je bil na začetku, je determinanta matrike ABCD enaka 1. V nasprotnem primeru je determinanta matrike enaka razmerju lomnih količnikov začetne in končne snovi.

$$\det(M) = AD - BC = \frac{n_1}{n_2}. \tag{3.73}$$

| Opis prehoda | Skica | Matrika za prehod |
|---|---|---|
| Prehod skozi prostor za $d$ | | $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| Prehod skozi mejo dveh snovi | | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$ |
| Prehod skozi konveksno ukrivljeno mejo $R > 0$ | | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1-n_2)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$ |
| Prehod skozi konveksno lečo $f > 0$ | | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$ |
| Odboj na konkavnem zrcalu $R > 0$ | | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$ |

Tabela 3.1: Matrike ABCD za nekaj osnovnih preslikav, ki veljajo tako v geometrijski optiki kot tudi za izračun preslikave kompleksnega krivinskega radija $q$ Gaussovih snopov.

**Naloga 3.8.1** Pokaži, da za naslednje prehode veljajo ustrezne matrike ABCD.

| | | |
|---|---|---|
| Prehod skozi prostor in lečo | | $\begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d}{f} \end{bmatrix}$ |
| Prehod skozi lečo z debelino $d$ in krivinskima radijema $R_1$ in $R_2$ | | $\begin{bmatrix} 1-\frac{d}{nf_1} & \frac{d}{n} \\ -\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1}-\frac{d}{nf_1f_2} & 1-\frac{d}{nf_2} \end{bmatrix}$ $f_i = \frac{R_i}{n-1}$ |
| Prehod skozi zaporedje plasti | | $\begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |

# 4. Optični resonatorji

Osnovni gradnik vsakega laserja je resonator. V njem je vzbujeno lastno nihanje, ki skozi delno prepustno steno resonatorja kot valovanje izhaja iz sistema. V tem poglavju bomo najprej spoznali optične resonatorje in kriterije za njihovo stabilno delovanje, nato pa izračunali lastne frekvence resonatorjev ter povezali spektralno širino črt izsevane svetlobe z izgubami v laserskem resonatorju.

## 4.1 Odprti resonatorji

Optični resonatorji so votline, v katerih je mogoče vzpostaviti stoječe svetlobno valovanje. Če vzbujamo v resonatorju valovanja z različnimi frekvencami, se pri nekaterih diskretnih frekvencah pojavi resonančno obnašanje. Te frekvence imenujemo lastne frekvence resonatorja. Zaradi dušenja imajo lastne frekvence končno frekvenčno oziroma spektralno širino, pri čemer je čas dušenja mnogo daljši od nihajne periode.

Optične resonatorje uporabljamo predvsem v dva namena:

1. V resonatorjih lahko ob razmeroma šibkem zunanjem vzbujanju nastane velika električna poljska jakost pri resonančni frekvenci. Za vzdrževanje konstantne amplitude lastnega nihanja mora zunanji vir zgolj pokrivati izgube v resonatorju. Če so te majhne, je zunanji vir lahko šibek, polje v resonatorju pa vseeno veliko.

2. Resonatorji delujejo kot filtri, ki prepuščajo le polje s točno določeno frekvenco in izbrano prostorsko odvisnostjo. Primer take uporabe je Fabry-Perotov interferometer, opisan v nadaljevanju.

★ Resonatorje poznamo z različnih področij, na primer akustične pri glasbilih ali mikrovalovne in radijske. V mikrovalovnem področju, kjer so valovne dolžine valovanja okoli 1 cm, so resonatorji zaprte kovinske votline z dimenzijami, ki so primerljive z valovno dolžino vzbujenega valovanja. Resonančne frekvence so v takem resonatorju med seboj dobro ločene in ni težko doseči enega samega lastnega nihanja v izbranem frekvenčnem intervalu.

V optiki so resonatorji navadno veliko večji od valovne dolžine svetlobe. Vzemimo kocko s stranico $L \gg \lambda$, v kateri je vzbujeno zelo veliko število lastnih nihanj. Število lastnih nihanj $N$ na frekvenčni interval $\Delta\nu$ zapišemo z zvezno gostoto stanj

$$N = 2\frac{1}{8}4\pi k^2 \Delta k \frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V \Delta\omega = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V \Delta\nu. \tag{4.1}$$

Do gornje enačbe smo prišli tako, da smo prešteli stoječa valovanja z velikostjo valovnega vektorja med $k$ in $k+\Delta k$: volumen pripadajoče krogelne lupine v pozitivnem oktantu $\frac{1}{8}4\pi k^2 \Delta k$ smo delili z volumnom $(\pi/L)^3$, ki pripada enemu stanju. Upoštevali smo tudi, da ima vsako lastno nihanje lahko dve polarizaciji.

Poglejmo primer. Izberimo osrednjo frekvenco $\nu = 3 \cdot 10^{14}$ Hz, ki ustreza valovni dolžini 1 µm, in širino frekvenčnega intervala $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz, ki je značilna za Dopplerjevo razširjeno emisijsko črto v plinu. Potem je v votlini s stranico $L = 1$ cm in prostornino $V = 1$ cm$^3$ število lastnih nihanj na izbran frekvenčni interval po enačbi (4.1) enako $N = 2,5 \cdot 10^8$. Če bi bile vse stene votline idealna zrcala, bi bil čas dušenja vseh lastnih nihanj približno enako dolg in vedno bi vzbujali zelo veliko število resonanc hkrati. Tak resonator bi bil neuporaben.

Hkratnemu vzbujanju velikega števila nihanj se izognemo z zmanjšanjem odbojnosti stranskih sten votline, saj tako povečamo dušenje stoječih valov v prečni smeri. Dušenje valov, ki so pravokotni na idealno odbojni končni steni, ostane nespremenjeno. Nazadnje lahko stranske stene povsem odstranimo, tako da stoječih valov v prečni smeri sploh ni več. Ostane le še nekaj valov, ki so pravokotni na končni steni. Takemu resonatorju pravimo odprti resonator (slika 4.1).

Slika 4.1: Levo: lastni nihajni načini odprtega resonatorja imajo diskretne vrednosti valovnih vektorjev $k_n$. Desno: žarki, ki niso pravokotni na zrcali, uidejo iz odprtega resonatorja.

Obravnavajmo odprte resonatorje podrobneje. V zaprti pravokotni votlini velikosti $a \times a \times L$ z idealno odbojnimi stenami so dovoljene vrednosti valovnega vektorja za lastna nihanja

$$\mathbf{k}_{l,m,n} = \left(\frac{l\pi}{a}, \frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{L}\right), \tag{4.2}$$

kjer so $l$, $m$ in $n$ cela števila, $L$ dolžina, $a$ pa prečna dimenzija resonatorja. Lastne krožne frekvence so

$$\omega_{l,m,n} = c|\mathbf{k}_{l,m,n}|. \tag{4.3}$$

Dolžina resonatorja $L$ je velika v primerjavi z $\lambda$ in zato je $n$ zelo veliko število. Če prečnih sten ni, mora biti $\mathbf{k}$ približno vzporeden z osjo $z$, zato morata biti $l$ in $m$ majhna. Tedaj lahko velikost valovnega vektorja razvijemo in krožno frekvenco zapišemo kot

$$\omega_{l,m,n} = c\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{l^2+m^2}{2n}\frac{L\pi}{a^2}\right). \tag{4.4}$$

Drugi člen v oklepaju je navadno le majhen popravek, tako da so lastne frekvence odprtih optičnih resonatorjev odvisne predvsem od števila vozlov v vzdolžni smeri. To število je navadno veliko, med $10^5$ in $10^7$. Možna so tudi lastna nihanja z nekaj vozli v prečni smeri, ki pa le malo vplivajo na lastne frekvence. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali predvsem lastna nihanja brez vozlov v prečni smeri in jih označili z enim samim indeksom $n$.

Razlika med frekvencama dveh zaporednih lastnih nihanj $n$ in $n+1$ je

$$\boxed{\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \quad \text{in} \quad \Delta\nu_n = \frac{c}{2L}.} \tag{4.5}$$

Pri dolžini resonatorja $L = 30$ cm je v frekvenčnem intervalu $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz le še $\Delta\nu/\Delta\nu_n = 6$ nihanj, ki jih je brez težav mogoče razločiti.

V zaprtih votlinah z zrcalnimi stenami obstajajo dobro določena lastna stanja pri poljubni obliki votline. To ne drži za odprte resonatorje. Da se pojavijo lastna nihanja z majhnimi izgubami, morata biti izpolnjena dva pogoja:

1. Snop žarkov mora po mnogih odbojih ostati ujet med zrcaloma resonatorja.

2. Polmer zrcala mora biti večji od polmera uklonsko razširjenega snopa, ki se širi od nasprotnega zrcala.

Resonatorje, ki zadoščajo gornjima pogojema, imenujemo stabilni resonatorji. Drugi pogoj lahko zapišemo tudi z enačbami, izhajajoč iz enačbe za oceno divergence (enačba 3.1):

$$\vartheta = \frac{\lambda}{a_1} < \frac{a_2}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_1 a_2}{\lambda L} > 1, \tag{4.6}$$

kjer sta $a_1$ in $a_2$ polmera zrcal resonatorja. Izrazu $F = a_1 a_2/\lambda L$ pravimo tudi Fresnelovo število (glej enačbo 1.62) in za stabilen resonator mora veljati $F > 1$. Laserji imajo pogosto $F \gg 1$, lahko tudi $F \sim 100$.

### Fabry-Perotov interferometer

Poglejmo resonator, omejen z dvema vzporednima ravnima zrcaloma z veliko odbojnostjo. Takemu sistemu pravimo Fabry-Perotov interferometer[1]. Da nastane med zrcaloma stoječe valovanje, mora biti razdalja med zrcaloma večkratnik polovične valovne dolžine (enačba 4.2)

$$L = \frac{n\lambda}{2}. \tag{4.7}$$

Prepustnost interferometra za ravni val, ki vpada pravokotno na zrcali z odbojnostjo $\mathscr{R}$, je

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2 kL} \tag{4.8}$$

in je prikazana na sliki (4.2).

Slika 4.2: Prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v odvisnosti od valovnega števila $k$ pri različnih odbojnostih zrcal $\mathscr{R}$.

Ko je frekvenca vpadnega valovanja ravno enaka lastni frekvenci resonatorja, je sistem v resonanci in $T = 1$. Širina resonance se z naraščajočo odbojnostjo zrcal $\mathscr{R}$ zmanjšuje. Spoznali bomo, da odbojnost zrcal določa tudi čas dušenja vzbujenega lastnega nihanja.

[1] Francoska fizika Maurice Paul Auguste Charles Fabry, 1867–1945, in Jean-Baptiste Alfred Perot, 1863–1925.

**Naloga 4.1.1** Pokaži, da je prepustnost Fabry-Perotovega interferometra, katerega zrcali imata odbojnost $\mathscr{R}$, enaka

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2\delta}, \tag{4.9}$$

kjer je $\delta = kL\cos\vartheta$, $L$ razmik med zrcaloma, $\vartheta$ vpadni kot, $k$ pa valovno število.

Prvemu pogoju za stabilnost ustrezajo v Fabry-Perotovem interferometru le žarki, ki so natanko pravokotni na zrcali. Čim sta zrcali le malo nevzporedni, stabilnih žarkov sploh ni več. Tak planparalelni interferometer torej deluje na meji stabilnosti. Z izpolnjevanjem drugega pogoja ni težav, saj morata biti pri na primer 30 cm dolgem resonatorju in valovni dolžini $0,5$ µm zrcali večji od $0,4$ mm, da zadostita pogoju, zapisanem v enačbi (4.6).

Bolj stabilni resonatorji so sestavljeni iz dveh konkavno ukrivljenih zrcal. Tedaj so žarki, ki potujejo pod majhnim kotom glede na osrednjo os, ujeti med zrcaloma in energija lastnih nihanj ostaja lokalizirana blizu osi.

## 4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih

V stabilnih resonatorjih s konkavnima zrcaloma pričakujemo, da so lastna nihanja omejena na bližino osrednje osi in zrcali znatno večji od polmera lastnega nihanja. Tedaj lahko za obravnavo električnega polja uporabimo obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Upoštevamo še zahtevo, da svetloba po odboju od zrcala konstruktivno interferira sama s sabo. Od tod izhaja robni pogoj, ki pravi, da se valovna fronta stoječega valovanja na zrcalu ujema z obliko zrcala, električno polje na površini zrcala pa je približno enako nič.

Slika 4.3: Gaussov snop v odprtem resonatorju s konkavno ukrivljenima zrcaloma s krivinskima radijema $R_1$ in $R_2$. Krivinski radij čela snopa se ujema s krivinskim radijem zrcal. Kadar $R_1 \neq R_2$, grlo snopa ne leži na sredini resonatorja.

V prečni smeri omejene rešitve obosne enačbe smo našli v obliki potujočih Gaussovih snopov (enačba 3.29). Podobno kot lahko zapišemo stoječe valovanje z vsoto valovanj, ki se širita v nasprotnih smereh, lahko stoječe snope zapišemo s superpozicijo snopov, ki se širita v različnih smereh ob osi. Da zadostimo robnim pogojem na zrcalih, se mora krivinski radij valovnih front snopa na zrcalih ujemati s krivinskima radijema zrcal $R_1$ in $R_2$ (slika 4.3). Pri tem sta neznanki polmer grla snopa $w_0$, ki je povezan s parametrom $z_0$, in lega grla.

Postavimo izhodišče osi $z$ v grlo, kot smo navajeni, tako da sta zrcali pri $z_1 < 0$ in $z_2 > 0$. Uporabimo enačbo za krivinski radij snopa $R$ (enačba 3.25) in zapišemo

$$-R_1 = z_1\left[1+\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2\right] \quad \text{in} \tag{4.10}$$

$$R_2 = z_2\left[1+\left(\frac{z_0}{z_2}\right)^2\right]. \tag{4.11}$$

Pri tem smo upoštevali, da je krivinski radij za konkavno zrcalo glede na pozitivno smer $z$ pozitiven. Prvo enačbo smo zapisali z negativnim predznakom pri $R_1$, zato da je krivinski radij pozitivno število. Veljati mora še

$$z_2 - z_1 = L. \tag{4.12}$$

Iz gornjih enačb najprej izračunamo razdaljo $z_1$, ki določa lego grla v resonatorju, nato pa parameter $z_0$, ki določa območje bližnjega polja in preko enačbe (3.21) enolično tudi polmer grla

$$z_0^2 = \frac{L(R_1-L)(R_2-L)(R_1+R_2-L)}{(R_1+R_2-2L)^2}. \tag{4.13}$$

Da je snop realen in omejen, mora biti $z_0^2 > 0$ in zato števec gornjega izraza pozitiven. Ta pogoj lahko po kratkem računu zapišemo v obliki stabilnostnega kriterija

$$0 < \left(1-\frac{L}{R_1}\right)\left(1-\frac{L}{R_2}\right) < 1. \tag{4.14}$$

Resonatorji, ki zadoščajo gornjemu pogoju, so stabilni.

**Naloga 4.2.1** Izhajajoč iz pogoja, da se na zrcalih krivinski radij valovnih front snopa ujema s krivinskim radijem zrcal (enačbi 4.10 in 4.11), izpelji kriterij za stabilno delovanje resonatorja (enačba 4.14).

Stabilnostni kriterij za resonatorje je najbolj nazorno predstaviti na diagramu, kjer na os $x$ nanašamo $L/R_1$, na os $y$ pa $L/R_2$. Na sliki (4.4) je stabilno območje delovanja resonatorjev, kot ga razberemo iz enačbe (4.14), označeno senčeno. Opazimo, da je možnih veliko različnih vrst stabilnih resonatorjev, ob tem da resonatorji, ki so sestavljeni iz dveh konveksnih zrcal, niso nikoli stabilni. Če je eno zrcalo ravno (plankonkavni resonatorji), je grlo Gaussovega snopa vedno na ravnem zrcalu. V primeru konveksno-konkavnega resonatorja leži grlo snopa izven resonatorja. Podrobneje si oglejmo nekaj posebnih primerov stabilnih resonatorjev.

### Simetrični resonatorji

Za simetrični resonator velja $R_1 = R_2 = R$. Na diagramu (slika 4.4) se taki resonatorji nahajajo na simetrali lihih kvadrantov pri $x = y$. Pri simetričnih resonatorjih je grlo v sredini resonatorja in enačba (4.13) se poenostavi v

$$z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(2R-L)L}. \tag{4.15}$$

Polmer grla v simetričnem resonatorju je enak

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\sqrt[4]{(2R-L)L}. \tag{4.16}$$

Slika 4.4: Resonator je stabilen, če sta parametra $L/R_1$ in $L/R_2$ znotraj osenčenega območja: (a) konfokalni resonator, (b) koncentrični resonator, (c) planparalelni resonator (Fabry-Perot), (d) konveksno-konkavni resonator in (e) plankonkavni resonator.

Po enačbi (3.19) lahko izračunamo še polmer snopa na ogledalu

$$w_1 = w_0\sqrt{\left(1+\left(\frac{L}{2z_0}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}\frac{R\sqrt{L}}{\sqrt{2R-L}}}. \tag{4.17}$$

Pri izbrani dolžini simetričnega resonatorja je polmer snopa na zrcalu najmanjši, kadar je $R = L$. Tedaj sovpadata geometrijski gorišči obeh zrcal, zato imenujemo tak resonator konfokalni. Hiter račun pokaže, da velja $z_0 = L/2$, snop od grla do zrcala pa se razširi za $w_1/w_0 = \sqrt{2}$.

**Naloga 4.2.2** Pokaži, da je polmer snopa na izhodnem zrcalu v simetričnem resonatorju z danima parametroma $R$ in $L$ najmanjši, kadar je resonator konfokalni.

Pri dejanskem načrtovanju laserjev velja dodatna omejitev, saj želimo ojačevalno sredstvo, ki je v resonatorju, čim bolj izkoristiti. Pogosto je zato polmer grla snopa razmeroma velik. Iz enačbe (4.16) sledi, da mora biti v tem primeru velik tudi krivinski radij zrcal. S tem pridobimo na ojačenju, po drugi strani pa se nekoliko poslabša stabilnost.

Poglejmo primer. Naj bo dolžina resonatorja laserja $L = 1$ m in valovna dolžina $\lambda = 633$ nm. Tedaj je v konfokalni geometriji po enačbi (4.16) polmer grla $w_0 = 0,32$ mm. Premer razelektritvene cevi je navadno nekaj milimetrov in približno tako debel mora biti tudi svetlobni snop, da dobro izkoristi ojačenje zaradi stimuliranega sevanja. Da bi pri isti dolžini laserja dobili grlo s premerom 2 mm, bi morali uporabiti zrcali s krivinskim radijem okoli 50 m. Primer kaže, da že majhna ukrivljenost zrcal zagotovi dokaj ozke snope.

★ Izkaže se, da so konfokalni resonatorji najmanj občutljivi na majhne zasuke zrcal. Pri zasuku zrcala se v navadnih stabilnih resonatorjih namreč premakne os, ki gre skozi krivinski središči obeh zrcal. Če želimo, da je največji odmik nove osi kar se da majhen, uporabimo konfokalne resonatorje.

Skrajna primera stabilnega simetričnega resonatorja sta koncentrični resonator, pri katerem sovpadata krivinski središči zrcal in $L = 2R$, in planparalelni resonator, pri katerem sta zrcali ravni. V prvem primeru gre po enačbi (4.16) polmer grla proti nič, v drugem pa raste sorazmerno z $R^{1/4}$. Pri ravnih zrcalih postanejo uklonske izgube na robovih znatne. Račun z Gaussovimi snopi tedaj ni več veljaven in treba je uporabiti pristope, ki jih bomo opisali v razdelku (4.6).

Poleg osnovnega Gaussovega snopa rešijo obosno enačbo tudi snopi višjega reda. Ti imajo enak parameter $z_0$ in enako ukrivljenost $R$, zato tudi taki snopi predstavljajo rešitve za polje v stabilnih resonatorjih. Vendar je pri enakem $w_0$ polmer snopa reda $n$ za približno $\sqrt{n}$-krat večji (glej nalogo 3.4.1). Če želimo, da iz laserja izhaja samo osnovni Gaussov snop[2] (ki ima najmanjšo divergenco pri danem $w_0$) pogosto uporabimo zaslonko, ki snope višjih redov poreže, ali kakšen drug element, npr. Fabry-Perotov etalon[3], ki poveča izgube za snope višjega reda.

★ Včasih se uporabljajo tudi nestabilni resonatorji, za katere ne obstajajo rešitve v obliki Gaussovih snopov. Taki resonatorji imajo velike izgube na robovih zrcal, ker žarki v njih niso ujeti. Uporabni so predvsem v laserjih z velikim ojačenjem. Njihova prednost je, da je cel volumen resonatorja enakomerno pokrit s svetlobo.

## 4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom

V prejšnjem razdelku smo izpeljali pogoj za stabilnost resonatorja, sestavljenega iz dveh zrcal s polmeroma $R_1$ in $R_2$, ki sta med seboj oddaljeni za $L$. Izhajali smo iz pogoja, da se ukrivljenost valovnih front na zrcalu ujema z ukrivljenostjo zrcal. Vendar so sistemi z zgolj dvema zrcaloma razmeroma redki. Pogosto so v resonatorju druge optične komponente, ki jih je treba upoštevati pri zapisu kriterija za stabilnost. Takrat si pomagamo z matrikami ABCD.

Izhajamo iz zahteve, da se v stabilnem resonatorju snop po enem celotnem obhodu preslika sam vase. Gaussov snop na neki točki v resonatorju zapišemo s kompleksno ukrivljenostjo $q$ (enačba 3.32). V najpreprostejšem primeru resonatorja snop prepotuje razdaljo do zrcala, se na njem odbije, prepotuje resonator v nasprotni smeri, se odbije od drugega zrcala in se vrne v izhodišče. V bolj zapletenih primerih je treba upoštevati še prehode skozi druge optične elemente. Matriko za celoten prehod zapišemo kot produkt matrik ABCD za posamezne prehode $M = M_N M_{N-1} ... M_2 M_1$. Končni produkt za celoten obhod je matrika oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

kompleksni krivinski radij po obhodu pa je enak začetnemu

$$q_2 = \frac{Aq + B}{Cq + D} = q. \tag{4.19}$$

[2] Osnovni Gaussov snop imenujemo tudi $TEM_{00}$ – *Transverse Electromagnetic Mode*, transverzalno elektromagnetno valovanje.

[3] Razlika med Fabry-Perotovim interferometrom in etalonom je v tem, da je interferometer sestavljen iz premičnih zrcal, etalon pa je ploščica z nespremenljivo debelino. Pri izrazu za prepustnost etalona je treba upoštevati še lomni količnik ploščice.

Gornjo enačbo prepišemo v

$$Cq^2 + (D-A)q - B = 0. \tag{4.20}$$

Da je $w$ realen, mora biti $q$ kompleksen (enačba 3.32) in zato diskriminanta kvadratne enačbe negativna

$$(D-A)^2 + 4BC < 0. \tag{4.21}$$

Upoštevamo še, da je determinanta matrike $AD - BC = 1$ in pogoj za stabilnost zapišemo s koeficienti matrike $M$

$$-1 < \left(\frac{A+D}{2}\right) < 1. \tag{4.22}$$

**Naloga 4.3.1** Pokaži, da je za resonator z dolžino $L$ in s konkavnima zrcaloma s krivinskima radijema $R_1$ in $R_2$ pogoj za stabilnost (enačba 4.22) ekvivalenten pogoju (4.14).

★ Podoben, a malo bolj zapleten račun lahko naredimo tudi za resonatorje, v katerih se snop ne vrne v svojo začetno obliko po enem obhodu, ampak je teh obhodov $n$. V tem primeru zapišemo matriko $M$ kot produkt elementov v enem obhodu, celotna matrika pa je enaka $M^n$. Iz pogoja, da matrika ne divergira za velike $n$, izpeljemo pogoj za stabilnost, ki je natančno enak pogoju (4.22).

## 4.4 Resonančne frekvence

Doslej smo obravnavali le prostorsko obliko polja v resonatorju, ničesar pa še nismo povedali o časovni odvisnosti lastnih nihanj. Frekvence lastnih nihanj izpeljemo iz pogoja, da se mora faza snopa pri enem obhodu[4] spremeniti za mnogokratnik $2\pi$. Fazo za osnovni snop zapišemo po enačbi (3.29)

$$\phi = kz + \frac{kr^2}{2R} - \eta(z) = kz - \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \tag{4.23}$$

pri čemer smo se omejili na valovanje na osi pri $r = 0$. Razlika faze po obhodu je

$$\frac{\omega_n}{c} 2L - 2\left(\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right) = 2n\pi. \tag{4.24}$$

Člen v oklepaju je enak za vsa nihanja in le za delček valovne dolžine spremeni efektivno dolžino resonatorja. Ker dolžine resonatorja niti ne poznamo tako natančno, lahko ta prispevek zanemarimo. Iz istega razloga lahko izpustimo tudi spremembo faze na zrcalu. Od tod sledi znana enačba za resonančne frekvence

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{in} \quad \nu_n = \frac{nc}{2L}. \tag{4.25}$$

Konstantni členi, ki jih pri zapisu frekvence nismo upoštevali, ne vplivajo na razmik med dvema zaporednima lastnima frekvencama. Razlika med zaporednima lastnima frekvencama je tako v skladu z enačbo (4.5)

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L} \quad \text{in} \quad \Delta\nu_n = \frac{c}{2L}. \tag{4.26}$$

[4] Prelet resonatorja je prehod svetlobe od enega zrcala do drugega, obhod pa imenujemo prelet v obe smeri.

Za snope višjega reda, ki imajo vozle v prečni smeri, je fazni premik odvisen tudi od števila vozlov. Tako je na primer v cilindričnih koordinatah (enačba 3.38)

$$\eta_{p,l}(z) = (2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{4.27}$$

Resonančni pogoj zapišemo kot

$$\frac{\omega_{n,p,l}}{c}2L - 2(2p+l+1)\left(\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right) = 2n\pi. \tag{4.28}$$

Resonančne frekvence so torej odvisne tudi od števila prečnih vozlov (slika 4.6), kar je dodaten razlog, da v laserjih vzbujamo le osnovno lastno nihanje.

Zanimiv in praktično pomemben je primer konfokalnega resonatorja, pri katerem je $z_0 = L/2$ in $\arctan(L/2z_0) = \arctan(1) = \pi/4$. Resonančne frekvence so

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L}\left(n + \frac{1}{2}(2p+l+1)\right) \quad \text{in} \quad \nu_{n,p,l} = \frac{c}{2L}\left(n + \frac{1}{2}(2p+l+1)\right). \tag{4.29}$$

Snopi, pri katerih je $2p+l$ liho število, imajo iste resonančne frekvence kot osnovni snopi, pri sodih $2p+l$ pa se pojavijo še resonance na sredini med osnovnimi. Razmik med sosednjimi frekvencami je tako $\Delta\nu = c/4L$ in konfokalni interferometer se obnaša kot dvakrat daljši planparalelni. To lahko razumemo tudi iz geometrijske slike: žarek, ki vstopi v konfokalni resonator ali interferometer vzporedno z osjo, se šele po dveh obhodih vrne sam vase.

Slika 4.5: V konfokalnem resonatorju se žarek šele po dveh obhodih vrne sam vase.

Pri skoraj planparalelnem simetričnem resonatorju je $z_0 \gg L$, $\arctan(L/2z_0)$ lahko razvijemo, upoštevamo enačbo (4.15) in zapišemo

$$\omega_{n,p,l} = \frac{\pi c}{L}\left(n + (2p+l+1)\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2L}{R}}\right). \tag{4.30}$$

Ker je $L$ majhen v primerjavi z $R$, so resonance snopov nizkega prečnega reda zelo blizu resonancam osnovnih snopov. Poglejmo primer. Vzemimo simetrični resonator z dolžino $L = 1$ m in $R = 50$ m, valovna dolžina naj bo $\lambda = 500$ nm. Z uporabo enačbe (4.15) hitro lahko izračunamo $z_0 = 4{,}97$ m. Ker je pogoj $z_0 \gg L$ izpolnjen, lahko uporabimo gornji približek. Razlika med frekvencama dveh osnovnih snopov je $\Delta\nu_{n,p,l} = 150$ MHz, medtem ko je razlika med frekvencama dveh prečnih snopov $\Delta\nu_{n,p,l} = 9{,}5$ MHz.

Slika 4.6: Resonančne frekvence za skoraj planparalelni ($R \gg L$) resonator

## 4.5 Izgube v resonatorjih

Energija lastnega nihanja odprtega resonatorja ni konstantna, ampak se počasi zmanjšuje. Razlogov je več:

1. Odbojnost zrcal ni enaka 1. Tudi če bi znali narediti popolno odbojna zrcala, tak resonator ne bi bil uporaben, saj nihanja ne bi mogli sklopiti z zunanjim poljem. Če naj torej laser oddaja svetlobo, mora biti odbojnost vsaj enega od zrcal manjša od 1.

2. Na sredstvu in na optičnih elementih v resonatorju pride do absorpcije in sipanja svetlobe. Te izgube želimo navadno kar se da zmanjšati.

3. Uklonske izgube so odvisne od velikosti zrcal in velikosti snopa na njih. V dani geometriji imajo najmanjši polmer osnovni snopi, snopi višjega reda so širši, zato imajo večje uklonske izgube. Merilo za uklonske izgube je Fresnelovo število (enačba 4.6) $N_F = a^2/(L\lambda)$, kjer je $a$ polmer ogledal. Pri enakem $N_F$ je polmer snopa na izhodnem zrcalu najmanjši, če je resonator konfokalni, zato ima tak resonator tudi najmanjše uklonske izgube (glej nalogo 4.2.2). Navadno je $N_F$ znatno večji od 1 in so uklonske izgube zanemarljive.

Vse izgube lahko popišemo z razpadnim časom za energijo

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau}W, \tag{4.31}$$

in

$$W = W_0 e^{-2t/\tau}, \tag{4.32}$$

pri čemer $\tau$ imenujemo življenjski ali razpadni čas nihanj. Izguba energije na celoten obhod resonatorja je sestavljena iz izgub na zrcalih in drugih (predvsem notranjih) izgub

$$\Delta W = -(1-\mathscr{R}_1)W - (1-\mathscr{R}_2)W - \Lambda_0 W = -\Lambda W. \tag{4.33}$$

Z $\mathscr{R}_1$ in $\mathscr{R}_2$ smo označili odbojnosti zrcal, od katerih je navadno ena kolikor mogoče blizu 1. Parameter $\Lambda_0$ popiše absorpcijo in sipanje znotraj resonatorja ter morebitne uklonske izgube. Tipične vrednosti $\Lambda_0$ so do nekaj stotink. Celotne izgube združimo v parameter $\Lambda$.

Razpadni čas nihanja lahko neposredno povežemo z izgubami, če v enačbo (4.31) vstavimo čas enega obhoda $t = 2L/c$. Zapišemo

$$\frac{\Delta W}{W} = -\Lambda = -\frac{2}{\tau}\frac{2L}{c}, \tag{4.34}$$

od koder sledi

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\Lambda c}{4L} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{c}{4L}\left((1-\mathscr{R}_1) + (1-\mathscr{R}_2)\right), \tag{4.35}$$

kjer smo s

$$\tau_0 = \frac{4L}{\Lambda_0 c} \tag{4.36}$$

označili razpadni čas zaradi notranjih izgub.

Notranje izgube $\Lambda_0$ so navadno zelo majhne, odbojnost enega zrcala je $\mathscr{R}_1 \sim 1$, tako da je življenjski čas nihanj približno

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{4L}(1-\mathscr{R}_2). \tag{4.37}$$

Zaradi dušenja se energija lastnih nihanj eksponentno zmanjšuje, prav tako tudi amplituda jakosti električnega polja, ki pojema s karakterističnim časom $\tau$. Spekter eksponentno pojemajoče funkcije lahko izračunamo (glej nalogo 2.4.2) in dobimo Lorentzovo krivuljo s širino črte, ki ustreza ravno

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \tag{4.38}$$

Lastne krožne frekvence torej niso neskončno ozke, ampak imajo končno širino $2/\tau$. Poglejmo primer. Naj bodo notranje izgube na obhod $\Lambda_0 = 0,01$, eno zrcalo naj bo idealno, drugo naj ima odbojnost $\mathscr{R} = 0,93$. Dolžina resonatorja naj bo $L = 0,5$ m, valovna dolžina pa 500 nm. Tedaj je $1/\tau = 12 \cdot 10^6$ s$^{-1}$. Zanimivo je pogledati razmerje med razliko krožnih frekvenc $\Delta\omega_n$ (enačba 4.5) in širino resonance $2/\tau$. Za opisani primer velja $\Delta\omega_n \tau/2 \approx 80$.

★ Namesto razpadnega časa $\tau$ se za opis izgub pogosto uporablja dobrota resonatorja, ki jo vpeljemo kot razmerje med resonančno krožno frekvenco in širino črte

$$Q = \frac{\omega_n}{2\gamma} = \frac{\omega_n \tau}{2}. \tag{4.39}$$

Za tipične optične resonatorje je resonančna krožna frekvenca $\omega_n \sim 10^{15}$ s$^{-1}$, širina pa reda $1/\tau \sim 10^7$ s$^{-1}$. Faktor dobrote je tako $Q \sim 10^8$. Optični resonatorji imajo zelo velike faktorje dobrote!

Poglejmo še primer, ko so notranje izgube zanemarljive in sta odbojnosti obeh zrcal enaki. Potem sledi iz enačbe (4.35)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{2L}(1-\mathscr{R}). \tag{4.40}$$

Do istega rezultata pridemo tudi z razvojem izraza za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra (enačba 4.8) okoli vrha pri $\omega_n$

$$T = \frac{1}{1+\frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2 L\frac{(\omega-\omega_n)}{c}} \approx \frac{1}{1+\left(\frac{2}{(1-\mathscr{R})}\frac{L}{c}(\omega-\omega_n)\right)^2}, \tag{4.41}$$

kjer smo upoštevali še, da je odbojnost $\mathscr{R} \approx 1$. Rezultat je znana Lorentzova krivulja oblike

$$T = \frac{\gamma^2}{(\omega-\omega_n)^2+\gamma^2}, \tag{4.42}$$

od koder hitro razberemo

$$\frac{1}{\tau} = \gamma = \frac{c}{2L}(1-\mathscr{R}). \tag{4.43}$$

## 4.6 *Obravnava resonatorjev z uklonskim integralom

V nestabilnih resonatorjih stacionarna rešitev v obliki stoječega Gaussovega snopa ne obstaja. Zato je v takih resonatorjih rešitev za električno polje precej zahtevno poiskati. Ker pa je problem soroden uklonu, ga lahko obravnavamo z uklonsko teorijo.

Označimo jakost električnega polja v točki $P_1$ na prvem zrcalu z $E_1$. Polje na drugem zrcalu v točki $P_2$ lahko zapišemo s Kirchhoffovim uklonskim integralom (enačba 1.55)

$$E_2 = -\frac{i}{2\lambda}\int_1 E_1(P_1)\frac{e^{ikr}(1+\cos\vartheta)}{r}\,dS_1 \tag{4.44}$$

$$= \int_1 E_1(P_1)K(P_1,P_2)dS_1. \tag{4.45}$$

Integriramo po celotni prvi ploskvi, $r$ je razdalja med točkama $P_1$ in $P_2$, $\vartheta$ je kot med zveznico in normalo na zrcali v osi, druge faktorje pa smo pospravili v faktor

$$K(P_1,P_2) = -\frac{i}{2\lambda}\frac{e^{ikr}(1+\cos\vartheta)}{r}, \tag{4.46}$$

ki predstavlja jedro integralske enačbe. Polje na prvem zrcalu je na enak način povezano s poljem na drugem. Če naj zapisano polje predstavlja lastno nihanje resonatorja, mora biti po dveh odbojih sorazmerno začetnemu polju

$$E_1(P) = \gamma\int_1\int_2 E_1(P_1)K(P_1,P_2)K(P_2,P_1)\,dS_1\,dS_2. \tag{4.47}$$

Enačba (4.47) je homogena integralska enačba, katere lastne rešitve so iskana lastna nihanja elektromagnetnega polja v resonatorju. Kompleksne lastne vrednosti $\gamma$ določajo frekvenco in dušenje nihanj. Na splošno rešitev ni mogoče poiskati analitično in treba je uporabiti numerične metode. Najenostavnejša je iterativna metoda, pri kateri začnemo z nekim začetnim poljem in ponavljamo integracijo v enačbi (4.47), dokler se polje ne spreminja več.

Integralsko enačbo (enačba 4.47) je mogoče rešiti v posebnem primeru konfokalnega resonatorja. Privzemimo, da je brez izgub. Resonator je simetričen, zato se polje na obeh zrcalih lahko razlikuje kvečjemu za predznak.

Slika 4.7: Koordinatna sistema na zrcalih resonatorja

Vpeljemo kartezične koordinate na obeh zrcalih, kot kaže slika (4.7). Pričakujemo, da bo prečna razsežnost lastnega nihanja majhna v primerjavi z dolžino resonatorja $L$, zato lahko $r$ razvijemo, pri čemer se kvadratni členi ravno odštejejo zaradi ukrivljenosti zrcal. Ostaneta le še mešana člena

$$r \approx L - \frac{xx' + yy'}{L}. \tag{4.48}$$

V konfokalnem resonatorju je krivinski radij zrcal kar enak dolžini resonatorja. V imenovalcu jedra integrala (enačba 4.46) zato lahko $r$ nadomestimo z $L$. Koti med zveznico točk na obeh zrcalih in normalo na zrcali so majhni, zato je $\cos\vartheta \approx 1$.

Tako iz enačbe (4.45) sledi

$$E(x',y') = \pm\frac{ie^{ikL}}{\lambda L}\int E(x,y)\exp\left(\frac{-ik(xx'+yy')}{L}\right)dx\,dy. \tag{4.49}$$

Integracija poteka po celem zrcalu. Jedro integrala je produkt dveh faktorjev, ki vsebujeta vsak le $x'$ ali $y'$ koordinati. Zato poiščemo rešitev enačbe (4.49) v obliki produkta $E(x',y') = E_0 f(x')g(y')$. S tem nastavkom mora biti funkcija $f(x')$ rešitev enačbe

$$\alpha f(x') = \int f(x)\exp\left(\frac{-ikxx'}{L}\right)dx, \tag{4.50}$$

kjer je $\alpha$ še neznana konstanta. Meje integrala so od enega do drugega roba zrcala. Če je zrcalo dovolj veliko, pričakujemo, da je polje na robu dovolj majhno, da lahko meje vzamemo kar od $-\infty$ do $\infty$. Vpeljemo še brezdimenzijski koordinati

$$X = x\sqrt{k/L} \quad \text{in} \quad X' = x'\sqrt{k/L} \tag{4.51}$$

in dobimo

$$\alpha f(X') = \sqrt{\frac{L}{k}}\int_{-\infty}^{\infty} f(X)e^{-iXX'}\,dX \tag{4.52}$$

ter podobno enačbo za $g(Y')$. Enačba (4.52) pravi, da mora biti $f(X)$ podobna svoji Fourierevi transformiranki. Najpreprostejša funkcija s to lastnostjo je Gaussova funkcija

$$f(X) = \exp\left(-\frac{1}{2}X^2\right). \tag{4.53}$$

Polje na zrcalu ima tako po pričakovanju obliko Gaussovega snopa

$$E(x,y) = E_0\exp\left(-\frac{k(x^2+y^2)}{2L}\right). \tag{4.54}$$

Poglejmo še konstanto $\alpha$. Iz enačbe (4.52) sledi, da je njena vrednost $\alpha = \sqrt{2\pi L/k} = \sqrt{\lambda L}$. Postavimo zdaj izračunano električno poljsko jakost (enačba 4.54) z ustrezno vrednostjo za $\alpha$ v enačbo (4.49) in upoštevajmo, da mora biti $E_2 = \pm E_1$. Sledi

$$i\alpha^2\frac{e^{ikL}}{\lambda L} = ie^{ikL} = \pm 1. \tag{4.55}$$

Iz gornjega izraza izpeljemo resonančni pogoj za frekvenco lastnega nihanja in izračunamo razliko med dvema lastnima krožnima frekvencama, ki jo že poznamo (enačba 4.26)

$$\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L}. \tag{4.56}$$

Integralska enačba iz uklonske teorije tako da isti rezultat kot stoječe valovanje v obliki Gaussovih snopov, ki so rešitve obosne valovne enačbe. To nas seveda ne preseneča, saj je obosna valovna enačba enako natančna kot Fresnelova uklonska teorija.

**Naloga 4.6.1** Pokaži, da so funkcije, ki so sorazmerne svoji Fourierevi transformaciji, Hermite-Gaussove funkcije (enačba 3.33), in izračunaj lastne frekvence nihanj višjega reda.

DO zdaj smo obravnavali samo dva primera laserskih resonatorjev: Fabry-Perotov resonator z dvema vzporednima ravnima zrcaloma (a) in resonator z dvema sferičnima zrcaloma (b). Poleg teh dveh primerov je v uporabi še cela vrsta različnih resonatorjev. Ciklični resonator (c) je sestavljen iz več zrcal in žarek ciklično potuje med njimi. V vlakenskih laserjih je resonator optično vlakno med dvema zrcaloma ali pa sklenjeno vlakno. Kot laserski resonator lahko delujejo tudi mikroploščice (d) ali mikrokroglice (e), v katere je s totalnim odbojem ujeta svetloba. Namesto zrcal se v mikroresonatorjih uporablja tudi periodične dielektrične strukture, na katerih pride do Braggovega odboja (f).

## 4.7 *Sklopitev resonatorja z okolico

Na začetku poglavja smo omenili, da resonatorjev ne uporabljamo le pri izdelavi laserjev, ampak lahko služijo tudi kot frekvenčni in prostorski filtri za svetlobno valovanje. Povezavo med lastnimi nihanji resonatorja in prepustnostjo ter odbojnostjo za valovanje, ki na resonator vpada, bomo poiskali s formalizmom sklapljanja valovanj, ki je neke vrste perturbacijska analiza in je pogosto zelo uporaben.

Začnimo z resonatorjem z idealno odbojnimi stenami brez notranjih izgub. Stoječe lastno valovanje v resonatorju zapišemo kot produkt krajevnega in časovnega dela

$$E(\mathbf{r},t) = f(t)g(\mathbf{r}). \tag{4.57}$$

Krajevni del $g(\mathbf{r})$ naj bo normiran tako, da je $\int g^2 dV = 1$. Iz valovne enačbe (enačba 1.13) sledi, da mora časovni del zadoščati nihajni enačbi drugega reda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_n^2 f = \ddot{f} + \omega_n^2 f = 0. \tag{4.58}$$

Vpeljemo novo kompleksno spremenljivko $a$, ki je kombinacija funkcije $f$ in njenega časovnega odvoda

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2}}(f + \frac{i}{\omega_n}\dot{f}). \tag{4.59}$$

Izbira predfaktorja bo razvidna v nadaljevanju. Z odvajanjem in uporabo nihajne enačbe (enačba 4.58) ugotovimo, da za $a$ velja diferencialna enačba

$$\dot{a} = -i\omega_n a. \tag{4.60}$$

Funkcija $a$ ima preprosto časovno odvisnost $e^{-i\omega_n t}$.

Poglejmo elektromagnetno energijo v resonatorju. Električni del energije polja, ki je ravno polovica celotne energije, zapišemo kot

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 f^2 \int g^2 dV = \frac{1}{4}(a+a^*)^2. \tag{4.61}$$

V spremenljivki $a$ in konjugirani spremenljivki $a^*$ prepoznamo klasično obliko anihilacijskih in kreacijskih operatorjev v kvantno-mehanskem opisu harmonskega oscilatorja.

Celotna energija lastnega nihanja resonatorja je po analogiji iz kvantne mehanike enaka

$$W = |a|^2. \tag{4.62}$$

Vpeljana nova spremenljivka $a(t)$ je sorazmerna z $e^{-i\omega_n t}$, zato ji pravimo tudi komponenta amplitude s pozitivno frekvenco. Prednost uporabe spremenljivke $a$ je v preprostejših enačbah, ki so le prvega reda.

Obravnavali smo resonator brez izgub, zdaj si oglejmo še primer z izgubami. Izgube v resonatorju opišemo z dodatnim členom v enačbi (4.60)

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a. \tag{4.63}$$

V taki obliki lahko zapišemo enačbo le, kadar so izgube majhne. Če niso, je treba uporabiti navadno nihajno enačbo drugega reda. Gornji približek namreč ne vsebuje zmanjšanja nihajne frekvence pri velikem dušenju. Prehod na dve nesklopljeni enačbi prvega reda za $a$ in $a^*$ je točen le, kadar ni izgub. Izgube sklopijo enačbi za $a$ in $a^*$, vendar smo v našem približku to sklopitev zanemarili.

Naj bo odbojnost enega zrcala resonatorja nekoliko manjša od 1. Izgube v resonatorju potem opišemo kot (enačba 4.37) $1/\tau = (1-\mathscr{R})c/(4L)$. Druga posledica zmanjšane odbojnosti je sklopitev resonatorja z okolico. To pomeni, da valovanje izhaja iz resonatorja, po drugi strani pa to pomeni tudi, da je lastno nihanje mogoče vzbujati z valovanjem, ki na resonator vpada.

Naj $s_+$ opiše snop valovanja, ki vpada na resonator. Amplituda $s_+$ naj bo izbrana tako, da je $|s_+|^2$ enako moči vpadnega valovanja. Zaenkrat tudi zanemarimo notranje izgube resonatorja. Potem lahko zapišemo

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \frac{1}{\tau}a + \kappa s_+, \tag{4.64}$$

kjer je $\kappa$ sklopitveni koeficient med vpadnim valovanjem in amplitudo lastnega nihanja. Koeficient $\kappa$ je določen s prepustnostjo zrcala, ki pa je vsebovana tudi v $1/\tau$. Koeficient $\kappa$ torej ni neodvisen in poiščimo zvezo med $\kappa$ in $1/\tau$.

Naj ima vpadno valovanje frekvenco $\omega$. Tedaj lahko iz enačbe (4.64) izračunamo amplitudo nihanja v stacionarnem stanju. Upoštevamo, da mora imeti v stacionarnem stanju nihanje enako frekvenco kot vpadni val. Sledi

$$a = \frac{\kappa s_+}{i(\omega_n - \omega) + 1/\tau}. \tag{4.65}$$

Označimo del valovanja, ki se od resonatorja odbije ali iz njega izvira, s $s_-$. Če vpadnega vala ni, energija nihanja pojema zaradi odtekanja v $s_-$. Ohranitev energije da

$$-\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}|a|^2 = \frac{2}{\tau}|a|^2 = |s_-|^2 \tag{4.66}$$

ali

$$|s_-| = \sqrt{\frac{2}{\tau}}|a|, \tag{4.67}$$

kjer smo fazo $s_-$ priredili z izbiro referenčne ravnine, v kateri opazujemo $s_-$.

Ob prisotnosti vpadnega vala $s_+$ lahko izhajajoči val zapišemo kot vsoto direktnega odboja vpadnega vala $s_+$ in prispevka iz resonatorja

$$s_- = rs_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau}}a, \tag{4.68}$$

kjer $r$ zaenkrat še ne poznamo. Ker ni notranjih izgub, mora bit v stacionarnem stanju vpadna moč enaka izhajajoči

$$|s_+|^2 = |s_-|^2. \tag{4.69}$$

Uporabimo še izraz za stacionarno vrednost $a$ (enačba 4.65) in zapišemo enakost

$$r^2 + \frac{2(\tau\kappa^2 + r\kappa\sqrt{2\tau})}{1+\tau^2(\omega_n-\omega)^2} = 1. \tag{4.70}$$

Gornja enačba mora veljati pri vsaki frekvenci $\omega$, to je pri vsaki vrednosti imenovalca ulomka. Zato mora biti $r^2 = 1$ in $\tau\kappa = -r\sqrt{2\tau}$. Ker sta $\tau$ in $\kappa$ pozitivna, je $r = -1$ in

$$\kappa = \sqrt{\frac{2}{\tau}}. \tag{4.71}$$

Odbito valovanje lahko torej zapišemo

$$s_- = -s_+ + \sqrt{\frac{2}{\tau}}a. \tag{4.72}$$

Z upoštevanjem notranjih izgub (enačba 4.36) se amplituda nihanja spremeni v

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau}\right)a + \sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+. \tag{4.73}$$

Enačbi (4.72) in (4.73) sta osnovna izraza za sklapljanje resonatorjev z enim vhodom. Za primer uporabe izračunajmo odbojnost resonatorja $s_-/s_+$ kot funkcijo frekvence vpadnega vala. V enačbo (4.72) vstavimo izraz za stacionarno vrednost amplitude nihanja

$$a = \frac{\sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+}{i(\omega_n-\omega) + (\frac{1}{\tau_0}+\frac{1}{\tau})}. \tag{4.74}$$

Sledi

$$\frac{s_-}{s_+} = \frac{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_0}-i(\omega_n-\omega)}{\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau_0}+i(\omega_n-\omega)}. \tag{4.75}$$

Daleč od resonance je odbojnost -1. V resonanci (pri $\omega_n = \omega$) odboja ni, kadar je $\tau = \tau_0$. Takrat je moč, ki gre iz vpadnega valovanja v vzbujanje resonatorja, največja in je sklopitev, ki jo meri $\tau$, popolnoma prilagojena izgubam. Taka prilagoditev je analogna zahtevi, da mora biti impedanca bremena na koncu valovoda ali koaksialnega kabla enaka impedanci valovoda oziroma kabla.

Če sta obe zrcali resonatorja delno prepustni, kot na primer pri Fabry-Perotovem interferometru, je enačba za amplitudo nihanja

$$\dot{a} = -i\omega_n a - \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) a + \kappa_1 s_{+1} + \kappa_2 s_{+2}, \tag{4.76}$$

kjer sta $s_{+1}$ in $s_{+2}$ valovanji, ki vpadata z ene in druge strani. Izgube zaradi končne prepustnosti so

$$\frac{1}{\tau_{1,2}} = \frac{c}{4L}(1 - \mathscr{R}_{1,2}). \tag{4.77}$$

S podobnim razmislekom kot prej, s tem da postavimo najprej eno, nato drugo vpadno valovanje na nič, dobimo

$$\kappa_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{\tau_{1,2}}}. \tag{4.78}$$

Prepustnost resonatorja – oziroma razmerje med močjo vpadnega valovanja na eni strani in izhodnega na drugi – je

$$T = \frac{|s_{-2}|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{2}{\tau_2}\frac{|a|^2}{|s_{+1}|^2} = \frac{4\tau_c^2/\tau_1\tau_2}{1 + \tau_c^2(\omega_n - \omega)^2}, \tag{4.79}$$

kjer je $1/\tau_c = 1/\tau_0 + 1/\tau_1 + 1/\tau_2$. Če ni notranjih izgub, je prepustnost v resonanci

$$T = \frac{4/\tau_1\tau_2}{(1/\tau_1 + 1/\tau_2)^2}. \tag{4.80}$$

Prepustnost je v resonanci popolna, če sta obe zrcali enaki in $\tau_1 = \tau_2$. Gornja izraza se ujemata z znanim izrazom za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v bližini resonanc, če so izgube in prepustnost zrcal majhne (enačbi 4.8 in 4.42).

Resonatorji imajo mnogo lastnih nihanj. Očitno veljajo gornji izrazi za vsako lastno nihanje posebej in celoten odziv resonatorja na poljubno vpadno valovanje zapišemo kot vsoto po vseh lastnih nihanjih. Pri tem ne smemo pozabiti, da mora vpadno valovanje, ki se sklaplja z izbranim lastnim nihanjem, imeti prostorsko odvisnost, ki ustreza lastnemu stanju. V primeru stabilnih resonatorjev iz prejšnjih razdelkov mora torej biti vpadni snop Gaussov z enakim $w_0$ in istega prečnega reda kot resonatorsko stanje. Če vpadno valovanje ni tako, ga najprej razvijemo po Gaussovih snopih, ki ustrezajo resonatorju. Pri zahtevnejših interferometričnih meritvah je treba za vzbujanje le ene resonance vpadni snop prilagoditi resonatorju, tako da je polmer na vhodnem zrcalu enak polmeru lastnega nihanja, krivinski radij vpadne valovne fronte pa enak krivinskemu radiju zrcala.

Resonator pa ne deluje le kot frekvenčni filter, ampak tudi kot prostorski. Če ima vpadno valovanje isto frekvenco kot eno od nihanj resonatorja, ima prepuščeno valovanje obliko Gaussovega snopa, kot jo določa resonator, ne glede na obliko vpadnega snopa.

Gornji način obravnave resonatorjev in sklopitve z vpadnim valovanjem je posebej prikladen za račun nestacionarnega obnašanja in za primer, ko je resonator napolnjen z nelinearnim sredstvom.

## 4.8 *Sklopitev dveh resonatorjev

Podobno kot sklopitev z zunanjim valovanjem lahko obravnavamo tudi sklopitev med dvema resonatorjema. Naj bosta dva resonatorja brez izgub sklopljena z delno prepustnim zrcalom. Sklopitev naj bo šibka, tako da lahko zapišemo

$$\dot{a}_1 = -i\omega_1 a_1 + \kappa_{12} a_2 \tag{4.81}$$
$$\dot{a}_2 = -i\omega_2 a_2 + \kappa_{21} a_1. \tag{4.82}$$

Zaradi ohranitve energije sklopitvena koeficienta $\kappa_{12}$ in $\kappa_{21}$ nista neodvisna. Vsota energij obeh resonatorjev mora biti konstantna, zato

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(|a_1|^2+|a_2|^2) &= a_1\dot{a}_1^* + a_1^*\dot{a}_1 + a_2\dot{a}_2^* + a_2^*\dot{a}_2 \\ &= a_1^*\kappa_{12}a_2 + a_1\kappa_{12}^*a_2^* + a_2^*\kappa_{21}a_1 + a_2\kappa_{21}^*a_1^* \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Veljati mora torej

$$\kappa_{12} + \kappa_{21}^* = 0. \tag{4.84}$$

Poglejmo primer dveh sklopljenih resonatorjev, pri čemer je v drugem resonatorju vzbujeno stoječe valovanje. Moč tistega dela, ki potuje proti prvemu resonatorju, je polovica energije, deljena s časom preleta od enega zrcala do drugega

$$|s_+|^2 = \frac{1}{2}|a_2|^2\frac{c}{L}. \tag{4.85}$$

Z upoštevanjem enačbe (4.71) je

$$\kappa_{12}a_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau}}s_+ = \sqrt{\frac{c}{\tau L}}a_2, \tag{4.86}$$

tako da je

$$\kappa_{12} = \frac{c}{2L}\sqrt{1-\mathscr{R}}, \qquad \kappa_{21} = -\kappa_{12}. \tag{4.87}$$

Zaradi sklopitve se spremenijo lastne frekvence resonatorjev. Poglejmo dva enaka sklopljena resonatorja

$$\dot{a}_1 = -i\omega_0 a_1 + \kappa_{12} a_2 \tag{4.88}$$
$$\dot{a}_2 = -i\omega_0 a_2 - \kappa_{12} a_1. \tag{4.89}$$

Iščemo rešitve oblike $A_i e^{-i\omega t}$. Če uporabimo ta nastavek v gornjih diferencialnih enačbah, dobimo homogen linearen sistem za $A_1$ in $A_2$, ki je netrivialno rešljiv, če je determinanta enaka nič. Ta pogoj da enačbo za frekvenco

$$(\omega-\omega_0)^2 = \kappa_{12}^2 \tag{4.90}$$

in

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \kappa_{12}. \tag{4.91}$$

Zaradi sklopitve sta se prej enaki frekvenci resonatorjev razcepili v dve, kot smo lahko pričakovali.

# 5. Interakcija svetlobe s snovjo

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali svetlobo v praznem prostoru. Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. To je seveda zelo obširna tema in jo bomo obdelali le v obsegu, potrebnem za razumevanje ojačevanja svetlobe s stimulirano emisijo, kar je osnova za delovanje laserjev. Najprej bomo na kratko pogledali termodinamsko ravnovesje svetlobe v stiku s toplotnim zalogovnikom, torej sevanje črnega telesa, ki zahteva kvantno obravnavo elektromagnetnega polja. Nato bomo vpeljali fenomenološki Einsteinov opis mikroskopskih procesov absorpcije, spontane in stimulirane emisije in pokazali, da ti procesi niso neodvisni. Izpeljali bomo izraze za absorpcijski koeficient in koeficient ojačenja, na koncu poglavja pa bomo nakazali še kvantnomehansko izpeljavo verjetnosti za prehod atoma iz višjega energijskega stanja v nižje s sevanjem.

## 5.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja

Ravni valovi so enostavne in zelo prikladne rešitve valovne enačbe (enačba 1.13), zato jih pogosto uporabimo za bazo, po kateri razvijemo elektromagnetno polje. Možen je razvoj po celotnem prostoru, vendar je tedaj nekoliko nerodna normalizacija baznih funkcij. Če se omejimo na le del prostora, se temu problemu izognemo. Mora pa biti izbrani del prostora dovolj velik, da končni rezultat ni odvisen od izbire njegove velikosti in oblike.

Najpreprosteje je vzeti votlino v obliki velike kocke s stranico $L$ in idealno prevodnimi stenami. Rešitve Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) znotraj take votline so ob upoštevanju robnih pogojev (enačbe 1.9–1.12) stoječa valovanja. Zapišemo jih v obliki

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0}\cos\frac{\pi l x}{L}\sin\frac{\pi m y}{L}\sin\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t} \\ E_y &= E_{y0}\sin\frac{\pi l x}{L}\cos\frac{\pi m y}{L}\sin\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t} \\ E_z &= E_{z0}\sin\frac{\pi l x}{L}\sin\frac{\pi m y}{L}\cos\frac{\pi n z}{L}e^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kjer so $l, m$ in $n$ cela števila. Vsako stoječe valovanje je določeno z valovnim vektorjem

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\pi l}{L}, \frac{\pi m}{L}, \frac{\pi n}{L}\right), \tag{5.2}$$

katerega velikost je povezana s frekvenco $k = \omega/c$. Iz Maxwellove enačbe za prazen prostor $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ (enačba 1.3) sledi $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$. Za vsako trojico števil $l$, $m$ in $n$ obstajata tako dve neodvisni polarizaciji.

**Naloga 5.1.1** Pokaži, da stoječe valovanje, zapisano z enačbami (5.1), reši valovno enačbo (enačba 1.13) v kocki s stranico $L$ in zadosti robnim pogojem idealno prevodnih sten votline.

Preštejmo, koliko je lastnih valovanj v intervalu velikosti valovnega vektorja med $k$ in $k+dk$ – to smo na hitro naredili že pri obravnavni resonatorjev (enačba 4.1). Možni valovni vektorji tvorijo tridimenzionalno mrežo v prvem oktantu prostora vseh valovnih vektorjev. Razmik med dvema zaporednima mrežnima točkama v smeri ene od osi je $\pi/L$. Število točk v osmini krogelne lupine med $k$ in $k+dk$ je za dovolj velike $l$, $m$ in $n$ enako prostornini lupine, deljeni s prostornino, ki pripada posamezni mrežni točki, to je $(\pi/L)^3$. Upoštevati moramo še, da sta pri vsakem $\mathbf{k}$ dovoljeni dve polarizaciji, zato

$$dN = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \pi k^2\, dk. \tag{5.3}$$

Zapišemo število stanj na enoto volumna

$$\frac{dN}{V} = \frac{k^2}{\pi^2} dk \tag{5.4}$$

in ga prevedemo na frekvenčno odvisnost

$$\frac{dN}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \tag{5.5}$$

Vpeljemo gostoto stanj $\rho(\omega)$, to je število valovanj na frekvenčni interval[1] na enoto volumna votline

$$\boxed{\rho(\omega) = \frac{dN}{V d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}.} \tag{5.6}$$

Vsote po lastnih valovanjih, to je po dovoljenih vrednostih valovnega vektorja $k$, lahko z uporabo gostote stanj spremenimo v integrale po $k$ ali po $\omega$

$$\sum_k \ldots \quad \Rightarrow \quad V \int \rho(k) \ldots dk = V \int \rho(\omega) \ldots d\omega. \tag{5.7}$$

Označimo brezdimenzijski krajevni del rešitve (enačbe 5.1) z $\mathbf{E}_\alpha$, kjer $\alpha$ označuje trojico števil $l$, $m$ in $n$ in še obe možni polarizaciji. Pripadajoče magnetno polje izračunamo z Maxwellovo enačbo (enačba 1.2)

$$\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = i\omega_\alpha \mathbf{B}_\alpha. \tag{5.8}$$

Polja $\mathbf{E}_\alpha$ in $\mathbf{B}_\alpha$ tvorijo poln ortogonalen sistem, zato jih lahko uporabimo za razvoj poljubnega elektromagnetnega polja v votlini

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}} \sum_\alpha p_\alpha(t) \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \quad \text{in} \tag{5.9}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = i\sqrt{\frac{\mu_0}{V}} c_0 \sum_\alpha \omega_\alpha q_\alpha(t) \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{r}). \tag{5.10}$$

Vstavimo splošen razvoj (enačbi 5.9 in 5.10) v Maxwellovi enačbi (enačbi 1.1 in 1.2), upoštevamo zvezo (enačba 5.8) in njej analogno za rotor magnetnega polja. Sledi

$$p_\alpha = \dot{q}_\alpha \quad \text{in} \quad \omega_\alpha^2 q_\alpha = -\dot{p}_\alpha, \tag{5.11}$$

od koder sledi še

$$\ddot{p}_\alpha + \omega_\alpha^2 p_\alpha = 0. \tag{5.12}$$

Ta enačba da seveda pričakovano časovno odvisnost oblike $e^{-i\omega_\alpha t}$.

[1] V tem poglavju bomo ohlapno uporabljali besedo frekvenca tudi za krožno frekvenco. Iz zapisa bo vedno jasno, za katero frekvenco gre.

**Naloga 5.1.2** Uporabi razvoj polja (enačbi 5.9 in 5.10) in iz Maxwellovih enačb izpelji enačbo (5.12).

Z upoštevanjem razvoja (enačbi 5.9 in 5.10) in ob ustrezni normalizaciji zapišemo energijo polja – Hamiltonovo funkcijo[2]

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0})\,dV = \frac{1}{2}\sum_\alpha(p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2). \tag{5.13}$$

Gornji zapis (enačbi 5.12 in 5.13) kaže, da lahko elektromagnetno polje v votlini obravnavamo kot sistem neodvisnih harmonskih oscilatorjev. Pri tem se koeficienti razvoja $p_\alpha$ in $q_\alpha$ obnašajo kot gibalne količine in koordinate.

Prehod v kvantno mehaniko dosežemo tako, da klasičnim spremenljivkam gibalne količine in koordinate priredimo operatorje $\hat{p}_\alpha$ in $\hat{q}_\alpha$, ki morajo zadoščati komutacijskim pravilom

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha,\beta}. \tag{5.14}$$

Iz kvantne mehanike vemo, da so lastne vrednosti energije harmonskega oscilatorja, opisanega s Hamiltonovo funkcijo (enačba 5.13), diskretne. Njihove vrednosti so enake

$$\boxed{W_{n,\alpha} = \hbar\omega_\alpha(n_\alpha + \frac{1}{2}), \quad n_\alpha = 0, 1, 2\ldots} \tag{5.15}$$

**Razliki energije harmonskega oscilatorja, če se $n_\alpha$ spremeni za 1, pravimo foton.** Energija fotona je tako enaka $\hbar\omega$, $n$ pa predstavlja število fotonov z dano energijo.

Celotno energijo kvantiziranega elektromagnetnega polja v votlini izračunamo tako, da seštejemo prispevke vseh možnih stanj

$$W = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha n_\alpha, \tag{5.16}$$

pri čemer smo izpustili ničelno energijo. Izpuščali jo bomo tudi v nadaljevanju, saj je to energija osnovnega stanja, ki se ne more sprostiti.

★ Vidna svetloba z valovno dolžino 500 nm ima frekvenco $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Hz. Ustrezna energija fotona je $W = 4 \cdot 10^{-19}$ J oziroma $W = 2,5$ eV.

## 5.2 Sevanje črnega telesa

Obravnavajmo sevanje v votlini, ki je v toplotnem ravnovesju s stenami s temperaturo $T$. Iz statistične fizike vemo, da verjetnost $P$, da je v izbranem stanju votline $\alpha$ število fotonov enako $n_\alpha$, zapišemo z Boltzmannovo porazdelitvijo

$$P(n_\alpha) = \frac{e^{-W_{n\alpha}/k_B T}}{\sum_\alpha e^{-W_{n\alpha}/k_B T}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}}{\sum_\alpha e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}} = e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}(1 - e^{-\beta\hbar\omega_\alpha}), \tag{5.17}$$

pri čemer $\beta = 1/k_B T$ in $k_B$ Boltzmannova konstanta.

[2] Irski matematik Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865.

Povprečno število fotonov v stanju $\alpha$ je potem

$$\langle n_\alpha \rangle = \sum_\alpha n_\alpha P(n_\alpha) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_\alpha} - 1}. \tag{5.18}$$

Povprečno energijo posameznega stanja zapišemo kot produkt energije tega stanja in povprečnega števila fotonov v tem stanju

$$\langle W_\alpha \rangle = \hbar\omega_\alpha \langle n_\alpha \rangle = \frac{\hbar\omega_\alpha}{e^{\beta\hbar\omega_\alpha} - 1}. \tag{5.19}$$

Ravnovesno gostoto energije elektromagnetnega polja v votlini na frekvenčni interval izračunamo tako, da povprečno energijo posameznega stanja pomnožimo z gostoto stanj $\rho(\omega)$ (enačba 5.6). Dobimo znano formulo za energijo na enoto volumna na enoto frekvence, to je Planckov zakon[3]. Planckov zakon opiše spektralno gostoto energije svetlobe $u$ , izsevane iz črnega telesa, ki je v toplotnem ravnovesju z okolico s temperaturo $T$

$$u(\omega) = \hbar\omega\langle n\rangle\rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}. \tag{5.20}$$

Slika 5.1: Planckov spekter za sevanje črnega telesa pri različnih temperaturah

## 5.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje

Oglejmo si osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. Naj bo v votlini poleg elektromagnetnega polja še $N$ atomov, ki se med seboj ne motijo. Za začetek naj bodo atomi prav enostavni: imajo naj le dve energijski stanji z energijama $E_1$ in $E_2$ (slika 5.2 a). Stanje $E_2$ naj ima višjo energijo od $E_1$, razlika med njima pa naj bo

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_0. \tag{5.21}$$

Zaradi interakcije s poljem pri frekvenci prehoda $\omega_0$ atomi prehajajo iz nižjega stanja v višje in obratno. Prehajanje med obema stanjema opisujejo trije procesi: spontano sevanje, absorpcija in stimulirano sevanje.

[3] Nemški fizik in nobelovec Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947.

Slika 5.2: Shema energijskih nivojev dvonivojskega atoma (a) in prehodov med njima: spontano sevanje (b), absorpcija (c) in stimulirano sevanje (d).

### Spontano sevanje

Vemo, da atom v vzbujenem stanju tudi brez vpliva zunanjega polja ni stabilen, temveč prej ali slej preide v nižje stanje. Temu pojavu pravimo spontano sevanje ali spontana emisija (slika 5.2 b).

Pri spontanem sevanju je foton izsevan v katerokoli stanje polja v bližini frekvence prehoda. Smer izsevane svetlobe je poljubna, v odsotnosti zunanjega polja pa je poljubna tudi polarizacija izsevane svetlobe. Verjetnost za prehod na časovno enoto označimo z $A_{21}$. Za dovoljene prehode je vrednost $A_{21} \sim 10^6$–$10^8/\mathrm{s}$, za prepovedane pa okoli $\sim 10^4/\mathrm{s}$. Karakteristični (naravni) razpadni čas gornjega stanja vpeljemo kot $\tau = 1/A_{21}$.

Zaradi končnega življenjskega časa ima vzbujeno stanje končno spektralno širino. Če ni Dopplerjeve razširitve, je atomska spektralna črta najpogosteje kar Lorentzove oblike z vrhom pri $\omega_0$ (enačba 2.21)

$$g(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \tag{5.22}$$

Funkcija $g(\omega)$ je normirana

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, d\omega = 1, \tag{5.23}$$

za grobe ocene pa se funkcijo $g$ pogosto nadomesti s pravokotnikom širine $2\gamma$ in višine $1/2\gamma$.

### Absorpcija fotona

Absorpcija fotona je prehod, pri katerem se foton z ustrezno energijo absorbira, atom pa preide iz nižjega energijskega stanja v višje (slika 5.2 c). Verjetnost za prehod na časovno enoto $r_{12}$ je sorazmerna spektralni gostoti energije polja $u(\omega)$, to je energiji na enoto volumna in frekvenčni interval, pri frekvenci prehoda $\omega_0$. Sorazmernostni koeficient označimo z $B_{12}$ in zapišemo

$$r_{12} = B_{12} u(\omega_0). \tag{5.24}$$

To je enostavno razumeti. Več kot je fotonov v votlini pri frekvenci, ki je v bližini frekvence prehoda, več fotonov se lahko absorbira in večja je verjetnost za prehod atoma v višje stanje. Pri absorpciji se seveda število fotonov v enem od stanj polja pri frekvenci $\omega_0$ zmanjša za ena.

### Stimulirano sevanje

Tretji pojav je prehod atoma iz višjega stanja v nižje zaradi interakcije s poljem. Temu procesu pravimo stimulirano sevanje ali stimulirana emisija. Tudi verjetnost za stimuliran prehod na časovno enoto $r_{21}$ je sorazmerna s spektralno gostoto energije polja pri frekvenci prehoda $\omega_0$

$$r_{21} = B_{21} u(\omega_0). \tag{5.25}$$

V tem primeru smo sorazmernostni koeficient označili z $B_{21}$. Kadar pride do stimuliranega sevanja, se število atomov v vzbujenem stanju zmanjša, število fotonov v stanju, ki je prehod povzročilo, pa se poveča. Izsevana svetloba ima enako fazo, frekvenco, polarizacijo in smer potovanja kot vpadna. Tipične vrednosti parametra so $B_{21} \sim 10^{16}$–$10^{20}$ $\mathrm{m^3/Js^2}$.

Pomudimo se še nekoliko pri izrazih za absorpcijo (enačba 5.24) in za stimulirano emisijo (enačba 5.25). Zapisani enačbi veljata le, kadar je spektralna gostota elektromagnetnega polja $u(\omega)$ preko celotne spektralne širine prehoda približno konstantna (slika 5.3 a). To je gotovo res, če obravnavamo sevanje v votlini, ki je v termičnem ravnovesju z okolico (črno telo).

Slika 5.3: Pri izračunu verjetnosti za absorpcijo in stimulirano emisijo je pomembno, ali je spektralna gostota elektromagnetnega polja $u(\omega)$ bistveno širša (a) ali bistveno ožja (b) od širine atomske spektralne črte $g(\omega-\omega_0)$.

V splošnem primeru, ko se spekter vpadne svetlobe spreminja v območju atomske spektralne črte, moramo sešteti prispevke po ozkih frekvenčnih intervalih

$$r_{12} = B_{12} \int g(\omega-\omega_0)\, u(\omega)\, d\omega. \tag{5.26}$$

Gornji zapis preverimo na primeru spektra črnega telesa, ki se ne spreminja dosti v območju prehoda. Takrat $u(\omega_0)$ postavimo pred integral in po pričakovanju dobimo znano zvezo (enačba 5.24).

Če pa na atome svetimo s svetlobo s spektrom, ki je ozek v primerjavi s spektralno širino prehoda (na primer iz laserskega resonatorja), je verjetnost za prehod odvisna tudi od tega, kako blizu osrednje frekvence prehoda je frekvenca vpadne svetlobe (slika 5.3 b). Naj bo $w_R$ gostota energije skoraj monokromatske vpadne svetlobe s frekvenco $\omega_R$. Verjetnost za absorpcijo na časovno enoto je potem

$$r_{12} = B_{12} g(\omega_R-\omega_0)\, w_R. \tag{5.27}$$

Koeficiente $A_{21}$, $B_{12}$ in $B_{21}$, s katerimi smo opisali spontano sevanje, absorpcijo in stimulirano emisijo, je prvi vpeljal Einstein[4], zato jih imenujemo tudi Einsteinovi koeficienti. Poglejmo si jih podrobneje.

[4] Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.

### Einsteinovi koeficienti

Zasedenost stanj določa število atomov v določenem stanju. Ker zaenkrat obravnavamo preproste modele atomov z zgolj dvema stanjema, zapišemo samo dve zasedenosti. Naj bo $N_1$ zasedenost nižjega stanja, $N_2$ zasedenost višjega stanja, skupno število atomov pa $N_1 + N_2 = N$. V prisotnosti svetlobe se število atomov v spodnjem in zgornjem stanju lahko spreminja, skupno število pa se ohranja.

Obravnavajmo termično ravnovesje, ko je spekter svetlobe bistveno širši od širine atomskega prehoda (slika 5.3 a), tako da lahko za zapis verjetnosti za prehod uporabimo enačbi (5.24) in (5.25). Zasedenost višjega nivoja se zmanjšuje zaradi spontanih in stimuliranih prehodov v nižje stanje, povečuje pa se zaradi absorpcije. To zapišemo z enačbo

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - r_{21}N_2 + r_{12}N_1 = -A_{21}N_2 - B_{21}u(\omega_0)N_2 + B_{12}u(\omega_0)N_1. \tag{5.28}$$

Zaradi ohranitve skupnega števila atomov velja

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}. \tag{5.29}$$

V termičnem ravnovesju sta zasedenosti konstantni, tako da lahko zapišemo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}u(\omega_0)N_2 - B_{12}u(\omega_0)N_1 = 0. \tag{5.30}$$

Vemo tudi, da v termičnem ravnovesju za zasedenosti $N_1$ in $N_2$ velja Boltzmannova porazdelitev

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2-E_1)} = e^{-\beta\hbar\omega_0}, \tag{5.31}$$

kjer je $\beta = 1/k_BT$. Izrazimo spektralno gostoto $u(\omega_0)$ iz enačbe (5.30)

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}} \tag{5.32}$$

in z uporabo enačbe (5.31) dobimo

$$u(\omega_0) = \frac{A_{21}/B_{12}}{e^{\beta\hbar\omega_0} - B_{21}/B_{12}}. \tag{5.33}$$

Po drugi strani vemo, da je v termičnem ravnovesju spektralna gostota energije sevanja $u(\omega_0)$ enaka termični Planckovi gostoti $u(\omega_0)$ (enačba 5.20). Iz primerjave obeh zapisov ugotovimo, da morata biti koeficienta $B_{21}$ in $B_{12}$ enaka in določimo zvezo med koeficientoma $A_{21}$ in $B_{12}$

$$\boxed{A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}B_{12} \qquad \text{in} \qquad B_{12} = B_{21}.} \tag{5.34}$$

Koeficient pred $B_{12}$ v prvi enačbi je ravno enak gostoti stanj elektromagnetnega polja $\rho(\omega)$ (enačba 5.6), pomnoženi z energijo fotona $\hbar\omega$. Videli bomo, da to ni slučaj, saj to izhaja iz verjetnosti za prehod v kvantni elektrodinamiki (poglavje 5.10). Pozoren bralec je lahko tudi opazil, da je z enačbo (5.33), ki smo jo dobili le z uporabo Boltzmannove porazdelitve za atome, že določena oblika Planckove formule, ne da bi kar koli rekli o fotonih.

★ Zveza $B_{12} = B_{21}$ velja le v primeru nedegeneriranih stanj. V realnih sistemih so stanja pogosto degenerirana in je treba gornje enačbe ustrezno popraviti

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = \frac{g_1}{g_2}, \tag{5.35}$$

pri čemer $g_1$ in $g_2$ označujeta degeneriranost stanj.

## 5.4 Absorpcijski koeficient

Naj na izbran volumen plina vpada snop svetlobe s frekvenco $\omega$, ki je blizu frekvence atomskega prehoda $\omega_0$. Gostota vpadnega energijskega toka je $j = w_\omega c$ (enačba 1.32), pri čemer je $w_\omega$ gostota energije. Obravnavajmo primer, ko je spekter vpadnega snopa ozek v primerjavi s širino atomskega prehoda (slika 5.3 b). V tej obliki je zapis enačb sicer bolj zapleten, a hkrati bolj priročen pozneje pri obravnavi laserja. Privzemimo še, da je stanje stacionarno.

Ko svetlobni snop vpade na plast plina debeline $dz$, se gostota energijskega toka zmanjša zaradi absorpcije in hkrati poveča zaradi stimulirane emisije (slika 5.4). Spontano sevanje, ki je seveda tudi prisotno, lahko zanemarimo, saj je svetloba izsevana na vse strani enakomerno in le majhen del je izsevan v smeri snopa. Sprememba energije snopa v časovni enoti je enaka razliki med številom absorpcij in stimuliranih prehodov v tem času, pomnoženih z energijo fotona[5]

$$dP = r_{12}\frac{(N_2 - N_1)}{V} S dz\, \hbar\omega = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g w_\omega \hbar\omega S dz, \tag{5.36}$$

pri čemer smo verjetnost za prehod izrazili iz enačbe (5.27).

Slika 5.4: K absorpciji svetlobe v plasti atomov

S $S$ smo označili presek snopa, z $V$ pa volumen plina. Sledi

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g \hbar\omega \frac{j}{c} dz. \tag{5.37}$$

Priročno je vpeljati presek za absorpcijo

$$\boxed{\sigma(\omega) = \frac{B_{21}\, g \hbar\omega}{c}.} \tag{5.38}$$

Z njim se izraz (5.37) poenostavi v

$$\boxed{\frac{dj}{dz} = \frac{\Delta N}{V}\sigma(\omega) j,} \tag{5.39}$$

kjer $\Delta N$ označuje $N_2 - N_1$. Navadno obravnavamo pline, ki so blizu termičnega ravnovesja. V tem primeru je $N_2 < N_1$ in $dj$ negativen, zato pride do absorpcije svetlobe z absorpcijskim koeficientom $\mu$. Zapišemo

$$\frac{dj}{j} = -\mu dz \tag{5.40}$$

[5] Zaradi preglednosti tukaj pišemo obliko atomske spektralne črte kot $g$, pri čemer je to vrednost Lorentzove krivulje z osrednjo frekvenco $\omega_0$ pri $\omega$, torej $g(\omega - \omega_0)$.

in

$$\mu(\omega) = \frac{\Delta N}{V}\sigma(\omega) = \frac{\Delta N}{V} B_{21}\, g \frac{\hbar\omega}{c}. \tag{5.41}$$

Tako smo makroskopski koeficient absorpcije svetlobe v plinu atomov povezali z Einsteinovim koeficientom $B_{21}$. Povejmo še, da so tipične velikosti presekov za absorpcijo $\sigma \sim 10^{-24}$–$10^{-16}$ m$^2$.

★ Energija se pri absorpciji v plinu dvonivojskih atomov seveda ne izgublja. Atom, ki je prešel v vzbujeno stanje, se s spontano emisijo vrne nazaj v osnovno, svetloba pa se izseva na vse strani – se siplje.

## 5.5 Nasičenje absorpcije

Čeprav je videti izraz za zmanjševanje gostote svetlobnega toka pri prehodu skozi absorbirajoči plin (enačba 5.40) preprost, ga ni mogoče enostavno integrirati, saj je absorpcijski koeficient $\mu$ odvisen od gostote energijskega toka. Pri dovolj velikem svetlobnem toku namreč z absorpcijo znaten delež atomov preide v višje stanje, zato se zmanjša razlika $\Delta N$ in posledično se zmanjša tudi absorpcijski koeficient $\mu$. Takrat se absorpcija v plinu nasiti in pojavu pravimo nasičenje absorpcije.

Naj na plin vpada snop monokromatske svetlobe. Atomi v plinu prehajajo med nivojema zaradi absorpcije, spontane in stimulirane emisije. Podobno kot smo zapisali termično ravnovesje v primeru širokega spektra (enačba 5.30), zapišemo stacionarno enačbo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}\, g\, \Delta N \frac{j}{c} = 0, \tag{5.42}$$

pri čemer smo za verjetnost za prehod uporabili enačbo (5.27) in upoštevali $w = j/c$. Zasedenost višjega stanja $N_2$ lahko izrazimo s celotnim številom atomov $N$ in razliko zasedenosti $\Delta N$

$$N_2 = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) + \frac{1}{2}(N_2 - N_1) = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\Delta N. \tag{5.43}$$

S tem lahko izračunamo razliko zasedenosti

$$\Delta N = -\frac{N}{1 + 2\frac{Bg}{cA} j}. \tag{5.44}$$

Pri majhni gostoti toka $j$ so praktično vsi atomi v osnovnem stanju in prispevajo k absorpciji. Pri velikih gostotah toka pa imenovalec gornjega izraza močno naraste, razlika zasedenosti gre proti nič in absorpcija se zmanjšuje. Ko drugi člen v imenovalcu (enačba 5.44) doseže vrednost 1, pravimo, da gostota energijskega toka doseže vrednost saturacijske gostote. Zapišemo jo kot

$$j_s(\omega) = \frac{cA_{21}}{2B_{21}g} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^2 g}, \tag{5.45}$$

pri čemer smo upoštevali zvezo med koeficientoma $A_{21}$ in $B_{21}$ (enačba 5.34). Kot vidimo, je saturacijska gostota odvisna le od krožne frekvence vpadnega valovanja in vrednosti $g(\omega - \omega_0)$, ki je približno obratna vrednost širine atomskega prehoda. Za črto z valovno dolžino 600 nm in širino $10^8$ s$^{-1}$ znaša saturacijska gostota svetlobnega toka okoli 20 mW/cm$^2$. Tako veliko gostoto svetlobnega toka je v tako ozkem frekvenčnem intervalu z navadnimi svetili praktično nemogoče doseči, medtem ko jo z laserji z lahkoto.

Izraz za razliko zasedenosti stanj zapišemo v preglednejši obliki

$$\Delta N = -\frac{N}{1 + j/j_s(\omega)}. \tag{5.46}$$

Vstavimo gornji izraz v enačbo za zmanjševanje gostote toka (enačba 5.39) in dobimo

$$dj = -\frac{\mu_0}{1 + j/j_s} j\,dz, \tag{5.47}$$

kjer je

$$\mu_0 = \frac{N}{V}\sigma = \frac{N B_{21}\, g\hbar\omega}{Vc} \tag{5.48}$$

absorpcijski koeficient pri majhnih gostotah vpadnega toka.

Enačbo (5.47) brez težav integriramo

$$\ln\frac{j}{j_0} + \frac{j - j_0}{j_s} = -\mu_0 z, \tag{5.49}$$

kjer smo z $j_0$ označili začetno gostoto svetlobnega toka. Kadar je ta dosti manjša od $j_s$, lahko drugi člen v gornji enačbi zanemarimo in gostota svetlobnega toka eksponentno pojema

$$j = j_0 e^{-\mu_0 z}. \tag{5.50}$$

Pri zelo velikih vpadnih gostotah, ko pride do nasičenja absorpcije, lahko prvi člen v izrazu zanemarimo in pride do linearnega zmanjševanja gostote svetlobnega toka

$$j = j_0 - \mu_0 j_s z. \tag{5.51}$$

V primeru močnega vpadnega toka je zasedenost osnovnega in vzbujenega nivoja skoraj enaka in absorpcija je omejena s tem, kako hitro se lahko atomi vračajo v osnovno stanje preko spontanega sevanja.

Slika 5.5: Pojemanje gostote svetlobnega toka v absorbirajočem plinu (enačba 5.49)

## 5.6 Optično ojačevanje

V prejšnjih razdelkih smo obravnavali prehod svetlobe skozi dvonivojski plin. V termičnem ravnovesju je zgornji nivo manj zaseden od spodnjega in v plinu pride do absorpcije svetlobe. Če pa nekako dosežemo stanje obrnjene zasedenosti, za katerega velja $N_2 > N_1$, se snop svetlobe pri prehodu skozi plin ojačuje. Ta pojav je osnova za delovanje laserjev.

Stanje obrnjene zasedenosti seveda ni v termičnem ravnovesju in ga je treba vzdrževati z dovajanjem energije plinu oziroma *črpanjem*. Načinov, kako dosežemo obrnjeno zasedenost s črpanjem, je veliko. Zaenkrat opišimo le nekaj osnovnih mehanizmov, podrobneje jih bomo spoznali na konkretnih primerih laserjev, ki jih bomo obravnavali v poglavju 7.

V plinih je najpogostejši način črpanja vzbujanje z električnim tokom. Elektroni, ki so glavni nosilci toka, se zaletavajo v atome ali ione plina in jih vzbujajo v višje nivoje, pri čemer lahko pride do obrnjene zasedenosti med nekim parom nivojev. Tako črpanje uporabljamo na primer v argonskem laserju.

Pogost proces v plinih je tudi prenos energije med atomi s trki. V mešanici dveh plinov, pri katerih se nek nivo enih atomov ujema po energiji z nekim nivojem drugih atomov, lahko vzbujen atom prve vrste pri trku preda energijo brez sevanja atomu druge vrste, ta pa iz osnovnega stanja preide v ustrezen višji nivo. Če je pod tem nivojem še drugo vzbujeno stanje, katerega življenjski čas je krajši od življenjskega časa zgornjega nivoja, pride do obrnjene zasedenosti. Primer uporabe takega črpanja je He-Ne laser.

V trdnih neprevodnih kristalih sta v optičnem področju absorpcija in sevanje pri določeni valovni dolžini navadno posledica primesi. Obrnjeno zasedenost para nivojev primesi največkrat dosežemo tako, da kristal obsevamo s svetlobo s frekvenco, ki ustreza prehodu na nek nivo nad izbranim parom. Tako črpanje uporabljamo na primer v Nd:YAG in Ti:safir laserjih.

V polprevodnikih dosežemo obrnjeno zasedenost med prevodnim in valenčnim pasom z vbrizgavanjem elektronov in vrzeli v območje *p-n* stika z električnim tokom v prevodni smeri.

## 5.7 Optično črpanje trinivojskega sistema

Kot primer optičnega ojačevanja si oglejmo najpreprostejši model optičnega črpanja. Gre za plin atomov s tremi nivoji, tako imenovani trinivojski sistem. Osnovno stanje, ki ga označimo z $|0\rangle$, naj ima energijo $E_0$. Poleg tega naj imajo atomi še dve vzbujeni stanji z energijo $E_1$ (stanje $|1\rangle$) in energijo $E_2 > E_1$ (stanje $|2\rangle$), tako da je energijska razlika med vzbujenima nivojema $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$ (slika 5.6 a).

Na tak trinivojski plin svetimo s črpalno svetlobo, ki vzbuja atome iz osnovnega stanja $|0\rangle$ v stanje $|2\rangle$, pri čemer je lahko spektralna gostota $u_p$ črpalne svetlobe široka. Po plinu naj se širi še monokromatska svetloba z gostoto energije $w$ in frekvenco $\omega$, ki je blizu frekvence prehoda $\omega_0$ med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$. Ugotoviti želimo, pri katerih pogojih lahko dosežemo obrnjeno zasedenost med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$ in s tem ojačevanje svetlobe okoli frekvence $\omega_0$ (slika 5.6 b).

★ Trinivojski laserski sistem na sliki (5.6 b) je pravzaprav poseben primer bolj realističnega štirinivojskega sistema, pri katerem gornji črpalni nivo sovpada z gornjim laserskim nivojem. Sicer se tretji vzbujeni nivo, v katerega črpamo, praviloma zelo hitro prazni v drugega vzbujenega, od tam pa počasi v prvega vzbujenega, kot kaže slika (5.6 c). Obravnava štirinivojskih sistemov je bolj zapletena od obravnave trinivojskih sistemov, ki pa za opis delovanja laserjev povsem zadošča. Podrobneje bomo večnivojske sisteme obravnavali na konkretnih laserskih primerih (poglavje 7).

Slika 5.6: Shema energijskih nivojev trinivojskega sistema in oznake koeficientov za prehode med njimi (a). V plinskih laserjih je stanje obrnjene zasedenosti navadno med vzbujenima stanjema (b), pogosto pa so laserji štiri- ali večnivojski (d).

Zapišimo enačbe za spreminjanje zasedenosti posameznih stanj. Osnovno stanje $|0\rangle$ se prazni zaradi absorpcije črpalne svetlobe in polni zaradi spontanih prehodov iz stanj $|1\rangle$ in $|2\rangle$, stimulirane prehode iz stanja $|2\rangle$ pa bomo zanemarili. Zasedenost stanja $|2\rangle$ se povečuje zaradi absorpcije s spodnjih nivojev in zmanjšuje zaradi spontanega in stimuliranega sevanja. Srednje stanje se polni s stimuliranimi in spontanimi prehodi iz stanja $|2\rangle$ in prazni zaradi absorpcije v $|2\rangle$ in spontanih prehodov v $|0\rangle$. Pri tem velja, da je vsota vseh treh zasedenosti enaka številu vseh atomov in $N_0+N_1+N_2=N$. Zasedbene enačbe so tako

$$\frac{dN_0}{dt} = -rN_0 + A_{20}N_2 + A_{10}N_1 \tag{5.52}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1 + B_{21}\,g\,w\,(N_2-N_1) + A_{21}N_2 \tag{5.53}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = rN_0 - A_{20}N_2 - A_{21}N_2 - B_{21}\,g\,w\,(N_2-N_1). \tag{5.54}$$

Pri zapisu smo predpostavili, da je $N_0 \approx N \gg N_1, N_2$, zato smo lahko črpanje $B_{20}\,u_p(N_0-N_2)$, ki je praktično konstantno, zapisali s koeficientom $r$. Mehanizem črpanja smo tako skrili v $r$ in prav nič ni pomembno, na kakšen način poteka. S tem smo obravnavo posplošili z optičnega črpanja na druge sisteme.

Zanima nas stacionarno stanje, ko so vsi trije časovni odvodi enaki nič. Tako iz druge enačbe sistema (enačba 5.53) sledi

$$B_{21}\,g\,w\,N_2 + A_{21}N_2 = B_{21}\,g\,w\,N_1 + A_{10}N_1 \tag{5.55}$$

in

$$N_2 = \frac{B_{21}\,g\,w + A_{10}}{B_{21}\,g\,w + A_{21}} N_1. \tag{5.56}$$

Brez škode lahko zanemarimo tudi spontano sevanje iz stanja $|2\rangle$ v osnovno stanje. Tako iz prve enačbe sistema (enačba 5.52) dobimo

$$N_1 = \frac{rN}{A_{10}} \tag{5.57}$$

in zapišemo razliko zasedenosti kot

$$N_2 - N_1 = \left(\frac{N_2}{N_1} - 1\right) N_1 = \frac{A_{10}-A_{21}}{A_{21}+B_{21}gw}\,\frac{rN}{A_{10}}. \tag{5.58}$$

Iz gornje enačbe sledi, da pride do obrnjene zasedenosti, če je $A_{10} > A_{21}$, torej kadar je razpadni čas stanja $|1\rangle$ krajši od razpadnega časa stanja $|2\rangle$. Tak rezultat smo seveda lahko pričakovali.

V praktičnih primerih navadno velja $A_{10} \gg A_{21}$. Ob upoštevanju zveze $j = wc$ povežemo razliko zasedenosti z gostoto vpadnega svetlobnega toka

$$N_2 - N_1 = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + \frac{B_{21} g j}{c A_{21}}} = \frac{rN}{A_{21}} \frac{1}{1 + j/j_s}. \tag{5.59}$$

Konstante smo pospravili v saturacijsko gostoto svetlobnega toka

$$j_s = \frac{cA_{21}}{B_{21} g}. \tag{5.60}$$

★ Vidimo, da je izraz za saturacijsko gostoto toka v trinivojskem sistemu (enačba 5.60) zelo podoben izrazu za saturacijsko gostoto v dvonivojskem sistemu (enačba 5.45), razlikujeta se le v faktorju 2. Do te razlike pride zaradi različnega števila stanj, saj pogoj $N_1 + N_2 = N$ v trinivojskem sistemu ne velja.

Poglejmo, kaj se zgodi s svetlobo ob vpadu na plast trinivojskega plina. Naj ima vpadna svetloba frekvenco $\omega$ in gostoto svetlobnega toka $j = wc$. Račun je zelo podoben računu za absorpcijo (enačba 5.37). Sprememba gostote toka na debelini $dz$ je enaka

$$dj = \frac{(N_2 - N_1)}{V} B_{21} g \frac{\hbar\omega}{c} j\, dz, \tag{5.61}$$

pri čemer gostota toka $j$ nastopa tudi v izrazu za razliko zasedenosti (enačba 5.59). Če to upoštevamo, dobimo diferencialno enačbo za gostoto toka

$$\frac{1}{j}\left(1 + \frac{j}{j_s}\right) dj = G\, dz \tag{5.62}$$

oziroma

$$\boxed{dj = \frac{G}{1 + j/j_s} j\, dz,} \tag{5.63}$$

ki je spet zelo podobna enačbi za absorpcijo (enačba 5.47). Z $G$ smo označili t.i. koeficient ojačenja pri majhni gostoti vpadnega toka. Podan je z

$$G = \frac{N}{V} \frac{r}{A_{21}} \sigma = \frac{rNB_{21}\hbar\omega g}{VcA_{21}}, \tag{5.64}$$

pri čemer smo koeficient ojačenja izrazili s presekom za stimulirano sevanje $\sigma$. Rešitev diferencialne enačbe (enačba 5.63) je prikazana na sliki (5.7).

Obnašanje gostote svetlobnega toka ima, tako kot pri absorpciji, dva režima. Pri majhnih gostotah toka $j \ll j_s$ je naraščanje eksponentno

$$j(z) = j_0 e^{Gz}. \tag{5.65}$$

Pri velikih gostotah toka pride do nasičenja in gostota svetlobnega toka narašča linearno

$$j(z) = j_0 + j_s G z. \tag{5.66}$$

V tem primeru je gostota toka tako velika, da vsi atomi, ki jih s črpanjem spravimo v najvišje stanje, preidejo v stanje $|1\rangle$ s stimuliranim sevanjem. Pri konstantnem črpanju je tedaj linearno naraščanje gostote toka razumljivo.

Slika 5.7: Naraščanje gostote svetlobnega toka pri optičnem ojačevanju

Vrnimo se k preseku za stimulirano sevanje $\sigma$ (enačba 5.64). Opazimo, da je enak preseku za absorpcijo (enačba 5.38) dvonivojskega sistema in tako odvisen od frekvence in sorazmeren vrednosti atomske spektralne črte pri frekvenci prehoda. Za He-Ne laser ($\lambda = 633$ nm in $\Delta\nu \sim 1,5$ GHz) znaša $\sigma \sim 10^{-16}$ m$^2$, za Nd:YAG (1064 nm in $\Delta\nu \sim 150$ GHz) pa $\sigma \sim 10^{-22}$ m$^2$. Zaradi različnih presekov, različnih gostot atomov in različnih načinov črpanja se koeficienti ojačenja v večnivojskih sistemih med seboj precej razlikujejo. Tipičen koeficient ojačenja v He-Ne laserju z dolžino $L = 0,5$ m je $GL \sim 1,015$, v Nd:YAG laserju z dolžino ojačevalnega sredstva $L = 10$ cm pa $GL \sim 50$. Pri prvem laserju je sicer velik presek za stimulirano sevanje, vendar je gostota atomov v obrnjeni zasedenosti razmeroma majhna. V drugem primeru pa močno črpanje prevlada nad majhnim presekom in pride do velikega ojačenja.

## 5.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte

Doslej smo privzeli, da svetijo vsi atomi obravnavane snovi pri isti frekvenci $\omega_0$ in z isto spektralno širino, ki smo jo popisali s funkcijo $g(\omega - \omega_0)$, z vrhom pri $\omega_0$. Če to velja, je razširitev spektralne črte homogena. Funkcija $g(\omega - \omega_0)$ je v tem primeru Lorentzove oblike

$$g_L(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \tag{5.67}$$

s širino črte $\Delta\omega_L = 2\gamma$ (glej sliko 2.4). Primera homogene razširitve sta naravna širina in razširitev zaradi trkov med atomi. Homogena razširitev je pogosto večja od obratne vrednosti razpadnega časa nivoja. V plinu namreč prihaja do trkov, ki lahko zmotijo le fazo sevanja, ne da bi povzročili prehod, razširijo pa spektralno črto. V trdni snovi pa homogeno razširitev brez prehoda povzročajo termična nihanja lokalnega polja.

Spektralna črta je lahko razširjena tudi zato, ker svetloba, izhajajoča iz različnih atomov, nima povsem iste frekvence. Tedaj govorimo o nehomogeni razširitvi. Najpomembnejši primer nehomogene razširitve je Dopplerjeva razširitev v plinu. Atomi plina vedno sevajo pri praktično isti frekvenci $\omega_0$, vendar jih zaradi gibanja opazovalec v mirujočem (laboratorijskem) sistemu v skladu z Dopplerjevim pojavom zazna pri različnih frekvencah.

Tako so opazovane frekvence posameznih atomov $\omega$ odvisne od hitrosti $v$ atoma glede na smer opazovanja. Zapišemo jih kot

$$\omega = \omega_0 - \frac{v}{c}\omega_0 = \omega_0 - k_0 v. \tag{5.68}$$

Označimo z $\mathcal{N}(v)$ porazdelitev gostote atomov po hitrostih, pri čemer se omejimo le na premikanje v smeri opazovanja. V termičnem ravnovesju je $\mathcal{N}(v)$ Maxwellova porazdelitev

$$\mathcal{N}(v) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, \tag{5.69}$$

kjer je $m$ masa posameznega atoma. Porazdelitev atomov po frekvencah izračunamo tako, da hitrost izrazimo iz enačbe (5.68), poleg tega funkcijo $g_D(\omega - \omega_0)$ normiramo. Sledi

$$g_D(\omega - \omega_0) = \frac{c}{\omega_0}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{2k_B T}\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}\right). \tag{5.70}$$

Dopplerjeva razširitev v plinu je torej Gaussove oblike. Njena širina pri polovični višini[6] je

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{mc^2}}\,\omega_0. \tag{5.71}$$

**Naloga 5.8.1** Izpelji obliko nehomogeno razširjene črte za Dopplerjevo razširitev (enačba 5.70) in pokaži, da je njena širina podana z enačbo (5.71).

Izračunajmo Dopplerjevo razširitev na primeru He-Ne laserja. Za prehod atoma neona pri $632,8$ nm in temperaturi 300 K je izračunana vrednost $\Delta\omega_D = 8 \cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1}$ oziroma $\Delta\nu = 1,4$ GHz. Dejanske izmerjene vrednosti širine črte za He-Ne laser znašajo okoli $1,5$ GHz, kar je znatno več od naravne širine črte ($1,2$ MHz). Še bolj izrazite so razširitve zaradi nehomogenosti v trdninskih laserjih, na primer v Nd:YAG laserju, v katerem je širina črte $\Delta\nu = 150$ GHz. Nehomogena razširitev zaradi Dopplerjevega pojava v redkem plinu ali zaradi nehomogenosti v trdnih snoveh je tako kar nekaj redov velikosti večja od homogene naravne širine in razširitve zaradi trkov.

★ Pri nehomogenih razširitvah bi za bolj natančen izračun morali upoštevati tudi naravno širino posameznega atoma. To bi zapisali s konvolucijo Lorentzove in Gaussove funkcije in dobili tako imenovan Voigtov profil[7], ki pa ga ne moremo preprosto analitično zapisati.

## 5.9 *Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte

V razdelku (5.5) smo obravnavali nasičenje absorpcije pri homogeno razširjenem prehodu. Pri nasičenju absorpcije, kadar prevladuje nehomogena razširitev, nastopijo pomembni novi pojavi.

Začnimo z dvonivojskim plinom, na katerega vpada močan snop monokromatske svetlobe s frekvenco $\omega_S$, ki je blizu osrednje frekvence $\omega_0$ Dopplerjevo razširjene črte. S svetlobo lahko sodeluje le skupina atomov, pri kateri se Dopplerjevo premaknjena frekvenca od $\omega_S$ ne razlikuje več kot za homogeno širino, ki jo opisuje funkcija $g(\omega - \omega_S)$. Zato ne moremo zapisati zasedbenih enačb za vse atome hkrati, ampak le za tiste, ki imajo hitrost med $v$ in $v + dv$ in ki absorbirajo svetlobo pri frekvenci $\omega_0 - kv$.

[6] Celotno širino na polovični višini imenujemo FWHM – *Full width at half maximum.*
[7] Nemški fizik Woldemar Voigt, 1850–1919.

Naj bosta $\mathcal{N}_1(v)$ in $\mathcal{N}_2(v)$ hitrostni porazdelitvi atomov v osnovnem in vzbujenem stanju. Gostota $\mathcal{N}_2(v)$ se spreminja podobno kot celotna zasedenost v homogenem primeru (enačba 5.28)

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -A\mathcal{N}_2(v) - Bg(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}\left(\mathcal{N}_2(v) - \mathcal{N}_1(v)\right), \tag{5.72}$$

kjer je $j$ gostota vpadnega svetlobnega toka. Upoštevali smo, da je zaradi Dopplerjevega pojava prehod premaknjen k frekvenci $\omega_0 - kv$. Velja tudi

$$\mathcal{N}_1(v) + \mathcal{N}_2(v) = \mathcal{N}(v) \tag{5.73}$$

in

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -\frac{d\mathcal{N}_1(v)}{dt}. \tag{5.74}$$

Vpeljimo $\mathcal{Z}(v) = \mathcal{N}_1(v) - \mathcal{N}_2(v)$. Podobno kot v enačbi (5.43) zapišemo

$$\mathcal{N}_2(v) = \frac{1}{2}\mathcal{N}(v) - \frac{1}{2}\mathcal{Z}(v) \tag{5.75}$$

in dobimo

$$\dot{\mathcal{Z}}(v) = -A\mathcal{Z}(v) + A\mathcal{N}(v) - 2Bg(\omega_S - \omega_0 + kv)\frac{j}{c}\mathcal{Z}(v). \tag{5.76}$$

V stacionarnem stanju je

$$\mathcal{Z}(v) = \frac{\mathcal{N}(v)}{1 + \frac{2B}{Ac}g(\omega_S - \omega_0 + kv)j}. \tag{5.77}$$

Če je nasičenje majhno, lahko imenovalec razvijemo

$$\mathcal{Z}(v) \approx \mathcal{N}(v)\left(1 - \frac{2B}{Ac}g(\omega_S - \omega_0 + kv)j\right). \tag{5.78}$$

Porazdelitev $\mathcal{Z}(v)$ je podobna nemoteni porazdelitvi atomov po hitrosti $\mathcal{N}(v)$, le da je pri hitrosti $v = (\omega_0 - \omega_S)/k$ zmanjšana zaradi vpliva vpadne svetlobe. Atomi s to hitrostjo namreč svetlobo absorbirajo in s tem prehajajo v gornje stanje. V porazdelitvi atomov tako nastane vdolbina, ki jo imenujemo Bennettova vdolbina[8] (slika 5.8). Širina vdolbine je določena s homogeno širino prehoda, to je s funkcijo $g(\omega_S - \omega_0 + kv)$, globina pa z gostoto vpadnega toka $j$.

Naj na snov poleg močnega vpadnega žarka pri $\omega_S$ vpada še šibko valovanje pri frekvenci $\omega'$. Izračunajmo absorpcijski koeficient za valovanje pri $\omega'$. Upoštevati moramo, da k absorpciji prispevajo vsi atomi, katerih hitrost je taka, da je prehod dovolj blizu $\omega'$. Absorpcijski koeficient potem izračunamo s seštevanjem po porazdelitvi $\mathcal{Z}(v)$ (enačba 5.41)

$$\mu(\omega') = \frac{\hbar\omega'}{c}\int \mathcal{Z}(v)Bg(\omega' - \omega_0 + k'v)\,dv. \tag{5.79}$$

Homogena razširitev je dosti manjša od Dopplerjeve širine, zato v prvem približku Lorentzovo funkcijo $g$ v enačbi (5.79) nadomestimo kar z $\delta(\omega)$, v izrazu za $\mathcal{Z}$ (enačba 5.77) pa jo pustimo. Tako je absorpcijski koeficient za šibko testno svetlobo

$$\begin{aligned}\mu(\omega') &= \frac{\hbar\omega'}{k'c}B\frac{\mathcal{N}\left(\frac{\omega_0-\omega'}{k'}\right)}{1 + \frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S - \omega')} \\ &\approx \hbar B\mathcal{N}\left(\frac{\omega_0 - \omega'}{k'}\right)\left(1 - \frac{2Bj}{Ac}g(\omega_S - \omega')\right).\end{aligned} \tag{5.80}$$

[8] Ameriški fizik William Ralph Bennett Jr., 1930–2008.

Slika 5.8: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, kjer zaradi absorbirane svetlobe nastane Bennettova vdolbina. Podobno obliko ima tudi absorpcijski koeficient.

V drugi vrstici smo uporabili približek (enačba 5.78). Vidimo, da je odvisnost $\mu(\omega')$ Gaussove oblike z vdolbino pri $\omega_S$ in je tako podobna porazdelitvi, kot jo kaže slika (5.8). Odvisnost $\mu(\omega')$ lahko tudi izmerimo, tako da spreminjamo frekvenco testnega snopa $\omega'$.

★ Merjenje absorpcije s testnim žarkom omogoča opazovanje oblike homogene črte kljub mnogo večji nehomogeni Dopplerjevi razširitvi. V moderni spektroskopiji ima zato ta metoda velik pomen.

Izračunajmo še absorpcijski koeficient za prvi, močan vpadni snop, tako da v gornjem izrazu vstavimo $\omega' = \omega_S$. Vodilni člen $\mathcal{N}((\omega_0-\omega_S)/k)$ opisuje običajno Gaussovo obliko Dopplerjevo razširjene črte, izraz v oklepaju pa da zmanjšanje absorpcije zaradi nasičenja, ki je odvisno le od vrednosti $g(0)$ in zato enako za vse $\omega_S$. Z enim samim vpadnim snopom svetlobe torej vdolbine v absorpciji ne moremo zaznati, saj je izmerjena črta kljub nasičenju Gaussove oblike.

Namesto z dvema različnima snopoma, od katerih lahko šibkemu testnemu snopu spreminjamo frekvenco, lahko vdolbino v porazdelitvi zaznamo tudi z enim samim snopom spremenljive frekvence, ki se po prvem prehodu skozi plin odbije od ogledala in vrne v nasprotni smeri. S tem se v porazdelitvi atomov v spodnjem stanju simetrično pri hitrostih $\pm(\omega_0-\omega_S)/k$ pojavita dve Bennettovi vdolbini (slika 5.9 a). Kadar je $\omega_S$ blizu $\omega_0$, se vdolbini vsaj delno prekrivata, stopnja nasičenja se poveča in v krivulji za absorpcijo svetlobe se pojavi vdolbina (slika 5.9 b). Imenujemo jo Lambova vdolbina[9].

Slika 5.9: Porazdelitev atomov po hitrosti v osnovnem stanju, če svetloba prehaja skozi plin v dveh smereh (a). Če frekvenca vpadne svetlobe približno sovpada s centralno frekvenco prehoda, se vdolbini prekrivata in absorpcija se zmanjša (b).

Zapišimo enačbe za ta primer. Vpadni snop svetlobe povzroči spremembo zasedenosti pri prehodu skozi plin v obeh smereh, zato je zdaj

$$\mathcal{Z}(v) \approx \mathcal{N}(v)\left(1-\frac{2Bj}{Ac}\left(g(\omega_S-\omega_0+kv)+g(\omega_S-\omega_0-kv)\right)\right). \tag{5.81}$$

[9] Ameriški fizik in nobelovec Willis Eugene Lamb Jr., 1913–2008.

Podobno kot prej izračunamo absorpcijski koeficient za širjenje svetlobe v pozitivni smeri

$$\begin{aligned}\mu_+(\omega_S) &= \frac{\hbar\omega}{c}B\int \mathscr{Z}(v)g(\omega_S-\omega_0+kv)\,dv \\ &\approx \hbar B\mathscr{N}\left(\frac{\omega_S-\omega_0}{k}\right)\left(1-\frac{2Bj}{Ac}\left(g(0)+g(2(\omega_S-\omega_0))\right)\right). \end{aligned} \tag{5.82}$$

Izmerjeni absorpcijski profil je odvisen od frekvence vpadne svetlobe $\omega_S$ in ima pri $\omega_0$ vdolbino, ki je zopet podobna homogeno razširjeni črti. Faktor 2 v argumentu funkcije $g(2(\omega_S-\omega_0))$ je posledica našega grobega približka, ko smo v integraciji $g(\omega_S-\omega_0+kv)$ nadomestili kar z $\delta$ funkcijo. Natančnejši račun pokaže, da je vrh pri $\omega_0$ kar oblike $g(\omega_S-\omega_0)$.

**Naloga 5.9.1** Pokaži, da je rezultat natančnejše izpeljave absorpcijskega koeficienta

$$\mu_+(\omega_S)=\hbar B\mathscr{N}\left(\frac{\omega_S-\omega_0}{k}\right)\left(1-\frac{Bj}{Ac}\left(g(0)+g(\omega_S-\omega_0)\right)\right). \tag{5.83}$$

Pri računu privzemi, da je širina Dopplerjeve porazdelitve bistveno večja od širine homogene razširitve (enačba 5.67) in Maxwellovo porazdelitev postavi pred integral.

## 5.10 *Izpeljava verjetnosti za prehod

Verjetnosti za prehod atoma iz enega stanja v drugo s sevanjem, ki smo jih opisali s fenomenološkimi Einsteinovimi koeficienti $A_{21}$ in $B_{21}$ (razdelek 5.3), je mogoče izpeljati tudi drugače. Pri tem se poslužimo kvantne elektrodinamike, kar pomeni kvantno obravnavo tako atoma kot elektromagnetnega polja. Povsem strog račun je zahteven in presega okvir te knjige, zato si na kratko oglejmo le, kako pridemo do rezultata z uporabo Fermijevega zlatega pravila.

Postavimo dvonivojski atom v votlino z elektromagnetnim poljem. Izračunajmo verjetnost, da zaradi interakcije s poljem atom preide iz stanja $|2\rangle$ v stanje $|1\rangle$, pri čemer se število fotonov v izbranem stanju elektromagnetnega polja $\alpha$ poveča z $n_\alpha$ na $n_\alpha+1$. V vseh ostalih stanjih polja naj bo število fotonov enako nič.

Med atomom in poljem privzemimo električno dipolno interakcijo

$$\hat{H}_i=-e\hat{E}(\mathbf{r},t)\hat{x}, \tag{5.84}$$

kjer je $\hat{x}$ operator koordinate elektrona v atomu. Privzeli smo, da je nihajoče polje polarizirano v smeri osi $x$. Stanja celotnega sistema, to je atoma in polja, zapišemo v obliki produkta atomskih stanj in stanja elektromagnetnega polja, pri čemer moramo navesti število fotonov v vsakem nihanju votline $\alpha$. Zapišemo okrajšano

$$|i,n_\alpha\rangle\equiv|i\rangle|\{n_\alpha\}\rangle. \tag{5.85}$$

Začetno stanje celotnega sistema naj bo tako $|2,n_\alpha\rangle$, kar pomeni, da je atom v gornjem stanju (stanju 2), polje pa ima $n_\alpha$ fotonov v enem samem stanju $\alpha$. Ustrezno končno stanje po prehodu je $|1,n_\alpha+1\rangle$.

V prvem redu teorije motenj je verjetnost za prehod iz začetnega v končno stanje na časovno enoto, pri čemer z delta funkcijo izberemo le prehod, pri katerem se ohranja energija, enaka

$$w_{21}=\frac{2\pi}{\hbar}|\langle 1,n_\alpha+1|\hat{H}_i|2,n_\alpha\rangle|^2\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha). \tag{5.86}$$

Operator elektromagnetnega polja lahko po enačbi (5.10) razvijemo po lastnih nihanjih votline

$$\hat{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}}\sum_\alpha \hat{p}_\alpha(t)E_\alpha(\mathbf{r}), \tag{5.87}$$

kjer je $\hat{p}_\alpha$ operator gibalne količine stanja $\alpha$, $E_\alpha$ pa funkcija, ki popisuje krajevno odvisnost polja. Vemo, da se vsako elektromagnetno nihanje votline obnaša kot harmonski oscilator. Zato lahko vpeljemo kreacijske in anihilacijske operatorje

$$\hat{a}^\dagger_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha\hat{q}_\alpha - i\hat{p}_\alpha) \quad \text{in} \tag{5.88}$$

$$\hat{a}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha\hat{q}_\alpha + i\hat{p}_\alpha). \tag{5.89}$$

Kreacijski operatorji povečujejo, anihilacijski pa zmanjšujejo število fotonov v danem stanju

$$\hat{a}^\dagger_\alpha|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha+1}|n_\alpha+1\rangle \quad \text{in} \tag{5.90}$$

$$\hat{a}_\alpha|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha}|n_\alpha-1\rangle. \tag{5.91}$$

Edini od nič različni matrični elementi so tako oblike

$$\langle n_\alpha+1|\,\hat{a}^\dagger_\alpha\,|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha+1} \quad \text{in} \tag{5.92}$$

$$\langle n_\alpha-1|\,\hat{a}_\alpha\,|n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha}. \tag{5.93}$$

Operatorje $\hat{p}_\alpha$ lahko izrazimo s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji in jih vstavimo v razvoj električnega polja (enačba 5.87). Dobimo

$$\hat{E}(\mathbf{r},t) = -i\sum_\alpha\sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}}\left(\hat{a}^\dagger_\alpha - \hat{a}_\alpha\right)E_\alpha(\mathbf{r}). \tag{5.94}$$

Nadaljujemo z izračunom matričnega elementa. Operator koordinate $\hat{x}$ deluje le na atomski del stanja, $\hat{E}$ pa le na elektromagnetno polje, zato velja

$$\langle 1,n_\alpha+1|\hat{H}_i|2,n_\alpha\rangle = -e\,\langle 1,n_\alpha+1|\hat{E}\,\hat{x}|2,n_\alpha\rangle \tag{5.95}$$

$$= -e\,\langle 1|\hat{x}|2\rangle\langle n_\alpha+1|\hat{E}\,|n_\alpha\rangle. \tag{5.96}$$

Vstavimo polje, ki smo ga izrazili s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji (enačba 5.94), upoštevamo zvezi (5.92) in (5.93) in zapišemo

$$\begin{aligned}\langle n_\alpha+1|\hat{E}\,|n_\alpha\rangle &= -i\sum_\beta\sqrt{\frac{\hbar\omega_\beta}{2V\varepsilon_0}}\langle n_\alpha+1|\,\hat{a}^\dagger_\beta - \hat{a}_\beta\,|n_\alpha\rangle E_\beta(\mathbf{r})\\ &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}}\sqrt{n_\alpha+1}\,E_\alpha(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{5.97}$$

Od vseh operatorjev v razvoju polja je namreč od nič različen matrični element le za kreacijski operator za stanje $\alpha$.

Vpeljimo še simbol za matrični element koordinate med atomskima stanjema $\langle 1|\hat{x}|2\rangle = x_{12}$. Iskana verjetnost za prehod iz začetnega stanja, v katerem je v votlini vzbujen atom in $n_\alpha$ fotonov, v končno stanje, v katerem je atom v osnovnem stanju in $n_\alpha+1$ fotonov v stanju $\alpha$, je tako

$$w_{21} = \frac{\pi e^2\omega_\alpha x_{12}^2}{V\varepsilon_0}(n_\alpha+1)\,E_\alpha^2(\mathbf{r})\,\delta(E_2-E_1-\hbar\omega_\alpha). \tag{5.98}$$

Verjetnost za prehod je sorazmerna z $n_\alpha + 1$ in je od nič različna, tudi če je število kvantov polja enako nič. To opisuje seveda spontano sevanje. Prispevek, ki je sorazmeren s številom že prisotnih fotonov, pa predstavlja stimulirano sevanje. Verjetnost za prehod vsebuje še kvadrat prostorske odvisnosti polja $E_\alpha^2(\mathbf{r})$. Če ne poznamo natančnega položaja atoma ali če je plin atomov enakomerno porazdeljen po votlini, lahko ta člen nadomestimo s povprečno vrednostjo. Za stoječe valovanje je to 1/2.

Kolikšna pa je verjetnost za spontano emisijo? Spontana emisija je možna v vsa elektromagnetna nihanja votline s pravo frekvenco. Celotno verjetnost za prehod atoma iz vzbujenega stanja v osnovno izračunamo tako, da seštejemo verjetnosti za prehod z izsevanim fotonom v določenem stanju. Spomnimo se, da je ta verjetnost ravno enaka Einsteinovem koeficientu $A_{21}$ (enačba 5.34)

$$A_{21} = \sum_\alpha w_{21} = \sum_\alpha \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V\varepsilon_0}\,\delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \tag{5.99}$$

Za prostorsko odvisnost polja $E^2(\mathbf{r})$ smo vzeli povprečje 1/2. Vsoto po nihanjih lahko z uporabo enačbe (5.7) spremenimo v integral in upoštevamo enačbo (5.6). Dobimo

$$A_{21} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\hbar\varepsilon_0}\int \rho(\omega_\alpha)\omega_\alpha\,\delta(\omega_0 - \omega_\alpha)\,d\omega_\alpha = \frac{e^2\omega_0^3 x_{12}^2}{\varepsilon_0 h c^3}, \tag{5.100}$$

pri čemer smo z $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ označili frekvenco prehoda. S tem smo izpeljali vrednost Einsteinovega koeficienta $A_{21}$.

★ Pri gornjem izračunu Einsteinovega koeficienta $A_{21}$ smo privzeli, da so vsi dipoli urejeni v smeri svetlobe. Če želimo rezultat izenačiti s koeficientom, ki smo ga vpeljali za izotropno sevanje črnega telesa, ga moramo pomnožiti s faktorjem $\langle\cos^2\vartheta\rangle = 1/3$.

Zaradi spontanega sevanja vzbujeno atomsko stanje nikoli ni popolnoma stacionarno. Poleg tega energija stanja s končnim razpadnim časom ni natančno določena, zato moramo verjetnost za stimulirano sevanje (enačba 5.98) malo popraviti. Delta funkcijo energije nadomestimo s končno široko funkcijo $g(\omega - \omega_0)$, ki ima vrh pri $\omega_0$. Zaradi spremembe integracijske spremenljivke nastopi še dodaten faktor $1/\hbar$ in zapišemo

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V\varepsilon_0\hbar}(n_\alpha + 1)g(\omega_\alpha - \omega_0). \tag{5.101}$$

Poglejmo še Einsteinov koeficient za stimulirano sevanje $B_{21}$. Lahko ga izrazimo iz enačbe (5.27), če upoštevamo, da je gostota energije polja $n_\alpha\hbar\omega_\alpha/V$

$$B_{21} = \frac{V\,w_{21}}{n_\alpha\,\hbar\omega_\alpha\,g(\omega_\alpha - \omega_0)} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\varepsilon_0\hbar^2}. \tag{5.102}$$

Razmerje Einsteinovih koeficientov izračunamo z uporabo enačb (5.100) in (5.102) in dobimo

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega_\alpha^3}{\pi^2 c^3}, \tag{5.103}$$

ki se ujema z razmerjem, ki smo ga izpeljali z uporabo Planckove formule (enačba 5.34). Prehojena pot jasno kaže zvezo med spontanim in stimuliranim sevanjem ter gostoto stanj elektromagnetnega polja.

## 5.11 *Rabijeve oscilacije

Ko močna svetloba vpada na dvonivojski sistem, lahko v primeru, da je frekvenca vpadne svetlobe $\omega$ blizu frekvence prehoda $\omega_0$, pride do periodične izmenjave energije med svetlobnim poljem in dvonivojskim sistemom. Oscilacije števila fotonov oziroma pričakovane vrednosti zasedenosti nivojev imenujemo Rabijeve oscilacije[10].

Obravnavajmo sklopitev dvonivojskega sistema z elektromagnetnim valovanjem v semiklasičnem modelu. To pomeni, da dvonivojski sistem obravnavamo kvantno, svetlobo, ki vpada nanj, pa kot klasično skalarno polje. V odsotnosti električnega polja zapišemo Hamiltonian za elektron kot

$$H_0 = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2|, \tag{5.104}$$

pri čemer je $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0$ frekvenca prehoda. V prisotnosti svetlobnega polja moramo dodati še člen, ki opisuje dipolno interakcijo. Celoten Hamiltonian postane časovno odvisen in ga zapišemo kot

$$H = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2| - e\hat{x}E_0\cos(\omega t). \tag{5.105}$$

Schrödingerjevo enačbo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \tag{5.106}$$

rešujemo z nastavkom

$$|\psi\rangle = c_1(t)e^{-i\omega_1 t}|1\rangle + c_2(t)e^{-i\omega_2 t}|2\rangle, \tag{5.107}$$

saj je valovna funkcija, ki popisuje stanje sistema, na splošno kombinacija obeh stanj. Nastavek (enačba 5.107) in Hamiltonian (enačba 5.105) vstavimo v enačbo (5.106), ki jo enkrat pomnožimo z $\langle 1|$, drugič pa z $\langle 2|$ in izpeljemo sistem dveh sklopljenih enačb

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{\hbar}V\cos(\omega t)e^{-i\omega_0 t}c_2 \qquad \text{in} \qquad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{\hbar}V\cos(\omega t)e^{i\omega_0 t}c_1, \tag{5.108}$$

pri čemer je $V = -\langle 1|e\hat{x}E_0|2\rangle$. Zapišemo še $\cos(\omega t)$ kot kompleksno število in zanemarimo hitro spreminjajočo se komponento pri $\omega_0 + \omega$, tako da enačbi prepišemo v

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}Ve^{-i\Delta t}c_2 \qquad \text{in} \qquad \frac{dc_2}{dt} = -\frac{i}{2\hbar}Ve^{i\Delta t}c_1, \tag{5.109}$$

kjer je $\Delta = \omega_0 - \omega$. Dodajmo še začetni pogoj, da je sistem v osnovnem stanju in torej $c_1(0) = 1$ in $c_2(0) = 0$. Rešitvi enačb (5.109) sta tako

$$c_1(t) = e^{-i\Delta t/2}\left(\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right) \qquad \text{in} \tag{5.110}$$

$$c_2(t) = \frac{V}{i\hbar\Omega}e^{i\Delta t/2}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \tag{5.111}$$

Pri tem smo vpeljali Rabijevo frekvenco

$$\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{V}{\hbar}\right)^2} = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\langle 1|\hat{x}|2\rangle eE_0}{\hbar}\right)^2}. \tag{5.112}$$

[10] Ameriški fizik in nobelovec Isidor Isaac Rabi, 1898–1988.

**Naloga 5.11.1** Pokaži, da enačbi (5.110) in (5.111) rešita sistem enačb (5.109) ob izbranih začetnih pogojih.

Poglejmo rezultat podrobneje. Verjetnost, da najdemo atom v stanju $|2\rangle$, je enaka

$$P_2(t) = |c_2(t)|^2 = \frac{V^2}{\hbar^2\Omega^2}\sin^2(\Omega t/2). \tag{5.113}$$

Če je frekvenca vpadne svetlobe točno enaka frekvenci prehoda, je $\Delta = 0$ in $\Omega = V/\hbar$. Takrat je amplituda nihanja zasedenosti vzbujenega stanja kar enaka 1 in sistem v celoti periodično prehaja iz osnovnega stanja v vzbujeno in nazaj. To pomeni, da prihaja izmenično do popolne absorpcije svetlobe in do popolne stimulirane emisije. Pri odstopajoči vpadni frekvenci se amplituda nihanja zmanjša, hkrati pa se poveča frekvenca oscilacij. Frekvenca oscilacij pa ni odvisna zgolj od frekvence vpadnega valovanja, ampak tudi od njegove amplitude električne poljske jakosti. Zelo groba ocena Rabijeve frekvence je zato $\Omega \sim$ MHz.

Slika 5.10: Rabijeve oscilacije za tri različne vrednosti odstopanja frekvence vpadne svetlobe od frekvence prehoda $\Delta = \omega_0 - \omega$. Z naraščajočim odstopanjem se amplituda oscilacij zmanjšuje, njihova frekvenca pa povečuje.

★ Rabijeve oscilacije niso omejene samo na optične prehode, ampak se pojavijo pri vrsti dvonivojskih sistemov, ki interagirajo z spreminjajočim se zunanjim poljem. Poznamo jih na primer pri jedrski magnetni resonanci (NMR) ali kvantnih logičnih vezjih.

# 6. Laser

V prejšnjih poglavjih smo spoznali resonatorje, pojasnili ojačevanje svetlobe in opisali črpanje, ki je potrebno za ojačevanje optičnega signala. V tem poglavju bomo vsa ta spoznanja združili in komponenete sestavili v eno samo napravo – laser. Opisali bomo delovanje laserjev in spoznali njihove prednosti pred navadnimi svetili. Zapisali bomo zasedbene enačbe in razložili delovanje laserjev, spoznali zanimive spremljujoče pojave, opisali načine delovanja laserjev v sunkih in na koncu predstavili še semiklasični model laserja.

## 6.1 Laser

Spoznali smo, da se svetloba pri prehodu skozi sredstvo z obrnjeno zasedenostjo med dvema nivojema ojačuje. Postavimo tako sredstvo v optični resonator. Na začetku nastaja predvsem spontano izsevana svetloba, ki se med zrcaloma resonatorja odbija in ob vsakem preletu skozi snov postopoma ojačuje. Vzbujajo se nihanja resonatorja z nihajnimi frekvencami blizu frekvence atomskega prehoda, pri katerih snov ojačuje. Energija nihanj z dovolj majhnimi izgubami narašča, dokler se ojačenje ne izenači z izgubami. Sistem preide v stacionarno stanje in seva močno koherentno svetlobo. Tak izvor svetlobe imenujemo laser. Beseda laser je nastala iz kratice za *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* – ojačenje svetlobe s stimuliranim sevanjem.

Slika 6.1: Shema laserja s ključnimi deli: ojačevalno sredstvo, črpalni mehanizem in resonator

★ Kot klasično analogijo za laser vzemimo klarinet, ki je sestavljen iz cevi in ustnika. Cev deluje kot resonator, v katerem nastane stojni zvočni val, pri čemer je frekvenca stoječega vala določena z dolžino cevi in s številom vozlov. Naloga ustnika je dovajanje energije in s tem vzdrževanje konstantne amplitude nihanja. To glasbenik doseže s pihanjem v ustnik in tresenjem prožnega jezička, ki s tresljaji proizvaja zvok. Tresenje jezička je približno periodično in vsebuje mnogo različnih frekvenc, tudi take, ki ustrezajo frekvenci stoječih valov v cevi. Ko amplituda tlaka v cevi naraste nad neko mejo, pride do zanimivega pojava. Nihanje tlaka v gornjem koncu cevi povratno deluje na ustnik in ga sili, da niha s frekvenco najmočneje vzbujenega stoječega vala v cevi, druge frekvence pa zamrejo. Moč pihanja gre le še v nihanje jezička s pravo frekvenco in ojačuje nihanje zračnega stolpca. Tako se s povratno zvezo med nihanjem jezička in stoječim valovanjem v cevi vzdržuje stoječe valovanje s konstantno amplitudo.

V grobem ima laser tri ključne sestavne dele: ojačevalno sredstvo, črpalni mehanizem in ukrivljeni zrcali, ki tvorita resonator (slika 6.1). Črpalni mehanizem vzdržuje obrnjeno zasedenost v ojačevalnem sredstvu, resonator pa omogoča, da se svetloba dovolj ojači in tako stimulirano sevanje prevlada nad spontanim. Odbojnost vsaj enega od zrcal mora biti manjša od 1, da skozenj lahko izhaja svetloba.

Pri osnovnem opisu delovanja laserja se omejimo na najpreprostejši model in privzemimo, da frekvenca le enega resonatorskega nihanja sovpada s frekvenco prehoda aktivne snovi. Ta privzetek v večini laserjev ni avtomatično izpolnjen, vendar ga je pogosto mogoče doseči z dodatnimi elementi v resonatorju. Aktivno snov oziroma ojačevalno sredstvo v laserju stalno črpamo in s tem vzdržujemo obrnjeno zasedenost.

Naj bo $W$ energija svetlobnega valovanja v resonatorju. Zaradi izgub skozi zrcali in zaradi absorpcije ter sipanja v resonatorju se energija na en obhod resonatorja zmanjša za (enačba 4.33)

$$\Delta W_{\text{izgube}} = -\Lambda W = -\left(1-\mathscr{R}_1+1-\mathscr{R}_2+2\alpha L\right)W, \tag{6.1}$$

kjer so $\Lambda$ celotne izgube, $\alpha$ so izgube na enoto poti zaradi absoprcije in sipanja, $L$ je dolžina resonatorja, $\mathscr{R}_1$ in $\mathscr{R}_2$ pa sta odbojnosti zrcal. V ojačevalnem sredstvu, v katerem vzdržujemo obrnjeno zasedenost, pride do ojačevanja s stimuliranim sevanjem. Energija nihanja resonatorja se tako na en obhod po enačbi (5.63) poveča za

$$\Delta W_{\text{ojačenje}} = \frac{G}{1+W/W_s}\,W\,2L'. \tag{6.2}$$

Namesto saturacijske gostote svetlobnega toka $j_s$ smo vpeljali saturacijsko energijo $W_s = V j_s/c$, $L'$ pa označuje dolžino ojačevalnega sredstva. Račun pogosto poenostavimo, tako da vzamemo $L' = L$, tukaj pa zaradi jasnosti obdržimo ločen zapis. Privzeli smo tudi, da je ojačenje na en obhod dovolj majhno, da enačbe (5.63) ni treba integrirati.

V stacionarnem stanju se zmanjšanje energije zaradi izgub ravno izenači s povečanjem energije zaradi ojačenja. Zapišemo

$$|\Delta W_{\text{izgube}}| = |\Delta W_{\text{ojačenje}}|, \tag{6.3}$$

od koder sledi

$$\Lambda W = \frac{G\,2L'}{1+W/W_s}\,W. \tag{6.4}$$

Ta enačba ima dve rešitvi za energijo svetlobnega nihanja. Prva je $W = 0$, druga pa

$$\boxed{W = W_s\left(\frac{G}{G_{\text{pr}}}-1\right),} \tag{6.5}$$

pri čemer je

$$\boxed{G_{\text{pr}} = \frac{\Lambda}{2L'}.} \tag{6.6}$$

Združimo obe rešitvi: energija svetlobe v laserju je pod določeno vrednostjo ojačenja, imenujemo jo ojačenje na pragu delovanja $G_{\text{pr}}$, enaka nič, nad pragom pa linearno narašča z ojačenjem $G$ (slika 6.2). Ojačenje je seveda odvisno od stopnje obrnjene zasedenosti, ta pa je povezana z močjo črpanja.

Slika 6.2: Odvisnost energije svetlobe v laserju od ojačenja

Izhodna moč laserja je enaka energiji, ki zapusti resonator skozi izhodno zrcalo, deljeni s časom obhoda resonatorja $2L/c$

$$P = (1-\mathscr{R}_1)\frac{c}{2L}W. \tag{6.7}$$

Ker so vsi predfaktorji v gornji enačbi konstantni, je izhodna moč kar sorazmerna z energijo svetlobe v resonatorju. Odvisnost izhodne moči laserja od črpanja je tako do konstante enaka, kot je prikazana na sliki (6.2).

**Naloga 6.1.1** Izračunaj izhodno moč iz laserja pri dani dolžini resonatorja $L = L'$, odbojnosti enega zrcala $\mathscr{R}_2 = 1$, notranjih izgubah na enoto dolžine $\alpha$ in ojačenju $G$. Pokaži, da je izhodna moč največja pri odbojnosti izhodnega zrcala

$$\mathscr{R}_1 = 1 - 2\alpha L\left(\sqrt{\frac{G}{\alpha}} - 1\right). \tag{6.8}$$

## 6.2 Zasedbene enačbe

Za podrobnejši opis delovanja laserja zapišimo zasedbene enačbe. Enačbam za zasedenost atomskih nivojev v trinivojskem sistemu (enačbe 5.52–5.54) dodamo še enačbo za energijo lastnega valovanja v resonatorju. Še naprej obravnavajmo primer, ko je vzbujeno le eno resonatorsko stanje, opazujemo pa prehode med prvim in drugim vzbujenim stanjem (slika 5.6 b).

Preden zapišemo enačbe, napravimo še nekaj poenostavitev. Najprej privzamemo, da je razpadni čas spodnjega laserskega stanja $|1\rangle$, ki ga določa koeficient $A_{10}$, dosti krajši od razpadnega časa zgornjega stanja $|2\rangle$. Tedaj vsi atomi iz spodnjega stanja zelo hitro preidejo v osnovno stanje in $N_1 \approx 0$, če le ni preveč stimuliranega sevanja. Zanemarimo tudi spontano sevanje iz drugega vzbujenega nivoja $A_{20} \approx 0$. Celoten sistem potem opišemo z dvema spremenljivkama: prva je $N_2$, ki označuje zasedenost drugega vzbujenega stanja in hkrati približno obrnjeno zasedenost; druga je število fotonov $n$, ki opisuje energijo v izbranem stanju resonatorja. Gostota energije polja je $w = n\hbar\omega/V$, pri čemer je $V$ volumen resonatorja.

Zasedbeni enačbi sta

$$\frac{dN_2}{dt} = rN - A_{21}N_2 - B_{21}gN_2\frac{\hbar\omega}{V}n = rN - A_{21}N_2 - \frac{\sigma c}{V}N_2 n \tag{6.9}$$

in

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma c}{V}N_2(n+1) - \frac{2}{\tau}n. \tag{6.10}$$

Prva enačba sledi neposredno iz enačbe (5.54) ob upoštevanju zgoraj navedenih poenostavitev. Drugo pa dobimo s sledečim razmislekom. Energija svetlobe oziroma število fotonov v resonatorju se povečuje predvsem zaradi stimuliranega sevanja, ki predstavlja zadnji člen v enačbi (6.9). Vemo pa, da je verjetnost za prehod atoma iz višjega v nižje stanje z izsevanjem fotona v izbrano stanje elektromagnetnega polja sorazmerna z $n+1$ (enačba 5.101), kjer je $n$ število fotonov v izbranem stanju. Če torej namesto $n$ v zadnjem členu enačbe (6.9) pišemo $n+1$, opišemo poleg stimuliranega sevanja tudi prispevek spontanega sevanja. Dodamo še člen, s katerim popišemo zmanjševanje energije svetlobe v resonatorju zaradi izgub, kar opišemo z razpadnim časom $\tau/2$ (enačba 4.31).

Gornji enačbi predstavljata sistem dveh sklopljenih diferencialnih enačb za časovni razvoj števila fotonov v resonatorskem stanju in za zasedenost gornjega atomskega stanja. Enačbi sta nelinearni in ju ne znamo analitično rešiti. Vseeno pa lahko nekaj povemo o takem sistemu.

Poglejmo najprej stacionarne rešitve, za katere velja $\dot{N}_2 = 0$ in $\dot{n} = 0$. Iz enačbe (6.9) izrazimo $N_2$ in ga vstavimo v enačbo (6.10). Sledi

$$\frac{2}{\tau} n \left(A_{21} V + \sigma c n\right) = \sigma c r N (n+1). \tag{6.11}$$

Enačbo zapišemo še bolj pregledno, če vpeljemo koeficient ojačenja $G$ (enačba 5.64) in ojačenje na pragu $G_{\mathrm{pr}}$ (enačbi 4.35 in 6.6)

$$G_{\mathrm{pr}} n \left(1 + \frac{\sigma c}{V A_{21}} n\right) = G(n+1). \tag{6.12}$$

Vpeljemo še brezdimenzijsko konstanto $p$, pri čemer upoštevamo zvezo med Einsteinovimi koeficienti (enačba 5.34)

$$p = \frac{V A_{21}}{\sigma c} = \frac{V A_{21}}{B_{21} \hbar \omega g} = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3 g} \simeq \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3} \Delta\omega. \tag{6.13}$$

V zadnjem izrazu smo privzeli, da je $g \simeq 1/\Delta\omega$. Parameter $p$ je torej približno enak produktu gostote stanj elektromagnetnega polja v resonatorju (enačba 5.6) in širine atomskega prehoda (ter volumna), torej kar številu vseh stanj v frekvenčnem intervalu atomskega prehoda. To število je navadno precej veliko $p \sim 10^8$–$10^{10}$.

★ S primerjavo izraza za $p$ (enačba 6.13) z izrazom za saturacijsko gostoto toka (enačba 5.60) vidimo, da $p$ predstavlja število fotonov v resonatorju, pri katerem pride do nasičenja ojačenja, če je frekvenca nihanja resonatorja blizu centra atomske črte.

Enačbo (6.12) prepišemo

$$\frac{n^2}{p} - \left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right) n - \frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} = 0 \tag{6.14}$$

s pozitivno rešitvijo

$$n = \frac{p}{2} \left( \left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}} - 1\right)^2 + \frac{4G}{p G_{\mathrm{pr}}}} \right). \tag{6.15}$$

Ker je $p$ zelo veliko število, lahko koren razvijemo, če le ni ojačenje preveč blizu praga, ko je $G/G_{\mathrm{pr}} \simeq 1$.

Pod pragom je $G < G_{\mathrm{pr}}$ in

$$n \approx \frac{p}{2}\left(\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}}-1\right)+\left(1-\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}}\right)+\frac{2G}{p(G_{\mathrm{pr}}-G)}\right)=\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}-G}. \tag{6.16}$$

Pri razvoju korena smo upoštevali, da mora biti pozitiven. Nad pragom je število fotonov

$$\boxed{n \approx p\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}}-1\right)=\frac{W_s}{\hbar\omega}\left(\frac{G}{G_{\mathrm{pr}}}-1\right).} \tag{6.17}$$

Rezultat, ki je po pričakovanju skladen z enačbo (6.5), si oglejmo podrobneje. Pod pragom so izgube večje od črpanja in gre praktično vsa moč, ki jo dovedemo v sistem, preko spontanega sevanja v veliko število stanj elektromagnetnega polja. Število fotonov v izbranem resonatorskem nihanju je tako okoli ena do neposredne bližine praga, kjer hitro naraste (slika 6.3), nad pragom je reda velikosti $p$. Nad pragom povsem prevlada stimulirano sevanje v eno samo izbrano nihanje resonatorja. Prehod preko praga je zaradi velikega $p$ tako hiter, da ga ni mogoče izmeriti. Izjema so polprevodniški laserji, katerih volumen – in posledično tudi $p$ – je tako majhen, da je mogoče opaziti zvezen prehod preko praga.

Slika 6.3: Odvisnost števila fotonov v resonatorju od ojačenja za $p = 10^5$.

Izračunjamo še stacionarno zasedenost zgornjega atomskega nivoja. Iz enačbe (6.10) sledi

$$\boxed{N_2 = \frac{2V}{\tau\sigma c}\frac{n}{n+1} \approx \frac{2V}{\tau\sigma c}.} \tag{6.18}$$

Na pragu je po enačbi (6.15) $n = \sqrt{p}$. Sledi

$$N_{2\mathrm{pr}} = \frac{2V}{\tau\sigma c}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+1}. \tag{6.19}$$

Ker je $p$ zelo veliko število, iz gornjih enačb sledi, da zasedenost višjega nivoja oziroma obrnjena zasedenost narašča do bližine praga, nad pragom pa je praktično konstantna in skoraj natanko enaka kot na pragu. To ni težko razumeti. Nad pragom je število fotonov v resonatorju veliko in linearno narašča z močjo črpanja. S tem se povečuje hitrost praznjenja gornjega atomskega stanja s stimuliranim sevanjem, kar ravno izniči učinek povečanja črpanja. V stacionarno delujočem laserju obrnjene zasedenosti torej ni mogoče povečati nad vrednost na pragu $N_{2\mathrm{pr}}$. To ima pomembne praktične posledice, kot bomo videli v nadaljevanju.

Obravnava laserja z zasedbenimi enačbami je seveda zelo groba. Nismo upoštevali, da je prostorska odvisnost polja v delujočem laserju drugačna od lastnega stanja praznega resonatorja. Poleg tega smo privzeli, da so atomi lahko le v lastnih energijskih stanjih, kar je res le v primeru stacionarnih stanj brez zunanjega, časovno odvisnega polja svetlobe. Bolj podroben pristop je semiklasični model, pri katerem za opis svetlobe uporabimo klasično valovno enačbo, za atome pa kvantno mehaniko (glej poglavje 6.12). Ta model zadošča za opis skoraj vseh pojavov v laserjih razen vpliva spontanega sevanja. Za dosledno obravnavo tega je treba svetlobo opisati s pomočjo kvantne elektrodinamike, kar presega okvir te knjige.

Povzemimo na kratko, kaj smo spoznali o delovanju enofrekvenčnega laserja. Pri dovolj velikem ojačenju, ki ravno pokriva izgube resonatorja, je v stacionarnem stanju energija in s tem amplituda izbranega lastnega nihanja resonatorja različna od nič. Frekvenca svetlobe je določena z izbranim lastnim stanjem resonatorja, ki določa tudi prostorsko odvisnost valovanja v resonatorju in obliko izhodnega snopa. V navadnem stabilnem resonatorju je polje po obliki zelo blizu Gaussovem snopu, zato je tak tudi izhodni snop. Gaussova prostorska odvisnost izhodnega snopa je morda najpomembnejša lastnost laserjev. Gaussov snop se, kot vemo, najmanj širi zaradi uklona in ga je mogoče zbrati v piko približne velikosti valovne dolžine. Laser se tako najbolj približa idealno točkastemu izvoru svetlobe.

## 6.3 Spektralna širina enega laserskega nihanja

Povejmo še nekaj o spektralni širini svetlobe enofrekvenčnega laserja. Če bi se lastno stanje elektromagnetnega polja v resonatorju obnašalo kot klasično harmonsko nihalo, bi bil spekter laserja neskončno ozek. Vendar imajo laserji končno spektralno širino – v idealnem primeru zaradi kvantizacije elektromagnetnega polja, v praksi pa zaradi zunanjih motenj. Poskusimo oceniti razširitev zaradi vpliva kvantizacije. Zaradi nje je poleg stimuliranega sevanja vedno prisotno tudi spontano sevanje. To predstavlja kvantni šum, ki vodi do razširitve spektra.

Predstavimo amplitudo nihanja $E(t)$ na izbranem mestu v resonatorju kot kompleksno število, ki ga v kompleksni ravnini določata dolžina $|E(t)|$ in faza $\varphi$ (slika 6.4). Pri tem fazo določimo glede na neko začetno izbrano fazo. Ker je energija svetlobe sorazmerna s številom fotonov, je dolžina sorazmerna s korenom iz števila fotonov v izbranem nihanju. Stimulirano sevanje, ki ravno pokriva izgube resonatorja, vzdržuje dolžino $|E(t)|$ praktično konstantno, nespremenjena ostaja tudi faza. Spontano sevanje velikosti amplitude nihanja ne spreminja dosti, vendar stohastična narava spontano izsevanih fotonov vpliva na njeno fazo. Majhen prispevek spontanega sevanja preko spreminjajoče se faze skrajša koherenčni čas in določa spodnjo mejo za širino spektralne črte.

Slika 6.4: Amplituda polja v resonatorju in njena sprememba zaradi spontanega sevanja

Pri spontani emisiji se izseva en foton s poljubno fazo. Prispevek h kompleksni amplitudi ima torej dolžino 1 in poljubno smer (slika 6.4). Zanima nas povprečje kvadrata spremembe faznega kota pri enem spontano izsevanem fotonu

$$\overline{\Delta\varphi_1^2} = \overline{\left(\frac{\cos\psi}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1}{2\overline{n}}, \tag{6.20}$$

kjer $\psi$ označuje kot med fazo celotnega polja in spontano izsevanega fotona. Zaporedne spontane emisije so med seboj neodvisne, zato izračunamo povprečni kvadrat spremembe faze pri $m$ emisijah tako, da seštejemo povprečne kvadrate za posamezne fotone

$$\overline{\Delta\varphi_m^2} = m\overline{\Delta\varphi_1^2} = \frac{m}{2\overline{n}}. \tag{6.21}$$

Ocenimo še število spontano izsevanih fotonov na časovno enoto. Vemo, da stimulirano sevanje ravno pokrije izgube resonatorja, zato je stimulirano izsevanih fotonov na časovno enoto $2\overline{n}/\tau$. Vemo tudi, da je razmerje med verjetnostjo za stimulirano in spontano sevanje enako številu fotonov v danem stanju polja (enačba 5.98), zato je število spontanih sevanj na časovno enoto kar $2/\tau$. Tako je število spontano izsevanih fotonov v času $t$ enako $m = 2t/\tau$ in

$$\overline{\Delta\varphi^2(t)} = \frac{t}{\overline{n}\tau}. \tag{6.22}$$

Čas $t_p$, v katerem se faza znatno spremeni, je torej velikostnega reda

$$t_p \sim \overline{n}\tau = \frac{W}{\hbar\omega}\tau = \frac{P}{\hbar\omega}\tau^2. \tag{6.23}$$

Ker je število fotonov v nihanju nad pragom zelo veliko ($\sim 10^9$ v majhnem He-Ne laserju), $\tau$ pa je $\sim 10^{-7}$, je karakteristični čas za fazno razširitev idealnega laserja $t_p \sim 100$ s.

Iz enačbe (6.23) vidimo tudi, da je spektralna širina, ki je podana z $1/t_p$, obratno sorazmerna z izhodno močjo laserja. Spodnjo mejo za spektralno širino pri dani izhodni moči laserja podaja Schawlow-Townseva limita[1]

$$\Delta\nu_{\min} = \frac{\pi h\nu}{P}\Delta\nu_R^2, \tag{6.24}$$

pri čemer $\Delta\nu_R$ predstavlja širino nihanja praznega resonatorja.[2] V neposredni bližini praga, kjer je $\overline{n} \sim 1$, je spektralna širina približno enaka širini nihanj praznega resonatorja.

Dejanski laserji seveda nimajo niti približno tako ozkega spektra, kot smo ga pravkar ocenili. Vemo, da je frekvenca laserja določena z dolžino resonatorja ($\nu = nc/2L$), pri čemer je $n$ zelo veliko celo število. Že majhna sprememba dolžine resonatorja povzroči spremembo frekvence laserja, pri znatnejši spremembi dolžine pa lahko pride tudi do preskoka vzbujenega stanja resonatorja, to je števila $n$. Dolžina resonatorja se spreminja predvsem zaradi zunanjih mehanskih motenj in zaradi spreminjanja temperature. Če se posebej ne potrudimo s konstrukcijo resonatorja, so fluktuacije frekvence kar reda velikosti razmika med sosednimi stanji resonatorja, to je reda velikosti $\sim 100$ MHz. Fluktuacije dolžine je mogoče zmanjšati s skrbno konstrukcijo, temperaturno stabilizacijo in uporabo materialov z majhnim toplotnim raztezkom. Na tak način je mogoče dobiti laser z efektivno spektralno širino pod $\sim 1$MHz.

[1] Ameriška fizika in nobelovca Arthur Leonard Schawlow, 1921–1999, in Charles Hard Townes, 1915–2015.

[2] Natančnejši izračun odstopa od preprosto izpeljanega za faktor 2. V zapisanem izrazu je že upoštevan pravilen predfaktor.

★ Zapisali smo, da lahko s posebno konstrukcijo laserjev dosežemo spektralno širino pod $\sim$ 1MHz. Vendar najmanjša dosežena spektralna širina znaša $\sim$ 10 mHz, kar je še 8 velikostnih redov manj! Gre za prav poseben laser iz monokristalov silicija, hlajenega na $-150$ °C. Fluktuacije dolžine resonatorja so pogojene s termičnimi fluktuacijami v odbojnih plasteh, ki znašajo okoli $10^{-17}$m. Koherenčna dolžina takega laserja je več milijonov kilometrov[3].

Tu velja opozoriti, da je narava spektralne razširitve v laserju drugačna kot v navadnih svetilih. V drugem poglavju smo videli, da intenziteta svetlobe navadnega svetila fluktuira na časovni skali koherenčnega časa, ki je obraten spektralni širini (poglavje 2.2). Šum navadnih svetil je torej amplitudno moduliran šum. Pri enofrekvenčnem laserju je drugače. Amplituda in intenziteta izhodne svetlobe sta konstantni, fluktuira le frekvenca oziroma faza. Šum laserja je torej v obliki frekvenčne modulacije.

## 6.4 Primerjava laserjev in navadnih svetil

Povzemimo, kar smo se do zdaj naučili o laserjih in jih primerjajmo z navadnimi svetili. Primerjajmo enofrekvenčni laser, v katerem je vzbujeno le eno osnovno stanje resonatorja Gaussove oblike, z navadnim nekoherentnim izvorom svetlobe.

Svetlobni snop iz laserja ima dve takoj očitni odliki: je zelo usmerjen in zelo enobarven. Prva lastnost je posledica tega, da je lastno stanje stabilnega resonatorja Gaussove oblike in je zato tak tudi izhodni snop. Divergenca Gaussovega snopa je posledica uklona in je najmanjša možna. Valovne fronte izhodne svetlobe so gladke in na dani razdalji ves čas enake, zato je laserski snop prostorsko idealno koherenten. Koherenten Gaussov snop lahko z ustrezno optiko zberemo v piko velikosti valovne dolžine, s čimer dosežemo že pri razmeroma majhni izhodni moči zelo veliko gostoto svetobnega toka. To je zelo uporabno v tehnologiji, na primer za natančno in čisto obdelavo materialov, ter v medicini, kjer laserje uporabljajo za zahtevne kirurške posege.

Kako pa je z navadnimi svetili? V njih atomi sevajo neodvisno, zato izsevana svetloba ni prostorsko koherentna. Valovna fronta na danem mestu je nepravilna in se v koherenčnem času znatno spremeni. Vendar tudi iz svetlobe navadnega nekoherentnega svetila lahko pridobimo koherenten snop, če na dano razdaljo od svetila postavimo zaslonko, ki je manjša od koherenčne ploskve na tistem mestu (glej razdelek 2.5). Ocenimo moč tako dobljenega koherentnega snopa za zaslonko.

Svetilo naj ima svetlost $B$[4]. Moč koherentnega snopa za zaslonko, ki prepušča svetlobo skozi prostorski kot $\Delta\Omega$, je (slika 6.5)

$$P = BS_0\Delta\Omega = \frac{BS_0S_c}{z^2} \sim \frac{BS_0}{z^2}\frac{\lambda^2 z^2}{S_0} = B\lambda^2. \tag{6.25}$$

Pri tem je $S_0$ površina svetila, $z$ oddaljenost zaslonke od svetila, $S_c$ pa velikost koherenčne ploskve, za katero smo uporabili oceno (enačba 2.35). Da iz $S_0 = 1$ mm$^2$ velikega svetila dosežemo koherenten snop svetlobe z valovno dolžino okoli 550 nm, mora biti premer zaslonke, ki jo postavimo 1 m od izvora, okoli 0,6 mm. V tem primeru znaša moč, ki prehaja skozi zaslonko, pri svetlosti 100 W/cm$^2$ le približno $3\cdot 10^{-7}$ W. Pri podobni divergenci žarka je močno navadno svetilo torej štiri rede velikosti šibkejše od zelo šibkih laserjev z močjo 1 mW.

[3] Phys. Rev. Lett. **118**, 263202 (2017).

[4] Svetilnost je moč, izsevana v dan prostoski kot $I = dP/d\Omega$; svetlost pa je svetilnost na enoto ploskve $B = I/S = dP/Sd\Omega$.

Slika 6.5: K izračunu moči koherentnega snopa svetlobe iz nekoherentnega svetila

Druga odlična lastnost svetlobe iz enofrekvenčnega laserja je njena zelo majhna spektralna širina. Z nekaj truda je ta lahko pod 1 kHz, emisijske črte v plinu pa so zaradi Dopplerjeve razširitve široke vsaj nekaj GHz, pa še to le v razmeroma redkem in hladnem plinu, kjer je svetlost majhna. Primerjajmo spektralno gostoto moči laserja in navadnih svetil. Majhen He-Ne laser seva 1 mW v približno $10^7$ Hz in spektralna gostota moči je $dP/d\nu \sim 10^{-10}$ W/Hz. Po drugi strani zelo svetla živosrebrna svetilka seva v močno razširjene spektralne črte s širino okoli 10 nm, kar ustreza $\sim 10^{13}$ Hz. Spektralna gostota v koherentnem snopu, ki smo ga pripravili iz navadne svetilke, je tako le okoli $3 \cdot 10^{-20}$ W/Hz. Šolski He-Ne laser torej prekaša najmočnejše nekoherentno svetilo za 10 velikostnih redov. Z laserji je seveda mogoče doseči znatno večje moči, v sunkih tipično do okoli $10^{12}$ W, tako da po spektralni gostoti moči v koherentnem snopu laserji prekašajo običajna svetila 20–25 velikostnih redov. Verjetno v zgodovini težko najdemo še kak drug izum, ki je prinesel tolikšno izboljšavo v neki bistveni količini in tako ni nenavadno, da je prihod laserjev v začetku 60-ih let povzročil preporod optike.

## 6.5 Večfrekvenčni laser

Do zdaj smo obravnavali laserje, v katerih je bilo vzbujeno eno samo valovanje. Vendar je ojačevalna širina večine aktivnih sredstev navadno večja od razlike med frekvencami posameznih stanj resonatorja. V plinih, na primer, je ojačevalna širina zaradi Dopplerjevega pojava vsaj nekaj GHz, lastne frekvence resonatorja pa so pri 30 cm dolgem resonatorju razmaknjene za 500 MHz. Tako se lahko zgodi, da ojačenje v laserju za več nihanj hkrati presega ojačenje na pragu in vzbujenih je več nihanj. Svetloba iz takega večfrekvenčnega laserja ni monokromatska, temveč je sestavljena iz množice ozkih črt znotraj ojačevalnega pasu. Izsevana svetloba tako ni bistveno bolj monokromatska od ustrezne spektralne komponente svetlečega plina. Ostaja pa seveda prostorsko koherentna.

Za holografijo, interferometrijo in nekatere spektroskopske uporabe potrebujemo ozko spektralno črto. Zato moramo poskrbeti, da je vzbujeno le eno samo nihanje resonatorja, najbolje tisto, ki je najbližje vrhu ojačenja aktivnega sredstva. To dosežemo tako, da za vsa ostala nihanja povečamo izgube, na primer s Fabry-Perotovim etalonom, ki ga vstavimo v laserski resonator (slika 6.6). Njegova prepustnost v odvisnosti od krožne frekvence $\omega$, debeline $L$, lomnega količnika $n$, odbojnost sten $\mathscr{R}$ in nagiba glede na os resonatorja $\varphi$ je podana z enačbo (4.9)

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2} \sin^2\left(\frac{n\omega}{c} L \cos\varphi\right)} \tag{6.26}$$

in jo kaže slika (4.2).

Debelino etalona in njegov nagib izberemo tako, da vrh prepustnosti sovpada z izbranim stanjem resonatorja. Izgube za ostala nihanja, ki bi sicer bila ojačena, se tako povečajo in laser sveti le pri eni sami izbrani frekvenci. Ta proces je shematsko prikazan na sliki (6.7): izmed vseh možnih stanj v resonatorju (a) svetijo le tista, za katere je ojačenje nad pragom (b). Ko v resonator dodamo Fabry-Perotov etalon z razmeroma velikim razmikom med sosednjimi vrhovi prepustnosti (c), je ojačeno eno samo nihanje (d). Ker zadošča že zmerno povečanje izgub, je odbojnost sten etalona navadno dokaj nizka, pod 0,5.

Slika 6.6: Shema laserja s Fabry-Perotovim etalonom

Slika 6.7: Lastne frekvence resonatorja (a) in frekvenčna odvisnost ojačenja z označenim pragom delovanja (b). Z zeleno so označene tiste lastne frekvence, ki se v laserju ojačujejo. Ko dodamo Fabry-Perotov etalon z dano prepustnostjo (c), povečamo izgube za vse načine, ki bi sicer bili ojačeni, razen za enega. Tako dosežemo delovanje laserja pri eni sami frekvenci (d).

★ Nagib etalona omogoča natančno spreminjanje izbrane frekvence, poleg tega pa je nujen, da se neprepuščena svetloba odbije ven iz smeri osi resonatorja. Če bi bila os etalona vzporedna z osjo resonatorja, bi se pojavile dodatne resonance, kar bi močno motilo delovanje laserja.

Opisali smo, kako v laserju dosežemo delovanje pri enem samem longitudinalnem nihanju. Poleg tega je treba omejiti tudi ojačenje višjih prečnih nihanj. To navadno dosežemo z zaslonkami, saj so snopi višjih redov bolj razširjeni od osnovnega.

## 6.6 Relaksacijske oscilacije

Stacionarno delovanje laserjev smo že dodobra spoznali. Za obravnavo nestacionarnega delovanja pa se moramo vrniti k obravnani zasedbenih enačb (6.9) in (6.10). Na splošno je treba zapisan sistem diferencialnih enačb reševati numerično, vseeno pa lahko nekaj povemo o obnašanju laserja v bližini stacionarnega delovanja.

Spet se omejimo na enofrekvenčni laser, v katerem zasedenost vzbujenega stanja in število fotonov v njem opišemo z enačbama (6.9) in (6.10). Najprej zaradi preglednosti vpeljemo brezdimnezijski čas $t' = tA$ in $\tau' = \tau A$, kar pomeni, da merimo čas v enotah življenjskega časa laserskega nivoja. Ponovno uporabimo parameter $p = VA/(B\hbar\omega g)$ (enačba 6.13), ki pomeni število stanj elektromagnetnega polja v volumnu $V$ in znotraj spektralne širine laserskega nivoja. Enačbi zapišemo

$$\frac{dN_2}{dt'} = -\frac{nN_2}{p} - N_2 + N_{20} \tag{6.27}$$

$$\frac{dn}{dt'} = \frac{nN_2}{p} - \frac{2}{\tau'}n. \tag{6.28}$$

Pri tem smo vpeljali konstanto $N_{20} = rN/A$, ki ima tudi nazornen pomen. Predstavlja zasedenost, ki bi jo dobili pri danem stacionarnem črpanju, če v izbranem stanju ne bi bilo fotonov in s tem ne stimuliranega sevanja. Meri torej moč črpanja. V enačbi za hitrost spreminjanja števila fotonov smo zanemarili prispevek spontanega sevanja, za katerega smo že ugotovili, da se pozna le do praga.

Poiščimo približne rešitve sistema sklopljenih diferencialnih enačb z linearizacijo. Naj laser najprej deluje stacionarno, v nekem trenutku pa se nekoliko izmakne iz stacionarnega stanja. To se lahko zgodi, na primer, če spremenimo moč črpanja. Trenutno zasedenost $N_2$ in število fotonov $n$ lahko zapišemo v obliki

$$N_2 = N_{2s} + x \qquad \text{in} \qquad n = n_s + y, \tag{6.29}$$

kjer sta $N_{2s}$ in $n_s$ vrednosti v stacionarnem stanju. Zanju velja

$$N_{2s} = \frac{2p}{\tau'} \tag{6.30}$$

in

$$n_s = p\frac{N_{20} - N_{2s}}{N_{2s}} = p(a-1). \tag{6.31}$$

Enačba (6.30) je v skladu s tem, da je stacionarna zasedenost enaka zasedenosti na pragu, ta pa je odvisna od izgub resonatorja. Razmerje $a = N_{20}/N_{2s}$ je mera za moč črpanja in mora biti v delujočem laserju večje od 1. V večini praktičnih primerov doseže vrednosti $a \sim 5$.

Vstavimo nastavka (enačbi 6.29) v enačbi (6.27 in 6.28). Dobimo sistem enačb

$$\frac{dx}{dt'} = -\frac{n_s N_{2s}}{p} - N_{2s} + N_{20} - \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - x \tag{6.32}$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{n_s N_{2s}}{p} - \frac{2}{\tau'}n_s + \frac{1}{p}(n_s x + N_{2s} y + xy) - \frac{2}{\tau'}y. \tag{6.33}$$

Ker sta $x$ in $y$ majhna v primerjavi s stacionarnimi vrednostmi, lahko mešan produkt $xy$ zanemarimo. Vsi členi, ki vsebujejo le stacionarne vrednosti, dajo ravno 0, saj smo jih tako določili.

Če upoštevamo še izraza za stacionarni vrednosti (enačbi 6.30 in 6.31), zapišemo linearizirani diferencialni enačbi za odmika od stacionarnih vrednosti

$$\frac{dx}{dt'} = -ax - \frac{2}{\tau'}y \quad \text{in} \quad \frac{dy}{dt'} = (a-1)x. \tag{6.34}$$

Zapisan linearni sistemi diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti rešimo tako, da poiščemo rešitev v obliki eksponentne funkcije

$$x = x_0 e^{\lambda t'} \qquad in \qquad y = y_0 e^{\lambda t'}. \tag{6.35}$$

Dobljeni homogeni sistem linearnih enačb

$$(a+\lambda)x_0 + \frac{2}{\tau'}y_0 = 0 \tag{6.36}$$

$$-(a-1)x_0 + \lambda y_0 = 0 \tag{6.37}$$

ima netrivialno rešitev le, če je njegova determinanta enaka nič

$$\lambda^2 + a\lambda + \frac{2}{\tau'}(a-1) = 0. \tag{6.38}$$

Rešitvi sta

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2}{\tau'}(a-1)}. \tag{6.39}$$

Obnašanje rešitve je odvisno od velikosti brezdimenzijskega relaksacijskega časa nihanja resonatorja $\tau' = A\tau$. Kratek račun pokaže, da je za $\tau' > 2$ izraz pod korenom za vse vrednosti $a$ pozitiven in laser se vrača v stacionarno stanje eksponentno. Za $\tau' < 2$ pa je koren v določenem območju parametra $a$ imaginaren in laser se vrača v stacionarno stanje z dušenim nihanjem, ki mu pravimo relaksacijske oscilacije. Primer takega nihanja pri vključitvi laserja kaže slika (6.8).

Slika 6.8: Relaksacijske oscilacije intenzitete laserja po vklopu

Poglejmo še primer. Vzemimo vrednost $\tau \sim 10^{-7}$ s in razpadno konstanto laserskega nivoja $A \sim 10^5$/s. Tedaj je $\tau' \sim 10^{-2}$ in relaksacijske oscilacije se pojavijo pri vseh dosegljivih vrednostih črpanja nad pragom, to je za $a > 1$. Ker $a$ v praksi ni nikoli dosti večji od 3–5, je krožna frekvenca oscilacij v brezdimenzijskih enotah približno enaka $\omega_r' \sim 1/\sqrt{\tau'}$. Ko preidemo nazaj na prave enote časa, dobimo $\omega_r \sim \sqrt{A/\tau}$. Krožna frekvenca relaksacijskih oscilacij je v tem primeru velikostnega reda geometrijske sredine med razpadnima konstantama nihanja resonatorja in atomskega stanja. Tipične vrednosti frekvence relaksacijskih oscilacij so $\sim 10^5$ Hz, karakteristični čas dušenja pa $\sim 10^{-5}$ s.

★ Relaksacijske oscilacije so praktično pomembne, saj določajo gornjo mejo hitrosti, s katero lahko izhodna moč laserja sledi modulaciji črpanja. Poleg tega se pri tej frekvenci pojavi resonanca, pri kateri se šum črpanja ojačeno prenaša v šum izhodne moči.

## 6.7 Sunkovni laserji

Kadar potrebujemo veliko izhodno moč laserja pri zmerni povprečni porabi energije, zvezno delujoči laserji, ki smo jih obravnavali do zdaj, niso primerni. Poslužiti se moramo sunkovnih laserjev, ki v kratkem časovnem intervalu delujejo z zelo veliko izhodno močjo.

Poglejmo primer. Močan zvezno delujoč laser ima izhodno moč 10 kW. Sunkovni laser pa naj oddaja svetlobo v 10 ns dolgih sunkih s povprečno energijo 1 J in s ponovitvijo 1000/s. Povprečna moč, s katero deluje tak laser, je 1 kW, moč, ki jo dosega v sunkih, pa je 100 MW. Tako pri nižji povprečni moči laserja dosežemo moči, ki so za 5–10 velikostnih redov večje od moči zvezno delujočih laserjev.

V grobem ločimo dva načina sunkovnega delovanja laserjev. V prvem primeru periodično spreminjamo črpalno moč, v drugem pa periodično spreminjamo izgube v resonatorju. V slednjo skupino uvrščamo laserje na preklop dobrote in laserje, ki uklepajo faze valovanj.

Obravnavajmo najprej najpreprostejši način, pri katerem moduliramo črpanje. To dosežemo na primer z bliskavko ali drugim sunkovnim laserjem. V intervalu črpanja je ojačenje večje od izgub in svetloba izhaja iz laserja, ko pa črpanja ni, so izgube prevelike in laser ne sveti. Tipična frekvenca modulacije črpanja je $\nu \sim 20$ Hz. Najbolj pogosto se modulacija črpanja uporablja v polprevodniških laserjih, saj je zelo preprosto modulirati črpalni električni tok.

Vendar se pri modulaciji črpanja lahko pojavi težava. Ko ob močnem črpanju obrnjena zasedenost znatno preseže zasedenost praga (v nestacionarnem stanju je to mogoče), laser posveti in v kratkem času zasedenost pade nazaj pod prag. Če tedaj črpanje še traja, zasedenost naraste in laser ponovno posveti. To se lahko večkrat ponovi. Razmiki med zaporednimi sunki so reda velikosti periode relaksacijskih oscilacij, so pa lahko precej nepravilni (slika 6.9). Pri takem režimu delovanja v posameznem sunku ne dobimo razpoložljive energije črpanja v enem samem lepo oblikovanem sunku, kar močno omejuje uporabnost tega pristopa.

Slika 6.9: Delovanje sunkovnega laserja z periodično moduliranim črpanjem, pri katerem se pojavijo neželene oscilacije

## 6.8 Delovanje v sunkih s preklopom dobrote

Namesto modulacije črpanja lahko v sunkovnih laserjih periodično spreminjamo izgube. Čim večje so namreč izgube, višji je prag za delovanje laserja in večja je lahko stopnja inverzije. Tako v sistemu atomov shranimo več energije, ki se lahko izseva iz sistema preko stimuliranega sevanja. Ko je enkrat ustvarjena velika obrnjena zasedenost, izgube zelo hitro zmanjšamo. Optično ojačenje je veliko in energija svetlobe v kratkem času močno naraste. S tem se tudi obrnjena zasedenost hitro zniža na vrednost močno pod pragom. Predstavljamo si lahko, da dobimo prvi nihaj relaksacijskih oscilacij, le da je začetno stanje daleč od stacionarnega in zato linearni približek ne drži več. Iz laserja dobimo kratek in zelo močan sunek svetlobe, pri čemer je energija sunka skoraj tolikšna kot je bila energija obrnjene zasedenosti. Tipične dolžine sunkov, ki jih dosežemo na ta način, so $t \sim 10$ ns, sunki pa se ponavljajo s frekvenco $\nu \sim 1$–$100$ kHz. Dogajanje v laserju kaže slika (6.10).

★ V elektrotehniki se izgube resonatorjev podajajo z dobroto $Q$, to je razmerjem frekvence lastnega stanja in njegove širine. Ker s povečanjem izgub spremenimo širino črte in z njo dobroto, opisano tehniko imenujemo preklop dobrote.

Slika 6.10: Izgube ($\Lambda$), relativno ojačenje ($G/G_p$), zasedenost višjega nivoja ($N_2$) in izsevana moč laserja ($P$) v odvisnosti od časa, kadar laser deluje v režimu preklopa dobrote.

Izgube resonatorja je mogoče spreminjati na več načinov. Najpreprosteje je vrteti eno od ogledal. Tedaj je resonator uglašen le v kratkem trenutku, ko je ogledalo pravokotno na os. Metoda je dokaj uspešna, a zastarela. Boljši in danes najbolj razširjen način je z vgradnjo elektro-optičnega ali akusto-optičnega modulatorja, o katerih bomo govorili v nadaljevanju (poglavje 9). Na kratko povejmo, da lahko z njimi električno krmilimo izgube z visoko frekvenco.

Kot smo že povedali, nelinearnih laserskih enačb za zasedenost in število fotonov (enačbi 6.9) in (6.10) ne moremo analitično rešiti. Preden jih podrobneje pogledamo, napravimo nekaj ocen. Dolžina sunka je odvisna od hitrosti, s katero se izprazni zgornji laserski nivo. To se ne more zgoditi hitreje kot v nekaj preletih sunka skozi resonator. Trajanje sunka je torej vsaj nekajkrat $2L/c$, to je za 15 cm dolg resonator vsaj nekaj ns.

Ocenimo še hitrost naraščanja števila fotonov na začetku in njegovega upadanja na koncu sunka. Zapišimo najprej še enkrat enačbi za zasedenost in število fotonov, pri čemer upoštevajmo, da nas zanima le dogajanje v času sunka, ki je zeko kratek v primerjavi z atomskim razpadnim časom, zato ustrezni člen v enačbi (6.9) zanemarimo. Navadno je tudi črpanje prešibko, da bi med sunkom znatno vplivalo na zasedenost, zato lahko člen $rN$ izpustimo. S črpanjem seveda ustvarimo začetno zasedenost $N_{20}$. Tako ostane

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{\sigma c}{V} n N_2 \tag{6.40}$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\sigma c}{V} n N_2 - \frac{2}{\tau} n. \tag{6.41}$$

Na začetku sunka je $n$ majhen, $N_2$ pa velik in njegova vrednost se ne razlikuje dosti od začetne vrednosti $N_{20}$. Število fotonov na začetku sunka tako narašča približno eksponentno

$$n(t) = n_0 e^{t N_{20} \sigma c/V} = n_0 e^{t/\tau_r}. \tag{6.42}$$

Začetnega števila fotonov ne poznamo, vemo pa, da je velikostnega reda 1, saj predstavlja spontano emisijo. Da $n$ naraste na znatno vrednost, recimo več od $10^{10}$ fotonov, je potreben čas blizu 30 $\tau_r$.

Proti koncu sunka $N_2$ pojema zaradi sevanja svetlobe in $N_2 \to 0$. Ostane samo še en člen, ki da preprosto rešitev

$$n(t) = \tilde{n}_0 e^{-2t/\tau}. \tag{6.43}$$

Eksponentno pojemanje števila fotonov na koncu sunka je torej določeno z izgubami resonatorja (enačba 4.35).

Dogajanja v vmesnih časih ne moremo enostavno popisati, lahko pa najdemo medsebojno zvezo med $n$ in $N_2$, če iz enačb eliminiramo čas. Izrazimo $dt$ iz enačbe (6.40) in ga vstavimo v enačbo (6.41). Sledi

$$dn = -dN_2 + \frac{\tilde{N}_2}{N_2} dN_2 \ , \tag{6.44}$$

kjer smo zapisati $\tilde{N}_2 = 2V/(\sigma c \tau)$. Enačbo brez težav integriramo

$$\boxed{n = N_{20} - N_2 + \tilde{N}_2 \ln \frac{N_2}{N_{20}}.} \tag{6.45}$$

Pri tem smo privzeli, da je na začetku sunka $n = 0$ in $N_2 = N_{20}$.

Iz dobljene zveze najprej izračunamo, kolikšna je končna zasedenost $N_{2k}$. Na koncu mora biti zopet $n = 0$, kar da transcendentno enačbo za $N_{2k}$

$$\ln \frac{N_{2k}}{N_{20}} = \frac{N_{2k}}{N_{20}} - \frac{N_{20}}{\tilde{N}_2}. \tag{6.46}$$

Enačba ima obliko

$$\ln \frac{x}{a} = x - a, \tag{6.47}$$

kjer je $x = N_{2k}/N_{20}$ in $a = N_{20}/\tilde{N}_2$, in jo lahko preprosto numerično rešimo. Izkaže se, da kadar je začetna zasedenost $N_{20}$ le malo nad pragom, tudi končna zasedenost $N_{2k}$ ne pade dosti pod prag, zato je izraba energije slabša. Pri večjih začetnih vrednostih $N_{20}$ pa pade končna zasedenost praktično na nič. Za $a = 2$, na primer, je $x = 0,41$, medtem ko je že pri $a = 4$ vrednost $x$ le še 0,08.

Ko poznamo začetno in končo vrednost zasedenosti, lahko izračunamo celotno energijo sunka $W = \hbar\omega(N_{20} - N_{2k})$. Če je začetna vrednost dovolj nad pragom, lahko končno zasedenost zanemarimo in je

$$W \approx \hbar\omega N_{20}. \tag{6.48}$$

Trenutna moč, ki izhaja iz laserja, je dana s $P = (\hbar\omega 2/\tau)n$. Največja je v vrhu sunka, ki je določen z $dn/dN_2 = 0$. Ta enačba ima rešitev pri $N_2 = \tilde{N}_2$, vrh sunka je torej natanko tedaj, ko pade zasedenost $N_2$ na prag $\tilde{N}_2$.

Izsevana moč je tedaj

$$P_{\max} = \frac{n_{\max}\hbar\omega}{2L/c}(1-\mathscr{R}) = \frac{2n_{\max}\hbar\omega}{\tau}. \tag{6.49}$$

Ko vstavimo še vrednost za $n_{\max}$, dobimo

$$P_{\max} = \frac{2\hbar\omega}{\tau}\left(N_{20} - \tilde{N}_2 - \tilde{N}_2 \ln(N_{20}/\tilde{N}_2)\right). \tag{6.50}$$

Ker je navadno $N_{20} \gg \tilde{N}_2$, je $n_{\max} \approx N_{20}$ in

$$P_{\max} \approx \frac{2\hbar\omega N_{20}}{\tau}. \tag{6.51}$$

Poglejmo primer. Naj bo presek za stimulirano sevanje $\sigma = B\hbar\omega g/c$ okoli $10^{-19}\mathrm{cm}^2$ in začetna gostota zasedenosti $N_{20}/V = 10^{19}\mathrm{cm}^3$, kar so tipični podatki za neodimov laser. Tedaj je $\tau_r =$ 30 ps in čas naraščanja sunka okoli $\sim$ 1 ns. Število fotonov se nato zmanjšuje s krakterističnim razpadnim časom resonatorja $\tau/2 \sim 2L/(c(1-\mathscr{R}))$. Za dosego kratkih sunkov svetlobe je zato v laserjih s preklopom dobrote odbojnost izhodnega zrcala navadno dokaj nizka, recimo $0,5$. Pri $L = 15$ cm je tako $\tau = 4$ ns. Celotno trajanje sunka je v izbranem primeru tako $\sim$ 10 ns, pri čemer traja okoli 100 ns od preklopa dobrote, da sunek zraste iz šuma spontanega sevanja. Energija sunka je blizu $N_{20}\hbar\omega$, to je pri aktivnem volumnu $0,5$ cm$^2$ nekaj desetink joula. Od tod lahko ocenimo, da je moč v vrhu sunka velikostnega več 10 MW.

## 6.9 Uklepanje faz

Krajše sunke kot s preklopom dobrote je mogoče dobiti z uklepanjem faz. Pri tem gre za povsem drugačen način, ki je prav presentljiva manifestacija koherentnosti laserske svetlobe. Spoznali smo že, da v laserju navadno niha več nihanj hkrati, pri čemer so njihove frekvence enakomerno razmaknjene za $\Delta\omega = \pi c/L$ (enačba 4.5). Celotno električno polje v neki točki v laserju zapišemo kot vsoto

$$E(t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} A_m e^{i(\omega_0 + m\Delta\omega)t + i\varphi_m(t)}, \tag{6.52}$$

pri čemer je $N$ število vseh vzbujenih nihanj. Upoštevali smo, da ima vsako nihanje lahko poljubno fazo $\varphi_m(t)$, ki je na splošno predvsem zaradi zunanjih motenj slučajna funkcija časa. Zaradi tega se tudi celotno polje slučajno spreminja, kar močno zmanjšuje uporabnost takega laserja.

Denimo, da nekako dosežemo enake faze vseh nihanj. Poleg tega zaradi enostavnosti računa privzemimo, da so tudi vse amplitude $A_m$ enake. Tedaj postane vsota (6.52) geometrijska in jo brez težav seštejemo

$$E(t) = A_0\, e^{i\omega_0 t} \frac{\sin(N\Delta\omega t/2)}{\sin(\Delta\omega t/2)}. \tag{6.53}$$

Moč izhodne svetlobe ima časovno odvisnost

$$P(t) = P_0 \frac{\sin^2(N\Delta\omega t/2)}{\sin^2(\Delta\omega t/2)}, \tag{6.54}$$

ki jo kaže slika (6.11). Predstavlja periodično zaporedje sunkov, ki si sledijo s periodo $T = 2\pi/\Delta\omega = 2L/c$, kar je enako času obhoda svetlobe v resonatorju. Konstanta $P_0$ je moč posameznega nihanja. Moč v vrhu sunka je tako $N^2P_0$, povprečna moč pa $NP_0$. Računsko je pojav enak kot uklon na mrežici in lahko rečemo, da imamo opravka z interferenco v času. Dolžina sunkov je

$$\tau_{ML} = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_G}, \tag{6.55}$$

ker je $N$ ravno število nihanj znotraj širine ojačevanja $\Delta\omega_G$. Dolžina sunka je torej obratno sorazmerna s širino ojačevanja aktivnega sredstva.

Slika 6.11: Časovna odvisnost moči večfrekvenčnega laserja z enakimi (uklenjenimi) fazami

Premislimo še, kakšna je prostorska odvisnost električnega polja v resonatorju. Polje na danem mestu opisuje enačba 6.53. Še krajevno odvisnost dobimo, če v 6.53 zamenjamo $t$ s $(t - z/c)$. To pa predstavlja svetlobni paket, ki potuje sem in tja med ogledali resonatorja. Na izhodnem ogledalu se ga vsakič nekaj odbije, nekaj pa gre ven iz resonatorja (slika **??**). Razmik med sunki, ki izhajajo iz resonatorja, je $2L$, prostorska dolžina posameznega sunka pa $\tau_{ML}c = 2L/N$.

V našem računu predpostavka, da so vse amplitude $A_m$ enake, ni prav nič bistvena za osnovne ugotovitve. Če vzamemo realističen primer, da so amplitude oblike $A_m = A_0 \exp[(m\Delta\omega/\Delta\omega_G)^2]$, vsote 6.52 ne znamo točno sešteti, lahko pa jo približno pretvorimo v integral, ki je Fouriereva transformiranka Gaussove funkcije (Pri prehodu z diskretne vsote na integral seveda izgubimo

Slika 6.12: Prostorska odvisnost fazno uklenjenih sunkov.

periodičnost zaporedja sunkov.). Ta je zopet Gaussova funkcija, katere širina je obratna vrednost širine prvotne funkcije, prav podobno, kot smo dobili zgoraj. Odvisnost amplitud nihanj od $m$ vpliva torej le na točno obliko sunkov, osnovne ugotovitve pa se ne spremene. (Naloga).

Pač pa je predpostavka, da so vse faze $\varphi_m$ enake, bistvena. V naši dosedanji sliki mnogofrekvenčnih laserjev so resonatorska stanja med seboj neodvisna, zato so faze poljubne in se zaradi motenj lahko še spreminjajo. Da dobijo za vsa nihanja isto vrednost, moramo poskrbeti posebej. Tako *uklepanje faz* je mogoče doseči na več načinov. Ena možnost je, da moduliramo izgube resonatorja s frekvenco, ki je ravno enaka razliki frekvenc med resonatorskimi stanji. To ni težko razložiti. Naj bo modulator tak, da je večino časa zaprt, le v razmikih $T = 2L/c$ naj bo kratek čas odprt. Postavimo ga tik ob eno ogledalo. Tedaj se v resonatorju očitno lahko uspešno ojačuje le kratek sunek, kakršen je na sliki **??**. Izgube za vsa nihanja bodo majhne le tedaj, kadar bodo vse faze enake. V praksi ni potrebno, da je modulacija tako izrazita. Običajno zadošča sinusna modulacija izgub, kjer je relativna prepustnost v minimumu za nekaj destink manjša od maksimalne.

Kako pri modulaciji pride do uklepanja faz, lahko uvidimo še drugače. Modulacija amplitude posameznega nihanja povzroči, da se v spektru nihanja pojavita še stranska pasova pri frekvencah $\omega_m \pm \Delta\omega$. Ta se ravno pokrivata z obema sosednjima nihanjema in se konstruktivno prištejeta, če imata enako fazo. S tem pa so tudi izgube manjše in ima delovanje laserja z uklenjenimi fazami najnižji prag. Zadnji razmislek tudi pove, da ni dobra le amplitudna modulacija, temveč tudi fazna (ali frekvenčna), saj se tudi tedaj pojavijo stranski pasovi.

Za modulacijo se najpogosteje uporabljajo akustooptični modulatorji, pri katerih izkoriščamo uklon svetlobe na stoječih zvočnih valovih v primernem kristalu (Glej 7. poglavje). Frekvenca zvočnega vala mora biti enaka polovici zahtevane modulacijske frekvence, za 1,5 m dolg laser torej 50 MHz.

Poleg opisanega aktivnega postopka je mogoče faze ukleniti tudi tako, da v resonator postavimo plast barvila, ki močno absorbira svetlobo laserja pri majnhi gostoti toka, pri veliki gostoti toka pa pride do nasičenja absorpcije (glej razdelek 4.5), zato postane barvilo prozorno. Na začetku imamo v laserju predvsem spontano sevanje, ki se pri enem prehodu skozi aktivno snov deloma ojači. Barvilo najmanj absorbira največjo fluktuacijo. Pri dovolj velikem ojačenju bo ta rastla in spet dobimo fazno uklenjeni sunek. Ker mora po prehodu sunka absorpcija v barvilu zopet hitro narasti, mora biti relaksacijski čas barvila zelo kratek, v območju pikosekund.

Z uklepanjem faz je danes mogoče dobiti sunke z dolžino pod 100 fs ($10^{-13}$ s). Tak sunek traja le še nekaj deset optičnih period. S posebnimi prijemi jih lahko še skrajšajo na okoli 10 fs. Če je

potrebna večja energija sunkov, jih ojačijo, kar ne pokvari mnogo osnovnega sunka. Zelo kratke svetlobne sunke danes na široko uporabljajo za študij hitre molekularne dinamike in kratkoživih vzbujenih elektronskih stanj v polvodnikih in mnogih drugih snoveh. Z njimi se je časovna ločljivost povečala za nekaj redov velikosti [**?**].

## 6.10 *Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo

Še ožjo lasersko črto lahko dobimo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Ideja je taka: frekvenco svetlobe, ki izhaja iz laserja, primerjamo z nekim standardom in iz razlike ugotovimo spremembo dolžine resonatorja. Eno od obeh zrcal je nameščeno na piezoelektričnem nosilcu, ki mu z električno napetostjo lahko spreminjamo dolžino in tako popravimo dolžino resonatorja.

Pogalvitna težava je seveda, kako najti dovolj stabilen primerjalni standard za frekvenco. Ena možnost je, da izhodno svetlobo spustimo skozi konfokalni interferometer, ki je skoraj v resonanci z laserjem in ima dovolj ozek vrh prepustnosti. Majhen premik frekvence laserja bo povzročil, da se bo spremenil skozi interferometer prepuščeni svetlobni tok. Na prvi pogled je videti, da s tem nismo nič pridobili, saj bo resonančna frekvenca interferometra stabilna tudi le toliko, kot je stabilna njegova dolžina. Vendar je z izolacijo in temperaturno stabilizacijo možno držati dolžino praznega resonatorja - interferometra - mnogo natančneje kot dolžino laserja, v katerem imamo aktivno sredstvo, ki mu moramo dovajati energijo.

Druga možnost je stabilizirati laser na primerno molekularno absorpcijsko črto. Te so lahko zelo ozke, zato je tudi spekter laserja lahko izredno ozek, pod 1 kHz. Pri tem moti Dopplerjeva razširitev absorpcijske črte, ki pa se ji je mogoče izogniti. Kako to napravimo in kako je bila s tem omogočena nova definicija metra, si bomo pogledali v razdelku ????.

V drugem razdelku smo videli, da je efektivna spektralna širina enofrekvenčnega laserja odvisna od fluktuacij dolžine optične poti svetlobe pri preletu resonatorja. Na to lahko poleg spreminjanja geometrijske dolžine vpliva še spreminjanje lomnega količnika. Če se posebej ne potrudimo, laser sveti nekje blizu vrha ojačevalnega pasu, pri čemer frekvenca pleše za znaten del razmika med resonatorskimi stanji. V šolskem He-Ne laserju je to na primer nekaj deset MHz.

Bistveno manjšo širino lahko dosežemo z aktivno stabilizacijo dolžine resonatorja. Pri tem je pogalvitni problem, kako dobiti primerjalni standard. S stabilizacijo na pomožni interferometer, ki smo jo na kratko opisali v drugem razdelku, lahko dobimo zelo ozko črto, ki pa ima le toliko natančno določeno frekvenco, kot poznamo dolžino interferometra. Včasih, na primer za natančna interferometrična merjenja dolžin, s tem nismo zadovoljni in potrebujemo drug, absoluten standard.

Tak standard za frekvenco so ozki prehodi v primernem razredčenem plinu. Vendar naletimo na težavo. Zaradi Dopplerjevega pojava so absorpcijske črte močno razširjene. Pomagamo si s pojavom nasičenja absorpcije, o katerem smo govorili v razdelku 4.9. Tam smo videli, da se pri dvakratnem prehodu monokromatskega snopa svetlobe skozi plin v nasprotnih smereh pojavi v sredini Dopplerjevo razširjene črte vdolbina, ki ima obliko homogeno razširjene črte. Homogena širina je lahko mnogo manjša od Dopplerjeve in je zato vdolbina uporabna kot frekvenčni standard.

V laserski resonator postavimo poleg aktivnega sredstva še celico s primernim plinom, ki ima absorpcijsko črto v bližini vrha ojačenja aktivnega sredstva. Za He-Ne laser pri 633 nm so to na primer pare ioda. Zaradi absorpcije se povečajo izgube v laserju in izhodna moč se zmanjša. Spreminjajmo sedaj dolžino resonatorja in s tem frekvenco laserja. Ko se ta približa na homogeno širino centru absorpcijske črte pri $\omega_0$, se absorpcija zmanjša in s tem se moč laserja poveča.

Slika 6.13: Odvisnost moči laserja z nasičenim absorberjem od frekvence

Slika 6.14: Shema stabilizacije laserja na nasičeno absoprcijo

Odvisnost moči laserja z absorberjem od dolžine kaže slika **??**. Povečanje moči v vrhu običajno ni prav veliko, manj od procenta.

Shema stabilizacije na nasičeno absorpcijo je prikazana na sliki **??**. Eno od zrcal resonatorja je na piezoelektričnem nosilcu. Nanj vodimo izmenično napetost s frekvenco $\Omega$ in s tem moduliramo frekvenco laserja, da se vozi preko absorpcijske vdolbine pri $\omega_0$. Zaradi tega se spreminja tudi izhodna moč laserja, ki jo opazujemo s fotodiodo. Kadar je srednja frekvenca laserja enaka $\omega_0$, se moč zmanjša simetrično pri odmikih navzgor in navzdol od $\omega_0$ in se zato spreminja z dvojno frekvenco modulacije $2\Omega$. Kadar pa je srednja frekvenca laserja nekoliko odmaknjena od $\omega_0$, se izhodna moč pri odmiku v zrcala v eno stran spremeni drugače kot v drugo, kar pomeni, da je v signalu s fotodiode tudi komponenta s frekvenco $\Omega$. Da držimo srednjo frekvenco laserja enako $\omega_0$, moramo torej meriti komponento izhodne moči pri modulacijski frekvenci in s povratno zanko skrbeti, da je ta enaka nič.

Komponento signala s frekvenco $\Omega$ zaznamo s faznim detektorjem, ki deluje tako, da signal množi z refenčno modulacijsko napetostjo. V produktu dobimo istosmerno komponento, ki je sorazmerna signalu pri frekvenci $\Omega$ in ki jo izločimo z nizkopasovnim filtrom. Izhod iz faznega detektorja je tako sorazmeren odmiku srednje frekvence laserja od $\omega_0$. Preko primernega ojačevalnika ga vodimo na piezoelektrični nosilec zrcala in tako popravljamo dolžino laserja.

Napravimo kvantitativno oceno opisane stabilizacijske sheme. Odvisnost izhodne moči od frekvence laserja $\omega$ lahko približno zapišemo v obliki

$$P(\omega) = P_0 + \frac{P_1 \gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad . \tag{6.56}$$

$P_0$ je moč laserja brez saturacijskega vrha pri $\omega_0$, $P_1$ pa povečanje moči pri $\omega_0$. Predpostavili smo, da se ojačenje laserja in nehomogeno razširjeni del absorpcije ne spreminjata mnogo preko homogene širine absorberja in je zato $P_0$ približno konstantna. Frekvenco laserja moduliramo:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega + a \sin \Omega t \quad . \tag{6.57}$$

Z $\Delta\omega$ smo označili odstopanje srednje frekvence laserja od centra absorpcijske črte $\omega_0$. Če sta $a$ in $\Delta\omega$ majhna v primeri s homogeno širino $\gamma$, lahko imenovalec v enačbi 6.56 razvijemo:

$$P(\omega) = P_0 + P_1[1 - \frac{1}{\gamma^2}\Delta\omega^2 + \frac{2}{\gamma^2} a \Delta\omega \sin \Omega t - \frac{a^2}{\gamma^2} \sin^2 \Omega t] \quad . \tag{6.58}$$

Amplituda signala pri $\Omega$ je $2P_1 a \Delta\omega/\gamma^2$. Najmanjša razlika, ki jo lahko zaznamo, je določena s šumom meritve. Kot bomo videli v poglavju o detekciji svetlobe, je osnovni izvor šuma fotodiode Poissonov šum števila parov elektron-vrzel, ki nastanejo zaradi fotoefekta v p-n spoju. Najmanjša sprememba svetlobne moči, ki jo lahko izmerimo, je (glej 10??. poglavje)

$$P_N \simeq \sqrt{\hbar \omega P \frac{1}{\tau}} \, , \tag{6.59}$$

kjer je $P$ celotna svetlobna moč, ki vpada na diodo, $\tau$ pa čas meritve, ki je v našem primeru določen s časovno konstanto nizkopasovnega filtra na izhodu faznega detektorja.

Vzemimo na primer He-Ne laser, stabiliziran na iodove pare. Povprečna moč laserja $P_0$ naj je 10 mW in $P_1 = 0.1$ mW. Širina absorpcijske črte $\gamma = 10^6$ s$^{-1}$. Izberimo amplitudo modulacije $a = 10^5$ s$^{-1}$ in $\tau = 10^{-4}$ s. Časovna konstanta $\tau$ ne sme biti prevelika, določa namreč, kako hitro popravljamo dolžino laserja. Gornje vrednosti dajo za najmanjšo zaznavno moč pri $\Omega$ $P_N = 0.5 \times 10^{-8}$ W. Najmanjše merljivo odstopanje frekvence laserja je tedaj

$$\Delta\omega_N = \frac{P_N \gamma^2}{2P_1 a} = 2.5 \times 10^3 \, s^{-1} \, . \tag{6.60}$$

Takšno in še boljšo stabilnost frekvence tudi zares dosežejo. Pozoren bralec bo opazil, da je $\Delta\omega_N < 0.01\gamma$, to je, položaj absorpcijskega vrha je na opisan način mogoče določiti z natančnostjo nekaj tisočink celotne širine.

Na absorpcijsko črto stabiliziranega laserja navadno ne uporabljamo direktno, temveč z njim kontroliramo drug laser. Del izhodne svetlobe iz obeh laserjev zmešamo na detekcijski fotodiodi. V signalu dobimo utripanje, ki je enako razliki frekvenc obeh laserjev. S spreminjanjem dolžine drugega laserja skrbimo, da je frekvenca utripanja konstantna. Na ta način lahko v ozkem frekvenčnem intervalu še spreminjamo frekvenco drugega laserja.

Z merjenjem utripanja med dvema stabiliziranima laserjema ugotavljajo tudi njihovo stabilnost.

## 6.11 *Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra

Najnatančneje merljiva količina je čas odnosno frekvenca. Frekvence laserja, ki sveti v vidnem področju seveda ni mogoče direktno prešteti. Pač pa je v začetku sedemdesetih let uspelo s

Slika 6.15: Primerjalna veriga za meritev frekvence He-Ne laserja

heterodinsko tehniko, ki se v mikrovalovni tehniki pogosto uporablja, napraviti primerjavo stabiliziranega He-Ne laserja z osnovno cezijevo uro in tako določiti frekvenco absorpcijske črte metana pri 3.39 $\mu$m z isto natan"nostjo, kot jo ima cezijeva ura.

S heterodinsko tehniko primerjamo frekvenci dveh ali več valovanj tako, da jih zmešamo na primernem nelinearnem elementu, običajno neki diodi. Zaradi nelinearnosti dobimo v odzivu diode različne mnogokratnike vpadnih frekvenc, njihove vsote in razlike. Od teh je kaktera lahko dovolj nizka, da jo lahko direktno preštejemo.

Za primerjanje frekvenc nad mikrovalvnim področjem je potreben ustrezen mešalni element. Polvodniške diode nehajo biti uporabne pri približno 20 GHz. Za višje frekvence uporabijo diode kovina-izolator-kovina, ki jih sestavljajo oksidirana površina niklja, ki se je dotika ostra volframska konica. Taka dioda deluje kot uporaben mešalni element do frekvenc okoli 200 THz, to je skoraj do vidnega področja.

Za primerjavo He-Ne laserja, stabiliziranega na metan pri 3.39 $\mu$m, z osnovno cezijevo uro

je bilo potrebno zgraditi celo verigo vmesnih primerjav, ki jo kaže slika **??**. Frekvenco $CO_2$ laserja dobimo na primer iz utripanja med frekvencama $CO_2$ laserja pri 10.2 $\mu$m in pri 9.3 $\mu$m, trikratnikom frekvence HCN laserja in še klistrona s frekvenco 20 GHz. Na ta način so izmerili, da je frekvenca $CH_4$ črte na katero je stabiliziran He-Ne laser, 88.376181627 THz.

Valovno dolžino laserja dobimo z interferometrično primerjavo z dolžinskim standardom, ki je bil do leta 1984 določen z neko kriptonovo črto. Iz znane frekvence in valovna dolžine določimo hitrost svetlobe. Zaradi relativno velike širine črte kriptonove svetilke je bil po starem meter definiran le z relativno natančnostjo $10^{-8}$, kar je pomenilo, da tudi hitrost svetlobe ne more biti določena bolj natančno. Meritev frekvence laserja pa je dosti natančnejša. Zato je bilo smiselno opustiti meter kot osnovno enoto in raje definirati hitrost svetlobe kot pretvornik med sekundo in metrom. Z njeno vrednost so vzeli, kar so dobili z naboljšo primerjavo stabiliziranega laserja in kriptonove črte: $c = 299792458\ m/s$ . Na metan ali jod stabilizirani laser je postal sekundarni standard za dolžino. Laser je pravzaprav pri tem le pomožna naprava; standard je ustrezni molekularni prehod.

## 6.12 *Semiklasični model laserja

Doslej smo laserje obravnavali le z modelom zasedbenih enačb. Ta je zelo grob, saj smo zanemarili nekaj pomembnih pojavov. Svetlobo v resonatorju smo opisali smo opisali le s celotno energijo ali številom fotonov in se za njeno valovno naravo nismo menili. Kar privzeli smo, da je frekvenca delujočega laserja in oblika polja v njem enaka kot za lastno stanje praznega resonatorja. Aktivno snov smo opisali le z zasedenostjo zgornjega in spodnjega laserskega stanja in smo s tem izpustili možnost, da se zaradi sodelovanja z elektromagnetnim poljem atomi nahajajo v nestacionarnem, mešanem stanju.

Gornje pomanjkljivosti odpravimo s tem, da elektromagnetno polje v resonatorju obravnavamo z valovno enačbo, za atome aktivne snovi pa upoštevamo, da se pokoravajo Schroedingerjevi enačbi. S tem dobimo *semiklasični model* laserja. Za še natančnejši opis pa moramo tudi svetlobo obravnavati kvantno, kar presega okvir te knjige.

Aktivna snov naj bo še naprej kar najenostavnejša, to je množica enakih dvonivojskih atomov s stanji $|1\rangle$ in $|2\rangle$, ki imata energiji $W_1$ in $W_2$. Atomi s svetlobo sodelujejo preko dipolne interakcije oblike $e\hat{x}E(t)$, kjer je $E(t)$ polje v resonatorju, ki naj bo zaradi preprostosti polarizirano v smeri osi $x$. Časovno odvisno stanje atomov zapišimo v obliki

$$|\psi\rangle = c_1(t)|1\rangle \exp(-iW_1t/\hbar) + c_2(t)|2\rangle \exp(-iW_2t/\hbar)\ . \tag{6.61}$$

Iz Schroedingerjeve enačbe dobimo za koeficienta $c_1(t)$ in $c_2(t)$

$$\dot{c}_1 = \frac{1}{i\hbar}E(t)v_{12}e^{-i\omega_0 t}c_2\dot{c}_2 = \frac{1}{i\hbar}E(t)v_{12}e^{i\omega_0 t}c_1\ , \tag{6.62}$$

kjer je $\omega_0 = (W_2 - W_1)/\hbar$ in $v_{12} = e\langle 1|\hat{x}||2\rangle$.

Električni dipolni moment atoma v stanju *ket* $\psi$ je

$$p = -e\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = -(c_1^* c_2 e^{-i\omega_0 t} + c_1 c_2^* e^{i\omega_0 t})v_{12}\ . \tag{6.63}$$

Razdelimo $p$ na dva dela:

$$p = p^+ + p^- = v_{12}[\eta(t) + \eta^*(t)]\ , \tag{6.64}$$

kjer smo vpeljali $\eta(t) = c_1^* c_2 e^{-i\omega_0 t}$.

Zanima nas, kako se dipolni moment spreminja s časom. Zato s pomočjo enačb 6.62 izrazimo

$$\dot{\eta} = -i\omega_0\eta - \frac{1}{i\hbar}E(t)v_{12}(|c_2|^2 - |c_1|^2)\,. \tag{6.65}$$

$|c_i|^2$ je verjetnost za zasedenost stanja $|i\rangle$. Izraz v oklepaju na desni strani gornje enačbe torej meri razliko zasednosti obeh stanj; označimo ga z $\zeta$. Podobno kot zgoraj izrazimo časovni odvod

$$\dot{\zeta} = \frac{2v_{12}}{i\hbar}E(t)(\eta^* - \eta)\,. \tag{6.66}$$

S tem smo iz Schroedingerjeve enačbe dobili enačbe za časovni razvoj diponega momenta in obrnjene zasedenosti, ki pa jih moramo še dopolniti. Naj bo atom na začetku v stanju $|2\rangle$ in naj bo $E(t) = 0$. Začetna vrednost $\zeta(0) = 1$ in po enačbi 6.66 naj bi bila $\zeta(t)$ konstantna. Vemo pa, da se atom, ki je v vzbujenem stanju, sčasoma vrne v osnovno stanje. Verjetnost za prehod na časovno enoto smo označili z $A$. Poleg tega moramo na nek način upoštevati še črpanje, s katerim vzdržujemo obrnjeno zasedenost in s tem lasersko delovanje. Za podroben opis črpanja bi morali v Hamiltonov operator dodati ustrezne člene in morda upoštevati še druga stanja atomov, vendar nas take podrobnosti na tem mestu ne zanimajo. Zaradi črpanja stacionarna vrednost $\zeta$ v odsotnosti laserskega polja $E(t)$ ni -1, temveč zavzame neko vrendost $\zeta_0$ med -1 in 1, odvisno od moči črpanja. Tako lahko enačbo 6.66 popravimo:

$$\dot{\zeta} = A(\zeta_0 - \zeta) + \frac{2v_{12}}{i\hbar}E(t)(\eta^* - \eta)\,, \tag{6.67}$$

kjer prvi člen popisuje spontane prehode v nižje stanje in vpliv črpanja.

Podobno dopolnimo še enačbo 6.65. Pri $E(t) = 0$ da časovno odvisnost $\eta$ oblike $e^{-i\omega_0 t}$, to je brez dušenja. Vema pa, da polarizacija v mešanem stanju razpada vsaj zaradi spontanega sevanja, lahko pa še zaradi drugih vplivov, na primer trkov z drugimi atomi. Označimo koeficient dušenja polarizacije z $\gamma$, ki meri tudi spektralno širino svetlobe, ki jo sevajo atomi pri prehodu $2 \to 1$. Tako imamo

$$\dot{\eta} = -(i\omega_0\eta + \gamma) - \frac{1}{i\hbar}E(t)v_{12}\zeta\,. \tag{6.68}$$

Tej enačbi moramo dodati še konjugirano kompleksno enačbo. Enačbe 6.67 in 6.68 pogosto imenujejo Blochove enačbe. Najprej so jih uporabili za obravnavo jedrske magnetne resonance.

Potrebujemo še enačbo za polje $E(t)$. Zanj dobimo iz Maxwellovih enačb valovno enačbo, kjer moramo upoštevati, da imamo tudi od nič različno polarizacijo snovi, ki je v primeru, da so vsi atomi enakovredni, podana z

$$P = \frac{N}{V}v_{12}(\eta + \eta^*) = P^+ + P^-\,. \tag{6.69}$$

Valovna enačba je tedaj [**?**]

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\ddot{E} = \mu_0\ddot{P}\,. \tag{6.70}$$

Namesto mikroskopske količine $\zeta$ lahko uvedemo še gostoto obrnjene zasedenosti $Z = (N/V)\zeta$, pa lahko enačbi 6.67 in 6.68 prepišemo v obliko

$$\dot{P}^\pm = (\mp i\omega_0 - \gamma)P^\pm + \frac{v_{12}^2}{i\hbar}EZ \tag{6.71}$$

$$\dot{Z} = A(Z_0 - Z) - \frac{2}{i\hbar}E(P^- - P^+)\,. \tag{6.72}$$

Prehod od enačb 6.67 in 6.68 na **??** je mogoč le, kadar so vsi atomi enakovredni, to je, kadar ni nehomogene razširitve. Kako je v primeru nehomogene razširitve, si bralec lahko ogleda v [**?**].

Enačbe 6.67, 6.68 ali **??**, skupaj z 6.70 dajejo semiklasični opis sodelovanja svetlobe in snovi. Iz izpeljave je vidno, da je v njem spontano sevanje obravnavano pomankljivo, le s fenomenološkim nastavkom, kar je moč popraviti tako, da tudi elektromagnetno polje kvantiziramo. Kljub tej pomanjkljivosti je s semiklasičnim modelom mogoče zelo podrobno obravnavati večino pojavov v laserjih in tudi druge probleme širjenja svetlobe po snovi. Reševanje zapisanega sistema nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb pa je na splošno zelo težavno.

Da bomo semiklasične enačbe le nekoliko pobliže spoznali, na kratko poglejmo najenostavnejši primer, to je laser, v katerem je vzbujeno le eno resonatorsko stanje. Polje ima tedaj obliko

$$E(\vec{r},t) = E_\lambda(t)u_\lambda(\vec{r}) \,, \tag{6.73}$$

kjer je $u_\lambda(\vec{r})$ krajevni del lastnega stanja resonatorja, ki zadošča enačbi

$$\nabla^2 u_\lambda - \frac{\omega_\lambda^2}{c^2}u_\lambda = 0 \,. \tag{6.74}$$

$E_\lambda(t)$ opisuje časovno odvisnost, ki je za laser v stacionarnem delovanju periodična, vendar frekvenca ni nujno kar enaka lastni frekvneci praznega resonatorja $\omega_\lambda$, temveč jo moramo še izračunati.

Tudi polarizacijo lahko razvijemo po lastnih funkcijah $u_\lambda(\vec{r})$. Ker so te med seboj ortogonalne, preide valovna enačba 6.70 v

$$\omega_\lambda^2 E_\lambda - \ddot{E}_\lambda = \frac{1}{\varepsilon_0}\ddot{P}_\lambda \,. \tag{6.75}$$

Razstavimo $E_\lambda(t)$ na dva dela:

$$E_\lambda(t) = E_\lambda^+(t) + E_\lambda^-(t) = A^+(t)e^{-i\omega_\lambda t} + A^-(t)e^{i\omega_\lambda t} \,. \tag{6.76}$$

Dejanska frekvenca laserja je blizu $\omega_\lambda$, zato pričakujemo, da bosta amplitudi $A^\pm(t)$ v primerjavi z $e^{-i\omega_\lambda t}$ le počasni funkciji časa. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \ddot{E}_\lambda^+ &= -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda \dot{A}^+ e^{-i\omega_\lambda t} + \ddot{A}^+ e^{-i\omega_\lambda t} \\ &\simeq -\omega_\lambda^2 E_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda(\dot{E}_\lambda^+ + i\omega_\lambda E_\lambda^+) \end{aligned} \tag{6.77}$$

V drugi vrstici smo izpustili člen z $\ddot{A}^+$, ker pričakujemo, da je majhen. S tem smo napravili približek *počasne amplitude*.

Polarizacija snovi je približno periodična s frekvenco $\omega_0$, z amplitudo, ki je tudi počasna funkcija časa. Zato je $\ddot{P}_\lambda^+ \simeq -\omega_0^2 P_\lambda^+$. Pri drugem odvodu polja po času smo potrebovali en člen več, ker se člen $-\omega_\lambda^2 E_\lambda^+$ na levi strani enačbe 6.70 odšteje. Z uporabo tega približka in enačb 6.74 in 6.77 preide valovna enačba 6.70 za eno nihanje v

$$\dot{E}_\lambda^+ = -i\omega_\lambda E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0}P_\lambda^+ \,. \tag{6.78}$$

Doslej nismo upoštevali, da je polje v praznem resonatorju dušeno, zato moramo gornjo enačbo še popraviti:

$$\dot{E}_\lambda^+ = (-i\omega_\lambda - \frac{1}{\tau})E_\lambda^+ + \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0}P_\lambda^+ \,. \tag{6.79}$$

Kadar v reosnatorju ni snovi, je dobljena enačba enaka kot enačba 4.72.

Enačbi **??** in 6.71 sta nelinearni, zato ju n moč kar tako prepisati za primer razvoja po lastnih stanjih resonatorja. Pri enačbi za razvoj polarizacije **??** imamo v zadnjem členu na desni produkt komponente polja $E_\lambda$ in obrnjene zasedenosti $Z$, od katere bistveno prispeva le krajevno povprečje $\bar{Z}$, ki se tudi s časom le počasi spreminja. Seveda vsebuje $Z$ tudi krajevno odvisne komponente, ki pa so pomembne predvsem zato, ker sklaplajo različna lastna stanja resonatorja, kar presega našo trenutno obravnavo. Tako imamo

$$\dot{P}_\lambda^+ = (-i\omega_0 - \gamma)P_\lambda^+ + \frac{v_{12}^2}{i\hbar} E_\lambda^+ \bar{Z} \,. \tag{6.80}$$

Enačbo za $\bar{Z}$ dobimo iz 6.71. V zadnjem členu imamo produkte $E^\pm P^\pm = E_\lambda^\pm P_\lambda^\pm u_\lambda^2(\vec{r})$, kar moramo prostorsko povprečiti. Funkcije $u_\lambda(\vec{r})$ so normirane, tako da je $\int u_\lambda^2(\vec{r})\,dV = V$. Tako imamo $\overline{u_\lambda^2(\vec{r})} = 1$ in

$$\dot{\bar{Z}} = A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar}(E_\lambda^+ + E_\lambda^-)(P_\lambda^- - P_\lambda^+) \,, \tag{6.81}$$

kjer je $\bar{Z}_0$ povprečje nenasičene zasedenosti $Z_0$. V zadnjem členu nastopajo produkti, ki nihajo s frekvencami $\omega_\lambda - \omega_0$ in $\omega_\lambda + \omega_0$. Obe frekvenci sta si zelo blizu, zato je njuna vsota mnogo večja od razlike. Členi $E_\lambda^+ P_\lambda^+$ in $E_\lambda^- P_\lambda^-$ se torej zelo hitro spreminjajo in skoraj nič ne vplivajo na valovanje blizu $\omega_\lambda$, zato jih izpustimo. S tem je časovna odvisnost $\bar{Z}$ podana z

$$\dot{\bar{Z}} = A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar}(E_\lambda^+ P_\lambda^- - E_\lambda^- P_\lambda^+) \,. \tag{6.82}$$

Enačbe 6.79, 6.80 in 6.82, skupaj s konjugirano kompleksnimi enačbami za $E_\lambda^-$ in $P_\lambda^-$, so zaključen sistem, ki opisuje delovanje enofrekvenčnega laserja. Uporabimo jih za izračun frekvence izhodne svetlobe.

Naj bo stanje stacionarno. Tedaj lahko polje zapišemo v obliki $E_\lambda^+ = E_0 e^{-i\Omega t}$, kjer je $E_0$ realna konstanta, frekvenca svetlobe $\omega$ pa je blizu $\omega_0$ in $\omega_\lambda$. V stacionarnem stanju mora imeti polarizacija enako časovno odvisnost: $P_\lambda^+ = P_0 e^{-i\Omega t}$. Tedaj je v enačbi 6.82 drugi oklepaj konstanten in mora biti tudi $\bar{Z}$ v stacionarnem stanju od časa neodvisna. Sistem enačb 6.79, 6.80 in 6.82 tako da

$$\begin{aligned}
-[i(\omega_\lambda - \Omega) + \frac{1}{\tau}]E_0 - \frac{i\omega_0}{2\varepsilon_0} P_0 &= 0 \\
-[i(\omega_0 - \Omega) + \gamma]P_0 + \frac{v_{12}^2}{i\hbar} E_0 \bar{Z} &= 0 \\
A(\bar{Z}_0 - \bar{Z}) - \frac{2}{i\hbar} E_0 (P_0^* - P_0) &= 0 \,.
\end{aligned} \tag{6.83}$$

Najprej izračunamo $P_0$ iz druge enačbe, ga postavimo v tretjo in izračunamo $\bar{Z}$:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \left[ 1 + \frac{v_{12}^2}{\hbar^2 A} E_0^2 \frac{2\gamma}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \gamma^2} \right]^{-1} \tag{6.84}$$

Ta izraz že poznamo. $\pi v_{12}^2/(\varepsilon_0 \hbar^2)$ je Einsteinov koeficient $B$. $E_0^2$ je sorazmern gostoti energije polja v resonatorju, zadnji ulomek v oklepaju pa podaja obliko homogeno razširjene atomske črte:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \left[ 1 + \frac{2B}{A} g(\omega_0 - \Omega) w \right]^{-1} \tag{6.85}$$

To je natanko enako izrazu za nasičenje zasedenosti stanj, ki smo ga izpeljali iz zasedbenih enačb v četrtem poglavju.

Postavimo $P_0$ iz prve enačbe sistema 6.83 v drugo:

$$E_0[i(\Omega-\omega_\lambda)+\frac{1}{\tau}][i(\Omega-\omega_0)+\gamma] = -\frac{v_{12}^2\omega_0}{2\hbar\varepsilon_0}E_0\bar{Z}\,. \tag{6.86}$$

V delujočem laserju je $E_0 \neq 0$, zato lahko krajšamo. $\bar{Z}$ je realen, tako da mora biti imaginarni del leve strani enak nič:

$$(\Omega-\omega_\lambda)\gamma+(\Omega-\omega_0)\frac{1}{\tau} = 0\,. \tag{6.87}$$

Od tod lahko izračunamo frekvenco laserja

$$\Omega = \frac{\omega_\lambda\gamma+\omega_0\frac{1}{\tau}}{\gamma+\frac{1}{\tau}}\,. \tag{6.88}$$

Frekvenca torej ni enaka frekvenci praznega resonatorja $\omega_\lambda$, temveč je premaknjena proti centru atomske črte $\omega_0$. Premik je odvisen od razmerja širine atomske črte in izgub resonatorja.

Bralec lahko sam iz enačbe 6.86 izračuna še energijo svetlobe v resonatorju in rezultat primerja s tistim, ki smo ga dobili z uporabo zasedbenih enačb.

Gornji primer uporabe polklasičnih enačb je zelo preprost. Prava moč modela se pokaže pri obravnavi mnogofrekvenčnega laserja, na primer pri računu uklepanja faz laserskih nihanj, kar pa presega okvir te knjige. Več bo bralec našel v [**?**].

# 7. Primeri laserjev

V tem poglavju bomo spoznali nekaj najpomembnejših vrst laserjev. V grobem laserje razlikujemo po aktivnem sredstvu (plin, trdna snov, organsko barvilo, polprevodnik), pri čemer pa tudi pri izbranem sredstvu obstaja veliko različnih izvedb in načinov delovanja. Za vsak obravnavani primer bomo navedli osnovne karakteristike, v podrobnosti izvedbe pa se ne bomo spuščali.

## 7.1 Laserski sistemi

Laser je lahko dokaj preprosta naprava, z malo sestavnimi deli, lahko pa je zelo velik in zapleten sistem. Večina velikih laserskih sistemov je sestavljena iz osnovnega laserja, ki ni posebno močan, daje pa kvaliteten snop svetlobe, in iz enega ali več ojačevalnikov. V njih se svetloba ojačuje v sredstvu, ki je enako kot v osnovnem laserju in ki je v kolikor mogoče visokem stanju obrnjene zasedenosti. V več ojačevalnih korakih se tako doseže zelo velika svetlobna moč.

Pri velikih laserskih močeh nastopi vrsta novih težav. Da gostota svetlobnega toka ne povzroča poškodb optičnih komponent, mora premer ojačevanega snopa (in s tem premer vseh vmesnih ojačevalnih stopenj) naraščati. Zadnje stopnje velikih laserskih sistemov imajo tako premer večji od pol metra, kar seveda pomeni, da morajo imeti tolikšno odprtino tudi vse ostale optične komponente. Poleg tega je treba skrbno paziti, da se odbita svetloba ne vrača v prejšnji ojačevalnik ali v osnovni laser in moti njegovega delovanja. Zato so med ojačevalnimi stopnjami optični izolatorji, ki temeljijo na Faradayevem pojavu vrtenja polarizacije v snovi v magnetnem polju.

Slika 7.1: Eden najmočnejših laserskih sistemov na svetu, ki doseže 500 TW moči v sunku. Vir: National Ignition Facility, Livermore, Kalifornija.

Moči svetlobe, ki jih oddajajo najmočnejši laserski sistemi, imajo zelo velike vrednosti. Najmočnejši zvezno delujoči laserji dosegajo tako moči prek $\sim 100$ kW. Še bistveno večje moči pa dosegajo sunkovni laserji, saj lahko dosežejo moč tudi $\sim 10^{15}$ W. Vendar so sunki tako velike svetlobne moči izredno kratki, tipično reda pikosekunde, tako da znaša celotna moč v takem sunku svetlobe tako "le" $\sim$ kJ. Dodaten parameter pri tako močnih sunkovnih laserjih je čas, ki poteče med dvema zaporednima sunkoma. Najmočnejši laserski sistemi tako lahko izsevajo največ nekaj sunkov dnevno.

## 7.2 He-Ne laser

Kot prvi primer si oglejmo helij-neon (He-Ne) laser, ki je bil prvi zvezno delujoči laser in je še danes zelo razširjen. Najpogosteje deluje pri valovni dolžini $632,8$ nm v rdečem delu spektra, poleg tega pa tudi pri infrardečih $1,15$ µm in $3,39$ µm ter nekaterih drugih valovnih dolžinah v oranžnem in zelenem delu spektra. Laser deluje v zveznem načinu delovanja s tipičnimi močmi $0,5-100$ mW.

Slika (7.2) kaže relevantne energijske nivoje helija in neona. Atome helija s trki z elektroni vzbudimo v eno izmed dveh dolgoživih metastabilnih stanj $2^3S$ ali $2^1S$ z razpadnima časoma $0,1$ ms in 5 µs. Ti dve stanji slučajno praktično sovpadata z dvema stanjema neona ($4s$ in $5s$). Ko v helij dodamo razmeroma majhno količino neona, se energija s trki prenese z vzbujenih helijevih atomov na atome neona, ki s tem preidejo v že omenjeni vzbujeni stanji, helijevi atomi pa se vrnejo v osnovno stanje. Majhna energijska razlika med nivoji helija in neona (okoli $1,2$ THz) pri tem preide v kinetično energijo obeh atomov.

Slika 7.2: Shema energijskih nivojev v He-Ne laserju. Nivoji helija so označeni z modro in nivoji neona z zeleno, laserski prehodi pa z rdečimi barvami in pripisano ustrezno valovno dolžino.

Znano rdečo svetlobo He-Ne laserja z valovno dolžino $632,8$ nm dobimo pri prehodu iz stanja $5s$ v eno od stanj $3p$. Pri tem je življenjski čas stanja $5s$ okoli 100 ns, stanja $3p$ pa okoli 10 ns. Spodnji $3p$ nivo se prazni s spontano emisijo v metastabilno stanje $3s$. V njem se atomi nabirajo, saj so dipolni sevalni prehodi v osnovno stanje prepovedani, in atomi le s trki ob steno cevi prehajajo v osnovno stanje. Da pospešimo praznjenje spodnjega nivoja in povečamo obrnjeno zasedenost, moramo torej zmanjšati premer razelektritvene cevi. Zaradi gibanja atomov je spektralna črta Dopplerjevo razširjena.

Lasersko delovanje dobimo tudi pri prehodu iz $5s$ v stanje $4p$, pri katerem ima izsevana svetloba valovno dolžino $3,39$ µm. Ojačenje je za ta prehod celo precej večje kot za prehod pri $632,8$ nm, deloma zaradi nižje frekvence (glej zvezo med Einsteinovima koeficientoma $A$ in $B$, enačba 5.34), deloma pa zaradi kratke življenjske dobe spodnjega laserskega nivoja $4p$. Zato bi pričakovali, da bo He-Ne laser svetil v infrardečem delu in ne vidnem. To delno prepreči absorpcija v steklu, delno pa izgube namerno povečamo s selektivno odbojnostjo resonatorskih zrcal, ki dvigne prag delovanja za $3,39$ µm nad prag za $632,8$ nm. V nekaterih primerih v laser dodamo celico metana, ki infrardeč del svetlobe močno absorbira, rdeče pa ne. Omenimo še prehode iz stanja $4s$, ki ga dosežejo neonovi atomi s trki z vzbujenimi helijevimi atomi iz nivoja $2^3S$. Prehod $4s$ v $3p$, ki da svetlobo pri $1,15$ µm, je bil prvi opaženi prehod v He-Ne laserjih.

Tipičen He-Ne laser je razmeroma preprosto zgrajen (sliki 7.3 in 7.4). V razelektritveni cevi (napetost $\sim 1$ kV), skozi katero teče električni tok ($\sim 10$ mA), se nahaja mešanica helija in neona v razmerju $5:1-10:1$. Skupni tlak v cevi je nizek, le okoli 3 mbar, cev pa je tipično dolga okoli $0,5$ m s premerom $1-2$ mm. Cev na obeh straneh zapirata okni, ki sta nagnjeni za Brewstrov kot (glej enačbo 1.50), tako da so izgube pri odboju za eno polarizacijo kar se da majhne. Izhodna svetloba iz laserja je zato seveda polarizirana. V manjših laserjih so namesto Brewstrovih oken na razelektritveno cev privarjena kar resonatorska zrcala. Tak laser je nepolariziran. Razelektritvena cev je obdana z dvema ukrivljenima zrcaloma, ki imata zelo veliko odbojnost za izbrano valovno dolžino. Nekaj tipičnih podatkov za He-Ne laser je zbranih v tabeli (7.1).

Slika 7.3: Shema He-Ne laserja: R – razelektritvena cev, IZ – izhodno zrcalo, Z – zrcalo z veliko odbojnostjo, B – Brewstrovi okni

Slika 7.4: Primer starejšega He-Ne laserja, izdelanega v Sloveniji

He-Ne laserji so preprosti, stabilni, zanesljivi, poceni, imajo visoko kvaliteto žarka in dolgo služijo (do 50 000 ur). Danes jih sicer izrivajo polprevodniški laserji, vendar so še vedno v uporabi v merilnih napravah, v optičnih čitalnih sistemih, v šolah, v raziskovalnih laboratorijih za interferometrijo, holografijo itd. Na njem je osnovan tudi sekundarni standard za meter.

## 7.3 Argonski ionski laser

Kot drugi primer plinskega laserja obravnavajmo argonski ionski ($Ar^+$) laser, ki je najbolj poznan po zveznem delovanju v modrem in zelenem delu spektra pri valovnih dolžinah 488 nm in 514,4 nm, deluje pa tudi v bližnjem ultravijoličnem delu spektra. Tipične moči delovanja argonskega laserja so 100 mW – 50 W.

Kot večino drugih plinskih laserjev tudi tega črpamo z električnim tokom. Atome argona vzbudimo s trki z elektroni v ione argona, ti pa z nadaljnjimi trki preidejo v vzbujena stanja. Obrnjeno zasedenost dosežemo med nivojema $4p$ in $4s$ (slika 7.5). Ta dva nivoja vsebujeta veliko podnivojev, zato je tudi prehodov med njima zelo veliko. Argonski laser tako seva pri več kot tridesetih različnih valovnih dolžinah, najznačilnejši sta že omenjeni 488 nm in 514,5 nm. Življenjski čas zgornjega nivoja $\sim 10^{-8}$ s je približno desetkrat daljši od življenjskega časa spodnjega nivoja, od koder se ioni z rekombinacijo z elektroni vrnejo v osnovno stanje atoma. Tudi pri tem laserju je poglavitni vzrok za razširitev črte Dopplerjev pojav.

Slika 7.5: Shema energijskih nivojev v $Ar^+$ laserju

Argonski laser je v osnovi zgrajen podobno kot He-Ne laser. V razelektritveni cevi (tipična dolžina 1 m in premer 1 – 2 mm) se nahaja argon pri pritisku okoli 10 mbar. Ker gre pri vzbujanju atomov argona za dvostopenjski proces, mora biti električni tok, s katerim dosežemo obrnjeno zasedenost, precej velik, lahko tudi nekaj deset amperov. Pri tipični napetosti nekaj kV to pomeni, da so potrebne velike električne moči, pogosto več deset kW, in močnejši argonski laserji so zato zaradi velike količine odvečne toplote najpogosteje vodno hlajeni.

Slika 7.6: Poenostavljena shema Ar laserja s prizmo: R – razelektritvena cev, IZ – izhodno zrcalo, Z – zrcalo z veliko odbojnostjo, B – Brewstrovi okni, P – prizma

V argonskih laserjih pogosto ustvarimo tudi vzdolžno magnetno polje, ki preprečuje elektronom, da bi predčasno zapustili ojačevalno območje in trčili v steno. S tem se poveča izhodna moč laserja, hkrati pa preprečuje poškodbe na stenah, ki bi jih lahko povzročili visokoenergijski elektroni. Iz istega razloga so pri močnejših laserjih zrcala izven plinske cevi.

V resonator argonskega laserja pa moramo vgraditi še en dodaten element, ki omogoči izbiro ene same spektralne črte. Najpogosteje za ta frekvenčno selektiven element uporabimo kar majhno prizmo pred enim od obeh zrcal (slika 7.6). Zaradi disperzije v prizmi se snopi različnih valovnih dolžin lomijo pod različnimi koti in le tisti snop, ki vpada pravokotno na zrcalo, je ojačen. Z vrtenjem prizme ali zrcala lahko tako izberemo valovno dolžino ojačene svetlobe. Nekaj tipičnih podatkov za argonski laser je zbranih v tabeli (7.1).

Argonski laser je zanesljiv in daje zelo kvaliteten osnovni Gaussov snop pri eni sami frekvenci. Zato se dosti uporablja v optični spektroskopiji, interferometriji, holografiji in merilni tehniki. Deluje lahko v zveznem načinu, zaradi razmeroma široke črte ojačenja pa ga uporabljamo tudi za fazno uklenjen sunkovni laser z dolžino sunkov okoli 150 ps. V kombinaciji s kriptonovim laserjem, ki je zelo podoben argonskemu, le da deluje v rdečem in oranžnem delu spektra, se uporablja tudi v zabavni industriji. V zadnjem času ga vse bolj izrivajo polprevodniški laserji ali pa frekvenčno podvojeni Nd:YAG.

## 7.4 Laser na ogljikov dioksid

Do zdaj opisani laserji so delovali na elektronskih prehodih v atomih oziroma ionih. Laser na ogljikov dioksid pa deluje na prehode med vibracijskimi stanji molekul $CO_2$, pri čemer elektroni ostanejo v osnovnem stanju. Zaradi majhnih energijskih razlik med vibracijskimi stanji deluje tak laser v infrardečem delu spektra, najpogosteje pri $9,6$ µm in $10,6$ µm. Laser deluje v zveznem in v sunkovnem načinu, odlikuje ga pa zelo velik izkoristek ( $\sim 30$ %) in posledično zelo velike moči, 1 W – 10 kW.

Preden opišemo delovanje laserja, si na kratko oglejmo še nihajna stanja molekule ogljikovega dioksida. Molekula $CO_2$ je v osnovnem stanju linearna molekula (slika 7.7 a). Za molekule take oblike obstajajo trije osnovni načini nihanja atomov glede na težišče: atoma kisika nihata simetrično vzdolž osi molekule, pri čemer ogljik miruje – simetrični razteg (slika 7.7 b), atomi nihajo v smeri pravokotno na os – upogib (slika 7.7 c) in atoma kisika se gibljeta v isti smeri vzdolž osi, ogljik pa v nasprotni smeri – asimetrični razteg (slika 7.7 d). Pri tem ima najvišjo frekvenco asimetrični razteg, najnižjo pa upogib. Vsako vibracijsko stanje lahko razstavimo na osnovne nihajne načine in ga opišemo s številom energijskih kvantov v posameznem osnovnem nihanju, torej s trojico celih števil $(n_1, n_2, n_3)$. Stanje 100 tako opisuje osnovni simetrični razteg, stanje 010 osnovno upogibno nihanje, stanje 001 pa osnovni asimetrični razteg.

Slika 7.7: Molekula $CO_2$ (a) in trije osnovni načini nihanja molekule: simetrični razteg (b), upogib (c) in asimetrični razteg (d)

Vibracijska stanja molekule vzbudimo z električnim tokom skozi plin. Pri tem v razelektritveno cev dodamo dušik ($N_2$) in podobno kot pri He-Ne laserju se tudi $CO_2$ črpa predvsem preko trkov z dušikovimi molekulami. Dušikova molekula je dvoatomna in ima zato zgolj eno vibracijsko stanje, ki po energiji praktično sovpada z energijo stanja 001 (slika 7.8). Iz tega gornjega stanja prehajajo molekule v stanje 100 ($10,6$ µm) ali v stanje 020 ($9,6$ µm). Da pospešimo prehod nazaj v osnovno stanje, plinski mešanici dodamo še helij, s katerim trkajo molekule. Razmerje parcialnih tlakov je tako navadno 1:1:8 za $CO_2$:$N_2$:He pri tlaku 1 mbar. Pri tako nizkih tlakih je poglavitna razširitev spektralne črte Dopplerjeva, ki pa je v primerjavi z ostalimi plinskimi laserji zaradi nizih frekvenc zelo majhna, le okoli 70 MHz. V laserskih sistemih, kjer je tlak plinov večji, prevlada razširitev zaradi medmolekulskih trkov. Pri tlakih okoli 20 bar znaša razširitev že okoli 500 GHz, kar omogoča izdelavo fazno uklenjenih sunkovnih laserjev s sunki dolžine $\sim 1$ ps. Nekaj tipičnih podatkov za laser na ogljikov dioksid je zbranih v tabeli (7.1).

Slika 7.8: Shema vibracijskih nivojev v $CO_2$ laserju

Najpreprostejši laser na ogljikov dioksid je po svoji zgradbi podoben že obravnavanim plinskim laserjem. Razelektritvena cev (polmer $\sim 1$ cm in dolžina $0,5-2$ m) je na obeh koncih zaključena z Brewstrovima oknoma in zrcaloma, pri čemer moramo paziti, da elementi prepuščajo oziroma odbijajo infrardeč del svetlobe. Ker lahko deluje laser pri zelo veliko različnih valovnih dolžinah, dodamo frekvenčno selektiven člen, na primer uklonsko mrežico (slika 7.9).

Slika 7.9: Poenostavljena shema najpreprostejšega $CO_2$ laserja: R – razelektritvena cev, IZ – izhodno zrcalo, Z – zrcalo z veliko odbojnostjo, B – Brewstrovi okni, U – uklonska mrežica

Poleg običajnih zaprtih sistemov poznamo tudi laserje z vzdolžnim ali prečnim pretokom, valovodne laserje ... Razlikujejo se po svojih specifikacijah in vrsti uporabe. Laserji na ogljikov dioksid se največ uporabljajo v industriji za zahtevne obdelave materialov, na primer za rezanje kovin, vrtanje, ablacijo, varjenje, pa tudi za vojaške in medicinske namene. Obdelava z laserji omogoča veliko natančnost, čistočo in je zelo fleksibilna.

| Laser | He-Ne | $Ar^+$ | $CO_2$ | ekscimer |
|---|---|---|---|---|
| Valovna dolžina $\lambda$ | $632,8$ nm | 488 in $514,5$ nm | $9,6$ in $10,6$ µm | UV |
| Verjetnost za spontani prehod $A$ | $3,4 \times 10^6/\mathrm{s}$ | $7,8 \times 10^7/\mathrm{s}$ | $0,25/\mathrm{s}$ | $\sim 10^8/\mathrm{s}$ |
| Presek za stimulirano emisijo $\sigma$ | $3 \times 10^{-17}$ m$^2$ | $2,6 \times 10^{-16}$ m$^2$ | $3 \times 10^{-22}$ m$^2$ | $10^{-20}$ m$^2$ |
| Spektralna širina črte $\Delta\nu$ | $1,5 \times 10^9$ Hz | $3,5 \times 10^9$ Hz | $7 \times 10^7$ Hz | $10^{13}$ Hz |
| Obrnjena zasedenost $\Delta N/V$ | $5 \times 10^{15}/\mathrm{m}^3$ | $2 \times 10^{15}/\mathrm{m}^3$ | $3 \times 10^{21}/\mathrm{m}^3$ | $10^{20}/\mathrm{m}^3$ |

Tabela 7.1: Izbrani podatki za He-Ne, $Ar^+$, $CO_2$ in tipičen ekscimerni laser

## 7.5 Ekscimerni laser

Ekscimerji (*excited dimer, excimer*) so vzbujena vezana stanja dveh atomov, ki bi se v osnovnem stanju ne vezala. Za laserje so zanimivi predvsem ekscimerji težkih žlahtnih plinov in halogenov, na primer $Ar_2^*$ (126 nm), $Kr_2^*$ (146 nm), $Xe_2^*$ (172 nm), ArF (193 nm), KrF (248 nm), XeCl (308 nm), ArBr (161 nm), NeF (108 nm) ... Te molekule obstajajo samo v vzbujenem stanju, v osnovnem stanju pa je odbojna sila med atomoma prevelika in molekula neobstojna. Vsi našteti primeri oddajajo lasersko svetlobo v ultravijoličnem delu, ki ga drugi laserski sistemi le težko pokrivajo. Ekscimerni laserji delujejo v sunkih, pri čemer je tipična oddana energija v sunku $\sim 1$ J, dolžina sunka $10 - 100$ ns in repeticija $\sim 100$ Hz.

Vezano stanje dveh atomov dobimo, kadar je ionizacijska energija prvega atoma manjša od vsote elektronske afinitete drugega atoma in elektrostatične energije vezave obeh ionov. Vzemimo za primer klor in kripton. Ionizacijska energija kriptona v osnovnem stanju je 14 eV, v vzbujenem pa 5 eV. Elektronska afiniteta klora je 3,75 eV in elektrostatična vezavna energija KrCl okoli 7 eV. Tako je za nastanek molekule KrCl v osnovnem stanju potrebno dodati okoli 4 eV, pri tvorbi molekule v vzbujenem stanju pa se sprosti okoli 6 eV. Približno obliko celotne potencialne energije molekule KrCl v osnovnem in vzbujenem stanju kaže slika (7.10). Molekula, ki je vezana v vzbujenem stanju, po sevalnem prehodu v osnovno stanje takoj razpade, zato je zelo lahko doseči obrnjeno zasedenost. Pri tem je razpadni čas vezanega stanja $\sim$ 10 ns, spodnjega nevezanega pa okoli $0,1$ ps. Spektralna širina prehoda je precej velika, okoli 1 nm. Da nastanejo ekscimeri, vzbujamo mešanico plinov (žlahtnega plina ali mešanice žlahtnega in halogenega plina) v heliju. Ker je pritisk razmeroma velik (npr. 2 ali 3 bar), je vzbujanje prečno, podobno kot pri nekaterih izvedbah $CO_2$ laserja. Nekaj tipičnih podatkov za ekscimerni laser je zbranih v tabeli (7.1).

Ekscimerni laserji delujejo v sunkih s precej veliko energijo in se uporabljajo v industriji materialov, mikroprocesorjev, fotolitografiji in medicini, predvsem oftalmologiji in kirurgiji.

Slika 7.10: Shema energije v odvisnosti od razdalje med jedroma atomov. V vzbujenem stanju se atoma povežeta v molekulo, po prehodu v nižji nivo pa atoma disociirata.

## 7.6 Neodimov laser

Druga skupina laserjev so trdninski laserji. Taki laserji so osnovani na elektronskih prehodih v ionih primesi, ki jih dodamo v kristal ali steklo, črpamo pa jih optično. Primesi so praviloma redke zemlje ali prehodne kovine, kristali pa so navadno oksidi ali fluoridi. Izdelava ojačevalnih sredstev na osnovi stekla je bistveno bolj preprosta in poceni, vendar ima steklo precej nižjo toplotno prevodnost od kristalov in se zato bolj greje. Začeli bomo z opisom dveh primerov neodimovega laserja, Nd:YAG in Nd:steklo. Podobne laserje dobimo, če v YAG kristalu namesto z neodimom itrijeve ione nadomestimo z iterbijem (1030 nm) ali erbijem (2940 nm).

### 7.6.1 Nd:YAG

Najpomembnejši predstavnik je Nd:YAG laser, v katerem je ojačevalno sredstvo itrij-aluminijev granat ($Y_3Al_5O_{12}$, YAG) s primesmi neodimovih ionov $Nd^{3+}$. Neodimov laser deluje pri valovni dolžini $1,064$ µm ali frekvenčno podvojeni 532 nm. Laser lahko deluje v zveznem načinu pri močeh $5-100$ W ali sunkovnem z dolžino sunkov okoli 100 ns in energijo sunka $\sim 1$ J.

Neodimov laser je primer štirinivojskega laserskega sistema, pri čemer je laserski prehod med stanjema $^4F_{3/2}$ in $^4I_{11/2}$ iona neodima (slika 7.11). S svetlobo višje frekvence (tipično okoli 800 nm) črpamo elektrone v višje nivoje, ki hitro preidejo v zgornji laserski nivo. Življenjski čas višjega nivoja je okoli 230 µs, spodnjega pa precej krajši, zato je lahko doseči veliko obrnjeno zasedenost. Spodnje stanje je dovolj visoko nad osnovnim, da pri sobni temperaturi v ravnovesju ni znatno zasedeno. Zato je prag neodimovega laserja nizek in je lahko doseči zvezno stacionarno delovanje, prav tako dobro pa deluje tudi v sunkih. Razširitev črte je homogena in je predvsem posledica termičnega nihanja kristalne mreže. Laser je odličen za delovanje s preklopom dobrote, zaradi ozke črte pa z uklepanjem faz oddaja zelo kratke sunke (nekaj ps).

Slika 7.11: Shema energijskih nivojev v $Nd^{3+}$ laserju

Za črpanje uporabljamo diodne laserje ali močne ksenonove svetilke za zvezno delovanje ter podobne bliskovne luči za sunkovno delovanje (slika 7.12 a). Aktivna snov v laserju je v obliki paličice dolžine od nekaj cm do dobrih 10 cm in širine do okoli 1 cm. V kristalu YAG neodimovi ioni nadomestijo približno 1 % itrijevih, zato ojačevalno sredstvo na videz ni prozorno, temveč rahlo rožnato (slika 7.12 b). Aktivna paličica in svetilka sta vgrajeni v cilindrično ali eliptično votlino z zrcalnimi ali belimi stenami, tako da se čim večji del črpalne svetlobe absorbira v laserski paličici (slika 7.12 c).

Slika 7.12: Ksenonska bliskovna svetilka (a), ojačevalno sredstvo v Nd:YAG laserju (b) in shema eliptične črpalne votline (c)

Pri črpanju s ksenonsko svetilko je le manjši del izsevane svetlobe v absorpcijskih pasovih, zato je izkoristek črpanja razmeroma slab, tipično pod $0,01$ %. Za izhodno moč zvezno delujočega Nd:YAG laserja nekaj deset wattov je tako potrebna električna moč nekaj kW. Velika večina porabljene moči gre v gretje, zato je v laserjih z nekoliko večjo povprečno močjo potrebno vodno hlajenje. Gretje povzroča tudi toplotne deformacije laserske paličice, kar lahko močno spremeni lastnosti resonatorja. Toplotni učinki so ena poglavitnih praktičnih težav pri izdelavi neodimovih laserjev s klasičnimi svetilkami . Danes prevladuje črpanje z diodnimi laserji, ki svetijo v območju največje absorpcije $Nd^{3+}$. Črpanje je lahko prečno ali pa vzdolžno (slika 7.13). Pri diodnem črpanju je izkoristek dosti večji in je manj gretja, kar omogoča bolj kompaktno konstrukcijo in boljšo stabilnost izhodne moči.

Slika 7.13: Shema vzdolžnega diodnega črpanja Nd:YAG laserja. O – ojačevalno sredstvo, IZ – izhodno zrcalo, D – dikroično zrcalo, prepustno za črpalno svetlobo in odbojno za lasersko, DL – diodni laser za črpanje, L – leča

Neodimovi laserji so zelo razširjeni, tako v osnovni kot tudi v frekvenčno podvojeni različici. Najbolj uporabni so za obdelavo materialov (na primer vrtanje in varjenje, litografija) ter v medicini (dermatologija in endoskopska kirurgija). Pomemben proizvajalec Nd:YAG laserjev za medicinske namene je tudi podjetje Fotona iz Ljubljane.

| Laser | Nd:YAG | Nd:steklo | Ti:safir |
|---|---|---|---|
| Valovna dolžina | 1064 nm | 1050 nm | 660 – 1180 nm |
| Verjetnost za spontani prehod $A$ | $4 \times 10^3/\mathrm{s}$ | $3 \times 10^3/\mathrm{s}$ | $3 \times 10^5/\mathrm{s}$ |
| Presek za stimulirano emisijo $\sigma$ | $3 \times 10^{-23}\ \mathrm{m}^2$ | $3 \times 10^{-24}\ \mathrm{m}^2$ | $3 \times 10^{-23}\ \mathrm{m}^2$ |
| Spektralna širina črte $\Delta\nu$ | $1,3 \times 10^{11}$ Hz | $7 \times 10^{12}$ Hz | $1 \times 10^{14}$ Hz |
| Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$ | $1,6 \times 10^{23}/\mathrm{m}^3$ | $8 \times 10^{23}/\mathrm{m}^3$ | $6 \times 10^{23}/\mathrm{m}^3$ |

Tabela 7.2: Tipični podatki za Nd:YAG, Nd:steklo in Ti:safirni laser

### 7.6.2 Nd:steklo

Namesto v ustrezen kristal lahko neodimove ione $Nd^{3+}$ vgradimo tudi v steklo. Tak laser deluje pri valovni dolžini 1,050 µm v sunkovnem načinu s preklopom dobrote ali z uklepanjem faz z energijami sunkov $\sim 1$ J. Z ojačevalniki dosežemo energije sunka nad 100 kJ. Zaradi amorfne strukture stekla in posledično nehomogenega lokalnega polja je laserska črta nehomogeno razširjena. Ojačenje je manjše kot v Nd:YAG in za prag laserskega delovanja je potrebna precej večja moč črpanja. Laserji Nd:steklo zato delujejo le v sunkovnem načinu, kjer pa so za velike energije celo boljši od Nd:YAG. Zaradi manjšega ojačenja pri dani obrnjeni zasedenosti je v laserju s preklopom dobrote mogoče doseči večjo načrpanost, ne da bi prišlo do praznjenja zaradi ojačevanja spontanega sevanja v enem preletu paličice. Problem teh laserjev predstavlja nizka toplotna prevodnost stekla, ki omejuje repeticijo sunkov. Velika širina črte je zelo primerna za delovanje v načinu uklepanja faz, s katerim dosegamo ultrakratke sunke ($\sim 100$ fs).

★ Energije izsevanih sunkov je mogoče še povečati z ojačevalniki. Med največjimi je laserski sistem Nd:steklo v Rochestru (New York), ki ga uporabljajo za raziskave fuzije. Okoli 1 ns dolg sunek iz osnovnega laserja razdelijo na deset ojačevalnih vej, ki so dolge po 180 m. Končna energija sunka je nad $\sim 1$ MJ. Z njim z vseh strani posvetijo na kroglico iz devterija in tritija, ki se dovolj segreje in stisne, da pride do njunega zlivanja. Vršna moč laserskega sunka je okoli $10^{15}$ W. Če laserski snop zberemo na površino 1 $mm^2$, dobimo električno poljsko jakost okoli $5 \times 10^{11}$ V/m, kar je približno enako polju v vodikovem atomu.

## 7.7 Titan-safirni laser

Titan-safirni laser (Ti:safir) je trdninski laser, pri katerem so v kristal safirja $Al_2O_3$ primešani ioni titana $Ti^{3+}$. Njegova najpomembnejša značilnost je zvezna nastavljivost valovne dolžine v zelo širokem frekvenčnem pasu (600 – 1180 nm) z največjo učinkovitostjo pri okoli 800 nm. Deluje v zveznem načinu z močmi do 50 W in v fazno uklenjenem načinu sunkovno z dolžino sunkov do 10 fs z vršnimi močmi nad $10^{12}$ W.

Slika 7.14: Energijski nivoji v titan-safirnem laserju. Dva nivoja sta zaradi vibracij razcepljena na veliko število podnivojev, ki pa se med seboj deloma prekrivajo. Zelo podobna je tudi shema energijskih nivojev organskih barvil.

Ojačevalno sredstvo v titan-safirnem laserju je aluminijev oksid, v katerem približno $0,2$ % aluminijevih ionov nadomestimo s titanovimi. Titanovi ioni imajo v taki konfiguraciji zgolj eno vzbujeno stanje, vendar se zaradi sklopitve s fononi vibracijski nivoji posameznega stanja med seboj prekrivajo in prehod je močno razširjen. Z optičnim črpanjem vzbudimo titanov ion iz osnovnega stanja v eno izmed vibracijskih stanj vzbujenega stanja, ki hitro preide v najnižje vzbujeno stanje. Laserski prehod poteka med nižjem vzbujenim stanjem in enim od vibracijskih nivojev osnovnega stanja (slika 7.14), od koder se vrne v osnovno stanje. Življenjski čas vzbujenega stanja je kratek ($3,2$ µs), širina črte pa največja med vsemi trdninskimi laserji. Ker je vrh absorpcijskega pasu blizu 500 nm, laser črpamo z zeleno svetlobo (argonski laser za zvezno delovanje oziroma frekvenčno podvojen neodimov laser za sunkovno). Najpomembnejša uporaba je v raziskovalnih laboratorijih za ustvarjanje zelo kratkih sunkov svetlobe z dolžino $\sim 10$ fs. Prevedeno v dolžino je to le nekaj valovnih dolžin svetlobe.

## 7.8 Laserji na organska barvila

Naslednja skupina laserjev so laserji na organska barvila, v katerih je organsko barvilo raztopljeno v tekočini, praviloma vodi ali alkoholu. To so bili prvi laserji z veliko spektralno širino in nastavljivo valovno dolžino delovanja. Delujejo lahko kot zvezni laserji in z izbiro barvila lahko dosežemo delovanje v območju $300-1500$ µm pri močeh do $\sim 2$ W, široka spektralna širina pa omogoča sunkovno delovanje z uklepanjem faz z nekaj femtosekundnimi sunki pri energiji sunka nekaj 100 J.

Shema energijskih nivojev molekule tipičnega organskega barvila je zelo podobna shemi energijskih nivojev titan-safirnega laserja (slika 7.14). Vsi elektronski nivoji so razcepljeni v vibracijske in rotacijske podnivoje. V toplotnem ravnovesju je molekula na dnu osnovnega elektronskega stanja $S_0$. Z absorpcijo vidne svetlobe primerne frekvence preide v neko vzbujeno singletno stanje $S_1$. Preko trkov z molekulami topila vzbujena barvilna molekula zelo hitro, v času okoli pikosekunde, preide na dno vzbujenega stanja, od koder s sevanjem preide nekam v osnovno stanje $S_0$, od tam pa s trki hitro nazaj na dno osnovnega stanja. Ker sta obe elektronski stanji zaradi vibracij in rotacij razširjeni, sta absorpcijska in emisijska fluorescenčna črta široki. Tipična širina je blizu 50 nm. Energija izsevane svetlobe je zmanjšana za energijo prehodov s trki, zato je fluorescenčna črta premaknjena k nižjim frekvencam od absorpcijske. Absorpcijski in fluorescenčni spekter prehoda $S_0 - S_1$ za barvilo rodamin 6G kaže slika (7.15).

Slika 7.15: Absorpcijski in emisijski spekter barvila rodamin 6G, ki se uporablja v laserjih

| | |
|---|---|
| Valovna dolžina | $300 - 1500$ µm |
| Verjetnost za spontani prehod $A$ | $\sim 10^8/\mathrm{s}$ |
| Presek za stimulirano emisijo $\sigma$ | $3 \times 10^{-20}$ m$^2$ |
| Spektralna širina črte $\Delta\nu$ | $3 \times 10^{13}$ Hz |
| Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$ | $\sim 10^{22}/\mathrm{m}^3$ |

Tabela 7.3: Tipični podatki za laserje na organska barvila

Laser na organska barvila lahko deluje pri vseh frekvencah znotraj široke fluorescenčne črte. Zato moramo v resonator vgraditi nek frekvenčno selektiven element, s katerim lahko nastavljamo frekvenco laserja. Uporabna je prizma, kot v primeru argonskega laserja, ali pa eno od zrcal nadomestimo z uklonsko mrežico, ki je postavljena pod takim kotom, da se po osi resonatorja odbije svetloba izbrane valovne dolžine. To lahko spremenimo s spreminjanjem kota nagiba mrežice. Barvilne laserje črpamo ali z bliskovno lučjo ali z drugim laserjem primerne valovne dolžine, na primer argonskim ali ekscimernim laserjem. Široko območje ojačevanja barvila nam z uklepanjem faz omogoča dobiti tudi zelo kratke svetlobne sunke, pod 1 ps.

Laserji na organska barvila so uporabni v spektroskopiji, za ločevanje izotopov, v medicini (npr. za odstranjevanje ledvičnih kamnov), astronomiji (za umetne laserske zvezde) ...

## 7.9 Vlakenski laserji

Posebna vrsta laserjev so vlakenski laserji, v katerih predstavlja aktivno sredstvo optično vlakno, dopirano z ioni redkih zemelj. (Za podroben opis optičnih vlaken glej poglavje 10) Valovna dolžina, pri kateri oddajajo svetlobo, je odvisna od snovi, s katero je vlakno dopirano. Najpogosteje je to erbij (1550 nm), iterbij ($\sim$ 1100 nm) ali neodim (1064 nm). Vlakenske laserje odlikuje izredno velik izkoristek (tipično okoli 70–80 %, lahko tudi več) in posledično zelo velika moč (do 20 kW). Za njih sta značilni tudi izredno velika kakovost žarka (faktor $M^2 < 1,1$, glej enačbo 3.24) in razmeroma majhna občutljivost na zunanje motnje. Delujejo lahko v zveznem ali sunkovnem načinu.

Oglejmo si vlakenski laser, katerega vlakno je dopirano z ioni erbija (masni delež $\sim 1$ %). Vlakna so pogosto dodatno dopirana z iterbijem, kar poveča absorpcijo črpalnega laserja in s tem izkoristek laserja. Laser črpamo optično z lasersko diodo pri 980 nm ali 1480 nm, laserski prehodi pa se zgodijo ob povratku v osnovno stanje. Osnovno stanje je razcepljeno v več podnivojev (slika 7.16), zato je valovna dolžina oddane svetlobe v razmeroma širokem intervalu 1520–1560 nm. Velika spektralna širina omogoča delovanje z uklepanjem faz.

Zgradba vlakenskih laserjev se razlikuje od do zdaj opisanih. Glavna razlika je seveda v resonatorju, ki je v tem primeru kar optično vlakno. Tipičen premer je $\sim 5$ µm, dolžina pa več metrov. Na koncih vlakna lahko postavimo dikroična zrcala, ki omogočajo longitudinalno sklopitev črpalnega žarka v vlakno. Navadno namesto navadnih zrcal uporabimo periodične strukture na koncih vlakna, na katerih se valovanje izbrane valovne dolžine Braggovo odbija (slika 7.17). S selektivnim odbojem se spekter ojačenega izhodnega valovanja bistveno zmanjša.

Navadno uporabljamo vlakna, ki so sestavljena iz sredice in dveh plaščev. Laserska svetloba ostaja ujeta v sredici vlakna, črpalno pa vodimo po notranjem plašču. To omogoča bistveno

Slika 7.16: Energijski nivoji v erbijevem vlakenskem laserju (levo) in absorpcijski ter emisijski spekter za erbij (desno). Dodaten vrh pri 980 nm ni prikazan.

lažjo sklopitev črpalnega žarka v vlakno poleg tega povečanje efektivnega polmera žarka vodi do manjših vršnih intenzitet in manjše verjetnosti pojava neželenih nelinearnih pojavov.

Slika 7.17: Shema vlakenskega laserja: LD – črpalna laserska dioda, BPS – Braggova periodična struktura, V – optično vlakno

Vlakenski laseri se uporabljajo v telekomunikacijah, saj oddajajo svetlobo valovnih dolžin, pri katerih je v vlaknih najmanjša disperzija (poglavje 10.4). Velika intenziteta svetlobe omogoča obdelavo, varjenje, vrtanje in rezanje kovin. Zaradi svojih mehanskih lastnosti so primerni tudi za premično lasersko obdelavo snovi.

| | |
|---|---|
| Valovna dolžina | 1550 nm |
| Verjetnost za spontani prehod $A$ | $\sim 90/\mathrm{s}$ |
| Presek za stimulirano emisijo $\sigma$ | $7 \times 10^{-25}\ \mathrm{m}^2$ |
| Spektralna širina črte $\Delta\nu$ | $3 \times 10^{12}$ Hz |
| Gostota obrnjene zasedenosti $\Delta N/V$ | $\sim 10^{24}/\mathrm{m}^3$ |

Tabela 7.4: Tipični podatki za erbijev vlakenski laser

★ Namesto vlaken, dopiranih z ioni redkih zemelj, lahko za izdelavo vlakenskih laserjev izkoristimo pojav stimuliranega Ramanovega sipanja (glej poglavje 8.16). Pri tem pojavu se črpalni žarek svetlobe neelastično siplje, ojači pa se žarek pri nižji frekvenci. Razlika frekvenc ustreza vibracijskim prehodom molekul, ki prevzamejo preostanek energije. Signal, ki se pri prehodu ojačuje, ostaja pretežno ujet v vlakno z Braggovimi periodičnimi strukturami na koncih. Zavedati se moramo razlike med navadnim laserjem, ki deluje zaradi vzpostavljene obrnjene zasedenosti, in Ramanskim laserjem, v katerem pride do ojačenja sipane svetlobe.

## 7.10 Polprevodniški laserji

Za široko uporabo so danes brez dvoma najpomembnejši polprevodniški laserji. Njihove glavne značilnosti so majhna dimenzija ($\sim$ 10–100 µm), utečena izdelava, velik izkoristek ($\sim$ 50 %), predvsem pa neposredno črpanje z električnim tokom. Za črpanje zadoščajo že majhni tokovi (tipično $\sim$ 100 mA), kar omogoča zelo hitro modulacijo svetlobne moči s spreminjajočim električnim tokom. Slabost polprevodniških laserjev je razmeroma širok spekter in posledično majhna koherenca. Polprevodniški laserji delujejo v območju valovnih dolžin od $\sim$ 375 nm do več µm. Izhodne moči so zelo odvisne od valovne dolžine: v UV območju so nizke ($\sim$ 100 mW), sicer pa dosegajo vrednosti $\sim$ 3 W.

### Energijski pasovi v polprevodnikih

Delovanje polprevodniških laserjev temelji na rekombinaciji elektronov iz prevodnega pasu z vrzelmi iz valenčnega pasu, pri kateri se izseva foton. Oglejmo si energijske pasove in prehode med njimi podrobneje. Pri običajnih laserjih so elektroni lokalizirani okoli ionov in njihova kvantna stanja so točno določena. Ko elektron preide iz višjega v nižje stanje, izseva svetlobo točno določene valovne dolžine. Pri polprevodniških laserjih elektroni niso lokalizirani in zaradi interakcij se elektronska stanja razširijo v elektronske pasove, med katerimi ostanejo prepovedani pasovi oziroma energijske reže (tabela 7.5).

| Snov | InSb | InAs | Ge | Si | GaAs | GaP |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_g$ [eV] | 0,17 | 0,36 | 0,67 | 1,124 | 1,43 | 2,26 |

Tabela 7.5: Širina energijske reže v nekaterih polprevodnikih

Pri najobičajnejših polprevodnikih, siliciju in germaniju, leži vrh prevodnega pasu v centru Brillouinove cone pri valovnem vektorju $\mathbf{k} = 0$, dno prevodnega pasu pa pri $\mathbf{k} \neq 0$ (slika 7.18 a). Tako režo imenujemo indirektna reža. Pri spojinah tretje in pete skupine elementov, na primer GaAs, je reža direktna, saj ležita tako dno prevodnega kot vrh valenčnega pasu pri $\mathbf{k} = 0$. (slika 7.18 b)

Slika 7.18: Shema energijskih nivojev v polprevodniku. Zelena označuje prevodni pas, modra pa valenčni. Prehod preko indirektne reže (a) je malo verjeten, saj mora zaradi ohranitve gibalne količine priti še do interakcije s fononom. Tipični prehodi so zato preko direktne reže (b). V vzbujenem stanju (c) so najnižja mesta v prevodnem pasu zasedena in najvišja mesta valenčnega pasu izpraznjena. Za vsak pas posebej vpeljemo Fermijevo energijo $F_p$ in $F_v$.

Razlika v legi vrhov ima pomembno posledico pri uporabi za izvor svetlobe. Fotoni v polprevodniku namreč nastanejo ob rekombinaciji elektrona z dna prevodnega pasu in vrzeli z vrha

valenčnega pasu. Kadar pride do prehoda v snovi z indirektno režo, pride tudi do spremembe gibalne količine elektrona. Te razlike ne more prevzeti foton, saj je njegova gibalna količina več redov velikosti premajhna, zato mora zaradi ohranitve gibalne količine priti hkrati še do emisije ali absorpcije fonona. Proces, ki vključuje foton in fonon, je mnogo manj verjeten, zato v siliciju in germaniju v običajni obliki ni mogoče dobiti znatnega sevanja s prehodi iz prevodnega v valenčni pas. Opisane težave ni pri spojinah z direktno režo, zato se te spojine uporablja za izdelavo polprevodniških laserjev.

V najpreprostejši sliki prevodni pas v bližini minimuma opišemo s parabolično odvisnostjo od valovnega vektorja **k**

$$E_p = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p}. \tag{7.1}$$

Pri tem $m_e$ označuje efektivno maso elektrona v prevodnem pasu, ki upošteva interakcije z mrežo in se zato razlikuje od navadne mase $m_0$. Podobno z efektivno maso zapišemo energijo vrzeli v valenčnem pasu

$$E_v = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_v}. \tag{7.2}$$

Iz izraza za gostoto stanj $\rho(k)dk = k^2 dk/\pi^2$ (povsem analogen enačbi 5.4) lahko z upoštevanjem gornjih zvez zapišemo gostoti stanj na energijski interval za prevodni in valenčni pas

$$\rho_p(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_p}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E-E_g} \qquad \text{in} \qquad \rho_v(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_v}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{-E}. \tag{7.3}$$

Ključna parametra, ki nastopata v izrazih za gostoto stanj, sta efektivna masa elektronov in vrzeli. Ti dve masi sta značilni za posamezen polprevodnik in znašata, na primer v GaAs, $m_e = 0,067\, m_0$ in $m_v = 0,5\, m_0$, pri čemer je $m_0$ masa elektrona. Gostota stanj za vrzeli je v GaAs zato približno dvajsetkrat večja od gostote stanj za elektrone.

Verjetnost za zasedenost stanj je zaradi Paulijevega izključitvenega načela podana s Fermi-Diracovo funkcijo

$$f_p(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T}+1}, \tag{7.4}$$

kjer $E_F$ označuje Fermijevo energijo. Spomnimo, da so pri $T = 0$ vsa stanja pod Fermijevo energijo zasedena, nad njo pa prazna, Fermijeva energija torej leži v energijski reži. Pri končni temperaturi se na dnu prevodnega pasu nahajajo termično vzbujeni elektroni, na vrhu valenčnega pasu pa vrzeli. Pri tem je verjetnost za pojav vrzeli v valenčnem pasu je $f_v = 1 - f_p$.

Število elektronov v prevodnem pasu na prostorninsko enoto izračunamo kot produkt gostote stanj in verjetnost, da je stanje zasedeno, integrirano po celotnem energijskem pasu

$$N_{p0} = \int_{E_g}^{\infty} \rho_p(E) f_p(E)\, dE. \tag{7.5}$$

Število vrzeli v valenčnem pasu pa je

$$N_{v0} = \int_{-\infty}^{0} \rho_v(E) f_v(E)\, dE. \tag{7.6}$$

Število elektronov v prevodnem pasu (in vrzeli v valenčnem) je pri $T = 0$ enako nič, vendar tudi pri končnih temperaturah ostaja razmeroma nizko. Znatno pa ga lahko povečamo, če polprevodnik dopiramo in s tem povišamo Fermijevo energijo.

★ $E_F$ se določi iz pogoja, da je število elektronov v prevodnem pasu enako številu vrzeli v valenčnem pasu in $N_{p0} = N_{v0}$. Fermijeva energija torej leži na sredini energijske reže le v primeru, da sta efektivni masi za elektrone in vrzeli enaki. Sicer pride do premika Fermijeve energije proti pasu z manjšo efektivno maso.

Dopiranje polprevodnika pomeni nadzorovano dodajanje ustreznih nečistoč. Če dodamo donorske primesi, ki povečajo število elektronov v snovi, govorimo o polprevodniku tipa $n$, če pa dodajamo akceptorske snovi, ki elektrone sprejemajo, pa govorimo o polprevodniku tipa $p$. Primeri donorjev za GaAs so žveplo, selen ali telur, primer akceptorjev pa cink in kadmij. Zaradi primesi se v energijski reži pojavi nov energijsk nivo. Donorski nivo je navadno tik pod prevodnim pasom, akceptorski pa tik nad valenčnim pasom. V tipu $n$ se tako Fermijeva energija premakne navzgor, pri močnem dopiranu tudi v prevodni pas. Tako že pri sobni temperaturi dosežemo veliko število elektronov v prevodnem pasu. Podobno je v tipu $p$, v katerem se Fermijeva energija pomakne navzdol in število vrzeli v valenčnem pasu močno naraste.

Ko elektrone vzbudimo iz valenčnega v prevodni pas (to lahko naredimo električno ali optično), se v valenčnem pasu pojavijo vrzeli. Dokler ne pride do rekombinacije (tipično nekaj ns), vlada v prevodnem pasu kvazi-termično ravnovesje, saj je relaksacija elektronov znotraj pasu bistveno hitrejša (tipično ps). Za veliko populacijo elektronov v prevodnem in veliko populacijo vrzeli v valenčnem pasu Fermijeva funkcija ni več dobra za opis zasedenosti stanj (slika 7.18 a). Uporabimo koncept kvazi-Fermijevih nivojev $F_p$ in $F_v$, s katerima opišemo porazdelitvi v vsakem pasu posebej, za prevodni in valenčni pas

$$f_p(E) = \frac{1}{e^{(E-F_p)/k_BT}+1} \quad \text{in} \quad f_v(E) = \frac{1}{e^{(E-F_v)/k_BT}+1}. \tag{7.7}$$

V termičnem ravnovesju je razlika med kvazi-Fermijevima energijama $F_p - F_v$ enaka nič, z naraščajočim vzbujanjem pa se razlika povečuje.

### Ojačenje v polprevodnikih

Posvetimo na polprevodnik v vzbujenem stanju s svetlobo s frekvenco $\omega$. Vpadna svetloba povzroča prehode med stanji z energijo $E_a$ v valenčnem in med stanji z energijo $E_b$ v prevodnem pasu (slika 7.18 b). Če je prehodov iz prevodnega pasu v valenčnega več kot prehodov v obratni smeri, pride do ojačenja svetlobe.

Za zapis verjetnosti za prehod med dvema stanjema v časovni enoti uporabimo Fermijevo zlato pravilo. Pri izračunu verjetnosti za stimuliran prehod upoštevamo, da je verjetnost za zasedenost gornjega stanja $f_p(E_b)$ in verjetnost, da je spodnje stanje nezasedeno, $1 - f_v(E_a)$. Zapišemo najprej verjetnost za določen valovni vektor, na koncu bo treba sešteti po vseh možnih $\mathbf{k}$. Sledi

$$w_s(k) = \frac{2\pi}{\hbar}|H_{pv}|^2\delta(E_b - E_a - \hbar\omega)f_p(E_b)[1 - f_v(E_a)], \tag{7.8}$$

kjer je $H_{pv} = \langle p|\hat{x}|v\rangle E$ matrični element za dipolni prehod v svetlobnem polju $E$ med prevodnim in valenčnim pasom. Podobno je verjetnost za absorpcijo

$$w_a(k) = \frac{2\pi}{\hbar}|H_{pv}|^2\delta(E_b - E_a - \hbar\omega)f_v(E_a)[1 - f_p(E_b)]. \tag{7.9}$$

Upoštevamo enačbi (7.1) in (7.2) in zapišemo razliko energij

$$E_b - E_a = E_g + \frac{\hbar^2k^2}{2}\left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_v}\right) = E_g + \frac{\hbar^2k^2}{2m_r}, \tag{7.10}$$

kjer smo z $m_r = m_v m_p/(m_v + m_p)$ označili reducirano maso elektrona in vrzeli.

Število spontanih emisij oziroma absorpcij na enoto volumna v danem času izračunamo tako, da verjetnosti za prehod integriramo po vseh **k**. Razliko med številom spontanih emisij in absorpcij na enoto volumna (kar je ekvivalentno razliki zasedenosti stanj v navadnem laserju) potem zapišemo

$$\begin{aligned} N_{pv} - N_{vp} &= \int (w_s - w_a)\,\rho(k)\,dk \\ &= \frac{2}{\pi\hbar}\int |H_{pv}|^2 \left(f_p(E_b) - f_v(E_a)\right)\delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + E_g - \hbar\omega\right) k^2\,dk. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Upoštevali smo, da je gostota stanj $\rho(k) = k^2\,dk/\pi^2$. Vpeljemo novo spremenljivko

$$X = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + E_g - \hbar\omega \tag{7.12}$$

in zapišemo integral

$$N_{pv} - N_{vp} = \frac{1}{\pi\hbar}\left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int |H_{pv}|^2 \left(f_p(E_b) - f_v(E_a)\right)\sqrt{(X - E_g + \hbar\omega)}\,\delta(X)dX. \tag{7.13}$$

Z upoštevanjem lastnosti funkcije $\delta$ lahko zapišemo

$$N_{pv} - N_{vp} = \frac{1}{\pi\hbar}\left(\frac{2m_r}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\hbar\omega - E_g}\left(f_p(E_b) - f_v(E_a)\right), \tag{7.14}$$

kjer je $E_p - E_v = \hbar\omega$.

Poglejmo rezultat podrobneje. Da v polprevodniku pride do ojačenja vpadne svetlobe in ne njene absorpcije, mora biti gornji izraz realen in pozitiven. Sledi pogoj

$$\frac{1}{e^{(E_p - F_p)} + 1} > \frac{1}{e^{(E_v - F_v)} + 1}. \tag{7.15}$$

Če dodamo še pogoj, da se lahko ojačujejo le tiste frekvence, ki so nad energijsko režo, zapišemo celoten pogoj za ojačevanje

$$E_g \leq \hbar\omega < F_p - F_v. \tag{7.16}$$

Ojačenje vpadne svetlobe pri dani frekvenci $\omega$ potem zapišemo kot

$$\gamma(\omega) = K\sqrt{\hbar\omega - E_g}\left(f_p(E_p) - f_v(E_v)\right), \tag{7.17}$$

pri čemer za ojačenje velja

$$dj = \gamma(\omega)\,j\,dz. \tag{7.18}$$

Z naraščajočo stopnjo vzbujenosti (ekvivalentu obrnjene zasedenosti) koeficient ojačenja razumljivo narašča, manjša pa se z naraščajočo temperaturo. Ojačenje kot funkcijo frekvence kaže slika (7.19).

Neravnovesno stanje, ki je pogoj za ojačenje svetlobe, lahko dosežemo, kadar v degeneriran polprevodnik tipa $p$ z dovolj veliko hitrostjo dodajamo elektrone v prevodni pas. To lahko storimo preko stika $p$-$n$, na katerega priključimo napetost v prevodni smeri. Najpreprostejši primer je stik $p$-$n$, ki označuje stik dveh kosov iste snovi, le da je na eni strani ta snov dopirana

Slika 7.19: Ojačenje v polprevodniku kot funkcija frekvence svetlobe. Črna črta velja pri $T = 0$, rdeča pa pri $T > 0$.

z akceptorji in na drugi z donorji. Ko staknemo območji $p$ in $n$, elektroni iz prevodnega pasu $n$ strani difundirajo na stran $p$, vrzeli pa ravno obratno in v stacionarnem stanju nastane ozek pas, tako imenovani, izpraznjeni sloj, v katerem ni prostih nosilcev naboja. Na strani $n$ ostanejo pozitivni donorski ioni, na strani $p$ pa negativni akceptorski ioni, ki ustvarjajo električno polje. Nastalo polje preprečuje nadaljnjo difuzijo nosilcev naboja. V ravnovesju se Fermijeva energija na obeh straneh izenači, prevodni in valenčni pas pa se ukrivita.

Slika 7.20: Energijska pasova v močno dopiranem stiku $p$-$n$ (levo) in ista pasova ob priključeni napetosti $U$ v prevodni smeri (desno). $F_p$ in $F_v$ označujeta kvazi-Fermijevi energiji, senčen del pa aktivno območje, v katerem pride do rekombinacije elektronov in vrzeli.

Ko na stik priključimo napetost v prevodni smeri (torej pozitivno napetost na stran $p$), se potencialni skok zmanjša. Hkrati se spremeni tudi Fermijev nivo na obeh straneh stika in za zasedenost opišemo s kvazi Fermijevima energijama $F_p$ in $F_v$. V ozkem območju v bližini stika pride do hkratne zasedenosti elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu. To imenujemo aktivno območje, saj v njem prihaja do rekombinacij in do nastanka fotonov. Pri nizkih priključenih napetostih oziroma nizkih tokovih skozi stik $p$-$n$ prihaja do spontane rekombinacije in nizke izsevane moči svetlobe. Pri večjih napetostih, ($e_0 U \approx E_g$) pride do velikih koncentracijah nosilcev naboja in stimuliranih rekombinacij, ki omogočajo optično ojačenje.

Ojačenje v polprevodniških laserjih je precej veliko, lahko več od 100 /cm, zato je mogoče dobiti delujoč laser že v zelo majhnem aktivnem območju, lahko tudi le nekaj mikronov. Običajni polprevodniški laserji so tako dolgi okoli $0,25$ mm.

### Zgradba laserja

Prvi polprevodniški laser (1962) je bil narejen iz GaAs in je oddajal svetlobo pri 850 nm. Shema takega laserja je na sliki (7.21). Vidimo, da polprevodniški laser nima navadnega resonatorja iz dveh odbojnih zrcal, ampak se svetloba odbija na gladko odklanih stranskih ploskvah kristala.

Zaradi velikega lomnega količnika (npr. $n = 3,5$ za GaAs) je odbojnost dovolj velika za učinkovito delovanje laserja.

Slika 7.21: Shema preprostega polprevodniškega laserja (levo) in porazdelitev svetlobne intenzitete na stiku $p$-$n$. Tipična širina je 100–200 µm, dolžina pa 200–500 µm. Svetlobni profil v laserju (desno). Svetloba se ojači v aktivnem območju (vijolična), v območju $p$ in $n$ pa se absorbira.

Opisani polprevodniški laserji imajo kar nekaj slabosti. So zelo močno dopirani, dobro delujejo le močno hlajeni (prvotno pri 77 K), poleg tega je snop v takih laserjih pogosto širši od debeline aktivnega območja. Debeline aktivnega območja ne moremo nadzorovano spreminjati, saj je odvisna od difuzije in rekombinacije. Tipično znaša $\sim 1$ µm, širina žarka pa nekaj mikronov več, zato znaten del svetlobe potuje po območju $p$ in $n$, kjer pride do absorpcije in do povečanih izgub ter segrevanja. Tokovi, potrebni za delovanje takega laserja, so visoki ($\sim 1$ kA/cm$^2$), kakovost žarka pa razmeroma slaba.

Bistveno izboljšano delovanje je v tako imenovanih heterostrukturah, kjer sta območji $p$ in $n$ narejeni iz različnih snovi[1]. Najpomembnejša primera heterostrukture sta stika $n$-$Ga_{1-x}Al_xAs$–$p$-GaAs–$p$-$Ga_{1-x}Al_xAs$ in $Ga_{1-x}In_xAs_{1-y}P_y$. Prvi deluje v območju od 750 nm do 880 nm, odvisno od $x$ in koncentracije primesi, drugi pa med 1,1 µm in 1,6 µm in je zato posebno pomemben za optične komunikacije, ki največkrat delujejo pri 1,3 µm in 1,55 µm. Prvi primer si oglejmo podrobneje.

★ Poglaviten parameter pri izdelavi heterostruktur je najti snovi, ki lahko rastejo skupaj. Take plastne strukture naredijo z epitaksialno rastjo. Pri tem je pomembno, da so medatomske razdalje različnih materialov enaki, sicer pride do defektov in slabšega delovanja. GaAs in AlAs imata enako strukturo in praktično enako medatomsko razdaljo, zato lahko brez škode na strukturi atome galija zamenjamo z atomi aluminija. Tipične vrednosti $x$ v $Ga_{1-x}Al_xAs$ so 0,3. Zaradi dodatka aluminija se spremeni energijska reža ($\approx 1,42 + 1,3x$ eV) in lomni količnik zlitine ($\approx 3,5 - 0,71x$). S spreminjanjem koncentracije aluminija lahko toraj zvezno spreminjamo širino energijske reže in lomni količnik snovi.

Heterostruktura ima dve poglavitni prednosti. Zlitina z aluminijem ima malenkost večjo energijsko režo od čistega GaAs in mejni plasti ustvarita potencialno bariero, ki preprečuje difuzijo nosilcev naboja iz aktivne plasti. Tako ostane koncentracija elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu že pri razmeroma majhnih tokovih velika in svetloba se ojačuje. Druga prednost je večji lomni količnik zlitine, zaradi katerega ostane svetloba ujeta v aktivni plasti, podobno kot v valovnem vodniku. Ker manjši del svetlobe potuje izven aktivnega območja, so manjše tudi izgube, kar vodi do nižjih potrebnih tokov in zmanjšanja gretja.

Aktivna plast je 0,3 mikrona. Elektroni in vrzeli so vpeljani v to plast iz n- in p- regij. Zlitina

[1] Za iznajdbo heterostruktur sta Zhores I. Alferov in Herbert Kroemer leta 2000 prejela Nobelovo nagrado.

GaAlAs ima večjo energijsko režo of GaAs, koliko, je odvisno od x. To ustvari potencialno bariero, ki preprečuje difuzijo nosilcev naboja iz GaAs. Enako pomembno je, da je lomni količnik GaAlAs manjši, približno -0,4*x. Zato se dobi valovodno obnašanje in omejitev svetlobe. Confinement zmanjša prag delovanja in izgube. Pri sobni temperaturi nizek prag (100x nižjI), večje izgube in močnejše ojačenje.

strtuktura pgaas - pgaal - gaas - ngaal - ngaas. debelina 0,3 mikrone.

izhodna moč narašča linearno s tokom skozi stik.

Obe lastnosti sta pomembni za delovanje laserja. Aktivna plast je tanka, okoli 0,2 $\mu$m debela plast čistega GaAs. Potek energije pasov preko aktivne plasti z napetostjo v prevodni smeri kaže slika **??**. Elektroni tečejo iz n-tipa $Ga_{1-x}Al_xAs$ v prevodni pas aktivne plasti GaAs, vrzeli pa iz p $Ga_{1-x}Al_xAs$ v valenčni pas.

Pri strukturi, ki jo kaže slika **??**, je aktivna plast v prečni smeri neomejena, zato lahko hkrati sveti mnogo prečnih nihanj, zaradi česar je slabša prečna koherenca snopa in delovanje laserja nestabilno. To slabost popravijo tako, da plasti ob straneh pojedkajo, da ostane le kakih 10 $\mu$m širok greben, kot kaže slika **??**. Odjedkani material nadomestijo s čistim $Ga_{1-x}Al_xAs$, tako da je aktivni volumen od vseh strani obdan s snovjo z večjim lomnim količnikom. S tem dobimo pravokoten svetlobni vodnik, v katerem je ujet laserski snop. Ob primerni izbiri deleža aluminija dobijo take lomne količnike, da je v laserju možen le osnovni snop brez vozlov v prečni smeri. Izhodni snop iz laserja je seveda eliptičen s presekom okoli 1 $\mu$m v navpični in 10 $\mu$m v prečni smeri. To da v večji oddaljenosti snop z divergenco kakih $70^o$ v navpični in okoli $5^o$ v prečni smeri. Če potrebujemo cilindrično simetričen snop, ga moramo popraviti z ustreznimi cilindričnimi lečami (Naloga).

Galij-arsenidni laser, kakršen je prikazan na sliki **??** lahko deluje že pri črpalnem toku nekaj miliamperov. Tipični tokovi so med 50 mA in 100 mA. Ker se velik delež elektonov in vrzeli rekombinira s sevanjem v aktivni plasti, je izkoristek GaAs laserjev velik, tudi preko 30 . Tipična izhodna moč je tako reda velikosti 10 mW. Zaradi velike gibljivosti elektronov in vrzeli v GaAs je mogoče tok in s tem izhodno svetlobno moč tudi zelo hitro modulirati, do nekaj GHz, kar je pomembno za uporabo v optičnih komunikacijah.

mobility pf eleltrtons much higher than of holes, electrtons inject into the p region in greater number han holes diffurse into the n region.

Tedaj dobimo položaj, ki ga kaže slika **??**. Naj bo $N_p$ gostota elektronov v prevodnem pasu, $I$ električni tok skozi spoj, $\tau$ pa čas za rekombinacijo elektrona in vrzeli. Velja

$$\frac{N_p}{\tau} = \frac{I}{eV} , \tag{7.19}$$

kjer je V volumen, v katerem se elektroni nahajajo.

yariv irena pollock davies silfvast yariv quantum nove knjige. renk - 150 strani raider undergraduate

### 7.10.1 Svetlobne diode - LED

# 8. Nelinearna optika

Pri obravnavi svetlobnega valovanja v snovi smo doslej vedno privzeli linearno zvezo med polarizacijo in jakostjo električnega polja. To je seveda približek, ki je dovolj dober le pri razmeroma majhnih jakostih polja. Kadar doseže električna poljska jakost velike vrednosti – in v laserskih snopih jih nedvomno lahko doseže – je treba upoštevati tudi višje člene v razvoju. Takrat govorimo o nelinearni optiki, saj zveza med polarizacijo in električnim poljem ni linearna. V tem poglavju bomo spoznali zanimive pojave, ki jih povzroči nelinearni del polarizacije, med drugim optično frekvenčno podvajanje, optično parametrično ojačevanje, optično usmerjanje, samozbiranje laserskega snopa, optične solitone in optično fazno konjugacijo.

## 8.1 Nelinearna susceptibilnost

V linearnem približku odziva snovi velja, da je polarizacija snovi $\mathbf{P}$ linearna funkcija električne poljske jakosti svetlobe $\mathbf{E}$. Takrat zapišemo (enačba 1.7)

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\underline{\varepsilon} - 1) \cdot \mathbf{E}. \tag{8.1}$$

Če uvedemo tenzor linearne susceptibilnosti

$$\chi^{(1)} = \underline{\varepsilon} - 1, \tag{8.2}$$

lahko linearni odziv snovi zapišemo strnjeno kot

$$\mathbf{P}_\mathrm{L} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E}. \tag{8.3}$$

Ta približek je dober za majhne jakosti električnega polja. Pri večjih poljih postanejo pomembni tudi členi višjega reda v razvoju polarizacije po $\mathbf{E}$

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{P}_\mathrm{L} + \mathbf{P}_\mathrm{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E}\,\mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\,\mathbf{E}\,\mathbf{E} + \ldots} \tag{8.4}$$

Vpeljali smo nelinearni susceptibilnosti $\chi^{(2)}$ in $\chi^{(3)}$, ki sta tenzorja tretjega in četrtega ranga. Za bolj nazorno predstavo izpišimo nelinearna dela še po komponentah

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},2})_i = \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k \tag{8.5}$$

in

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},3})_i = \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l, \tag{8.6}$$

pri čemer smo uporabili Einsteinov zapis seštevanja po indeksih. Značilne vrednosti susceptibilnosti v trdnih snoveh so $\chi^{(1)} \sim 1$, $\chi^{(2)} \sim 10^{-11}$ m/V in $\chi^{(3)} \sim 10^{-22}$ m$^2$/V$^2$. Obravnavali bomo samo snovi, v katerih ni izgub in so susceptibilnosti realne.

**Naloga 8.1.1** Pokaži, da so gostote svetlobnega toka, pri katerih dosežemo znaten nelinearen prispevek k polarizaciji in velja

$$\frac{P_{NL}}{P_L} \sim 10^{-5},$$

velikostnega reda 1 $\mathrm{MW/cm^2}$. Ker so take vrednosti z navadnimi svetili povsem nedosegljive, je bilo mogoče nelinearne optične pojave opazovati šele po iznajdbi laserjev.

Tenzor $\chi^{(2)}$ je od nič različen le v snoveh, ki nimajo centra inverzije. Ker lahko v produktu (enačba 8.5) vrstni red $E_j E_k$ zamenjamo, mora biti tenzor invarianten na zamenjavo

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj}. \tag{8.7}$$

Zaradi te simetrije lahko vpeljemo poenostavljen zapis, pri katerem prvi indeks prepišemo $(x = 1, y = 2, z = 3)$, zadnja dva indeksa pa združimo. Dogovorjene oznake so $xx = 1, yy = 2, zz = 3, yz = zy = 4, xz = zx = 5, xy = yx = 6$. Tako na primer $\chi_{xxz}$ zapišemo kot $\chi_{15}$. Namesto splošnega tenzorja tretjega ranga smo s tem uvedli matriko velikosti $3 \times 6$, v kateri je zaradi simetrijskih lastnosti kristala navadno le nekaj komponent različnih od nič.

Kadar je v snovi absorpcija dovolj majhna, lahko matriko poenostavimo z dodatnim približkom, tako imenovano Kleinmanovo domnevo[1]. Ta pravi, da je

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj} = \chi_{kij} = \chi_{kji} = \chi_{jik} = \chi_{jki}. \tag{8.8}$$

| Kristal | Grupa | Neničelne komponente tenzorja $\chi$ | Vrednosti ($10^{-12}$ m/V) |
|---|---|---|---|
| $BaTiO_3$ | 4mm | $\chi_{xxz} = \chi_{yyz} = \chi_{xzx} = \chi_{yzy} = \chi_{15} = \chi_{24}$<br>$\chi_{zxx} = \chi_{zyy} = \chi_{31} = \chi_{32}$<br>$\chi_{zzz} = \chi_{33}$ | $\chi_{15} = 42,6$<br>$\chi_{31} = 45,2$<br>$\chi_{33} = 16,0$ |
| KDP | $\bar{4}2$m | $\chi_{xyz} = \chi_{yxz} = \chi_{xzy} = \chi_{yzx} = \chi_{14} = \chi_{25}$<br>$\chi_{zxy} = \chi_{zyx} = \chi_{36}$ | $\chi_{14} = 0,88$<br>$\chi_{36} = 1,12$ |
| Telur | 32 | $\chi_{xxx} = -\chi_{xyy} = -\chi_{yyx} = -\chi_{yxy} =$<br>$= \chi_{11} = -\chi_{12} = -\chi_{26}$<br>$\chi_{xyz} = \chi_{xzy} = -\chi_{yxz} = -\chi_{yzx} = \chi_{14} = -\chi_{25}$ | $\chi_{11} = 1300$<br>$\chi_{14} \approx 0$ |
| $LiNbO_3$ | 3m | $\chi_{xxz} = \chi_{yyz} = \chi_{xzx} = \chi_{yzy} = \chi_{15} = \chi_{24}$<br>$\chi_{zxx} = \chi_{zyy} = \chi_{31} = \chi_{32}$<br>$\chi_{zzz} = \chi_{33}$<br>$-\chi_{xxy} = -\chi_{xyx} = \chi_{yyy} = -\chi_{yxx} =$<br>$= -\chi_{16} = \chi_{22} = -\chi_{21}$ | $\chi_{31} = -11,9$<br>$\chi_{33} = 68,8$<br>$\chi_{22} = 5,52$ |

Tabela 8.1: Koeficienti nelinearne susceptibilnosti za nekaj izbranih snovi

[1] D. A. Kleinman, Phys. Rev. 126, 1977 (1962).

Poglejmo primer. Vzemimo barijev titanat ($BaTiO_3$) s točkovno grupo 4mm. To pomeni, da ima 4-števno os simetrije in dve zrcalni ravnini, od katerih ena preslika $x \to -x$ ali $y \to -y$, druga pa $x \to y$ in $y \to x$. Od nič različni elementi susceptibilnosti so tako samo

$$\chi_{xxz} = \chi_{xzx} = \chi_{yyz} = \chi_{yzy}, \quad \chi_{zzz} \quad \text{in} \quad \chi_{zxx} = \chi_{zyy}. \tag{8.9}$$

Z upoštevanjem Kleinmanove domneve se število različnih členov še zmanjša in ostaneta le dva

$$\chi_{xxz} = \chi_{xzx} = \chi_{yyz} = \chi_{yzy} = \chi_{zxx} = \chi_{zyy} \quad \text{in} \quad \chi_{zzz}. \tag{8.10}$$

Primerjajmo zdaj gornjo trditev z vrednostmi, podanimi v tabeli (8.1). V tabeli so navedene izmerjene nelinearne susceptibilnosti[2] in vidimo, da Kleinmanova domneva ni povsem točna, je pa razmeroma dober približek.

## 8.2 Nelinearni optični pojavi drugega reda

Vzemimo optično nelinearen kristal s $\chi^{(2)} \neq 0$. V smeri pravokotno glede na njegovo mejno ploskev naj vpadata dve valovanji s frekvencama $\omega_1$ in $\omega_2$. Zaradi nelinearne sklopitve nastajajo v snovi nova valovanja z različnimi kombinacijami frekvenc (slika 8.1). Tako poleg valovanj z osnovnima frekvencama izhajajo iz kristala tudi valovanja pri dvakratnikih obeh vstopnih frekvenc, pri njuni vsoti, razliki in celo pri frekvenci nič. Oglejmo si te pojave podrobneje.

Slika 8.1: Shematski prikaz nastanka valovanj pri nelinearnih optičnih pojavih drugega reda in spekter izhodne svetlobe, pri čemer intenzitete izhodnih žarkov niso risane v merilu

Nastanku valovanja pri podvojeni frekvenci oziroma optičnemu frekvenčnemu podvajanju pravimo tudi SHG (*Second harmonic generation*), nastanku valovanja pri vsoti frekvenc SFG (*Sum frequency generation*), nastanku valovanja pri razliki frekvenc DFG (*Difference frequency generation*) in pojavu statičnega polja pri $\omega = 0$ optično usmerjanje (*Optical rectification*).

Ugotovili smo že, da navadna valovna enačba ne velja za opis pojavov pri velikih intenzitetah vpadnih valovanj. V tem primeru pride namreč do pojava nelinearne polarizacije in valovanje opišemo z nelinearno valovno enačbo

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}.} \tag{8.11}$$

[2] Izmerjene vrednosti, ki jih najdemo v literaturi, se od vira do vira pogosto znatno razlikujejo.

**Naloga 8.2.1** Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpelji nelinearno valovno enačbo (enačba 8.11), pri čemer upoštevaj enačbo (8.4). Pomagaj si z identiteto

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Nehomogene valovne enačbe na splošno ne znamo rešiti in se moramo zateči k približkom. Prva poenostavitev, ki jo naredimo, je omejitev na vzporedna vpadna žarka, ki se širita v smeri osi $z$. Poleg tega se omejimo na izračun samo enega nastalega valovanja in privzamemo, da je neodvisno od drugih nastalih valovanj. Ta omejitev ni huda. Dokler sta namreč amplitudi valovanj pri vsoti in razliki frekvenc majhni, ju lahko obravnavamo vsako posebej. Ni sicer nujno, da sta amplitudi obeh nastalih valov vedno majhni, vendar je lahko, kot bomo videli pozneje, le eno valovanje naenkrat po jakosti primerljivo z vpadnim.

V snovi so tako prisotna tri valovanja: dve vpadni in tretje, novo nastalo. Zapišemo jih z

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{2}\left[A_1(z)\,e^{i(k_1 z-\omega_1 t)} + A_1^*(z)\,e^{-i(k_1 z-\omega_1 t)}\right], \\
\mathbf{E}_2 &= \frac{\mathbf{e}_2}{2}\left[A_2(z)\,e^{i(k_2 z-\omega_2 t)} + A_2^*(z)\,e^{-i(k_2 z-\omega_2 t)}\right] \quad \text{in} \\
\mathbf{E}_3 &= \frac{\mathbf{e}_3}{2}\left[A_3(z)\,e^{i(k_3 z-\omega_3 t)} + A_3^*(z)\,e^{-i(k_3 z-\omega_3 t)}\right].
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Polja smo zapisali v realni obliki, to je s kompleksno konjugiranimi deli, saj valovna enačba (enačba 8.11) ni linearna. Upoštevali smo tudi, da so zaradi nelinearnih pojavov amplitude funkcije kraja, za katere pa lahko privzamemo, da se le počasi spreminjajo. Njihova kompleksna vrednost dopušča pojav dodatnega faznega zamika. Za valovna števila velja $k_n^2 = \varepsilon_n \omega_n^2 / c_0^2$, pri čemer je $\varepsilon_n$ dielektrična konstanta pri frekvenci $\omega_n$ in polarizaciji $\mathbf{e}_n$, indeks $n = 1 \ldots 3$ pa označuje valovanje. S tem nastavkom vsako od treh valovanj pri konstantni amplitudi reši linearni del valovne enačbe.

Naša naloga je ugotoviti, kako se zaradi nelinearnosti spreminjajo amplitude posameznih valovanj. Nastavek za polje, ki bo rešil nelinearno valovno enačbo, je tako

$$\mathbf{E}(z,t) = \sum_{n=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_n}{2}\left[A_n(z)\,e^{i(k_n z-\omega_n t)} + A_n^*(z)\,e^{-i(k_n z-\omega_n t)}\right]. \tag{8.13}$$

Izračunajmo najprej

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\sum_{n=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_n}{2}\left[k_n^2 A_n(z) - 2ik_n \frac{dA_n(z)}{dz}\right] e^{i(k_n z-\omega_n t)} + \text{ k. k.} \tag{8.14}$$

S k. k. smo označili kompleksno konjugirani del. Upoštevali smo, da se amplituda $A_n(z)$ le počasi spreminja s krajem in smo zato njen drugi odvod po kraju zanemarili. Izračunamo še drugi odvod po času

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_n}{2}\left(-\omega_n^2\right)\left[A_n(z)\,e^{i(k_n z-\omega_n t)} + \text{ k. k.}\right]. \tag{8.15}$$

Nelinearna polarizacija vsebuje produkte polj, ki nihajo z vsemi možnimi vsotami in razlikami parov frekvenc $\omega_1$, $\omega_2$ in $\omega_3$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\mathrm{NL}} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} = \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} &\left(\frac{1}{4}\chi^{(2)} : \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m\right) A_n(z) A_m(z) e^{i(k_n+k_m)z - i(\omega_n+\omega_m)t} + \\
&\left(\frac{1}{4}\chi^{(2)} : \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m\right) A_n(z) A_m^*(z) e^{i(k_n-k_m)z - i(\omega_n-\omega_m)t} + \text{k.k.}
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Da je valovna enačba (enačba 8.11) izpolnjena ob vsakem času $t$, se morajo ujemati izrazi pri istih časovnih odvisnostih, to je pri istih frekvencah. Najprej zberemo člene pri $\omega_n = \omega_3$ in $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Zapišemo

$$ik_3\mathbf{e}_3\frac{dA_3}{dz}e^{ik_3z} = -\frac{\mu_0\varepsilon_0\omega_3^2}{4}\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2A_1A_2e^{i(k_1+k_2)z}. \tag{8.17}$$

Množimo še obe strani skalarno z $\mathbf{e}_3$, upoštevajmo zvezo med $k_3$ in $\omega_3$ in ravnajmo podobno še za drugi dve valovanji. Tako dobimo sistem sklopljenih enačb za amplitude valovanj v optično nelinearnem sredstvu

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\omega_3\chi_{ef}}{4c_0n_3}A_1A_2\,e^{-i\Delta kz} \tag{8.18}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2\chi_{ef}}{4c_0n_2}A_1^*A_3\,e^{i\Delta kz} \tag{8.19}$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1\chi_{ef}}{4c_0n_1}A_2^*A_3\,e^{i\Delta kz}. \tag{8.20}$$

Pri tem je efektivna susceptibilnost

$$\chi_{ef} = \mathbf{e}_3\cdot\chi : \mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2 = \sum_{ijk}\chi_{ijk}e_{3i}e_{1j}e_{2k}. \tag{8.21}$$

Ker polarizacijski vektorji niso nujno vzporedni s koordinatnimi osmi, tudi $\chi_{ef}$ niso čiste kartezične komponente tenzorja nelinearne susceptibilnosti.

**Naloga 8.2.2** Pokaži, da iz Kleinmanove domneve (enačba 8.8) sledi, da so efektivne susceptibilnosti $\chi_{ef}$ v vseh treh enačbah (8.18–8.20) enake.

**Naloga 8.2.3** Pokaži, da nastavek za polje v nelinearni snovi (enačba 8.13) reši nelinearno valovno enačbo (enačba 8.11), in pokaži, da spreminjanje amplitude posameznih valovanj ustreza enačbam (8.18–8.20).

Z $\Delta k$ smo označili razliko valovnih vektorjev

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2. \tag{8.22}$$

Čeprav je $\omega_3 - \omega_2 - \omega_1 = 0$, je $\Delta k$ navadno različen od nič zaradi frekvenčne disperzije lomnega količnika. Videli bomo, da je to ključnega pomena za vrsto nelinearnih optičnih pojavov.

Zapisani sistem diferencialnih enačb (enačbe 8.18–8.20) opisuje več pojavov, odvisno od začetnih pogojev in relativnih intenzitet. Opisali bomo nekaj najpomembnejših primerov.

## 8.3 Optično frekvenčno podvajanje

Obravnavajmo optično nelinearno sredstvo, na katerega vpadata valovanji $\mathbf{E}_1$ in $\mathbf{E}_2$. Naj bosta frekvenci vpadnih valovanj enaki $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, valovanji pa razlikujemo zaradi možnosti dveh različnih polarizacij. Takrat je $\omega_3 = 2\omega$ in govorimo o najpreprostejšem in tudi najpomembnejšem optičnem nelinearnem pojavu – frekvenčnem podvajanju. Pogosto ga uporabljamo za pridobivanje laserskih snopov pri krajših valovnih dolžinah, na primer pri Nd:YAG laserju, ko infrardeče izhodno valovanje (1064 nm) pretvorimo v vidno svetlobo zelene barve (532 nm).

Zanima nas, kako se $A_3(z) = A_{2\omega}(z)$ spreminja vzdolž nelinearnega kristala pri začetnem pogoju $A_{2\omega}(0) = 0$. Privzemimo še, da se pretvori le manjši del vpadnega energijskega toka, tako da sta amplitudi $A_1 = A_2 = A_0$ približno konstantni. Tedaj lahko enačbo za $A_3(z)$ (enačba 8.18) brez težav integriramo do dolžine kristala $L$ in zapišemo

$$A_{2\omega}(L) = \frac{i\omega\chi_{ef}A_0^2}{2c_0 n_{2\omega}} e^{-i\Delta kL/2} \frac{\sin\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\frac{\Delta kL}{2}} L, \tag{8.23}$$

kjer smo z $n_{2\omega}$ označili lomni količnik pri dvojni frekvenci. Iz tega izraza izračunamo izhodno gostoto svetlobnega toka pri dvojni frekvenci

$$j_{2\omega}(L) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n_{2\omega} c_0 |A_3|^2 = \frac{\omega^2\chi_{ef}^2}{2n_{2\omega}n_\omega^2 c_0^3 \varepsilon_0} j_\omega^2 L^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\frac{\Delta kL}{2}}\right)^2. \tag{8.24}$$

Gostota energijskega toka frekvenčno podvojene svetlobe torej narašča s kvadratom intenzitete vpadne svetlobe. Naj bo $S$ presek snopa. Potem je razmerje med energijskim tokom pri podvojeni in osnovni frekvenci (izkoristek pretvorbe) enako

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^2\chi_{ef}^2}{2Sn_{2\omega}n_\omega^2 c_0^3 \varepsilon_0} P_\omega L^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\frac{\Delta kL}{2}}\right)^2. \tag{8.25}$$

Poglejmo si faktor $\sin^2(\Delta kL/2)/(\Delta kL/2)^2$, katerega odvisnost od $\Delta kL/2$ je prikazana na sliki (8.2). Vidimo, da je zaradi tega faktorja na poti, daljši od $2\pi/\Delta k$, stopnja pretvorbe zelo majhna.

Slika 8.2: Izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje je sorazmeren s funkcijo $(\sin(x)/x)^2$, pri čemer je $x = \Delta kL/2$.

Poglejmo primer. Faktor $\Delta k$ je različen od nič zaradi odvisnosti lomnih količnikov od valovne dolžine. V KDP je redni lomni količnik pri 1000 nm 1,496 in pri 500 nm 1,514. Vrednost, pri kateri pade intenziteta frekvenčno podvojenega valovanja na nič $L_c = 2\pi/\Delta k$, je tako le okoli 30 µm. Na večjih dolžinah postane stopnja pretvorbe zanemarljivo majhna.

★ Pri izpeljavi frekvenčnega podvajanja iz enačb za nelinearne pojave drugega reda (enačbe 8.18–8.20) moramo biti pazljivi. Uporabili smo splošne enačbe in tako privzeli, da je vpadno valovanje sestavljeno iz dveh ločenih valovanj s frekvenco $\omega$ z intenziteto $j_\omega$. Lahko pa frekvenčno podvajanje obravnavamo z enim vpadnim valovanjem s frekvenco $\omega$ in intenziteto $2j_\omega$, ki nelinearno interagira samo s sabo. Takrat je zapis enačb za predfaktor drugačen, končen rezultat pa seveda enak.

Za visok izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje je pomembno, da je $\Delta k$ čim manjši oziroma da se faze valovanj čim bolj ujemajo. Če uspemo doseči, da je $\Delta k = 0$, je vrednost faktorja $\sin(\Delta kL/2)/(\Delta kL/2)$ največja in neodvisna od dolžine poti $L$. V tem primeru izkoristek pretvorbe narašča sorazmerno s kvadratom poti

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^2 \chi_{ef}^2}{2Sn_{2\omega}n_\omega^2 c_0^3 \varepsilon_0} P_\omega L^2. \tag{8.26}$$

Za uporabno pretvorbo v frekvenčno podvojeno valovanje je torej treba doseči fazno ujemanje valovnih vektorjev pri osnovni in podvojeni frekvenci. Kako to naredimo, bomo spoznali v nadaljevanju.

---

**Naloga 8.3.1** Pokazali smo, da intenziteta frekvenčno podvojenega valovanja narašča sorazmerno s kvadratom dolžine kristala (enačba 8.24). Takšna odvisnost velja le, če je intenziteta valovanja pri podvojeni frekvenci bistveno manjša od intenzitete vpadnega valovanja, oziroma $A_3 \ll A_1, A_2$. Pokaži, da v nasprotnem primeru intenziteta frekvenčno podvojenega valovanja $j_{2\omega}(L)$ narašča kot

$$j_{2\omega}(L) = j_\omega \tanh^2\left(\chi_{ef}\omega L\sqrt{\frac{j_\omega}{2n_{2\omega}n_\omega^2 c_0^3 \varepsilon_0}}\right) = j_\omega \tanh^2(\kappa L), \tag{8.27}$$

pri čemer je $j_\omega$ vpadna intenziteta valovanja pri osnovni frekvenci.

Namig: upoštevaj, da se celotna energija ohranja.

---

Slika 8.3: Izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje. Če privzamemo, da se intenziteta osnovnega žarka ne zmanjšuje, je odvisnost parabolična (rdeča krivulja), kar je dober približek le za majhne intenzitete. Bolj natančen izračun pokaže, da je izkoristek pretvorbe sorazmeren s $\tanh^2(\kappa L)$ (črna krivulja).

Kaj pa se zgodi, kadar pogoj ujemanja faz ni izpolnjen in $\Delta k \neq 0$? Takrat dolžino kristala $L$ v enačbi (8.25) okrajšamo in izkoristek pretvorbe z naraščajočim $L$ sinusno niha med nič in neko največjo vrednostjo. Tak pojav lahko opazimo, če uporabimo klinast vzorec, ki se mu debelina spreminja, ali pa če vzorec sučemo in na ta način spreminjamo razliko faz. Ta pojav, imenujemo ga Makerjeve oscilacije[3], uporabljamo za merjenje nelinearne susceptibilnosti kristalov.

[3] P. D. Maker et al., Phys. Rev. Lett. 8, 21 (1962).

### Ujemanje faz

Poglejmo, kako lahko dosežemo ujemanje faz, ki je nujno za učinkovito optično frekvenčno podvajanje. Spomnimo se, da je pogoj za ujemanje faz

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = k_3^{2\omega} - k_1^{\omega} - k_2^{\omega} = \frac{2\omega}{c_0} n_3 - \frac{\omega}{c_0} n_1 - \frac{\omega}{c_0} n_2 = 0. \tag{8.28}$$

Iz tega sledi pogoj

$$n_1^{\omega} + n_2^{\omega} = 2n_3^{2\omega}. \tag{8.29}$$

Da lahko zadostimo temu pogoju, izkoristimo dvojni lom v anizotropnih kristalih. Zaradi enostavnosti se omejimo le na optično enoosne kristale brez absorpcije in z normalno disperzijo, pri katerih oba lomna količnika naraščata s frekvenco.

Za razumevanje je najbolj nazoren grafični prikaz (slika 8.4), pri katerem rišemo presek ploskve valovnega vektorja z ravnino, določeno z optično osjo in valovnim vektorjem (glej poglavje 1.8). Za vsako smer valovnega vektorja obstajata dve rešitvi: rednemu žarku, katerega polarizacija je pravokotna na omenjeno ravnino, ustreza krožnica s polmerom $n_o$, izrednemu, katerega polarizacija leži v ravnini, pa elipsa s polosema $n_o$ in $n_e$. Rdeča barva nakazuje presek ploskve pri vpadni frekvenci, modra pa pri podvojeni. Ekscentričnost elipse in frekvenčna disperzija sta zaradi večje nazornosti močno pretirani.

Podrobneje poglejmo primer s slike (a), za katerega velja $n_e > n_o$. Opazimo, da se v neki točki rdeča elipsa, ki ustreza vpadnemu valovanju, seka z modro krožnico, ki ustreza valovanju s podvojeno frekvenco. Pri tem kotu $\sphericalangle(\mathbf{k}, z)$ je torej redni lomni količnik pri dvojni frekvenci enak izrednemu količniku pri osnovni frekvenci. Če izberemo izredno polarizacijo vpadnega valovanja, je za podvojeno valovanje z redno polarizacijo pri kotu $\vartheta_m$ izpolnjen pogoj ujemanja faz (enačba 8.29). Takrat leži polarizacija vpadnega valovanja v ravnini optične osi in smeri širjenja, polarizacija izhodnega frekvenčno podvojenega žarka pa je pravokotna na optično os. Zapišimo ta razmislek še z enačbo.

V obravnavanem primeru mora biti lomni količnik za redno polarizirano valovanje pri podvojeni frekvenci $n_o^{2\omega}$ enak lomnemu količniku za izredno polarizirano valovanje pri osnovni frekvenci $n^{\omega}$. Lomni količnik za izredno valovanje je seveda odvisen od kota (enačba 1.67)

$$\frac{1}{(n^{\omega}(\vartheta))^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{(n_o^{\omega})^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{(n_e^{\omega})^2} = \frac{1}{(n_o^{2\omega})^2}. \tag{8.30}$$

Sledi izraz

$$\cos^2\vartheta_m = \frac{(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{\omega})^{-2}}{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_e^{\omega})^{-2}}, \tag{8.31}$$

iz katerega lahko izračunamo kot $\vartheta_m$, pri katerem pride do ujemanja faz. Pri optično enoosnih kristalih je pogoj ujemanja faz določen s kotom širjenja svetlobe glede na smer optične osi v kristalu in obstaja cel stožec dovoljenih smeri.

---

**Naloga 8.3.2** Pokaži, da v primeru negativne anizotropije pogoj za ujemanje faz zapišemo kot

$$\cos^2\vartheta_m = \frac{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}}{(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}}. \tag{8.32}$$

---

Slika 8.4: Štirje primeri, pri katerih je izpolnjen pogoj za ujemanje faz. Ujemanje faz prvega reda za pozitivno anizotropno snov (a), ujemanje faz prvega reda za negativno anizotropno snov (b) ter ujemanje faz drugega reda za pozitivno (c) in negativno (d) anizotropno snov. Za razlago glej besedilo.

S slike (8.4 c in d) lahko razberemo, da obstaja še en primer, pri katerem je izpolnjen pogoj za ujemanje faz. Kot zgled t. i. ujemanja faz drugega reda obravnavajmo primer na sliki (c). Vzemimo različno polarizirani vhodni valovanji z ustreznima različnima lomnima količnikoma $n_o^{\omega}$ in $n^{\omega}(\vartheta)$ . Enačba (8.29) je izpolnjena, kadar je povprečje lomnih količnikov vhodnih valovanj enako lomnemu količniku frekvenčno podvojenega žarka $n_o^{2\omega}$. To se zgodi pri tistem kotu $\vartheta_m$, pri katerem je modra krožnica ravno na sredini med rdečo krožnico in elipso. Za praktično uporabo je ta izbira, kadar obstaja, celo ugodnejša, saj je pri njej kot ujemanja faz bliže $\pi/2$. Ujemanje faz je zato manj občutljivo na majhna odstopanja v kotu ali na temperaturne spremembe lomnih količnikov. Račun kota $\vartheta_m$ za ta primer je bolj zahteven, saj je treba rešiti enačbo četrte stopnje.

### Efektivna susceptibilnost

Na izhodno moč frekvenčno podvojenega snopa poleg faznega faktorja bistveno vpliva tudi efektivna susceptibilnost $\chi_{ef}$ (enačba 8.21). Ta je odvisna od polarizacij vhodnega in izhodnega žarka ter seveda od simetrije kristala. Ugotovili smo že, da je v optično enoosnem kristalu kriterij ujemanja faz izpolnjen na stožcu okoli optične osi, pri čemer je stožec določen z izračunanim kotom $\vartheta_m$ (enačbi 8.31 in 8.32). Drugi kot, ki določa smer širjenja v ravnini, pravokotni na optično os, izberemo tako, da izkoristimo največje komponente nelinearne susceptibilnosti.

Oglejmo si kot primer KDP ($KH_2PO_4$), ki je negativno anizotropen z vrednostmi $n_o^\omega = 1,4942$, $n_e^\omega = 1,4603$, $n_o^{2\omega} = 1,5129$ in $n_e^{2\omega} = 1,4709$ (slika 8.4 b). Valovna dolžina osnovnega snopa naj bo 1064 nm. Zaradi negativne anizotropije za izračun kota ujemanja faz uporabimo enačbo (8.32) in dobimo $\vartheta_m = 41,25°$. Poleg tega iz tabele (8.1) razberemo, da ima nelinearna susceptibilnost v tetragonalni simetriji $\bar{4}2m$ od nič različne komponente $\chi_{xyz}$, $\chi_{xzy}$ $\chi_{zxy}$, $\chi_{zyx}$, $\chi_{yzx}$ in $\chi_{yxz}$. Zaradi poenostavitve privzamemo, da so njihove vrednosti enake.

Naj se osnovno in frekvenčno podvojeno valovanje širita v smeri **s**. Pomagamo si s sliko (8.5) in zapišemo vektor **s**, pri čemer $\varphi$ označuje kot med osjo $x$ in projekcijo **s** na ravnino $xy$

$$\mathbf{s} = (\cos\varphi \sin\vartheta_m, \sin\varphi \sin\vartheta_m, \cos\vartheta_m). \tag{8.33}$$

Slika 8.5: K izračunu efektivne susceptibilnosti. Črtkan krog opisuje osnovno ploskev stožca, ki je določen s $\vartheta_m$, pikčast krog pa njegovo projekcijo na ravnino $xy$. Rdeč vektor označuje polarizacijo redno polariziranega valovanja, moder pa polarizacijo izredno polariziranega valovanja.

Naša naloga je poiskati kot $\varphi$, pri katerem je $\chi_{ef}$ največji in s tem največja tudi moč frekvenčno podvojenega valovanja. Iz pogoja za ujemanje faz smo določili, da mora biti vpadna svetloba redno polarizirana, izhodna frekvenčno podvojena pa izredno polarizirana. Pri tem je redna polarizacija pravokotna na os $z$ (optično os) in hkrati pravokotna na smer vektorja **s**. Zapišemo jo kot

$$\mathbf{e}_o = (e_{ox}, e_{oy}, e_{oz}) = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0). \tag{8.34}$$

To najlažje preverimo, tako da postavimo vektor **s** enkrat v ravnino $xz$ in drugič v ravnino $yz$. Izredna polarizacija leži v ravnini, ki jo tvori vektor **s** z osjo $z$, hkrati pa je pravokotna na vektor **s**, tako da jo zapišemo kot

$$\mathbf{e}_e = (e_{ex}, e_{ey}, e_{ez}) = (-\cos\varphi\cos\vartheta_m, -\sin\varphi\cos\vartheta_m, \sin\vartheta_m). \tag{8.35}$$

Zdaj lahko izračunamo efektivno susceptibilnost (enačba 8.21), pri čemer upoštevamo, da sta žarka 1 in 2 pri osnovni frekvenci redno polarizirana, žarek z oznako 3 pa opisuje izredno polariziran žarek pri podvojeni frekvenci

$$\chi_{ef} = \sum_{ijk} \chi_{ijk} e_{3i} e_{1j} e_{2k} = \sum_{ijk} \chi_{ijk} e_{ei} e_{oj} e_{ok}. \tag{8.36}$$

Krajši račun pokaže, da je zaradi oblike tenzorja nelinearne susceptibilnosti v izbranem primeru od nič različna le ena komponenta nelinearne polarizacije, komponenta $z$. Zapišemo

$$\chi_{ef} = \chi_{zxy} e_{ez} e_{ox} e_{oy} + \chi_{zyx} e_{ez} e_{oy} e_{ox}. \tag{8.37}$$

Sledi

$$P_z^{2\omega} = -2\varepsilon_0 \chi_{zxy} E_0^2 \cos\varphi \sin\varphi \sin\vartheta_m = -\varepsilon_0 \chi_{zxy} E_0^2 \sin(2\varphi) \sin\vartheta_m. \tag{8.38}$$

Nelinearna polarizacija je največja pri $\varphi = \pi/4$, največji $\chi_{ef}$ pa je

$$\chi_{ef} = \sin\vartheta_m \chi_{zxy} \approx 0,66\,\chi_{zxy} \approx 0,74 \text{ pm/V}. \tag{8.39}$$

**Naloga 8.3.3** Izračunaj največjo možno efektivno nelinearno susceptibilnost za frekvenčno podvajanje svetlobe z valovno dolžino 10 µm v kristalu telurja s simetrijsko grupo 32 (glej tabelo 8.1). Lomni količniki: $n_o^\omega = 4,7969$, $n_e^\omega = 6,2455$, $n_o^{2\omega} = 4,8657$ in $n_e^{2\omega} = 6,3152$.

★ Namesto zvezne svetlobe za optično podvajanje frekvenc pogosto uporabimo laserske sunke, saj je vršna moč zelo velika in je zato velika tudi pretvorba v frekvenčno podvojen signal. Vendar je treba biti pri tem pazljiv, saj lahko zaradi disperzije grupne hitrosti osnovni in podvojeni signal ne potujeta z enakima hitrostma. Navadno podvojeni signal potuje počasneje in zaostaja za osnovnim, zato lahko iz kristala izhaja razmeroma sploščen in precej razvlečen frekvenčno podvojen signal. Pojav je izrazit predvsem v podvajanju v ultravijolični del spektra.

## 8.4 Frekvenčno podvajanje Gaussovih snopov

Doslej smo vpadni in frekvenčno podvojeni snop obravnavali kot ravni valovanji, ki sta bili razsežni v prečni smeri. Izračunali smo, da v primeru ujemanja faz ($\Delta k = 0$) moč frekvenčno podvojene svetlobe narašča s kvadratom dolžine poti po nelinearnem sredstvu. Pretvorba v frekvenčno podvojeno svetlobo je po enačbi (8.25) tem učinkovitejša, čim večja je gostota svetlobnega toka pri osnovni frekvenci. Zato v praksi vpadno svetlobo vselej zberemo in tako povečamo gostoto toka. Pri tem moramo paziti, da je nelinearen kristal odporen proti poškodbam zaradi velike gostote svetlobnega toka. Odpornost in možnost izpolnitve kriterija ujemanja faz sta poglavitna kriterija pri izbiri snovi za frekvenčno podvajanje.

Poglejmo, kako se enačbe spremenijo, če je vpadni snop pri osnovni frekvenci Gaussove oblike. Rezultat lahko ocenimo, če vzamemo, da je efektivna dolžina za pretvorbo $L$ kar dolžina grla; izven grla je gostota toka znatno manjša kot v grlu, s tem pa tudi izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeni snop. Dolžina grla je (enačba 3.21)

$$L = 2z_0 = 2\frac{\pi w_0^2}{\lambda/n} = \frac{n w_0^2 \omega}{c_0} \quad \text{in} \quad w_0^2 = \frac{c_0 L}{n\omega}. \tag{8.40}$$

Pri zapisu preseka vpadnega snopa upoštevajmo še faktor ena polovica, do katerega pridemo, če integriramo intenziteto snopa po celotni površini (glej nalogo 3.3.2). Sledi

$$S = \frac{1}{2}\pi w_0^2 = \frac{\pi c_0 L}{2n\omega}. \tag{8.41}$$

Daljše ko je grlo in večja dolžina $L$, na kateri pride do frekvenčnega podvajanja, večji je tudi presek snopa $S$ in zato intenziteta svetlobe manjša, kar zmanjša učinek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje. V enačbi (8.24) upoštevamo ujemanje faz in $S$ pri podvojeni frekvenci. Tako velja

$$\boxed{\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^3 \chi_{ef}^2}{2\pi n_{2\omega} n_\omega c_0^4 \varepsilon_0} P_\omega L.} \tag{8.42}$$

Ob optimalnem fokusiranju je izkoristek pretvorbe torej sorazmeren z dolžino kristala.

**Naloga 8.4.1** Imamo 1 cm dolg kristal $KH_2PO_4$. Valovna dolžina vpadne svetlobe je $1,06$ µm, vhodna moč $P_\omega = 5$ kW, efektivna nelinearna susceptibilnost $\chi_{ef} = 7 \cdot 10^{-13}$ m/V, $\Delta k = 0$ in $n = 1,5$. Pokaži, da je faktor pretvorbe v frekvenčno podvojeno svetlobo okoli 27 %. Da je dolžina grla $2z_0 = 1$ cm, mora biti polmer grla okoli 40 µm. Gostota svetlobnega toka v kristalu je pri tem $2 \cdot 10^8$ W/cm$^2$, kar je že blizu praga za poškodbe, predvsem na vstopni ali izstopni površini.

## 8.5 *Račun podvajanja Gaussovih snopov

V prejšnjem razdelku smo na hitro grobo ocenili vpliv oblike Gaussovih snopov na frekvenčno podvajanje. Naredimo zdaj še natančnejši izračun. Vrnimo se k valovni enačbi (enačba 8.11), vpadna snopa naj bosta pri frekvencah $\omega_1$ in $\omega_2$, nastajajoč snop pa pri frekvenci $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Vsako od polj naj ima obliko

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{2}\left[\tilde{A}_i(r,z)\, e^{i(k_i z - \omega_i t)} + \tilde{A}_i^*(r,z)\, e^{-i(k_i z - \omega_i t)}\right], \tag{8.43}$$

pri čemer je $\tilde{A}(r,z)$ funkcija tako vzdolžne kot tudi prečne koordinate. Privzeli bomo, da se vzdolž smeri $z$ le počasi spreminja. Zaradi poenostavljenega zapisa vpeljemo novo spremenljivko

$$\psi_i = \sqrt{\frac{n_i}{\omega_i}}\tilde{A}_i. \tag{8.44}$$

Tako je nastavek za električno poljsko jakost

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{2}\sqrt{\frac{\omega_i}{n_i}}\psi_i(r,z)e^{i(k_i z - \omega_i t)} + \text{ k. k.} \tag{8.45}$$

Vstavimo nastavek (enačbe 8.45) v valovno enačbo (enačba 8.11) in ločimo na levi in desni člene z enako časovno odvisnostjo. Zaradi počasnega spreminjanja vzdolž smeri $z$ lahko zanemarimo tudi druge odvode $\psi$ po $z$. Od tod sledi sklopljen sistem obosnih enačb

$$\nabla_\perp^2 \psi_1 + 2ik_1\psi_1' = -\frac{k_1}{2}\kappa\psi_2^*\psi_3 e^{i\Delta k z} \tag{8.46}$$

$$\nabla_\perp^2 \psi_2 + 2ik_2\psi_2' = -\frac{k_2}{2}\kappa\psi_1^*\psi_3 e^{i\Delta k z} \tag{8.47}$$

$$\nabla_\perp^2 \psi_3 + 2ik_3\psi_3' = -\frac{k_3}{2}\kappa\psi_1\psi_2 e^{-i\Delta k z} \tag{8.48}$$

s pripadajočim sistemom konjugiranih enačb. Pri tem je

$$\kappa = \frac{\chi_{ef}}{c_0}\sqrt{\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{n_1 n_2 n_3}}. \tag{8.49}$$

S črtico smo označili odvajanje po $z$. Gornji sistem enačb je očitno posplošitev sistema enačb (8.18–8.20) za primer, ko je valovanje odvisno tudi od prečne koordinate. Reševanje tega nelinearnega sistema parcialnih diferencialnih enačb je na splošno zelo zapleteno.

Poglejmo le najenostavnejši primer frekvenčnega podvajanja, ko je $\omega_3 = 2\omega_1 = 2\omega$. Vpadna snopa naj bosta enaka in Gaussove oblike (enačba 3.29), njuna amplituda pa naj bo enaka $A_1$

$$\psi_1 = \psi_2 = A_1\frac{1}{1 + iz/z_1}\exp\left(-\frac{r^2}{w_1^2(z)} + \frac{ik_1 r^2}{2R_1(z)}\right). \tag{8.50}$$

Privzemimo še, da je izpolnjen pogoj za ujemanje faz ($\Delta k = 0$) in da je $\psi_3$ dovolj majhen, da zmanjševanja $\psi_1$ ni treba upoštevati. Tudi za podvojeni snop privzemimo Gaussovo obliko, njegova amplituda $A_3$ pa naj le počasi narašča. Zapišemo ga kot

$$\psi_3 = A_3(z)\psi_{3H}(z,r) = A_3(z)\frac{1}{1+iz/z_3}\exp\left(-\frac{r^2}{w_3^2(z)}+\frac{ik_3r^2}{2R_3(z)}\right), \tag{8.51}$$

pri čemer $\psi_{3H}$ reši homogeno obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Ko izraza za $\psi_1$ in $\psi_3$ vstavimo v tretjo enačbo sistema sklopljenih enačb (8.48), ostane na levi le člen oblike $2ik_3A_3'(z)\psi_{3H}$. Tako dobimo pogoj

$$A_3'(z)\frac{1}{1+iz/z_3}\exp\left(-\frac{r^2}{w_3^2(z)}+\frac{ik_3r^2}{2R_3(z)}\right) = \frac{i\kappa}{4}A_1^2\frac{1}{(1+iz/z_1)^2}\exp\left(-\frac{2r^2}{w_1^2(z)}+\frac{ik_1r^2}{R_1(z)}\right). \tag{8.52}$$

Poiščimo rešitev te enačbe v obliki, za katero velja $w_{30}^2 = w_{10}^2/2$. Tedaj je

$$z_3 = \frac{k_3w_{30}^2}{2} = \frac{2k_1w_{10}^2}{4} = z_1 \tag{8.53}$$

in je tudi $w_3^2(z) = w_1^2(z)/2$. Poleg tega je $R_3(z) = R_1(z)$ in lahko na obeh straneh krajšamo eksponentna faktorja. Ostane

$$A_3'(z) = \frac{i\kappa}{4}A_1^2\frac{1}{1+iz/z_1}. \tag{8.54}$$

Gornjo enačbo seveda brez težav integriramo. Naj bo grlo vpadnega snopa ravno na sredini nelinearnega sredstva, tako da integriramo od $-L/2$ do $L/2$

$$\begin{aligned} A_3(L) &= \frac{i\kappa}{4}A_1^2\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{1+iz/z_1} = \frac{\kappa}{4}A_1^2z_1\ln\frac{1+i\frac{L}{2z_1}}{1-i\frac{L}{2z_1}} = \\ &= \frac{\kappa}{2}A_1^2z_1\arctan\frac{L}{2z_1}\,. \end{aligned} \tag{8.55}$$

Moč Gaussovega snopa je

$$P_i = \frac{1}{2}\pi w_{i0}^2\frac{1}{2}c_0n_i\varepsilon_0E_{i0}^2 = \frac{\pi}{4}w_{i0}^2\varepsilon_0c_0\omega_iA_i^2, \tag{8.56}$$

tako da je izkoristek pri frekvenčnem podvajanju Gaussovega snopa

$$\begin{aligned} \frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{A_3^2}{A_1^2} &= \frac{\chi_{ef}^2\omega^3P_\omega z_1}{\pi c_0^4\varepsilon_0n_\omega n_{2\omega}}\arctan^2\left(\frac{L}{2z_1}\right) \\ &= \frac{\chi_{ef}^2\omega^3P_\omega}{\pi c_0^4\varepsilon_0n_\omega n_{2\omega}}\frac{L}{2}\arctan^2\left(\frac{L}{2z_1}\right)\frac{1}{L/2z_1}. \end{aligned} \tag{8.57}$$

Funkcija $(\arctan^2 x)/x$ zavzame največjo vrednost 0,64 pri $x = L/2z_1 = 1,39$. Pri dani dolžini nelinearnega sredstva $L$ je torej izkoristek največji, kadar je $z_1 = 0,36L$, kar je malo manj kot pri preprosti oceni $z_1 = 0,5L$ (enačba 8.40). Največji izkoristek frekvenčnega podvajanja Gaussovih snopov je tako

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = 0,64\frac{\omega^3\chi_{ef}^2}{2\pi n_{2\omega}n_\omega c_0^4\varepsilon_0}P_\omega L. \tag{8.58}$$

S preprosto oceno, ki smo jo naredili v prejšnjem razdelku (enačba 8.42), smo tako rezultat le malo zgrešili, v obeh primerih pa izkoristek narašča linearno z dolžino kristala.

## 8.6 Optično parametrično ojačevanje

Oglejmo si še en zelo uporaben primer mešanja treh valovanj, ki ga opisujejo enačbe (8.18–8.20). Gre za optično parametrično ojačevanje, pri katerem nelinearne optične pojave izkoristimo za ojačenje optičnih signalov. Imejmo razmeroma šibek vhodni signal pri frekvenci $\omega_1$, ki ga želimo ojačiti, in močno črpalno valovanje pri frekvenci $\omega_3 > \omega_1$. Zaradi nelinearnosti v snovi intenziteta valovanja pri $\omega_1$ narašča, intenziteta valovanja pri $\omega_3$ se zmanjšuje, hkrati pa zaradi ohranitve energije nastaja dodatno valovanje pri razliki frekvenc $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. Proces parametričnega ojačevanja si torej lahko predstavljamo kot pretvorbo enega fotona pri frekvenci $\omega_3$ v dva fotona pri $\omega_1$ in $\omega_2$. Parametrično ojačevanje pogosto uporabljamo za ojačenje šibkih signalov v infrardečem delu.

Slika 8.6: Shematski prikaz nastanka valovanj pri optičnem parametričnem ojačevanju

Izhajamo iz splošnih enačb za nelinearne optične pojave drugega reda (enačbe 8.18–8.20).

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\omega_3\chi_{ef}}{4c_0n_3}A_1A_2\,e^{-i\Delta kz}, \tag{8.59}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2\chi_{ef}}{4c_0n_2}A_1^*A_3\,e^{i\Delta kz} \quad \text{in} \tag{8.60}$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1\chi_{ef}}{4c_0n_1}A_2^*A_3\,e^{i\Delta kz}. \tag{8.61}$$

Privzamemo, da je črpalno valovanje vselej dosti močnejše od drugih dveh ($A_3 \gg A_1, A_2$) in njegova jakost približno konstantna $A_3 = A_{30}$. Poskrbimo še, da je izpolnjen pogoj za ujemanje faz $\Delta k = 0$, začetna pogoja pa zapišemo kot $A_1(z=0) = A_{10}$ in $A_2(z=0) = 0$. Ko vse to upoštevamo, dobimo dve sklopljeni enačbi

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1\chi_{ef}}{4c_0n_1}A_2^*A_{30} \quad \text{in} \tag{8.62}$$

$$\frac{dA_2^*}{dz} = -\frac{i\omega_2\chi_{ef}}{4c_0n_2}A_1A_{30}^*. \tag{8.63}$$

Enačbi lahko rešimo, tako da prvo odvajamo po $z$ in vanjo vstavimo drugo enačbo. Sledi

$$\frac{d^2A_1}{dz^2} = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}A_1 = \kappa^2A_1 \tag{8.64}$$

in podobno za $A_2$

$$\frac{d^2A_2}{dz^2} = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}A_2 = \kappa^2A_2. \tag{8.65}$$

Ob upoštevanju začetnih pogojev izračunamo rešitev za naraščanje amplitude signalnega žarka z začetno amplitudo $A_{10}$

$$A_1 = A_{10}\cosh(\kappa L). \tag{8.66}$$

Hkrati z njim narašča tudi amplituda dodatnega nedejavnega (*idle*) žarka, ki nastane med procesom ojačenja

$$A_2 = A_{20}\sinh(\kappa L). \tag{8.67}$$

V gornjih enačbah je $L$ dolžina nelinearnega sredstva,

$$\kappa^2 = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2 n_1 n_2} \tag{8.68}$$

in

$$A_{20} = i\sqrt{\frac{\omega_2 n_1}{\omega_1 n_2}}A_{10}. \tag{8.69}$$

Na začetku intenziteti obeh valovanj naraščata približno eksponentno na račun črpalnega valovanja (slika 8.7). Ko postane njuna intenziteta znatna in se začne $A_3$ zmanjševati, je treba to seveda upoštevati pri izračunu. Rešiti je treba bolj zahteven sistem treh sklopljenih enačb, podobno – a še bolj zapleteno – kot v nalogi (8.3.1).

Slika 8.7: Normirani intenziteti ojačenega žarka in dodatnega nedejavnega žarka, ki nastane zaradi ohranitve energije. Naraščajoči funkciji sta seveda samo približek, ki velja, dokler je ojačenje majhno in se intenziteta črpalnega žarka ne zmanjšuje znatno.

---

**Naloga 8.6.1** Pokaži, da sta izraza za amplitudi polji $A_1$ in $A_2$ (enačbi 8.66 in 8.67) rešitvi sklopljenih enačb (8.62 in 8.63) ob parametrih $A_{20}$ in $\kappa$, kot sta zapisana v enačbah (8.68) in (8.69).

---

Do zdaj smo vedno privzeli, da je izpolnjen pogoj ujemanja faz in $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = 0$. Ta pogoj lahko izpolnimo na enak način kot pri podvajanju frekvence: v dvolomnem kristalu izberemo ustrezne polarizacije in smer širjenja svetlobe glede na optično os, tako da velja $\omega_3 n_3 = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2$.

Lahko na primer vzamemo izredno polarizacijo za črpalno valovanje in redni polarizaciji za obe ojačevani valovanji, podobno kot pri podvajanju frekvence. Tedaj mora biti izpolnjen naslednji pogoj

$$\left[\left(\frac{\cos\vartheta_m}{n_o^{\omega_3}}\right)^2+\left(\frac{\sin\vartheta_m}{n_e^{\omega_3}}\right)^2\right]^{-1/2}=\frac{\omega_1}{\omega_3}n_o^{\omega_1}+\frac{\omega_2}{\omega_3}n_o^{\omega_2}. \tag{8.70}$$

---

**Naloga 8.6.2** Obravnavali smo optično parametrično ojačevanje, ko je bil izpolnjen kriterij za ujemanje faz. Pokaži, v primeru neujemanja faz $\Delta k \neq 0$ amplitudi ojačevanega in dodatnega žarka naraščata kot

$$A_1 = A_{10}\left(\cosh(\kappa z)-\frac{i\Delta k z}{2\kappa}\sinh(\kappa z)\right)e^{\frac{i\Delta k z}{2}} \tag{8.71}$$

in

$$A_2 = A_{20}\sinh(\kappa z)e^{\frac{i\Delta k}{2}}, \tag{8.72}$$

pri čemer sta

$$\kappa^2=\frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}-\frac{\Delta k^2}{4} \tag{8.73}$$

in

$$A_{20}=i\sqrt{\frac{\omega_2 n_1}{\omega_1 n_2}}\sqrt{1+\frac{\Delta k^2}{4\kappa^2}}\,A_{10}. \tag{8.74}$$

Hitro uvidimo, da so gornje enačbe v limitnem primeru, ko se faze ujamejo in je $\Delta k = 0$, enake enačbam (8.66, 8.67 in 8.68).

---

Za konec ocenimo koeficient ojačenja v kristalu $LiNbO_3$, v katerem želimo ojačiti svetlobo z valovno dolžino $\lambda = 1$ µm. Črpamo z laserjem z valovno dolžino okoli 500 nm in gostoto svetlobnega toka 5 MW/cm$^2$. Lomni količnik snovi je $n = 2,2$, efektivna nelinearna susceptibilnost pa $\chi_{ef} = 5$ pm/V. Vstavimo podatke v enačbo (8.68) in izračunamo vrednost $\kappa \sim 0,15$ /cm. Porast intenzitete vpadne svetlobe v 1 cm dolgem kristalu je tako le približno 2 %.

### Optični parametrični oscilator (OPO)

Gornji izračun kaže, da optično parametrično ojačevanje pri prehodu skozi kristal ni prav veliko kljub dokaj močnemu črpalnemu žarku. Zato je smiselno, da svetloba večkrat preleti ojačevalno sredstvo in se postopoma ojačuje. To naredimo tako, da optično ojačevalno sredstvo zapremo v optični resonator in signal se ob vsakem obhodu ojači. Sestavili smo t. i. optični parametrični oscilator (slika 8.8).

V optičnemu resonatorju je odbojnost zrcal za črpalni žarek ($\omega_3$) zelo majhna, odbojnost za ojačeni žarek pa blizu ena. Valovanje pri $\omega_1$, ki se v parametričnem oscilatorju ojačuje, nastane spontano, prav tako valovanje pri $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. Njuni frekvenci sta dodatno določeni s pogojem za ujemanje faz $k_3 - k_1 - k_2 = 0$, hkrati pa mora ojačevano nihanje sovpadati z lastnim nihanjem resonatorja. S sukanjem ojačevalnega kristala lahko na ta način spreminjamo ojačeno frekvenco in naredili smo nastavljiv izvor svetlobe, navadno v infrardečem delu.

Slika 8.8: Shematski prikaz tipičnega optičnega parametričnega oscilatorja. Ojačevalno sredstvo zapremo med resonatorja, da se signalni žarek ($\omega_1$) ob vsakem preletu ojači.

Za delovanje oscilatorja mora biti jakost črpalnega žarka tako velika, da je ojačenje na obhod večje od izgub. Izračunajmo za primer zgoraj narisanega oscilatorja. Signal z močjo $P_0$ se ob prehodu skozi ojačevalno sredstvo ojači (enačba 8.66)

$$P_1 = P_0 \cosh^2(\kappa L), \tag{8.75}$$

hkrati pa se zaradi izhodnega zrcala z odbojnostjo $\mathscr{R}$ in notranjih izgub $\Lambda_0$ intenziteta žarka zmanjšuje. Pogoj ujemanja faz je izpolnjen le v eni smeri in se svetloba ojačuje le enkrat na celoten obhod. Ob preletu v drugo smer je namreč $\Delta k \neq 0$ in žarek se ne ojačuje. V stacionarnem stanju je moč žarka po obhodu $P_2$ enaka začetni moči $P_0$ in ojačenje je ravno enako izgubam

$$P_2 = P_1\,(1-\Lambda_0)\mathscr{R} = P_0\,(1-\Lambda_0)\mathscr{R}\cosh^2(\kappa L) = P_0 \tag{8.76}$$

oziroma

$$\cosh^2(\kappa L) = \frac{1}{(1-\Lambda_0)\mathscr{R}}. \tag{8.77}$$

Iz gornjega pogoja določimo parameter $\kappa$, po enačbi (8.68) pa mejno amplitudo in intenziteto črpalnega žarka. Nadaljujmo še prejšnji primer ojačenja svetlobe v 1 cm dolgem kristalu $LiNbO_3$. Če je odbojnost izhodnega zrcala $\mathscr{R} = 0,85$, notranje izgube $\Lambda_0 = 0,05$ in prečni presek žarka 10 $\mu m^2$, je moč praga $P_{\omega_3} = 5$ W.

★ Optični parametrični oscilator oddaja svetlobo, podobno kot laser. Tudi sicer sta si do neke mere podobna: oba sistema potrebujeta močen črpalni mehanizem, oba sistema sta sestavljena iz resonatorja, v katerem se žarek velikokrat odbije in postopoma ojačuje, in oba oddajata koherentno svetlobo pri točno določeni valovni dolžini. Vendar je med parametričnim oscilatorjem in laserjem velika razlika. Pri laserju pride do ojačenja svetlobe zaradi obrnjene zasedenosti stanj, pri oscilatorju pa zaradi nelinearnega optičnega pojava. Ker pri oscilatorju energija ni shranjena v snovi, ampak se signal ojačuje sproti, je zelo pomembno, da sunek črpalnega laserja vpade na kristal istočasno kot ojačevan žarek. Velika prednost oscilatorjev pred laserji je zvezno nastavljiva frekvenca delovanja v zelo širokem frekvenčnem območju, saj ni določena s prehodom med nivoji, ampak z izpolnjevanjem pogoja za ujemanje faz.

## 8.7 Optično usmerjanje in teraherčno valovanje

Ko smo obravnavali nelinearne optične pojave drugega reda, smo zapisali različne frekvence, ki so vsebovane v izhodnem signalu (slika 8.1). Eno izmed izhodnih valovanj ima tudi frekvenco enako nič, kar pomeni, da je to statično električno polje. Iz analogije z elektronskimi vezji, kjer izmenično napetost z usmernikom spremenimo v enosmerno napetost, pojav imenujemo optično usmerjanje, saj iz svetlobnega valovanja nastane statično polje. Tako statično polje navadno ni veliko, saj sunek svetlobe z vršno močjo nekaj MW tipično povzroči nekaj deset mV napetosti v smeri prečno na smer potovanja svetlobe.

**Naloga 8.7.1** Pokaži, da je napetost, ki se pojavi pri optičnem usmerjanju, približno enaka

$$U = \frac{\chi P_0}{n^3 \varepsilon_0 c_0 a}, \tag{8.78}$$

pri čemer je $P_0$ moč vpadne svetlobe, $n$ lomni količnik snovi in $a$ širina kristala.
Namig: nelinearen kristal obravnavaj kot ploščati kondenzator.

Oceni še napetost, če je $\chi = 3$ pV/m, $P_0 = 1$ MW, $n = 2,2$ in $a = 5$ mm.

Precej bolj uporaben je pojav, ko na nelinearen kristal posvetimo z ultrakratkimi sunki svetlobe, tipično okoli ps ali krajšimi. Spomnimo se, da je povsem monokromatsko valovanje lahko samo tako, ki je časovno neomejeno in ima neskončen koherenčni čas (enačba 2.16). Čim je valovanje časovno omejeno, ima njegov spekter končno širino, pri čemer imajo krajši sunki svetlobe širši spekter valovanja.

Ko z ultrakratkim sunkom osvetlimo optično nelinearen kristal, v kristal vstopajo vse frekvence z danega intervala $\omega \pm \Delta\omega/2$. Optično usmerjanje ni več popolno, saj se frekvence ne odštejejo povsem, ampak se namesto statičnega polja pojavi sunek svetlobe s širokim spektrom, ki sega od ničelne frekvence do neke največje vrednosti. Celotna spektralna širina tega signala je približno enaka spektralni širini vstopnega sunka, ta pa je obratno sorazmerna z njegovo dolžino. Ocenimo te vrednosti še numerično.

Slika 8.9: Shematski prikaz nastanka teraherčnega valovanja v optično nelinearnem sredstvu

Vzemimo kratek sunek svetlobe dolžine $\tau$ s spektralno širino $\Delta\omega = 2/\tau$. Če je sunek svetlobe dolg 1 ps, je razlika v frekvencah spektra

$$\Delta\omega = \frac{2}{10^{-12}\ \text{Hz}} = 2\ \text{THz}. \tag{8.79}$$

Valovanje, ki nastane pri takem optičnem kvazi-usmerjanju, ima torej frekvence v teraherčnem področju in naredili smo izvor teraherčnega valovanja.

Teraherčno valovanje, to je elektromagnetno valovanje s frekvencami v območju od 0,3 do 3 THz oziroma z valovnimi dolžinami med 0,1 in 1 mm, se uporablja za neinvazivno slikanje in preiskave tkiv in materialov. Kristali, ki se najpogosteje uporabljajo za nastanek teraherčnega valovanja, so ZnTe, GaP, GaSe in GaAs.

## 8.8 Nelinearni pojavi tretjega reda

Doslej smo obravnavali najnižji red nelinearnosti, katerega glavni učinek je mešanje treh frekvenc, na primer optično frekvenčno podvajanje ali optično parametrično ojačevanje. Ti pojavi so možni le v kristalih brez centra inverzije. Naslednji člen razvoja nelinearne polarizacije po električnem polju obstaja v vsaki snovi. V njem nastopa polje v tretji potenci

$$\mathbf{P}_{\mathrm{NL},3} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\,\mathbf{E}\mathbf{E} \tag{8.80}$$

oziroma izpisano po komponentah

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},3})_i = \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l. \tag{8.81}$$

Pri tem je $\chi^{(3)}$ tenzor četrtega ranga, njegova tipična velikost je okoli $10^{-22}$ $\mathrm{m}^2/\mathrm{V}^2$. Na splošno ima 81 različnih neodvisnih komponent, to število pa se lahko zelo zmanjša zaradi simetrije snovi. V izotropni snovi je tako 21 neničelnih elementov, od katerih so le trije neodvisni.

Če vsebuje vpadno polje le eno frekvenco, se zaradi nelinearnosti tretjega reda pojavi polarizacija pri $3\omega$ in $\omega$. Pri dveh vpadnih frekvencah $\omega_1$ in $\omega_2$ so možne kombinacije $2\omega_1 \pm \omega_2$ in $\omega_1 \pm 2\omega_2$, pri treh vpadnih frekvencah pa vse možne vsote in razlike frekvenc, to so $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $3\omega_1$, $3\omega_2$, $3\omega_3$, $\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $\omega_1+\omega_2-\omega_3$, $\omega_1-\omega_2+\omega_3$, $-\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $2\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_1 \pm \omega_3$, $2\omega_2 \pm \omega_1$, $2\omega_2 \pm \omega_3$, $2\omega_3 \pm \omega_1$, $2\omega_3 \pm \omega_2$. Možnosti je torej precej več kot pri nelinearnosti drugega reda in računi so zato precej bolj zapleteni.

Obravnava nastanka valovanja pri kombinaciji frekvenc je zelo podobna obravnavi podvajanja frekvence in parametričnemu ojačevanju. V enačbah za nastanek novega valovanja ali ojačevanje katerega od vpadnih snopov spet nastopi fazni faktor, ki vsebuje razliko vseh valovnih vektorjev $\Delta\mathbf{k}$. Da je intenziteta novega valovanja znatna, mora biti $\Delta kL \simeq 0$, spet mora biti torej izpolnjen pogoj ujemanja faz. Ker v tem primeru nastopajo na splošno štirje valovni vektorji, je seveda tudi pri izbiri geometrije in polarizacij za ujemanje faz precej več možnosti.

Omejimo se na najpreprostejši primer, pri katerem ima vpadno valovanje le eno frekvenco. Takrat se pojavi valovanje pri potrojeni frekvenci, pa tudi pri frekvenci, ki je enaka vpadni. Pojavi se torej polarizacija pri vpadni frekvenci, ki spremeni obnašanje osnovnega žarka, in žarek vpliva sam nase. Ti pojavi, ki jih poimenujemo s predpono *samo-*, kot na primer samozbiranje, so značilni za nelinearne pojave tretjega reda.

## 8.9 Optični Kerrov pojav

Naj valovanje vpada na nelinearno snov, za katero velja $\chi^{(2)} = 0$. Polarizacija je potem enaka vsoti linearnega in nelinearnega dela tretjega reda (enačba 8.4)

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\,\mathbf{E}\,\mathbf{E}. \tag{8.82}$$

Ker obravnavamo nelinearne pojave, moramo tudi v tem primeru zapisati realna električna polja. To naredimo z vsoto dveh kompleksno konjugiranih členov

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{e}}{2}(Ae^{i(kz-\omega t)} + A^* e^{-i(kz-\omega t)}). \tag{8.83}$$

Podobno zapišemo tudi polarizacijo, pri čemer nas bodo zanimali samo členi, ki nihajo s frekvenco $\omega$

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{e}}{2}(P_\omega e^{i(kz-\omega t)} + P^*_\omega e^{-i(kz-\omega t)}). \tag{8.84}$$

Ti členi nastopijo v primeru, ko v izrazu **E E E** vzamemo dvakrat nekonjugirani del, enkrat pa konjugiranega. To lahko naredimo na tri možne načine, zato nastopajo trije enaki členi. Sledi

$$\frac{\mathbf{e}}{2}P_{\omega,\mathrm{NL}} = 3\frac{1}{8}AA^*\left(\varepsilon_0\chi^{(3)}\vdots\mathbf{e}\,\mathbf{e}\mathbf{e}\right)A. \tag{8.85}$$

Celotna polarizacija je

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi^{(1)}\cdot\mathbf{E} + \frac{3}{4}|A|^2\left(\varepsilon_0\chi^{(3)}\vdots\mathbf{e}\,\mathbf{e}\right)\mathbf{E}. \tag{8.86}$$

Z upoštevanjem zveze med amplitudo polja in povprečno gostoto energijskega toka (enačba 1.30) zapišemo

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\left(\chi^{(1)} + \frac{3}{4}\frac{2j}{\varepsilon_0\tilde{n}c_0}\chi^{(3)}\vdots\mathbf{e}\,\mathbf{e}\right)\mathbf{E}. \tag{8.87}$$

Z $\tilde{n}$ smo označili lomni količnik pri frekvenci $\omega$. Faktor v oklepaju ni nič drugega kot efektivna susceptibilnost, ki je neposredno povezana z lomnim količnikom snovi $\chi_{ef} = \varepsilon - 1 = n^2 - 1$. Gornja enačba torej opisuje pojav, pri katerem vpadna svetloba vpliva na lomni količnik snovi. Gre za podoben učinek kot pri navadnem Kerrovem pojavu, pri katerem se lomni količnik spremeni pod vplivom zunanjega električnega polja (enačba 9.4). Opisani optični ekvivalent zato imenujemo optični Kerrov pojav[4].

Poglejmo pojav podrobneje na primeru izotropne snovi. Na snov naj vpada valovanje, ki je polarizirano v smeri $x$, tako da ima nelinearna polarizacija le komponento

$$P_{\mathrm{NL},x} = \varepsilon_0\left(\chi_{xx} + \frac{3}{4}\chi_{xxxx}\frac{2j}{\varepsilon_0\tilde{n}c_0}\right)E = \varepsilon_0\chi_{ef}E = \varepsilon_0(n^2-1)E. \tag{8.88}$$

Izrazimo še lomni količnik

$$n \approx \tilde{n} + \frac{3\chi_{xxxx}}{4\varepsilon_0 c_0\tilde{n}^2}j. \tag{8.89}$$

Efektivni lomni količnik v snovi lahko zapišemo kot

$$\boxed{n = \tilde{n} + n_2 j,} \tag{8.90}$$

pri čemer smo vpeljali nelinearni lomni količnik

$$\boxed{n_2 = \frac{3\chi_{xxxx}}{4\varepsilon_0 c_0\tilde{n}^2}.} \tag{8.91}$$

Efektivni lomni količnik snovi je torej odvisen od intenzitete svetlobe, ki vpada nanjo. Tipične vrednosti nelinearnega lomnega količnika za vidno svetlobo so $10^{-20}$ m$^2$/W. V tekočini $CS_2$ je $n_2 = 3,2\cdot 10^{-18}$ m$^2$/W, v nekaterih drugih snoveh (npr. polprevodnikih) je lahko vrednost $n_2$ večja še za več velikostnih redov, $n_2$ pa je lahko tudi negativen.

Zanimivi posledici lomnega količnika, odvisnega od intenzitete svetlobe, sta samozbiranje svetlobnega snopa in širjenje solitonov po optičnih vodnikih, kar si bomo pogledali v naslednjih razdelkih.

★ Ničesar nismo povedali o ujemanju faz, ki je sicer nujno potrebno za učinkovite nelinearne optične pojave. V tem primeru vpada na snov en sam laserski žarek in pogoj ujemanja faz je vedno izpolnjen.

[4] Škotski fizik John Kerr, 1824–1907.

| Snov | $\chi^{(3)}$ ($m^2/V^2$) | $n_2$ ($m^2/W$) |
|---|---|---|
| steklo BK7 | $2{,}8 \times 10^{-22}$ | $3,2 \times 10^{-20}$ |
| voda | $2,5 \times 10^{-22}$ | $4,1 \times 10^{-20}$ |
| GaAs | $1,4 \times 10^{-18}$ | $3,3 \times 10^{-17}$ |
| ZnSe | $6,2 \times 10^{-20}$ | $3,0 \times 10^{-18}$ |
| $CS_2$ | $3,1 \times 10^{-20}$ | $3,2 \times 10^{-18}$ |
| polimer 4BCMU | $-1,2 \times 10^{-19}$ | $-1,5 \times 10^{-17}$ |

Tabela 8.2: Nelinearna susceptibilnost tretjega reda in nelinearni lomni količnik za nekaj izbranih snovi

## 8.10 Samozbiranje in krajevni solitoni

Za začetek si oglejmo pojav samozbiranja svetlobe. Osnovni Gaussov snop (enačba 3.29) naj vpada na sredstvo, v katerem je lomni količnik odvisen od intenzitete vpadne svetlobe po enačbi (8.90). Naj bo $n_2 > 0$, tako da je lomni količnik v sredini snopa večji od nemotenega lomnega količnika na robu. V osi snopa se optična pot zaradi optično gostejšega sredstva podaljša in valovna fronta v osi zaostaja glede na fronte na robu snopa. Če je zaostajanje dovolj veliko, lahko krivinski radij valovne fronte postane negativen in snop se ne širi, temveč oži (slika 8.10). Temu pojavu pravimo samozbiranje. Samozbiranje je pri dovolj veliki moči snopa lahko tako veliko, da pride do katastrofične zožitve snopa in s tem do tolikšnega povečanja gostote svetlobnega toka, da nastanejo poškodbe v snovi.

Slika 8.10: V Gaussovem snopu je intenziteta valovanja odvisna od prečne koordinate $r$, zato je tudi lomni količnik nelinearnega sredstva odvisen od nje. To vodi do samozbiranja svetlobe. Na sliki so fronte vpadnega Gaussovega snopa narisane kot ravni valovi.

**Naloga 8.10.1** Gaussov snop svetlobe z močjo $P$ in polmerom $w$ naj vpada pravokotno na ploščico kristala debeline $d$. Pokaži, da ploščica deluje na snop kot leča z goriščno razdaljo

$$f = \frac{\pi w^4}{8 n_2 d P}, \tag{8.92}$$

pri čemer je $n_2$ nelinearni lomni količnik.

Zaradi uklona se Gaussov snop širi, pojav samozbiranja pa ima ravno nasprotni učinek. Snop samemu sebi ustvarja valovni vodnik, v katerem je v sredi lomni količnik večji kot na robu. Pri določeni moči snopa je tako možno doseči, da se oba pojava po velikosti ravno izenačita. Snop, ki se širi po snovi, ima tako konstanten polmer, valovne fronte pa so ravne – nastane t. i. krajevni soliton.

Ocenimo, pri kateri moči vpadne svetlobe pride do pojava krajevnih solitonov. Vzemimo, da je na izbranem mestu valovna fronta ravna. Lahko si mislimo, da je tam grlo Gaussovega snopa. Brez samozbiranja bi bil na razdalji dolžine grla $z_0$ krivinski radij valovne fronte (enačba 3.25)

$$R(z_0) = z_0 \left(1 + \left(\frac{z_0}{z_0}\right)^2\right) = 2z_0. \tag{8.93}$$

V bližini osi lahko Gaussovo funkcijo, ki opisuje prečno odvisnost amplitude polja v snopu, razvijemo po prečni koordinati $r$ do drugega reda. Po enačbi (8.90) je odvisnost lomnega količnika približno

$$n(r) = \tilde{n} + n_2 j_0 e^{-2r^2/w_0^2} \approx \tilde{n} + n_2 j_0 \left(1 - 2\frac{r^2}{w_0^2}\right). \tag{8.94}$$

Razlika med lomnim količnikom na osi in pri $w_0$ od osi je $\Delta n = 2 j_0 n_2$. Zaradi tega je na poti od grla do $z_0$ razlika optičnih poti med žarkoma na osi $(r = 0)$ in pri $r = w_0$ enaka $\Delta n z_0 = 2 n_2 j_0 z_0$ in valovna fronta se ukrivi na nek krivinski radij $-R$. Iz preproste geometrije velja zveza

$$\Delta n z_0 = R - R\sqrt{1 - \frac{w_0^2}{R^2}} \approx \frac{w_0^2}{2R} \tag{8.95}$$

Da valovna fronta ostane ravna, se morata krivinska radija zaradi uklona (enačba 8.93) in samozbiranja (enačba 8.95) ravno izenačiti. Od tod sledi

$$\Delta n = \frac{w_0^2}{4z_0^2}. \tag{8.96}$$

Moč snopa, pri katerem se polmer ne spreminja, je potem

$$P_s = \frac{1}{2}\pi w_0^2 j_0 = \frac{1}{2}\pi w_0^2 \frac{\Delta n}{2n_2} = \frac{1}{2}\pi w_0^2 \frac{w_0^2}{4z_0^2}\frac{1}{2n_2} = \frac{\lambda^2}{16\pi n_2}, \tag{8.97}$$

pri čemer smo upoštevali zvezo med $z_0$ in $w_0$ (enačba 3.21).

Pri moči, ki je manjša od kritične $P_s$, se vpadli Gaussov snop širi, čeprav nekoliko počasneje kot v sredstvu s konstantnim lomnim količnikom. Če pa je moč znatno večja od kritične moči, lahko pride do katastrofičnega samozbiranja in porušitve snovi. Zanimivo je, da kritična moč, pri kateri se pojavijo solitoni, ni odvisna od začetnega polmera snopa.

---

**Naloga 8.10.2** Nariši skico k enačbi (8.95) in izpelji izraz za moč, pri kateri pride do pojava solitonov (enačba 8.97).

Izračunaj še kritično moč za pojav solitonov v $CS_2$, če je valovna dolžina vpadnega valovanja 1 µm, nelinearni lomni količnik te tekočine pa je $n_2 = 3,2 \cdot 10^{-18}$ m$^2$/W.

---

Eksperimentalna metoda, s katero merimo nelinearni lomni količnik, je tako imenovana metoda vzdolžnega premika (*Z-scan*). Optično nelinearno sredstvo (naj ima $n_2 > 0$) postavimo v zožan laserski snop (slika 8.11). Zaradi samozbiranja deluje vzorec kot leča, njena goriščna razdalja pa je odvisna od intenzitete snopa in od nelinearnega lomnega količnika. Ko vzorec premikamo vzdolž snopa, se skupna efektivna goriščna razdalja leče in nelinearne snovi spreminja in žarek na detektorju je enkrat bolj zbran, drugič manj. Za lege vzorca desno od prvotnega gorišča ($z > 0$), je skupna goriščna razdalja daljša od goriščne razdalje leče, snop je bolj zbran (pikčasta črta) in signal na detektorju (D) naraste. Za lege vzorca levo od prvotnega gorišča ($z < 0$) je ravno obratno, snop se razširi (črtkana črta) in signal na detektorju se zmanjša. Za snovi z negativnim nelinearnim lomnim količnikom je odziv ravno nasprotnega predznaka. Pri določanju nelinearnega lomnega količnika je ključno uporabiti zaslonko (Z), s katero omejimo premer vpadnega snopa pred detektorjem. Če zaslonko odstranimo in merimo odvisnost celotne vpadne intenzitete od lege vzorca, nelinearnega lomnega količnika ne moremo meriti, lahko pa določimo nelinearni absorpcijski koeficient.

Slika 8.11: Shema metode vzdolžnega premika

## 8.11 *Izpeljava krajevnih solitonov

Za podrobnejšo obravnavo krajevnih solitonov moramo rešiti valovno enačbo v obosnem približku. Začnimo s krajevnim delom valovne enačbe za monokromatsko valovanje v skalarni obliki (enačba 1.21)

$$\nabla^2 E + n^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} E = 0. \tag{8.98}$$

Polje zapišemo v obliki počasi spreminjajoče se amplitude in faznega faktorja, podobno kot smo to naredili pri izpeljavi Gaussovega snopa (enačba 3.4)

$$E = \psi(\mathrm{r}, z) e^{ik_0 z}, \tag{8.99}$$

kjer je $k_0 = \tilde{n}\omega/c_0$ valovno število brez upoštevanja nelinearnosti. Funkcija $\psi(\mathbf{r}, z)$ naj se v smeri osi $z$ le počasi spreminja, tako da lahko drugi odvod po $z$ zanemarimo in zapišemo

$$\nabla_\perp^2 \psi + \frac{\omega^2}{c_0^2}(n^2 - \tilde{n}^2)\psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{8.100}$$

Upoštevamo odvisnost lomnega količnika od intenzitete, pri čemer zanemarimo člen z $n_2^2$, ker je gotovo majhen. Sledi

$$\nabla_\perp^2 \psi + 2k_0^2 \frac{n_2}{\tilde{n}} j\psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{8.101}$$

Izrazimo še gostoto svetlobnega toka z amplitudo električne poljske jakosti

$$\nabla_\perp^2 \psi + k_0^2 n_2 \varepsilon_0 c_0 |\psi|^2 \psi + 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{8.102}$$

Preden se lotimo reševanja gornje enačbe, vpeljimo še

$$\kappa = k_0^2 n_2 \varepsilon_0 c_0 \tag{8.103}$$

in novo spremenljivko vzdolž osi $z$

$$\zeta = \frac{z}{2k_0}. \tag{8.104}$$

S tem preide enačba (8.102) v standardno obliko nelinearne Schrödingerjeve enačbe, le da namesto odvoda po času tukaj nastopa odvod po koordinati $\zeta$. Sledi

$$i\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \nabla_\perp^2 \psi + \kappa |\psi|^2 \psi = 0. \tag{8.105}$$

V treh dimenzijah je reševanje enačbe (8.105) težavno in analitične rešitve niso znane. V dveh dimenzijah pa stacionarno rešitev znamo poiskati. Stacionarni rešitvi se vzdolž $\zeta$ lahko spreminja le faza, zato rešitev iščemo v obliki

$$\psi = e^{i\eta^2\zeta} u(x), \tag{8.106}$$

kjer je $\eta$ konstanta, katere pomen bomo videli v nadaljevanju, funkcija $u(x)$ pa naj bo realna. Uporabimo gornji nastavek v enačbi (8.105) in dobimo

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \eta^2 u - \kappa u^3. \tag{8.107}$$

Z množenjem obeh strani z $u'$ lahko enačbo enkrat integriramo

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \eta^2 u^2 - \frac{1}{2}\kappa u^4. \tag{8.108}$$

Ločimo spremenljivki in zapišemo

$$\int_{\eta\sqrt{2/\kappa}}^{u} \frac{du}{\sqrt{\eta^2 u^2 - \frac{1}{2}\kappa u^4}} = x - x_0, \tag{8.109}$$

pri čemer smo uvedli integracijsko konstanto $x_0$ in integracijsko mejo postavili tako, da so vrednosti pod korenom pozitivne. Integral brez težav izračunamo

$$\frac{1}{\eta}\ln\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\frac{u}{\eta + \sqrt{\eta^2 - \kappa u^2/2}}\right) = x - x_0 \tag{8.110}$$

in izrazimo iskano funkcijo $u(x)$

$$u = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\frac{2\eta}{e^{\eta(x-x_0)} + e^{-\eta(x-x_0)}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\frac{\eta}{\cosh\eta(x-x_0)}. \tag{8.111}$$

Po enačbi (8.106) je rešitev

$$\psi(x,z) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\,\eta\,\frac{e^{i\eta^2\zeta}}{\cosh\eta(x-x_0)}. \tag{8.112}$$

Vidimo, da predstavlja spremenljivka $1/\eta$ karakteristično širino snopa, $x_0$ pa je le njegov prečni premik, ki ga lahko brez škode postavimo na $x_0 = 0$. Tako lahko zapišemo celotno polje stacionarnega snopa

$$E_s(x,z) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \frac{\eta}{\cosh(\eta x)} \exp\left(ik_0 z\left(1 + \frac{\eta^2}{2k_0^2}\right)\right). \tag{8.113}$$

Intenziteta svetlobe je neodvisna od koordinate $z$ in je sorazmerna kvadratu amplitude polja

$$j_s(x,z) = j_0 \frac{1}{\cosh^2(\eta x)}. \tag{8.114}$$

Slika 8.12: Prečni profil krajevnega solitona v 2D. Vzdolž koordinate $z$ se profil ohranja.

Če se vrnemo k izrazu za električno poljsko jakost (enačba 8.113), vidimo, da parameter $\eta$ nastopa tudi v faznem faktorju. To pomeni, da je od njega odvisna tudi konstanta širjenja in s tem fazna hitrost

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\tilde{n}\left(1 + \frac{\eta^2}{2k_0^2}\right)}. \tag{8.115}$$

Fazna hitrost omejenih snopov oziroma solitonov je torej vedno manjša od fazne hitrosti ravnih valov. Bolj ko je snop omejen, manjša je fazna hitrost, za velike polmere snopa pa doseže limitno vrednost $c_0/\tilde{n}$.

Moč dvodimenzionalnega snopa je enaka integralu gostote svetlobnega toka (enačba 8.114) po $x$. Integriramo in zapišemo

$$P_s = \int j_s dx \propto \int |E_s|^2 dx = \frac{2}{\kappa}\eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^2 \eta x} = \frac{4\eta}{\kappa}. \tag{8.116}$$

Moč stacionarnega snopa – solitona – v dveh dimenzijah je torej obratno sorazmerna s širino snopa $1/\eta$. Zato tudi pri poljubno veliki moči obstaja stacionarna širina. To je bistvena razlika med obravnavanim dvo- in tridimenzionalnim primerom, kjer se snop z nadkritično močjo skrči v singularnost.

## 8.12 Optični solitoni

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da pojav samozbiranja lahko izniči širjenje svetlobnega snopa zaradi uklona, tako da ima pri ustrezni moči snop vzdolž smeri širjenja konstantno širino in obliko. Takim snopom smo rekli krajevni solitoni. Povsem podoben pojav poznamo tudi v časovni domeni, kjer se pojavijo časovni ali optični solitoni.

Sunek svetlobe naj se širi po valovnem vodniku. Zaradi disperzije je lomni količnik odvisen od frekvence valovanja in sunek svetlobe se med potovanjem po vodniku podaljšuje. Več o tem bomo spoznali pri obravnavi disperzije v optičnih vlaknih (poglavje 10.4). Ob primernih pogojih lahko nelinearna odvisnost lomnega količnika $n(j)$ ravno izniči disperzijo $n(\lambda)$ in sunek ohranja obliko. Sunkom svetlobe, ki potujejo po sredstvu brez spremembe oblike, pravimo optični solitoni. Posebej so pomembni v optičnih vlaknih, kjer želimo vpliv disperzije zaradi učinkovitosti prenosa informacije kar se da zmanjšati.

Pojava optičnih solitonov ni težko pojasniti. Naj na optično nelinearno sredstvo vpade sunek svetlobe, ki je Gaussove oblike v času

$$j(t) = j_0 e^{-2t^2/\tau^2}. \tag{8.117}$$

Faza takega sunka je

$$\phi(t) = k_o n z - \omega_0 t = k_0(\tilde{n} + n_2 j)z - \omega_0 t = \phi_0 + k_0 n_2 z j - \omega_0 t, \tag{8.118}$$

frekvenca pa

$$\omega = -\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - k_0 n_2 z \frac{dj}{dt}. \tag{8.119}$$

Če vstavimo časovno obliko sunka svetlobe (enačba 8.117), vidimo, da se frekvenca takega sunka spreminja s časom

$$\omega = \omega_0 + \frac{4k_0 n_2 z j_0}{\tau^2} t\, e^{-2t^2/\tau^2}. \tag{8.120}$$

Začetnemu delu sunka (pri $t < 0$) se frekvenca zmanjša, zadnjemu delu sunka (pri $t > 0$) pa se poveča (slika 8.13). Ta pojav spreminjanja frekvence znotraj kratkega sunka imenujemo čričkanje (*chirping*), po podobnosti z oglašanjem čričkov.

Slika 8.13: Zaradi nelinearnega lomnega količnika pride do frekvenčnega premika v sunku svetlobe.

Pri prehodu optičnega sunka z osnovno frekvenco $\omega_0$ se različnim delom sunka frekvenca različno spremeni (slika 8.14 a), začetnemu delu se zmanjša, končnemu pa poveča. Po drugi strani pa v snoveh poznamo barvno disperzijo, kar pomeni, da se valovanja z različnimi frekvencami širijo z različnimi hitrostmi. Pojav disperzije je še bolj zapleten pri potovanju sunkov svetlobe, kar bomo podrobneje obravnavali pri optičnih vlaknih (poglavje 10.5). Zaenkrat povejmo le, da je pomemben parameter disperzija grupne hitrosti, ki je sorazmerna z drugim odvodom lomnega količnika po valovni dolžini (enačba 10.68)

$$D = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2 n}{d\lambda^2}. \tag{8.121}$$

Pri določenih pogojih (izbrana snov in določeno frekvenčno območje) lahko dosežemo, da potuje del valovanja z daljšo valovno dolžino počasneje kot del valovanja s krajšo valovno dolžino (slika 8.14 b). V tem primeru končni del sunka dohiteva sprednjega in učinek disperzije ravno izniči učinek nelinearnosti. Nastane signal, ki ohranja svojo obliko – soliton.

Slika 8.14: Čričkanje sunkov svetlobe zaradi nelinearnega pojava (a). Z ustrezno disperzijo lahko čričkanje izničimo (b) in nastane sunek svetlobe, ki oblike ne spreminja – soliton.

## 8.13 *Izpeljava optičnih solitonov

Za matematični opis optičnih solitonov izhajamo iz nelinearne valovne enačbe (enačba 8.11), ki jo zapišemo v skalarni obliki

$$\nabla^2 E - \frac{n^2}{c_0^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}, \tag{8.122}$$

pri čemer je $P_{\mathrm{NL}}$ nelinearna polarizacija tretjega reda (enačba 8.6). Namesto v časovni domeni je enačbo prikladnejše reševati v frekvenčni domeni, zato namesto $E$ in $P_{\mathrm{NL}}$ vpeljemo Fourierevi transformiranki $\tilde{E}$ in $\tilde{P}$.

Sledi

$$\nabla^2\tilde{E} + \frac{n^2}{c_0^2}\omega^2\tilde{E} = -\mu_0\omega^2\tilde{P}. \tag{8.123}$$

Gornjo enačbo rešujemo z nastavkoma

$$\tilde{E} = \tilde{A}(z,\omega-\omega_0)e^{ik_0z} \tag{8.124}$$

in

$$\tilde{P} = \tilde{B}(z,\omega-\omega_0)e^{ik_0z}, \tag{8.125}$$

pri čemer je $\omega_0$ osrednja frekvenca svetlobnega sunka in $k_0 = \omega_0 n/c_0$. Vpeljemo še $\Omega = \omega - \omega_0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\tilde{A}(z,\Omega)e^{ik_0z} = -\mu_0\omega^2\tilde{B}(z,\Omega)e^{ik_0z}. \tag{8.126}$$

Da lahko rešimo to enačbo, naredimo nekaj približkov. Ker je $\omega \approx \omega_0$, na desni strani enačbe nadomestimo frekvenco z osrednjo frekvenco. Poleg tega upoštevamo, da se amplituda glede na valovno dolžino le počasi spreminja, zato drugi odvod zanemarimo in

$$2ik_0\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z} + (k^2-k_0^2)\tilde{A} = -\mu_0\omega_0^2\tilde{B}. \tag{8.127}$$

Če je disperzija šibka, lahko zapišemo $k^2-k_0^2$ kot razliko kvadratov, $k(\omega_0+\Omega)$ pa razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli osrednje frekvence $\omega_0$ do tretjega člena. Sledi

$$k^2-k_0^2 \approx 2k_0(k-k_0) \approx 2k_0(k'\Omega + \frac{1}{2}k''\Omega^2), \tag{8.128}$$

pri čemer $'$ označuje odvod po frekvenci, in prepišemo enačbo v

$$2ik_0\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z} + 2k_0(k'\Omega + \frac{1}{2}k''\Omega^2)\tilde{A} = -\mu_0\omega_0^2\tilde{B}. \tag{8.129}$$

Vrnimo se v časovno domeno, tako da naredimo inverzno Fourierevo transformacijo. Naj bo $A(z,t)$ kompleksna amplituda električne poljske jakosti in inverzna transformiranka funkcije $\tilde{A}(z,\Omega)$, funkcija $B(z,t)$ pa naj bo amplituda polarizacije in inverzna transformiranka funkcije $\tilde{B}(z,\Omega)$. Sledi

$$i(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t})A - \frac{1}{2}\frac{d^2k}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{\mu_0\omega_0^2}{2k_0}B, \tag{8.130}$$

pri čemer smo z $v_g = d\omega/dk = 1/k'$ označili grupno hitrost. Vpeljimo novo spremenljivko

$$\tau = t - \frac{z}{v_g}, \tag{8.131}$$

s katero opišemo obliko sunka $A_S(z,\tau)$, kot ga vidi opazovalec, ki se giblje z grupno hitrostjo skupaj s sunkom. Uporabimo pravilo verižnega odvajanja

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A_S}{\partial z} + \frac{\partial A_S}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial A_S}{\partial z} - \frac{1}{v_g}\frac{\partial A_S}{\partial \tau}. \tag{8.132}$$

Podobno naredimo še za odvod po času $\tau$, ki pa se ne razlikuje od odvoda po času $t$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A_S}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial A_S}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial A_S}{\partial \tau} \tag{8.133}$$

in

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A_S}{\partial \tau^2}. \tag{8.134}$$

Vstavimo še amplitudo nelinearne polarizacije (enačba 8.86), pri čemer izraz popravimo za faktor 4, ker smo drugače vpeljali parameter $A$. Dobimo

$$B = 3\varepsilon_0 \chi |A|^2 A \tag{8.135}$$

in enačbo (8.130) zapišemo kot

$$i\frac{\partial A_S}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{d^2k}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A_S}{\partial \tau^2} + \kappa |A_S|^2 A_S = 0. \tag{8.136}$$

Pri tem je parameter

$$\kappa = \frac{3\omega_0 \chi}{2c_0 \tilde{n}} = 2\omega_0 \varepsilon_0 n_2 \tilde{n} \tag{8.137}$$

sorazmeren nelinearnemu lomnemu količniku $n_2$ (enačba 8.91). Enačba (8.136) ni nič drugega kot nelinearna Schrödingerjeva enačba, ki smo jo zapisali že pri izpeljavi krajevnih solitonov (enačba 8.105). Enačbi se razlikujeta v tem, da ima vlogo prečne koordinate $x$ tukaj čas $\tau$ in rešitve nimajo več konstantnega premera, ampak imajo konstantno dolžino sunka. Stacionarne rešitve obstajajo le v primeru, kadar je $d^2k/d\omega^2 < 0$ oziroma kadar ima drugi odvod nasprotni predznak od nelinearnega lomnega količnika $n_2$. Kot pri krajevnih solitonih tudi tukaj vpeljemo parameter $\eta$, ki je sorazmeren z energijo solitona (enačba 8.116). Sledi

$$A_S(z,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\eta \frac{e^{i\eta^2 z}}{\cosh\left(\eta\tau\sqrt{2\left|\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|^{-1}}\right)} \tag{8.138}$$

oziroma

$$A(z,t) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\eta \frac{e^{i\eta^2 z}}{\cosh\left(\eta(t-\frac{z}{v_g})\sqrt{2\left|\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|^{-1}}\right)}. \tag{8.139}$$

Zapisana je oblika solitona, ki potuje z grupno hitrostjo $v_g$ in pri tem ohranja obliko. Zaradi tega so solitoni izredno zanimivi za prenos velike gostote informacij na velike razdalje, saj se izognemo omejitvam zaradi disperzije.

★ Ena izmed snovi, ki izpolnjuje pogoj, da je $k''$ nasprotnega predznaka kot $n_2$, so kvarčna optična vlakna. Pri valovnih dolžinah vidne svetlobe to sicer ne velja, velja pa za $\lambda \gtrsim 1{,}3$ µm. Pogoj je torej izpolnjen pri valovnih dolžinah okoli $1{,}5$ µm, ki se navadno uporabljajo pri prenosu signalov po optičnih vlaknih, in signal lahko potuje brez podaljševanja.

## 8.14 Optična fazna konjugacija

Optična fazna konjugacija je zanimiv in danes tudi praktično pomemben pojav, pri katerem nastane iz danega valovanja novo valovanje, ki ima enake valovne fronte, vendar potuje v nasprotni smeri od prvotnega valovanja. Novo valovanje je tako, kot bi začetnemu valovanju obrnili predznak časa in ga "zavrteli nazaj".

Vzemimo optično nelinearno snov, na katero posvetimo z dvema močnima ravnima snopoma v nasprotnih smereh. To sta črpalna snopa in njuna valovna vektorja naj bosta $\mathbf{k}_1$ in $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$. Poleg njiju naj na snov vpada še tretji, signalni snop, ki ni nujno raven val (slika 8.15). Signalni snop interferira s prvim črpalnim valom in s tem zaradi nelinearnosti tretjega reda povzroči modulacijo lomnega količnika. Ta je skoraj periodična, če je signalni val podoben ravnemu valu. Na modulaciji lomnega količnika se drugo črpalno valovanje uklanja. Uklonjeno valovanje je enake oblike kot signalno, le potuje v nasprotni smeri, saj ima drugo črpalno valovanje nasprotno smer od prvega. Črpalni valovanji sta seveda enakovredni in ni mogoče ločiti med valovanjem, s katerim signalno valovanje interferira, in valovanjem, ki se uklanja.

Slika 8.15: Optična fazna konjugacija. Dva močna črpalna žarka (modra) vpadata na optično nelinearno snov v nasprotnih smereh, vpadni signal (rdeč) pa se odbije v smer, iz katere vpada.

Optična fazna konjugacija je zelo podobna holografiji, le da pri holografiji najprej zapišemo predmetni snop, ki ga kasneje reproduciramo, pri fazni konjugaciji pa zapis začetnega valovanja in njegova reprodukcija potekata sočasno.

Naj se signalno valovanje razširja v smeri $z$. Zapišemo ga

$$E_3 = \Re\left(A_3(z)\, e^{i(kz-\omega t)}\right). \tag{8.140}$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da je novonastalo valovanje sorazmerno

$$E_4 \propto \Re\left(A_3^*(z)\, e^{i(-kz-\omega t)}\right). \tag{8.141}$$

Zaradi nasprotnega predznaka $k$ potuje nastalo valovanje v obratni smeri od signalnega valovanja. Poleg tega je kompleksno konjugirana tudi njegova amplituda. To seveda ne vpliva na obliko valovnih front, saj so te popolnoma enake kot pri signalnem valovanju. Zaradi lastnosti, da lahko novo valovanje iz signalnega nastane tako, da krajevni del kompleksno konjugiramo, nastalemu valovanju pravimo fazno konjugirano valovanje.

Uporabna posledica fazne konjugacije je prikazana na sliki (8.16). Najpreprostejši primer je vpad ravnega vala (a), ki se ne odbije po odbojnem zakonu (slika levo), ampak se odbije v smer, iz katere je vpadel na snov (slika desno). Drugi primer je krogelni val ali v približku tudi Gaussov snop (b). Ko vpade na navadno zrcalo (levo), se njegova divergenca ohranja in se žarek še naprej razširja. Na fazno konjugiranem zrcalu se krogelni val spet zbere v izvoru (desno).

Slika 8.16: Primerjava odbojev na navadnem zrcalu (levo) in faznem konjugatorju (desno): odboj ravnega vala (a), odboj krogelnega valovanja (b) in odboj popačenega vala (c). Valovne fronte vpadnega vala so označene s polno črto, odbitega pa s črtkano.

Tretji primer je sredstvo, ki valovanju doda naključno fazo, zato po prehodu valovne fronte niso več gladke (c). Od navadnega zrcala se popačen snop odbije, pri ponovnem prehodu skozi sredstvo pa se popačenje še poveča. Povsem drugačno je obnašanje pri odboju na faznem konjugatorju. Ko popačen snop vpade na fazni konjugator, v njem generira fazno konjugiran snop, ki potuje v nasprotni smeri in ima enako nepravilne valovne fronte kot vpadni val. Po prehodu skozi nepravilno sredstvo se neravnosti valovne fronte izničijo in nastanejo enake gladke valovne fronte ravnega vala kot na začetku. To lastnost popravljanja valovne fronte je mogoče koristno uporabiti, na primer namesto enega zrcala v laserskem resonatorju.

★ Omenili smo že, da se fazno konjugirana zrcala uporabljajo v laserjih za izničenje popačenj Gaussovega snopa. Drug primer uporabe je pri optični astronomiji ali optičnih komunikacijah skozi atmosfero. Naključne spremembe gostote v atmosferi signalu dodajo naključni fazni premik, ki signal popači. Če se signal odbije od zrcala nazaj proti izvoru, je torej dvakratno popačen. Če pa se odbije od fazno konjugiranega zrcala, se vpliv nehomogenosti atmosfere ravno izniči in na prenos signala ne vpliva, poleg tega je šibek vpadni signal lahko še dodatno ojačen.

## 8.15 *Izpeljava optične fazne konjugacije

Poglejmo podrobneje, kako v nelinearnem sredstvu nastane fazno konjugiran val. Kot kaže slika (8.15), je celotno polje v nelinearnem sredstvu vsota štirih valovanj, dveh močnih črpalnih (oznaki 1 in 2), signalnega (oznaka 3) in odbitega (oznaka 4)

$$E = \frac{1}{2}A_1 e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \frac{1}{2}A_2 e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \frac{1}{2}A_3(z)\, e^{ikz-i\omega t} + \frac{1}{2}A_4(z)\, e^{-ikz-i\omega t} + \text{k.k.} \qquad (8.142)$$

S k.k. smo spet označili kompleksno konjugirane člene. Vsa valovanja naj imajo enako frekvenco, zaradi enostavnosti še privzemimo, da so enake tudi vse polarizacije. Račun poenostavimo še s privzetkom, da sta črpalna vala $E_1$ in $E_2$ dosti močnejša od $E_3$ in $E_4$, tako da sta njuni amplitudi konstantni, $E_3(z)$ in $E_4(z)$ pa se le počasi spreminjata.

Vstavimo $E$ v valovno enačbo z nelinearno polarizacijo (enačba 8.11)

$$\nabla^2 E + \varepsilon \frac{\omega^2}{c_0^2} E = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}. \tag{8.143}$$

Pri tem je $\varepsilon\,\omega^2/c_0^2 = k^2$, $P_{\mathrm{NL}}$ pa je po enačbi (8.80) enak $P_{\mathrm{NL}} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3$, kjer je $\chi^{(3)} = \chi$ efektivna nelinearna susceptibilnost za izbrano polarizacijo vseh polj.

Ker je $E$ zapisan kot vsota osmih členov (enačba 8.142), vsebuje produkt $E^3$ kar 512 členov. Vendar se njihovo število znatno zmanjša, če upoštevamo le tiste z enako časovno odvisnostjo oziroma enako frekvenco. Poleg tega nas ne zanimajo različne kombinacije valovnih vektorjev, ampak k enačbi za $E_3$ prispevajo le tisti členi s krajevnim faznim faktorjem $\exp(ikz)$, k enačbi za $E_4$ pa tisti z $\exp(-ikz)$. Sledi

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{NL}\,3,4} &= \frac{1}{8}\varepsilon_0 \chi [(6A_1A_2A_4^* + 6A_1A_1^*A_3 + 6A_2A_2^*A_3 + 3A_3A_3^*A_3 + 6A_4A_4^*A_3)\, e^{ikz-i\omega t} \\ &+ (6A_1A_2A_3^* + 6A_1A_1^*A_4 + 6A_2A_2^*A_4 + 6A_3A_3^*A_4 + 3A_4A_4^*A_4)\, e^{-ikz-i\omega t}]. \end{aligned} \tag{8.144}$$

Če zanemarimo še člene, v katerih nastopata $A_3$ in $A_4$ v višjih potencah, dobimo

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{NL}\,3,4} &= \frac{3}{4}\varepsilon_0 \chi [\left(A_1A_2A_4^* + |A_1|^2 A_3 + |A_2|^2 A_3\right) e^{ikz-i\omega t} \\ &+ \left(A_1A_2A_3^* + |A_1|^2 A_4 + |A_2|^2 A_4\right) e^{-ikz-i\omega t}]. \end{aligned} \tag{8.145}$$

Vstavimo gornji izraz v valovno enačbo (enačba 8.143) in upoštevamo, da se $A_i(z)$ le počasi spreminja (kar pomeni, da zanemarimo drugi odvod po $z$). Sledi

$$ik\frac{dA_3}{dz} = -\frac{3}{4}\mu_0\varepsilon_0\chi\omega^2 \left(A_1A_2A_4^* + (|A_1|^2 + |A_2|^2)A_3\right) \tag{8.146}$$

in

$$-ik\frac{dA_4}{dz} = -\frac{3}{4}\mu_0\varepsilon_0\chi\omega^2 \left(A_1A_2A_3^* + (|A_1|^2 + |A_2|^2)A_4\right). \tag{8.147}$$

Drugi člen na desni že poznamo: opisuje odvisnost lomnega količnika od intenzitete črpalnih valov, torej optični Kerrov pojav, in je zato le dodaten prispevek k fazi. Vpeljimo novi amplitudi, ki se od prejšnjih razlikujeta zgolj v faznem faktorju.

$$\tilde{A}_3 = A_3 \exp\left(-i\frac{3\chi\omega}{4c_0 n}(|A_1|^2 + |A_2|^2)z\right) \tag{8.148}$$

in

$$\tilde{A}_4 = A_4 \exp\left(i\frac{3\chi\omega}{4c_0 n}(|A_1|^2 + |A_2|^2)z\right). \tag{8.149}$$

Ko novi amplitudi vstavimo v diferencialni enačbi (enačbi 8.146 in 8.147), se Kerrov prispevek k fazi ravno odšteje in enačbi se prepišeta v

$$\frac{d\tilde{A}_3}{dz} = i\frac{3\chi\omega}{4c_0 n} A_1A_2\tilde{A}_4^* \quad \text{in} \quad \frac{d\tilde{A}_4}{dz} = -i\frac{3\chi\omega}{4c_0 n} A_1A_2\tilde{A}_3^*. \tag{8.150}$$

Vpeljemo sklopitveno konstanto

$$\kappa = \frac{3\chi\omega}{4c_0 n} A_1 A_2. \tag{8.151}$$

Enačbi se poenostavita v

$$\frac{d\tilde{A}_3}{dz} = i\kappa\tilde{A}_4^* \quad \text{oziroma} \quad \frac{d\tilde{A}_3^*}{dz} = -i\kappa^*\tilde{A}_4 \quad \text{in} \quad \frac{d\tilde{A}_4}{dz} = -i\kappa\tilde{A}_3^*. \tag{8.152}$$

Zelo težaven problem nelinearne valovne enačbe smo prevedli na linearen sistem dveh preprostih sklopljenih enačb za amplitudi signalnega in odbitega vala. Rešitvi sistema enačb (8.152) sta

$$\tilde{A}_3^*(z) = C_1\cos(|\kappa|z) + C_2\sin(|\kappa|z) \tag{8.153}$$

$$\tilde{A}_4(z) = D_1\cos(|\kappa|z) + D_2\sin(|\kappa|z). \tag{8.154}$$

Z upoštevanjem zveze, ki izhaja iz prve diferencialne enačbe (enačba 8.152), zapišemo

$$C_1 = \frac{i\kappa^*}{|\kappa|}D_2 \qquad \text{in} \qquad C_2 = -\frac{i\kappa^*}{|\kappa|}D_1. \tag{8.155}$$

Potrebujemo še robne pogoje za obe valovanji. Z leve, pri $z = 0$, poznamo $\tilde{A}_3^*(0)$, pri $z = L$ pa ne more biti odbitega vala in je zato $\tilde{A}_4(L) = 0$. S tem določimo konstanti $D_1$ in $D_2$

$$D_2 = -\frac{i|\kappa|}{\kappa^*}\tilde{A}_3^*(0) \qquad \text{in} \qquad D_1 = -D_2\tan(|\kappa|L). \tag{8.156}$$

Gornje enačbe združimo in zapišemo amplitudi znotraj nelinearne snovi

$$\tilde{A}_3(z) = \tilde{A}_3(0)\frac{\cos(|\kappa|(L-z))}{\cos(|\kappa|L)} \tag{8.157}$$

in

$$\tilde{A}_4(z) = \tilde{A}_3^*(0)\frac{i\kappa}{|\kappa|}\frac{\sin(|\kappa|(L-z))}{\cos(|\kappa|L)}.$$

Izračunajmo še amplitudi odbitega in prepuščenega vala. Amplituda odbitega vala pri $z = 0$ je

$$\boxed{\tilde{A}_4(0) = \tilde{A}_3^*(0)\frac{i\kappa}{|\kappa|}\tan(|\kappa|L),} \tag{8.158}$$

amplituda prepuščenega pri $z = L$ pa

$$\boxed{\tilde{A}_3(L) = \frac{\tilde{A}_3^*(0)}{\cos(|\kappa|L)}.} \tag{8.159}$$

Oglejmo si gornja rezultata. Vidimo, da je odbiti val sorazmeren kompleksno konjugirani amplitudi vpadnega vala, kar smo omenili že v prejšnjem razdelku. Poleg konjugirane amplitude ima tudi natanko nasproten valovni vektor, zato tudi ime fazno konjugiran val. Zanimiva je tudi njegova velikost. Ker je lahko $\tan(|\kappa|L) > 1$, je odbit val lahko močnejši od vpadnega. To ojačenje odbitega vala gre seveda na račun moči črpalnih valov. V našem računu bi lahko amplituda odbite svetlobe narasla proti neskončnosti, vendar zapisane enačbe takrat niso več veljavne, saj smo privzeli, da sta signalni in odbiti žarek precej šibkejša od črpalnih.

Poglejmo še prepuščeni žarek. Ker je $\cos(x) \leq 1$, je amplituda prepuščenega žarka vedno večja od amplitude vpadnega. To pomeni, da smo na račun črpalnih žarkov dobili prepustnost, ki je vedno večja od 100 %, in odbojnost, ki je lahko večja od 100 %.

Pri računu smo predpostavili, da je vpadni signal ravni val. Če je njegova amplituda odvisna še od prečne koordinate, ga lahko razvijemo po ravnih valovih in zgoraj izpeljana enačba (8.158) velja za vsako komponento posebej. Odbite komponente so sorazmerne s konjugiranimi komponentami signalnega valovanja z nasprotnim valovnim vektorjem in dajo skupaj valovno fronto enake oblike kot pri signalnem valovanju, le giblje se v nasprotni smeri.

## 8.16 Stimulirano Ramanovo in stimulirano Brillouinovo sipanje

Ko svetloba vpade na snov, se je del siplje. Poleg elastičnega Rayleighovega sipanja, pri katerem se energija vpadlih fotonov (in z njo frekvenca) svetlobe ohranja, pride tudi do sipanja, pri katerem se energija izhodnih fotonov razlikuje od energije vpadnih.

Če se energija fotonov spremeni zaradi prehajanja molekul snovi med različnimi vibracijskimi ali rotacijskimi stanji, govorimo o Ramanovem sipanju[5]. Do tega pojava lahko pride tako v plinih in tekočinah kot tudi v trdnih snoveh. Navadno ločimo dva primera: Stokesovo sipanje[6], pri katerem foton odda energijo molekuli, in anti-Stokesovo sipanje, pri katerem foton prejme energijo od vzbujene molekule. V prvem primeru je frekvenca sipane svetlobe $\omega_s = \omega_0 - \omega_v$, kjer $\omega_0$ označuje frekvenco vpadne svetlobe, $\omega_v$ pa vibracijsko frekvenco, v drugem primeru pa $\omega_s = \omega_0 + \omega_v$. Slednji procesi so razmeroma redki, zato je intenziteta anti-Stokesovega sipanja še znatno šibkejša od že tako šibkega Ramanovega sipanja. Tipični Ramanov premik $\omega_0 - \omega_s$ znaša okoli $10^{12}$–$10^{13}$ Hz. Drug zanimiv primer je, kadar pride do spremembe energije fotonov zaradi vzbujanja akustičnih valov (fononov). Takrat govorimo o Brillouinovem sipanju[7]. Tipičen Brillouinov premik je $\sim 10^{10}$Hz.

### Stimulirano Ramanovo sipanje

Pri spontanem Ramanovem sipanju se svetloba siplje na termično vzbujenih fluktuacijah v snovi. Če pa se svetloba siplje na fluktuacijah, ki jih je povzročilo vpadno svetlobno polje, govorimo o stimuliranem Ramanovem sipanju. Dosežemo ga tako, da na snov poleg osnovnega žarka s frekvenco $\omega_0$ usmerimo dodaten Stokesov žarek s frekvenco $\omega_s$, ki stimulira določen prehod. Fotoni osnovnega žarka se absorbirajo in izhajajo fotoni pri $\omega_s$. Več absorbiranih fotonov pomeni večje Stokesovega sipanja in proces se ojačuje. Tako pride do resonančnega ojačenja svetlobe pri $\omega_s$ oziroma do stimuliranega Ramanovega sipanja. Moč svetlobe pri $\omega_s$, ki je po fazi in smeri enaka vpadni, se eksponentno povečuje na račun črpalnega žarka, do določene meje, seveda.

Slika 8.17: Prehodi med energijskimi nivoji za Ramanov sipanje in shema Brillouinovega sipanja. Pri Stokesovem sipanju snov prevzame energijo (a), pri anti-Stokesovem sipanju energijo odda (b). Pri Brillouinovem sipanju svetloba vzbuja akustične valove (c) in se na njih odbije.

[5] Indijski fizik in nobelovec Sir Chandrasekhara Venkata Raman, 1888–1970.
[6] Irski fizik in matematik Sir George Gabriel Stokes, 1819–1903.
[7] Francoski fizik Léon Nicolas Brillouin, 1889–1969.

Obravnavajmo Ramanovo sipanje v klasičnem približku in snov opišemo z $N$ neodvisnimi enodimenzionalnimi harmonskimi oscilatorji. Nihanje posameznega oscilatorja zadošča enačbi

$$\frac{d^2X(z,t)}{dt^2} + \gamma\frac{dX}{dt} + \omega_v^2 X = \frac{F(z,t)}{m}, \tag{8.160}$$

kjer je $X$ koordinata, $\gamma$ koeficient dušenja, $m$ masa in $F$ zunanja sila. Glavna predpostavka modela je, da polarizabilnost molekul ni konstantna, ampak odvisna od "raztega" nihajoče molekule oziroma oscilatorja. Polarizabilnost $\alpha$ razvijemo v Taylorjevo vrsto do prvega člena

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1+N\alpha) = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 N\left(\alpha_0 + \frac{d\alpha}{dX}X\right). \tag{8.161}$$

Silo na en oscilator izračunamo kot odvod energije po koordinati

$$F = \frac{dW}{dX} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{d\alpha}{dX}\overline{E^2}. \tag{8.162}$$

Električno poljsko jakost smo zapisali kot povprečje, saj so optične frekvence tako hitre, da jim molekule ne morejo slediti. Celotno električno polje zapišemo kot vsoto osnovnega in Stokesovega polja

$$E(z,t) = \frac{1}{2}\left(E_0(z)e^{-i\omega_0 t} + E_s(z)e^{-i\omega_s t} + k.k.\right) \tag{8.163}$$

in povprečje kvadrata

$$\overline{E^2} = \frac{1}{4}\left(E_0^2 E_s^* e^{-i(\omega_0-\omega_s)t} + k.k.\right). \tag{8.164}$$

Vstavimo zapisano električno poljsko jakost najprej v izraz za silo (enačba 8.162), nato pa v enačbo oscilatorja (enačba 8.160). Sledi

$$\frac{1}{2}\left(\omega_v^2 - \omega^2 - i\omega\gamma\right)\tilde{X} = \frac{\varepsilon_0}{8m}\frac{d\alpha}{dX}E_0E_s^*, \tag{8.165}$$

pri čemer je

$$X(z,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{X}e^{-i\omega t} + k.k.\right) \tag{8.166}$$

in $\omega = \omega_0 - \omega_s$. Oscilatorji torej nihajo s kompleksno amplitudo

$$\tilde{X} = \frac{\varepsilon_0\frac{d\alpha}{dX}E_0E_s^*}{4m\left(\omega_v^2 - (\omega_0-\omega_s)^2 - i(\omega_0-\omega_s)\gamma\right)}. \tag{8.167}$$

Zdaj lahko zapišemo polarizacijo $P = \varepsilon_0 N\alpha E$ in nelinearen del polarizacije je

$$P_{\mathrm{NL}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 N\frac{d\alpha}{dX}\left(\tilde{X}e^{-i(\omega_0-\omega_s)t} + k.k.\right)\cdot\left(E_0(z)e^{-i\omega_0 t} + E_s(z)e^{-i\omega_s t} + k.k.\right). \tag{8.168}$$

Omejimo se le na polarizacijo pri frekvenci $\omega_s$ in zapišemo

$$P_{\mathrm{NL},\omega_s} = \varepsilon_0\chi_{ef}E_s = \frac{\varepsilon_0^2 N}{8m}\left(\frac{d\alpha}{dX}\right)^2\frac{|E_0|^2}{\omega_v^2 - (\omega_0-\omega_s)^2 + i(\omega_0-\omega_s)\gamma}E_s. \tag{8.169}$$

Efektivna susceptibilnost za svetlobo pri frekvenci $\omega_s$ je torej kompleksna in sorazmerna intenziteti vpadne laserske svetlobe pri osnovni frekvenci $\omega_0$. V resonanci, ko je $\omega_0 - \omega_s = \omega_v$, je

efektivna susceptibilnost imaginarna in negativnega predznaka, kar ima, kot bomo videli, zelo pomembne fizikalne posledice. Iz gornjega izraza je tudi razvidno, zakaj gre pri stimuliranem Ramanovem sipanju za nelinearen optični pojav tretjega reda.

Kompleksna susceptibilnost pomeni kompleksni lomni količnik. Če upoštevamo le prve člene v razvoju, se vpadna svetloba po snovi širi kot

$$E_s(z) = E_s(0)\exp\left(ikz + ikz\frac{1}{2}\Re(\chi) - kz\frac{1}{2}\Im(\chi)\right). \tag{8.170}$$

**Naloga 8.16.1** Izpelji enačbo (8.170), tako da iz efektivne susceptibilnosti izračunaš lomni količnik, in pokaži, da je $\Im(\chi)$ vedno negativen.

Ker je imaginarni del efektivne susceptibilnosti vedno negativen (naloga 8.16.1), električna poljska jakost eksponentno narašča na račun črpalnega laserskega snopa. Največjo ojačenje je seveda v primeru, ko je sistem v resonanci in razlika frekvenc vpadne svetlobe ravno enaka vibracijski frekvenci. Če zanemarimo izgube, lahko zapišemo

$$|E_s(L)|^2 = |E_s(0)|^2 e^{G_R jL}. \tag{8.171}$$

Vrednosti $G_R$ so $0,024$ cm/MW za $CS_2$, $0,029$ cm/MW za $LiNbO_3$ in $0,0008$ cm/MW za $SiO_2$. V meter dolgem odseku vlakna pride tako pri intenziteti svetlobe $10^{10}$ W/m$^2$ do faktorja ojačenja $1,08$, na vlaknu dolžine 20 m pa do faktorja 5.

★ Pojav stimuliranega Ramanovega sevanja je posebej pomemben v ojačenje signala v optičnih vlaknih, predvsem zaradi velike intenzitete in velike dolžine, na kateri pride do medsebojne interakcije.

### Stimulirano Brillouinovo sipanje

Stimulirano Brillouinovo sipanje je pojav, pri katerem vpadlo svetlobno valovanje vzbudi akustični val (fonon), nato pa se na njem siplje. Poleg vpadne svetlobe pri $\omega_0$ se tako pojavi še Stokesova svetloba pri frekvenci $\omega_s = \omega_0 - \omega_f$, pri čemer $\omega_f$ označuje frekvenco akustičnega vala (slika 8.17 c). Interferenca vpadnega in Stokesovega valovanja, ki ima komponento ravno pri $\omega_f$, povratno povečuje intenziteto vzbujenega zvočnega valovanja, njegovo povečanje pa vodi do večje intenzitete Stokesovega valovanja. Pride do pozitivne povratne zanke in eksponentnega ojačenja svetlobe. Najmočnejši pojav je ravno v nasproti smeri od vpadne svetlobe, v smeri naprej pa Brillouinovega sipanja ni. Če bi namreč vstopna in izstopna svetloba bili vzporedni, bi bila razlika njunih valovnih vektorjev enaka nič.

Računa za Brillouinovo sipanje ne bomo naredili, ga pa lahko bralec poišče v literaturi[8]. Poglavitno je, da tudi pri stimuliranem Brillouinovem sipanju pride do eksponentnega ojačenja signala pri zmanjšani frekvenci

$$|E_s(z)|^2 = |E_s(L)|^2 e^{G_B j(L-z)}. \tag{8.172}$$

Pri zapisu smo upoštevali, da se val širi in ojačuje v nasprotni smeri od vpadnega. Vrednosti parametra $G_B$ so na primer $0,13$ cm/MW za $CS_2$ in $0,0045$ cm/MW za $SiO_2$. Ker je koeficient $G_B$ odvisen od zunanjih parametrov, na primer od temperature ali pritiska, lahko stimulirano Brillouinovo sipanje uporabimo tudi za senzoriko.

[8] Npr. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press.

# 9. Modulacija svetlobe

Pri obravnavi širjenja svetlobe skozi snov je najpomembnejši parameter lomni količnik oziroma tenzor dielektričnosti. V tem poglavju bomo spoznali, kako zunanje polje vpliva na lomni količnik in tako na širjenje svetlobe skozi snov. To omogoča spreminjanje – modulacijo – lastnosti svetlobe z zunanjim poljem. En primer uporabe smo že spoznali pri obravnavi laserja, kjer za preklop dobrote potrebujemo element, ki hitro spreminja prepustnost. Še pomembnejša je modulacija valovanja pri optičnem prenosu informacij.

Svetlobno valovanje lahko moduliramo na več načinov. Z ustreznim moduliranjem lomnega količnika lahko valovanju spreminjamo amplitudo ali frekvenco oziroma fazo (slika 9.1).

Slika 9.1: Amplitudno (levo) in fazno oziroma frekvenčno moduliran signal (desno)

Delovanje optičnih modulatorjev temelji na različnih pojavih. V tem poglavju bomo podrobneje spoznali dva načina, to sta elektro-optični in elasto-optični pojav. Pri prvem pride do spremembe lomnega količnika snovi pod vplivom zunanjega električnega polja, pri drugem pa zaradi mehanske deformacije. Kadar mehansko deformacijo povzroči zvočno valovanje, takim modulatorjem pravimo akusto-optični. Na koncu bomo spoznali še zelo pomemben primer elektro-optičnih modulatorjev na osnovi tekočih kristalov.

## 9.1 Elektro-optični pojav

Elektro-optični pojav opisuje spremembe optičnih lastnosti snovi (dielektričnosti in lomnega količnika) pod vplivom zunanjega električnega polja. Omejimo se na statično zunanje polje oziroma na polje, katerega frekvenca je bistveno manjša od optične frekvence. Omejitev na nizko frekvenco je potrebna zato, da optično polje še lahko obravnavamo linearno. Kako je v nasprotnem primeru, ko je frekvenca polja primerljiva z optično frekvenco, smo na široko obravnavali v poglavju o nelinearni optiki (poglavje 8).

Zaradi priročnosti namesto dielektričnega tenzorja vpeljemo inverzni dielektrični tenzor

$$\underline{b} = \underline{\varepsilon}^{-1}. \tag{9.1}$$

**Naloga 9.1.1** Pokaži, da je zveza med spremembo inverznega tenzorja $\delta\underline{b}$ in spremembo dielektričnega tenzorja $\delta\underline{\varepsilon}$

$$\delta\underline{\varepsilon} = -\underline{b}^{-1}\delta\underline{b}\,\underline{b}^{-1} = -\underline{\tilde{\varepsilon}}\,\delta\underline{b}\,\underline{\tilde{\varepsilon}}, \tag{9.2}$$

pri čemer $\underline{\tilde{\varepsilon}}$ označuje dielektrični tenzor v odsotnosti zunanjega polja (nemoten tenzor).

Tenzor dielektričnosti $\underline{\tilde{\varepsilon}}$ je v lastnem nemotenem sistemu diagonalen z lastnimi vrednostmi $n_1^2, n_2^2$ in $n_3^2$, zato inverzni dielektrični tenzor v lastnem nemotenem sistemu preprosto zapišemo kot

$$\underline{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 1/n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3^2 \end{bmatrix}, \tag{9.3}$$

pri čemer so $n_1$, $n_2$ in $n_3$ lomni količniki snovi, ki so na splošno različni. Ko priključimo zunanje polje, se tenzor spremeni. Pri elektro-optičnem pojavu so spremembe tenzorja dielektričnosti zaradi vpliva zunanjega polja navadno majhne in lahko spremembo komponente $\delta b_{ij}$ zapišemo kot potenčno vrsto zunanjega polja $E$, pri čemer upoštevajmo zgolj prva dva člena v razvoju

$$\delta b_{ij} = r_{ijk}E_k + q_{ijkl}E_kE_l. \tag{9.4}$$

Prvi člen je linearno sorazmeren z zunanjim poljem in opisuje linearni elektro-optični ali Pockelsov pojav[1]. Tenzor tretjega ranga $r_{ijk}$ imenujemo elektro-optični tenzor ali tudi Pockelsov tenzor. Pockelsov tenzor je različen od nič v snoveh brez centra inverzije, značilne vrednosti Pockelsovega tenzorja pa so okoli $r \sim 10^{-12}$–$10^{-10}$ m/V.

Kvadratnemu elektro-optičnemu pojavu pravimo Kerrov pojav[2], tenzorju $q_{ijkl}$ pa Kerrov tenzor. Kerrov pojav je praviloma precej šibkejši od Pockelsovega, vendar je različen od nič v vseh snoveh, ne glede na njihove simetrijske lastnosti, torej tudi v tekočinah. Značilna vrednost Kerrovega tenzorja je $q \sim 10^{-24}$ m$^2$/V$^2$. Navadno ločimo dva primera Kerrovega pojava: Kerrov elektro-optični pojav pri zunanjih poljih z nizko frekvenco, in optični Kerrov pojav, ki smo ga podrobneje spoznali pri obravnavi nelinearnih optičnih pojavov (poglavje 8.9).

Pri uporabi trdnih kristalov navadno prevlada linearni člen, zato se osredotočimo le nanj in zapišemo

$$\delta b_{ij} = r_{ijk}E_k. \tag{9.5}$$

### Elektro-optični ali Pockelsov tenzor

Simetrija snovi pomembno vpliva na obliko tenzorjev, ki opisujejo njene lastnosti. Pockelsov tenzor $\underline{r}$ je tenzor tretjega ranga, zato je lahko različen od nič le v kristalih brez centra inverzije.

**Naloga 9.1.2** Razmisli, zakaj je v kristalih s centrom inverzije tenzor $\underline{r}$ vedno enak nič.

[1] Nemški fizik Friedrich Carl Alwin Pockels, 1865–1913.
[2] Škotski fizik John Kerr, 1824–1907.

Ker je inverzni dielektrični tenzor $\underline{b}$ simetričen, je v prvih dveh indeksih simetričen tudi $\underline{r}$

$$r_{ijk} = r_{jik}. \tag{9.6}$$

V najmanj simetričnem primeru triklinskega kristala ima tako namesto 27 zgolj 18 neodvisnih komponent, v kristalih z višjo simetrijo pa še manj.

Podobno kot nelinearno susceptibilnost (poglavje 8.1) lahko tudi elektro-optični tenzor zapišemo le z dvema komponentama. Prva dva indeksa, v katerih je $r_{ijk}$ simetričen, združimo v enega z vrednostmi od 1 do 6 po dogovoru $xx = 1$, $yy = 2$, $zz = 3$, $yz = 4$, $zx = 5$ in $xy = 6$. Tako postane $r_{ijk}$ matrika velikosti $6 \times 3$, simetrični tenzor drugega ranga $b_{ij}$ pa šestdimenzionalen vektor. Nekaj primerov Pockelsovih tenzorjev pri različnih kristalnih simetrijah je podanih v tabeli (9.1).

| Kristal | Grupa | Neničelne komponente tenzorja $r$ | Vrednost ($10^{-12}$ m/V) |
|---|---|---|---|
| $BaTiO_3$ | 4mm | $r_{xzx} = r_{yzy} = r_{zxx} = r_{zyy} = r_{51} = r_{42}$ | (pri 1,55 µm) $r_{51} = 800$ |
| | | $r_{xxz} = r_{yyz} = r_{13} = r_{23}$ | $r_{13} = 8$ |
| | | $r_{zzz} = r_{33}$ | $r_{33} = 28$ |
| KDP | $\bar{4}2$m | $r_{yzx} = r_{zyx} = r_{xzy} = r_{zxy} = r_{41} = r_{52}$ | $r_{41} = 8,77$ |
| | | $r_{xyz} = r_{yxz} = r_{63}$ | $r_{63} = -10,3$ |
| GaAs | $\bar{4}3$m | $r_{yzx} = r_{zyx} = r_{xzy} = r_{zxy} = r_{xyz} = r_{yxz}$ | (pri 10,6 µm) $r_{41} = 1,5$ |
| ZnTe | | $= r_{41} = r_{52} = r_{63}$ | (pri 3,4 µm) $r_{41} = 4,2$ |
| $LiNbO_3$ | 3m | $r_{xzx} = r_{zxx} = r_{yzy} = r_{zyy} = r_{51} = r_{42}$ | $r_{51} = 32,6$ |
| | | $r_{xxz} = r_{yyz} = r_{13} = r_{23}$ | $r_{13} = 9,6$ |
| | | $r_{zzz} = r_{33}$ | $r_{33} = 30,9$ |
| | | $r_{yyy} = -r_{xxy} = -r_{xyx} = -r_{yxx} =$ | |
| | | $= r_{22} = -r_{12} = -r_{61}$ | $r_{22} = 6,8$ |

Tabela 9.1: Koeficienti Pockelsovega tenzorja za nekaj izbranih snovi. Če ni navedeno drugače, veljajo vrednosti pri valovni dolžini okoli 600 nm.

★ Komponente elektro-optičnega tenzorja zaradi nazornosti pogosto ponazarjamo grafično. V matriki $6 \times 3$ s piko označimo komponente, ki so enake nič, s polnim krožcem neničelne komponente, povezava med komponentami pomeni njihovo enakost, prazen krožec in črtkana črta pa označujeta neničelno komponento nasprotnega predznaka. Kot primer sta podana prikaza tenzorjev za GaAs (levo) in $LiNbO_3$ (desno).

## 9.2 Longitudinalna modulacija

Poglejmo podrobneje, kako električno polje spremeni optične lastnosti elektro-optičnega kristala in kako to vpliva na svetlobo, ki potuje skozi tak kristal. Navadno se uporabljajo kristali, ki so dvolomni že brez zunanjega polja. Kot primer vzemimo kristal $KH_2PO_4$ (KDP), ki ima tetragonalno simetrijo ($\bar{4}2m$). Kot razberemo iz tabele (9.1) ima elektro-optični tenzor dve neodvisni komponenti: $r_{41} = r_{52} = 8,77 \times 10^{-12}$ m/V in $r_{63} = -10,3 \times 10^{-12}$ m/V.

Kristal naj bo odrezan po kristalografskih oseh, svetloba naj skozi kristal potuje v smeri optične osi, to je po dogovoru smeri $z$, v isti smeri pa na kristal priključimo polje $E_z$. Ker je smer električnega polja vzporedna s smerjo širjenja svetlobe, taki postavitvi pravimo longitudinalna in pojavu longitudinalna modulacija.

Slika 9.2: Shema longitudinalne modulacije signala. Ker je polje priključeno v smeri potovanja svetlobe, morata biti elektrodi transparentni. Z uporabo polarizatorja in analizatorja sestavimo amplitudni modulator (glej poglavje 9.4).

Inverzni tenzor dielektričnosti brez zunanjega polja za optično enoosni KDP zapišemo kot

$$\underline{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}, \tag{9.7}$$

kjer sta $n_o$ in $n_e$ redni in izredni lomni količnik. Ko priključimo polje, se tenzor dielektričnosti zaradi Pockelsovega pojava spremeni. Sprememba inverznega tenzorja dielektričnosti je po enačbi (9.5)

$$\begin{aligned}
\delta b_{xx} &= r_{xxx}E_x + r_{xxy}E_y + r_{xxz}E_z = 0, \\
\delta b_{xy} &= \delta b_{yx} = r_{xyx}E_x + r_{xyy}E_y + r_{xyz}E_z = r_{63}E_z, \\
\delta b_{xz} &= \delta b_{zx} = r_{xzz}E_z = 0, \\
\delta b_{yy} &= r_{yyz}E_z = 0, \\
\delta b_{yz} &= \delta b_{zy} = r_{yzz}E_z = 0, \\
\delta b_{zz} &= r_{zzz}E_z = 0.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Vidimo, da je večina členov enaka nič, se pa zaradi zunanjega električnega polja v smeri $z$ pojavi izvendiagonalna komponenta

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & r_{63}E_z & 0 \\ r_{63}E_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 & r_{63}E_z & 0 \\ r_{63}E_z & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \tag{9.9}$$

Če želimo izračunati, kako se po kristalu pod napetostjo širi vpadni svetlobni snop, moramo gornji tenzor diagonalizirati. Lastne vrednosti novega tenzorja in pripadajoče nove lastne osi so

$$\lambda_1 = \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \tag{9.10}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \tag{9.11}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{n_e^2} \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1). \tag{9.12}$$

Os $z$ se ohranja, drugi dve novi lastni osi pa sta zasukani za kot 45 ° glede na prvotni osi $x$ in $y$. V novem koordinatnem sistemu je inverzni dielektrični tenzor diagonalen in enak

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 + r_{63}E_z & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 - r_{63}E_z & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \tag{9.13}$$

Slika 9.3: Optično enoosen kristal postane pod napetostjo dvoosen. Indikatrisa, ki je pravokotno na optično os brez polja krožnica (polna črta), se pod vplivom napetosti spremeni v elipso (črtkana črta).

Spomnimo se, da potuje svetloba skozi kristal vzdolž osi $z$. Brez zunanjega električnega polja je kristal enoosen z optično osjo v smeri $z$. Lomni količnik je neodvisen od polarizacije vpadnega valovanja in je enak $n_o$. Ko priključimo polje, postane kristal optično dvoosen, saj so vse tri lastne vrednosti tenzorja dielektričnosti različne.

Za žarek, ki potuje vzdolž osi $z$, torej obstajata dve lastni smeri $x'$ in $y'$ z ustreznima novima lastnima količnikoma, ki ju izrazimo kot

$$\frac{1}{n_{x'}^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z \quad \text{in} \quad \frac{1}{n_{y'}^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z. \tag{9.14}$$

Za vsa eksperimentalno dosegljiva polja velja $rE \ll 1/n_o^2$ in gornja izraza lahko razvijemo za majhne popravke

$$n_{x'} = \sqrt{\frac{n_o^2}{1 + n_o^2 r_{63}E_z}} \approx n_o\sqrt{1 - n_o^2 r_{63}E_z}. \tag{9.15}$$

Nova lomna količnika sa tako

$$n_{x'} \approx n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z, \tag{9.16}$$

$$n_{y'} \approx n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_z. \tag{9.17}$$

Različni lastni polarizaciji ob priključenem zunanjem polju potujeta vzdolž osi $z$ z različnima hitrostma. Ko prepotujeta dolžino kristala $L$, pride med njima do fazne razlike

$$\Delta\phi = k_0 n_{y'} L - k_0 n_{x'} L = \frac{\omega}{c_0} L n_o^3 r_{63} E_z. \tag{9.18}$$

Kadar polarizacija vpadnega valovanja ne sovpada z novima lastnima osema $x'$ ali $y'$, je svetloba po preletu kristala na splošno eliptično polarizirana.

Vpeljemo še karakteristično napetost $U_\pi$ (imenovano tudi $\pi$-napetost), pri kateri je dodatna fazna razlika enaka $\pi$ in kristal deluje kot ploščica $\lambda/2$

$$U_\pi = \frac{\pi c_0}{\omega n_o^3 r_{63}} = \frac{\lambda}{2 n_o^3 r_{63}}. \tag{9.19}$$

Za kristal KDP je $\pi$-napetost pri valovni dolžini 633 nm okoli 9000 V, kar je precej velika napetost. Velike delovne napetosti so značilne za kristalne elektro-optične modulatorje in so njihova glavna pomanjkljivost.

## 9.3 Transverzalna modulacija

Iz praktičnih razlogov je navadno preprosteje priključiti električno polje v smeri, ki je pravokotna na smer širjenja svetlobe. Taki postavitvi pravimo transverzalna in pojavu transverzalna modulacija. Tudi to postavitev obravnavajmo na primeru. Za zgled vzemimo kristal $LiNbO_3$, ki ima trigonalno simetrijo (3m) in po tabeli (9.1) štiri neodvisne komponente: $r_{51} = r_{42}, r_{13} = r_{23}, r_{33}$ in $r_{22} = -r_{12} = -r_{61}$.

Naj se svetloba širi vzdolž osi $z$, ki je hkrati tudi optična os, električno polje pa priključimo v smeri $y$ (slika 9.4). Krajši račun pokaže, da je inverzni dielektrični tenzor v polju enak

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1/n_o^2 - r_{22}E_y & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 + r_{22}E_y & r_{51}E_y \\ 0 & r_{51}E_y & 1/n_e^2 \end{bmatrix}. \tag{9.20}$$

Tudi v tem primeru tenzor diagonaliziramo in poiščemo nove lastne vrednosti. Če privzamemo, da je sprememba zaradi električnega polja majhna ($rE \ll 1$), lahko zanemarimo člene, v katerih $rE$ nastopa v kvadratni obliki. Nove lastne vrednosti so tako

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_y, \tag{9.21}$$

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y \quad \text{in} \tag{9.22}$$

$$\lambda_3 \approx \frac{1}{n_e^2} \tag{9.23}$$

Slika 9.4: Shema transverzalne modulacije signala

in ustrezni lomni količniki

$$n_{x'} \approx n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{22} E_y, \tag{9.24}$$

$$n_{y'} \approx n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{22} E_y \quad \text{in} \tag{9.25}$$

$$n_z' \approx n_e. \tag{9.26}$$

Kako pa je z novimi lastnimi osmi? Hitro ugotovimo (enačba 9.20), da se pri priključenem polju os $x$ ohranja. Pojavi se torej zasuk okoli osi $x$, ki ga označimo s kotom $\vartheta$. Račun pokaže, da je za smiselne vrednosti električnega polja ta kot zelo majhen ($\vartheta \approx r_{51} E_y/(1/n_o^2 - 1/n_e^2) \sim 1$ mrad), tako da lahko v približku rečemo, da se lastne osi ohranjajo.

Če potuje svetloba vzdolž osi $z$, sta torej lomna količnika za polarizaciji v smeri $x$ in $y$ približno enaka $n_{x'}$ in $n_{y'}$, fazna razlika med polarizacijama po preletu kristala z dolžino $L$ pa je

$$\Delta\phi = k_0 n_{y'} L - k_0 n_{x'} L = \frac{\omega}{c_0} L n_o^3 r_{22} E_y. \tag{9.27}$$

Karakteristična $\pi$-napetost je tako

$$\boxed{U_\pi = \frac{\lambda d}{2 L n_o^3 r_{22}},} \tag{9.28}$$

pri čemer moramo ločiti med $L$, ki je dolžina kristala v smeri $z$, in $d$, ki je širina kristala v smeri, v kateri priključimo napetost. Za izbran kristal ($d = 5$ mm, $L = 1$ cm) je $\pi$-vrednost napetosti pri valovni dolžini 633 nm okoli 2000 V.

★ Transverzalno modulacijo lahko dosežemo tudi tako, da se žarek širi vzdolž osi $y$, električno polje pa priključimo vzdolž optične osi $z$. V tem primeru se lastne osi ohranijo in kristal ostane optično enoosen. Vendar ima tudi ta rešitev določene slabosti. Ker je kristal že sam po sebi dvolomen, povzroči zunanje polje le majhno dodatno fazno razliko, zato je najbolje, če je dolžina kristala taka, da velja $k_0 L(n_o - n_e) = 2N\pi$. Pri tem pa nastopi težava. Pogoj je lahko zaradi temperaturnega raztezanja in odvisnosti lomnih količnikov od temperature izpolnjen le pri eni temperaturi, poleg tega se mora svetloba širiti natančno v smeri $y$. Zato dvolomnost nemotenega kristala navadno kompenziramo, tako da postavimo dva enako dolga kristala zapored, pri čemer sta optični osi med seboj pravokotni, modulacijska napetost na drugem kristalu pa ima nasproten predznak. Tedaj se fazna razlika med obema polarizacijama zaradi naravne dvolomnosti odšteje, zaradi modulacijske napetosti pa sešteje.

## 9.4 Amplitudna modulacija

Poglejmo, kako lahko elektro-optični pojav izkoristimo za modulacijo amplitude svetlobnega snopa. Pod vplivom polja pride v kristalu do faznega zamika med polarizacijama, ki je sorazmeren napetosti (enačbi 9.18 in 9.27). Če za tak kristal postavimo analizator, lahko z napetostjo spreminjamo moč prepuščene svetlobe – amplitudno moduliramo signal.

Vrnimo se k longitudinalni modulaciji (slika 9.2). Naj bo vpadna električna poljska jakost $E_0$ polarizirana v smeri $y$. Ko priključimo napetost, sta novi lastni osi zasukani za kot 45 ° glede na prvotni lastni osi (slika 9.3). Vpadno valovanje razstavimo na komponenti $x'$ in $y'$

$$\mathbf{E}_0 = E_0\,\mathbf{e}_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{x'} + \mathbf{e}_{y'}\right). \tag{9.29}$$

Po prehodu skozi kristal pride med njima do fazne razlike $\Delta\phi$ (enačba 9.18), zato je polje $\mathbf{E}_1$ ob izstopu iz kristala

$$\mathbf{E}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(e^{ik_0 n_{x'} L}\mathbf{e}_{x'} + e^{ik_0 n_{y'} L}\mathbf{e}_{y'}\right) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{ik_0 n_{x'} L}\left(\mathbf{e}_{x'} + e^{i\Delta\phi}\mathbf{e}_{y'}\right). \tag{9.30}$$

Analizator na izhodni strani je obrnjen v smeri $x$, to je pravokotno na smer vpadne polarizacije, in prepusti le projekcijo obeh lastnih polarizacij na os $x$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{e}_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{ik_0 n_{x'} L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Delta\phi}\right)\mathbf{e}_x. \tag{9.31}$$

Gostota prepuščenega svetlobnega toka ob vpadnem toku $j_0$ je tako

$$j = \frac{1}{4} j_0 \left|1 - e^{i\Delta\phi}\right|^2 = \frac{1}{2} j_0 (1 - \cos\Delta\phi). \tag{9.32}$$

Preoblikujemo izraz in zapišemo prepustnost takega modulatorja ob upoštevanju enačbe (9.18)

$$\boxed{T = \frac{j}{j_0} = \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi n_o^3 r_{63} U}{\lambda}\right)^2.} \tag{9.33}$$

Slika 9.5: Prepustnost amplitudnega modulatorja v odvisnosti od faznega zamika $\Delta\phi$, sorazmernega priključeni napetosti $U$ (rdeča črta). Če pred vzorec dodamo ploščico $\lambda/4$, pride do faznega zamika $\pi/2$ in odvisnost prepustnosti od priključene napetosti je približno linearna (modra črta).

Ko je napetost na kristalu enaka nič, je $\Delta\phi = 0$ in tudi intenziteta prepuščene svetlobe $j = 0$. To je pričakovano, saj sta analizator in polarizator prekrižana, vpadni žarek pa se širi vzdolž lastne osi kristala. Prepustnost doseže največjo vrednost, ko je $\Delta\phi = \pi$, kar je ravno pri $\pi$-napetosti. Ko torej napetost povečamo z 0 na $U_\pi$, se prepustnost modulatorja spremeni z 0 na 1 (slika 9.5).

Pogosto želimo, da je zveza med modulacijsko napetostjo in izhodno gostoto toka linearna. To lahko dosežemo, če modulator deluje v okolici $\Delta\phi = \pi/2$ (slika 9.5). Ena rešitev je dodati stalno visoko napetost, signal pa modulirati okoli te vrednosti. Precej bolj praktičen pristop je z uporabo ploščice $\lambda/4$, ki jo dodamo med polarizator in kristal, tako da se pojavi stalni fazni premik med rednim in izrednim valom. Potem lahko z razmeroma majhno napetostjo linearno amplitudno moduliramo svetlobo.

## 9.5 Fazna in frekvenčna modulacija

Svetlobo amplitudno moduliramo, tako da z zunanjim poljem spremenimo fazi lastnih valov, zaradi česar postane linearno polarizirano vpadno valovanje po prehodu kristala eliptično polarizirano. Spremembo polarizacije z analizatorjem prevedemo v spremembo amplitude.

Včasih pa želimo modulirati fazo vpadne svetlobe. Tudi to si oglejmo na primeru longitudinalne modulacije. Fazno oziroma frekvenčno modulacijo dosežemo tako, da vhodno polarizacijo izberemo vzporedno eni od novih lastnih osi kristala, na primeri osi $x'$, izhodni polarizator pa odstranimo (slika 9.6).

Slika 9.6: Shema fazne modulacije signala. Vpadna polarizacija je vzporedna eni od novih lastnih osi kristala, ki se pojavijo pod vplivom zunanjega polja.

Celoten fazni zamik po preletu skozi kristal zapišemo kot

$$\phi = k_0 n_{x'} L - \omega_0 t = \frac{\omega_0}{c_0} L \left( n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} \frac{U}{L} \right) - \omega_0 t, \tag{9.34}$$

pri čemer smo lomni količnik zapisali skladno z enačbo (9.16). Opazimo, da je fazni zamik odvisen od priključene zunanje napetosti.

Obravnavajmo dva primera spreminjajoče se napetosti. V prvem primeru naj bo napetost linearna funkcija časa

$$U = U_0 + \frac{\Delta U}{\Delta t} t. \tag{9.35}$$

Celotna faza prepuščenega valovanja je potem

$$\phi = \frac{\omega_0}{c_0} L n_o - \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2 c_0} \left( U_0 + \frac{\Delta U}{\Delta t} t \right) - \omega_0 t. \tag{9.36}$$

Trenutno frekvenco valovanja izračunamo kot negativni odvod faze po času

$$\omega = -\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0}\frac{\Delta U}{\Delta t} = \omega_0 + \Delta\omega. \tag{9.37}$$

Linearno spreminjajoča se modulacijska napetost da torej konstanten frekvenčni premik, kar v optiki pogosto potrebujemo. Dosegljive spremembe frekvence so seveda dokaj majhne, do nekaj sto MHz, saj so omejene s hitrostjo spreminjanja napetosti. Napetost seveda tudi ne more neomejeno naraščati. Kadar se napetost vrača na nič, pride do frekvenčnega premika v nasprotni smeri, ki pa ga lahko zanemarimo, če je čas vračanja bistveno krajši od časa naraščanja.

Poglejmo še primer, ko se priključena napetost periodično spreminja kot $U = U_0 \sin(\omega_m t)$. Vstavimo izraz v enačbo (9.34) in zapišemo fazo izhodnega valovanja

$$\phi = \frac{\omega_0}{c_0} L n_o - \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0 \sin(\omega_m t) - \omega_0 t. \tag{9.38}$$

V primeru linearno spreminjajoče se napetosti smo na tem mestu fazo odvajali in dobili hitrost, ki je bila konstantna. V tem primeru z odvajanjem dobimo kotno hitrost, ki se spreminja s časom. Zato se računa lotimo drugače. Konstantni člen v gornjem izrazu lahko izpustimo in zapišemo električno poljsko jakost prepuščenega valovanja

$$E = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0 \sin(\omega_m t)\right) = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta \sin(\omega_m t)\right), \tag{9.39}$$

pri čemer je

$$\delta = \frac{\omega_0 n_o^3 r_{63}}{2c_0} U_0. \tag{9.40}$$

Z uporabo Jacobi-Angerjevih[3] identitet

$$\begin{aligned} \cos(\delta \sin x) &= J_0(\delta) + 2J_2(\delta)\cos 2x + 2J_4(\delta)\cos 4x + \ldots \quad \text{in} \\ \sin(\delta \sin x) &= 2J_1(\delta)\sin x + 2J_3 \sin 3x + 2J_5 \sin 5x + \ldots \end{aligned} \tag{9.41}$$

je izhodno polje mogoče zapisati v obliki

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= J_0(\delta)\cos(\omega_0 t) + \\ &+ J_1(\delta)\cos(\omega_0 + \omega_m)t - J_1(\delta)\cos(\omega_0 - \omega_m)t + \\ &+ J_2(\delta)\cos(\omega_0 + 2\omega_m)t + J_2(\delta)\cos(\omega_0 - 2\omega_m)t + \\ &+ J_3(\delta)\cos(\omega_0 + 3\omega_m)t - J_3(\delta)\cos(\omega_0 - 3\omega_m)t + \ldots \end{aligned} \tag{9.42}$$

**Naloga 9.5.1** Ob upoštevanju Jacobi-Angerjevih identitet (enačbi 9.41) pokaži, da električno polje izhodne svetlobe ob priključeni izmenični napetosti s frekvenco $\omega_m$ ustreza polju v enačbi (9.42).

Zaradi periodične fazne modulacije se v spektru pojavijo stranski pasovi, ki so od osnovne frekvence $\omega_0$ odmaknjeni za večkratnike modulacijske frekvence $\omega_m$. Njihova velikost je podana s kvadratom Besslovih funkcij parametra $\delta$. Ker je ta navadno majhen, za opis pogosto zadošča le prvi člen.

[3] Nemška matematika Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851, in Carl Theodor Anger, 1803–1858.

Elektro-optični pojav izkoriščamo tudi za uklanjanje žarkov. Najpreprostejši primer deflektorja je trikotna prizma z elektrodama na osnovnih ploskvah. Svetloba se ob prehodu skozi prizmo lomi v odvisnosti od njenega lomnega količnika, tega pa lahko spreminjamo z napetostjo na elektrodah. Praktično je bolj uporabna dvojna prizma. Sestavljena je iz dveh enakih prizem, ki skupaj tvorita kvader, pri tem pa optični osi zgornje in spodnje prizme kažeta v nasprotni smeri. S spreminjanjem napetosti, ki jo priključimo prečno na smer razširjanja svetlobe, lahko zelo hitro in zelo natančno spreminjamo smer izhodnega žarka. Vendar ta pristop ni splošno uveljavljen, predvsem zaradi velike napetosti, ki je potrebna za znatno uklanjanje. Veliko bolj razširjen je akusto-optični pojav, ki ga bomo spoznali v nadaljevanju.

Slika 9.7: Shema elektro-optičnega deflektorja

Elektro-optični pojav ima dva prispevka: direktnega, kjer zunanje polje vpliva neposredno na elektronsko polarizabilnost, in posredno spremembo lomnega količnika zaradi piezoelektrične deformacije. Pri nizkih frekvencah sta prispevka primerljiva, pri velikih frekvencah pa deformacija kristala ne more slediti modulacijski napetosti in ostane le direktni prispevek. To se zgodi nad akustičnimi resonancami kristala. Pri akustičnih resonancah, ko modulacija v kristalu vzbudi stoječe zvočno valovanje, pa se piezoelektrični prispevek resonančno poveča. Pogoj za akustično resonanco je, da je dimenzija kristala mnogokratnik polovice valovne dolžine akustičnega vala v kristalu. Pri kristalih reda velikosti centimeter in hitrosti zvočnih valov okoli 5000 m/s so resonance v območju od nekaj sto kHz do nekaj deset MHz.

Pri visokih frekvencah postane pomembna tudi električna vezava modulatorja, saj kristal predstavlja kapacitivno breme. Njegova impedanca pojema z rastočo frekvenco, zato je vedno večji del padca napetosti na notranjem uporu izvora napetosti. Pomagamo si z vzporedno vezavo tuljave, tako da je resonančna frekvenca $1/(LC)$ nastalega nihajnega kroga enaka modulacijski frekvenci, z dodatnim uporom pa spreminjamo širino resonance. Tipična moč, ki je potrebna za modulacijo je nekaj 10 W, kar je za visokonapetosten in hiter izvor že znatna moč.

## 9.6 Elasto-optični in akusto-optični pojav

Pri elasto-optičnem pojavu dielektrične lastnosti snovi in njen lomni količnik spreminjamo z mehansko deformacijo. Tudi tu opišemo pojav s spremembo inverznega dielektričnega tenzorja

$$\underline{b} = \tilde{\underline{b}} + \delta\underline{b}, \tag{9.43}$$

pri čemer je $\tilde{\underline{b}}$ tenzor v odsotnosti mehanske deformacije, $\delta\underline{b}$ pa sprememba tenzorja zaradi deformacije snovi. V prvem približku jo zapišemo kot

$$\delta b_{ij} = p_{ijkl} S_{kl}. \tag{9.44}$$

Sorazmerna je s tenzorjem deformacije snovi (Greenovim tenzorjem[4]) v linearnem približku

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \tag{9.45}$$

pri čemer je $\mathbf{u}$ vektor deformacije.

[4] Angleški matematični fizik George Green, 1793–1841.

Vpeljali smo še sorazmernostni faktor $p_{ijkl}$, ki ga imenujemo elasto-optični tenzor. Tenzor $p$ je različen od nič v vsaki snovi, saj povezuje dva simetrična tenzorja drugega ranga. Posledično je simetričen v prvem in drugem paru indeksov

$$p_{ijkl} = p_{jikl} = p_{ijlk} = p_{jilk}. \tag{9.46}$$

V najbolj splošnem primeru triklinske kristalne simetrije ima tako 36 neodvisnih komponent, v bolj simetričnih snoveh pa se število neodvisnih komponent še zmanjša. Če vpeljemo skrajšan zapis indeksov ($xx = 1, yy = 2, zz = 3, yz = 4, zx = 5, xy = 6$), zapišemo tenzor za primer izotropne snovi kot

$$\underline{p}_{\text{izo}} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix}, \tag{9.47}$$

pri čemer je $p_{44} = \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12})$. Koeficienti tenzorja so brezdimenzijski, njihova tipična vrednost pa je $p \sim 0,1$. Za vodo, na primer, velja $p_{11} \simeq p_{12} = 0,31$, za $LiNbO_3$ pa $p_{11} = -0,02, p_{12} = 0,08, p_{13} = 0,13, p_{14} = -0,08, p_{31} = 0,17, p_{33} = 0,07, p_{41} = -0,15, p_{44} = 0,12$.

Iz enačbe (9.44) izrazimo spremembo dielektričnega tenzorja

$$\delta\varepsilon_{ij} = -\tilde{\varepsilon}_{ii}\tilde{\varepsilon}_{jj}p_{ijkl}S_{kl}, \tag{9.48}$$

kjer smo privzeli, da je nemoteni $\tilde{\varepsilon}$ diagonalen.

Dvojni lom, ki se pojavi v deformirani snovi, izkoriščamo za študij mehanskih napetosti v modelih, ki so izdelani iz prozorne plastične snovi. Nas bo v nadaljevanju zanimal uklon svetlobe na periodični modulaciji lomnega količnika, ki nastane zaradi zvočnega valovanja v snovi. Takemu pojavu pravimo tudi akusto-optični pojav.

---

**Naloga 9.6.1** Po izotropni snovi se širi longitudinalno valovanje vzdolž smeri $z$, tako da deformacijo v snovi zapišemo kot

$$\mathbf{u} = A\cos(qz - \Omega t)\mathbf{e}_z. \tag{9.49}$$

Pokaži, da je taka snov dvolomna z optično osjo vzdolž osi $z$, lastni lomni količniki pa so

$$n_{x'} \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{12} qA\sin(qz - \Omega t)) \tag{9.50}$$

$$n_{y'} \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{12} qA\sin(qz - \Omega t)) \tag{9.51}$$

$$n'_z \approx n(1 + \frac{1}{2}n^2 p_{11} qA\sin(qz - \Omega t)), \tag{9.52}$$

kjer je $n$ lomni količnik v odsotnosti motnje.

---

## 9.7 Uklon svetlobe na zvočnem valovanju

Vzbudimo v plasti prozorne izotropne snovi zvočno valovanje z valovno dolžino $\Lambda$, ki potuje v smeri $x$. To naredimo tako, da na eno stran snovi priključimo piezoelektrik, ki se pod izmenično napetostjo periodično krči in razteza s krožno frekvenco $\Omega$. Na drugo stran kristala damo akustični absorber ali pa reflektor, tako da lahko v snovi vzbudimo tudi stoječe valovanje. Zaradi zvočnega valovanja se v snovi periodično spreminja gostota in z njo lomni količnik

$$n = \tilde{n} + \delta n \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x - \Omega t\right). \tag{9.53}$$

V zgoščini je lomni količnik nekoliko večji kot v razredčini, zato je optična pot na takem mestu skozi plast daljša. Ravno svetlobno valovanje, ki vpada na plast pravokotno glede na smer širjenja zvoka, po izstopu zato nima povsod enake faze, valovno čelo pa je periodično modulirano s periodo valovne dolžine zvočnega valovanja. Zvočno valovanje v snovi torej deluje kot optična fazna mrežica. Tipična frekvenca, s katero vzbujamo elastično deformacijo, je okoli $\Omega = 50$ MHz, ustrezna valovna dolžina pa okoli $\Lambda = 100$ µm. Frekvence, ki so v uporabi, navadno sežejo od nekaj MHz prek 10 GHz. Čeprav so vse te frekvence daleč nad slišnimi, pogosto imenujemo ta valovanja kar zvočna.

Slika 9.8: Vpadna svetloba se na stoječem zvočnem valovanju v snovi uklanja.

Oglejmo si dva limitna primera. V prvem primeru je debelina plasti, v kateri vzbujamo zvočno valovanje, zelo majhna in $d \ll \Lambda^2/\lambda$ (slika 9.9 a). Takrat modulator deluje kot tanka uklonska mrežica in pojavi se veliko uklonskih vrhov, intenziteta posameznega žarka pa je razmeroma majhna. Kote, pod katerimi se pojavijo ojačitve, izračunamo po preprosti enačbi

$$\Lambda(\sin\vartheta - \sin\beta) = N\lambda, \tag{9.54}$$

pri čemer je $\lambda$ valovna dolžina svetlobe v snovi, $N$ pa celo število. Takemu pojavu pravimo Raman-Nathov uklon[5]. Opazimo ga pri razmeroma nizkih zvočnih frekvencah (pod $\sim 10$ MHz) in majhnih debelinah (pod $\sim 1$ cm) pri poljubnem vpadnem kotu $\vartheta$.

V nasprotnem limitnem primeru se svetloba uklanja na ravnih zvočnih valovih in modulator deluje kot debela uklonska mrežica (slika 9.9 b). Na splošno je delež uklonjene svetlobe na taki mrežici neuporabno majhen. Znaten postane le tedaj, kadar je izpolnjen Braggov pogoj[6]

$$2\Lambda\sin\vartheta = N\lambda. \tag{9.55}$$

[5] Indijski fizik in nobelovec Sir Chandrasekhara Venkata Raman, 1888–1970, in indijski fizik N. S. Nagendra Nath.

[6] Angleška znanstvenika in nobelovca oče in sin Sir William Henry Bragg, 1862–1942, in Sir William Lawrence Bragg, 1890–1971.

Slika 9.9: Ob vpadu svetlobe na tanko plast zvočnega valovanja (a) se pojavi veliko uklonskih vrhov, na debeli plasti zvočnega valovanja (b) pa je opazen zgolj en uklonjen vrh, pa še ta le ob izpolnjenem Braggovem pogoju.

Poglejmo natančneje, kako pridemo do gornjega pogoja. Zapišimo pogoj za ohranitev gibalne količine fotona pri sipanju na zvočnem valu

$$\mathbf{k}_0 \pm \mathbf{q} = \mathbf{k}_1, \tag{9.56}$$

kjer je $\mathbf{k}_0$ valovni vektor vpadne svetlobe, $\mathbf{k}_1$ valovni vektor uklonjenega svetlobnega snopa, $\mathbf{q}$ pa valovni vektor zvočnega vala. Znak plus velja, kadar potuje zvok proti projekciji $\mathbf{k}_0$ na $\mathbf{q}$, negativen predznak pa ob potovanju zvoka v nasprotno smer. Ker je frekvenca zvočnega vala dosti nižja od frekvence svetlobe, se frekvenca svetlobe pri sipanju le malo spremeni in $\mathbf{k}_0$ in $\mathbf{k}_1$ sta po velikosti skoraj enaka. Tedaj je $q = 2k_0 \sin\vartheta$ (glej sliko 9.10), od koder sledi Braggov pogoj (enačba 9.55). Obenem je vpadni kot na zvočni val enak izhodnemu, kar pomeni, da se na zvočnem valu Braggovo sipana svetloba zrcalno odbije. Razmere so torej povsem analogne Braggovemu sipanju rentgenske svetlobe na kristalnih ravninah. Kot bomo pokazali v nadaljevanju, je ob izpolnjenem Braggovem pogoju mogoče doseči, da se vsa vpadna svetloba uklanja.

Slika 9.10: K izpeljavi Braggovega pogoja

Poskusimo še malo bolj natančno oceniti, kdaj je v veljavi Raman-Nathov in kdaj Braggov režim. Izhajajmo iz pogoja, da je razširitev žarka na debelini plasti zvočnega valovanja dovolj majhna, da se snop ne širi iz območja zgoščine v območje razredčine, da se torej ne razširi za več kot za $\Lambda/2$. Tako zapišemo divergenco kot (enačba 3.22) $\theta \sim \lambda/w_0 \sim 2\lambda/\Lambda$. Po drugi strani pa zaradi modulacije divergenca valovanja ne sme presegati razširitve $\theta \sim \Lambda/2d$. Sledi kriterij za debelino $d$, pri kateri preidemo iz enega v drug režim

$$d \sim \frac{\Lambda^2}{4\lambda}. \tag{9.57}$$

Če svetloba z $\lambda = 1$ µm vpade na kristal, v katerem je vzbujeno zvočno valovanje z valovno dolžino $\Lambda = 0,2$ mm in frekvenco $\Omega = 150$ MHz, je mejna debelina $d \sim 1$ cm.

Če je zvočno valovanje potujoče, kar smo v gornjem razmišljanju že privzeli s tem, da smo mu pripisali natanko določen valovni vektor $\mathbf{q}$, se spremeni tudi frekvenca sipanega vala zaradi Dopplerjevega premika pri odboju na zvočnem valovanju, ki potuje s hitrostjo $v_z$. Upoštevati moramo le projekcijo na smer vpadne in odbite svetlobe, zato je

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm\frac{2v_z \sin\vartheta}{c} = \pm\frac{2\Omega\Lambda\sin\vartheta}{2\pi c} = \pm\frac{\Omega}{\omega}, \tag{9.58}$$

pri čemer smo uporabili Braggov pogoj (enačba 9.55). Sprememba frekvence sipane svetlobe je torej kar enaka frekvenci zvočnega valovanja. To je seveda v skladu z gornjo zahtevo, da se pri uklonu na zvočnem valovanju ohranja energija vpadnega fotona in kvanta zvočnega valovanja (fonona), ki se pri sipanju absorbira ali pri njem nastane.

Malenkost drugačno je obnašanje, ko v snovi vzbudimo stoječe zvočno valovanje. Takrat lahko sipanje obravnavamo kot vsoto sipanja na dveh valovanjih z valovnima vektorjema $\mathbf{q}$ in $-\mathbf{q}$. Smer Braggovo sipanega vala je obakrat enaka, frekvenca pa se enkrat poveča, drugič zmanjša za $\Omega$. Zato se pojavi utripanje sipanega vala s frekvenco $2\Omega$.

### Uporaba akusto-optičnih modulatorjev

Spoznali smo, da lahko z zvočnim valovanjem spreminjamo smer vpadne svetlobe. Bistvena razlika od navadnih uklonskih mrežic je dinamičnost akusto-optičnih modulatorjev, saj lahko uklonski kot svetlobe hitro spreminjamo. Pri tem smo omejeni s tem, da mora biti vsaj približno izpolnjen Braggov pogoj. S kombinacijo dveh med seboj pravokotnih akusto-optičnih modulatorjev lahko žarek premikamo po ravnini, kar s pridom uporabljamo v različnih optičnih napravah, na primer v optičnih pincetah, optičnih čitalcih ali optičnih litografskih zapisovalnikih.

Z vklapljanjem in izklapljanjem zvočnega valovanja, ki ga vzbujamo s piezoelektričnim elementom, na katerega pritisnemo izmenično napetost, lahko moduliramo intenziteto direktnega svetlobnega snopa. To potrebujemo na primer pri preklapljanju dobrote laserskega resonatorja.

Tretji primer uporabe je spreminjanje frekvence svetlobe. Možne so spremembe do nekaj 100 MHz, kar je ravno primerno za uporabo v laserskih merilnikih hitrosti, kjer merimo frekvenco utripanja med referenčno svetlobo in svetlobo, odbito od merjenega predmeta. Če ima referenčna svetloba isto frekvenco kot merilni snop, ni mogoče določiti predznaka hitrosti predmeta, če pa referenčni svetlobi nekoliko spremenimo frekvenco, se pojavi utripanje tudi tedaj, ko predmet miruje. Frekvenca utripanja se poveča ali zmanjša glede na predznak hitrosti predmeta.

Naslednji primer uporabe akusto-optičnih modulatorjev je za uklepanje faz v laserskem resonatorju. Če je v Braggovem elementu prisotno stoječe zvočno valovanje, je amplituda direktnega snopa modulirana s frekvenco zvoka. Kadar je frekvenca zvoka ravno enaka razmiku frekvenc laserskih nihanj, lahko nastanejo uklenjene faze vzbujenih nihanj in s tem kratki sunki svetlobe.

Zanimiva je tudi uporaba Braggovega elementa za izdelavo hitrega frekvenčnega analizatorja električnih signalov. Piezoelektrični element vzbujamo z električnim signalom, ki ima neznan spekter. Enak spekter imajo tudi vzbujeni zvočni valovi, pri čemer vsakemu valu določene frekvence ustreza določen kot odklona svetlobnega snopa. Za Braggovim elementom postavimo lečo. Vsak delni uklonjeni snop da v goriščni ravnini svetlo točko, katere položaj je odvisen od kota odklona in torej od frekvence zvočnega vala. Spekter zaznamo z vrstičnim detektorjem. Akusto-optični element oziroma Braggova celica torej frekvenčni spekter zvočnih valov prevede v prostorski spekter prepuščene svetlobe. Prostorski spekter svetlobe pa lahko analiziramo z lečo, ki v goriščni ravnini da prostorsko Fourierevo transformiranko svetlobnega snopa pred lečo.

## 9.8 *Račun akusto-optičnega pojava

Izračunajmo intenziteto svetlobe, ki se uklanja na zvočnem valovanju. Izhajamo iz valovne enačbe v nehomogenem sredstvu, kar je dokaj težaven problem in se moramo zateči k približkom. Uporabili bomo metodo sklopljenih valov.

Naj vzporeden snop zvočnega valovanja s širino $d$ in valovnim vektorjem $\mathbf{q}$ potuje v smeri $x$. Nanj pod kotom $\vartheta$ glede na os $z$ (normalo na kristal) vpada ravno svetlobno valovanje z valovnim vektorjem $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) = k(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$. Vse valovanje, vpadno na levi od zvočnega snopa in izhodno na njegovi desni, obravnavajmo znotraj snovi, da ni treba upoštevati še loma, ki le zaplete izraze.

Privzemimo, da se v snovi zaradi zvočnih valov spremeni le velikost dielektrične konstante. Ob upoštevanju zveze med spremembo dielektričnosti in deformacijo v zvočnem valu (enačba 9.48) spremembo dielektričnosti zapišemo kot

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \delta\varepsilon = \tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^2 p S_0 \sin(qx - \Omega t). \tag{9.59}$$

Zaradi spremembe dielektričnosti pride do pojava dodatne električne polarizacije $\delta P$

$$\delta P = \varepsilon_0 \delta\varepsilon E = -\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}^2 p S_0 \sin(qx - \Omega t) E. \tag{9.60}$$

Dodatna polarizacija v valovno enačbo doprinese nehomogen člen, podobno kot pri nelinearni optiki (enačba 8.11). Zapišemo

$$\nabla^2 E - \frac{\tilde{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial E^2}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2}, \tag{9.61}$$

pri čemer smo privzeli, da je $\nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$, čeprav je $\varepsilon$ funkcija kraja.

Enačbo (9.61) brez dodane polarizacije $\delta P$ rešijo ravni valovi z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$ in frekvenco $\omega$. Tej rešitvi se primešajo valovi z valovnim vektorjem $\mathbf{k} \pm n\mathbf{q}$ in frekvenco $\omega \pm n\Omega$. Zato iščemo rešitve v obliki vsote ravnih valov, torej Fouriereve vrste

$$E = \sum_n A_n(z) e^{in(qx-\Omega t)} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}. \tag{9.62}$$

Zaradi sklopitve preko $\delta P$ smo dopustili, da so amplitude $A_n$ funkcije $z$. Če je $\delta\varepsilon$ dovolj majhen, se $A_n(z)$ le počasi spreminjajo.

Izračunajmo

$$\nabla^2 E = \sum_n \left(-(k_z^2 + (k_x + nq)^2) A_n(z) + 2ik_z A_n'(z)\right) e^{i((k_x+nq)x + k_z z - (\omega + n\Omega)t)}. \tag{9.63}$$

Člene z $A_n''$ lahko izpustimo, če je le $k_z A_n' \gg A_n''$ oziroma kadar se $A_n$ spreminjajo počasi v primerjavi z $\exp(ik_z z)$. Drugi odvod polarizacije po času da

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2} = &-\frac{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}^2 p S_0}{2i} \sum_n A_n(z) \exp\left(i((k_x + nq)x + k_z z - (\omega + n\Omega)t)\right) \cdot \\ &\left(-(n\Omega + \omega + \Omega)^2 e^{i(qx - \Omega t)} + (n\Omega + \omega - \Omega)^2 e^{i(-qx + \Omega t)}\right),\end{aligned} \tag{9.64}$$

drugi odvod polja po času pa

$$\frac{\partial E^2}{\partial t^2} = -\sum_n (n\Omega + \omega)^2 A_n(z) e^{in(qx-\Omega t)} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}. \tag{9.65}$$

Vstavimo izraze (9.63), (9.64) in (9.65) v valovno enačbo (9.61) in izenačimo člene z isto časovno in prostorsko frekvenco, na primer s $k_z z + (k_x + mq)x - (\omega + m\Omega)t$. Sledi

$$-\left(k_z^2 + (k_x + mq)^2\right) A_m + 2ik_z A_m' + \frac{\tilde{\varepsilon}}{c^2}(m\Omega + \omega)^2 A_m = \tag{9.66}$$

$$= \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}^2 p S_0}{2i}(\omega + m\Omega)^2 (A_{m-1} - A_{m+1}). \tag{9.67}$$

Upoštevamo, da je

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\tilde{\varepsilon}\omega^2}{c^2} \tag{9.68}$$

in naredimo približek $(\omega + m\Omega)^2 \approx \omega^2$. Sledi

$$A_m' + i\beta_m A_m + \xi(A_{m+1} - A_{m-1}) = 0, \tag{9.69}$$

kjer sta

$$\beta_m = \frac{mq}{k_z}(k_x + \frac{1}{2}mq) \quad \text{in} \quad \xi = -\frac{\tilde{\varepsilon} p S_0 k^2}{4k_z}. \tag{9.70}$$

Reševanje sistema enačb (9.69) je težavno, zato poiščimo rešitve le v treh pomembnih limitnih primerih. Amplituda vala, ki vpada z leve, naj bo $A_0(0) = A_0$, za ostale pa naj velja $A_n(0) = 0$.

### Braggov uklon ob šibki pretvorbi

Najprej privzemimo, da je $\xi d \ll 1$, da je torej velikost $\delta\varepsilon$ majhna in debelina zvočnega snopa ne prevelika. Tedaj pri vseh $z$ in za pozitivne $m$ velja $A_{m+1} \ll A_m$ in lahko člen $A_{m+1}$ v enačbi (9.69) izpustimo. S tem zapišemo preprost sistem enačb

$$A_m' + i\beta_m A_m = \xi A_{m-1}, \tag{9.71}$$

ki jih lahko zapored integriramo

$$A_m(z) = \xi e^{-i\beta_m z} \int_0^z A_{m-1}(z') e^{i\beta_m z'} dz'. \tag{9.72}$$

Podobne izraze izpeljemo za negativne $m$.

Poglejmo posebej prvi uklonjeni val z amplitudo $A_1$. Po predpostavki, da je $A_{\pm 1} \ll A_0$, se le malo energije uklanja iz osnovnega vala in lahko privzamemo, da je $A_0(z)$ skoraj konstanta. Potem lahko integral v enačbi (9.72) izračunamo

$$A_1(d) = A_0 \xi d \frac{\sin \beta_1 d/2}{\beta_1 d/2} e^{-i\beta_1 d/2}, \tag{9.73}$$

pri čemer je $d$ debelina plasti zvočnega valovanja. Funkcija $A_1(d)$ ima vrh pri $\beta_1 = 0$, to je po enačbi (9.70) pri

$$k_x + \frac{q}{2} = k \sin\vartheta + \frac{q}{2} = 0 \qquad \text{ali} \qquad 2\Lambda \sin\vartheta = -\lambda. \tag{9.74}$$

Vidimo, da predstavlja $\beta_1 = 0$ ravno pogoj za Braggovo sipanje vpadnega vala.

Delež moči uklonjenega vala je

$$\boxed{\frac{I_1}{I_0} = \left|\frac{A_1}{A_0}\right|^2 = (\xi d)^2 \left(\frac{\sin \beta_1 d/2}{\beta_1 d/2}\right)^2.} \tag{9.75}$$

Če je Braggov pogoj izpolnjen, je $I_1/I_0 = (\xi d)^2$ in naraščanje parabolično. To seveda lahko velja le, dokler je $\xi d \ll 1$. Kadar intenziteta uklonjenega žarka tako naraste, da ta pogoj ni več izpolnjen, je treba v računu upoštevati tudi zmanjšanje moči vpadnega snopa.

### Braggov uklon ob znatni pretvorbi

Drug primer naj bo približek, da sta le $A_0$ in $A_1$ različna od nič, opustimo pa omejitev $\xi d \ll 1$. Ta približek je smiseln, saj je Braggov pogoj hkrati lahko izpolnjen le za en uklonjen val, na primer $m = 1$. Tedaj so vse ostale amplitude $A_{m,m\neq 0,1}$ majhne in ne vplivajo na $A_1$. Zaradi velike pretvorbe $A_0(z)$ ne smemo več obravnavati kot konstante. Upoštevamo izpolnjen Braggov pogoj (enačba 9.74) in iz sistema enačb (9.69) sledi

$$\begin{aligned} A_0' + \xi A_1 &= 0 \\ A_1' - \xi A_0 &= 0. \end{aligned} \tag{9.76}$$

Ob začetnih pogojih $A_0(0) = A_0$ in $A_1(0) = 0$ sta rešitvi gornjih enačb

$$A_0(d) = A_0 \cos(\xi d) \tag{9.77}$$

in

$$A_1(d) = A_0 \sin(\xi d). \tag{9.78}$$

Če je izpolnjen Braggov pogoj, se moč vpadnega vala na razdalji $\pi/(2\xi)$ skoraj vsa pretoči v uklonjeni snop, nato pa zopet nazaj (slika 9.11). Za čim bolj učinkovito delovanje akusto-optičnega modulatorja seveda želimo doseči ravno take pogoje.

Slika 9.11: Intenziteta prepuščenega (črna) in uklonjenega (rdeča) valovanja na zvočnem valovanju v odvisnosti od debeline plasti zvočnega valovanja

V gornja izraza vstavimo še parameter $\xi$, ki je podan z enačbo (9.70). Razmerje med močjo uklonjenega in vpadnega snopa je tako

$$\boxed{\frac{I_1}{I_0} = \sin^2\left(\frac{\pi n_0^3 p S_0 d}{2\lambda \cos\vartheta}\right).} \tag{9.79}$$

Poiščimo še amplitudo deformacije $S_0$. Za longitudinalne (zvočne) valove v snovi oblike $u = u_0 \cos(qz - \Omega t)$ je deformacija

$$S_{zz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial z} = -u_0 q \sin(qz - \Omega t). \tag{9.80}$$

Povprečna gostota energijskega toka je

$$j_z = \frac{1}{T}\int_0^T v_z \left(\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho v_z^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right) dt = \frac{1}{2}\rho v_z^3 S_0^2, \tag{9.81}$$

kjer je $v_z$ hitrost zvoka v snovi in $\rho$ gostota snovi. Sledi

$$S_0 = \sqrt{\frac{2j_z}{\rho v_z^3}}. \tag{9.82}$$

Praktično je vpeljati merilo uporabnosti neke snovi za akusto-optični modulator. To je koeficient

$$M = \frac{n_0^6 p^2}{\rho v_z^3}. \tag{9.83}$$

Večja kot je vrednost koeficienta $M$, bolj izrazit je akusto-optični pojav v dani snovi.

Poglejmo primer. V kremenu z gostoto $\rho = 2,2\cdot 10^3$ kg/m$^3$ je hitrost zvoka $v_z = 6000$ m/s, $\tilde{n} = 1,46$ in $p = 0,2$. To da $M = 8\cdot 10^{-16}$ W/m$^2$. Pri gostoti zvočnega toka 10 W/cm$^2$ in valovni dolžini svetlobe 633 nm pride do popolnega prenosa moči v uklonjeni snop pri debelini $d = 3$ cm. Gornja gostota zvočnega toka je kar velika in je ni prav lahko doseči, zato so uklonski izkoristki navadno nekaj manjši od 1.

Izračunajmo še kot odklona uklonjenega vala $\theta = 2\vartheta$

$$\theta \approx \frac{q}{k} = \frac{\lambda}{\tilde{n}\Lambda} = 1,7\cdot 10^{-3}. \tag{9.84}$$

Uklonski kot je torej precej majhen.

★ Opisani račun izkoristka uklona na zvočnih valovih je uporaben tudi pri računu izkoristka holograma. V primeru faznega holograma je račun povsem enak in jasno kaže razliko med tankim in debelim hologramom. Kako pa je z izkoristkom amplitudnega holograma, kjer je modulirana absorpcija v snovi, lahko bralec izračuna sam ali najde v literaturi.[7]

## Raman-Nathov uklon

Oglejmo si še tretji primer. Izhajamo iz sistema enačb (9.69), ki smo ga zaenkrat rešili za primer Braggovega uklona oziroma v njegovi bližini. Enačbe je preprosto rešiti še v primeru tanke mrežice oziroma t. i. Raman-Nathovega približka. Vpeljimo novo neodvisno spremenljivko $\zeta = 2\xi z$. Zveza (9.69) preide v

$$2\frac{dA_m(\zeta)}{d\zeta} + A_{m+1}(\zeta) - A_{m-1}(\zeta) = \frac{\beta_m}{i\xi}A_m. \tag{9.85}$$

Člen na desni lahko izpustimo, če je

$$\frac{\beta_m}{\xi} = \left|\frac{4mq}{\tilde{\varepsilon}pS_0k}(\sin\vartheta + \frac{mq}{2k})\right| \ll 1, \tag{9.86}$$

oziroma če je valovna dolžina zvoka dovolj velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Potem v enačbi (9.85) prepoznamo rekurzijsko zvezo za Besslove funkcije

$$2J_n' + J_{n+1} - J_{n-1} = 0 \tag{9.87}$$

z rešitvijo $A_m(z) = A_0 J_m(2\xi z)$. Kadar je $2\xi d$ ničla funkcije $J_0$, prvič je to pri $2\xi d \approx 2,4$, se vsa energija ukloni iz vpadnega snopa, vendar se v tem primeru razporedi v mnogo uklonjenih snopov.

[7] H. Kogelnik, Bell Syst. Tech. J. 48, 2909 (1969).

## 9.9 Modulacija s tekočimi kristali

### Nematični tekoči kristali

Za konec opišimo še modulacijo svetlobe s tekočimi kristali. Tekoči kristali so anizotropne kapljevine. To pomeni, da so tekoči kot kapljevine, imajo pa določene anizotropne lastnosti kot trdni kristali. Tekoče kristale tvorijo podolgovate ali ploščate molekule, ki odražajo različne stopnje urejenosti.

Omejimo se na najosnovnejši primer, to so podolgovate organske molekule v nematični fazi tekočega kristala. Navadno so to molekule z razmeroma togim jedrom iz dveh ali treh benzenovih obročev, ki imajo na koncih krajše ali daljše alifatske verige (slika 9.12). Značilnost nematične faze je, da so v njej težišča molekul neurejena, enako kot v navadni tekočini, osi molekul pa so v povprečju urejene v določeno smer. Pravimo, da imajo molekule v nematiku orientacijsko ureditev dolgega dosega. Če nematik segrejemo, preide v izotropno tekočo fazo, če pa ga ohladimo, neposredno ali prek drugih tekočekristalnih faz preide v trdno kristalno obliko.

Smer povprečne urejenosti podolgovatih molekul opišemo z enotskim vektorjem **n**, ki ga imenujemo direktor. Smeri **n** in $-\mathbf{n}$ sta enakovredni, saj molekule z enako verjetnostjo kažejo v smer $+\mathbf{n}$ kot v $-\mathbf{n}$. Stopnja urejenosti v mikroskopski sliki ni prav velika, povprečen odklon molekul od **n** je nekaj deset stopinj, odvisno seveda od temperature.

Slika 9.12: Molekula enega najbolj razširjenih tekočih kristalov, 4-ciano-4'pentil-bifenila ali 5CB (levo) in shematski prikaz nematične faze z označenim direktorjem (desno)

Molekule so v nematični fazi v povprečju orientacijsko urejene, zato se nematik obnaša kot enoosen dvolomni kristal. Njegova optična os je vzporedna z **n**, lastni vrednosti dielektričnega tenzorja pa sta $\varepsilon_\perp$ in $\varepsilon_\parallel$, ki ustrezata rednemu ($n_o$) in izrednemu ($n_e$) lomnemu količniku. Ker je optična polarizabilnost benzenovih obročev vzdolž osi molekul precej večja kot v prečni smeri, je razlika med rednim in izrednim lomnim količnikom v nematiku razmeroma velika, navadno med $0,1$ in $0,2$, seveda spet odvisno od temperature.

V povprečju so molekule urejene v smeri direktorja. Če se smer direktorja lokalno spremeni, je energija takega deformiranega stanja nekoliko večja od energije homogenega urejenega stanja. Tekoči kristal na drugače orientiran delček snovi zato deluje z navorom v smeri zmanjševanja nehomogenosti **n**. To lastnost, ki je značilna za tekoče kristale, imenujemo orientacijska elastičnost. Vendar so v makroskopskem vzorcu nematičnega tekočega kristala elastični navori prešibki, da bi uredili celoten vzorec, zato se na splošno smer direktorja **n** po vzorcu neurejeno spreminja. V optičnih napravah pa potrebujemo urejene vzorce, zato moramo ureditev vzorca vsiliti. To naredimo z zunanjim električnim ali magnetnim poljem, ali pa vzorce pripravimo dovolj tanke, da ureditev vsilijo mejne površine.

Poglejmo, kako nastane urejen vzorec v tankih plasteh. Če površino, ki je v stiku s tekočim kristalom, ustrezno pripravimo (prevlečemo s posebnimi plastmi ali mehansko obdelamo), se molekule tekočega kristala tik ob površini uredijo v dani smeri. Tako na primer podrgnjena tanka plast najlona uredi **n** ob površini v smeri drgnjenja vzporedno s površino (slika 9.13 a). Po drugi strani pa tanka plast lecitina ali surfaktanta silana uredi direktor pravokotno na površino (slika 9.13 b). Ti dve snovi imata namreč polarno glavo, ki se adsorbira na stekleno površino, in alifatsko verigo, ki stoji približno pravokotno na površino. Zato se tudi alifatski repi molekul tekočega kristala uredijo pravokotno na steklo. V obeh primerih, vzporedni (planarni) ali pravokotni (homeotropni) ureditvi ob steni, se urejenost zaradi orientacijske elastičnosti ohranja tudi stran od stene, tako da lahko brez težav naredimo urejene vzorce debeline do kakih 200 μm. Pri večjih debelinah so elastični navori prešibki in v vzorcu nastanejo defekti.

Slika 9.13: Ureditev tekočega kristala navadno vsilimo z urejevalno površino. Dva primera sta planarna ureditev (a), kjer je direktor vzporeden z urejevalno površino, in homeotropna ureditev (b), kjer je direktor pravokoten na mejno ploskev.

Na ureditev molekul tekočega kristala vpliva zunanje električno ali magnetno polje. Zaradi urejenosti molekul električna (ali magnetna) susceptibilnost nematičnega tekočega kristala ni skalar, temveč ima dve različni lastni vrednosti, eno za smer vzporedno z **n**, drugo za pravokotno nanj. Zato je elektrostatična energija odvisna od kota med zunanjim poljem **E** in direktorjem **n**. Gostoto električne energije zapišemo kot

$$w_{el} = -\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}. \tag{9.88}$$

Električno polje lahko razstavimo na del, ki je vzporeden z **n**, in del, ki je pravokoten nanj

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{E} - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}). \tag{9.89}$$

Potem je

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_\perp\mathbf{E} + \varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}, \tag{9.90}$$

pri čemer je $\varepsilon_a = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$ anizotropni del dielektrične konstante. Anizotropni del gostote energije je tako do konstante

$$\boxed{w_a = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})^2,} \tag{9.91}$$

Če je $\varepsilon_a > 0$, se molekule tekočega kristala uredijo v smeri zunanjega polja, v nasprotnem primeru pa pravokotno nanj.

Urejenost tekočekristalnega vzorca je tako odvisna od orientacijske elastičnosti, robnih pogojev, ki jih določimo z obdelavo mejne površine, in od jakosti ter smeri zunanjega električnega ali magnetnega polja.

### Tekočekristalni prikazovalnik

Vzemimo tanko plast tekočega kristala med dvema površinama, ki vsiljujeta vzporedno planarno ureditev. Vzorec je urejen in homogen, optična os leži v ravnini plasti. Če dodamo na površini še prozorni elektrodi, lahko z zunanjo napetostjo spreminjamo orientacijo molekul v plasti in tako tudi smer optične osi. Dovolj velika napetost zasuče **n** in optična os se postavi pravokotno na stene, razen tik ob površini. Tipično so take napetosti okoli nekaj voltov.

Ta pojav lahko izkoristimo za izdelavo preprostega optičnega preklopnika. Naj debelina plasti $d$ ustreza debelini ploščice $\lambda/2$ za izbrano valovno dolžino svetlobe

$$d(n_e - n_o) = (2N+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{9.92}$$

kjer je $N$ celo število, $n_e$ izredni in $n_o$ redni lomni količnik. Ker je v nematikih $n_e - n_o \sim 0,1$, je ustrezna debelina $d$ nekaj µm. Tak vzorec damo med dva prekrižana polarizatorja s prepustno smerjo pod kotom 45 ° glede na **n** oziroma optično os. Vzorec, ki deluje kot ploščica $\lambda/2$, polarizacijo svetlobe z izbrano valovno dolžino zasuče za 90 ° in svetloba prehaja skozi analizator. Ko priključimo napetost, se optična os obrne v smeri polja. Polarizacija vpadne svetlobe se pri prehodu skozi plast ohrani in analizator je ne prepusti. Z električnim poljem smo torej preklopili iz stanja, ki prepušča svetlobo, v stanje, ki svetlobe ne prepusti. Vendar ima tak preklopnik nekaj slabosti. Prepustnost je odvisna od valovne dolžine svetlobe in od temperature, poleg tega mora biti debelina plasti povsod povsem enaka. Zato se v praksi uporablja zasukan nematik.

Zasukan nematik nastane tako, da površini, ki vsiljujeta planarno ureditev, zasučemo za kot 90 ° eno glede na drugo (slika 9.14 a), zato se **n** v plasti zvezno zavrti. Pokazali bomo, da polarizacija svetlobe, ki je ob vstopu v plast polarizirana v smeri urejanja, pri prehodu skozi plast približno sledi **n** in je ob izstopu iz plasti pravokotna na vpadno polarizacijo. Ko priključimo električno polje, se direktor obrne v smer pravokotno na plast tekočega kristala (slika 9.14 b). V tem primeru se polarizacija ne zasuče in analizator svetlobe ne prepusti. Plast med prekrižanima polarizatorjema brez polja torej prepušča svetlobo, s poljem pa ne. Pri tem delovanje prikazovalnika ni dosti odvisno niti od debeline plasti niti od valovne dolžine svetlobe.

Slika 9.14: a) Zasukana nematična celica. Polarizacija (P) približno sledi smeri zasukanega direktorja in analizator (A) prepusti svetlobo. b) Ko priključimo električno polje (**E**), se tekočekristalne molekule zasučejo v smer polja. Polarizacija svetlobe (P) se ohranja in analizator (A) svetlobe ne prepušča.

Tekočekristalni zasloni, ki jih uporabljamo v praksi, so precej bolj zapleteni. Najpreprostejši so črno-beli prikazovalniki, ki delujejo z odbito svetlobo (npr. v žepnih računalih), zato imajo za analizatorjem odbojno površino. Večina sodobnih prikazovalnikov (npr. računalniški ali telefonski zasloni) pa za osvetlitev uporablja LED ali fluorescenčna svetila. Barve dosežemo z barvnimi filtri (rdečim, modrim in zelenim) na vsakem pikslu posebej, natančno krmiljenje pikslov pa s tankoplastnimi tranzistorji (*Thin film transistors*, TFT). Veliko sodobnejših zaslonov ima tekoče kristale urejene planarno, tekočekristalne zaslone pa lahko z dodatnimi plastmi naredimo tudi občutljive na dotik.

Slika 9.15: Vsak piksel tekočekristalnega zaslona je sestavljen iz treh barv.

## 9.10 *Račun prehoda svetlobe skozi zasukan nematik

Pokazati moramo še, da polarizacija svetlobe pri prehodu skozi zasukan nematik približno sledi zasuku optične osi. Vzemimo vzorec, kakršen je na sliki (9.14 a) in ga obravnavajmo kot lokalno optično enoosno snov. Pri $z = 0$ naj bo optična os v smeri $x$, ko se premikamo vzdolž osi $z$, pa naj se optična os suče v ravnini $xy$. Kot med optično osjo in osjo $x$ tako zapišemo

$$\varphi = qz. \tag{9.93}$$

Poleg zasukane nematične celice je pomemben primer snovi s takimi lastnostmi holesterični tekoči kristal, ki je zelo podoben nematičnemu, le da so molekule kiralne in se **n** spontano suče okoli smeri, pravokotne na **n**. Zanimajmo se le za širjenje svetlobe v smeri $z$. Tedaj potrebujemo le del dielektričnega tenzorja v $xy$ ravnini.

**Naloga 9.10.1** Pokaži, da se dielektrični tenzor v zasukani nematični plasti zapiše kot

$$\varepsilon(z) = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon_a \cos(2qz) & \frac{1}{2}\varepsilon_a \sin(2qz) \\ \frac{1}{2}\varepsilon_a \sin(2qz) & \bar{\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon_a \cos(2qz) \end{bmatrix}, \tag{9.94}$$

kjer je $z$ razdalja od plasti, v kateri je direktor obrnjen v smeri $x$, povprečna vrednost $\bar{\varepsilon}$ pa

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_\parallel + \varepsilon_\perp}{2}. \tag{9.95}$$

Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) hitro uvidimo, da je valovna enačba za valovanje s frekvenco $\omega$ oblike

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(z)\mathbf{E} = 0 \tag{9.96}$$

ali po komponentah, upoštevajoč tenzor dielektričnosti (enačba 9.94)

$$\frac{d^2E_x}{dz^2} + (\beta^2 + \alpha^2\cos(2qz))E_x + \alpha^2 E_y \sin(2qz) = 0 \tag{9.97}$$

in

$$\frac{d^2E_y}{dz^2} + \alpha^2 E_x \sin(2qz) + (\beta^2 - \alpha^2\cos(2qz))E_y = 0, \tag{9.98}$$

kjer je $\alpha^2 = \varepsilon_a\omega^2/(2c^2)$ in $\beta^2 = \bar{\varepsilon}\omega^2/c^2$. Dobili smo torej sistem dveh sklopljenih diferencialnih enačb.

Za reševanje je ugodno vpeljati krožni polarizaciji $E_+ = E_x + iE_y$ in $E_- = E_x - iE_y$. Enačbi (9.97) in (9.98) prepišemo v

$$-\frac{d^2E_+}{dz^2} = \beta^2 E_+ + \alpha^2 E_- e^{2iqz} \tag{9.99}$$

in

$$-\frac{d^2E_-}{dz^2} = \alpha^2 E_+ e^{-2iqz} + \beta^2 E_-. \tag{9.100}$$

Lastne rešitve poiščemo v obliki

$$E_+ = Ae^{i(k+q)z} \tag{9.101}$$

in

$$E_- = Be^{i(k-q)z}. \tag{9.102}$$

Nastavek reši sistem enačb (9.99) in (9.100), natanko takrat, kadar $A$ in $B$ rešita sistem homogenih linearnih enačb

$$\left((k+q)^2 - \beta^2\right)A - \alpha^2 B = 0 \tag{9.103}$$

in

$$-\alpha^2 A + \left((k-q)^2 - \beta^2\right)B = 0. \tag{9.104}$$

Sistem je netrivialno rešljiv, če je determinanta koeficientov enaka nič

$$\left(k^2 + q^2 - \beta^2\right)^2 - 4k^2q^2 - \alpha^4 = 0. \tag{9.105}$$

Spomnimo se, da sta $\beta$ in $\alpha$ sorazmerna z $\omega$, zato dobljena enačba predstavlja disperzijsko relacijo – zvezo med $\omega$ in $k$ – za svetlobo v zavitem sredstvu

$$\left(k^2 + q^2 - \frac{\bar{\varepsilon}\omega^2}{c^2}\right)^2 - 4k^2q^2 - \frac{\varepsilon_a^2\omega^4}{4c^4} = 0. \tag{9.106}$$

Na splošno je iskanje rešitev gornje enačbe zapleten problem, vendar za razlago delovanja zasukane nematične celice zadošča približek $q \ll \beta$ in $\alpha$, ko je torej perioda sukanja optične osi velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Tedaj lahko $q$ v disperzijski zvezi (enačba 9.105) zanemarimo in velja

$$k^2 = \begin{cases} \beta^2 + \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\parallel} \\ \beta^2 - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp} \end{cases} \tag{9.107}$$

Ti vrednosti ustrezata velikosti valovnega vektorja za izredni in redni val v navadnem enoosnem kristalu. Vstavimo ju v enačbi (9.101) ali (9.102) in za polarizaciji lastnih valov velja $B = \pm A$.

Izračunajmo še obe kartezični komponenti električnega polja za prvo rešitev

$$E_x = \frac{1}{2}(E_+ + E_-) = \frac{1}{2}Ae^{ikz}(e^{iqz} + e^{-iqz}) = Ae^{ikz}\cos qz \tag{9.108}$$

$$E_y = \frac{1}{2i}(E_+ - E_-) = \frac{1}{2i}Ae^{ikz}(e^{iqz} - e^{-iqz}) = Ae^{ikz}\sin qz. \tag{9.109}$$

Polarizacija torej res sledi optični osi. Druga rešitev da val, ki je polariziran pravokotno na lokalno optično os in se prav tako suče z njo. Pri tem se prvi val širi s fazno hitrostjo $c/n_e$, torej kot izredni val, drugi pa s $c/n_o$, to je kot redni val. Če na zasukano nematično celico vpada svetloba, ki je polarizirana ali vzporedno z optično osjo ob meji ali pravokotno nanjo, se pojavi na izhodni strani polarizacija, zasukana za enak kot, kot je zasukana optična os. V primeru, da vpadna polarizacija ne sovpada z eno od lastnih osi, jo razstavimo na obe lastni in po prehodu skozi tekoči kristal zopet sestavimo, s čemer seveda na splošno nastane eliptična polarizacija.

★ Disperzijsko zvezo (enačba 9.105 oziroma 9.106) lahko rešimo numerično (slika 9.16). Pri izbrani vrednosti $\alpha$ obstajajo pri vseh frekvencah, razen v ozkem območju – rečemo mu frekvenčna reža – štiri realne rešitve za $k$, po dve za valovanji v pozitivni in v negativni smeri. V območju reže je en par rešitev imaginaren. Vsaki vrednosti $k$ pripada neko razmerje amplitud $A$ in $B$, ki ga izračunamo iz enačb (9.101) in (9.102) in ki določa polarizacijo lastnega vala. Polarizacije lastnih valov so na splošno eliptične in pri dani frekvenci med seboj niso pravokotne, saj zapisani sistem enačb ne predstavlja čisto navadnega problema lastnih vektorjev simetrične matrike. V območju frekvenčne reže le en par rešitev predstavlja potujoč val, drug pa polje, ki eksponentno pojema v sredstvo. Zato se svetloba s frekvenco v reži in z ustrezno polarizacijo, ki vpada na holesterični tekoči kristal, totalno odbije. Pojav je povsem analogen Braggovemu odboju na kristalih in daje holesterikom značilen obarvan videz.

Slika 9.16: Rešitve disperzijske zveze (enačba 9.105) v zasukanem nematiku ali holesteriku pri danem $\alpha$. Razen v frekvenčni reži (modra pasova) obstajajo štiri rešitve za vsako frekvenco.

## 9.11 Račun preklopa v tekočem kristalu – Frederiksov prehod

Omenili smo, da lahko z dovolj velikim zunanjim poljem molekule tekočega kristala, razen tik ob površini, obrnemo v smeri polja. Izračunajmo jakost polja, ki je potrebna za ta zasuk.

Energija nematičnega tekočega kristala je najnižja, kadar je direktor **n** povsod obrnjen v isto smer. Povečanje energije zaradi krajevne odvisnosti **n** zapišemo z orientacijsko elastično energijo oziroma Frankovo prosto energijo[8]

$$F_e = \frac{1}{2}\int \left\{K_1(\nabla\cdot\mathbf{n})^2 + K_2\left(\mathbf{n}\cdot(\nabla\times\mathbf{n})\right)^2 + K_3\left(\mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{n})\right)^2\right\} dV. \tag{9.110}$$

Pri tem so $K_1$, $K_2$ in $K_3$ tri Frankove elastične konstante, ki so odvisne od snovi in tudi od temperature. Prvi člen predstavlja povečanje energije zaradi deformacije v obliki pahljače, drugi zaradi zasuka, tretji pa zaradi upogiba (slika 9.17).

Slika 9.17: Trije načini deformacije ureditve tekočega kristala so pahljačasta deformacija, zasuk in upogib.

V zunanjem električnem polju se energija tekočega kristala dodatno spremeni. Navadno je neodvisna električna količina električna poljska jakost, saj je polje posledica zunanje napetosti na elektrodah. Ustrezni člen v prosti energiji je tedaj (enačbi 9.88 in 9.90)

$$F_{el} = -\int \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dV = -\frac{1}{2}\int \left(\varepsilon_0\varepsilon_\perp \mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})^2\right) dV = F_0 + F_{el,a}. \tag{9.111}$$

Prvi člen je neodvisen od **n**, zato ni pomemben pri izračunu preklopa. Prosta energija nematičnega tekočega kristala v električnem polju je tako

$$F = F_0 + F_e - \int \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_a(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})^2 dV = F_0 + F_e + F_{el,a}, \tag{9.112}$$

kjer $F_0$ predstavlja del proste energije, ki je neodvisen od **n**. Tekoči kristal je v ravnovesju, ko je prosta energija najmanjša. Kadar je $\varepsilon_a > 0$, se zato skuša **n** postaviti vzporedno s poljem, popoln zasuk pa onemogoča mejna urejevalna plast. Da lahko z minimizacijo $F$ izrazimo $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, moramo torej poznati še robne pogoje.

Poglejmo primer. Naj bo nematični tekoči kristal med dvema vzporednima steklenima ploščama, med katerima je razmik $d$. Na obeh ploščah naj bo **n** vzporeden s površino in obrnjen v isto smer, tako da je brez zunanjega polja **n** povsod enako usmerjen. Naj bo to smer $x$. Na stekleni plošči dodamo elektrodi, ki ustvarjata polje pravokotno na prvotno smer direktorja, naj bo to smer $z$. Ko priključimo polje, je energijsko ugodnejše, da se molekule vsaj delno zasučejo v smer polja. Ta zasuk opišemo s komponento vektorja **n** v smeri $z$

$$\mathbf{n}(z) = (n_x(z), 0, n_z(z)). \tag{9.113}$$

[8] Angleški fizik Sir Frederick Charles Frank, 1911–1998.

Robni pogoj, kateremu mora direktor zadostiti, je $n_z(0) = n_z(d) = 0$. Približno rešitev zato iščemo z nastavkom

$$n_z(z) = a\sin(qz), \qquad q = \frac{\pi}{d}, \tag{9.114}$$

ki ni nič drugega kot prvi člen razvoja prave rešitve v Fourierevo vrsto. Ker je direktor enotski vektor, velja

$$n_x = \sqrt{1 - a^2\sin^2(qz)} \approx 1 - \frac{a^2}{2}\sin^2(qz). \tag{9.115}$$

Vzdolž smeri $x$ in $y$ se direktor ne spreminja, zato velja

$$\nabla \times \mathbf{n} = (0, \frac{dn_x}{dz}, 0) \tag{9.116}$$

in

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}) = (-n_z\frac{dn_x}{dz}, 0, n_x\frac{dn_x}{dz}). \tag{9.117}$$

Površinska gostota proste energije je tako

$$\begin{aligned} F_S &= \frac{1}{2}\int\left(K_1\left(\frac{dn_z}{dz}\right)^2 + K_3(n_x^2+n_z^2)\left(\frac{dn_x}{dz}\right)^2 - \varepsilon_0\varepsilon_a(n_zE)^2\right)dz = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^d \left(K_1q^2a^2\cos^2(qz) + K_3q^2a^4\sin^2(qz)\cos^2(qz) - \varepsilon_0\varepsilon_aE^2a^2\sin^2(qz)\right)z = \\ &= \frac{d}{4q}a^2\left(K_1q^2 + \frac{1}{4}K_3q^2a^2 - \varepsilon_0\varepsilon_aE^2\right). \end{aligned} \tag{9.118}$$

V našem primeru smo integral lahko izračunali, saj smo uporabili nastavek (enačba 9.114). Sicer bi morali uporabiti Euler-Lagrangeevo metodo za minimizacijo proste energije, ki jo poznamo iz variacijskega računa.

Zdaj lahko poiščemo amplitudo deformacije $a$, pri kateri je prosta energija najmanjša. Tedaj mora biti $a$ rešitev enačbe

$$2(K_1q^2 - \varepsilon_0\varepsilon_aE)a + K_3q^2a^3 = 0. \tag{9.119}$$

Rešitvi sta

$$a = 0 \tag{9.120}$$

in

$$a^2 = 2\frac{\varepsilon_0\varepsilon_aE^2 - K_1q^2}{K_3q^2}. \tag{9.121}$$

Pri majhnih poljih, ko je $\varepsilon_0\varepsilon_aE^2 < K_1q^2$, je fizikalno smiselna le prva rešitev, torej brez deformacije, pri velikih poljih pa je stabilna druga rešitev. Ko večamo polje, deformacija v sredini plasti hitro naraste, tako da se $\mathbf{n}$ postavi skoraj popolnoma v smer zunanjega polja. Tedaj naša rešitev seveda ni dobra, saj smo pri računu privzeli, da je $n_z \ll 1$. Prehodu iz nedeformiranega stanja v deformirano stanje pravimo Frederiksov prehod[9]. Na njem temelji preklapljanje optičnih prikazovalnikov na nematične tekoče kristale.

[9] Ruski fizik Vsevolod Konstantinovič Frederiks, tudi Fréedericksz, 1885–1944.

Izračunajmo še kritično jakost električnega polja, pri kateri pride do prehoda v deformirano fazo. To se zgodi pri

$$\varepsilon_0 \varepsilon_a E_c^2 - K_1 q^2 = 0 \tag{9.122}$$

oziroma

$$E_c = \frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_a}}. \tag{9.123}$$

Poglejmo še, kako narašča amplituda deformacije v bližini prehoda. Iz enačbe (9.121) sledi

$$a = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_a}{K_3 q^2}(E^2 - E_c^2)}. \tag{9.124}$$

Pogosto naredimo približek enakih konstant, kjer privzamemo, da so vse Frankove elastične konstante enake vrednosti. V tem približku je

$$a \approx \sqrt{\frac{2(E^2 - E_c^2)}{E_c^2}} \tag{9.125}$$

in amplituda korensko narašča s naraščajočim poljem (slika 9.18). Tak prehod je fazni prehod drugega reda, saj količina, ki opisuje prehod (amplituda deformacije $a$) zvezno preide iz vrednosti $a = 0$ v končno vrednost.

Slika 9.18: Kvalitativno obnašanje amplitude deformacije $a$ ob Frederiksovem prehodu

---

**Naloga 9.11.1** Izračunaj Frederiksov prehod v zasukani nematični celici (kot zasuka med zgornjo in spodnjo mejno ploskvijo naj bo $\pi/2$) in pokaži, da je kritično polje za prehod enako

$$E_c = \frac{\pi}{d}\sqrt{\frac{K_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_a}}\sqrt{1 + \frac{K_3 - 2K_2}{4K_1}}. \tag{9.126}$$

Namig: uporabi nastavek $\varphi = z\pi/2d$ in $\vartheta = a\sin(\pi z/d)$.

---

# 10. Optična vlakna

Moderna komunikacijska tehnologija zahteva vedno hitrejši prenos vedno večje količine podatkov. Navadne kovinske vodnike so zato v računalniških in telekomunikacijskih povezavah nadomestila optična vlakna, ki jih odlikujejo majhne izgube, neobčutljivost na elektromagnetne in medsebojne motnje ter zmožnost prenosa izjemno velike količine podatkov. V tem poglavju bomo opisali mehanizme prenosa podatkov po optičnih vodnikih in spoznali omejitve pri prenosu, predvsem disperzijo in izgube, ter načine, kako se z njimi spopadamo.

## 10.1 Planparalelni vodnik

### Geometrijski opis

Klasično pojasnimo delovanje optičnih vlaken s totalnim odbojem na meji med dvema dielektrikoma. Kadar prehaja svetloba iz snovi z večjim lomnim količnikom v sredstvo z manjšim lomnim količnikom, se pri vpadnih kotih, ki so večji od kritičnega kota, totalno odbije.

Slika 10.1: Klasična razlaga valovnega vodnika

Najpreprostejši optični vodnik je planparalelna plast dielektrika, ki je obdana s snovjo z manjšim lomnim količnikom (slika 10.1). Plasti z večjim lomnim količnikom ($n_1$) rečemo sredica, okoliški snovi z lomnim količnikom $n_2 < n_1$ pa plašč. Žarek potuje po vodniku, če je vpadni kot na mejo med sredico in plaščem $\vartheta$ večji od kota totalnega odboja $\vartheta_c$, za katerega velja

$$\sin \vartheta_c = \frac{n_2}{n_1}. \tag{10.1}$$

Obstaja torej največji vpadni kot $\alpha_{\max}$, pri katerem se vpadna svetloba ujame v vlakno. Z njim povezana je numerična odprtina (apertura) vlakna, ki jo izračunamo kot

$$NA = \sin \alpha_{\max} = n_1 \sin \beta_{\max} = n_1 \sin(\pi/2 - \vartheta_c) = n_1 \cos \vartheta_c = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_c}. \tag{10.2}$$

Upoštevajoč enačbo (10.1) numerično odprtino zapišemo kot

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \tag{10.3}$$

Razlika med lomnima količnikoma sredice in plašča je navadno majhna, tipično le nekaj stotink, zato je numerična odprtina optičnih vodnikov $NA \lesssim 0,1$. Kot, pod katerim lahko vpada svetloba v vodnik (ali vlakno), da se vanj ujame, je tako navadno le nekaj stopinj.

### Valovni opis

Za natančen opis širjenja svetlobe po vodnikih ali vlaknih[1], ki imajo polmer sredice od nekaj do nekaj deset mikrometrov, geometrijska optika ne zadošča. Rešiti moramo Maxwellove enačbe (enačbe 1.1–1.4) z ustreznimi robnimi pogoji (enačbe 1.9–1.12), kar je za cilindrična vlakna dokaj dolg in zapleten račun. Zato določimo najprej osnovne značilnosti valovanja, ki se širi po planparalelnem vodniku.

Glede na smer polarizacije električne poljske jakosti ločimo dva primera (slika 10.2). Če je smer električne poljske jakosti valovanja vzporedna z mejnima ploskvama (smer $y$), govorimo o transverzalnem električnem (TE) valovanju. V nasprotnem primeru, ko je z mejnima ploskvama vzporedna magnetna poljska jakost in leži električna poljska jakost v ravnini $xz$, govorimo o transverzalnem magnetnem (TM) valovanju.

Slika 10.2: Polarizaciji TE (levo) in TM (desno) valovanj v valovnem vodniku

Geometrijskemu žarku, ki pod kotom potuje po sredici in se na njeni meji odbija, ustreza v valovni sliki val, ki ima prečno komponento valovnega vektorja $k_x$ različno od nič. Ker je valovanje v prečni smeri omejeno na sredico končne debeline (naj bo debelina sredice enaka $a$), lahko $k_x$ zavzame le diskretne vrednosti. Te so v grobem približno enake $N\pi/a$, pri čemer je $N$ celo število. Pravimo, da vsak $N$ določa en rod valovanj v vodniku. Po drugi strani obstaja največji $k_x$, za katerega približno velja

$$k_{x\max} \approx k_0 \sin\alpha_{\max} = k_0 n_1 \cos\vartheta_c = k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \tag{10.4}$$

Število rešitev za $k_x$ je tako omejeno in točno določeno, odvisno pa je od razlike lomnih količnikov in od debeline vodnika oziroma polmera vlakna. V nadaljevanju bomo spoznali, da v optičnih vlaknih en rod vselej obstaja, za razliko od dielektričnih in kovinskih vodnikov, kakršne poznamo iz mikrovalovne tehnike, po katerih se pod določeno frekvenco valovanje ne more širiti. Enorodovna optična vlakna, torej vlakna, po katerih se širi en sam rod, imajo še posebej lepe lastnosti za uporabo v komunikacijskih sistemih.

Povejmo še nekaj o hitrosti valovanja v vodniku. Naj bo $\beta$ velikost komponente valovnega vektorja vzdolž smeri $z$ in odvisnost polja od koordinate vzdolž vodnika $\exp(i\beta z)$. Po Pitagorovem izreku velikost valovnega vektorja v sredici vodnika zapišemo kot

$$k_1 = n_1\frac{\omega}{c_0} = \sqrt{\beta^2 + k_x^2}. \tag{10.5}$$

Vidimo, da za dano vrednost $k_x$ zveza med valovnim številom $\beta$ in krožno frekvenco $\omega$ ni linearna. Fazna hitrost valovanja $v_f = \omega/\beta$ je tako odvisna od krožne frekvence in pride do disperzije. Grupna hitrost $v_g = d\omega/d\beta$ se zaradi nelinearne zveze med $\beta$ in $\omega$ razlikuje od fazne hitrosti in njena frekvenčna odvisnost ima pomembne posledice za uporabo vlaken pri prenosu podatkov. Več o tem bomo spoznali v nadaljevanju poglavja.

[1] Dogovorimo se, da besedo vlakno uporabljamo za cilindrične strukture, besedo vodnik pa za planparalelne in njim podobne strukture.

## 10.2 Račun lastnih rodov v planparalelnem vodniku

Poiščimo rešitve valovne enačbe v planparalelnem vodniku. To je preprost dvodimenzionalen model optičnega vlakna, ki je sestavljen iz plasti prozornega dielektrika z lomnim količnikom $n_1$ in plašča z lomnim količnikom $n_2$. Zaradi enostavnosti privzamemo, da je plašč na obeh straneh sredice enak. Sredica naj bo debela $a$, izhodišče koordinatnega sistema si izberemo na sredini plasti. Ločimo tri območja, kjer rešujemo valovno enačbo: območje II označuje sredico, območji I in III pa sta v plašču nad sredico oziroma pod njo.

Slika 10.3: K izračunu lastnih rodov v simetričnem planparalelnem vodniku

Krajevni del valovne enačbe, ki jo rešujemo, opisuje Helmholtzeva enačba (enačba 1.21)

$$\nabla^2\mathbf{E} + n^2(x)\,k_0^2\,\mathbf{E} = 0, \tag{10.6}$$

kjer je $k_0 = \omega/c$, $n(x)$ pa nezvezno spremeni vrednost ob prehodu iz sredice v plašč. Nastavek za rešitev naj bo oblike

$$\mathbf{E}(x,z) = \mathbf{e}\psi(x)\,e^{i\beta z}. \tag{10.7}$$

Omejimo se le na primer TE polarizacije (za izračun lastnih rodov TM polariziranega valovanja glej nalogo 10.2.1). Vstavimo nastavek (enačba 10.7) v enačbo (10.6) in zapišemo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(k_0^2 n_1^2 - \beta^2\right)\psi = 0 \qquad \text{v sredici oziroma območju II} \tag{10.8}$$

in

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(k_0^2 n_2^2 - \beta^2\right)\psi = 0 \qquad \text{v plašču oziroma območjih I in III.} \tag{10.9}$$

Iz zveze (enačba 10.5) sledi $k_0^2 n_1^2 - \beta^2 = k_x^2$, zato lahko rešitve prve enačbe zapišemo v obliki

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = C\cos(k_x x) + D\sin(k_x x), \tag{10.10}$$

rešitve v plašču pa so oblike

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(-\kappa x) + B\exp(\kappa x), \qquad \psi_{\mathrm{III}}(x) = F\exp(-\kappa x) + G\exp(\kappa x), \tag{10.11}$$

pri čemer smo vpeljali $\kappa^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2$.

Da valovanje ostane ujeto v vlakno, mora biti $\kappa$ realno število. Le tako namreč dosežemo eksponentno pojemanje električne poljske jakosti z oddaljenostjo od sredice, sicer je valovanje v vseh treh območjih oscilatorno in ni ujeto v vlakno.

Iz zahteve, da sta $k_x$ in $\kappa$ realna, sledi pogoj za valovno število $\beta$

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1. \tag{10.12}$$

Poleg tega zahteva po končnosti rešitve da pogoj, da je v območju I (pri $x > a/2$) koeficient $B = 0$, v območju III (pri $x < -a/2$) pa $F = 0$. Hitro ugotovimo, da so zaradi simetrije vlakna lastne rešitve lahko le sode ali lihe funkcije.

### Sode rešitve

Poglejmo najprej sode rešitve. V sredici bo različen od nič samo $C$, v območjih I in III pa bosta amplitudi enaki in $A = G$ (slika 10.4 a). Dobimo

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(-\kappa x), \tag{10.13}$$
$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = C\cos(k_x x), \tag{10.14}$$
$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = A\exp(\kappa x). \tag{10.15}$$

Zvezo med koeficientoma $A$ in $C$ določimo z upoštevanjem robnih pogojev. Na meji med sredico in plaščem morata biti tangencialni komponenti električne in magnetne poljske jakosti zvezni (enačbi 1.11 in 1.12). Iz tega izpeljemo pogoj, da se za TE valovanje na meji ohranja amplituda električne poljske jakosti. Pri $x = a/2$ zapišemo

$$A\exp(-\kappa a/2) = C\cos(k_x a/2). \tag{10.16}$$

Drugi pogoj sledi iz zveze $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}$, ki izhaja neposredno iz Maxwellove enačbe (1.2). Ker se na meji ohranja tangencialna komponenta $\mathbf{H}$, to je v tem primeru $H_z$, se posledično ohranja odvod električne poljske jakosti $dE_y/dx$. Pri $x = a/2$ velja

$$-A\kappa\exp(-\kappa a/2) = -Ck_x\sin(k_x a/2). \tag{10.17}$$

Enačbo za $k_x$ izpeljemo iz zahteve, da sta gornja robna pogoja hkrati izpolnjena. Izraza za robna pogoja delimo in dobimo sekularno enačbo za sode rešitve

$$\boxed{\frac{\kappa}{k_x} = \tan\frac{k_x a}{2}.} \tag{10.18}$$

Rešitve enačbe so diskretne in vsaki vrednosti $k_x$ ustreza en sodi rod oziroma sodi lastni način. Pri tem je zveza med $\kappa$ in $k_x$

$$\boxed{\kappa^2 + k_x^2 = k_0^2\left(n_1^2 - n_2^2\right).} \tag{10.19}$$

### Lihe rešitve

Oglejmo si še lihe rešitve v planparalelnem vodniku. V sredici je od nič različen le $D$, polji v plašču pa sta nasprotno enaki in $A = -G$ (slika 10.4 b). Sledi

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(-\kappa x), \tag{10.20}$$
$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = D\sin(k_x x), \tag{10.21}$$
$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = -A\exp(\kappa x). \tag{10.22}$$

Z upoštevanjem zveznosti električne poljske jakosti in njenega odvoda na meji med sredico in plaščem zapišemo robna pogoja pri $x = a/2$

$$A\exp(-\kappa a/2) = D\sin(k_x a/2) \tag{10.23}$$

in

$$-\kappa A\exp(-\kappa a/2) = Dk_x\cos(k_x a/2). \tag{10.24}$$

Ustrezna sekularna enačba za lihe rešitve je

$$\boxed{-\frac{k_x}{\kappa} = \tan\frac{k_x a}{2}.} \tag{10.25}$$

Slika 10.4: Prečne oblike električne poljske jakosti za sode (a) in lihe (b) rodove v simetričnem planparalelnem valovnem vodniku. Modra barva označuje sredico, beli del pa plašč vodnika.

Če ne prej, je bralec ob slikah (10.4) zagotovo opazil podobnost s kvantnim delcem, ujetim v končni enodimenzionalni potencialni jami. Svetloba, ujeta v vodnik ali vlakno, ustreza vezanim stanjem delca, numerična odprtina pa je tisti parameter, ki določa globino potencialne jame. Pri majhnih vrednostih obstaja samo ena rešitev za vezano stanje, pri globlji jami je rešitev več. Podobno kot v kvantni mehaniki tudi v tem primeru ena rešitev za vezano stanje vedno obstaja.

Sekularnih enačb za lastne rodove (enačbi 10.18 in 10.25) ne moremo rešiti analitično. Rešujemo jih numerično, zelo nazorna pa je tudi grafična predstavitev (slika 10.5). Enačbo za sode rodove (enačba 10.18) pomnožimo s $k_x a$ in narišemo funkcijo $k_x a \tan(k_x a/2)$ (črne črte). Enačbo za lihe rodove (enačba 10.25) preoblikujemo in narišemo $-k_x a \cot(k_x a/2)$ (rdeče črte). Nato pri danih parametrih $n_1$, $n_2$, $a$ in $k_0$ narišemo krožnico za $\kappa a$, ki sledi iz enačbe (10.19)

$$(\kappa a)^2 + (k_x a)^2 = k_0^2 a^2 \left(n_1^2 - n_2^2\right) = k_0^2 a^2 NA^2. \tag{10.26}$$

Število presečišč krivulj s krožnico določa število lastnih rodov v vodniku, lega presečišča pa pripadajočo vrednost $k_x$. Na sliki so narisane tri krožnice za tri različne debeline vodnika $a$ (pri istih lomnih količnikih in isti valovni dolžini svetlobe). V najtanjšem vodniku (zelena črta) je presečišče le eno in tak vodnik imenujemo enorodovni vodnik. Z večanjem debeline število lastnih rodov narašča in taki vodniki so večrodovni. Lastni rodovi v večrodovnem vodniku so izmenično sodi in lihi, začenši z osnovnim rodom, ki je vedno sod.

Slika 10.5: K izračunu $k_x$ v valovnem vodniku za TE polarizacijo. Število presečišč krožnice s krivuljami določa število lastnih rodov v vodniku. Zelena krožnica prestavlja enorodovni vodnik, turkizna dvorodovnega in modra petrodovnega s tremi sodimi in dvema lihima rešitvama.

S slike (10.5) razberemo še eno pomembno lastnost vodnikov. Ne glede na to, kako majhen je polmer krožnice, krožnica vedno seka črno krivuljo. To pomeni, da v še tako tankem vodniku vsaj ena rešitev za $k_x$ vedno obstaja in ta je vedno soda.

Ocenimo še število lastnih rodov v vodniku. S slike (10.5) vidimo, da je največja možna vrednost $k_x$ omejena s polmerom krožnice $k_0 aNA$, ki ga imenujemo tudi normirana frekvenca $V$. Do te vrednosti je po ena rešitev na vsak interval dolžine $\pi$, izmenično soda in liha, zato je celotno število rodov za eno polarizacijo

$$N \approx \frac{k_0 aNA}{\pi} = \frac{V}{\pi}. \tag{10.27}$$

Za enorodovni vodnik velja $V < \pi$ oziroma $a < \frac{\lambda}{2NA}$. Tipičen enorodovni vodnik ima tako debelino $a \lesssim 5$ µm, večrodovni vodnik z okoli 20 rodovi pa $a \sim 50$ µm.

**Naloga 10.2.1** Ponovi izračun za TM valovanje in pokaži, da sta sekularni enačbi enaki

$$\frac{\kappa}{k_x}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \tan\frac{k_x a}{2} \qquad \text{in} \qquad -\frac{k_x}{\kappa}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \tan\frac{k_x a}{2}. \tag{10.28}$$

Namig: Zapiši enačbe za magnetno poljsko jakost **H** in upoštevaj ustrezne robne pogoje.

Podoben račun lahko naredimo tudi za TM valovanje (glej nalogo 10.2.1). Zaradi drugačnih robnih pogojev se sekularni enačbi razlikujeta od tistih za TE polarizacijo. Razlika je v faktorju $(n_1/n_2)^2$, ki pa je v tipičnem vodniku zelo blizu ena. Zato se tudi rešitve za prečno komponento $k_x$ le malo razlikujejo. Bolj pomembna je ugotovitev, da je število dovoljenih rodov za TM polarizacijo enako številu dovoljenih rodov za TE polarizacijo, saj je največji $k_x$ v obeh primerih določen z enakim polmerom $V$. Vse lastne rodove, ki se širijo v danem vodniku, torej zajamemo z opisom TE sodih in lihih ter TM sodih in lihih rodov.

Ugotovili smo, da je električna poljska jakost tudi izven sredice vodnika različna od nič. Poglejmo še, kako je z energijskim tokom. Čeprav se velika večina pretaka po sredici, delež, ki se pretaka po plašču, ni vedno zanemarljiv. To posebej velja za višje rodove. Delež energijskega toka, ki se pretaka po sredici, izračunamo z integralom

$$\boxed{\Gamma = \frac{\int_{-a/2}^{a/2} j\,dS}{\int_{-\infty}^{\infty} j\,dS}.} \tag{10.29}$$

**Naloga 10.2.2** Pokaži, da je razmerje med energijskim tokom $P_p$, ki se pretaka po plašču, in energijskim tokom, ki se pretaka po sredici vodnika $P_s$, za sode rodove enako

$$\frac{P_p}{P_s} = \frac{n_2}{n_1}\frac{2k_x}{\kappa}\frac{\cos^2(k_x a/2)}{k_x a + \sin(k_x a)}, \tag{10.30}$$

in za lihe rodove

$$\frac{P_p}{P_s} = \frac{n_2}{n_1}\frac{2k_x}{\kappa}\frac{\sin^2(k_x a/2)}{k_x a - \sin(k_x a)}. \tag{10.31}$$

## 10.3 Cilindrično vlakno

Do zdaj smo obravnavali ravninski valovni vodnik. V praksi svetlobo navadno usmerjamo po optičnih vlaknih, ki imajo cilindrično geometrijo. Najpreprostejši primer je cilindrično vlakno, v katerem je lomni količnik cilindrične sredice konstanten in nekoliko večji od lomnega količnika plašča. Navadno je $n_1 - n_2 \sim 0,001$. Pogosto se uporablja bolj zapletene konstrukcije, pri katerih se lomni količnik sredice spreminja z oddaljenostjo od osi. Z zapletenejšo geometrijo namreč zmanjšamo disperzijo v vlaknu in s tem povečamo zmogljivost prenašanja velike količine podatkov na dolge razdalje – najzmogljivejša komercialna vlakna zmorejo prenos več deset terabitov na sekundo[2].

Račun za širjenje svetlobe po cilindričnem vlaknu s homogeno sredico je podoben kot za planparalelni vodnik, vendar je precej bolj zapleten. V cilindrični geometriji namreč ni delitve na čiste električne in magnetne transverzalne valove, saj so robni pogoji sklopljeni. Na splošno se rešitve izražajo v obliki kombinacij Besslovih funkcij. Izkaže se, da je osnovni rod, ki se širi po cilindričnem vlaknu, po obliki zelo podoben osnovnemu Gaussovemu snopu, zato je sklopitev laserskih snopov v optična vlakna zelo učinkovita. Tudi v cilindričnih vlaknih obstaja končno število lastnih rodov, ki je odvisno od polmera sredice in lomnih količnikov sredice in plašča. Če je polmer zadosti majhen (razlika lomnih količnikov navadno je), obstaja le en lastni rod in optično vlakno je enorodovno. Sicer je vlakno večrodovno.

### Valovna enačba v cilindričnem vlaknu

Točen izračun za rodove v cilindričnem vlaknu presega okvire te knjige, zato si oglejmo le izhodiščne enačbe in rešitve.[3] Za jakost električnega in magnetnega polja velja Helmholtzeva enačba (enačba 1.21)

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n^2(r)\, k_0^2 \mathbf{E} = 0, \tag{10.32}$$

pri čemer je $n(r < a) = n_1$ lomni količnik sredice in $n(r > a) = n_2$ lomni količnik plašča, ki je dovolj debel, da njegova debelina ne vpliva na potovanje svetlobe. $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$ sta vektorja in imata po tri komponente, ki pa so med seboj odvisne. Izračunajmo naprej $E_z$ z nastavkom

$$E_z = R(r) e^{i\nu\varphi} e^{i\beta z}, \tag{10.33}$$

pri čemer je $\nu$ celo število zaradi zahteve po enoličnosti rešitve pri spremembi kota za $2\pi$. Za $R(r)$ v sredici vlakna velja enačba

$$r^2 R(r)'' + rR(r)' + (k_s^2 r^2 - \nu^2) R(r) = 0, \tag{10.34}$$

kjer je

$$k_s^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2, \tag{10.35}$$

in v plašču

$$r^2 R(r)'' + rR(r)' + (-\kappa^2 r^2 - \nu^2) R(r) = 0, \tag{10.36}$$

kjer je

$$\kappa^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2. \tag{10.37}$$

[2] Za doprinos k razvoju in uporabi optičnih vlaken je leta 2009 Charles K. Kao prejel Nobelovo nagrado.

[3] Točen izračun lahko bralec poišče npr. v C. C. Davis, *Lasers and Electro-optics*, Cambridge University Press.

V enačbah (10.34) in (10.36) prepoznamo Besslovo diferencialno enačbo. Upoštevajoč le funkcije, ki na izbranem območju ne divergirajo, zapišemo rešitve v sredici kot

$$E_z(r,\varphi,z) = AJ_\nu(k_s r)\sin(\nu\varphi)e^{i\beta z} \quad \text{in} \quad H_z(r,\varphi,z) = BJ_\nu(k_s r)\cos(\nu\varphi)e^{i\beta z}. \tag{10.38}$$

Podobno zapišemo tudi rešitve v plašču

$$E_z(r,\varphi,z) = CK_\nu(\kappa r)\sin(\nu\varphi)e^{i\beta z} \quad \text{in} \quad H_z(r,\varphi,z) = DK_\nu(\kappa r)\cos(\nu\varphi)e^{i\beta z}. \tag{10.39}$$

Pri tem so $A,B,C$ in $D$ konstante, $J_\nu(x)$ je Besslova funkcija prve vrste reda $\nu$, $K_\nu(x)$ pa je modificirana Besslova funkcija druge vrste reda $\nu$ (slika 10.6).

Slika 10.6: Besslove funkcije: (a) Besslove funkcije prve vrste $J_0(x)$ (črna), $J_1(x)$ (rdeča) in $J_2(x)$ (modra), ki predstavljajo oblike rešitev v sredici vlakna, in (b) modificirane Besslove funkcije druge vrste $K_0(x)$ (črna), $K_1(x)$ (rdeča) in $K_2(x)$ (modra), ki prestavljajo rešitev v plašču vlakna.

Ko enkrat poznamo komponenti $E_z$ in $H_z$, lahko z uporabo Maxwellovih enačb izračunamo še preostale komponente. Nato z upoštevanjem robnih pogojev zapišemo štiri enačbe za pet neznank ($A,B,C,D$ in $\beta$), tako da ostane ena spremenljivka (amplituda polja) prosta. Na ta način izračunamo celotni jakosti električnega in magnetnega polja v vlaknu in podobno kot pri valovnem vodniku tudi tukaj zapišemo sekularno enačbo, ki jo moramo rešiti numerično. Pri vsakem $\nu$ obstaja več rešitev, zato lastne rodove označujemo s parom indeksov $\nu$ in $m$, npr. $\mathrm{TE}_{01}$ ali $\mathrm{HE}_{31}$.

### TE in TM rodovi

Najprej si oglejmo rešitve, pri katerih je $\nu = 0$ in so tako neodvisne od kota $\varphi$. V klasični sliki so to žarki, ki potujejo po osi vlakna. Iz robnih pogojev sledi, da gre za transverzalne TE rodove, za katere velja $E_z = 0$, $E_r = 0$ in $E_\varphi \propto J_1(k_s r)$. Električno poljsko jakost za TE zapišemo kot

$$\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_\varphi J_1(k_s r). \tag{10.40}$$

Podobno lahko prepoznamo tudi TM rodove, pri katerih je $H_z = 0$, $H_r = 0$ in $H_\varphi \propto J_1(k_s r)$. Ustrezna električna poljska jakost za TM rodove je

$$\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_r J_1(k_s r). \tag{10.41}$$

Amplitudi električne poljske jakosti sta za TE in TM rodove enaki, zato sta enaki tudi sliki gostote svetlobnega toka (slika 10.7). Opazimo, da je v osi vlakna gostota svetlobnega toka enaka nič, zato sklepamo, da to niso osnovni načini širjenja svetlobe po cilindričnem vlaknu.

Slika 10.7: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za rodova $TE_{01}$ in $TM_{01}$

Podobno kot smo zapisali sekularno enačbo v valovnem vodniku (enačbi 10.18 in 10.25), tudi tukaj zapišemo enačbo za dovoljene vrednosti $k_s$. Ob približku, da se lomna količnika sredice in plašča le malo razlikujeta, je poenostavljena enačba za TE valovanje

$$-k_s a \frac{J_0(k_s a)}{J_1(k_s a)} = \kappa a \frac{K_0(\kappa a)}{K_1(\kappa a)}, \tag{10.42}$$

pri čemer velja zveza $\kappa^2 + k_s^2 = (NA)^2 k_0^2$. Zaporedne rešitve enačbe ustrezajo rodovom $TE_{0m}$. Če želimo izračunati še valovne vektorje za rodove $TM_{0m}$, moramo levo stran enačbe (10.42) pomnožiti z $(n_1/n_2)^2$. Ker je ta faktor približno enak ena, se rešitve enačb med seboj le malo razlikujejo.

Slika 10.8: K izračunu prečnih komponent valovnega vektorja $k_s$ v cilindričnem vlaknu za TE polarizacijo. Leva stran sekularne enačbe je narisana s črno, desna stran pa za tri različne vrednosti parametra $V = k_0 a NA$.

Zapisano sekularno enačbo rešujemo numerično, lahko pa se je lotimo grafično in na sliki (10.8) poiščemo presečišča krivulj. Na sliki je leva stran enačbe prikazana s črno barvo, desna pa za tri različne vrednosti $V = k_0 a NA$. Pri velikem $V$ (modra črta) ima sistem tri rešitve, pri srednjem $V$ (turkizna črta) eno rešitev, pri majhnem $V$ (zelena črta) pa se krivulji ne sekata. To pomeni, da pri dovolj majhnem polmeru vlakna $a$ TE rod ne obstaja.

Zapišimo to ugotovitev še matematično. Desna stran enačbe da realne rešitve za $k_s a \leq V$. Po drugi strani pa leva stran enačbe postane pozitivna šele pri $J_0(k_s a) = 0$, to je pri $k_s a = 2,405$. Da ima tak sistem vsaj eno rešitev, mora veljati $V > 2,405$. Polmer, pri katerem se $TE_{01}$ (ali $TM_{01}$) valovanje z dano valovno dolžino sploh širi po vlaknu, je torej navzdol omejen z

$$a \geq \frac{2,405}{k_0 NA}. \tag{10.43}$$

### Hibridni HE in EH rodovi

Poglejmo zdaj rešitve, pri katerih je $\nu \neq 0$. V tem primeru je vseh šest komponent električnega in magnetnega polja valovanja različnih od nič in vsi rodovi imajo tudi komponento v smeri $z$. Take rodove imenujemo hibridni rodovi in jih označimo s HE, če je $E_z$ razmeroma velik ali vsaj primerljiv z $E_r$ in $E_\varphi$, oziroma z EH, če je $H_z$ po velikosti primerljiv s $H_r$ in $H_\varphi$ ali večji od njiju.

Sekularna enačba za hibridne rodove je precej bolj zapletena in je ne bomo zapisali. Oglejmo si le njihovo obliko (slika 10.9). Najpomembnejši hibridni rod je $HE_{11}$, ki je sorazmeren z $J_0(k_s r)$ in zato v središču različen od nič. To je osnovni rod, za katerega rešitev sekularne enačbe vedno obstaja in se zato širi po še tako tankem vlaknu.

Slika 10.9: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za rodove $HE_{11}$, $HE_{21}$, $HE_{31}$ in $EH_{11}$

Po obliki je osnovni $HE_{11}$ rod zelo podoben Gaussovemu profilu $\exp(-r^2/w^2)$, zato ga lahko razmeroma dobro opišemo z Gaussovim približkom. Pri tem efektivni polmer snopa $w$ izračunamo po Marcusejevi formuli[4]

$$w = (0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6})\, a, \tag{10.44}$$

pri čemer je $V = k_0 a NA$. Podobnost profila osnovnega $HE_{11}$ roda z Gaussovo funkcijo omogoča zelo dobro sklopitev Gaussovih snopov, ki izhajajo iz laserja, v cilindrična vlakna.

[4] D. Marcuse, Bell Syst. Tech. J. 56, 703 (1977).

Na sliki (10.9) je poleg osnovnega $HE_{11}$ roda še nekaj primerov višjih rodov. Opazimo, da imajo vsi rodovi, razen osnovnega, v osi vlakna minimum. Poleg tega opazimo tudi podobnost med oblikami posameznih rodov, do katere pride zaradi majhne razlike med lomnima količnikoma sredice in plašča ($n_1 \approx n_2$). V takem primeru se sekularne enačbe poenostavijo, nekateri rodovi so med seboj degenerirani in dajo enako rešitev. Poleg rodov z enako obliko in različno polarizacijo so tako med seboj degenerirani še $HE_{\nu+1,m}$ in $EH_{\nu-1,m}$ rodovi. Degenerirane rodove lahko združimo v linearne kombinacije teh valov in nastanejo pretežno linearno polarizirani LP rodovi.

### LP rodovi

Za praktično uporabo so najpomembnejši linearno polarizirani (LP) rodovi. Taki rodovi niso točne rešitve valovne enačbe v cilindrični geometriji, ampak jih zapišemo kot linearno kombinacijo lastnih rodov, ki so zaradi majhne razlike med lomnima količnikoma sredice in plašča degenerirani. Tudi te rodove označimo z dvema indeksoma: prvi določa število azimutalnih vozlov, drugi pa število radialnih vrhov. Poglejmo nekaj primerov (slika 10.10).

Osnovni $LP_{01}$ je kar približno enak osnovnemu $HE_{11}$ rodu. Električna poljska jakost je

$$\mathbf{E}_{\mathrm{LP01}} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_0(k_s a), \tag{10.45}$$

saj ima dve možni smeri polarizacije. Na splošno so $LP_{0m}$ zelo podobni rodovom $HE_{1m}$.

Višje rodove, na primer $LP_{11}$ sestavimo kot linearno kombinacijo $TE_{01}$ ali $TM_{01}$ in $HE_{21}$. Električna poljska jakost v $LP_{11}$ je tako

$$\mathbf{E}_{\mathrm{LP11}} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_1(k_s a) \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix}, \tag{10.46}$$

kar opisuje štiri različne oblike rodov $LP_{11}$.

Tudi $LP_{21}$ rodovi, ki nastanejo kot kombinacija $HE_{31}$ in $EH_{11}$ rodov, imajo štiri oblike

$$\mathbf{E}_{\mathrm{LP21}} \propto \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{Bmatrix} J_2(k_s a) \begin{Bmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{Bmatrix}. \tag{10.47}$$

Linearno polarizirani LP rodovi imajo precejšnjo uporabno vrednost. To so namreč rodovi, ki jih v vlaknu vzbudimo, ko nanj posvetimo s polarizirano lasersko svetlobo. Zavedati pa se moramo, da to niso lastni rodovi vlakna, ampak njihove linearne kombinacije, ki po vlaknu potujejo z malenkost različnimi hitrostmi. Polarizacija svetlobe se zato vzdolž vlakna ne ohranja povsem.

★ Število rodov v večrodovnem cilindričnem vlaknu pri izbrani normirani frekvenci $V = k_0 a NA$ lahko približno ocenimo z uporabo asimptotičnega razvoja Besslovih funkcij za velike argumente. Približna ocena vključuje vse dovoljene rešitve pri vsaki vrednosti $\nu$ in dve polarizaciji. To vodi do rezultata

$$N = \frac{4V^2}{\pi^2}. \tag{10.48}$$

V vlaknu s polmerom sredice 20 μm in numerično aperturo 0,2 se tako pri valovni dolžini 1 μm lahko širi 256 rodov.

Slika 10.10: Intenziteta in smer električnega polja v vlaknu za približno linearne rodove $LP_{01}$, $LP_{02}$, $LP_{11}$ in $LP_{21}$.

### Cilindrično vlakno s paraboličnim profilom lomnega količnika

Čeprav je račun lastnih načinov v cilindričnem vlaknu zapleten, lahko razmeroma enostavno poiščemo rešitve za vlakno, v katerem je dielektrična konstanta kvadratna funkcija radialne koordinate $r$.

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_1 - Cr^2, \tag{10.49}$$

pri čemer je sprememba navadno majhna. Zapišemo še enačbo z lomnimi količniki in vpeljemo brezdimenzijski parameter $\Delta$

$$n^2\,(r < a) = n_1^2 - \Delta^2 \frac{r^2}{a^2}, \tag{10.50}$$

pri čemer $a$ označuje polmer sredice vlakna. Enačbo lahko tudi razvijemo za majhno razliko $\Delta$ in za vse smiselne vrednosti $r$ ima tudi lomni količnik parabolični profil. Parabolična sredica je seveda omejena, okoli nje pa je plašč s konstantnim lomnim količnikom $n_2 \approx n_1 - \Delta^2/2n_1$ (slika 10.11). Tipičen polmer sredice $a$ je nekaj deset mikrometrov, plašča pa približno petkrat toliko.

Slika 10.11: Parabolični profil lomnega količnika sredice zmanjša disperzijo v vlaknu. Plašč je praviloma bistveno debelejši od sredice vlakna.

Električno poljsko jakost za izbrano polarizacijo zapišemo v obliki

$$E = E_0\,\psi(x,y)\,e^{i\beta z - i\omega t}. \tag{10.51}$$

Pri tem smo zanemarili, da zaradi odvisnosti od prečnih koordinat in pogoja $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ polje ne more imeti povsod iste smeri; za bolj natančen račun bi morali zapisati enačbo za vektorsko polje. Vstavimo približni nastavek (enačba 10.51) in krajevno odvisnost lomnega količnika (enačba 10.50) v valovno enačbo (enačba 1.13)

$$\nabla_\perp^2 \psi + \left[ k_0^2 \left( n_1^2 - \Delta^2 \frac{r^2}{a^2} \right) - \beta^2 \right] \psi = 0. \tag{10.52}$$

Rešitve lahko zapišemo v obliki

$$\psi(x,y) = X(x)Y(y), \tag{10.53}$$

od koder sledita dve neodvisni enačbi

$$X'' - \frac{k_0^2\Delta^2}{a^2} X x^2 - \lambda_1 X = 0 \qquad \text{in} \qquad Y'' - \frac{k_0^2\Delta^2}{a^2} Y y^2 - \lambda_2 Y = 0, \tag{10.54}$$

pri čemer sta $\lambda_1$ in $\lambda_2$ konstanti. Opazimo, da sta enačbi popolnoma enaki enačbama za krajevni del lastnih funkcij harmonskega oscilatorja v kvantni mehaniki. Rešitev posamezne enačbe je tako produkt Gaussove in Hermitove funkcije

$$X_n(x) = e^{-\xi^2 x^2/2} H_n(\xi x), \tag{10.55}$$

pri čemer je $\xi = \sqrt{k_0\Delta/a}$.

**Naloga 10.3.1** Uporabi nastavek (enačba 10.55) in pokaži, da reši enačbo (10.54). Pri tem si pomagaj z diferencialno enačbo za Hermitove polinome

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n\right) H_n(x) = 0. \tag{10.56}$$

Lastne vrednosti enačbe so oblike

$$\beta_{mn}^2 = n_1^2 k_0^2 \left(1 - \frac{2\Delta}{k_0 n_1^2 a}(m+n+1)\right). \tag{10.57}$$

Drugi člen v oklepaju je navadno zelo majhen, zato lahko izraz razvijemo in

$$\beta_{mn} = n_1 k_0 \left(1 - \frac{\Delta}{k_0 n_1^2 a}(m+n+1)\right) = n_1 k_0 - \frac{\Delta(m+n+1)}{n_1 a}. \tag{10.58}$$

Ob privzetku, da je parameter $\Delta$ neodvisen od krožne frekvence, je grupna hitrost

$$v_g = \left(\frac{d\beta_{mn}}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c_0}{n_1} \tag{10.59}$$

in torej enaka za vse rodove. To je pomembna značilnost vlakna s paraboličnim profilom lomnega količnika. V dejanskem vlaknu je seveda taka odvisnost mogoča le v omejenem območju sredice, zato je tudi gornja analiza le približna in velja dobro za tiste rodove, ki se ne raztezajo dosti izven sredice.

Neodvisnost grupne hitrosti od roda je praktično zelo pomembna. Grupna hitrost namreč določa čas potovanja svetlobnega sunka, ki lahko predstavlja en bit informacije. Če se po vlaknu širi več rodov z različnimi grupnimi hitrostmi, se sunek po prehodu skozi vlakno razširi, kar – kot bomo podrobneje videli v naslednjem razdelku – omejuje uporabno dolžino vlakna. Temu se sicer lahko izognemo z uporabo enorodovnih vlaken, ki pa so dražja, poleg tega morata divergenca in polmer svetlobnega snopa natančno ustrezati značilnostim enorodovnega vlakna, da se izognemo izgubam. Zato se za krajše povezave (do nekaj 100 m) uporabljajo večrodovna vlakna, ki imajo sredico s približno paraboličnim profilom lomnega količnika.

## 10.4 Disperzija

Pri prenosu velike količine podatkov na daljavo je zelo pomembno, da se oblika svetlobnih sunkov, ki prenašajo informacijo, čim bolj ohranja. Na obliko sunka močno vpliva disperzija, to je odvisnost fazne in grupne (skupinske) hitrosti valovanja od krožne frekvence. Zaradi disperzije se kratki sunki, ki potujejo po vlaknu, podaljšajo in tako omejujejo količino informacije, ki jo lahko prenašamo po vlaknu dane dolžine.

Slika 10.12: Zaradi disperzije se dolžina sunkov svetlobe, ki potujejo skozi vlakno, močno poveča, zato jih na izhodu iz vlakna ne moremo več ločiti.

Pri potovanju svetlobe po optičnih vlaknih poznamo tri vrste disperzije: rodovno, materialno in valovodno. Rodovna disperzija, ki je daleč največja, je posledica dejstva, da se različni rodovi po vlaknu širijo z različnimi hitrostmi. Do materialne disperzije pride zaradi odvisnosti lomnega količnika vlakna od valovne dolžine svetlobe. Valovodna disperzija pa se pojavi zaradi nelinearne zveze med valovnim številom $\beta$ in krožno frekvenco valovanja. Poglejmo si disperzije podrobneje.

### Rodovna disperzija

Na primeru planparalelnega vodnika smo pokazali, da vsaki rešitvi sekularnih enačb (enačbi 10.18 in 10.25) ustreza en lastni rod v vlaknu. Ker se vrednosti $k_x$ za različne rodove med seboj razlikujejo in so posledično vrednosti $\beta$ za vsak rod drugačne, se posamezni rodovi po vlaknu širijo z različnimi hitrostmi. Kratek sunek svetlobe, sestavljen iz več različnih rodov, se tako po prehodu skozi vlakno podaljša. Izračunajmo razliko med časom, ki ga za širjenje po vlaknu dane dolžine potrebuje osnovni rod, in časom, ki ga za isto razdaljo potrebuje zadnji še dovoljeni rod.

Osnovni rod določa prva rešitev sekularne enačbe in je zato pripadajoča vrednost $k_x$ zelo majhna oziroma v približku $k_s \approx 0$. Ustrezno valovno število je po enačbi

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 n_1^2 - k_x(\omega)^2} \tag{10.60}$$

kar približno enako $\beta_0 \approx k_0 n_1$. Za zadnji še dovoljeni rod velja $k_x a \approx V$ in $\beta_N \approx k_0 n_2$, pri čemer je $n_2$ lomni količnik plašča. Zapišemo še grupno hitrost, s katero potujejo sunki svetlobe po vlaknu

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}. \tag{10.61}$$

Za prehod vlakna z dolžino $L$ potrebuje osnovni rod

$$t_0 = \frac{L}{v_{g0}} = L\frac{d\beta_0}{d\omega} = L\frac{n_1}{c_0}, \tag{10.62}$$

zadnji rod pa

$$t_N = \frac{L}{v_{gN}} = L\frac{d\beta_N}{d\omega} = L\frac{n_2}{c_0}. \tag{10.63}$$

Podaljšanje sunka zaradi rodovne disperzije je potem

$$\tau \approx \frac{L}{c_0}(n_1 - n_2). \tag{10.64}$$

Količina podatkov, ki jo lahko prenašamo po vlaknu, je kar približno obratno sorazmerna z dolžino izhodnih sunkov svetlobe. Za 1 km dolgo vlakno z razliko lomnih količnikov $\Delta n = 0,05$ je tako največja frekvenca modulacije okoli 10 MHz, kar je znatno premalo za današnje telekomunikacijske potrebe. Čeprav lahko disperzijo zmanjšamo s paraboličnim profilom lomnega količnika, so večrodovna vlakna za prenos podatkov na dolge razdalje praktično neuporabna.

★ Med rodovno disperzijo uvrščamo tudi polarizacijsko disperzijo, do katere pride zaradi različnih hitrosti valovanj z različnima polarizacijama. V idealnem cilindričnem vlaknu potujeta obe polarizaciji z enako hitrostjo. V realnem vlaknu pa pride na nečistočah in asimetrijah v vlaknu do različnih hitrosti za različni polarizaciji. Ker so nečistoče slučajno in neodvisno razporejene, tako disperzijo zelo težko odpravimo.

### Materialna disperzija

Optična vlakna so navadno narejena iz stekla, katerega lomni količnik je odvisen od valovne dolžine svetlobe. Zaradi tako imenovane materialne disperzije različne spektralne komponente svetlobnega sunka po vlaknu potujejo z različnimi hitrostmi in sunek se po prehodu skozi vlakno podaljša. Pri obravnavi materialne disperzije se omejimo na enorodovna vlakna, v katerih rodovne disperzije ni.

Ker je sunek svetlobe končno dolg, je končna tudi njegova spektralna širina $\Delta\lambda = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$. Dolžino sunka $\tau$ po prehodu skozi vlakno dolžine $L$ približno zapišemo kot

$$\tau = \frac{dt}{d\lambda}\Delta\lambda = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{L}{v_g}\right) = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}\left(L\frac{d\beta}{d\omega}\right). \tag{10.65}$$

Za enorodovno vlakno velja $k_x \approx 0$ in $\beta \approx n_1\omega/c_0$, pri čemer valovodne disperzije zaenkrat ne upoštevamo. Velja

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{n_1}{c_0} + \frac{\omega}{c_0}\frac{dn_1}{d\omega} = \frac{n_1}{c_0} - \frac{\lambda}{c_0}\frac{dn_1}{d\lambda}, \tag{10.66}$$

od koder sledi

$$\tau = \Delta\lambda L\left(-\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2n_1}{d\lambda^2}\right). \tag{10.67}$$

Če vpeljemo $D_m$ kot koeficient materialne disperzije

$$D_m = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2n_1}{d\lambda^2}, \tag{10.68}$$

zapišemo dolžino sunka po prehodu skozi vlakno kot

$$\tau = |D_m| L \Delta\lambda. \tag{10.69}$$

Koeficient disperzije navadno izrazimo v enotah ps/nm km, njegova vrednost pa je lahko pozitivna ali negativna, zato smo v končnem izrazu za dolžino sunka dodali absolutno vrednost. V snoveh, ki jih uporabljamo za izdelavo optičnih vlaken, je $D_m$ reda 10 ps/nm km, lahko pa seže tudi do več 100 ps/nm km, odvisno seveda od valovne dolžine in izbrane snovi.

Materialno disperzijo lahko zmanjšamo na več načinov. Lahko uporabimo čim bolj enobarven vir svetlobe, da zmanjšamo $\Delta\lambda$. Za izbrano snov lahko celo izberemo valovno dolžino, pri kateri je koeficient materialne disperzije enak nič. Za $SiO_2$ je to pri okoli 1300–1500 nm, odvisno od dopiranja stekla. Še najbolj uporabna je rešitev, pri kateri z materialno disperzijo izničimo vpliv drugih disperzij in na ta način zmanjšamo skupno disperzijo v vlaknu.

### Valovodna disperzija

Spomnimo se, da v optičnem vodniku velja nelinearna zveza med prečno ($k_x$) in vzdolžno ($\beta$) komponento valovnega vektorja (enačba 10.60). Pri tem $k_x$ izračunamo numerično iz sekularne enačbe, rešitev pa je odvisna od valovne dolžine svetlobe. Tudi v cilindričnih vlaknih je valovno število $\beta$ nelinearna funkcija krožne frekvence, zato pride do disperzije. Izhajamo iz zveze (enačba 10.65)

$$\tau = \frac{dt}{d\lambda}\Delta\lambda = \Delta\lambda \frac{d}{d\lambda}\left(L\frac{d\beta}{d\omega}\right). \tag{10.70}$$

Upoštevamo zvezo med valovno dolžino in krožno frekvenco in za podaljšanje začetnega kratkega sunka dobimo

$$\tau = -\frac{\lambda^2}{2\pi c_0}\frac{d^2\beta}{d\lambda^2}L\Delta\lambda. \tag{10.71}$$

Ko vpeljemo $D_v$ kot koeficient valovodne disperzije

$$D_v = -\frac{\lambda^2}{2\pi c_0}\frac{d^2\beta}{d\lambda^2}, \tag{10.72}$$

se izraz za dolžino sunka poenostavi v

$$\tau = |D_v| L\Delta\lambda. \tag{10.73}$$

Koeficient valovodne disperzije je praviloma najmanjši, reda 1–10 ps/nm km. Znaten postane v enorodovnih vlaknih v območju, kjer je materialna disperzija zelo majhna ali celo enaka nič. V vlaknih s homogeno sredico se valovodni disperziji ne moremo izogniti, lahko pa jo pri dani valovni dolžini izničimo z materialno (slika 10.13).

Kljub temu zaradi končne spektralne širine sunka svetlobe disperzije v optičnem vlaknu ne moremo nikoli povsem odpraviti. Pri celotni disperziji 5 ps/nm km in spektralni širini 1 nm znaša v 100 km dolgem vlaknu najvišja frekvenca modulacije vhodnega signala, ki ga na izhodu še lahko razločimo, okoli 2 GHz. V nadaljevanju bomo videli, da je pri prenosu podatkov v vlaknih poglavitni omejujoči faktor ravno disperzija in ne absorpcija.

Slika 10.13: Odvisnost koeficientov disperzije od valovne dolžine v $SiO_2$ vlaknu. $D_m$ je koeficient materialne disperzije, $D_v$ valovodne, $D$ pa je vsota obeh. Pri valovni dolžini okoli 1450 nm se materialna in valovodna disperzija odštejeta in skupna disperzija je praktično enaka nič.

★ Na valovodno disperzijo je mogoče vplivati tudi s konstrukcijo vlakna. Pokazali smo že, da v idealnem primeru v vlaknu s paraboličnim profilom lomnega količnika disperzije ni. V praksi je sredica sestavljena iz več plasti z različnimi lomnimi količniki in različnimi debelinami, s čimer se prispevek valovodne disperzije spremeni. Na ta način lahko položaj ničle celotne disperzije premaknemo k valovni dolžini izvora oziroma k valovni dolžini, pri kateri je v vlaknu najmanj absorpcije in izgub.

## 10.5 *Potovanje kratkega sunka po enorodovnem vlaknu

### Podaljšanje sunka zaradi disperzije

Poglejmo si podrobneje, kako po enorodovnem vlaknu ali drugem sredstvu z disperzijo potuje kratek sunek valovanja z dano začetno obliko. Sunek zapišimo kot

$$E(x,y,z,t) = \psi(x,y)\, a(z,t), \tag{10.74}$$

kjer je $\psi(x,y)$ lastna rešitev prečnega dela valovne enačbe, ki določa zvezo $\beta(\omega)$. Funkcija $a(z,t)$ opisuje obliko sunka v smeri $z$ in njegovo širjenje. Razvijmo jo pri $z = 0$ po ravnih valovih z ustreznimi amplitudnimi faktorji

$$a(0,t) = \int \tilde{A}(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega. \tag{10.75}$$

Ko sunek potuje vzdolž osi $z$, moramo vsaki frekvenčni komponenti pripisati ustrezen fazni faktor $i\beta(\omega)z$. Tako velja

$$a(z,t) = \int \tilde{A}(\omega)\, e^{i\beta(\omega)z - i\omega t} d\omega. \tag{10.76}$$

Osnovni sunek naj bo približno monokromatičen s frekvenco $\omega_0$, kar pomeni, da je mnogo daljši od optične periode. Potem lahko lahko $\beta(\omega)$ razvijemo okoli $\omega_0$, pri čemer vpeljemo razliko frekvenc $\Omega = \omega - \omega_0$

$$\beta(\omega_0 + \Omega) \approx \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}\Omega + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\Omega^2. \tag{10.77}$$

Enačbo (10.76) tako prepišemo v

$$a(z,t) = \int \tilde{A}(\Omega)\, e^{i\beta(\omega_0+\Omega)z - i(\omega_0+\Omega)t} d\Omega \tag{10.78}$$

$$= e^{i\beta(\omega_0)z - i\omega_0 t} A(z,t). \tag{10.79}$$

Funkcija $A(z,t)$ očitno predstavlja prostorsko in časovno odvisnost ovojnice sunka. Z upoštevanjem razvoja (enačba 10.77) jo zapišemo kot

$$A(z,t) = \int \tilde{A}(\Omega) \exp\left( i\frac{d\beta}{d\omega}\Omega z + \frac{i}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\Omega^2 z - i\Omega t \right) d\Omega. \tag{10.80}$$

Vpeljemo še grupno hitrost $v_g = d\omega/d\beta$ in ovojnico zapišemo kot

$$A(z,t) = \int \tilde{A}(\Omega) \exp\left( i\Omega\left(\frac{z}{v_g} - t\right) + \frac{i}{2}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)\Omega^2 z \right) d\Omega. \tag{10.81}$$

V primeru, da je grupna hitrost neodvisna od frekvence, da torej ni disperzije grupne hitrosti, je drugi člen v eksponentu enak nič. Takrat je ovojnica enaka

$$A(z,t) = \int \tilde{A}(\Omega)\, e^{i\Omega\left(\frac{z}{v_g} - t\right)} d\Omega = A\left(0, t - \frac{z}{v_g}\right), \tag{10.82}$$

kar je ravno enako obliki signala pri $z = 0$. Oblika sunka se ob odsotnosti disperzije ohranja in sunek poljubne začetne oblike nepopačen potuje po vlaknu z grupno hitrostjo.

Vrnimo se k enačbi (10.81). Odvajajmo jo po $z$

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} = \left( i\Omega\frac{1}{v_g} + \frac{i}{2}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)\Omega^2 \right) A(z,t). \tag{10.83}$$

Desno stran izraza lahko zapišemo s časovnimi odvodi ovojnice

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{v_g}\frac{\partial A(z,t)}{\partial t} - \frac{i}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2} \tag{10.84}$$

oziroma

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t}\right) A(z,t) = -\frac{i}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2}. \tag{10.85}$$

Enačbo lahko nekoliko poenostavimo z vpeljavo novih neodvisnih spremenljivk

$$\begin{aligned} \tau &= t - \frac{z}{v_g} \\ \zeta &= z. \end{aligned} \tag{10.86}$$

Za vrh sunka, ki naj ima pri $t = 0$ koordinato $z = 0$ in se giblje z grupno hitrostjo, je vselej $\tau = 0$. Spremenljivka $\tau$ torej predstavlja čas v točki $z = \zeta$ , merjen od trenutka, ko tja prispe osrednji del sunka. Z novima spremenljivkama se enačba (10.85) prepiše v

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - 2i\frac{\partial A}{\partial \zeta} = 0 \tag{10.87}$$

Ta enačba ima isto obliko kot obosna valovna enačba, ki smo jo v drugem poglavju uporabili za obravnavo koherentnih snopov (enačba 3.5). Spomnimo se, da obosno valovno enačbo rešijo Gaussovi snopi (enačba 3.29).

Podobnost med pojavoma seže dlje od formalne oblike. Pri snopih, ki so omejeni v prečni smeri, disperzija fazne in grupne hitrosti po prečnih komponentah valovnega vektorja povzroča spreminjanje prečnega preseka snopa. Pri časovno omejenih sunkih v sredstvu s frekvenčno disperzijo se namesto preseka sunka spreminja njegova vzdolžna oblika. Poglejmo, kako.

Enačba (10.87) je zelo podobna obosni valovni enačbi, le da ima tukaj vlogo prečne koordinate čas $\tau$. Po analogiji s snopi lahko sklepamo, da se najmanj širi ravno sunek z Gaussovo časovno odvisnostjo. Celotnega računa ni treba ponavljati, namesto tega kar v izrazu za Gaussove snope (enačba 3.29) napravimo ustrezno zamenjavo spremenljivk. Iz enačbe (10.87) razberemo, da valovnemu številu $k$ pri snopih ustreza parameter $\mu = (d^2\beta/d\omega^2)^{-1}$. Poleg tega vpeljemo trajanje sunka $\sigma$, ki ustreza polmeru Gaussovega snopa $w$, in parameter $b$, ki ustreza krivinskemu radiju $R$. Oba parametra sta seveda odvisna od $\zeta$, tako kot sta parametra $w$ in $R$ odvisna od $z$.

Na podlagi analogije zapišemo obliko podaljšanega Gaussovega sunka

$$A(\zeta,\tau) = \frac{A_0}{\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right)\exp\left(-i\frac{\mu\tau^2}{2b}\right)e^{i\phi(\zeta)}. \tag{10.88}$$

Pri tem za dolžino sunka $\sigma$ velja enaka zveza kot za polmer Gaussovega snopa (enačba 3.19)

$$\boxed{\sigma^2 = \sigma_0^2\left(1+\left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)^2\right).} \tag{10.89}$$

Tu je $\sigma_0$ trajanje sunka pri $\zeta = 0$, to je na začetku, kjer je sunek najkrajši. Dodatna skupna faza $\phi(\zeta)$ ni posebno pomembna, pač pa je zanimiv drugi eksponentni faktor v enačbi (10.88). V njem smo z $b = \zeta\left(1+\zeta_0^2/\zeta^2\right)$ označili količino, ki je analogna krivinskemu radiju valovnih front v primeru Gaussovih snopov (enačba 3.25).

Slika 10.14: Primerjava krajevne širitve Gaussovega snopa in časovne širitve Gaussovega sunka

Odvod faze po $\tau$ predstavlja spremembo frekvence glede na centralno frekvenco sunka $\omega_0$

$$\omega - \omega_0 = \frac{\mu\tau}{b}. \tag{10.90}$$

Za pozitivne vrednosti $\mu$ je frekvenca na začetku sunka, to je pri $\tau < 0$, manjša od $\omega_0$, z naraščajočim časom pa se linearno povečuje proti koncu sunka. Obnašanje je torej podobno tistemu, ki ga poznamo iz nelinearne optike (slika 8.14 a).

Pri $\zeta = 0$ je sunek najkrajši možen pri dani spektralni širini. Lahko si mislimo, da je sunek najkrajši, to je omejen s Fourierevo transformacijo spektra, kadar se vse frekvenčne komponente seštejejo z isto fazo, to je pri $\zeta = 0$. Da nastanejo najkrajši sunki, kadar je faza vseh delnih valov enaka, smo spoznali že pri fazno uklenjenih sunkih iz večfrekvenčnih laserjev (poglavje 6.9). Pri potovanju sunka se zaradi disperzije faze frekvenčnih komponent različno spreminjajo in sunek se podaljša. Pri tem je pomemben drugi odvod fazne hitrosti po frekvenci. Linearno spreminjanje faze namreč ne povzroči razširitve, temveč le razliko med grupno in fazno hitrostjo.

**Naloga 10.5.1** Naj bo vpadni sunek svetlobe Gaussove oblike $E(x,y,z=0,t) = \psi(x,y)e^{-at^2-i\omega_0 t}$. Pokaži, da je ustrezna funkcija $\tilde{A}(\Omega)$ oblike

$$\tilde{A}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\Omega^2/4a}, \tag{10.91}$$

nato pa z neposredno integracijo (enačba 10.81) pokaži, da je rezultat enak ovojnici, zapisani z enačbo (10.88), pri čemer je

$$\zeta_0 = \frac{\mu}{2a}. \tag{10.92}$$

**Naloga 10.5.2** Uporabi enačbo (10.89) in pokaži, da je najmanjše podaljšanje sunka svetlobe pri dani dolžini vlakna enako

$$\tau_v(L) = \sqrt{\frac{2\ln 2}{a}}\sqrt{1+\frac{4a^2L^2}{\mu^2}} = \tau_v(0)\sqrt{1+\left(\frac{4\ln 2}{\tau_v(0)^2\mu}L\right)^2} \tag{10.93}$$

in za velike dolžine enako izrazu, ki smo ga izračunali pri valovodni disperziji (enačba **??**).

### Kompenzacija disperzije

Razširitev sunka zaradi pozitivne disperzije je pri $\mu > 0$ mogoče kompenzirati s parom vzporednih uklonskih mrežic, kot kaže slika (10.15). Prva mrežica različne frekvenčne komponente razkloni, druga pa ponovno zbere, vendar so pri tem dolžine optičnih poti za različne komponente različno dolge. Pokazali bomo, da je celoten učinek enak kot pri razširjanju sunka po sredstvu z negativno disperzijo. Vzporednost uklonskih mrežic zagotavlja vzporednost izhodnih žarkov, vendar so različne komponente vpadne svetlobe med seboj razmaknjene (slika 10.15 a). V praksi zato uporabimo ali dva para uklonskih mrežic ali pa zrcalo, ki svetlobo usmeri po isti poti nazaj.

Slika 10.15: Kompenzacija disperzije z uklonskima mrežicama (a) in shema z oznakami (b).

Naj na par vzporednih uklonskih mrežic vpada ravni val pod kotom $\alpha$, odbije pa naj se pod kotom $\beta = \beta(\omega)$ (slika 10.15 b). Pot, ki jo prepotuje žarek od vpada na mrežico do izhoda iz sistema (med točkama $A$ in $B$), je enaka

$$P = \frac{L}{\cos\beta}\left(1 + \cos(\alpha + \beta)\right). \tag{10.94}$$

Zaradi uklona velja zveza $\sin\alpha - \sin\beta = \lambda/\Lambda$, pri čemer je $\lambda$ valovna dolžina svetlobe, $\Lambda$ pa perioda uklonske mrežice. Pri fazi moramo upoštevati še fazni premik na drugi mrežici

$$\Phi_m = \frac{2\pi}{\Lambda} L \tan\beta. \tag{10.95}$$

Celotna sprememba faze je tako $\Phi = \omega P/c + \Phi_m$.

---

**Naloga 10.5.3** Pokaži, da je drugi odvod faze po kotni frekvenci enak

$$\frac{d^2\Phi}{d\omega^2} = -\frac{Lcq^2}{\sqrt{\omega^2 - (\omega\sin\alpha + cq)^2}^{3/2}}, \tag{10.96}$$

pri čemer je $q = 2\pi/\Lambda$.

---

Račun v nalogi (10.5.3) pokaže, da je disperzija, ki je določena z drugim odvodom faze po kotni hitrosti (enačba 10.96), vedno negativna. Par vzporednih uklonskih mrežic torej deluje kot sredstvo z negativno disperzijo in sunek, ki se je razširil zaradi potovanja po sredstvu s pozitivno disperzijo, lahko skrajša do meje, določene s širino spektra.

★ Postopek kompenzacije disperzije se uporablja za pridobivanje zelo kratkih sunkov. Sunku iz fazno uklenjenega barvilnega ali Ti:safirnega laserja se najprej v nelinearnem sredstvu razširi spekter, pri čemer se sunek tudi časovno podaljša. Razširjen sunek se nato s parom mrežic skrajša za faktor 10–100 glede na prvotno dolžino sunka. Tako nastanejo sunki, dolgi le okoli 10 fs, kar je le še nekaj optičnih period. V vmesni stopnji, ko je sunek podaljšan, ga lahko tudi dodatno ojačimo, česar s prvotnim kratkim in že tako razmeroma močnim sunkom ne bi mogli narediti. Ojačen sunek nato s parom uklonskih mrežic ponovno zberemo in nastane zelo kratek zelo močen sunek svetlobe.

## 10.6 Izgube in ojačenje v optičnih vlaknih

Pri prenosu informacij z optičnimi vlakni je poleg disperzije, ki signal popači, treba upoštevati tudi izgube, ki signal oslabijo. Do izgub pride predvsem zaradi absorpcije svetlobe v snovi, Rayleighovega sipanja na termičnih fluktuacijah gostote, sipanja na nečistočah, izgub na stiku med vlakni in izgub zaradi upognjenosti vlakna. Za prenos na dolge razdalje je tako potreben razmeroma močen signal, ki pa ne sme biti premočen, saj lahko v vlaknu pride do nelinearnih optičnih pojavov. V praksi zato optični signal, ki potuje po čezoceanskih vlaknih, ojačujemo.

Pri izdelavi optičnih vlaken se najpogosteje uporablja kremenovo steklo, ki ima najmanjšo absorpcijo svetlobe v bližnjem infrardečem delu svetlobe (1300–1500 nm). Navadno mu dodamo primesi, s čemer dosežemo želen lomni količnik in zmanjšanje disperzije.

Za merilo izgub v vlaknu vpeljemo atenuacijski koeficient

$$A[dB] = -10\log_{10}\frac{j(z)}{j(0)}, \tag{10.97}$$

pri čemer je $j(z)$ intenziteta svetlobe po prepotovani razdalji $z$. Če se po kilometru signal zmanjša na polovico, so izgube 3 dB/km. Dobra vlakna dosegajo pri valovni dolžini 1,55 µm izgube okoli 0,2 dB/km. Za primerjavo: navadno steklo ima pri vidni svetlobi atenuacijski koeficient okoli 1000 dB/km.

Slika 10.16: Izgube v vlaknu v odvisnosti od valovne dolžine: vijolična črta – UV absorpcija, črna črta – IR absorpcija, zelena črta – absorpcija na OH ionih in modra črta – izgube zaradi Rayleighovega sipanja. Z rdečo črto so označene skupne izgube.

Slika (10.16) prikazuje značilno odvisnost izgub od valovne dolžine za dobro enorodovno vlakno iz kremenovega stekla. Celotne izgube (rdeča črta) so sestavljene iz vrste različnih prispevkov. Pri kratkih valovnih dolžinah je absorpcija velika zaradi elektronskih prehodov v steklu (vijolična črta). Širina reže za $SiO_2$ je namreč okoli 8,9 eV, kar ustreza valovni dolžini okoli 140 nm. Pri velikih valovnih dolžinah pride do absorpcije zaradi vibracijskih prehodov (črna črta). Čeprav so ti prehodi pri nižjih frekvencah, so vrhovi zelo široki in sežejo do okoli 1500 nm. Absorpcija na nečistočah lahko ob pazljivi izdelavi postane skoraj v celotnem območju praktično zanemarljiva. Najbolj problematična nečistoča je voda oziroma $OH^-$ ioni, ki imajo velik dipolni moment in izrazito absorpcijo pri 1380 nm (zelena črta). Zelo pomemben prispevek k izgubam, posebej pri krajših valovnih dolžinah, je sipanje na fluktuacijah gostote (Rayleighovo sipanje), saj je sorazmerno z $\lambda^{-4}$ (modra črta).

S slike je razvidno, da so skupne izgube najmanjše okoli $1,55$ µm, zato se to območje največ uporablja za prenos signalov na velike razdalje. Izgube so tako majhne, da omogočajo prenos signala do nekaj sto kilometrov brez vmesnega ojačevanja. Teh izgub na vlaknih se ne bo dalo več kaj dosti izboljšati, saj so že zdaj na meji, določeni s termičnimi fluktuacijami. Pri dolžini optičnih zvez tako izgube niso več glavna omejitev, ampak je to popačitev signala zaradi disperzije.

Pri prenosu signalov z optičnimi vlakni vpeljemo različne pasove, ki ustrezajo različnim valovnim dolžinam. Pri valovnih dolžinah 1260–1360 nm je tako imenovani pas O (O – *original*), ki so ga sprva uporabljali zaradi razpoložljivih virov svetlobe in nizke disperzije. Sledita pas E (1360–1460 nm) in pas S (1460–1530 nm). Najširše uporabljan je pas C (C – *conventional*) pri valovnih dolžinah 1530–1565 nm, sledita mu še pas L (1565–1625 nm) in pas U (1625–1675 nm).

Po optičnem vlaknu lahko prenašamo več informacij, če za vsako posebej uporabimo drugo valovno dolžino. Temu procesu pravimo razvrščanje po valovni dolžini (WDM – *wavelength-division multiplexing*). Na ta način dosežemo vzporeden prenos podatkov in hitrosti do 100 Tb/s. Shematsko je tak način prenosa podatkov prikazan na sliki (10.17). Oddajniki (O) oddajo sunke svetlobe, ki se rahlo razlikujejo v valovni dolžini. Z multiplekserjem (M) signale iz različnih kanalov zberemo in jih usmerimo v enorodovno vlakno. Vlakno prenaša signal, vmes ga po potrebi ojačimo (A), nato z demultiplekserjem (DM) signal razstavimo na posamezne kanale, ki jih zaznamo z ločenimi detektorji (D).

Slika 10.17: Shematski prikaz prenosa več signalov hkrati po enorodovnem vlaknu

## *Izgube v ukrivljenem vlaknu

Pri vseh primerih do zdaj smo upoštevali, da je vlakno ravno oziroma da so mejne ploskve valovnega vodnika vzporedne. Kadar je vlakno ukrivljeno, del valovanja uhaja v plašč in izgube pri prenosu se povečajo. Te izgube tipično postanejo znatne, kadar je krivinski radij ukrivljenega vlakna centimeter ali manj. Poglejmo si pojav podrobneje na planparalelnem vodniku.

Naj bo vodnik dvodimenzionalna plast debeline $a$ z lomnim količnikom $n_1$, ki je obdana s snovjo z lomnim količnikom $n_2$. Vodnik naj zdaj ne bo raven, temveč ukrivljen s krivinskim radijem $R$, tako da tvori del kolobarja z notranjim radijem $R-a/2$ in zunanjim radijem $R+a/2$, pri čemer je $R \gg a$ (slika 10.18).

Zapišimo Helmholtzevo enačbo (enačba 1.21) v cilindrični geometriji

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k_0^2 n^2(r)\, E = 0, \tag{10.98}$$

pri čemer ima $n(r)$ vrednost $n_1$ v sredici in $n_2$ v plašču. Pri tem ne pozabimo, da $r$ ni več radialna koordinata vlakna, ampak označuje oddaljenost od središča krivine. Zanimajo nas rešitve oblike

$$E(r,\varphi) = \psi(r)\, e^{im\varphi} \tag{10.99}$$

kjer bomo privzeli, da je $\psi(r)$ znatna le v sredici.

Slika 10.18: K izračunu izgub v ukrivljenem vodniku

Naj bo $z = R\varphi$ dolžina loka vzdolž sredine sredice. Tedaj je faza nastavka (enačba 10.99) enaka $m\varphi = mz/R$ in valovno število $\beta = m/R$. Ker je valovna dolžina svetlobe dosti manjša od $R$, je $m$ zelo veliko število. Funkcija $\psi$ zadošča enačbi

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \left(k_0^2 n^2(r) - \frac{m^2}{r^2}\right)\psi = 0. \tag{10.100}$$

Rešitve za $\psi$ so kombinacije Besslovih funkcij reda $m$, kar pa zaradi velikosti $m$ ni posebno zanimivo.

Dosti več bomo izvedeli, če se problema lotimo malo drugače. Namesto $r$ in $\varphi$ vpeljemo koordinati $x = r - R$ in $z = R\varphi$. S tem preidemo nazaj na koordinate planparalelne plasti in iščemo popravke valovne enačbe v sredici (10.8), ki so reda $1/R$. Privzamemo, da je $1/r \approx 1/R$ in

$$\frac{m^2}{r^2} = \frac{m^2}{(R+x)^2} \approx \frac{m^2}{R^2}\left(1 - 2\frac{x}{R}\right) = \beta^2\left(1 - 2\frac{x}{R}\right). \tag{10.101}$$

Z upoštevanjem gornjih zvez enačbo (10.100) nadomestimo s približno enačbo za prečno obliko polja

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(k_0^2 n^2(r) - \beta^2\right)\psi + \frac{1}{R}\left(\frac{d\psi}{dx} + 2\beta^2 x\psi\right) = 0. \tag{10.102}$$

Člen, ki vsebuje prvi odvod $d\psi/dx$, lahko odpravimo z nastavkom

$$\psi(x) = e^{-x/2R}\zeta(x) \tag{10.103}$$

in zapišemo

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \left(k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{1}{4R^2}\right)\zeta + \frac{2\beta^2}{R}x\zeta = 0. \tag{10.104}$$

Gornja enačba je zelo podobna enačbi za izračun lastnih rodov v planparalelnem vodniku (10.8), pri čemer se $\beta^2$ poveča za $1/4R^2$. Poleg tega je prisoten dodatni člen, ki je linearen v $x$. Če ponovno naredimo analogijo med lastnimi načini v valovnem vodniku in stanji delca, ujetega v končno potencialno jamo, je ta člen enake oblike kot potencialna energija delca v konstantnem zunanjem električnem polju (slika 10.19). Podobno kot lahko ujeti delci uhajajo iz potencialne jame (tunelirajo), uhaja tudi svetloba iz ukrivljenega vlakna.

Izgube (oziroma delež prepuščene svetlobe) so eksponentno odvisne od krivinskega radija vlakna

$$A \propto e^{-CR}, \tag{10.105}$$

pri čemer je $C$ konstanta, odvisna od lomnih količnikov sredice in plašča, od polmera vlakna ter od valovne dolžine potujoče svetlobe.

Slika 10.19: Lastni načini širjenja svetlobe po ravnem vodniku so analogni stanjem delca v končni potencialni jami (levo), načini širjenja po ukrivljenem vodniku pa so podobni stanjem delca v konstantnem zunanjem električnem polju (desno). Zaradi spremenjenega potenciala delci tunelirajo, svetloba pa uhaja iz ukrivljenega vlakna.

### Izgube na spoju dveh vlaken

Omenili smo že, da pride do izgub tudi na spoju dveh vlaken. V idealnem primeru sta dve stikajoči vlakni povsem enaki in se sredici povsem ujemata. Čim se pojavijo majhna odstopanja v velikosti ali poravnavi sredice, na stiku pride do izgub, na tipičnem spoju vlaken do okoli $0,2$–$0,5$ dB.

Omejimo se na spoj enorodovnih vlaken, v katerih krajevni del električne poljske jakosti osnovnega roda zapišemo kot

$$E(r,\varphi,z) = \psi(r,\varphi)e^{i\beta z}. \tag{10.106}$$

Za izračun sklopitve med dvema vlaknoma vpeljemo prekrivalni integral, ki pove, kolikšen delež moči iz prvega vlakna se sklopi v osnovni rod v drugem vlaknu. Sklopitveni faktor je

$$\eta = \frac{|\int \psi_1(r,\varphi)\psi_2^*(r,\varphi)rdrd\varphi|^2}{(\int |\psi_1|^2 rdrd\varphi)(\int |\psi_2|^2 rdrd\varphi)}, \tag{10.107}$$

pri čemer z indeksom 1 označimo osnovni rod v prvem vlaknu, z indeksom 2 pa v drugem. Točen izračun sklopitve je na splošno precej zapleten, saj vsebuje integrale Besslovih funkcij. Zato račun poenostavimo, tako da prečno odvisnost osnovnega roda v cilindričnem vlaknu nadomestimo z Gaussovo funkcijo in uporabimo efektivni polmer snopa (enačba 10.44).

Izračunajmo za primer sklopitveni faktor in izgube na stiku dveh vlaken z rahlo različnima polmeroma. Po Marcusejevi formuli najprej določimo efektivna polmera Gaussovih snopov v obeh vlaknih $w_1$ in $w_2$. Prečni profil v prvem vlaknu je tako

$$\psi_1 = A_1 e^{-r^2/w_1^2}, \tag{10.108}$$

v drugem pa

$$\psi_2 = A_2 e^{-r^2/w_2^2}. \tag{10.109}$$

Vstavimo gornja nastavka v enačbo (10.107) in zapišemo

$$\eta = \frac{|\int A_1 e^{-r^2/w_1^2} A_2 e^{-r^2/w_2^2} 2\pi r dr|^2}{\left(\int A_1^2 e^{-2r^2/w_1^2} 2\pi r dr\right)\left(A_2^2 e^{-2r^2/w_2^2} 2\pi r dr\right)}, \tag{10.110}$$

od koder sledi

$$\eta = \frac{4w_1^2 w_2^2}{(w_1^2 + w_2^2)^2}. \tag{10.111}$$

Kadar sta polmera vlaken enaka, je prekrivanje popolno in $\eta = 1$. Z naraščajočo razliko med polmeroma pa vrednost $\eta$ pojema. Pri tem ni pomembno, ali ima večji polmer prvo ali drugo vlakno, v obeh primerih pride do izgube signala. Intuitivno razumemo, da se signal izgubi pri prehodu iz večjega v manjše vlakno, obratno pa je tudi res, saj se v širšem končnem vlaknu poleg osnovnega vzbudijo tudi višji rodovi.

Pri prehodu iz vlakna z $w = 10$ µm v vlakno s polmerom $w = 8$ µm (ali obratno), je sklopitveni faktor enak $0,95$. To je enako razmerju prepuščene intenzitete svetlobe, zato lahko izračunamo izgube kar z enačbo (10.97). Izračunana sklopitev ustreza izgubam $0,21$ dB.

**Naloga 10.6.1** Pokaži, da je sklopitveni faktor za dve enaki vzporedni vlakni, ki sta iz osi izmaknjeni za $\Delta$, enak

$$\eta = \exp\left(-\frac{\Delta^2}{w^2}\right). \tag{10.112}$$

### Ojačevanje v vlaknih

Zaradi znatnih izgub pri prenosu signalov na več tisoč kilometrov dolge razdalje je treba signal med prenosom ojačevati. To lahko naredimo elektronsko, kjer optični signal pretvorimo v električnega, tega ojačimo in ga nato pretvorimo nazaj v optičnega. Precej bolj priročna rešitev je optično ojačevanje v vlaknu samem.

V ta namen se najpogosteje uporablja vlakno, dopirano z erbijevimi ioni[5]. Na določenih razdaljah (na okoli 100 km) svetlobo iz navadnega vlakna sklopimo v vlakno, v katerem so erbijevi ioni. S črpalnim laserjem erbijeve ione vzbudimo, da dosežemo obrnjeno zasedenost. Ko na dopirani del vlakna vpade svetlobni sunek z valovno dolžino okoli 1550 nm, pride do stimulirane emisije in sunek se ojači. Gre za povsem enak princip ojačevanja svetlobe, kot ga poznamo iz delovanja laserja, le da tukaj svetloba ni ujeta v resonator, ampak se postopoma ojačuje vzdolž vlakna. Pri tem se intenziteta črpalnega laserja postopoma zmanjšuje, kar omejuje dolžino, na kateri se signal ojačuje. Spektralna širina ojačenja je zaradi sklopitev z ioni v steklu razmeroma široka, tudi 40 nm. To pomeni, da se hkrati ojačujejo signali različnih valovnih dolžin, kar je še posebej uporabno pri prenosu več signalov naenkrat.

V praksi se uporabljajo vlakna, v katerih je delež erbijevih ionov okoli $\sim 10^{-4}$. Črpalni laser je polprevodniški laser, ki deluje pri valovni dolžini 900 nm ali $1,48$ nm z močjo okoli 20–100 mW. Na ta način lahko v 10–30 m dolgih odsekih dosežemo več 1000-kratno ojačenje (30–40 dB).

[5] EDFA - *Erbium-doped fiber amplifier*, ojačevalnik na vlakno, dopirano z erbijem

## 10.7 Sklopitev svetlobe v vlakna

Do zdaj smo govorili o svetlobi, ki potuje po valovnem vodniku ali optičnem vlaknu. Kako pa svetlobo sploh sklopimo v vodnik? Poznamo več načinov sklopitve, obravnavali bomo čelno sklopitev, bočni sklopitvi s prizmo in s periodično strukturo ter sklopitev med dvema vzporednima vodnikoma. Prvi način navadno uporabljamo pri cilindričnih vlaknih, ostale pa najpogosteje pri planarnih valovodnih strukturah.

### Čelna sklopitev

Pri izračunu izgub na spoju dveh vlaken smo vpeljali prekrivalni integral (enačba 10.107), ki pove, kolikšen del osnovnega roda, ki izhaja iz prvega vlakna, se sklopi v osnovni rod drugega. Povsem podobno pristopamo tudi pri izračunu izkoristka sklopitve svetlobe v optično vlakno. Izračunati moramo, kolikšen delež vpadne svetlobe $E(r,\varphi)$ se sklopi z izbranim rodom vlakna $n,m$. To naredimo tako, da vpadni val razvijemo po lastnih rodovih vlakna, iz ortogonalnosti rodov pa sledi prekrivalni integral, ki ga moramo seveda ustrezno normirati. Zapišemo ga kot

$$\eta = \frac{|\int E(r,\varphi)E^*_{n,m}(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi|^2}{(\int |E(r,\varphi)|^2 r\,dr\,d\varphi)\,(\int |E_{n,m}(r,\varphi)|^2 r\,dr\,d\varphi)}, \tag{10.113}$$

oziroma v kartezičnih koordinatah

$$\eta = \frac{|\int E(x,y)E^*_{n,m}(x,y)dx\,dy|^2}{(\int |E(x,y)|^2 dx\,dy)\,(\int |E_{n,m}(x,y)|^2 dx\,dy)}. \tag{10.114}$$

Če računamo sklopitev v osnovi rod vlakna, ga tudi tukaj iz praktičnih razlogov nadomestimo z Gaussovim profilom.

★ Sklopitev svetlobe v večrodovno vlakno lahko obravnavamo geometrijsko, kot smo to naredili na začetku poglavja (slika 10.1). Izračunali smo (enačba 10.2), da je največji vpadni kot, pod katerim se svetloba še sklopi v vlakno, določen z numerično odprtino vlakna $\sin\alpha_{\max} = NA$.

### Bočna sklopitev

Neposredna sklopitev svetlobe v vodnik preko plašča ni mogoča. Ker je namreč lomni količnik sredice večji od lomnega količnika plašča, dovolj velikega vstopnega kota, pod katerim bi se svetloba ujela v sredico, ni mogoče doseči. Zato je za sklopitev preko stranice treba uporabiti drugačen pristop. Navadno uporabimo prizmo ali pa periodično strukturo na vlaknu.

Slika 10.20: Dva primera bočne sklopitve svetlobe v valovni vodnik: sklopitev s prizmo (a) in sklopitev s periodično strukturo (b)

V prvem primeru uporabimo prizmo, kot kaže slika (10.20 a). Lomni količnik prizme je pri tem večji od lomnega količnika plašča $n_p > n_2$. Vhodni žarek vpada na prizmo, se ob prehodu vanjo

lomi, nato pa se na stranici, ki je vzporedna z vodnikom, totalno odbije. V vmesnem območju med prizmo in sredico vodnika se pojavi evanescentni val s komponento valovnega vektorja $\beta = k_0 n_p \sin\alpha$ v smeri vzporedno z vodnikom. Pogoj za uspešno sklopitev je ujemanje vzdolžnih komponent valovnega vektorja vpadne svetlobe in valovnega vektorja rodu v vodniku, ki ga želimo vzbuditi. S spreminjanjem vpadnega kota lahko torej v vodniku vzbujamo različne rodove. Če je razdalja med prizmo in vodnikom dovolj majhna (tipično pod valovno dolžino svetlobe), se v valovod ob izpolnjenem pogoju ujemanja faze sklopi znaten delež vpadne svetlobe.

Tudi periodična struktura na valovnem vodniku (slika 10.20 b) deluje na ujemanju valovnega vektorja vpadnega vala z valovnim vektorjem ustreznega rodu. Ko vpade val pod kotom $\alpha$ glede na valovni vodnik, periodična struktura na vodniku spremeni njegovo fazo za večkratnik $2\pi z/\Lambda$, pri čemer je $\Lambda$ perioda strukture. Če dosežemo, da se komponenta novega valovnega vektorja $\beta = k_0 n_2 \sin\alpha + 2\pi/\Lambda$ izenači s komponento valovnega vektorja za izbrani rod v vlaknu, se vpadna svetloba sklopi v vlakno.

★ Oba opisana načina za sklopitev svetlobe v vlakno lahko uporabimo tudi za sklopitev svetlobe iz vlakna, pri čemer mora biti ravno tako izpolnjen pogoj ujemanja faz. Sklapljanje svetlobe skozi prizmo je uporabno tudi za raziskave tankih plasti snovi. Iz pogoja za ujemanje faz lahko določimo lastnosti tanke plasti, njeno debelino ali njen lomni količnik.

### Sklopitev med valovodi

Ob prenosu signala po optičnem valovodu večina energijskega toka potuje po sredici, energijski tok pa seže tudi izven nje, v plašč (enačba 10.29). Če sta dva vzporedna valovoda dovolj blizu, da se evanescentni električni polji enega in drugega vodnika v plašču prekrivata, pride do sklopitve vodnikov in prenosa energijskega toka iz enega vodnika v drugega.

Slika 10.21: Sklopitev med dvema vzporednima vodnikoma

Za podrobnejšo obravnavo bi morali zapisati Maxwellove enačbe z ustreznimi robnimi pogoji in jih rešiti za sklopljen primer dveh vzporednih vodnikov. Tak račun je izredno zapleten, zato se bomo poslužili približka šibke sklopitve in privzeli, da so rodovi v vodnikih taki, kot če bi vodniki ne bili sklopljeni. Sklopitev torej ne bo spremenila oblike lastnih rodov, bo pa spremenila njihovo amplitudo, ki bo tako postala odvisna od vzdolžne koordinate $z$.

Imejmo dva enorodovna vodnika z lomnima količnikoma sredice $n_1$ in $n_2$ in enako debelino $a$, med njima in okoli njiju pa naj bo snov z lomnim količnikom $n_0$. Širina reže med vodnikoma naj bo $2d$. Potem zapišemo električni poljski jakosti v prvem in drugem vodniku kot

$$E_1(x,z) = A(z)\psi_1(x)e^{i\beta_1 z} \quad \text{in} \tag{10.115}$$

$$E_2(x,z) = B(z)\psi_2(x)e^{i\beta_2 z}, \tag{10.116}$$

pri čemer se $A(z)$ in $B(z)$ le počasi spreminjata s koordinato $z$. Skupna električna poljska jakost, ki je v našem približku kar vsota prispevkov $E_1$ in $E_2$, mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla^2 E(x,z) + k_0^2 n(x)^2 E(x,z) = 0. \tag{10.117}$$

Pri tem smo z $n(x)$ označili prečno odvisnost lomnega količnika. Vstavimo nastavek za električno poljsko jakost v gornjo enačbo in zapišemo

$$\begin{aligned} Ae^{i\beta_1 z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1(x) - \beta_1^2\psi_1 + k_0^2 n(x)^2\psi_1\right) + \\ Be^{i\beta_2 z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_2(x) - \beta_2^2\psi_2 + k_0^2 n(x)^2\psi_2\right) + 2i\beta_1 A'\psi_1 e^{i\beta_1 z} + 2i\beta_2 B'\psi_2 e^{i\beta_2 z} = 0. \end{aligned} \tag{10.118}$$

Pri tem smo člena z drugim odvodom $\partial^2 A/\partial z^2$ in $\partial^2 B/\partial z^2$ zanemarili. Zapišimo enačbi za $\psi$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1(x) + \left(k_0^2 n_1(x)^2 - \beta_1^2\right)\psi_1 = 0 \tag{10.119}$$

in

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_2(x) + \left(k_0^2 n_2(x)^2 - \beta_2^2\right)\psi_2 = 0. \tag{10.120}$$

Lomna količnika $n_1(x)$ in $n_2(x)$ sta tukaj tudi funkciji prečne koordinate. Naj bo $n_1(x)$ povsod enak $n_0$ razen v sredici prvega vodnika, kjer je $n_1$, in naj bo $n_2(x)$ povsod enak $n_0$, razen v sredici drugega vlakna, kjer je enak $n_2$. Sledi

$$\begin{aligned} Ae^{i\beta_1 z}k_0^2\left(n(x)^2 - n_1(x)^2\right)\psi_1 + Be^{i\beta_2 z}k_0^2\left(n(x)^2 - n_2(x)^2\right)\psi_2 + \\ 2i\beta_1 A'\psi_1 e^{i\beta_1 z} + 2i\beta_2 B'\psi_2 e^{i\beta_2 z} = 0. \end{aligned} \tag{10.121}$$

Enačbo pomnožimo s kompleksno konjugirano vrednostjo $\psi_1^*$ in integriramo po $x$. Upoštevamo ortonormalnost funkcij $\psi$ in zapišemo

$$\frac{dA}{dz} = iAK_{11} + iBe^{i(\beta_2-\beta_1)z}K_{12}, \tag{10.122}$$

pri čemer sta

$$K_{11} = \frac{k_0^2}{2\beta_1}\int \psi_1^*\psi_1(n^2 - n_1^2)dx \tag{10.123}$$

in

$$K_{12} = \frac{k_0^2}{2\beta_1}\int \psi_1^*\psi_2(n^2 - n_2^2)dx. \tag{10.124}$$

Koeficient $K_{11}$ določa spremembo amplitude v vlaknu zaradi prisotnosti drugega vlakna, kar lahko zanemarimo. Tako ostane samo sklopitveni člen

$$\frac{dA}{dz} = iBe^{i(\beta_2-\beta_1)z}K_{12} \tag{10.125}$$

in podobno za $B$

$$\frac{dB}{dz} = iAe^{i(-\beta_2+\beta_1)z}K_{21}. \tag{10.126}$$

Prvo enačbo odvajamo, upoštevamo drugo in zapišemo

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - i\Delta\beta\frac{\partial A}{\partial z} + K_{12}K_{21}A = 0. \tag{10.127}$$

Enačbo rešujemo z nastavkom

$$A = e^{i\Delta\beta z/2}\left(a_1 e^{i\gamma z} + a_2 e^{-i\gamma z}\right). \tag{10.128}$$

---

**Naloga 10.7.1** Pokaži, da nastavek (enačba 10.128) reši enačbo (10.127) in pokaži, da med parametri enačb velja sledeča zveza

$$\gamma^2 = K^2 + \frac{\Delta\beta^2}{4}, \tag{10.129}$$

pri čemer je $K = \sqrt{K_{12}K_{21}}$ in $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$. Nato uporabi enačbo (10.125) in pokaži, da je rešitev za amplitudo $B$ enaka izrazu v enačbi (10.130).

---

Ko poznamo $A$, lahko z uporabo enačbe (10.125) izračunamo še $B$

$$B = \frac{1}{K_{21}}e^{-i\Delta\beta z/2}\left(\left(\frac{\Delta\beta}{2}+\gamma\right)a_1 e^{i\gamma z} + \left(\frac{\Delta\beta}{2}-\gamma\right)a_2 e^{-i\gamma z}\right). \tag{10.130}$$

Naj bo $A(z=0) = A_0$ in $B(z=0) = 0$. To pomeni, da potuje svetloba na začetku le po prvem vlaknu, potem pa se sklopi v drugega. S tema začetnima pogojema zapišemo izraza za $A$ in $B$

$$A = A_0 e^{i\Delta\beta z/2}\left(\cos(\gamma z) - \frac{i\Delta\beta}{2\gamma}\sin(\gamma z)\right) \tag{10.131}$$

in

$$B = A_0 e^{-i\Delta\beta z/2}\frac{iK_{21}}{\gamma}\sin(\gamma z). \tag{10.132}$$

Moč, ki se pretaka po posameznem vlaknu je tako

$$P_1 = P_0\left(\cos^2(\gamma z) + \frac{\Delta\beta^2}{4\gamma^2}\sin^2(\gamma z)\right) = P_0\left(1 - \frac{K^2}{\gamma^2}\sin^2(\gamma z)\right) \tag{10.133}$$

in

$$P_2 = P_0\frac{K^2}{\gamma^2}\sin^2(\gamma z), \tag{10.134}$$

pri čemer smo privzeli, da velja $K_{12} \sim K_{21} \sim K$. Obe funkciji sta oscilirajoči in svetloba se periodično pretaka med vlaknoma s periodo $\pi/\gamma$ (slika 10.22). Amplituda prenosa je odvisna od sklopitvenega faktorja $K$ in ujemanja valovnih vektorjev v obeh vlaknih. Večji koeficient $K$ in manjše odstopanje $\Delta\beta$ vodita v večji prenos svetlobnega toka v drugo vlakno.

Slika 10.22: Prenos svetlobnega toka med dvema sklopljenima vodnikoma. V prvem primeru (a) sta vodnika različna, v drugem primeru (b) pa sta vodnika enaka in pride do popolnega prenosa.

Če sta vlakni enaki, je $\Delta\beta = 0$ in $\gamma = K$, tako da pride do popolnega prenosa svetlobnega toka iz enega vlakna v drugo in seveda tudi obratno. Takrat veljata enačbi

$$P_1 = P_0 \cos^2(\gamma z) \quad \text{in} \tag{10.135}$$

$$P_2 = P_0 \sin^2(\gamma z). \tag{10.136}$$

Na ta način lahko v drugo vlakno sklopimo poljuben delež vpadne svetlobe. Pri dolžini sklopitve $L = \pi/2\gamma$ pride do celotnega prenosa svetlobnega toka v drugo vlakno. Pogosto sklopimo le eno polovico intenzitete vpadne svetlobe. To se zgodi pri dolžini $L = \pi/4\gamma$ in takrat govorimo o 3-dB sklopitvi.

★ Pri dani dolžini sklopitve med vlaknoma $L$ je intenziteta svetlobe v drugem vlaknu močno odvisna od parametra $\gamma$, to je od sklopitve med vlaknoma in od razlike med valovnima vektorjema v obeh vlaknih. Zgolj z rahlim spreminjanjem parametrov, na primer lomnega količnika enega od vlaken, lahko močno vplivamo na delež sklopljenega svetlobnega toka. S priključeno napetostjo in elektro-optičnim pojavom v enem izmed vlaken lahko tako zelo natančno spreminjamo delež sklopljene svetlobe.

## 10.8 *Vpliv spremembe lomnega količnika vlakna na širjenje svetlobe

Sprememba lomnega količnika sredice ali plašča vlakna povzroči spremembo valovnega števila $\beta$ za izbran rod. V enorodovnih vlaknih je to mogoče izkoristiti za izdelavo senzorjev, na primer temperature ali tlaka. Spremembo valovnega števila, do katere pride zaradi zunanjih vplivov, izmerimo preko spremembe faze valovanja na izhodu iz vlakna, to je, z ustrezno sestavljenim interferometrom. Ker je dolžina vlakna lahko velika (v nekaj centimetrov velik tulec lahko brez težav navijemo kilometre vlakna), je celotna sprememba faze velika že pri majhnih spremembah merjene količine. Sprememba valovnega števila povzroča tudi neželene spremembe faze in odboje pri prenosu informacij. V tem razdelku zato poglejmo, kako se spremeni valovno število pri dani spremembi lomnega količnika in koliko svetlobe se odbije.

Obravnavajmo rod vlakna z vzdolžno komponento valovnega vektorja $\beta_{lm}$ in prečnim profilom $\psi_{lm}(r,\varphi)$. Ta mora zadoščati Helmholtzevi enačbi (enačba 1.21)

$$\nabla_\perp^2 \psi_{lm} + \left(\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2\right)\psi_{lm} = 0. \tag{10.137}$$

Naj se dielektrična konstanta na delu vlakna spremeni za $\delta\varepsilon$. Posledično se spremenita tudi valovno število $\beta = \beta_{lm} + \delta\beta$ in prečna oblika $\psi = \psi_{lm} + \delta\psi$. Tudi popravljena funkcija $\psi$ mora zadoščati enačbi (10.137), zato za perturbacijo velja

$$\nabla_\perp^2 \delta\psi + \left(\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2\right)\delta\psi + \delta\varepsilon\, k_0^2 \psi_{lm} = 2\beta_{lm}\delta\beta\, \psi_{lm}, \tag{10.138}$$

pri čemer smo zanemarili produkte majhnih količin. Množimo obe strani enačbe s $\psi_{lm}^*$, integriramo po preseku vlakna in zapišemo

$$\begin{aligned} &\int \psi_{lm}^* \nabla_\perp^2 \delta\psi\, dS + \int \left(\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2\right)\delta\psi\, \psi_{lm}^* + k_0^2 \int \delta\varepsilon\, |\psi_{lm}|^2\, dS \\ = \;& 2\beta_{lm}\,\delta\beta \int |\psi_{lm}|^2\, dS. \end{aligned} \tag{10.139}$$

Prvi člen na levi preoblikujmo z uporabo zvez

$$\int (u\nabla_\perp^2 v - v\nabla_\perp^2 u)\, dS = \int \nabla_\perp \cdot (u\nabla_\perp v - v\nabla_\perp u)\, dS = \oint (u\nabla_\perp v - v\nabla_\perp u)\cdot \mathbf{ds}. \tag{10.140}$$

Ker funkciji $\psi_{lm}$ in $\delta\psi$ opisujeta vodene valove, morata iti za velike $r$ proti nič, zato je integral po krivulji v gornji zvezi nič in velja

$$\int \psi_{lm}^* \nabla_\perp^2 \delta\psi\, dS = \int \delta\psi \nabla_\perp^2 \psi_{lm}^*\, dS. \tag{10.141}$$

Funkcija $\psi_{lm}^*$ zadošča enačbi (10.137), zato se v enačbi (**??**) prvi in drugi člen odštejeta. Iskan popravek k valovnem številu je tako

$$\delta\beta = \frac{k_0^2 \int \delta\varepsilon\, |\psi_{lm}|^2\, dS}{2\beta \int |\psi_{lm}|^2\, dS}. \tag{10.142}$$

★ Ta rezultat je seveda analogen kvantno-mehanskemu rezultatu, ki sledi iz teorije motenj za spremembo energije lastnega stanja delca pri majhni spremembi Hamiltonovega operatorja. Rezultat je tudi intuitivno razumljiv: v najnižjem redu je $\delta\beta$ sorazmerna s uteženim povprečjem $\delta\varepsilon$, pri čemer je utež $\psi_{lm}$.

Sprememba valovnega števila $\beta$ v delu vlakna ne povzroči le spremembe faze, ampak tudi delni odboj. To je le nekoliko druga oblika odboja na (zvezni ali ostri) meji dveh dielektrikov ali, splošneje, odboja valovanja na območju, kjer se spremeni fazna hitrost valovanja. Odboj na območju vlakna, kjer se spreminja $\beta$, najpreprosteje opišemo z enačbo za odboj na meji dveh dielektrikov pri pravokotnem vpadu. Odbita amplituda je tedaj (enačba 1.44)

$$E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_0. \tag{10.143}$$

Mislimo si, da je sprememba $\beta$ na delu vlakna sestavljena iz majhnih stopničastih sprememb $\Delta\beta_i$ na intervalih $\Delta z$. Za ravno valovanje je sprememba fazne hitrosti sorazmerna s spremembo lomnega količnika, zato iz enačbe (10.143) sledi, da je delež odbitega valovanja na stopničasti spremembi $\Delta\beta_i$ enak

$$\Delta E_i = \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} E_0. \tag{10.144}$$

Privzeli smo, da je delež odbitega valovanja tako majhen, da ni treba upoštevati spremembe amplitude vpadnega vala $E_0$. Celotno odbito valovanje je vsota prispevkov na posameznih stopnicah $\Delta\beta_i$, pri čemer moramo upoštevati še različne faze delno odbitih valovanj

$$E_r = \sum \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} e^{2i\beta z_i} E_0 = \frac{1}{2\beta} \sum \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z_i} \Delta z E_0. \tag{10.145}$$

Preidemo z vsote na integral in zapišemo amplitudo odbitega valovanja

$$E_r = \frac{E_0}{2\beta} \int \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z} dz. \tag{10.146}$$

Za primer poglejmo linearno spremembo lomnega količnika in linearno spremembo valovnega števila za $\Delta\beta_0$ na razdalji $L$. Krajši račun pokaže, da je delež intenzitete odbitega valovanja

$$\frac{I_r}{I_0} = \left( \frac{\Delta\beta_0}{2\beta} \frac{\sin\beta L}{\beta L} \right)^2. \tag{10.147}$$

Odbojnost je največja, kadar je $L \ll 1/\beta$, torej kadar je sprememba $\beta$ ostra stopnica. Čim počasnejša je sprememba, tem manj je odboja. Kadar je $\sin\beta L = 0$, pride do destruktivne interference vseh delnih odbojev in odbojnost je enaka nič.

**Naloga 10.8.1** Naj se valovno število ob prehodu spreminja kot funkcija erf

$$\beta(z) = \frac{2\Delta\beta_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \tag{10.148}$$

Pokaži, da je amplituda odbitega valovanja v tem primeru enaka

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{\Delta\beta_0}{\beta} e^{-\beta^2}. \tag{10.149}$$

## 10.9 Nelinearni pojavi v optičnih vlaknih

V osmem poglavju smo podrobno obravnavali nelinearne optične pojave v snovi. Spoznali smo nelinearne pojave drugega reda, do katerih pride v snoveh brez centra inverzije, in nelinearne pojave tretjega reda, do katerih pride v vseh snoveh ob dovolj velikih vpadnih močeh svetlobe. Na kratko povzemimo, kako se ti pojavi odražajo v optičnih vodnikih.

### Pojavi drugega reda

Optična vlakna so praviloma narejena iz $SiO_2$, za katerega zaradi simetrije molekul velja, da je $\chi^{(2)} = 0$. Nelinearnih pojavov drugega reda zato ne opazimo, razen izjemoma na morebitnih nepravilnostih v steklu. Da bi izkoristili nelinearne optične pojave drugega reda in v vodnikih dosegli na primer optično frekvenčno podvajanje, morajo biti vodniki zgrajeni iz snovi, ki imajo nelinearno susceptibilnost različno od nič. Prednost vodnikov pred navadnimi kristali je v tem, da svetloba znotraj sredice vodnika potuje brez uklona. Posledično je pretvorba iz osnovne v frekvenčno podvojeno svetlobo, ki je sorazmerna s kvadratom dolžine (enačba 8.26), zelo učinkovita. Seveda mora biti izpolnjen tudi pogoj za ujemanje faz. To omogoča rodovna disperzija, zaradi katere lahko rodova pri osnovni in podvojeni frekvenci potujeta po vodniku z enako propagacijsko konstanto.

### Pojavi tretjega reda

V navadnih optičnih vlaknih prevladujejo nelinearni pojavi tretjega reda, ki jih v grobem delimo v dve skupini. Prva vključuje neelastično sipanje (Ramanovo in Brillouinovo), druga pa pojave, ki temeljijo na optičnem Kerrovem pojavu.

Obravnavajmo najprej stimulirano Ramanovo sipanje (SRS), ki smo ga spoznali v poglavju (8.16). Spomnimo se, da se pri SRS intenziteta svetlobe pri vpadni frekvenci zmanjšuje, na njen račun pa se eksponentno povečuje intenziteta valovanja z malenkost nižjo frekvenco. Razlika frekvenc ustreza vibracijskemu prehodu molekul v snovi. SRS v telekomunikacijskih vlaknih vodi do popačenja signala in povečanja spektralne širine. Po drugi strani stimulirano Ramanovo sipanje izkoriščamo za ojačenje signala v vodnikih. Če v vlakno posvetimo z močno črpalno svetlobo, katere frekvenca se od signalnega žarka razlikuje za vibracijsko frekvenco ($\sim$ 13 THz), se signalni žarek ojači. Ker je spekter $SiO_2$ razmeroma širok ($\sim$ 5 THz), tega pogoja ni težko izpolniti.

Pri stimuliranem Brillouinovem sipanju (SBS) pride do odboja vpadne svetlobe na optično vzbujenem akustičnem valu v snovi (poglavje 8.16). Posledično se signal v smeri naprej oslabi, pojavi pa se odbit val, katerega intenziteta narašča eksponentno z intenziteto vpadne svetlobe. Neželenemu pojavu se lahko izognemo z zmanjšanjem vpadne moči (pod $\sim$ 100 mW na kanal) ali povečanjem spektralne širine vpadne svetlobe.

Druga skupina nelinearnih pojavov temelji na spreminjanju lomnega količnika z intenziteto vpadne svetlobe (Kerrov pojav, poglavje 8.9). Opišimo tri pojave:

1. Samo-fazna modulacija ali lastna fazna modulacija (*SPM – Self-phase modulation*). Različni deli sunka zaradi različne intenzitete občutijo različen lomni količnik in pride do tako imenovanega čričkanja (enačba 8.120 in slika 8.13). Pojav vodi do spektralne razširitve in zaradi disperzije tudi do časovnega podaljšanja sunka. Z ustrezno disperzijo dosežemo krajšanje sunkov ali pojav optičnih solitonov (poglavje 8.12).
2. Navzkrižna fazna modulacija (*CPM – Cross-phase modulation*). Ko po vlaknu potuje več svetlobnih sunkov hkrati, prvi sunek povzroči spremembo lomnega količnika, drugi sunki pa to spremembo občutijo. Gre za medsebojno motnjo med sunki, ki vodi do spektralne razširitve. Pojav lahko izkoristimo za krajšanje sunkov ali za izdelavo optičnih stikal, saj lahko z zunanjim kontrolnim žarkom spreminjamo fazo izbranega sunka.
3. Sklopitev štirih valov (*FWM – Four-wave mixing*). Če po vlaknu potuje več valovanj z različnimi frekvencami, pride zaradi nelinearne sklopitve do pojava valovanj pri dodatnih frekvencah (vsotah in razlikah obstoječih valovanj). V primeru, da uporabimo vlakno z zelo majhno disperzijo ali celo brez nje, pride do ujemanja faz in znatne pretvorbe v druge frekvence.

# 11. Detektorji svetlobe

V tem poglavju bomo spoznali detektorje svetlobe, ki so nujni za kvantitativno obravnavo optičnih pojavov in sprejemanje optičnih signalov. Detektorji se med seboj razlikujejo po načinu delovanja in po svojih specifikacijah, ki jih bomo podrobneje spoznali v nadaljevanju. Največ pozornosti bomo posvetili polprevodniškim detektorjem, ki so danes najbolj razširjeni. Na koncu bomo spoznali še šum pri detekciji, ki omejuje uporabnost naprav.

## 11.1 Osnovne karakteristike detektorjev

Osnovna naloga optičnih detektorjev je spremeniti vpadni svetlobni signal v nek drug signal, ki ga lahko natančno merimo. Navadno sta to električni tok ali električna napetost, ki pa sta sorazmerna z močjo vpadne svetlobe in ne z amplitudo električne poljske jakosti. Pri navadni detekciji se tako podatek o fazi valovanja izgubi. V grobem delimo detektorje v dve skupini, na termične in kvantne. Prvi pretvorijo energijo vpadne svetlobe v toploto, drugi pa temeljijo na fotoefektu, pri katerem vpadni foton iz snovi izbije elektron ali v snovi ustvari par elektron–vrzel.

Termični detektorji zaznavajo svetlobo preko povišanja temperature senzorja zaradi absorbirane svetlobe. Taki detektorji zaznavajo energijo vpadle svetlobe. Njihov odziv je razmeroma počasen, zato jih uporabljamo predvsem za merjenje optične moči, lahko tudi zelo velike. Po drugi strani pa je odziv termičnih detektorjev neodvisen od valovne dolžine vpadne svetlobe, zaradi česar so termični detektorji uporabni na širokem območju od globokega ultravijoličnega do daljnega infrardečega dela svetlobe. Uporaba prevlada predvsem v infrardečem, teraherčnem ali celo mikrovalovnem delu, kjer so drugi detektorji bistveno manj občutljivi. Primeri termičnih detektorjev so bolometer, termočlen in piroelektrični detektor.

Druga skupina so kvantni detektorji, v katerih se fotoni absorbirajo in povzročijo pojav prostih nosilcev naboja. Taki detektorji zaznavajo število vpadnih fotonov. Odlikuje jih zelo hiter odziv (tipično pod µs) in velika občutljivost. Njihova poglavitna slabost je omejen obseg valovnih dolžin, pri katerih zaznavajo svetlobo, poleg tega jih je za optimalno delovanje treba hladiti. Primeri so vakuumske, polprevodniške in plazovne fotodiode.

Osnovne karakteristike, ki omogočajo primerjavo detektorjev in določajo njihovo uporabnost, so občutljivost, spektralni odziv, odzivni čas in prag detekcije:

1. Občutljivost $R$ pove, koliko je izhodnega signala na enoto vpadnega svetlobnega toka. Enota za občutljivost je A/W, če merimo tok, ali V/W, če na izhodu zaznavamo napetost.
2. Spektralni odziv pove, kako se občutljivost spreminja z valovno dolžino $R(\lambda)$. Pri termičnih detektorjih je $R(\lambda)$ konstanta, medtem ko kvantni detektorji delujejo le v določenem območju valovnih dolžin, ki je odvisen od snovi, iz katere je detektor narejen.
3. Odzivni čas pove, kako hitro se detektor odzove na spremembo optičnega signala. Predvsem optične telekomunikacije zahtevajo izredno hiter odziv.
4. Prag detekcije pove, pri kolikšni vpadni svetlobni moči postane razmerje med signalom ($S$ – *signal*) in šumom ($N$ – *noise*) enako $S/N = 1$.

Slika 11.1: Primerjava spektralnega odziva termičnega in kvantnega detektorja

## 11.2 Termični detektorji

Termične detektorje se zaradi njihovega razmeroma počasnega odziva uporablja predvsem za merjenje vpadne moči in za detekcijo svetlobe tistih valovnih dolžin, za katere ni drugih preprostih ali učinkovitih detektorjev. Pogosto se uporabljajo za termografske kamere in v astronomiji.

Delovanje termičnih detektorjev temelji na spremembi temperature zaradi absorpcije svetlobe (energije). Detektorji se med seboj razlikujejo predvsem v načinu pretvorbe spremembe temperature v električni signal. Tipalo termičnih detektorjev mora biti pri vseh vrstah dobro počrnjeno, da absorbira svetlobo v čim širšem spektralnem območju. Čeprav je njihova občutljivost načeloma neodvisna od valovne dolžine vpadne svetlobe, se v praksi pojavijo omejitve zaradi prepustnosti okna in absorpcijskega spektra črnega nanosa. Tipala so majhna, zato da dosežemo čim hitrejši odziv, ki pa je kljub temu navadno počasnejši od 1 ms. Sodobnejši detektorji se po odzivnem času že približujejo kvantnim, saj dosegajo odzivne čase tudi do $\sim 10$ µs. Termične detektorje uporabljamo pri sobni temperaturi, za zahtevne meritve pa jih hladimo na nekaj K.

Obravnavajmo termični detektor, katerega tipalo naj ima toplotno kapaciteto $C$. Toplota se s tipala odvaja v toplotni zalogovnik s temperaturo $T_0$, toplotne izgube pa označimo z $\Lambda$. Ko na tipalo vpada svetloba z močjo $P$, začne temperatura tipala $T$ zaradi absorpcije svetlobe naraščati, hkrati pa se tipalo ohlaja zaradi odtekanja toplote. Zapišemo

$$\frac{dW}{dt} = C\frac{dT}{dt} = P - \Lambda(T - T_0). \tag{11.1}$$

V stacionarnem stanju (ob konstantnem vpadnem svetlobnem toku) se temperatura tipala ne spreminja in razlika temperature tipala in zalogovnika je

$$T - T_0 = \frac{P}{\Lambda}. \tag{11.2}$$

Občutljivost detektorja, ki je sorazmerna z razliko temperatur, je torej obratno sorazmerna s toplotnimi izgubami. Za večjo občutljivost moramo toplotne izgube detektorja kar se da zmanjšati.

Po enačbi (11.1) se temperatura približuje stacionarni vrednosti s časovno konstanto

$$\tau = \frac{C}{\Lambda}, \tag{11.3}$$

ki je ključni parameter za določanje odzivnega časa detektorja. Odzivni čas je sorazmeren s kapaciteto senzorja, zato so tipala praviloma zelo majhna.

Iz enačbe (11.3) sledi, da moramo za dosego čim krajšega odzivnega časa toplotne izgube kar se da povečati. Velike izgube sicer skrajšajo odzivni čas, vendar tudi zmanjšajo občutljivost (enačba 11.2), zato termični detektorji ne morejo imeti hkrati velikega in hitrega odziva. Če želimo toplotne izgube povečati in s tem skrajšati odzivni čas, detektorje hladimo z zrakom ali celo z vodo, navzdol pa so toplotne izgube omejene s sevanjem.

Podrobneje poglejmo odziv termičnega detektorja od vpadne moči. Naj se vpadna moč spreminja s časom, temperatura na detektorju pa temu sledi z določeno zakasnitvijo. Odziv najlepše izračunamo v Fourierevem prostoru. Vpadno moč in temperaturo izrazimo kot

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\omega e^{i\omega t} d\omega \quad \text{in} \quad T = T_0 + \int_{-\infty}^{\infty} T_\omega e^{i\omega t} d\omega. \tag{11.4}$$

To vstavimo v enačbo (11.1) in zapišemo

$$\int_{-\infty}^{\infty} i\omega T_\omega e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} (P_\omega - \Lambda T_\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{11.5}$$

Enačbi zadostimo, če izenačimo člene pred vsako spektralno komponento posebej

$$i\omega T_\omega = \frac{1}{C} \left( P_\omega - \Lambda T_\omega \right). \tag{11.6}$$

Če vpeljemo odzivni čas $\tau$ (enačba 11.3), sledi

$$T_\omega = \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{1}{1 + i\omega\tau} \right) P_\omega. \tag{11.7}$$

Tako smo tudi z računom pokazali, da detektor sledi le počasnim spremembam signala.

---

**Naloga 11.2.1** Pokaži, da je odziv termičnega detektorja na zelo kratek svetlobni sunek oblike $P(t) = P_0 \delta(t - t_0)$ enak

$$T(t) = \frac{iP_0}{\Lambda} e^{-(t-t_0)/\tau}. \tag{11.8}$$

---

## Bolometer

Bolometer je termični detektor, pri katerem zaznavamo spremembo električne upornosti zaradi spremembe temperature tipala[1]. Tipalo je praviloma počrnjena tanka ploščica, navadno je narejena iz termistorja[2], polprevodnika ali superprevodnika. Tipalo preko referenčnega upora priključimo na napetost, preko kondenzatorja pa merimo napetost na njem. Za meritve konstantnega svetlobnega toka tipalo navadno vežemo v Wheatstonov mostiček. V obeh primerih za referenčni upor vzamemo enako tipalo, ki pa ga zaščitimo pred vpadno svetlobo, tako da postane sistem neobčutljiv na morebitne spremembe temperature okolice.

Prednost bolometrov s termistorjem je približno linearna zveza med upornostjo in temperaturo. Uporabljamo jih predvsem za merjenje večjih vpadnih moči, saj taki detektorji niso zelo občutljivi ($R \sim 100$ V/W). So pa robustni, stabilni in delujejo pri sobni temperaturi. Odzivni časi so okoli $\tau \sim 1$–20 ms. Pri polprevodniških bolometrih upornost pojema eksponentno s temperaturo. Primerni so za detekcijo teraherčnih valovanj, vendar mora biti za ta namen bolometer (npr. germanijev) hlajen s tekočim helijem. Tako lahko dosežemo občutljivosti večje od $R \sim 10^8$ V/W. Zelo občutljivi so tudi detektorji s superprevodnimi tipali, saj je odvisnost upornosti od temperature v bližini prehoda v superprevodno stanje zelo velika ($R \sim 10^3$ V/W).

[1] Prvi bolometer je leta 1881 naredil ameriški fizik, astronom in letalski inženir Samuel Pierpont Langley, 1834–1906.

[2] Termistor je upornik, katerega upornost se spreminja s temperaturo.

Slika 11.2: Shema bolometra

Slika 11.3: Bolometer za merjenje prasevanja. Premer kovanca za primerjavo je 18 mm. Vir: NASA/JPL-Caltech.

### Termočlen

Termočlen je sestavljen iz dveh različnih vodnikov. En spoj vodnikov počrnimo, drugega, referenčnega, pa zaščitimo pred svetlobo. Zaradi vpadne svetlobe se počrnjeni spoj segreje, med obema spojema nastane temperaturna razlika in zaradi termoelektričnega pojava tudi električna napetost, ki jo lahko merimo. Pri tem pazimo, da je električna prevodnost vodnikov čim večja, njihova toplotna prevodnost pa čim manjša. Odzivni čas termočlenov je $\tau \sim 10$–20 ms, občutljivost pa $R \sim 10$ V/W. Ker so napetosti, ki se pojavijo med stikoma, razmeroma majhne ($\sim 10$ μV/K) pogosto vežemo več (nekaj deset) termočlenov zaporedno v termobaterijo. Občutljivost s tem naraste na $R \sim 200$ V/W, podaljša pa se časovna konstanta na $\tau \sim 10$–2000 ms. Prednost termočlenov je, da za svoje delovanje ne potrebujejo zunanjega napajanja.

### Piroelektrični detektor

Piroelektriki so snovi brez centra inverzije, v katerih je lastna električna polarizacija odvisna od temperature (npr. $LiTaO_3$, triglicin sulfat TGS in vsi feroelektriki). Piroelektrični detektor je narejen iz ploščice piroelektrične snovi med dvema elektrodama oziroma ploščama kondenzatorja. Ko se ploščica zaradi absorbirane svetlobe segreje, se ji spremeni polarizacija. Med elektrodama se pojavi premikalni tok, ki ga merimo na merilnem uporniku.

Zveza med spremembo temperature in spremembo polarizacije je

$$dP = a\,dT, \tag{11.9}$$

kjer je $a$ piroelektrični koeficient.

Med elektrodama s površino $S$ preteče naboj

$$de = I\,dt = S\,dP = Sa\,dT. \tag{11.10}$$

Tok skozi tipalo je

$$I = Sa\frac{dT}{dt}. \tag{11.11}$$

Piroelektrični detektor je torej občutljiv na časovni odvod temperature detektorja, s tem pa tudi na spreminjanje vpadne svetlobne moči. V stacionarnem stanju detektor ne proizvaja električnega toka, zato moramo za merjenje konstantnega svetlobnega toka vpadno svetlobo najprej modulirati. Navadno to naredimo kar z mehanskim zaklopom. Piroelektrični detektorji se večinoma uporabljajo kot preprosti infrardeči detektorji. Njihova občutljivost je $R \sim 1$ µA/W, odzivni čas pa odvisen od upornika v vezju, ampak lahko doseže vrednosti $\tau \sim 10$ µs.

Poglejmo temperaturni odziv na tipalu. Izhajamo iz enačb (11.4), (11.7) in (11.11) in izračunajmo tok $I$ v odvisnosti od frekvence modulacije.

$$I = Sa\frac{dT}{dt} = Sa\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} T_\omega e^{i\omega t}\,d\omega = Sa\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{P_\omega}{1+i\omega\tau}\right) i\omega\, e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{11.12}$$

Sledi

$$I_\omega = \frac{i\omega\, SaP_\omega/\Lambda}{1+i\omega\tau}. \tag{11.13}$$

Pri majhnih frekvencah tok narašča, pri velikih frekvencah pa postane neodvisen od frekvence modulacije vpadne svetlobe. Vendar to še ne pomeni, da lahko moduliramo s poljubno veliko frekvenco. Poleg relaksacijskega časa detektorja ima namreč karakteristični čas tudi elektronsko vezje, ki določa zgornjo mejo za frekvenco modulacije. Ta je enak $\tau_e = R_e C_e$, pri čemer sta $R_e$ upornost sistema in $C_e$ električna kapaciteta detektorja.

Slika 11.4: Spektralni odziv piroelektričnega detektorja na eni strani določajo toplotne izgube $\Lambda$ in toplotna kapaciteta detektorja $C$, navzgor pa odziv omejuje odziv elektronskega vezja $\tau_e$.

**Naloga 11.2.2** Piroelektrični detektor naredimo iz kristala $LiTaO_3$ s koeficientom piroelektričnosti $a = 2,3 \times 10^{-4}$ As/m$^2$K in povprečno dielektričnostjo $\varepsilon = 50$. Izračunaj dovoljeno električno upornost sistema, da detektor deluje za frekvence do 1 MHz. Dimenzija detektorja je $S = 1$ cm$^2$ in debelina $d = 1$ mm.

## 11.3 Fotoefekt

Delovanje kvantnih detektorjev temelji na fotoefektu. To je pojav, pri katerem vpadni fotoni iz snovi izbijajo elektrone. Izbiti elektroni lahko ubežijo kot prosti elektroni (t. i. zunanji fotoefekt), ali pa ostanejo ujeti v snovi – a mobilni – in tako povečajo njeno prevodnost (notranji fotoefekt). V obeh primerih pride do fotoefekta le, če je energija vpadnih fotonov večja od neke določene energije. Pod to vrednostjo fotoefekta ni, ne glede na moč vpadne svetlobe. Fotoefekt je prvič opazil Hertz[3] leta 1887, za njegovo razlago leta 1905 pa je Einstein[4] dobil Nobelovo nagrado.

Poglejmo najprej zunanji fotoefekt, pri katerem elektron postane povsem prost. Da se to sploh lahko zgodi, mora biti energija vpadnega fotona dovolj velika, da elektron premaga potencialno bariero in izstopi iz prevodnega pasu (slika 11.5 a). Najmanjšo energijo, ki je za to potrebna, imenujemo v kovinah izstopno delo $\Phi$. Če je energija fotona večja, gre preostanek energije v kinetično energijo izbitega elektrona.

Slika 11.5: Shema energijskih pasov in zunanjega fotoefekta v kovini (a) in polprevodniku (b) ter notranjega fotoefekta v polprevodniku (c). $\Phi$ označuje izstopno delo, $E_g$ širino reže med valenčnim in prevodnim pasom polprevodnika, $E_a$ pa elektronsko afiniteto.

Zunanji fotoefekt poteka tudi v polprevodnikih (slika 11.5 b), v katerih foton izbije elektron iz valenčnega pasu. Njegova energija mora biti večja od vsote energije reže in elektronske afinitete, da lahko elektron zapusti snov. Z uporabo ustreznih materialov lahko dosežemo negativno elektronsko afiniteto in je zato potrebna energija fotona kar enaka širini energijske reže.

Izstopno delo za kovine $\Phi$ je od okoli 2 eV za cezij pa do okoli 6 eV za platino. Ustrezna valovna dolžina svetlobe, ki še povzroči fotoefekt, je

$$\lambda \leq \frac{hc}{\Phi}, \tag{11.14}$$

kar je 580 nm za primer cezija in samo okoli 200 nm za platino. Da lahko fotoefekt izkoristimo za detektorje vidne svetlobe, uporabimo druge snovi, na primer Cs-Te, Cs-Sb, Na-K-Sb-Cs ali GaAs:Cs. Tako lahko zaznavamo fotone z valovnimi dolžinami od ultravijoličnega pa vse do bližnjega infrardečega valovanja.

Pri notranjem fotoefektu (slika 11.5 c) elektron snovi ne zapusti, ampak zgolj preide iz enega energijskega pasu v drugega. Tipično to poteka v polprevodnikih, kjer absorpcija fotona povzroči nastanek para elektron–vrzel, prag za nastanek para pa določa širina reže med energijskima nivojema.

Primeri detektorjev, ki temeljijo na zunanjem fotoefektu, so fotocelice in fotopomnoževalke, na notranjem fotoefektu pa temeljijo na primer fotoprevodniki, polprevodniške in plazovne fotodiode.

[3] Nemški fizik Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894.
[4] Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.

Za zdaj smo napisali, da fotoefekt poteče, ko foton izbije elektron. Vendar pri tem ni uspešen prav vsak foton, zato vpeljemo še en parameter, ki ga imenujemo kvantni izkoristek $\eta$. Ta parameter pove verjetnost, da vpadni foton z valovno dolžino $\lambda$ oziroma frekvenco $\nu$ iz snovi izbije elektron. Električni tok, ki steče pri vpadni svetlobni moči $P$, je tako

$$I = \eta e_0 n_F = \eta \frac{e_0 P}{h\nu}, \tag{11.15}$$

kje $n_F$ označuje število vpadnih fotonov na časovno enoto. Kvantni izkoristek je močno odvisen od valovne dolžine vpadne svetlobe in seveda od snovi, na katero svetloba vpada. Za fotone z energijo, ki je manjša od izstopnega dela oziroma od širine energijske reže, je kvantni izkoristek praktično enak nič, nato pa strmo naraste in lahko doseže vrednosti, večje od 90 %. Podrobneje ga bomo obravnavali pri posameznih primerih detektorjev.

★ V praksi ločimo dve vrsti kvantnega izkoristka: zunanji in notranji. Zunanji je vpeljan kot razmerje med številom izbitih elektronov in fotonov, ki vpadejo na detektor. Ker pa se ob vpadu na detektor vedno nekaj fotonov odbije ali siplje, vpeljemo še notranji kvantni izkoristek kot razmerje števila elektronov in fotonov, ki se dejansko absorbirajo v detektorju. Zunanji izkoristek je vedno manjši od notranjega in je neke vrste efektivni izkoristek.

Iz enačbe (11.15) hitro izračunamo še občutljivost detektorja

$$R = \frac{I}{P} = \frac{\eta e_0}{h\nu}. \tag{11.16}$$

## 11.4 Vakuumska fotodioda (fotocelica) in fotopomnoževalka

### Fotocelica

Najpreprostejši kvantni detektor na zunanji fotoefekt je fotocelica ali vakuumska fotodioda (slika 11.6). Fotocelica deluje tako, da svetloba vpada na katodo, zaprto v vakuumirani stekleni bučki, in tam povzroči fotoefekt. Izbiti elektroni se pod zunanjo napetostjo $V$ pospešijo do anode in z ampermetrom ($A$) merimo električni tok, ki steče med katodo in anodo. Ker je tok sorazmeren s številom vpadlih fotonov, lahko na ta način izmerimo moč vpadne svetlobe.

Slika 11.6: Shema fotocelice, v kateri poteka fotoefekt. Vpadna svetloba iz kovinske katode izbije elektrone, zaradi česar med katodo in anodo steče tok.

Območje detekcije fotocelice je določeno z izstopnim delom kovine, iz katere fotoni izbijajo elektrone. Potrebno energijo fotona lahko precej zmanjšamo, če namesto čistih kovin uporabimo bi- ali večalkalne katode (npr. $Na_2KSbCs$), ali pa polprevodnike, na katere nanesemo tanko plast Cs ali $Cs_2O$. S tem ustvarimo negativno elektronsko afiniteto in izstopno delo je enako širini energijske reže, kar omogoča zaznavanje svetlobe do valovnih dolžin okoli 1600 nm. Na ultravijoličnem območju je delovanje omejeno na okoli 160 nm zaradi neprepustnosti stekla, iz katerega je narejena bučka.

Slika 11.7: Kvantni izkoristek fotocelic za različne snovi. Povzeto po Hamamatsu Photonics.

Odzivni čas vakuumske fotodiode je odvisen od časa preleta elektronov od katode do anode. Da je ta čas čim krajši, je napetost na fotocelici velika, pogosto več kV, kar omogoča zelo kratke odzivne čase, tudi do $0,1$ ns. Enostavnost in hitrost sta torej prednosti fotocelice, njena glavna pomanjkljivost pa je razmeroma nizek kvantni izkoristek. Izkoristek je seveda močno odvisen od valovne dolžine vpadnega valovanja in snovi, iz katere je narejena katoda. Največje vrednosti, ki jih dosega, so okoli 40 %, pogosto pa več velikostnih redov manj. Vrednosti so razmeroma nizke, saj se izbiti elektroni gibljejo v vse smeri in se pogosto sipljejo, preden sploh dosežejo površino.

Dodaten problem fotocelic je, da pri končnih temperaturah prihaja do spontane oddaje elektrona. Nekaj električnega toka zato teče tudi v popolni temi. To je tako imenovani temni tok fotodiode in tipično dosega vrednosti okoli $10^{-15}$ A, lahko pa tudi do več nA. Za občutljive meritve je treba zato vakuumsko fotodiodo hladiti.

**Naloga 11.4.1** Izračunaj občutljivost fotocelice na osnovi GaAs za valovanje z valovno dolžino $\lambda = 620$ nm. Pri tem kvantni izkoristek odčitaj s slike (11.7).

### Fotopomnoževalka

Fotopomnoževalke so fotocelice z vgrajenim ojačenjem. Ojačenje dosežemo tako, da izbit fotoelektron najprej pospešimo z napetostjo 100–150 V na vmesno elektrodo, tako imenovano dinodo, iz katere izbije več ($\sim$ 5–10, redkeje tudi do 40) sekundarnih elektronov. Izbiti elektroni potujejo do naslednje dinode, ki je pod višjo pozitivno napetostjo (tipično okoli 100 V višjo), kjer ponovno izbijejo elektrone, ki vpadejo na naslednjo dinodo, ki je pod še višjo napetostjo ... Pomnoževanje se večkrat ponovi (navadno okoli desetkrat), število elektronov eksponentno narašča in na en vpadni foton lahko na anodo vpade $10^9$ elektronov. Občutljivost fotopomnoževalk je precej večja od občutljivosti vakuumske fotodiode in dosega odzivnost na anodi do $R \sim 10^6$ A/W. Fotopomnoževalka tako omogoča štetje posameznih fotonov, po drugi strani pa moramo pri navadnih osvetlitvah paziti, da fotopomnoževalke ne osvetlimo preveč.

Slika 11.8: Shema fotopomnoževalke. Vpadna svetloba iz katode izbije elektrone, ti pa iz dinod izbijajo dodatne elektrone in izhodni signal se močno ojači.

Fotopomnoževalke imajo zelo kratek odzivni čas, ki je odvisen od postavitve dinod. Posamezni elektroni do anode potujejo različno dolgo, zato je sunek na izhodu razširjen, tipično okoli $\sim 0,1$–20 ns. Za manj zahtevne aplikacije pogosto merimo kar povprečni tok z anode. Kadar pa opazujemo posamezne fotone, zaznamo na izhodu zaporedje sunkov. Takrat lahko amplituda izhodnega signala močno niha, saj je koeficient ojačenja odvisen od števila izbitih elektronov, kar pa je statistični proces.

## 11.5 Fotoprevodni detektorji

Fotoprevodni detektorji[5] so detektorji, ki temeljijo na notranjem fotoefektu. Vpadni foton z dovolj veliko energijo se absorbira, vendar ne izbije elektrona v prostor, ampak ga iz valenčnega pasu dvigne v prevodnega. Pri tem nastane par elektron–vrzel. Ob priključeni napetosti se nosilci naboja začnejo premikati in steče tok, ki ga merimo. Z naraščajočim številom fotonov se prevodnost fotoprevodnika veča, zato lahko z merjenjem upornosti določimo intenziteto vpadle svetlobe. Tipično so fotoprevodniki iz polprevodnikov, lahko pa so tudi iz izolatorjev.

Da foton lahko vzbudi elektron iz valenčnega v prevodni pas, mora biti njegova energija dovolj velika. V čistih (nedopiranih) polprevodnikih to pomeni, da mora biti energija fotona večja od širine reže. Za silicij, na primer, je širina reže 1,1 eV, s čimer lahko zaznavamo svetlobo z valovno dolžino do okoli $1,1$ µm, za germanij 0,67 eV ($1,8$ µm) in za PbS 0,37 eV ($3,4$ µm). Za detekcijo daljših valovnih dolžin ne uporabljamo polprevodnikov z manjšo energijsko režo, ampak dopirane polprevodnike (slika 11.9). Z dodatnim energijskim nivojem med valenčnim in prevodnim pasom občutno zmanjšamo potrebno energijo vpadnih fotonov. Vendar je pri nizkih energijah prispevek termično vzbujenih elektronov že tako velik, da je treba detektorje hladiti, navadno s tekočim dušikom ali celo tekočim helijem. Primer fotoprevodnih detektorjev je germanij, dopiran s cinkom, s katerim lahko zaznavamo svetlobo do okoli 40 µm. Pri tem ga hladimo na 4 K, da zmanjšamo pojav termično vzbujenih nosilcev naboja.

[5] Fotoprevodne detektorje včasih imenujemo tudi fotouporniki.

Slika 11.9: Shema prehoda elektrona v fotoprevodniku: prehod v čistem polprevodniku (a), $n$-dopiranem polprevodniku (b) in $p$-dopiranem polprevodniku (c). Z dopiranjem povečamo območje delovanja detektorja v infrardečem delu.

Izračunajmo električni tok, ki steče skozi fotoprevodnik, ko nanj posvetimo. Spomnimo se, da je gostota električnega toka $j$ enaka vsoti prispevkov elektronov in vrzeli

$$j = e_0 n_v v_v + e_0 n_e v_e, \tag{11.17}$$

pri čemer $n_v$ in $n_e$ pomenita gostoto vrzeli in elektronov v snovi, $v_v$ in $v_e$ pa hitrost vrzeli in elektronov. Hitrost premikanja je sorazmerna z električno poljsko jakostjo $E$, ki je priključena na vzorec, sorazmernostni faktor pa je gibljivost $\beta$. Ko posvetimo na vzorec, se $n_v$ in $n_e$ povečata za $\Delta n_v$ in $\Delta n_e$, gostota električnega toka pa naraste za

$$\Delta j = e_0 \Delta n_v v_v + e_0 \Delta n_e v_e. \tag{11.18}$$

V stacionarnem stanju se število nosilcev naboja ne spreminja in velja

$$0 = \frac{dn_v}{dt} = \frac{\eta_v P}{h\nu(Sl)} - \frac{\Delta n_v}{\tau_v} \tag{11.19}$$

in podobno za elektrone. Pri tem je $\eta$ kvantni izkoristek, $P$ moč vpadne svetlobe, $Sl$ prostornina detektorja in $\tau$ življenjski čas vrzeli oziroma elektrona. Ko stacionarno vrednost $\Delta n_v$ in $\Delta n_e$ vstavimo v enačbo (11.18), dobimo

$$\Delta j = e_0 \frac{\eta_v P \tau_v}{h\nu(Sl)} \beta_v E + e_0 \frac{\eta_e P \tau_e}{h\nu(Sl)} \beta_e E. \tag{11.20}$$

Če vpeljemo še napetost $U = E/l$, zapišemo celotni tok skozi fotoprevodnik zaradi vpadle svetlobe kot

$$\Delta I = \Delta j S = \frac{e_0 U P}{h\nu l^2} \left(\eta_v \tau_v \beta_v + \eta_e \tau_e \beta_e\right). \tag{11.21}$$

Pogosto je gibljivost elektronov znatno večja od gibljivosti vrzeli (npr. $0,135\ \mathrm{m^2/V\,s}$ proti $0,048\ \mathrm{m^2/V\,s}$ za silicij), zato prvi člen v oklepaju zanemarimo in zapišemo

$$\boxed{\Delta I = G\left(\frac{e_0 \eta_e}{h\nu}\right) P,} \tag{11.22}$$

pri čemer je koeficient ojačenja

$$G = \frac{\beta_e \tau_e U}{l^2} = \frac{\tau_e}{\tau}. \tag{11.23}$$

Vpeljali smo še čas preleta $\tau = v_e/l = \beta_e E/l = \beta_e U/l^2$.

Koeficient $G$ opiše ojačenje signala. Njegova vrednost je odvisna od vrste snovi in gibljivosti nosilcev naboja v njej, velikosti detektorja in tudi priključene napetosti, zato lahko $G$ zavzame vrednosti od manj kot ena pa vse do $10^6$.

**Naloga 11.5.1** Izračunali smo spremembo toka, če fotoprevodnik osvetlimo s konstantno vpadno močjo. Pokaži, da je v primeru periodično spremenljive moči odziv enak

$$\Delta I_\omega = G\left(\frac{e_0\eta_e}{h\nu}\right)\frac{P_\omega}{1+i\omega\tau_e}. \tag{11.24}$$

Fotoprevodniki so uporabni na širokem spektralnem območju, od ultravijoličnega do daljne infrardečega valovanja. V vidnem in bližnjem infrardečem delu svetlobe se uporablja pretežno silicijeve fotoprevodnike, germanijeve pa za valovne dolžine do $1,8$ µm. Za zaznavanje valovnih dolžin med okoli 2 µm in 7 µm so najprimernejši InAs, InSb in PbS detektorji, pri še daljših valovnih dolžinah pa se uporablja germanij, dopiran z zlatom, bakrom, cinkom, borom ... Kvantni izkoristek takih detektorjev je razmeroma velik ($\eta = 0,5$ za Ge:Cu), vendar je lahko faktor ojačenja $G \ll 1$ (npr. $G = 0,03$ za Ge:Hg).

Hitrost odziva fotoprevodnika je odvisna od časa preleta nosilcev naboja, ki je določen z geometrijo detektorja, in od karakterističnega časa elektronskega vezja. Tipični odzivni časi so okoli mikrosekunde, vendar lahko sežejo tudi do desetin milisekund, ali pa v izjemnih primerih do nanosekund za zelo majhne detektorje. S skrajšanjem rekombinacijskega časa lahko sicer skrajšamo odzivni čas detektorja, vendar hkrati zmanjšamo tudi njegovo občutljivost.

★ Fotoprevodni detektorji so narejeni iz zelo tankih plasti fotoprevodnika, saj močno absorbira svetlobo. Tako za absorpcijo 70–90% svetlobe zadošča le 1–2 µm debela plast. Elektrode se pogosto prepletajo, da se zmanjša dolžina preleta $l$ in poveča ojačenje $G$.

## 11.6 Polprevodniške fotodiode

Drugi primer detektorjev, ki temeljijo na notranjem fotoefektu, so polprevodniške fotodiode. Te so danes najpogostejša in najbolj razširjena vrsta detektorjev svetlobe, uporabljamo jih med drugim tudi v fotoaparatih in sončnih celicah. Fotodiode so sestavljene iz *p*- in *n*-dopiranega polprevodnika (*p*-*n* fotodiode) ali pa je med njima še plast nedopiranega (intrinzičnega) polprevodnika (*p*-*i*-*n* fotodioda). Ko svetloba vpade na stik različno dopiranih polprevodnikov, se fotoni absorbirajo in nastajajo pari elektron–vrzel. Nosilci naboja potujejo v različnih smereh, elektroni stečejo v eno smer, vrzeli pa v nasprotno. Odvisno od načina delovanja merimo tok, ki steče skozi stik, ali napetost, ki se pojavi na stiku.

Spektralni odziv fotodiod je odvisen od energijske reže polprevodnika, iz katerega je fotodioda narejena. Silicijeve fotodiode so tako uporabne za zaznavanje valovnih dolžin do okoli $1,1$ µm, za večje valovne dolžine (do $1,6$ µm) uporabljamo InGaAs. Izkoristek fotodiod je navadno zelo velik in presega 50 %, pri energiji fotonov blizu energijske reže je vrednost izkoristka kar blizu 1. Za razliko od fotoprevodnikov fotodiode signala ne ojačujejo, imajo pa praviloma hitrejši odziv, tipično okoli nanosekunde.

Fotodioda lahko deluje v različnih načinih (slika 11.10). Lahko jo priključimo v prevodni smeri, najpogosteje jo priključimo v zaporni smeri, saj je v tem primeru tok skozi diodo linearno sorazmeren z intenziteto vpadne svetlobe, lahko je dioda kratko sklenjena, lahko pa je dioda v odprtem električnem krogu, v t.i. fotovoltaičnem načinu. V nadaljevanju bomo vse primere podrobneje spoznali.

Slika 11.10: Različne vezave fotodiode: v prevodni smeri (a), v zaporni smeri (b), kratko sklenjena (c) in v fotovoltaičnem načinu (d)

### Stik *p-n*

Ponovimo najprej, kaj se zgodi ob stiku $p$- in $n$- tipa polprevodnika. Pri tem tip $p$ označuje polprevodnik, dopiran s trivalentnimi akceptorskimi primesmi, ki v snovi ustvarijo vrzeli. Energijski nivo primesi je malo nad vrhom valenčnega pasu, zato je Fermijeva energija polprevodnika premaknjena navzdol proti valenčnem pasu (slika 11.11 a). Po drugi strani tip $n$ označuje polprevodnike s petvalentnimi donorskimi primesmi, ki v snov prinesejo dodatne elektrone. Njihov energijski nivo je malo pod prevodnim pasom, zaradi česar je Fermijeva energija pomaknjena navzgor proti prevodnemu pasu (slika 11.11 b).

Ko staknemo polprevodnik tipa $p$ s polprevodnikom tipa $n$, elektroni z območja z višjo koncentracijo (tip $n$) difundirajo v območje z nižjo koncentracijo (tip $p$), kjer se rekombinirajo z vrzelmi. Ob stiku tako nastane ozek pas, imenujemo ga izpraznjeni sloj, kjer ni več prostih nosilcev naboja. Tipično je širok 10 nm–1 µm. Po rekombinaciji ostanejo na strani $n$ pozitivno nabiti donorski atomi, na strani $p$ pa negativno nabiti akceptorski atomi, ki povzročijo nastanek električnega polja. Nastalo polje, ki kaže od $n$ proti $p$, zaustavi rekombinacijo, saj odbija elektrone in vrzeli od stika in v ravnovesju se Fermijeva energija izenači. Potencialni skok je približno enak $\Delta E \approx E_d - E_a$, kar je le malo manj od širine reže $E_g$ (slika 11.11 c). Tipična jakost električnega polja na stiku je $10^5$–$10^7$ V/m.

Slika 11.11: Shema energijskih nivojev v $p$- (a) in $n$-tipu (b) polprevodnika ter na $p$-$n$ stiku (c), v katerem se Fermijevi energiji izenačita. Med obema polprevodnikoma nastane izpraznjeni sloj, kar povzroči pojav električnega polja.

Priključimo zdaj na diodo napetost $U$, tako da je pozitivna na $p$ strani diode. Takrat pravimo, da smo na diodo priključili napetost v prevodni smeri. Ker lahko energijske pasove razumemo kot potencialno energijo elektronov, s priključeno pozitivno napetostjo zmanjšamo razliko potencialnih energij in elektroni lažje prehajajo iz dela $n$ v del $p$ . Zaradi zmanjšanja potencialne razlike med stranjo $p$ in $n$ za $e_0U$ pride do povečanja toka večinskih elektronov iz $n$ v $p$ za faktor $\exp(e_0U/kT)$, tok manjšinskih elektronov iz $p$ v $n$ pa ostaja enak, saj ni odvisen od globine potencialnega skoka (slika 11.12 a).

Slika 11.12: Shema energijskih nivojev v stiku *p*-*n*, ko na stik priključimo napetost v prevodni smeri (a) in v zaporni smeri (b). Če v izpraznjenem sloju pride do absorpcije fotona in nastanka para elektron–vrzel, elektron "zdrsi" proti strani *n*, vrzel pa proti strani *p*.

Povsem enak razmislek lahko naredimo, če priključimo na stran *n* pozitivni pol, na stran *p* pa negativnega, če torej priključimo napetost v zaporni smeri. V tem primeru potencialna razlika naraste in tok večinskih elektronov se zmanjša za faktor $\exp(-e_0|U|/kT)$, tok manjšinskih elektronov pa ostane nespremenjen (slika 11.12 b).

Celotni tok skozi stik *p*-*n* je sestavljen iz prispevkov elektronov in vrzeli. Opiše ga karakteristična enačba diode (slika 11.13)

$$I = I_0(e^{e_0U/kT} - 1). \tag{11.25}$$

Pri tem $I_0$ označuje tok manjšinskih nosilcev naboja[6] in je navadno zelo majhen. Njegova vrednost je odvisna od snovi, površine detektorja, poleg tega pa je eksponentno odvisna od temperature. Znaša tipično okoli $10^{-5}$–$10^{-15}$ A, pri čemer najmanjše vrednosti dosegamo le ob močnem hlajenju.

Slika 11.13: $I(U)$ karakteristika neosvetljene fotodiode (modra črta) in osvetljene fotodiode (rdeče črte). Naraščajoča intenziteta vpadne svetlobe krivuljo premika navzdol. S simboli so označene točke delovanja za različne načine.

[6] Pravimo mu tudi zaporni tok, tok nasičenja ali temni tok. Slednje ime sledi iz tega, da ta tok teče skozi fotodiodo tudi v odsotnosti vpadne svetlobe.

**Naloga 11.6.1** Izpelji karakteristično enačbo diode (enačba 11.25) in pokaži, da je zaporni tok

$$I_0 = e_0 S \left( \frac{D_p}{L_p} p_{0n} + \frac{D_n}{L_n} n_{0p} \right), \tag{11.26}$$

kjer je $S$ presek stika, $D$ sta difuzijska koeficienta, $L$ je difuzijska dolžina posameznih nosilcev naboja, $p$ in $n$ pa sta koncentraciji manjšinskih nosilcev naboja v ravnovesju. Ugotovi, zakaj je zaporni tok močno odvisen od temperature.

### Delovanje fotodiode

Ko na polprevodnik vpade foton, ki ima energijo večjo od širine reže, lahko vzbudi elektron iz valenčnega v prevodni pas in nastane par elektron–vrzel. Če se to zgodi v izpraznjenem sloju stika $p$-$n$, steče elektron pod vplivom električnega polja na stran $n$, vrzel pa na stran $p$ (slika 11.12 c). Premik nosilcev naboja, do katerega pride zaradi absorpcije fotona, torej vedno povzroči pojav električnega toka v zaporni smeri. Njegova velikost je odvisna od moči vpadne svetlobe in jo lahko zapišemo kot

$$I_f = e_0 \eta n_F = e_0 \frac{\eta P}{h\nu}, \tag{11.27}$$

pri čemer smo z $n_F$ označili število vpadnih fotonov na časovno enoto, $\eta$ je kvantni izkoristek, $P$ označuje moč vpadne svetlobe, $\nu$ pa njeno frekvenco. Celoten tok skozi fotodiodo je vsota diodnega in svetlobnega toka, zato karakteristiko fotodiode zapišemo kot

$$I = I_0 (e^{e_0 U/kT} - 1) - I_f. \tag{11.28}$$

Vpadna svetloba povzroči zmanjšanje električnega toka skozi diodo, kar na sliki (11.13) predstavlja premik karakteristike diode v vertikalni smeri navzdol (rdeče črte). Naraščajoča intenziteta svetlobe premika krivuljo proti bolj negativnim vrednostim tokov.

Prvi način delovanja fotodiode, ki ga bomo obravnavali, je fotovoltaični način. To je način, pri katerem električni tokokrog ni sklenjen (slika 11.10 d), zato ob absorpciji fotona in nastanku para elektron–vrzel tok ne more steči. Še vedno pa se izbiti elektron pod vplivom električnega polja na stiku premakne proti območju $n$, vrzel pa proti območju $p$. Na diodi se tako pojavi napetost, katere vrednost lahko izračunamo iz karakteristične enačbe diode, če upoštevamo, da je $I = 0$. Sledi

$$U_p = \frac{kT}{e_0} \ln \left( 1 + \frac{I_f}{I_0} \right). \tag{11.29}$$

Pri večji intenziteti vpadne svetlobe, ko se karakteristična krivulja (slika 11.13) pomika navzdol, se rešitev gornje enačbe po abscisi premika proti desni. Večja intenziteta vpadne svetlobe tako pomeni večjo pozitivno napetost na diodi, zato tudi odzivnost v tem primeru merimo v V/W. Pri dovolj velikih vpadnih močeh je zveza med vpadno močjo in fotonapetostjo logaritemska. Fotovoltaična oziroma odprta vezava fotodiode omogoča zaznavanje vpadne moči v zelo širokem intervalu, najpogosteje pa se ta način delovanja uporablja v sončnih celicah.

Drugi način delovanja je kratko sklenjena fotodioda (slika 11.10 c). Napetost na diodi je vedno enaka nič, prav tako je enak nič tok skozi diodo v odsotnosti svetlobe. Ko posvetimo na diodo, nastanejo pari elektron–vrzel in steče električni tok. Tok skozi tokokrog je v primeru kratko sklenjene diode kar enak toku zaradi vpadne svetlobe $I_f$ (slika 11.13).

Najbolj splošno uporabljen način za detekcijo svetlobe je način, v katerem napetost na diodo priključimo v zaporni smeri (slika 11.10 b). Takrat se tok skozi diodo spreminja linearno z močjo vpadne svetlobe (enačba 11.28), odziv pa je hitrejši kot pri kratko sklenjeni diodi. Če dodamo v tokokrog zaporedno vezan še nek upornik, se odziv spremeni. Zvezo med napetostjo in tokom zapišemo kar z Ohmovim zakonom $U = -|U_0| - RI$. Na sliki to predstavlja premico, ki seka karakteristične krivulje. Ker upornost upornika ni enaka nič, se po grafu (slika 11.13) ne premikamo več navpično navzdol, ampak pod kotom proti desni.

Prednosti tega načina merjenja je več. Zaradi priključene napetosti se zmanjša čas preleta nosilcev naboja in posledično se zmanjša odzivni čas detektorja. Dodatno se poveča širina izpraznjenega pasu (naloga 11.6.2), kar zmanjša kapaciteto stika (stik *p-n* namreč deluje kot neke vrste kondenzator in časovni odziv je odvisen od njegove kapacitete) in s tem odzivni čas. Povečana izpraznjena plast vodi tudi do večjega območja, v katerem lahko pride do absorpcije fotonov.

**Naloga 11.6.2** Pokaži, da je debelina izpraznjene plasti enaka $d = d_p + d_n$, kjer sta

$$d_{p,n} = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0(\Delta E_0 - e_0 U)}{e_0}\frac{(N_d/N_a)^{\pm 1}}{N_a + N_d}}. \tag{11.30}$$

Pri tem $N_a$ in $N_d$ označujeta gostoti akceptorskih in donorskih atomov, $\Delta E_0$ je ravnovesni potencialni skok med stranjo $n$ in $p$, $U$ pa priključena napetost.

Povejmo še nekaj o zgradbi fotodiode. Shema preproste fotodiode je prikazana na sliki (11.14 a). Na dnu je elektroda, sledi plast $n$, nad njo je tanka plast $p$, na katero vpada svetloba. Bistveno je, da je osvetljena plast tanka, da svetloba lahko prodre v bližino stika. Zato so debeline zgornje plasti tipično submikronske. Na fotodiode pogosto nanesemo še dodatno antirefleksijsko plast ($SiO_2$). Fotoobčutljiv del komercialnih fotodiod meri tipično od nekaj 100 $\mu m^2$ pa do več 100 $mm^2$. Pri tem imajo večje diode seveda počasnejši odziv.

★ Poleg do zdaj obravnavanih fotodiod poznamo tudi heterostrukturne fotodiode, kjer sta $p$ in $n$ del narejena iz druge snovi. Poseben primer so Schottkyjeve fotodiode[7], kjer eno plast polprevodnika nadomestimo z zelo tanko plastjo kovine (slika 11.14 c). Te so uporabne predvsem pri visokih energijah (v UV območju), saj je v navadnih fotodiodah absorpcija za te valovne dolžine prevelika, na površini pride do rekombinacije in zmanjšanja kvantnega izkoristka. Odziv Schottkyjevih fotodiod je zelo hiter, saj nizka upornost kovine občutno zmanjša *RC* konstanto stika. Odzivni časi dosegajo pikosekundne vrednosti.

Slika 11.14: Sheme fotodiod: *p-n* fotodioda (a), *p-i-n* fotodioda (b), ki se od navadne *p-n* razlikuje po vmesni plasti intrinzičnega polprevodnika in Schottkyjeva fotodioda (c). Temno siva barva označuje elektrode, svetlo modra območje $n$, temnejše modra območje $p$, svetlo siva pa območje intrinzičnega polprevodnika.

[7] Nemški fizik Walter Hans Schottky, 1886–1976.

### Fotodioda *p-i-n*

Fotodiode *p-i-n* se od navadnih *p-n* razlikujejo po tem, da med *p*- in *n*-plast vključimo še plast nedopiranega polprevodnika (slika 11.14 b). S tem se bistveno poveča debelina izpraznjene plasti, ki postane praktično neodvisna od priključene napetosti. Povečanje izpraznjene plasti omogoča zaznavanje bistveno večjega deleža vpadne svetlobe, poleg tega pa zmanjša kapaciteto stika in s tem njegovo *RC* konstanto. Slabost dodatnega sloja je povečanje časa preleta čez izpraznjeno plast, vendar lahko z ustrezno optimizacijo konstrukcije dosežemo odzivne čase nekaj deset ps.

Slika 11.15: Kvantni izkoristek nekaterih *p-i-n* (Si in Ge) in Schottkyjevih (Au-Si in Ag-ZnS fotodiod

## 11.7 Plazovne fotodiode

Ko smo risali karakteristiko fotodiode (slika 11.13), nismo narisali popolne slike. Pri velikih negativnih napetostih se namreč karakteristika znatno spremeni (slika 11.16), česar ne moremo popisati s preprosto enačbo. Pri zapornih napetostih, ki za nekajkrat presegajo širino energijske reže (tipično okoli $10^7$ V/m), pride do naglega povečanja električnega toka. Ob absorpciji fotona nastanejo mobilni nosilci naboja, ki se v električnem polju tako pospešijo, da s trki ustvarjajo nove pare elektron–vrzel. Novonastali pari ustvarjajo nove pare in pride do "plazu", podobno kot v fotopomnoževalki. En foton sproži cel plaz elektronov, zato pravimo, da je plazovna dioda fotodioda z notranjim ojačenjem. Pri tem je faktor ojačenja tipično 30–300 in plazovne fotodiode lahko uporabimo za detekcijo posameznih fotonov. Slabost je, da je faktor ojačenja odvisen od temperature in je zato za natančne meritve potrebna temperaturna stabilizacija.

Napetost, pri kateri deluje plazovna fotodioda, je priključena v zaporni smeri in je tik pod prebojno napetostjo. Ker že majhna odstopanja v napetosti povzročijo veliko spremembo v toku, moramo napetost držati kar se da stabilno. Le to omogoča linearen odziv fotodiode od moči vpadne svetlobe. Plazovne fotodiode so praviloma zelo hitre ($\sim$ 50 ps) in zelo občutljive. Z ojačenjem signala se ojači tudi šum, a je povečanje pogosto manjše kot bi bil prispevek k šumu na zunanjih elektronskih ojačevalcih.

Slika 11.16: Karakteristika plazovne fotodiode

## 11.8 CCD in CMOS detektorji

Do zdaj smo obravnavali detektorje, ki zaznavajo pretok vpadnih fotonov in spreminjanje pretoka s časom. Dodatno informacijo dobimo, če več fotodetektorjev sestavimo v dvodimenzionalno matriko, saj lahko detektorji hkrati zaznavajo količino vpadne svetlobe iz različnih delov prostora. Podatke iz posameznih detektorjev sestavimo v sliko, pri čemer en detektor podaja informacijo o številu vpadlih fotonov v dani časovni enoti za en slikovni element – piksel . Času zajemanja, ki predstavlja integracijski čas, pravimo tudi čas osvetlitve. Slikovni detektorji z veliko ločljivostjo so sestavljeni iz več milijonov ali celo milijarde posameznih polprevodniških detektorjev in so nepogrešljivi v fotoaparatih, videokamerah, mikroskopiji in astronomiji.

Podrobneje bomo obravnavali dve vrsti matričnih detektorjev, to sta CCD (*Charge-Coupled-Device*)[8] in CMOS (*Complementary Metal-Oxide-Semicoductor*) [9]. Obe vrsti detektorjev sta si po načinu zaznavanja svetlobe zelo podobni, razlika je predvsem v postopku, kako iz posameznega detektorja pridobimo podatek o številu vpadlih fotonov oziroma številu vzbujenih elektronov.

★ Slikovni detektorji so seveda lahko sestavljeni tudi iz drugih vrst svetlobnih detektorjev, ki smo jih obravnavali v prejšnjih razdelkih. Lahko so iz mikrobolometrov ali fotoprevodnikov (za IR svetlobo), Schottkyjevih fotodiod (npr. PtSi, ki seže od UV do okoli 6 µm) ali plazovnih fotodiod.

### CCD

Detektorji CCD so sestavljeni iz posameznih tako imenovanih MOS (*Metal-Oxide-Semiconductor* – kovina-oksid-polprevodnik) kondenzatorjev. Njihova osnova je dopiran silicij, vmesna plast med polprevodnikom in prevodno elektrodo pa je navadno zelo tanka plast (pod 100 nm) $SiO_2$ (slika 11.17). Prevodna elektroda je bila prvotno iz kovine (npr. aluminija) in je elementu detektorja dala tudi ime. Danes je kovino večinoma nadomestil polikristalni silicij (polisilicij), ime pa je ostalo. Tipična dolžina stranice posameznega elementa znaša okoli 5–40 µm.

Foton skozi tanko prozorno elektrodo vpade na polprevodnik, v katerem ustvari par elektron–vrzel. Pozitivna napetost na elektrodi elektrone privlači, vendar jih vmesna plast izolatorja tik pod površino ustavi in elektroni tako ostanejo ujeti v potencialni jami pod elektrodo. Število ujetih elektronov je sorazmerno številu vpadlih fotonov v času zajemanja slike, pomnoženih s kvantnim izkoristkom pri dani valovni dolžini.

[8] Za izum CCD detektorjev sta Willard S. Boyle in George E. Smith leta 2009 prejela Nobelovo nagrado.

[9] Teh dveh oznak za detektorje praviloma ne prevajamo. Opisujeta strukturo in delovanje naprave in nista vezani zgolj na detekcijo svetlobe.

Slika 11.17: Shema MOS strukture (a), na kateri temeljijo CCD in CMOS slikovni detektorji. Osnova je polprevodnik ($p$), na katerem je plast dielektrika ($SiO_2$), na njej pa elektroda (siva). Ob absorpciji svetlobe se pojavijo fotoelektroni, te pa pozitivna napetost na elektrodi drži ujete v potencialno jamo (vijolična). Prenos elektronov v detektorju CCD (b).

S spreminjanjem napetosti na posameznih elektrodah lahko naboj, ki se lokalno nabere v plasti pod izolatorjem v danem času, postopoma prenesemo od posameznega piksla do izhodne stopnje. Najprej poteka prenos iz enega elementa na drugega v eni vrstici, nato pa še po celotnem stolpcu (slika 11.18 a). Na koncu signal sproti ojačujemo, pretvorimo v napetost, to pa v digitalni zapis. Številu elektronov iz posameznega slikovnega elementa določimo digitalno vrednost glede na barvno globino: 8-bitni zapis slike, na primer, vsakemu elementu priredi vrednost od 0 do 255, 16-bitni pa od 0 do 65535.

Delovanje detektorjev CCD temelji na zaporednem odčitavanju števila fotoelektronov v posameznem slikovnem elementu. Ta način je razmeroma počasen in omejuje hitrost zajemanja slike. Med prenašanjem nabojev do izhoda namreč slike ne moremo zajemati, saj bi prišlo do popačenja signala. Pomanjkljivost se večinoma rešuje tako, da le del celotnega zaslona zajema svetlobo, drugi del pa je namenjen pretakanju elektronov in omogoča nemoteno praktično neprestano zajemanje slike. Ker se s tem količina zajete svetlobe zmanjša, se na vsak element doda lečo, ki svetlobo zbere na detektor. S tem postanejo slikovni detektorji CCD hitrejši in bolj občutljivi. Poleg tega jih odlikuje tudi razmeroma nizek šum, ki se ga da s hlajenjem še dodatno zmanjšati.

Slika 11.18: Shema zajemanja slike s slikovnima detektorjema CCD (a) in CMOS (b). Puščice označujejo premikanje fotoelektronov.

★ Pri zajemanju slike ne potrebujemo vedno največje ločljivosti, ki jo omogoča detektor. Zato se pogosto poslužujemo združevanja sosednjih elementov, t. i. bininga (*binning*), na primer $2 \times 2$ ali $4 \times 4$. S združevanjem pikslov sicer zmanjšamo ločljivost slike, vendar hkrati skrajšamo čas njenega zajemanja in zmanjšamo razmerje signal proti šumu.

### CMOS

Osnovni element detektorjev CMOS je enak kot za detektorje CCD (slika 11.17 a). Bistvena razlika je v načinu zajemanja fotoelektronov. Pri detektorjih CCD je branje fotoelektronov zaporedno, pri detektorjih CMOS pa poteka branje vseh slikovnih elementov hkrati, pri čemer ima vsak piksel tudi svoj ojačevalnik (slika 11.18 b). Zaradi sprotnega odčitavanja vseh pikslov naenkrat so detektorji CMOS bistveno hitrejši od CCD. Odlikuje jih tudi nizka poraba energije in nizka cena. Njihova poglavitna slabost je večji šum in manjša občutljivost, saj del zaslona, kjer so ojačevalniki, slike ne more zajemati.

### Barvno zajemanje slik

Detektorji zaznavajo število vpadlih fotonov oziroma število fotoelektronov. Za nastanek barvne slike moramo vpadne fotone ločiti še po valovni dolžini, kar naredimo z barvnimi filtri. Namesto enega elementa, ki bi podal informacijo o intenziteti vpadne svetlobe, uporabimo štiri senzorje v kvadratni mreži, rdečega, modrega in dva zelena. Večji delež zelenih elementov je zaradi večje občutljivosti človeškega očesa na zeleno barvo. Intenziteto svetlobe na posameznem slikovnem elementu dane barve nato odčitamo, kot je opisano zgoraj.

## 11.9 Šum pri optični detekciji

Pri vsakršni detekciji svetlobe je vedno prisoten tudi šum. Beseda šum označuje naključne fluktuacije na izhodu iz detektorja, ki jih ne moremo ločiti od signala. Z različnimi pristopi lahko šum zmanjšamo, povsem pa ga ne moremo nikoli odpraviti. Obravnava šuma je zato najbolj pomembna pri zaznavanju šibkih signalov svetlobe. Ključen parameter je najmanjša moč vpadne svetlobe, ki jo še lahko ločimo od šuma, pod to vrednostjo pa se signal v šumu izgubi (slika 11.19).

Slika 11.19: Če je signal velik v primerjavi s šumom, ga na detektorju lahko zaznamo (zgoraj). Pod določeno vrednostjo postane velikost signala primerljiva s šumom in signala ne zaznamo več (spodaj).

Na podlagi fizikalnega izvora ločimo več vrst šuma:

1. šum štetja, do katerega pride zaradi diskretne (kvantne) narave fotonov,
2. termični šum, do katerega pride zaradi termičnih fluktuacij,
3. šum temnega toka, ki predstavlja spontani nastanek para elektron–vrzel oziroma spontano emisijo elektronov in
4. šum sevanja ozadja.

### Šum štetja

Ko govorimo o svetlobi, ne smemo pozabiti, da je svetloba sestavljena iz diskretnih fotonov. Fotoni vpadajo na detektor posamezno in enkrat jih vpade malo več, drugič malo manj. Vpadna moč je zato dejansko povprečna moč $\overline{P}$ in število vpadnih fotonov na časovno enoto je povprečna vrednost števila vpadnih fotonov na časovno enoto

$$\overline{n} = \frac{\overline{P}}{h\nu}. \tag{11.31}$$

Pri vpadu fotonov gre za diskretne in neodvisne procese, zato za njihov vpad velja Poissonova porazdelitev (slika 11.20). Verjetnost, da v času $\tau$, ki predstavlja čas merjenja, na detektor vpade $N$ fotonov, je tako

$$p(N) = \frac{\overline{N}^N e^{-\overline{N}}}{N!}, \tag{11.32}$$

pri čemer je povprečno število vpadnih fotonov v tem časovnem intervalu enako $\overline{N} = \overline{n}\tau$.

Slika 11.20: Poissonova porazdelitev verjetnosti za $\overline{N} = 2$ (modra), $\overline{N} = 5$ (rdeča) in $\overline{N} = 10$ (zelena). Porazdelitev je diskretna, črta je zgolj vodilo.

Fluktuacije števila fotonov, ki vpadejo na detektor v danem časovnem intervalu, označimo z $\Delta N = N - \overline{N}$. V povprečju je ta vrednost seveda enaka nič, zato sta bolj merodajni količini varianca, ki je enaka (glej nalogo 11.9.1)

$$\sigma^2 = \overline{\Delta N^2} = \overline{(N - \overline{N})^2} = \overline{N}, \tag{11.33}$$

in standardni odklon

$$\sigma = \sqrt{\overline{\Delta N^2}} = \sqrt{\overline{N}}. \tag{11.34}$$

Standardni odklon, ki je merilo za velikost šuma, torej narašča korensko z naraščajočim povprečnim številom vpadnih fotonov $\overline{N}$.

**Naloga 11.9.1** Pokaži, da je povprečje Poissonove porazdelitve (enačba 11.32) vedno pri $N = \overline{N}$ in standardni odklon $\sigma = \sqrt{\overline{N}}$.

Vendar nas absolutni šum večinoma ne zanima, saj je pri detekciji ključno razmerje signal proti šumu. Označimo ga s *SNR* (*Signal to Noise Ratio* – razmerje med signalom in šumom)[10]. V primeru Poissonove porazdelitve in šuma štetja velja

$$SNR = \frac{\overline{N}^2}{\sigma^2} = \overline{N}. \tag{11.35}$$

Vidimo, da razmerje signal proti šumu narašča linearno z naraščajočim številom vpadlih fotonov, relativni šum pa ob večji vpadni moči svetlobe pojema. Za primer poglejmo dva primera. V prvem je povprečno število vpadlih fotonov v danem časovnem intervalu $10^6$, v drugem pa 100. Pri vpadu močnejšega signala na detektorju zaznavamo $10^6 \pm 1000$ fotonov, pri vpadu šibkejšega pa $100 \pm 10$. Čeprav je absolutni šum v prvem primeru znatno večji, je relativni šum stokrat manjši. Za zmanjšanje šuma štetja mora biti torej signal kar se da velik.

★ Razmerje signal proti šumu *SNR* lahko vpeljemo na več načinov. Prvi je ta, ki smo ga uporabili mi, pri katerem velja $SNR = \overline{N}^2/\sigma^2 = \overline{N}$. V tem primeru gre za *SNR* električne moči na detektorju. Lahko vpeljemo tudi $SNR_I$ optične moči oziroma števila fotonov in nastalega električnega toka. Zaradi kvadratne zveze med električno močjo in električnim tokom je $SNR_I = \sqrt{SNR} = \sqrt{\overline{N}}$.

Pri šumu štetja gre za osnovno značilnost svetlobe, zato je ta vrsta šuma prisotna pri prav vseh načinih detekcije. Podrobneje si oglejmo, kako se šum štetja izraža pri detekciji s fotodiodami.

Naj svetloba s povprečno močjo $\overline{P}$ vpada na fotodiodo. Povprečno število fotoelektronov, ki se pojavijo v časovnem intervalu $\tau$, je kar enako številu vpadlih fotonov, pomnoženim s kvantnim izkoristkom.

$$\overline{N}_e = \frac{\overline{P}\tau}{h\nu}\eta. \tag{11.36}$$

Povprečni električni tok, ki steče skozi detektor, je

$$\overline{I} = \frac{\overline{N}_e e_0}{\tau}, \tag{11.37}$$

fluktuacije izhodnega električnega toka pa so

$$\overline{\Delta I^2} = \overline{(I-\overline{I})^2} = \overline{(N_e-\overline{N}_e)^2}\,\frac{e_0^2}{\tau^2} = \overline{N}_e\,\frac{e_0^2}{\tau^2} = \overline{I}\,\frac{e_0}{\tau}, \tag{11.38}$$

pri čemer smo upoštevali enačbo (11.33). Vpeljemo še pasovno širino detekcije $\Delta\nu_B = 1/(2\tau)$[11] in zapišemo

$$\overline{\Delta I^2} = 2\overline{I}\,e_0\,\Delta\nu_B. \tag{11.39}$$

Šum na izhodu je tako sorazmeren s povprečno intenziteto signala in s pasovno širino detekcije oziroma obratno sorazmeren z dolžino merjenja. Zapišemo še razmerje signal proti šumu

$$SNR = \frac{\overline{I}^2}{\overline{\Delta I^2}} = \frac{\overline{I}}{2e_0\,\Delta\nu_B}. \tag{11.40}$$

Po pričakovanjih je to razmerje večje pri večjem povprečnem signalu in pri daljši meritvi.

[10] Pogosto se uporablja tudi oznako $S/N$. Tukaj smo jo zaradi jasnosti zamenjali, saj $N$ označuje število fotonov oziroma elektronov.

[11] Pri detekciji signala navadno uporabljamo čas osvetlitve $\tau$, pri telekomunikacijah pa pasovno širino $\Delta\nu_B$.

### Termični šum

Termični šum imenujemo tudi Johnsonov[12] ali Nyquistov[13] ali Johnson-Nyquistov[14] šum. Do njega pride zaradi termično vzbujenega naključnega gibanja elektronov. Premiki elektronov na danem uporniku povzročijo majhne kratkotrajne fluktuacije v napetosti, ki v povprečju seveda ostaja enaka nič. Termični šum nastaja samo v uporniških elementih sistema, saj le ti lahko sprejemajo in oddajajo energijo, v kapacitivnih in induktivnih elementih pa ne. Izkaže se, da je termični šum najpogosteje omejujoči šum pri detekciji.

Načinov izpeljave termičnega šuma na uporniku je več. Najpogostejša je izpeljava na primeru tokokroga, v katerem sta dva enaka upornika v termičnem ravnovesju pri temperaturi $T$[15]. Ko se na uporniku pojavi termična napetost, steče skozi drugi upornik električni tok in na njem se porablja električna moč. Prenos energije z enega upornika na drug lahko razumemo kot elektromagnetno valovanje, prenesena moč pa je v ravnovesju enaka porabljeni moči. Naj bo karakteristična impedanca žic enaka $R$, tako da ne pride do odboja, ampak se val v celoti absorbira.

Zaradi periodičnosti velja za potujoče valove zveza $L = m\lambda$ oziroma $k = 2\pi m/L$. Število elektromagnetnih valov $N$ v frekvenčnem intervalu $\Delta\nu_B$ je potem

$$\frac{N}{\Delta\nu_B} = \frac{L}{c}, \tag{11.41}$$

pri čemer je $c$ hitrost valovanja. Posamezne potujoče valove lahko obravnavamo tudi kot veliko število vzbujenih fotonov z energijo $Nh\nu$. Za njih velja Boltzmannova porazdelitev s povprečno energijo enega vala

$$\overline{E}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{11.42}$$

Povprečna moč, ki jo prejema drug upornik, je

$$\overline{P} = N\frac{\overline{E}}{L/c} = \frac{h\nu\Delta\nu_B}{e^{h\nu/kT} - 1} \approx kT\Delta\nu_B. \tag{11.43}$$

Moč je po drugi strani enaka

$$P = \overline{\Delta I^2}R = \frac{\overline{\Delta U^2}}{4R}, \tag{11.44}$$

saj je $I = U/2R$. Od tod sledi

$$\boxed{\overline{\Delta U^2} = 4kTR\Delta\nu_B.} \tag{11.45}$$

Šum lahko zapišemo tudi za tok, če namesto zaporedno vezanega virtualnega izvira napetosti vzporedno vežemo virtualni izvor toka. Zapišemo

$$\boxed{\overline{\Delta I^2} = \frac{4kT\Delta\nu_B}{R}.} \tag{11.46}$$

Termični šum je odvisen od temperature in od upornosti detektorja oziroma vezja, preko katerega zaznavamo signal. En način za zmanjšanje termičnega šuma je povečanje upornosti detektorja, vendar na ta način zmanjšamo njegovo hitrost odziva. Tipične upornosti, ki se uporabljajo pri hitrih detektorjih, so tako $R \sim 50\ \Omega$. Drugi način za zmanjševanje termičnega šuma je hlajenje. Kljub močnemu hlajenju termičnega šuma povsem ne moremo nikoli odpraviti.

[12] Švedsko-ameriški elektroinženir in fizik John Bertrand Johnson, 1887–1970.
[13] Švedsko-ameriški elektroinženir Harry Nyquist, 1889–1976.
[14] Johnson je bil leta 1928 prvi, ki je pojav opazoval, Nyquist pa kmalu za eksperimentom podal teoretično razlago.
[15] H. Nyquist, Phys. Rev. **32**, 110 (1928).

### Šum temnega toka

Natančna opazovanja pokažejo, da na večini detektorjev zaznamo nek majhen izhodni signal tudi v odsotnosti svetlobe. To je temni tok, do katerega pride zaradi spontanega nastanka para elektron–vrzel ali spontane emisije elektronov (glej enačbo 11.25). Izraza za temni tok tukaj ne bomo izpeljevali, povejmo le, da je sorazmeren s površino diode $S$ in eksponentno odvisen od temperature $T$ in energijske reže polprevodnika $E_g$

$$I_0 = j_0 S e^{-E_g/kT}. \tag{11.47}$$

Zaradi diskretne narave elektronov se – podobno kot v primeru diskretnih vpadnih fotonov – tudi tukaj pojavi šum štetja, le da namesto povprečne vrednosti signala zaradi vpadne svetlobe nastopa temni tok. Enačbo (11.39) zato zapišemo kot

$$\overline{\Delta I^2} = 2 I_0 e_0 \Delta\nu_B. \tag{11.48}$$

Manjši šum je pri detektorjih, ki imajo manjši temni tok, na primer pri siliciju. Germanij ima na splošno večji temni tok in zato tudi več šuma temnega toka. Pomembno vlogo ima tudi temperatura, saj v temnem toku nastopa v eksponentu. S hlajenjem lahko šum temnega toka znatno zmanjšamo.

### Šum zaradi sevanja ozadja

Kot že ime pove, pride do te vrste šuma zaradi sevanja ozadja pri končni temperaturi. Okolico obravnavamo kot črna telesa in spekter njihovega sevanja opisuje Planckov zakon (enačba 5.20 in slika 5.1). Z naraščajočo temperaturo telesa se spektralni vrh pomika k nižjim valovnim dolžinam in s tem v infrardeče valovanje ali celo v vidno svetlobo. Sevanje ozadja predstavlja zato največji problem pri meritvah v območju okoli 10–30 μm, v katerem še telesa pri sobni temperaturi znatno sevajo. Detektorjem za infrardeče valovanje pogosto zmanjšamo aperturo na najmanjšo možno, poleg tega jih izoliramo od okolice in hladimo.

Sevanje ozadja je neodvisno od vpadnega signala. Ker detektor ne loči fotonov, ki vpadejo nanj kot signal, in tistih, ki vpadejo nanj iz ozadja, se prispevek ozadja kar prišteje signalu. Šum štetja (enačba 11.39) se tako poveča na

$$\overline{\Delta I^2} = \frac{2\eta e_0^2 \Delta\nu_B}{h\nu} \overline{(P + P_o)}, \tag{11.49}$$

pri čemer $P_o$ označuje moč vpadne svetlobe iz ozadja.

★ V detektorjih, v katerih pride do notranjega ojačevanja (npr. fotopomnoževalka ali plazovna fotodioda), se skupaj s signalom ojači tudi šum. Če se signal ojači za faktor $G$, se za isti faktor povečajo tudi šum štetja, šum ozadja in šum temnega toka. Poleg tega pride do ojačenja šuma zaradi naključnega večanja števila fotonov med pomnoževanjem signala. V tem primeru nastopi še dodaten faktor, večji od ena, ki je odvisen od snovi, strukture in ojačenja fotodetektorja. Tipična vrednost je okoli 1,5–2, lahko pa doseže vrednosti tudi nad 10.

### Seštevanje šumov

Spoznali smo, da je več vrst šuma, ki so pri različnih pogojih različno pomembni. Na splošno lahko vse prispevke združimo v skupni šum, pri čemer seštevamo kvadrate odstopanj

$$\overline{\Delta I^2} = \overline{\Delta I^2}_{\text{štetja}} + \overline{\Delta I^2}_{\text{termični}} + \overline{\Delta I^2}_{\text{temni}} + \overline{\Delta I^2}_{\text{ozadja}}. \tag{11.50}$$

Če vstavimo izraze za tokove (enačbe 11.39, 11.46, 11.48 in 11.49), sledi

$$\overline{\Delta I^2} = \left(2\bar{I}\,e_0 + 2I_0\,e_0 + 2I_o\,e_0 + \frac{4kT}{R}\right)\Delta\nu_B. \tag{11.51}$$

Navadno prevlada termični šum nad ostalimi. Izjema je detekcija v infrardečem delu svetlobe, kjer pomembno vpliva šum ozadja, in pri zelo nizkih intenzitetah vpadne svetlobe, ko pride do izraza šum štejta.

Izraz za razmerje signal proti šumu zapišemo kot

$$SNR = \frac{\bar{I}^2}{\left(2\bar{I}\,e_0 + 2I_0\,e_0 + 2I_o\,e_0 + \frac{4kT}{R}\right)\Delta\nu_B}. \tag{11.52}$$

Iz zapisanega razberemo, da so vsi prispevki v imenovalcu neodvisni od intenzitete vpadne svetlobe razen šuma štetja. Le-ta je pri majhnih intenzitetah majhen in celoten šum zato praktično konstanten. V tem primeru $SNR$ narašča kvadratno z intenziteto vpadne svetlobe. Pri velikih intenzitetah šum štetja prevlada nad ostalimi prispevki in odvisnost $SNR$ od intenzitete postane linearna.

**Naloga 11.9.2** Oceni šum štetja, termični šum in šum temnega toka na silicijevi fotodiodi, če nanjo vpada svetloba z valovno dolžino $\lambda = 850$ nm in vpadno močjo $P = 0,1$ mW. Kvantni izkoristek diode je 85 %, spektralna širina $\Delta\nu_B = 150$ MHz, temni tok 10 nA, skupna upornost 50 Ω in temperatura 300 K. Pokaži, da je razmerje signal proti šumu $SNR \sim 250$.

Pomemben parameter, ki ga pogosto vpeljemo, je $NEP$ (*Noise Equivalent Power* – moč, ki ustreza šumu). Gre za vpadno moč svetlobe, ki je po velikosti primerljiva s šumom, in zato predstavlja spodnjo mejo še možne detekcije. To se navadno zgodi pri zelo nizkih močeh vpadne svetlobe, pri katerih je šum štetja zanemarljiv. Pogoj, pri katerem je $SNR = 1$, zapišemo kot

$$NEP\,\frac{e_0}{h\nu}\eta \approx \sqrt{\left(2I_0\,e_0 + \frac{4kT}{R}\right)\Delta\nu_B}. \tag{11.53}$$

Sledi

$$NEP = \frac{h\nu}{\eta e_0}\sqrt{\left(2I_0\,e_0 + \frac{4kT}{R}\right)\Delta\nu_B}. \tag{11.54}$$

**Naloga 11.9.3** Izračunaj $NEP$ za primer germanijeve diode pri vpadni svetlobi z valovno dolžino $\lambda = 1,5$ µm in kvantnim izkoristkom $\eta = 0,5$. Temperatura detektorja je $T = 300$ K in temni tok $I_0 = 15$ µA. Skupna upornost je $R = 2$ kΩ, pasovna širina zajemanja svetlobe pa $\Delta\nu_B = 150$ MHz.

★ Zaradi priročnosti je pogosto podan $NEP$ na koren spektralne širine, saj ta ni karakteristična za detektor, ampak je odvisna od časa zajemanja. Podatek, ki ga navedejo proizvajalci detektorjev, je $NEP$ v enotah $\mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. Tipične vrednosti so $10^{-11}$–$10^{-15}$ $\mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, pri čemer najmanjše vrednosti dosegajo silicijeve fotodiode.

Pri zapisu $NEP$ (enačba 11.54) smo privzeli, da termični šum in šum temnega toka prevladata nad šumom štetja signala. Če uspemo ta dva prispevka znatno zmanjšati, tako da postane šum štetja signala vodilni člen, dosežemo kvantno limito optične detekcije. Takrat je

$$NEP = \frac{2h\nu\Delta\nu_B}{\eta}, \tag{11.55}$$

kar znaša za zgoraj opisane primere $NEP \sim 10^{-10}$ W. Kvantna limita je z navadnim merjenjem praktično nedosegljiva, saj je treba odpraviti vse ostale izvore šuma. En način, kako jo vseeno lahko dosežemo, je s heterodinskim načinom detekcije, ki ga bomo spoznali v naslednjem razdelku.

## 11.10 Heterodinska detekcija

Heterodinska detekcija (pogosto imenovana tudi koherentna detekcija) je poseben način detekcije svetlobe, ki omogoča zaznavanje zelo šibkih signalov. Za razliko od direktne detekcije, ki smo jo obravnavali do zdaj in pri kateri pride do neposredne zaznave vpadnega fotona, gre pri heterodinski detekciji za zaznavanje valovanja z amplitudo in fazo. Pri takem pristopu detektor svetlobe osvetlimo hkrati s signalom in z močno referenčno svetlobo, katere frekvenca se le malo razlikuje od frekvence signala.

Slika 11.21: Shema heterodinske detekcije

Vpadni signal zapišemo z

$$E_s = E_{s0}\cos(\omega_s t + \phi), \tag{11.56}$$

referenčnega pa z

$$E_r = E_{r0}\cos(\omega_r t), \tag{11.57}$$

pri čemer je $E_{r0}$ konstanta. Če sta oba vpadna snopa vzporedna[16] je intenziteta, ki vpada na detektor, enaka

$$I \propto |E|^2 = |E_s + E_r|^2 = |E_{s0}|^2\cos^2(\omega_s t + \phi) + |E_{r0}|^2\cos^2(\omega_r t) + 2E_{s0}E_{r0}\cos(\omega_s t + \phi)\cos(\omega_r t). \tag{11.58}$$

Prva dva člena v izrazu se zelo hitro spreminjata in zato predstavljata zgolj izpovprečen konstanten prispevek.

[16] Dodaten pogoj je, da imata isto polarizacijo in čim bolj podoben polmer ter ukrivljenost valovnih front.

Zanimiv je tretji člen, ki ga lahko zapišemo kot

$$E_{s0}E_{r0}\left(\cos(\omega_s t+\omega_r t+\phi)+\cos(\omega_s t-\omega_r t+\phi)\right). \tag{11.59}$$

Člen z vsoto obeh frekvenc se izpovpreči, drugi člen pa ne in ga lahko zaznavamo. Pri tem smo privzeli, da je razlika frekvenc dovolj majhna, da seže v odzivno območje detektorja. Poseben primer, ko sta frekvenci povsem enaki, imenujemo homodinski režim detekcije.

Ker je referenčni žarek navadno bistveno močnejši od signalnega, je celotna intenziteta na detektorju enaka

$$|E|^2 \approx \frac{1}{2}|E_{r0}|^2 + E_{s0}E_{r0}\cos(\omega_s t-\omega_r t+\phi). \tag{11.60}$$

S tem znatno pridobimo na občutljivosti, saj na detektorju ne zaznavamo več kvadrata majhnega signala, ampak majhen signal, pomnožen z velikim referenčnim.

Poglejmo še razmerje *SNR* za primer heterodinske detekcije. Največji prispevek k šumu je zaradi šuma štetja referenčne svetlobe, saj je ta praviloma bistveno močnejša od signala

$$\overline{\Delta I^2} = 2I_r e_0 \Delta\nu_B = e_0^2\Delta\nu_B\frac{\eta E_{r0}^2}{h\nu}, \tag{11.61}$$

pri čemer smo z $I_r$ označili tok, ki steče zaradi referenčne svetlobe. Signal v tem primeru ni več vpadni signal, ampak kombinirani izhod iz detektorja, ki ga zaznavamo le pri razliki frekvenc $\omega_s-\omega_r$. Sledi

$$SNR = \frac{\left(\frac{e_0\eta}{h\nu}E_{s0}E_{r0}\right)^2}{e_0^2\Delta\nu_B\frac{\eta E_{r0}^2}{h\nu}} = \frac{\eta}{h\nu\Delta\nu_B}E_{s0}^2. \tag{11.62}$$

Če to primerjamo z vrednostjo *SNR* pri navadni detekciji (enačba 11.40), vidimo, da se razmerje signal proti šumu pri isti pasovni širini izboljša za faktor 2 (oziroma še več, če je prisoten še kakšen drug šum). Ker je pri navadni detekciji težko meriti pri tako majhni pasovni širini, je razmerje signal proti šumu v primeru heterodinske detekcije posledično praviloma znatno večje od razmerja, ki ga dosežemo pri navadni detekciji. Prednost heterodinskega načina detekcije je tudi, da je neobčutljiv za svetlobo iz ozadja in se zato pogosto uporablja za detekcijo infrardečega valovanja.

# Stvarno kazalo


*NEP*, 261
*SNR*
    see Razmerje signal proti šumu, 258
$\pi$-napetost, 181, 182, 184
Črička nje, 165, 237
Črpanje, 81, 94
Štirinivojski sistem, 81, 123, 125, 127
Šum, 256
    štetja, 256, 257
    seštevanje, 260
    sevanja ozadja, 256, 260
    temnega toka, 256, 260
    termični, 256, 259
Življenjski čas nihanj, 62

Absorpcija, 78, 225, 239
Absorpcija fotona, 75, 82
Absorpcijski koeficient, 78, 80, 86
Akusto-optični modulator, 190
Akusto-optični pojav, 186, 188, 191
Atenuacijski koeficient, 225
Avtokorelacijska funkcija, 28

$BaTiO_3$, 24, 141, 142, 178
Bennettova vdolbina, 86
Besslov snop, 45
    divergenca, 45
Bining, *glej* Združevanje pikslov
Bolometer, 238, 240, 254
Boltzmannova porazdelitev, 73, 77, 259
Braggov odboj, 66, 189, 200
Braggov uklon, 188, 192, 193
Brewstrov kot, 16
Brewstrovo okno, 17
Brillouinovo sipanje, 173
    stimulirano, 173, 237

$CaCO_3$, *glej* Kalcit
$CS_2$, 159–161, 175

Detektor, 238
    CCD, 254
    CMOS, 254, 256
    kvantni, 238, 243
    občutljivost, 238, 244
    odzivni čas, 238–240, 252
    prag detekcije, 238
    spektralni odziv, 238, 248
    termični, 238, 239
DFG, *glej* Generacija razlike frekvenc
Dielektričnost, 9, 21, 191, 195
    inverzna, 176, 186
Disperzija, 165, 166, 205, 217
    kompenzacija, 224
    materialna, 218
    podaljšanje sunka, 220, 221
    polarizacijska, 220
    rodovna, 220, 236
    valovodna, 219
Dobrota resonatorja, 63
Dopplerjeva razširitev, 29, 54, 84, 85, 121, 123, 125
Dvolomnost, 23, 147, 182, 187
    dvoosne snovi, 21, 180, 182
    enoosne snovi, 21, 22, 147, 179, 180, 195, 198
Dvonivojski sistem, 74, 77, 85, 88, 91

Einsteinovi koeficienti, 76, 88, 90
Elasto-optični pojav, 186
Elasto-optični tenzor, 187
Električna polarizacija, 9, 140, 158, 174, 191
Električno polje
    gostota, 9, 21
    jakost, 9, 11, 140
Elektro-optična modulacija
    amplitudna, 176, 183
    fazna, 176, 184
    frekvenčna, 176, 184
    linearna, 184
    longitudinalna, 179, 183, 184
    transverzalna, 181
Elektro-optični deflektor, 186
Elektro-optični pojav, 176
    kvadratni, *glej* Kerrov pojav
    linearni, *glej* Pockelsov pojav
Elektro-optični tenzor, 177
Elektromagnetno valovanje, 11, 71
Energija polja, 73

Energijski nivoji
argon, 123
$CO_2$, 125
ekscimer, 126
He-Ne, 121
Nd:YAG, 127
Ti:safir, 129
Erbij, 131, 229
Evanescentno polje, 16, 231

Fabry-Perotov interferometer, 53, 55, 63, 69
Faktor $M^2$, 40
Fotocelica, *glej* Fotodioda, vakuumska
Fotodioda, 248, 258
*p-i-n*, 248, 252, 253
*p-n*, 248, 252
fotovoltaik, 248, 250, 251
heterostrukturna, 252
kratko sklenjena, 248, 250, 251
plazovna, 238, 243, 253, 254, 260
polprevodniška, 238, 243, 261
prevodna smer, 248, 249
Schottkyjeva, 252, 254
vakuumska, 238, 243
zaporna smer, 248, 250, 252, 253
Fotoefekt, 238, 243
notranji, 243, 246, 248
zunanji, 243
Foton, 73
Fotopomnoževalka, 243, 246, 260
Fotoprevodnik, 243, 246, 254
Fotoupornik, *glej* Fotoprevodnik
Fouriereva optika, 38
Fouriereva spektroskopija, 32
Frankova prosta energija, 201
Fraunhoferjev uklon, 20, 34, 37, 44
Frederiksov prehod, 201
Fresnel-Kirchhoffov integral, 18
Fresnelov uklon, 19, 34, 37, 38, 44
Fresnelove enačbe, 15
Fresnelovo število, 20, 55, 62

GaAs, 157, 160, 178, 245
GaP, 157
GaSe, 157
Gaussov snop, 39, 42, 56
divergenca, 40
dolžina grla, 40
efektivni polmer, 213, 228
faza, 41
frekvenčno podvajanje, 150, 151
grlo, 39
intenziteta, 42
krivinski radij, 41
polmer, 39
Gaussov sunek, 222
Generacija razlike frekvenc, 142
Generacija vsote frekvenc, 142
Germanij, 246, 248, 260, 261
Gibljivost, 247
Gostota električnega toka, 247
Gostota energije, 11, 13, 74, 196
Gostota energijskega toka, 11–13, 29, 164, 194, 209
Gostota stanj, 53, 72, 77
Gouyeva faza, 42, 43, 60

Hamiltonova funkcija, 73, 91
Harmonski oscilator, 73, 89, 174, 216
Helmholtzeva enačba, 11, 38, 45, 206, 210, 226
Hermite-Gaussovi snopi, 43, 66
Heterodinska detekcija, 262
Hitrost valovanja, 10, 21
fazna, 205
grupna, 167, 205, 217, 221
solitonov, 164
Hologram, 194
Homodinska detekcija, 263
Huygensovo načelo, 19

Infrardeče valovanje, 17, 32, 121, 124, 144, 153, 155, 225, 238, 242, 243, 245, 246, 248, 254, 260, 263
InGaAs, 248
Intenziteta, *glej* Gostota energijskega toka
Interferenca, 25, 28, 32, 35
Iterbij, 131
Izgube v optičnih vlaknih, 225
Rayleighovo sipanje, 225
spoj dveh vlaken, 228
ukrivljeno vlakno, 226
Izgube v resonatorju, 62, 67, 93, 94
notranje, 62
Izhodna moč laserja, 95
Izstopno delo, 243

Johnson-Nyquistov šum, *glej* Šum, termični
Johnsonov šum, *glej* Šum, termični
Jonesov vektor, 13
Jonesova matrika, 14

Kalcit, 24
Karakteristika diode, 250
Karakteristika fotodiode, 251, 253
KDP, 24, 141, 145, 149, 151, 178, 179, 181
Kerrov pojav, 177
    optični, 158, 171, 237
Kerrov tenzor, 177
$KH_2PO_4$, *glej* KDP
Kirchhoffov integral, 18, 64
Kleinmanova domneva, 141
Koeficient $M$, 194
Koeficient ojačenja, 83, 96
Koherenčna dolžina, 28
Koherenčna ploskev, 32, 34
Koherenčna razdalja, 26, 32
Koherenčni čas, 25, 28, 30
Koherenca, 25
    časovna, 25, 27
    prostorska, 26, 32
Kompleksna ukrivljenost, 42
Kompleksni krivinski radij, 42
Kvantizacija polja, 71, 88
Kvantna limita detekcije, 262
Kvantni izkoristek, 244, 247
    notranji, 244
    zunanji, 244

Laguerre-Gaussovi snopi, 44
Lambova vdolbina, 87
Laser, 93, 120
    argonski, 81, 123, 126
    $CO_2$, 124, 126
    ekscimerni, 126
    He-Ne, 48, 81, 84, 85, 121, 126
    Nd:steklo, 128, 129
    Nd:YAG, 81, 84, 85, 127, 128, 144
    organska barvila, 130, 224
    polprevodniški, 81
    Ti:safir, 81, 128, 129, 224
    vlakenski, 29, 66, 131
    zgradba, 122, 123, 125, 128, 131
Laserski sistemi, 120
Lastne frekvence resonatorja, 53, 54, 60
LED, 29
$LiNbO_3$, 24, 141, 155, 156, 175, 178, 181, 187
$LiTaO_3$, 241, 242
Lomni količnik, 10, 21, 22, 147, 176, 180, 187, 188, 195, 204
    efektivni, 159
    izredni, 22
    nelinearni, 159
    redni, 22
Lomni zakon, 15, 23

Magnetizacija, 9
Magnetna permeabilnost, 9
Magnetno polje
    gostota, 9, 11
    jakost, 9
Makerjeve oscilacije, 146
Marcusejeva formula, 213, 228
Matrike ABCD, 49, 51, 59
Maxwellova porazdelitev, 85
Maxwellove enačbe, 9
    robni pogoji, 10
Metoda sklopljenih valov, 191
Metoda vzdolžnega premika, 162
Michelsonov interferometer, 27
Multipleksiranje, 226

Nasičena absorpcija, 79
    nehomogeno razširjene črte, 85
Navzkrižna fazna modulacija, 237
Navzkrižna korelacijska funkcija, 33
Nedejavni žarek, 154
Nelinearna optika, 140
    drugega reda, 142, 236
    tretjega reda, 158, 237
    v vlaknih, 236
Neodim, 131
Neujemanje faz, 155
Ničelna energija, 73
Normirana frekvenca, 209
Notranje ojačenje, 253, 260
Numerična odprtina, 204
Nyquistov šum, *glej* Šum, termični

Območje bližnjega polja, 40
Obosna valovna enačba, 38, 43, 56, 152, 162, 222
Obrnjena zasedenost, 81, 82, 95, 229
Ojačenje s stimuliranim sevanjem, *glej* Stimulirano sevanje
Ojačenje signala, 247
Ojačevanje s stimuliranim sevanjem, *glej* Stimulirano sevanje
Omejen snop, 37
Operator
    anihilacijski, 89
    kreacijski, 89

Optična fazna konjugacija, 169, 170
Optična os, 22
Optična pinceta, 190
Optični parametrični oscilator, 155
Optični vodnik, 204
    število rodov, 209
    enorodovni, 205, 208
    lastni rodovi, 206
    lihi rodovi, 207
    plašč, 204
    planparalelni, 204, 206, 226
    sodi rodovi, 207
    sredica, 204
    TE rodovi, 206
    TM rodovi, 209
    večrodovni, 208
Optično črpanje, 82
Optično frekvenčno podvajanje, 142, 144, 150, 236
Optično ojačevanje, 81, 84, 93
    v vlaknih, 175, 229
Optično parametrično ojačevanje, 153
Optično usmerjanje, 142, 156
Optično vlakno, 131, 204, 210
    dopirano z erbijem, 229
    EH rodovi, 213
    enorodovno, 205, 210, 221, 225
    HE rodovi, 213
    LP rodovi, 214
    parabolični profil, 216
    TE rodovi, 211
    TM rodovi, 211
    večrodovno, 210, 220

Paraksialna enačba, *glej* Obosna valovna enačba
Parametrično ojačevanje, *glej* Optično parametrično ojačevanje
Pasovna širina detekcije, 258
PbS, 246
Piksel, 254, 256
Piroelektrični detektor, 238, 241
Planckov zakon, 74, 260
Ploščica $\lambda/2$, 14, 181, 197
Ploščica $\lambda/4$, 14, 184
Ploskev valovnega vektorja, 21
Pockelsov pojav, 177
Pockelsov tenzor, *glej* Elektro-optični tenzor
Poissonova porazdelitev, 257
Polarizacija, 13
    cirkularna, 13
    eliptična, 13, 21
    linearna, 13
    TE, 15, 205
    TM, 15, 205
Polprevodniška fotodioda, *glej* Fotodioda, polprevodniška
Polprevodnik
    izpraznjeni sloj, 249
    tip $n$, 249
    tip $p$, 249
Poyntingov izrek, 11
Poyntingov vektor, 11, 45
Prag delovanja laserja, 94, 96
Preklop dobrote, 190
Prekrivalni integral, 228, 230
Presek za absorpcijo, 78, 84
Presek za stimulirano sevanje, 83, 84
Preslikava z lečo, 46

Rabijeva frekvenca, 91
Rabijeve oscilacije, 91
Raman-Nathov uklon, 188, 194
Ramanovo sipanje, 173
    anti-Stokesovo, 173
    stimulirano, 173, 237
    Stokesovo, 173
Ravni val, 12, 26, 37, 38, 71
Rayleighova dolžina, 40
Rayleighovo območje, *glej* Območje bližnjega polja
Rayleighovo sipanje, 173, 225
Razmerje signal proti šumu, 238, 258
Razpadni čas, 75
Resonator, 53, 93
    ciklični, 66
    koncentrični, 58, 59
    konfokalni, 58, 61, 62, 64
    nestabilni, 59
    odprti, 54
    parametrični oscilator, 155
    planparalelni, 56, 58, 59, 61
    simetrični, 57

Samo-fazna modulacija, 237
Samozbiranje, 158, 160
Saturacijska energija, 94
Saturacijska gostota toka, 79, 83
Schrödingerjeva enačba, 91
    nelinearna, 163, 168
Sekularna enačba

lihi rodovi, 207
sodi rodovi, 207
TE rodovi, 212
Semiklasični model, 91
Sevanje črnega telesa, 29, 32, 74, 76, 260
SFG, *glej* Generacija vsote frekvenc
SHG, *glej* Optično frekvenčno podvajanje
Silicij, 246–248, 254, 260, 261
$SiO_2$, 168, 175, 218, 219, 225, 236, 252, 254
Sklopitev štirih valov, 237
Sklopitev med valovodi, 231
3-dB sklopitev, 234
Sklopitev resonatorja
z okolico, 66
z resonatorjem, 70
Sklopitev v optično vlakno, 230
čelna sklopitev, 230
bočna sklopitev, 230
Soliton
krajevni, 160–162
optični, 165, 166, 237
Spekter, 29
Gaussov, 29, 31, 85
Lorentzov, 29, 31, 63, 75, 84
Planckov, 32
Voigtov, 85
Spektralna črta, 75, 98
homogena razširitev, 84
nehomogena razširitev, 84, 129
Spektralna gostota energije, 74–77
Spontano sevanje, 75, 82, 90, 93
Stabilnost resonatorja, 55, 57, 60
Standardni odklon, 257
Stik *p-n*, 249
Stimulirano sevanje, 76, 82, 90, 229
Stoječe valovanje, 53, 55, 66, 71
Susceptibilnost
efektivna, 144, 148, 174
električna, 9
kompleksna, 175
linearna, 140
magnetna, 9
nelinearna, 140, 141
nelinearna, efektivna, 159

Tekočekristalni prikazovalnik, 197
Tekoči kristali, 24, 195
5CB, 195
direktor, 195
holesterik, 200
nematik, 195
zasukan nematik, 197, 198
Telur, 24, 141, 150
$TEM_{00}$, 59
Temni tok, 245, 250, 251, 260
Teraherčno valovanje, 156, 238, 240
Termistor, 240
Termočlen, 238, 241
TGS, 241
Tirna vrtilna količina, 45
Totalni odboj, 16, 66, 204, 231
Trinivojski sistem, 81, 95, 121

Ujemanje faz, 146, 147, 150, 152, 154, 158, 236
Uklepanje faz, 190, 223, 224
Uklon, 17, 37, 64, 187, 188
Uklonska mrežica, 109, 125, 131, 188, 190, 224
Ultravijolično valovanje, 123, 126, 150, 225, 238, 243, 245, 248, 252

Valovna enačba, 10, 210
nelinearna, 142, 166, 171
Valovni vektor, 12, 71, 205
Valovno število, 11, 206
van Cittert-Zernikov izrek, 34
Varianca, 257
Verjetnost za prehod, 75, 88

Wiener-Hinčinov izrek, 30

Youngov poskus, 25, 32

Z-scan, *glej* Metoda vzdolžnega premika
Zaporni tok, *glej* Temni tok
Zasedbene enačbe, 95
Zasedenost stanj, 77
Združevanje pikslov, 255
ZnSe, 160
ZnTe, 157, 178