FOTONIKA

Delovna verzija

Martin ČOPIČ
Andrej PETELIN
Mojca VILFAN

Recenzenti: ***

Lektor: ***

Risbe in diagrami: Andrej Petelin in Mojca Vilfan

Naslovne fotografije poglavij: Mojca Vilfan

©*Kopiranje in razmnoževanje besedila ali njegovih delov ter slik je dovoljeno samo z odobritvijo avtorjev knjige.*

LJUBLJANA, *** 2016

Kazalo

1 Elektromagnetno valovanje 9
1.1 Maxwellove enačbe 9
1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor 10
1.3 Monokromatski elektromagnetni val 11
1.4 Ravni val 12
1.5 Polarizacija EM valovanja 13
1.6 Lom in odboj EM valovanja 15
1.7 Uklon svetlobe 17
1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh 21

2 Koherenca 25
2.1 Youngov poskus 25
2.2 Koherenca navadnih svetil 26
2.3 Časovna koherenca 27
2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom 29
2.5 Prostorska koherenca 32

3 Koherentni snopi svetlobe 37
3.1 Omejen snop svetlobe 37
3.2 Obosna valovna enačba 38
3.3 Osnovni Gaussov snop 39
3.4 Snopi višjega reda 43
3.5 Besselov snop 45
3.6 Transformacije snopov z lečami 46
3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki 49
3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija 51

4 Optični resonatorji 53
4.1 Odprti resonatorji 53
4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih 56
4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom 59

4.4 Resonančne frekvence 60
4.5 Izgube v resonatorjih 62
4.6 *Obravnava z uklonskim integralom 64

5 Interakcija svetlobe s snovjo 67
5.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja 67
5.2 Sevanje črnega telesa 69
5.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje 70
5.4 Absorpcijski koeficient 73
5.5 Nasičenje absorpcije 74
5.6 Optično ojačevanje 76
5.7 Optično črpanje trinivojskega sistema 77
5.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte 79
5.9 *Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte 80
5.10 Izpeljava verjetnosti za prehod 82

6 Laser 85
6.1 Zasedbene enačbe 85
6.2 Spektralna širina enega laserskega nihanja 85
6.3 Primerjava laserjev in običajnih svetil 85
6.4 Mnogofrekvenčni laser 85
6.5 Relaksacijske oscilacije 85
6.6 Delovanje v sunkih s preklopom dobrote 85
6.7 Uklepanje faz 85
6.8 Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo 85
6.9 Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra 85

7 Primeri laserjev 86
7.1 Nd:YAG laser 86
7.2 He-Ne laser 86
7.3 Argonski ionski laser 86
7.4 Laser na ogljikov dioksid 86
7.5 Ekscimerski laser 86
7.6 Laserji na organska barvila 86
7.7 Titan-safirni laser 86
7.8 Polvodniški laser 86

8 Nelinearna optika 87
8.1 Nelinarna susceptibilnost 87
8.2 Nelinearni optični pojavi drugega reda 89
8.3 Optično podvajanje frekvenc 91
8.4 Frekvenčno podvajanje Gaussovih snopov 96
8.5 *Račun podvajanja Gaussovih snopov 97
8.6 Optično parametrično ojačevanje 99
8.7 Optično usmerjanje in teraherčno valovanje 101
8.8 Nelinearni pojavi 3. reda 101
8.9 Samozbiranje 102
8.10 Optični solitoni 105
8.11 Optična fazna konjugacija 107

9 Modulacija svetlobe 110
9.1 Elektrooptični pojav 110
9.2 Amplitudna modulacija 111
9.3 Fazna in frekvenčna modulacija 114
9.4 Modulacija pri visokih frekvencah 115
9.5 Elastooptični pojav 116
9.6 Braggov uklon na zvočnih valovih 116
9.7 Modulacija s tekočimi kristali 121
9.8 Dodatek 125

10 Optična vlakna 127
10.1 Planparalelni vodnik 128
10.2 Cilindrično vlakno 130
10.3 Cilindrično vlakno s paraboličnim profilom lomnega količnika 130
10.4 Sprememba lomnega količnika vlakna 131
10.5 Izgube v optičnih vlaknih 132
10.6 Disperzija 133
10.7 Potovanje sunka po enorodovnem vlaknu 135
10.8 Sklopitev v optična vlakna 138

11 Detektorji svetlobe 139
11.1 Kalorimetrični detektorji 139
11.2 Fotoprevodni detektorji 139
11.3 PN in PiN fotodiode 139

11.4 Plazovne fotodiode 139
11.5 Šum pri optični detekciji 139

Predgovor

Fotonika je veda o svetlobi. Obsega izredno široka področja nastanka svetlobe in svetlobnih virov, uporabe svetlobe v različne namene, širjenja optičnih signalov in zaznavanja svetlobe. V zadnjih desetletih je zato fotonika doživela izreden razcvet v raziskavah in tehnološki uporabi.

V pričujoči knjigi bomo obravnavali osnove fotonike. Po kratki ponovitvi splošne optike bomo spoznali delovanje laserjev in lastnosti laserske svetlobe, nadaljevali z nelinearnimi optičnimi pojavi in modulacijo svetlobe ter zaključili s prenosom in detekcijo laserskih signalov. Učbenik je zato primeren predvsem za študente II. stopnje fizike, ki že imajo znanje optike in zahtevanih matematičnih prijemov, ga pa priporočamo vsakemu, ki ga področje fotonike zanima. Bralcu v razmislek smo dodali nekaj preprostih nalog, zahtevnejša podpoglavja pa so označena z zvezdico.

Prvotno gradivo za učbenik je nastalo po zapiskih za predavanja pri predmetu Elektrooptika. Gradivo smo dopolnili, posodobili in prilagodili obravnavani snovi pri predmetih Fotonika in Fizika laserjev. Za pomoč pri pripravi se najlepše zahvaljujemo prof. dr. Ireni Drevenšek Olenik
***

Avtorji

Priporočena dodatna literatura

- B. E. A. Saleh in M. C. Teich, Fundamentals of Photonics, 2nd Edition, Wiley, New Jersey, 2007.
- A. Yariv in P. Yeh, Photonics, Sixth Edition, Oxford University Press, 2007.
- W. T. Silfvast, Laser Fundamentals, Second Edition, Cambridge University Press, 2008.
- C. C. Davis, Lasers and Electro-Optics, Cambridge University Press, 2006.
- J. W. Goodman, Statistical Optics, Second Edition, Wiley, New Jersey, 2015.
- W. Demtröder, Laser Spectroscopy, Fifth Edition, Springer, Berlin, 2014.

1. Elektromagnetno valovanje

Za začetek osvežimo osnove teorije elektromagnetnega polja in elektromagnetnega valovanja. Obnovili bomo zapis Maxwellovih enačb, opisali osnovne pojave valovanja (lom, odboj in uklon) in si ogledali razširjanje svetlobe v anizotropnih snoveh.

1.1 Maxwellove enačbe

Elektromagnetno polje v praznem prostoru opišemo z dvema vektorskima poljema, električnim in magnetnim, ki sta v splošnem funkciji prostora in časa. Vsaki točki v prostoru lahko priredimo jakost električnega polja $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ in jakost magnetnega polja $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$. Za opis elektromagnetnega polja v snovi vpeljemo dva dodatna vektorja polja. To sta gostota električnega polja $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ in gostota magnetnega polja $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Vsa ta polja povezujejo Maxwellove enačbe[1]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j_e} \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1.4}$$

Pri zapisu enačb smo upoštevali tudi izvore polj, to je gostoto električnega toka $\mathbf{j}_e(\mathbf{r},t)$ in gostoto naboja $\rho_e(\mathbf{r},t)$.

Poleg Maxwellovih enačb veljata za vektorski polji zvezi

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{in} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}, \tag{1.6}$$

kjer $\mathbf{P}$ označuje električno polarizacijo, to je gostoto električnih dipolov, $\mathbf{M}$ pa magnetizacijo, to je gostoto magnetnega momenta. Polarizacija in magnetizacija sta odvisni od zunanjih polj $\mathbf{E}$ in $\mathbf{H}$. V splošnem sta njuni odvisnosti zelo zapleteni, v izotropnih in linearnih snoveh pa se zvezi poenostavita v

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\mathbf{E} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu - 1)\mathbf{H}. \tag{1.7}$$

Vpeljali smo električno (χ_e) in magnetno (χ_m) susceptibilnost ter dielektričnost ε in magnetno permeabilnost μ. Ko združimo gornje enačbe, lahko zapišemo dve konstitutivni relaciji

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{in} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \tag{1.9}$$

V linearnih anizotropnih snoveh moramo namesto skalarnih vrednosti ε in μ zapisati tenzorje.

[1] Škotski fizik James Clerk Maxwell, 1831–1879.

Robni pogoji

Navedene Maxwellove enačbe zadoščajo za opis elektromagnetnega polja v neomejeni snovi, kjer so vse komponente polj zvezne funkcije. Za obravnavo v omejeni snovi moramo vedeti tudi, kaj se z elektromagnetnim poljem zgodi na meji dveh sredstev. Pri prehodu iz enega dielektrika v drugega se ohranjata normalni komponenti gostote električnega in magnetnega polja ter tangentni komponenti jakosti električnega in magnetnega polja (slika 1.1)

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{1.10}$$
$$B_{1n} = B_{2n} \tag{1.11}$$
$$E_{1t} = E_{2t} \tag{1.12}$$
$$H_{1t} = H_{2t}. \tag{1.13}$$

Pri tem smo privzeli, da na meji med dielektrikoma ni površinskih tokov ali nabojev, sicer bi morali robna pogoja za D_n in H_t ustrezno popraviti. Na meji dielektrika z idealnim prevodnikom (kovino, zrcalom) so robni pogoji drugačni. Za magnetno polje jih ne moremo preprosto zapisati, za električno polje pa velja, da mora biti tangentna komponenta jakosti električnega polja enaka nič. Posledica tega robnega pogoja je, da se pri pravokotnem vpadu valovanja na zrcalo faza valovanja spremeni za π.

Slika 1.1: Na meji med dvema dielektrikoma brez površinskih tokov in nabojev so tangentna komponenta jakosti električnega in magnetnega polja ter normalna komponenta gostote magnetnega in električnega polja zvezne količine.

1.2 Valovna enačba in Poyntingov vektor

Večinoma bomo obravnavali elektromagnetna valovanja v izotropnih, homogenih in linearnih snoveh brez zunanjih izvorov in nosilcev naboja ($\mathbf{j}_e = 0$ in $\rho_e = 0$). Iz Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) izpeljemo valovno enačbo za jakost električnega ali magnetnega polja

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{in} \quad \nabla^2\mathbf{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.14}$$

Pri tem je hitrost valovanja v snovi enaka

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c_0}{n}. \tag{1.15}$$

Magnetne in dielektrične lastnosti snovi smo pospravili v lomni količnik

$$n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{1.16}$$

Za izotropno in nemagnetno snov ($\mu = 1$) je lomni količnik $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Vpeljimo še vektor gostote energijskega toka, to je Poyntingov vektor[2] **S**

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{1.17}$$

Kot vidimo, je smer energijskega toka vedno pravokotna na smeri **E** in **H**. Gostoto energijskega toka j, to je količino energije, ki v danem časovnem intervalu preteče skozi dano ploskev z normalo $\hat{\mathbf{n}}$, izračunamo kot časovno povprečje projekcije Poyntingovega vektorja

$$j = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle . \tag{1.18}$$

Gostoti energijskega toka, predvsem gostoti svetlobnega toka, pravimo tudi intenziteta .

Naloga 1.2.1 — Poyntingov teorem. Iz Maxwellovih enačb izpelji kontinuitetno enačbo

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{H}^2\right) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \tag{1.19}$$

Pomagaj si z zvezo $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} - (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}$.

Opazimo, da predstavlja Poyntingov teorem izrek o ohranitvi energije. Prvi in drugi člen na desni strani gornje enačbe opišeta gostoto energije, shranjene v električnem in magnetnem polju, medtem ko tretji in četrti člen opišeta energijo, ki je shranjena v snovi (električnih in magnetnih dipolih). Za valovanje v homogeni izotropni snovi tako velja

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1.20}$$

kjer je w celotna gostota energije elektromagnetnega polja. Zapišemo jo kot

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \mu \mathbf{H}^2. \tag{1.21}$$

Valovno enačbo in ohranitvene zakone lahko zapišemo tudi za anizotropne, nehomogene ali nelinearne snovi. Nekaj teh primerov bomo srečali v nadaljevanju in jih bomo obravnavali sproti.

1.3 Monokromatski elektromagnetni val

Reševanje valovne enačbe si navadno poenostavimo z vpeljavo kompleksnega zapisa jakosti električnega in magnetnega polja. Račun si oglejmo na primeru monokromatskega elektromagnetnega vala. Nastavek za monokromatski val s krožno frekvenco ω naj bo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) \qquad \text{in} \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \Re(\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}), \tag{1.22}$$

kjer sta $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ časovno neodvisna vektorja jakosti električnega in magnetnega polja s kompleksno amplitudo. Podobno lahko vpeljemo tudi kompleksne vektorje **P**, **M**, **D** in **B**, ki opisujejo realne količine (polarizacijo, magnetizacijo, gostoto električnega in gostoto magnetnega polja). V nadaljevanju bomo večinoma pisali polja v kompleksni obliki, pri čemer se bomo držali gornje definicije. Zavedati pa se moramo, da je uporaba kompleksnega zapisa zgolj računski pripomoček, na koncu je treba rezultate vedno izraziti z realnimi količinami.

[2] Angleški fizik John Henry Poynting, 1852–1914.

Če vstavimo gornji nastavek za monokromatski val v valovno enačbo (enačba 1.14), dobimo Helmholtzevi enačbi[3] za kompleksna vektorja jakosti električnega in magnetnega polja. V homogenem in izotropnem sredstvu ju zapišemo kot

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.23}$$

$$\nabla^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0, \tag{1.24}$$

kjer je $k = nk_0 = n\omega/c_0$ velikost valovnega vektorja oziroma valovno število.

Vpeljimo še kompleksni Poyntingov vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*. \tag{1.25}$$

Naloga 1.3.1 Upoštevajoč izraz za Poyntingov vektor $\mathbf{S}$ (enačba 1.17) pokaži, da lahko intenziteto valovanja j (oziroma povprečje projekcije Poyntingovega vektorja) izrazimo s kompleksnim Poyntingovim vektorjem $\mathbf{S}(\mathbf{r})$:

$$j = \langle \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\rangle = \frac{1}{4}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{H}) = \Re(\mathbf{S}(\mathbf{r})). \tag{1.26}$$

1.4 Ravni val

Osnovna rešitev valovne enačbe je ravni val. Nastavek, ki predstavlja ravni val in hkrati reši Helmholtzevo enačbo (enačba 1.23), je oblike

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} \tag{1.27}$$

in podobno za magnetno polje

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}, \tag{1.28}$$

pri čemer sta vektorja $\mathbf{E}_0$ ter $\mathbf{H}_0$ od kraja in časa neodvisna. Velikost valovnega vektorja $\mathbf{k}$ je $k = nk_0$, pri čemer je n lomni količnik izotropne in homogene snovi.

Vektorja jakosti električnega in magnetnega polja zadostujeta Maxwellovim enačbam (enačbe 1.1–1.4), iz česar sledi, da sta polji vedno medsebojno pravokotni, hkrati pa pravokotni na valovni vektor $\mathbf{k}$. Elektromagnetno valovanje je torej transverzalno valovanje.

Naloga 1.4.1 Pokaži, da za ravni val vedno velja $\mathbf{D}\perp\mathbf{k}$ in $\mathbf{B}\perp\mathbf{k}$. Izpelji še pravokotnost polj in valovnega vektorja v izotropni snovi

$$\mathbf{k}\times\mathbf{H}_0 = -\omega\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}_0 \quad \text{in} \tag{1.29}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 = \omega\mu\mu_0\mathbf{H}_0. \tag{1.30}$$

Zaradi enolične zveze med električnim in magnetnim poljem zadošča za opis ravnega vala le eno polje, navadno se odločimo za električno.

[3] Nemški zdravnik in fizik Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821–1894.

Energijski tok je pri ravnem valu v izotropni snovi vedno v smeri valovnega vektorja, pravokotno na valovne fronte. Iz definicije za gostoto svetlobnega toka (enačbi 1.26) ter Maxwellovih enačb (enačbe 1.1–1.4) sledi

$$j = \Re\left(\frac{1}{4}E_0H_0^* + \frac{1}{4}E_0^*H_0\right) = \frac{1}{2}c\varepsilon\varepsilon_0\left|E_0\right|^2 = \frac{1}{2}c_0n\varepsilon_0\left|E_0\right|^2. \tag{1.31}$$

Gostota svetlobnega toka (intenziteta svetlobe) je torej sorazmerna s kvadratom amplitude jakosti električnega polja. Poglejmo nekaj primerov. Gostoti toka $j = 1\ \mathrm{kW/m^2}$ (približna gostota svetlobnega toka s Sonca) tako v praznem prostoru ustreza jakost električnega polja $E_0 = 868\ \mathrm{V/m}$, gostoti $j = 1\ \mathrm{W/\mu m^2}$ (intenziteta močno fokusiranega laserskega žarka) pa $E_0 = 27\ \mathrm{MV/m}$.

Zapišimo še povprečno gostoto energije valovanja. K energiji prispevata tako magnetno kot električno polje. Oba prispevka sta enaka, zato velja

$$\langle w\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_0\left|E_0\right|^2 + \frac{1}{4}\mu\mu_0\left|H_0\right|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0\left|E_0\right|^2. \tag{1.32}$$

Povprečna gostota energije w, pomnožena s hitrostjo svetlobe v snovi, da gostoto energijskega toka j oziroma intenziteto svetlobe

$$j = cw. \tag{1.33}$$

Gornji izraz nazorno kaže, da je intenziteta svetlobe pravzaprav pretok energije. To si lahko predstavljamo, če vzamemo valj s prečnim presekom S in dolžino $c\Delta t$. V volumnu $Sc\Delta t$ je potem shranjene $wSc\Delta t$ energije. Energija, ki preteče skozi presek S v času Δt, je ravno cw.

Intenziteta ravnega vala je neodvisna od kraja in časa, iz česar sledi, da je povsod po prostoru enaka. Če bi hoteli izračunati energijo, ki jo nosi ravni val, bi opazili, da je ta energija neskončna. To seveda ni mogoče, zato se je vedno treba zavedati, da je ravni val le idealiziran, a nazoren in praktičen približek elektromagnetnega vala.

1.5 Polarizacija EM valovanja

Jakost električnega polja elektromagnetnega valovanja je v izotropnem sredstvu pravokotna na smer valovnega vektorja[4]. Vektor $\mathbf{E}$ torej leži v ravnini, pravokotni na smer valovnega vektorja, njegovo smer pa opiše polarizacija.

V splošnem je ravni val eliptično polariziran. Takrat vektor $\mathbf{E}$ v ravnini, pravokotni na valovni vektor, oriše elipso. Obe komponenti vektorja $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ nihata sinusno z enako frekvenco, lahko pa se razlikujeta v amplitudi in fazi. Kadar je elipsa izrojena v daljico, govorimo o linearno polariziranem valovanju, kadar pa je krog, govorimo o cirkularno polariziranem valu. Poljubno polarizacijo lahko vedno zapišemo kot vsoto dveh linearno ali dveh cirkularno polariziranih valovanj.

Polarizacijo valovanja lahko zapišemo s kompleksnim Jonesovim vektorjem[5] $\mathbf{J}$. Za monokromatski ravni val, ki se širi v smeri z, je

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|E_0|}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

[4] V splošnem je jakost električnega polja pravokotna na smer Poyntingovega vektorja ($\mathbf{E} \perp \mathbf{S}$) in gostota električnega polja pravokotna na smer valovnega vektorja ($\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$). V anizotropnih sredstvih velja $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{S}$.

[5] Ameriški fizik Robert Clark Jones, 1916–2004.

Dodali smo normalizacijski faktor $|E_0| = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}$, da je Jonesov vektor normaliziran in $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* = 1$. Ravni val, linearno polariziran v smeri x, tako zapišemo kot $\mathbf{J} = (1,0)$, val, ki je linearno polariziran pod kotom 45° glede na osi x in y, pa je $\mathbf{J} = (1,1)/\sqrt{2}$. Za zapis cirkularno polariziranega valovanja ni enotnega dogovora, tukaj zapišimo desno cirkularno polarizirano valovanje kot $\mathbf{J} = (1,-i)/\sqrt{2}$, levo cirkularno polarizirano pa z $\mathbf{J} = (1,i)/\sqrt{2}$. V našem zapisu je desno polariziran val tisti val, pri katerem se električna poljska jakost na danem mestu vrti v desno, če gledamo v smeri širjenja valovanja. Hkrati pa velja, da električna poljska jakost ob danem času vzdolž smeri širjenja valovanja opiše levosučno vijačnico.

Zapis z Jonesovim vektorjem je prikladen, saj omogoča preprost izračun prehoda ravnega vala skozi optične elemente, ki spreminjajo polarizacijo, a ohranjajo obliko ravnega vala. V splošnem se pri prehodu skozi sredstvo spremeni kompleksna amplituda $\mathbf{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y})$

$$E_{2x} = T_{11}E_{1x} + T_{12}E_{1y} \tag{1.35}$$

$$E_{2y} = T_{21}E_{1x} + T_{22}E_{1y}, \tag{1.36}$$

pri čemer so komponente T_{ij} odvisne od lastnosti sredstva. Enačbi zapišemo v matrični obliki

$$\mathbf{E}_2 = T \cdot \mathbf{E}_1, \tag{1.37}$$

kjer sta $\mathbf{E}_1$ in $\mathbf{E}_2$ vstopni in izstopni val, T pa je Jonesova matrika. Jonesova matrika za prehod skozi linearni polarizator, ki polarizira v smeri x, je

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.38}$$

Oglejmo si še dva zanimiva primera optičnih komponent. Jonesova matrika za $\lambda/2$ ploščico, ki spremeni desno cirkularno polariziran val v levo polariziran in obratno, je

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

Jonesova matrika za $\lambda/4$ ploščico pa je

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \tag{1.40}$$

Ta optični element linearno polarizirano valovanje oblike $\frac{E_0}{\sqrt{2}}(1,1)$ spremeni v levo cirkularno polarizirano valovanje, cirkularno polarizirano valovanje pa nazaj v linearno.

Naloga 1.5.1 Pokaži, da je Jonesova matrika za polarizator, ki prepušča polarizacijo pod kotom ϑ glede na os x, podana s spodnjo matriko. Namig: matriko T', ki predstavlja polarizator v smeri x, zapiši v zavrtenem koordinatnem sistemu $T = R(\vartheta) \cdot T' \cdot R(\vartheta)^{\mathrm{T}}$, kjer je $R(\vartheta)$ rotacijska matrika.

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & \sin^2\vartheta \end{bmatrix}. \tag{1.41}$$

1.6 Lom in odboj EM valovanja

Na ravni meji med dvema izotropnima dielektrikoma se del svetlobe odbije po odbojnem zakonu, del pa lomi po lomnem zakonu

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2. \tag{1.42}$$

S kotoma $\vartheta_1$in ϑ_2 smo označili vpadni in lomni kot, $n_1$in n_2 pa sta lomna količnika prve in druge snovi. Poglejmo, kaj se pri lomu in odboju zgodi s polarizacijo valovanja. Os x naj bo pravokotna na vpadno ravnino (slika 1.2). Valovanje, polarizirano v tej smeri, je transverzalno električno (TE) valovanje. Takrat je električna poljska jakost vzporedna mejni ravnini. Kadar leži v mejni ravnini jakost magnetnega polja, govorimo o transverzalnem magnetnem valovanju (TM).

Slika 1.2: Lom elektromagnetnega valovanja. Levo: transverzalno električno (TE) valovanje. Desno: transverzalno magnetno (TM) valovanje. Os x je pravokotna na vpadno ravnino in kaže iz lista.

Jonesovi matriki za prepustnost t in odbojnost r na plasti med dvema dielektrikoma zapišemo kot

$$t = \begin{bmatrix} t_x & 0 \\ 0 & t_y \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad r = \begin{bmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{bmatrix}. \tag{1.43}$$

Potem je

$$E_{2x} = t_x E_{1x} \qquad E_{3x} = r_x E_{1x} \tag{1.44}$$

$$E_{2y} = t_y E_{1y} \qquad E_{3y} = r_y E_{1y}, \tag{1.45}$$

pri čemer smo z $\mathbf{E}_2$ označili prepuščeni val, z $\mathbf{E}_3$ pa odbitega. Iz robnih pogojev (enačbe 1.10–1.13) izračunamo koeficiente matrik r in t s Fresnelovimi enačbami[6]:

$$r_x = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2}, \qquad t_x = 1 + r_x = \frac{2 n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \tag{1.46}$$

in

$$r_y = \frac{n_2 \cos \vartheta_1 - n_1 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}, \qquad t_y = (1 + r_y) \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} = \frac{2 n_1 \cos \vartheta_1}{n_1 \cos \vartheta_2 + n_2 \cos \vartheta_1}. \tag{1.47}$$

[6]Francoski fizik Augustin-Jean Fresnel, 1788–1827.

V splošnem sta odbojnost r in prepustnost t kompleksni količini, saj iz lomnega zakona sledi, da je $\cos\vartheta_2 = \sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2\vartheta_1}$ lahko kompleksen. Velikost števila $|r|$ tako predstavlja odbojnost, argument $\arg\{r\}$ pa spremembo faze pri odboju.

Prepustnost r in odbojnost t povesta, kako se spremeni kompleksna amplituda jakosti električnega polja. Razmerje med intenziteto odbite in vpadne svetlobe $\mathscr{R}$ oziroma razmerje med intenziteto prepuščene in vpadne svetlobe $\mathscr{T}$ izračunamo kot

$$\mathscr{R} = |r|^2 \tag{1.48}$$

in

$$\mathscr{T} = 1 - \mathscr{R}. \tag{1.49}$$

Slednja enačba sledi iz ohranitve energije. V splošnem $\mathscr{T}$ ni enak $|t|^2$, saj energijski tok potuje po različnih snoveh in v različnih smereh. Velja zveza

$$\mathscr{T} = \frac{n_2\cos\vartheta_2}{n_1\cos\vartheta_1}|t|^2. \tag{1.50}$$

Slika 1.3: Odbojnost r za obe vpadni polarizaciji (levo) in razmerje med intenziteto odbite in vpadne svetlobe $\mathscr{R}$ (desno) v odvisnosti od vpadnega kota. Pri Brewsterjevem vpadnem kotu je odbojnost enaka nič.

Zanimiva je odvisnost odbojnosti od vpadnega kota. Izkaže se, da pri nekem kotu, imenujemo ga Brewsterjev kot[7], odbojnost za TM polarizacijo enaka nič in vsa vpadla svetloba je prepuščena. Brewsterjeva okna (steklene ploščice, postavljene pod Brewsterjevim kotom) uporabljamo v resonatorjih laserjev za povečanje izgub TE in zmanjšanje izgub TM polariziranega valovanja.

Naloga 1.6.1 — Brewsterjev kot. Pokaži, da za TM val obstoja vpadni kot

$$\vartheta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \tag{1.51}$$

pri katerem je odbojnost enaka nič in prepustnost enaka $\mathscr{T} = 1$.

[7] Škotski fizik in znanstvenik Sir David Brewster, 1781–1868.

Pri prehodu skozi optične elemente se – razen TM polariziranega valovanja pri Brewsterjevem kotu – vedno nekaj svetlobe odbije. Da zmanjšamo te izgube, optične elemente navadno prekrijemo z antirefleksno plastjo, to je nanosom ene ali več primerno izbranih debelin plasti dielektrikov z ustreznimi lomnimi količniki. Zaradi destruktivne interference se količina odbite svetlobe z izbrano valovno dolžino občutno zmanjša. Ker imamo v fiziki laserjev opraviti s koherentnimi izvori s točno določeno valovno dolžino, za zmanjšanje izgub, na primer v resonatorju laserja, vedno uporabljamo optične elemente (leče, kristale, akusto-optične modulatorje ...) z ustrezno antirefleksno plastjo.

1.7 Uklon svetlobe

Ko svetloba vpade na oviro, za oviro nastane senca. Nastala senca ni ostra, ampak ima zaradi uklona zabrisane robove. Obravnave uklona svetlobe na odprtinah (zaslonkah) se lotimo z uporabo skalarnega približka teorije elektromagnetnega polja. To pomeni, da vpliv polarizacije zanemarimo. Vpliv polarizacije je pomemben zgolj pri zelo majhnih odprtinah, torej kadar je $\lambda \sim a$, kjer je a velikost odprtine. Treba pa je povedati, da so tudi v tem primeru uklonske slike za različne polarizacije podobne, razlikujejo pa se po intenziteti prepuščene svetlobe.

Žičnati polarizatorji

Primer, kjer skalarni približek ne da pravih rezultatov, je uklon na mrežici, narejeni iz zelo tankih prevodnik žic s periodo mrežice $d \ll \lambda$. Takšna mrežica deluje kot polarizator za valovanje s polarizacijo, ki je pravokotno na žice (TE polarizacija). Elektromagnetni val s TM polarizacijo pri prečkanju inducira tok v žicah, medtem ko je za TE polarizacijo inducirani tok bistveno manjši, saj je smer toka omejena vzdolž žice. Posledično je prepustnost za TE val velika, medtem ko se TM val delno absorbira in odbije. Takšni polarizatorji se večinoma uporabljajo v mikrovalovni tehniki, vendar se v zadnjih letih z razvojem in izboljšavo litografskih postopkov vse pogosteje uporabljajo tudi v bližnjem infrardečem področju svetlobe.

Pri velikostih odprtin $a \gg \lambda$ torej uporabimo skalarno valovno enačbo (enačba 1.14)

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \tag{1.52}$$

Zapisana valovna enačba velja za vse komponente električne E in tudi magnetne poljske jakosti H. Časovna odvisnost polja E je harmonična funkcija in je sorazmerna z $e^{-i\omega t}$. Z uporabo Greenovega teorema lahko jakost polja E_P v točki P izrazimo s poljem na poljubni ploskvi, ki obkroža točko P (slika 1.4). Zvezo opisuje Kirchhoffov integral[8]

$$E_P = -\frac{1}{4\pi}\oint \left(E\,\mathbf{n}\cdot\nabla\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{n}\cdot\nabla E \right) dS, \tag{1.53}$$

kjer je $\mathbf{n}$ normala na ploskev, po kateri teče integral, r pa je oddaljenost od točke P do ploskve dS. Kirchhoffov integral velja splošno za katerokoli harmonično funkcijo, ki reši valovno enačbo (enačba 1.52), ne samo E, in torej ni vezan na obravnavo uklona svetlobe.

Kot prvi primer vzemimo točkast izvor v točki S. Svetloba iz njega vpada na zaslon, v katerem je odprtina poljubne oblike. Izračunajmo skalarno polje v točki P na drugi strani zaslona. Vpadno svetlobo zapišemo kot

$$E = A\frac{e^{ikr'}}{r'}, \tag{1.54}$$

kjer je r' razdalja od izvora do točke na zaslonu, A pa zaradi ohranitve energije konstanta.

[8] Nemški fizik Gustav Kirchhoff, 1824–1887.

Slika 1.4: Integracijska ploskev v Kirchhoffovem integralu zajema odprtino in objema točko P.

Integracijska ploskev je lahko poljubna sklenjena ploskev, ki objema točko P. Izberemo tako, ki zajema odprtino na zaslonu, poleg tega pa naredimo še dva približka:

1. Jakost polja E in njen gradient doprineseta k integralu le na odprtini, na preostanku ploskve pa sta njuna prispevka zanemarljivo majhna.

2. Vrednost E in njen gradient sta na odprtini takšna, kot da zaslona ne bi bilo.

Zgornja približka sta precej groba, vendar se izkaže, da v splošnem kljub temu dobimo dobro ujemanje z eksperimentalno določeno uklonsko sliko, s čimer upravičimo njuno uporabo pri izračunu uklonske slike.

Kirchhoffov integral za primer točkastega izvora svetlobe se potem zapiše kot integral, pri čemer integriramo po odprtini

$$E_P = -\frac{ikAe^{-i\omega t}}{4\pi} \int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \left[\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n},\mathbf{r}')\right] dS. \tag{1.55}$$

V literaturi ga pogosto imenujejo Fresnel-Kirchhoffov uklonski integral.

Naloga 1.7.1 Uporabi Kirchhoffov integral (enačba 1.53) in pokaži, da za primer krožnega vpadnega vala (enačba 1.54) polje v točki P zapišemo s Fresnel-Kirchhoffovim integralom (enačba 1.55). Pri tem privzami, da je oddaljenost točke P od odprtine $r \gg \lambda$.

Oglejmo si poseben primer, ko leži točkast izvor svetlobe na osi okrogle odprtine. Razdalja r' je potem konstantna in polje v točki P izračunamo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi} \int E_S \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \left[\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) + 1\right] dS, \tag{1.56}$$

pri čemer E_S predstavlja kompleksno amplitudo vpadnega polja v odprtini

$$E_S = A\frac{e^{ikr'}}{r'}. \tag{1.57}$$

Zgornja oblika Fresnel-Kirchhoffovega integrala ni pravzaprav nič drugega kot matematičen zapis Huygensovega načela[9]. Spomnimo se, da Huygensovo načelo pravi, da lahko vsako točko valovne fronte obravnavamo kot izvor novega krogelnega vala. Točno to je zapisano tudi v gornjem integralu. Vpadni val E_S v vsakem od elementov dS odprtine vzbudi krogelno valovanje s kompleksno amplitudo

$$E = A_0 \frac{e^{ikr}}{r}, \tag{1.58}$$

polje v izbrani točki P pa je vsota prispevkov posameznih krogelnih valovanj.

Za razliko od osnovnega Huygensovega načela, v Fresnel-Kirchhoffovem integralu (enačba 1.55) nastopa še faktor $[\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1]$, ki poskrbi, da ni valovanja v smeri nazaj proti izvoru. Tudi faktor $-i$ manjka v osnovnem Huygensovem načelu, pomeni pa, da je uklonjeno valovanje fazno zakasnjeno za $\pi/2$ glede na osnovno valovanje E_S.

Uporabna razširitev Fresnel-Kirchhoffovega uklona je z uporabo prepustnostne funkcije odprtine T. Z njo v splošnem popišemo amplitudne in fazne spremembe, do katerih lahko pride na raznih odprtinah, lečah, uklonskih mrežicah ... Razširjen uklonski integral zapišemo kot

$$E_P = -\frac{ik}{4\pi} \int T(r) E_S(r) \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} [\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})+1]\, dS, \tag{1.59}$$

pri čemer smo upoštevali tudi splošno obliko vpadnega vala $E_S(r)$.

Fraunhoferjev in Fresnelov približek

Izračun Fresnel-Kirchhoffovega integrala je v splošnem zelo zapleten, zato se pogosto poslužujemo dveh približkov: Fraunhoferjevega[10] in Fresnelovega. Fraunhoferjeva uklonska slika velja za daljno polje, kadar lahko vpadni in uklonjeni val zapišemo kot ravna valova. Bolj zapleteno Fresnelovo uklonsko sliko pa moramo uporabiti, kadar obravnavamo primer bližnjega polja.

Slika 1.5: V Fraunhoferjevem približku valovanji obravnavamo kot ravna valova (levo). Fresnelov približek moramo uporabiti za obravnavno uklona v primeru bližnjega polja (desno).

Mejo med daljnim in bližnjim poljem kvalitativno določa Fresnelovo število

$$F = \frac{a^2}{L\lambda}. \tag{1.60}$$

Pri tem je a karakteristična dimenzija odprtine, L tipična oddaljenost od odprtine ter λ valovna dolžina.

[9] Nizozemski znanstvenik Christiaan Huygens, 1629–1695.
[10] Nemški fizik Joseph von Fraunhofer, 1787–1826.

V grobem velja, da za oddaljenosti L od odprtine, za katere velja $F < 1$, polje obravnavamo kot daljno polje, medtem ko $F > 1$ pove, da moramo uklon obravnavati v Fresnelovem približku ali celo v polni obliki.

Zapišimo uklonske integrale za oba približka. Izhajajmo iz Fresnel-Kirchhoffovega integrala za točkast izvor (enačba 1.55) in zapišimo razdaljo r s koordinatama na zaslonu x', y' ter lego točke P s koordinatami x, y, z (slika 1.6).

Slika 1.6: K izračunu Fraunhoferjevega in Fresnelovega uklona. Zaslon, kjer opazujemo uklonsko sliko, je od odprtine oddaljen za z.

Zapišemo

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \tag{1.61}$$

in privzamemo, da je z razmeroma velik v primerjavi s prečnima razlikama. Potem lahko r razvijemo

$$r \approx z + \frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z}. \tag{1.62}$$

V Fraunhoferjevem približku zadošča uporaba le linearnih členov v gornjem izrazu in za Fraunhoferjev uklonski integral dobimo

$$E_P = -\frac{i}{z\lambda} \int\int E_S e^{-ik(xx'+yy')/z} dx'dy', \tag{1.63}$$

kar ni nič drugega kot Fouriereva transformacija polja E_S.

V Fresnelovem približku upoštevamo tudi kvadratne člene v razvoju in dobimo

$$E_P = -\frac{i}{z\lambda} \int\int E_S e^{-ik((x-x')^2+(y-y')^2)/2z} dx'dy'. \tag{1.64}$$

Naloga 1.7.2 Pokaži, da je v Fraunhoferjevi uklonski sliki uklon na okrogli odprtini s premerom a podan z

$$E_P = E_0 \frac{J_1(\pi a\rho/\lambda z)}{\pi a\rho/\lambda z}, \tag{1.65}$$

kjer je $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

1.8 EM valovanje v anizotropnih snoveh

Do zdaj smo obravnavali elektromagnetno valovanje v izotropnih snoveh, v katerih je dielektričnost skalar in hitrost širjenja valovanja neodvisna od njegove smeri. V splošnem so snovi anizotropne, dielektričnost je tenzor, hitrost potovanja svetlobe skozi snov pa je odvisna od smeri razširjanja in od polarizacije valovanja.

Gostoto električnega polja v anizotropni snovi zapišemo kot

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \mathbf{E}, \tag{1.66}$$

kjer je ε_{ij} tenzor drugega reda in ima v splošnem devet komponent. V dielektričnih snoveh, v katerih ne pride do optične aktivnosti ali absorpcije, je tenzor realen in simetričen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$. Tak tenzor lahko vedno diagonaliziramo, torej poiščemo koordinatni sistem, v katerem je tenzor $\underline{\varepsilon}$ diagonalen. V takem koordinatnem sistemu velja

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \mathbf{E} \tag{1.67}$$

in

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 \\ D_2 &= \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 \\ D_3 &= \varepsilon_0 \varepsilon_3 E_3. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Glavne osi sistema določajo smeri, vzdolž katerih sta jakost in gostota električnega polja vzporedni, lastne vrednosti pa ustrezajo trem lomnim količnikom $\varepsilon_i = \sqrt{n_i}$. Kristale, za katere so vse tri vrednosti n_i različne, imenujemo optično dvoosni kristali, medtem ko sta v optično enoosnih kristalih dve lastni vrednosti enaki $n_1 = n_2$. Če so enake vse tri vrednosti, je snov izotropna.

Optična indikatrisa

Poglejmo, kako se po anizotropnih snoveh širi valovanje v odvisnosti od njegove smeri in polarizacije. Preprost primer je valovanje, ki se širi vzdolž lastne osi z, polarizirano pa je vzdolž lastne osi x. Pri prehodu skozi kristal se polarizacija valovanja ohrani, lomni količnik za tak val pa je n_1. Podobno velja za val, polariziran v smeri y, za katerega je lomni količnik enak n_2. Če se valovanje širi vzdolž lastne osi z, vendar njegova polarizacija ne sovpada z lastnima osema x ali y, dobimo po prehodu skozi kristal iz vpadnega linearno polariziranega valovanja v splošnem eliptično valovanje. Lastni komponenti namreč potujeta z različnima hitrostma, zato pride med njima do faznega zamika.

Za poljubno smer širjenja valovanja ter poljubno polarizacijo je račun bolj zapleten in je treba lomne količnike še izračunati. Pri tem si pomagamo z grafično upodobitvijo, s tako imenovano optično indikatriso (elipsoidom lomnega količnika).

Slika 1.7: Optična indikatrisa oziroma elipsoid lomnega količnika. Glavne osi elipsoida sovpadajo z glavnimi osmi tenzorja ε, polosi elipsoida pa so enake lomnim količnikom n_i. V primeru optično enoosnega kristala je indikatrisa rotacijski elipsoid, v primeru izotropne snovi pa je optična indikatrisa krogla.

Optična indikatrisa je elipsoid, podan z enačbo

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1. \tag{1.69}$$

Glavne osi elipsoida sovpadajo z glavnimi osmi tenzorja ε, polosi elipsoida pa so n_1, n_2 in n_3. Za val, ki se širi z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$, skozi izhodišče narišemo ravnino, pravokotno na smer valovnega vektorja (slika 1.7). Presečišče ravnine in elipsoida je elipsa, katere glavni osi podata vrednosti lomnih količnikov n_a in n_b za obe lastni polarizaciji, njuni smeri pa predstavljata lastni smeri gostote električnega polja. Ker sta to lastni osi, smer jakosti električnega polja izračunamo z enačbo (1.68).

Optično enoosni kristali

V optično enoosnih kristalih sta dve lastni vrednosti enaki in indikatrisa je rotacijski elipsoid. Po dogovoru izberemo lastne vrednosti tako, da velja $n_1 = n_2 \neq n_3$. Za valovanje, ki se razširja v smeri z, sta lomna količnika za obe polarizaciji enaka in os z imenujemo optična os. Hitrost valovanja, ki se širi vzdolž optične osi, je torej neodvisna od njegove polarizacije. Navadno vpeljemo tudi nove oznake: $n_1 = n_2 = n_o$, ki označuje redni (*ordinary*) lomni količnik, $n_3 = n_e$ pa izredni (*extraordinary*) lomni količnik.

Zaradi simetrije je pri izračunu lomnega količnika pomemben le kot ϑ med valovnim vektorjem $\mathbf{k}$ in optično osjo z. Dvema lastnima polarizacijama pripadata dva različna lomna količnika. Za lažjo predstavo oba lomna količnika skiciramo v odvisnosti od kota ϑ (slika 1.8). Lomni količnik za žarek, ki je polariziran pravokotno na vpadno ravnino, je neodvisen od ϑ, zato narišemo krožnico. Takemu žarku pravimo redni žarek. Žarek, ki je polariziran v vpadni ravnini, je tako imenovan izredni žarek. Pripadajoč lomni količnik je odvisen od kota ϑ in ga izračunamo iz sledeče enačbe elipse s polosema n_o in n_e:

$$\boxed{\frac{1}{n^2(\vartheta)} = \frac{\cos^2\vartheta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{n_e^2}.} \tag{1.70}$$

Opazimo, da se krožnica in elipsa dotikata ravno na osi z. Takrat se valovanje širi vzdolž optične osi in lomna količnika sta za obe polarizaciji enaka n_o.

Slika 1.8: V optično enoosnih kristalih je lomni količnik odvisen od smeri valovnega vektorja in njegove polarizacije. a) primer pozitivno anizotropne snovi ($n_e > n_o$). b) Redni žarek je polariziran pravokotno na vpadno ravnino. Zanj velja, da je $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ in $\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}$. Izredni žarek je polariziran v vpadni ravnini. Smer širjenja žarka $\mathbf{S}$ ni vzporedna z valovnim vektorjem $\mathbf{k}$, prav tako valovne fronte niso pravokotne nanjo. c) Primer negativno anizotropne snovi ($n_e < n_o$).

Navadno sta pri ravnem valu vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ vzporedna, prav tako $\mathbf{k}$ in $\mathbf{S}$. Žarek se širi v smeri valovnega vektorja, valovne fronte pa so pravokotne nanj. To velja tudi za redni žarek v anizotropnih snoveh. Izredni žarek pa ima, kot že ime nakazuje, "izredne" lastnosti. Vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$ nista vzporedna, zato tudi valovni vektor $\mathbf{k}$ ni vzporeden toku energije oziroma Poyntingovemu vektorju $\mathbf{S}$ (slika 1.8 b). Žarek, ki ga vidimo, torej potuje v smeri, ki ni enaka smeri valovnega vektorja. Smer Poyntingovega vektorja določimo kot normalo na elipso pri kotu ϑ.

Dvojni lom

Ko vpade žarek na anizotropno snov, se lomi. Privzemimo, da je lomni količnik snovi, iz katere valovanje prehaja v anizotropen kristal, enak 1. Vemo, da je hitrost valovanja v snovi – in s tem tudi kot, pod katerim se lomi – odvisna od polarizacije valovanja. V splošnem dobimo dva lomljena žarka z različnima polarizacijama, kar da ime pojavu: dvolomnost (slika 1.9). Da zadostimo ohranitvi faze pri prehodu, moramo popraviti tudi lomni zakon (enačba 1.42).

Za redni val s TE polarizacijo (pravokotno na vpadno ravnino) velja navadni lomni zakon, pri čemer je lomni količnik snovi enak rednemu lomnemu količniku n_o:

$$\sin\vartheta_1 = n_o \sin\vartheta_o. \tag{1.71}$$

Za izredni val s TM polarizacijo (električna poljska jakost leži v vpadni ravnini) pa velja

$$\sin\vartheta_1 = n(\vartheta_e)\sin\vartheta_e, \tag{1.72}$$

pri čemer $n(\vartheta_e)$ izračunamo iz enačbe (1.70).

Kadar vpada valovanje pravokotno na izotropno snov, se žarek ne lomi. V dvolomnih snoveh pa lahko tudi pri pravokotnem vpadu pride do razklona žarkov (slika 1.9 b). Kadar je optična os nagnjena glede na vpadnico, sta valovna vektorja obeh prepuščenih žarkov sicer vzporedna valovnemu vektorju vpadnega žarka ($\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_o \parallel \mathbf{k}_e$), razlikujejo pa se smeri Poyntingovih vektorjev ($\mathbf{S}_1 \parallel \mathbf{S}_o \nparallel \mathbf{S}_e$). Ob prehodu skozi plast anizotropne snovi tako dobimo dva vzporedna, a razmaknjena žarka z medsebojno pravokotnimi polarizacijami. Enoosne kristale, odrezane pod primernim kotom in prave dolžine, zato lahko uporabimo kot polarizacijski delilnik žarkov.

Slika 1.9: Dvojni lom. a) Pri poševnem vpadu na anizotropno snov se valovanje loči na dva različno polarizirana žarka. b) Tudi pri pravokotnem vpadu se žarka ločita, če je optična os pod poljubnim kotom glede na normalo mejne ravnine. Valovni vektorji so v tem kolinearni, Poyntingovi vektorji pa imajo različne smeri.

2. Koherenca

V tem poglavju bomo spoznali koherenco. To je lastnost valovanja, ki je tesno povezana s pojavom interference. Ohlapno pravimo, da je koherentno tisto valovanje, s katerim se posrečijo interferenčni poskusi.

2.1 Youngov poskus

Interferenčnih pojavov ni mogoče opazovati z vsakim svetlobnim izvorom. Da bi to razumeli, si oglejmo interferenco valovanja, ki vpada na dve ozki reži (tako imenovani Youngov poskus[1]). Navadno predpostavimo, da sta obe reži osvetljeni z istim ravnim valom. Delni valovanji, ki izhajata iz rež, imata tako ves čas poskusa enako polarizacijo, enako frekvenco in enako fazno razliko. Zaradi različnih dolžin poti obeh delnih valovanj od reže do dane točke na zaslonu dobimo na oddaljenem zaslonu interferenčni vzorec (slika 2.1). Vendar dobimo interferenco le v primeru, ko je faza valovanja, ki vpada na reži, konstantna. Svetloba s konstantno fazo je koherentna in jo dobimo, na primer, iz kvalitetnega laserja. Svetloba iz običajnih svetil ne da interferenčnega vzorca, zato zanjo pravimo, da ni koherentna.

Slika 2.1: Youngov poskus na dveh režah. Le če je vpadno valovanje koherentno (levo), dobimo na zaslonu interferenčni vzorec. Nekoherentno valovanje s spremenljivo fazo (desno) ne da interferenčnega vzorca.

Svetloba navadnih svetil, na primer plinskih razelektritvenih cevi, je zaradi vrste nastanka kaotične narave. Atomi sevajo neodvisno, zato se faza izsevanega valovanja spreminja. Približno konstantna je le znotraj nekega karakterističnega časa. Če je pri interferenčnem poskusu karakteristični čas spreminjanja faze krajši od zakasnitve med valovanjema, ki nastane zaradi različno dolgih poti, dobimo na danem mestu zaslona izmenično konstruktivno in destruktivno interferenco. Ker je čas spreminjanja praviloma bistveno krajši od časa opazovanja interference, utripanje svetlobe na zaslonu ni vidno. Interferenčni poskus se ne posreči zaradi majhne časovne koherence, karakterističnemu času spreminjanja faze pa rečemo koherenčni čas t_c. Časovno koherenco bomo natančneje obravnavali v razdelku (2.3), zaenkrat povejmo le, da je časovna koherenca vezana na fazno razliko med dvema točkama, ki ležita vzdolž smeri širjenja valovanja.

[1] Angleški znanstvenik Thomas Young, 1773–1829.

Poleg časovne koherence na interferenčno sliko pomembno vpliva tudi prostorska koherenca, ki je posledica končne dimenzije svetila. Svetloba, ki vpada na reži z različnih delov svetila, ima namreč različno fazo zaradi različnih dolžin poti od svetila do rež. Ta faza se prišteje fazni razliki zaradi različno dolgih poti od rež do zaslona, zaradi česar se na zaslonu interferenčne proge nekoliko premaknejo. Če je fazna razlika žarkov iz različnih delov svetila večja od fazne razlike za režami, se celotna interferenčna slika na zaslonu izpovpreči. Interferenco pri Youngovem poskusu dobimo, kadar sta reži razmaknjeni le toliko, da je povprečna fazna razlika manjša od 2π. Največjemu prečnemu razmiku, ki še da interferenco, rečemo prečna koherenčna razdalja d_c. Prostorska koherenca, ki jo bomo podrobneje spoznali v razdelku (2.5), je torej vezana na fazno razliko med dvema točkama, ki ležita prečno na smer širjenja valovanja.

Poudarimo še enkrat, da je pojem koherence statističen. Če je koherenčni čas t_c dolg v primerjavi s časom opazovanja, se vedno seštevajo amplitude valovanj in dobimo interferenčno sliko. Ta se slučajno spreminja z značilnim časom t_c. Če pa so razlike poti večje od ct_c ali razmik rež večji od d_c, gledamo le povprečno sliko in interferenčne proge izginejo.

2.2 Koherenca navadnih svetil

Obravnavajmo plinsko razelektritveno cev in z ustreznim filtrom izberimo eno samo spektralno črto. Ta črta naj ima osrednjo frekvenco ν_0 in končno frekvenčno širino $\delta\nu$, ki je kombinacija naravne širine in razširitve zaradi trkov med atomi ter Dopplerjevega pojava (glej poglavje 5.8). Privzemimo, da je glavni prispevek k razširitvi spektralne črte zaradi medatomskih trkov, razširitev, povezano z Dopplerjevim pojavom, pa zanemarimo.

Celotna izsevana svetloba je vsota delnih valov, ki izhajajo iz posameznih atomov in so med seboj neodvisni. Vsak delni val ohranja konstantno fazo med dvema trkoma, to je v časovnem intervalu t_c. Valovni paket dolžine t_c mora vsebovati frekvence v pasu $\Delta\omega$, za katerega velja $t_c\Delta\omega \sim 1$. Koherenčni čas je torej kar reda velikosti obratne vrednosti spektralne širine svetlobe. Povsem monokromatsko valovanje bil imelo neskončen koherenčni čas in bi bilo popolno koherentno.

Zapišimo še izsevano polje takega svetila. Jakost električnega polja v izbrani točki prostora je vsota delnih valov, ki izvirajo iz raznih delov izvora. Vsak atom v izvoru, naj jih bo N, seva neodvisno, zato so tudi delna valovanja med seboj neodvisna. Posamična valovanja ohranjajo konstantno fazo v času med dvema trkoma atoma, t_c. Zaradi enostavnosti privzemimo, da so amplitude E_1 in polarizacije izsevanih polj posameznih atomov enake. Električno poljsko jakost E v izbrani točki prostora lahko zapišemo kot vsoto posameznih prispevkov

$$E = E_1 \sum_{n=1}^{N} e^{i\phi_n(t)}. \tag{2.1}$$

kjer se faza polja $\phi_n(t)$, ki ga izseva posamezni atom, naključno spremeni ob trku z drugim atomom. Povprečje vsote polj je nič, povprečni kvadrat skupnega polja, ki je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka, pa je NE_1^2. Zaradi slučajnosti faz je slučajna tudi faza celotnega polja in se gotovo povsem spremeni v času, ko se spremeni faza posameznih prispevkov, to je t_c. S tako svetlobo bomo videli interferenco na režah, če bo razlika poti delnih valovanj manjša od ct_c.

Oglejmo si izračun na primeru. Imejmo $N = 100$ neodvisnih atomov, ki se jim faza naključno spreminja s karakterističnim časom $t_c = 10/\nu$, kjer je ν frekvenca valovanja. Na sliki (2.2) sta prikazana časovna poteka amplitude E (enačba 2.1) in $|E|^2$, ki je sorazmeren z intenziteto svetlobe. Za primerjavo je prikazan tudi ravni val $E = \sqrt{N}E_1 e^{-i\omega t}$ s konstantno fazo in njegova intenziteta. Intenziteta ravnega vala je konstantna, medtem ko je povprečna intenziteta svetlobe navadnega svetila približno konstantna le znotraj t_c.

Slika 2.2: Zgoraj: shematski prikaz električne poljske jakosti ravnega vala s konstantno fazo (rdeča črta) in električne poljske jakosti navadnega svetila (modra črta) kot funkcije časa. Faza polja se naključno spreminja s karakterističnim časom t_c. Spodaj: intenziteta ravnega vala (rdeča črta) in intenziteta svetlobe navadnega svetila (modra črta) kot funkciji časa. Modra črtkana črta je povprečna intenziteta $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t+t')E^*(t+t')dt'$ s časom integracije $T = t_c$.

2.3 Časovna koherenca

Časovno koherenco je najlažje obravnavati z Michelsonovim interferometrom[2], ki je prikazan na sliki (2.3).

Slika 2.3: Michelsonov interferometer. Svetlobo iz izvora P usmerimo preko kolimacijske leče (L) na polprepustno zrcalo (PZ), s čimer jo razdelimo na dva snopa. S premikom enega zrcala (Z) en delni žarek zakasnimo. Interferenco opazujemo na detektorju.

[2] Ameriški fizik in nobelovec Albert Abraham Michelson, 1852–1931.

Valovanje iz točke P na polprepustnem zrcalu razdelimo na dva delna snopa, nato enega s premikanjem zrcala zakasnimo za $\tau = 2x/c$. S kolimacijsko lečo dosežemo, da je čim več žarkov, ki izhajajo iz P, vzporednih z osjo interferometra. Dokler je zakasnitev τ manjša od koherenčnega časa t_c, dobimo na detektorju interferenčne vrhove in doline. Pri zakasnitvah, ki so večje od koherenčnega časa, ni stalne fazne povezave, interferenčna slika se spreminja in v daljših časih izpovpreči. Zapišimo to ugotovitev še matematično.

Svetlobni tok na detektorju je sorazmeren s kvadratom električne poljske jakosti obeh delnih valovanj

$$|E_d(t)|^2 = |E(t) + E(t+\tau)|^2 = |E(t)|^2 + |E(t+\tau)|^2 + 2\Re E(t)E^*(t+\tau). \tag{2.2}$$

Zakasnitev τ je določena s premikom pomičnega zrcala, $\tau = 2x/c$. Navadno opazujemo v času T, ki je dolg v primerjavi s koherenčnim časom, zato povprečimo po času

$$\begin{aligned} \langle |E_d|^2 \rangle &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |E_d(t)|^2\, dt \\ &= 2\langle |E|^2 \rangle + 2\Re\langle E(0)E^*(\tau)\rangle = 2\langle |E|^2 \rangle + 2\Re G(\tau). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Prvi člen je vsota povprečnih svetlobnih tokov obeh delnih snopov. Privzeli smo, da je polje v povprečju stacionarno in je zato povprečje neodvisno od izbire časovnega intervala. Drugi člen opisuje interferenco. Pri tem smo vpeljali časovno avtokorelacijsko funkcijo električnega polja

$$\boxed{G(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t+\tau)\, dt.} \tag{2.4}$$

Za majhne zakasnitve τ je $|G(\tau)| \approx |G(0)| = 1$ in na detektorju zaznamo interferenco. Za zakasnitve τ, ki so precej večje od koherenčnega časa t_c, sta polji $E(0)$ in $E(\tau)$ statistično neodvisni in povprečje produkta je enako produktu povprečij. Ker je $\langle E(t)\rangle = 0$, pri velikih zakasnitvah τ interferenčni člen izgine in svetlobni tok je enak vsoti tokov posameznih delnih snopov.

Priročno je vpeljati normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)}. \tag{2.5}$$

Za povsem koherentno valovanje je $|g(\tau)| = 1$, za povsem nekoherentno valovanje je $|g(\tau)| = 0$, za delno koherentna pa $0 < |g(\tau)| < 1$. Praviloma se vrednost $|g(\tau)|$ z naraščajočim τ zmanjšuje, saj postaja valovanje za velike časovne zamike vedno manj korelirano. Ohlapno povedano je koherenčni čas zakasnitev, pri kateri postane vrednost avtokorelacijske funkcije majhna. Koherenčni čas t_c pa lahko tudi bolj natančno definiramo z normirano avtokorelacijsko funkcijo

$$\boxed{t_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2\, d\tau.} \tag{2.6}$$

Zakasnitev delnih valov je pogosto posledica različno dolgih optičnih poti, zato pogosto namesto koherenčnega časa uporabljamo koherenčno dolžino $l_c = ct_c$. Pri tem moramo paziti, da koherenčne dolžine, ki jo dobimo iz časovne koherence, ne zamešamo s prečno koherenčno razdaljo, o kateri bomo govorili kasneje.

Naloga 2.3.1 Pokaži, da v navedenih avtokorelacijskih funkcijah $g(\tau)$ spremenljivka t_c ustreza koherenčnemu času, kot je definiran v enačbi (2.6), in izračunaj $|g(t_c)|$ za oba primera.

$$g(\tau) = \begin{cases} \exp\left(i\omega_0\tau - |\tau|/t_c\right), \\ \exp\left(i\omega_0\tau - \pi\tau^2/2t_c^2\right), \end{cases} \tag{2.7}$$

V razdelku (5.8) bomo spoznali, da sta to avtokorelacijski funkciji za svetlobo z Lorentzovim spektrom (razširitev spektralne črte zaradi trkov) in Gaussovim spektrom (Dopplerjeva razširitev).

Poglejmo še nekaj značilnih koherenčnih dolžin. Koherenčna dolžina svetlobe, izsevane iz črnega telesa, je $l_c = ct_c \approx \hbar c/k_B T$ (glej nalogo 2.4.3). Svetloba s Sonca ($T \approx 6000$ K) ima tako koherenčno dolžino zgolj $\sim 0,4$ μm. Svetloba, izsevana iz LED sijalk, ima koherenčno dolžino $\sim 20-100$ μm. Če želimo povečati koherenčno dolžino taki svetlobi, jo moramo usmeriti na ustrezne filtre in ji s tem zmanjšati spektralno območje. Ožje spektralno območje ima na primer živosrebrna svetilka, zato je koherenčna dolžina svetlobe za izbrano spektralno črto do okoli 50 cm. Koherenčna dolžina laserjev z ozko spektralno črto je tipično okoli 100 m, v nekaterih vlakenskih laserjih s širino spektralne črte nekaj kHz pa koherenčna dolžina presega 100 km.

2.4 Zveza med avtokorelacijsko funkcijo in spektrom

Spoznali smo, da je monokromatski ravni val povsem koherenten in njegov korelacijski čas neskončno velik. Oglejmo si še koherenco elektromagnetnega vala, ki traja čas T in je sestavljen iz več monokromatskih valov. Jakost električnega polja valovanja razvijemo v Fourierevo vrsto:

$$E(t) = \sum_n A_n e^{-in\Delta\omega t}, \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{2.8}$$

kjer amplituda A_n označuje delež polja pri frekvenci $\omega = n\Delta\omega$. Čas T, ki označuje čas opazovanja svetlobnega polja, mora biti bistveno daljši od t_c. Pravzaprav bi morali napraviti limito $T \to \infty$, da bi rezultat ne bil odvisen od konkretnega vzorca svetlobnega polja. Izračunamo amplitude A_n

$$A_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\, e^{in\Delta\omega t}\, dt. \tag{2.9}$$

Kvadrat $|A_n|^2$ je sorazmeren gostoti svetlobnega toka pri frekvenci $\omega = n\Delta\omega$. Zdaj lahko vpeljemo spekter, to je intenziteto svetlobnega toka pri frekvencah med ω in $\omega + \Delta\omega$. Spekter $S(\omega)$ torej izračunamo tako, da jakost svetlobnega toka pri ω delimo s frekvenčnim intervalom $\Delta\omega$. Spekter je potem[3]

$$S(\omega) = \frac{|A_n|^2}{\Delta\omega} = \frac{T}{2\pi}|A_n|^2. \tag{2.10}$$

Vstavimo zdaj še amplitudo A_n (enačba 2.9) in dobimo

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\int\int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t')\, e^{-i\omega(t'-t)}\, dt\, dt' \tag{2.11}$$

$$= \frac{1}{2\pi T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-T/2}^{T/2} E(t)E^*(t+\tau)\, dt, \tag{2.12}$$

[3] Gostota svetlobnega toka je $j = \varepsilon\varepsilon_0 c|E|^2/2$ z enotami W/m^2. Zaradi poenostavitve bomo namesto j pogosto pisali intenziteto $I = |E|^2$, konstantne člene pa dodali le, če bomo rabili točno numerično vrednost.

kjer smo uvedli novo spremenljivko $\tau = t' - t$. Integral po t da ravno korelacijsko funkcijo $G(\tau)$. Ker je $T \gg t_c$, je korelacijska funkcija na mejah integracije po τ nič, zato lahko meje raztegnemo do neskončnosti. S tem dobimo iskano zvezo, tako imenovani Wiener-Hinčinov teorem[4]

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \iff G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega. \tag{2.13}$$

Spekter svetlobe je torej Fouriereva transformacija avtokorelacijske funkcije svetlobnega polja.

Vpeljemo lahko tudi normirani spekter

$$s(\omega) = \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega} = \frac{S(\omega)}{G(0)}, \tag{2.14}$$

za katerega seveda velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) = 1. \tag{2.15}$$

Sledi

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \iff g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega. \tag{2.16}$$

Iz Wiener-Hinčinovega teorema (enačba 2.13) neposredno sledi, da je koherenca povezana s spektrom in koherenčni čas t_c s spektralno širino svetlobe. Spektralno širino vpeljemo kot

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2\,d\omega} = \frac{1}{2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2\,d\omega}. \tag{2.17}$$

Iz gornje definicije za spektralno širino in definicije za koherenčni čas (enačba 2.6) sledi, da je spektralna širina ne glede na obliko spektra obratno sorazmerna s koherenčnim časom (glej nalogo 2.4.1):

$$\gamma = \frac{1}{t_c}. \tag{2.18}$$

Naloga 2.4.1 Iz definicij za spektralno širino γ (enačba 2.17) in koherenčni čas t_c (enačba 2.6) pokaži, da je spektralna širina obratno sorazmerna s koherenčnim časom (enačba 2.18) ne glede na obliko spektra. Namig: Uporabi Parsevalov teorem, ki pravi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega, \tag{2.19}$$

kjer je

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega\tau}\,d\tau \tag{2.20}$$

Fouriereva transformiranka funkcije $f(t)$.

---

[4] Ameriški matematik Norbert Wiener, 1894–1964, in ruski matematik Aleksander Jakovljevič Hinčin, 1894–1959.

Za zgled vzemimo konkreten primer, ki je predstavljen na sliki (2.2). Na sliki (2.4) sta prikazana pripadajoč spekter in ustrezna avtokorelacijska funkcija. Ker so trki med atomi naključni, je avtokorelacijska funkcija eksponentno pojemajoča

$$G(t) = G_0 e^{-i\omega_0 t} e^{-t/t_c}, \tag{2.21}$$

spekter take svetlobe pa je Lorentzove oblike (glej nalogo 2.4.2)

$$S(\omega) = G_0 \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \tag{2.22}$$

kjer je $\gamma = 1/t_c$ spektralna širina in G_0 do konstante natančno intenziteta svetlobe. Točke na grafih predstavljajo spekter in izračunano avtokorelacijsko funkcijo za integracijski čas $T = 100 t_c$. Za primerjavo sta z rdečo krivuljo prikazana tudi pričakovan spekter in avtokorelacijska funkcija (enačba 2.22). Zaradi končnega časa T pri izračunu povprečja se izmerjeni spekter nekoliko razlikuje od pričakovane vrednosti.

Slika 2.4: Spekter in avtokorelacijska funkcija valovanja s slike (2.2)

Naloga 2.4.2 Imejmo dve vrsti svetlobe. Prva naj ima avtokorelacijsko funkcijo, ki je eksponentno pojemajoča, druga pa ima avtokorelacijsko funkcijo Gaussove oblike (enačbi 2.7). Pokaži, da sta njuna spektra oblike

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad \text{in} \quad s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\gamma} \exp\Big(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\pi\gamma^2}\Big), \tag{2.23}$$

kjer je $\gamma = 1/t_c$ spektralna širina.

Spektralne črte atomov so pogosto Lorentzove oblike, kar je posledica eksponentnega razpada stanj (naravna širina). Dodatno se spektralne črte razširijo zaradi trkov med atomi, vendar tudi to vodi do Lorentzove oblike spektra. V plinih pa je pogostokrat prevladujoča razširitev črt zaradi Dopplerjevega pojava (glej razdelek 5.8). Spekter Dopplerjevo razširjene svetlobe je, kot bomo videli v nadaljevanju, Gaussove oblike. V tem primeru iz enačbe (2.13) sledi, da je tudi avtokorelacijska funkcija Gaussove oblike.

Naloga 2.4.3 Numerično pokaži, da je koherenčni čas svetlobe, ki jo oddaja črno telo s temperaturo T, približno enak $t_c \approx \hbar/k_B T$. Normaliziran spekter sevanja črnega telesa zapišemo kot Planckov spekter

$$s(\omega) = \frac{15}{\pi^4}\frac{\hbar^4\omega^3}{(kT)^4}\Big/\left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right) \quad \text{za } \omega > 0, \text{ sicer } s(\omega) = 0. \tag{2.24}$$

Fouriereva spektroskopija

V prejšnjem razdelku smo videli, da časovno avtokorelacijsko funkcijo merimo z Michelsonovim interferometrom. Dobljena povezava med avtokorelacijo in spektrom je osnova za Fourierevo spektroskopijo, ki ima nekatere pomembne prednosti pred drugimi metodami in se danes precej uporablja, posebej v infrardečem področju.

2.5 Prostorska koherenca

Vrnimo se k Youngovem poskusu in obravnavi interference na dveh ozkih režah. Osvetljujmo zdaj reži s svetilom končnih razsežnosti. Svetilo naj še vedno sveti skoraj enobarvno svetlobo in naj bo na simetrali med režama, kot kaže slika (2.5).

Slika 2.5: Shema interferenčnega eksperimenta z razsežnim svetilom. Svetilo velikosti R postavimo v izhodišče koordinatnega sistema, na zaslonu B pa opazujemo sliko, ki nastane zaradi interference na dveh režah v ravnini A. Zaradi končne dimenzije svetila so interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Če je razlika poti za žarke z roba reda velikosti valovne dolžine λ ali več, se celotna interferenčna slika na zaslonu B izpovpreči.

Žarka, ki izhajata iz sredine svetila (polna črta), opravita do rež v ravnini A enako dolgo pot in povzročita na zaslonu B interferenčne proge. Žarka, ki izhajata iz roba izvora (prekinjena črta), imata do rež različno dolgo pot, zato nastane med njima fazna razlika že do ravnine A, ki se prišteje fazni razliki do ravnine B. Interferenčne proge, ki jih tvorita robna žarka, so premaknjene glede na proge centralnih žarkov. Ker so žarki z roba pri našem svetilu statistično neodvisni od žarkov iz sredine, z njimi ne interferirajo. Celoten interferenčni vzorec je zato kar vsota interferenčnih vzorcev žarkov iz različnih delov svetila. Če je razlika poti za žarke z roba reda velikosti valovne dolžine λ ali več, se celotna interferenčna slika na zaslonu B izpovpreči.

S slike razberemo, da velja za razdaljo med režama d, pri kateri interferenčne proge izginejo, približno

$$\delta s = d \sin\varphi \approx d\frac{R}{z} \sim \lambda \;\Rightarrow\; d_c \sim \frac{z\lambda}{R}, \tag{2.25}$$

kjer d_c imenujmo prečno koherenčno razdaljo. Pogosto uporabljajo tudi pojem koherenčne ploskve, to je območja, v katerem je fazna razlika v povprečju konstantna. Velikost te ploskve je približno d_c^2. V območju koherenčne ploskve so tudi valovne fronte približno gladke.

Zapišimo gornje ugotovitve nekoliko bolj natančno. Na zaslonu B izmerimo gostoto svetlobnega toka, ki je sorazmerna povprečju kvadrata električne poljske jakosti valovanj, ki izhajata iz obeh odprtin

$$\begin{aligned}\langle |E_d|^2\rangle &= \langle |K_1E_1 + K_2E_2|^2\rangle \\ &= |K_1|^2\langle |E_1|^2\rangle + |K_2|^2\langle |E_2|^2\rangle + 2\Re K_1K_2^*\langle E_1(0)E_2^*(\tau)\rangle.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Pri tem je je $\tau = d\sin\vartheta/c$ zakasnitev valovanja iz druge odprtine glede na valovanje iz prve. Faktorja K_1 in K_2 sta določena z uklonom na posameznih odprtinah. Interferenčna slika je vsebovana v podobnem členu kot pri Michelsonovem interferometru, le da imamo v tem primeru namesto avtokorelacijske funkcije navzkrižno korelacijsko funkcijo polj E_1 in E_2 iz obeh odprtin.

Kako je interferenčni člen povezan z lastnostmi svetila, brez težav doženemo v izbranem primeru skoraj enobarvne svetlobe z osrednjo frekvenco ω. Tedaj lahko za zakasnitve τ, ki so krajše od koherenčnega časa, zapišemo

$$E_2(\tau) = E_2(0)\,e^{-i\omega\tau} \tag{2.27}$$

in

$$\langle E_1(0)E_2^*(\tau)\rangle = \langle E_1(0)E_2^*(0)\rangle e^{i\omega\tau} = J(P_1,P_2)\,e^{i\omega\tau}. \tag{2.28}$$

Zadnji člen $\Re e^{i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) = \cos(kd\sin\vartheta)$ da interferenčne proge za koherentno osvetlitev zaslona A, povprečje produkta polj v odprtinah ob istem času $J(P_1,P_2) = \langle E(P_1,0)E^*(P_2,0)\rangle$ pa meri stopnjo prečne koherence med obema odprtinama. Od velikosti tega člena je odvisen kontrast interferenčnih prog. Izračunajmo ga.

Polje v posamezni odprtini je vsota prispevkov iz celega izvora.

$$E(P_j) = -\frac{i}{\lambda}\int E(\xi,\eta)\frac{e^{iks_j}}{s_j}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.29}$$

Pri tem je s_j razdalja med točko (ξ,η) na izvoru in točko $P_j(x_j,y_j)$ na reži v ravnini A (glej sliko 2.5). Faktor pred integralom $-i/\lambda$ smo dobili iz uklonske teorije (enačba 1.55). Tako je

$$J(P_1,P_2) = \frac{1}{\lambda^2}\int\int\langle E(\xi,\eta)E^*(\xi',\eta')\rangle\frac{e^{ik(s_1-s_2')}}{s_1s_2'}\,d\xi\,d\eta\,d\xi'd\eta'. \tag{2.30}$$

V našem svetilu sevajo atomi neodvisno. Valovanji iz dveh točk svetila, ki sta razmaknjeni za več kot λ, sta tako neodvisni in povprečje njunega produkta je enako nič. Tako približno velja

$$\langle E(\xi,\eta)E^*(\xi',\eta')\rangle = \frac{\lambda^2}{\pi}\cdot\delta(\xi-\xi',\eta-\eta')\langle |E(\xi,\eta)|^2\rangle. \tag{2.31}$$

Faktor λ^2/π poskrbi za ustrezno normalizacijo. Naj bo oddaljenost svetila od zaslona A mnogo večja od dimenzije svetila ($z \gg R$), tako da lahko imenovalec pod integralom v izrazu (2.30) nadomestimo z z^2 in postavimo pred integral. Dobimo

$$J(P_1,P_2) = \frac{1}{\pi z^2}\int \langle |E(\xi,\eta)|^2\rangle e^{ik(s_1-s_2)}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.32}$$

Dobljeni izraz lahko še nekoliko poenostavimo, če razvijemo s_1 in s_2 do drugega reda:

$$s_j = \sqrt{z^2+(x_j-\xi)^2+(y_j-\eta)^2} \approx z + \frac{(x_j-\xi)^2+(y_j-\eta)^2}{2z}, \tag{2.33}$$

kjer sta (x_j,y_j) koordinati točke P_j. Pišimo še $\langle |E(\xi,\eta)|^2\rangle = I(\xi,\eta)$, ki je do konstante natančno enak intenziteti valovanja, ter $x_2-x_1=\Delta x$ in $y_2-y_1=\Delta y$. S tem dobimo znani rezultat, tako imenovani van Cittert-Zernikov teorem[5]

$$\boxed{J(\Delta x,\Delta y) = \frac{e^{-i\phi}}{\pi z^2}\int I(\xi,\eta)e^{ik\frac{\Delta x\xi+\Delta y\eta}{z}}\,d\xi\,d\eta.} \tag{2.34}$$

Faza

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda z}[(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)] \tag{2.35}$$

meri skupni premik interferenčnih prog, do katerega pride, kadar svetilo ni na isti osi kot odprtini v zaslonu. Kadar ležijo svetilo in odprtini v zaslonu A simetrično na isti osi, je faza ϕ enaka nič.

Smiselno je vpeljati še normalizirano prečno prostorsko korelacijsko funkcijo

$$j(\Delta x,\Delta y) = \frac{J(\Delta x,\Delta y)}{J(0,0)} = \frac{e^{-i\phi}\int I(\xi,\eta)\exp[ik(\Delta x\xi+\Delta y\eta)/z]\,d\xi\,d\eta}{\int I(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}. \tag{2.36}$$

Dobljeni rezultat si je vredno nekoliko ogledati. Prečno prostorsko korelacijsko funkcijo $J(P_1,P_2)$, ki določa kontrast interferenčnih prog, smo izrazili kot 2-D Fourierevo transformacijo intenzitete svetlobe na samem svetilu (enačba 2.34). Ob tem se spomnimo, da velja podobna zveza med električno poljsko jakostjo v osvetljeni odprtini in njeno Fraunhoferjevo uklonsko sliko (enačba 1.63), pri čemer so količine, ki nastopajo v obeh zvezah, povsem različne. Različna je tudi veljavnost obeh: medtem ko je Fraunhoferjeva uklonska formula veljavna le v veliki oddaljenosti, za bližje odprtine pa je treba uporabiti Fresnelov izraz (enačba 1.64), je rezultat za $J(P_1,P_2)$ veljaven v obeh območjih.

Ker je velikost svetila končna, $J(P_1,P_2)$ pri dovolj veliki razdalji med točkama P_1 in P_2 gotovo pade na nič. Največja razdalja, do katere je $J(P_1,P_2)$ še različna od nič, je ravno prečna koherenčna razdalja d_c, ustrezna ploskev pa je koherenčna ploskev S_c. Iz izraza za koherenčno razdaljo (enačba 2.25) jo lahko ocenimo

$$S_c \sim \frac{(\lambda z)^2}{S_0} \sim \frac{\lambda^2}{\Omega_0}, \tag{2.37}$$

kjer je S_0 površina svetila, Ω_0 pa prostorski kot, pod katerim je videti svetilo v ravnini A.

[5] Nizozemski fizik Pieter Hendrik van Cittert, 1889–1959, in nizozemski fizik in nobelovec Frits Zernike, 1888–1966.

Oglejmo si primer. Naj bo svetilo v obliki kroga s polmerom R, obe odprtini v zaslonu naj imata koordinati y enaki nič, razmik med režama v smeri x pa naj bo d. Za prečno korelacijsko funkcijo dobimo iz enačbe (2.34)

$$J(0,\Delta y) = 2\frac{R^2 I_0}{z^2}\frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z}\,, \tag{2.38}$$

kjer je $J_1(x)$ Besselova funkcija. V ničlah Besselove funkcije pade prečna korelacijska funkcija J na nič in interferenčnega vzorca ne vidimo. Za prečno koherenčno razdaljo je zato smiselno vzeti ravno prvo ničlo, to je pri

$$d_c \approx 3,83\frac{z}{kR} = 0,61\frac{\lambda z}{R}. \tag{2.39}$$

Doslej smo obravnavali le valovanje v središču interferenčne slike na zaslonu B, to je pri tako majhnih kotih ϑ, da je zakasnitev manjša od koherenčnega časa. Pri večjih kotih moramo upoštevati še vpliv končnega koherenčnega časa, zaradi česar se kontrast interferenčnih prog še dodatno zmanjšuje. Interferenčna slika je tako produkt časovnega in prostorskega dela.

V primeru dveh zelo tankih rež z razmikom d dobimo na zaslonu B uklonske vrhove. Za nekaj različnih razmikov med odprtinama d je intenziteta svetlobe na zaslonu prikazana na sliki (2.6). Če je $d \ll \lambda z/R$ (slika a), je modulacija interferenčnih prog v sredini popolna in se zaradi končnega koherenčnega časa zmanjšuje le pri večjih kotih ϑ. Pri nekaj večjem razmiku (slika b) tudi v sredini kontrast ni več popoln. Obenem se interferenčne proge zgostijo. Kadar je $d \approx 3,83\,z/kR$, dosežemo prvo ničlo Besselove funkcije $J_1(x)$ in interferenčni vzorec prvič izgine (slika c). Takrat je razdalja med režama ravno enaka koherenčni razdalji valovanja. Pri še večjih razmikih (slika d) je Besselova funkcija negativna in ponovno dobimo interferenčne proge, vendar so slabše izražene in z nasprotno fazo, kar nam da v sredini temno progo.

Slika 2.6: Interferenčna slika na zaslonu B za različne vrednosti razmikov med odprtinama: a) $d = z/kR$, b) $d = 2z/kR$, c) $d = 3,832\,z/kR$ in d) $d = 5,136\,z/kR$. Z večanjem razdalje med režama se proge zgostijo in kontrast se zmanjša. Koherenčni čas svetlobe je $t_c = 10/\omega$, kar še dodatno zmanjšuje modulacijo interferenčnih prog. Pri $d = 3,832\,z/kR$ dosežemo prvo ničlo Besselove funkcije in interferenčni vzorec popolnoma izgine. Nato se interferenčne proge zopet pojavijo, vendar z manjšim kontrastom in nasprotno fazo.

★ Merjenje prečne koherenčne razdalje svetlobe zvezd je osnova za Michelsonovo metodo določanja zvezdnih premerov. Svetlobo izbrane zvezde zberejo v teleskop preko dveh manjših parov zrcal, kjer sta zunanji zrcali na pomičnih rokah, tako da jih je mogoče razmikati. Glavno zrcalo teleskopa zbere svetlobna snopa v goriščni ravnini, kjer nastanejo interferenčne proge, če le pomični zrcali nista preveč razmaknjeni. Iz razmika, pri katerem interferenčne proge izginejo, je mogoče določiti premere bližnjih svetlih zvezd. Za zvezdo s polmerom 10^6 km v razdalji 5 svetlobnih let je prečna koherenčna razdalja za zeleno svetlobo okoli 15 m, kar je z Michelsonovim zvezdnim interferometrom mogoče izmeriti. Pri zvezdah, ki so dlje od nekaj deset svetlobnih let, metoda odpove.

Naloga 2.5.1 Svetloba s frekvenco ω in koherentnim časom t_c izhaja iz svetila s polmerom R in vpada na zaslon, ki je z oddaljen od svetila. V zaslonu sta dve zelo ozki reži na razmiku d. Pokaži, da je uklonska slika za zaslonom enaka

$$I/I_0 = (1 + 2\,\frac{J_1(kRd/z)}{kRd/z}\cos(\omega\tau)e^{-\tau/t_c}), \tag{2.40}$$

kjer je $\tau = d\sin\vartheta/c$ zakasnitev žarkov iz rež na zaslonu.

3. Koherentni snopi svetlobe

V tem poglavju bomo zapisali obosni približek valovne enačbe in spoznali njeno osnovno rešitev: Gaussov snop. Obravnavali bomo snope osnovnega in višjega reda ter se naučili računati prehode Gaussovih snopov prek optičnih elementov.

3.1 Omejen snop svetlobe

Pri obravnavi elektromagnetnega valovanja pogosto uporabljamo približek ravnih valov. Ti so v smeri pravokotno na smer širjenja neomejeni in so zato lahko le idealizacija. Čim raven val usmerimo skozi odprtino v zaslonu, dobimo omejen snop svetlobe. V snopu svetlobe valovna čela niso ravna in meje snopa niso vzporedne, ampak se snop zaradi uklona širi (slika 3.1).

Slika 3.1: Omejen snop dobimo ob prehodu ravnega vala skozi končno odprtino.

V veliki oddaljenosti od zaslona lahko za izračun polja uporabimo Fraunhoferjevo uklonsko teorijo (glej poglavje 1.7). Vendar za oceno kota širjenja podrobnega računa niti ne potrebujemo. Velja približno

$$\vartheta \sim \frac{\lambda}{a}, \tag{3.1}$$

kjer je a polmer odprtine v zaslonu. Opis polja v bližini zaslona je zahtevnejši, saj je treba uporabiti Fresnelov približek. S slike (3.1) ocenimo, da seže območje bližnjega polja do razdalje

$$b \sim \frac{a}{\vartheta} = \frac{a^2}{\lambda}. \tag{3.2}$$

Včasih taki približni oceni zadoščata. Bolj kvantitativen opis omejenih snopov bi lahko dobili s Fraunhoferjevo in Fresnelovo uklonsko teorijo, kar pa ni najudobnejša pot. Lotimo se naloge raje preko približka obosne valovne enačbe.

Naloga 3.1.1 Pokaži, da je Fraunhoferjeva uklonska slika reže, katere prepustnost se v radialni smeri spreminja kot Gaussova funkcija $T(\xi,\eta) = e^{-(\xi^2+\eta^2)/w_0^2}$, podana z Gaussovo funkcijo oblike $E(x,y,z) \propto e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)}$ in določi odvisnost $w(z)$. Izračunaj še uklonsko sliko v bližnjem polju po Fresnelovi uklonski teoriji.

3.2 Obosna valovna enačba

Pričnimo s časovno neodvisno valovno enačbo za monokromatsko valovanje s frekvenco ω, to je Helmholtzevo enačbo (enačba 1.23)

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \tag{3.3}$$

kjer je $k = n\omega/c_0$ valovno število in n lomni količnik sredstva, po katerem se valovanje širi. Zaradi enostavnosti obravnavajmo le eno polarizacijo, tako da E pišemo kot skalar. Iščemo rešitev za omejen snop, ki se širi približno vzdolž osi z. Zapišimo jo v obliki

$$E = E_0 \psi(\mathbf{r}, z) e^{ikz}, \tag{3.4}$$

kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor v ravnini xy. Glavni del odvisnosti od koordinate z smo zapisali v faktorju e^{ikz}, tako da lahko privzamemo, da se ψ v smeri z le počasi spreminja. Vstavimo gornji nastavek v Helmholtzevo enačbo (enačba 3.3) in pri tem zanemarimo druge odvode po z, saj je zaradi počasnega spreminjanja $\partial^2\psi/\partial z^2$ majhen v primerjavi s $k\partial\psi/\partial z$ in $k^2\psi$. Zaenkrat obravnavajmo le radialno simetrične rešitve. Dobimo obosno ali paraksialno valovno enačbo

$$\boxed{\nabla_\perp^2 \psi = -2ik\frac{\partial \psi}{\partial z}.} \tag{3.5}$$

Opazimo, da je obosna valovna enačba enaka Schrödingerjevi enačbi za prost delec v dveh dimenzijah, v kateri ima koordinata z vlogo časa. Omejenemu snopu v kvantni mehaniki ustreza lokaliziran delec – valovni paket. Ta se s časom širi, kar v optiki ustreza pojavu uklona.

Ena družina rešitev, ki v kvantni mehaniki predstavlja lastne funkcije energije in gibalne količine, so ravni valovi

$$\psi = e^{ik_1 x + ik_2 y} e^{-i\beta z}. \tag{3.6}$$

Pri tem β ustreza energiji v kvantni mehaniki, k_1 in k_2 pa komponentama gibalne količine. Da bo gornji nastavek rešitev obosne valovne enačbe (enačba 3.5), mora veljati

$$\beta = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}. \tag{3.7}$$

Ko vstavimo nastavek za ψ v izraz za celotno polje E (enačba 3.4), dobimo ravni val, za katerega velja

$$k_3 = k - \beta = k - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k}, \tag{3.8}$$

pri čemer je k_3 vzdolžna komponenta valovnega vektorja, k_1 in k_2 prečni komponenti, k pa valovno število.

Za ravni val, ki je rešitev prvotne točne valovne enačbe (enačba 3.3) in ne samo obosnega približka, velja

$$k_3 = \sqrt{k^2 - (k_1^2 + k_2^2)}. \tag{3.9}$$

Očitno dobimo enačbo (3.8) iz enačbe (3.9) z razvojem korena za majhne vrednosti prečnih komponent valovnega vektorja, kar seveda ni nič nepričakovanega. Ta ugotovitev nam tudi pove, da je približek obosne enačbe dober, kadar je razmerje prečne in vzdolžne komponente valovnega vektorja majhno. Takrat je majhen tudi kot širjenja snopa in v razvoju lahko zanemarimo člene, višje od kvadratnih. To pa je tudi območje veljavnosti Fresnelove uklonske teorije, zato rešitve obosne valovne enačbe dajo enako dober približek.

Fouriereva optika

Časovno odvisnost poljubnega začetnega stanja v kvantni mehaniki navadno izračunamo tako, da v nekem začetnem trenutku paket razvijemo po lastnih stanjih energije – ravnih valovih. Rešitev v poljubnem kasnejšem trenutku je potem dana v obliki Fourierevega integrala. Ta pot je zelo uporabna tudi v optiki in je osnova sklopa računskih metod, znanih pod imenom Fouriereva optika. V našem primeru z njo brez težav pridemo nazaj do Fresnelove uklonske formule.

3.3 Osnovni Gaussov snop

Naša naloga je poiskati rešitve obosne enačbe, ki popišejo omejene snope. Iz kvantne mehanike vemo, da je najbolj lokaliziran in se najpočasneje širi valovni paket Gaussove oblike. Zato poskusimo najti rešitev obosne enačbe (3.5) v obliki

$$\psi(r,z) = e^{i\frac{kr^2}{2q(z)}}\, e^{-i\phi(z)}, \tag{3.10}$$

kjer funkcija $q(z)$ opisuje širjenje snopa v prečni smeri, $\phi(z)$ pa opisuje počasno spreminjanje faze snopa vzdolž osi z. Vstavimo nastavek (enačba 3.10) v obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Zaradi simetričnosti računamo v cilindričnih koordinatah in zapišemo

$$\nabla_\perp^2 \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2}\right)\psi \tag{3.11}$$

in

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(-\frac{ikr^2}{2q^2} q(z)' - i\phi'\right)\psi. \tag{3.12}$$

Tako iz obosnega približka (enačba 3.5) dobimo

$$\frac{2ik}{q} - \frac{k^2 r^2}{q^2} = ik\left(\frac{ikr^2}{q^2} q(z)' + 2i\phi'\right). \tag{3.13}$$

Gornji izraz mora veljati pri vsakem r, zato morajo biti koeficienti pri r^2 in pri drugih členih posebej enaki 0. Dobimo

$$q(z)' = 1 \qquad \text{in} \qquad \phi' = -\frac{i}{q}. \tag{3.14}$$

Z integracijo dobimo najprej

$$q = z - iz_0, \tag{3.15}$$

kjer smo z iz_0 označili integracijsko konstanto. Integriramo še enačbo za fazo

$$\phi = \int_0^z -\frac{idz}{z - iz_0} = -i\ln(1 + i\frac{z}{z_0}). \tag{3.16}$$

Tako imamo

$$\begin{aligned} \psi &= \exp\left[i\frac{kr^2}{2(z-iz_0)}\right]\exp\left[-\ln(1+i\frac{z}{z_0})\right] = \\ &= \frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}}\exp\left[-\frac{kr^2 z_0}{2(z_0^2+z^2)} + \frac{ikr^2 z}{2(z_0^2+z^2)}\right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Realni del eksponenta opisuje širjenje snopa. Vpeljimo polmer snopa w:

$$w^2 = \frac{2z_0}{k}\left[1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]. \tag{3.18}$$

V izhodišču pri $z = 0$ je snop najožji in pravimo, da je tam grlo snopa. Vpeljimo še polmer snopa v grlu w_0 in zapišimo hiperbolično odvisnost w od z:

$$\boxed{w^2 = w_0^2\left[1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right].} \tag{3.19}$$

Med w_0 in z_0 velja zveza

$$\boxed{z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}.} \tag{3.20}$$

Dolžina z_0 je ravno razdalja, pri kateri preide snop v asimptotično enakomerno širjenje. Pri z_0 tudi preidemo v območje veljavnosti Fraunhoferjevega uklonskega približka. Celotna dolžina grla je $2z_0$, območju grla pa pravimo tudi območje bližnjega polja ali Rayleighovo območje in dolžini z_0 Rayleighova dolžina[1].

Slika 3.2: Gaussov snop s karakterističnimi parametri

Iz izraza za polmer snopa $w(z)$ (enačba 3.19) razberemo še kot divergence snopa v asimptotičnem območju. Najprej izračunajmo le polovični kot širjenja:

$$\vartheta = \lim_{z\to\infty}\frac{dw}{dz} = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.21}$$

Nato pa zapišimo celotno divergenco snopa

$$\boxed{\theta = 2\frac{w_0}{z_0} = \frac{2\lambda}{\pi w_0}.} \tag{3.22}$$

Dobljena izraza za območje bližnjega polja (enačba 3.20) in divergenco (enačba 3.21) sta v skladu z grobimi ocenami, ki smo jih napravili v začetku poglavja (enačbi 3.1 in 3.2). Faktor $1/\pi$ je značilen za Gaussov snop, ki ima od vseh mogočih oblik najmanjšo divergenco.

Vrnimo se k imaginarnemu delu eksponenta v enačbi (3.17). Vpeljimo količino

$$\boxed{R = z\left[1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right],} \tag{3.23}$$

[1] Angleški fizik in nobelovec John William Strutt, 3. baron Rayleighški, 1842–1919.

ki meri krivinski radij valovnih front snopa na razdalji z. To najlažje uvidimo, če krogelni val razvijemo po majhnih odmikih r od osi z:

$$\frac{1}{R}e^{ikR} = \frac{1}{R}e^{ik\sqrt{z^2+r^2}} \approx \frac{1}{R}e^{ik(z+\frac{r^2}{2R})}. \tag{3.24}$$

Upoštevali smo, da je na osi $z = R$.

Naloga 3.3.1 Pokaži, da je največja ukrivljenost valovnih front snopa (najmanjši R) ravno pri $z = \pm z_0$. Izračunaj še ukrivljenost front v grlu in v veliki oddaljenosti od grla.

Ostane nam še faktor pred eksponentom v izrazu (3.17). Ta faktor meri zmanjševanje amplitude snopa in s tem poskrbi za ohranitev energijskega toka ob širjenju žarka, poleg tega pa da še dodatno spremembo faze. Zapišimo ga v obliki

$$\frac{1}{1+i\frac{z}{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{z}{z_0})^2}}e^{-i\eta(z)} = \frac{w_0}{w}e^{-i\eta(z)}, \tag{3.25}$$

pri čemer je

$$\boxed{\eta(z) = \arctan(\frac{z}{z_0}).} \tag{3.26}$$

Dodatna faza η, imenujemo jo tudi Gouyeva faza[2] je posledica povečane fazne hitrosti valovanja, kadar je omejeno v prečni smeri. Pojav je najizrazitejši v bližini grla snopa. Srečamo ga tudi pri valovanju v valovodih.

S tem lahko končno zapišemo izraz za električno poljsko jakost osnovnega Gaussovega snopa[3]

$$\boxed{E = E_0\,\frac{w_0}{w(z)}\,e^{ikz-i\omega t}\,e^{-r^2/w^2(z)}\,e^{ikr^2/2R(z)}e^{-i\eta(z)}.} \tag{3.27}$$

Slika 3.3: Upodobitev gostota svetlobnega toka v Gaussovem snopu za $z > 0$

[2]Francoski fizik Louis Georges Gouy, 1854–1926.
[3]Nemški matematik Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.

Intenziteta svetlobe je sorazmerna z $E(r,z)E^*(r,z)$ in zanjo velja

$$I(r,z) = I_0 \frac{w_0^2}{w(z)^2} e^{-2r^2/w^2(z)}. \tag{3.28}$$

Naloga 3.3.2 Pokaži, da je znotraj širine snopa w približno 87 % celotnega svetlobnega toka.

Povejmo še nekaj o parametru $q(z)$, ki smo ga uporabili pri izračunu Gaussovega snopa. Spomnimo se, da parameter q narašča linearno z oddaljenostjo od grla:

$$q(z) = z - iz_0. \tag{3.29}$$

Parameter q imenujemo kompleksni krivinski radij, njegov inverz pa kompleksna ukrivljenost:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} + i\frac{2}{kw^2}. \tag{3.30}$$

Primerjajmo še Gaussov snop z drugimi valovanji. Na sliki (3.4) so shematsko prikazane valovne fronte ravnega vala, Gaussovega snopa (3.27) in krogelnega vala (3.24). Vidimo, da je za majhne oddaljenosti od grla z Gaussov snop podoben ravnemu valu (ukrivljenost front je zelo majhna in $R \to \infty$), medtem ko je za velike z podoben krogelnemu valu (krivinski radij R narašča sorazmerno z oddaljenostjo z). Faza Gaussovega snopa je pri pri $z \gg z_0$ zamaknjena za $\pi/2$ glede na ravni in krogelni val.

Slika 3.4: Ravni val, Gaussov snop ter krogelni val. Pri majhnih razdaljah od grla je Gaussov snop podoben ravnemu valu, pri velikih razdaljah pa krogelnemu valu. Faza Gaussovega snopa se razlikuje od faze ravnega in krogelnega vala.

3.4 Snopi višjega reda

Osnovna rešitev obosne valovne enačbe je Gaussov snop. Poleg te rešitve pa obstoja še veliko drugih rešitev, ki so tudi omejene v prečni smeri. V kartezičnih koordinatah tako rešijo obosno valovno enačbo tudi Hermite-Gaussovi snopi[4]

$$\psi_{n,m}(x,y) = \frac{w_0}{w} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2q} - i\eta_{n,m}\right], \tag{3.31}$$

kjer so H_n Hermitovi polinomi stopnje n. V to se lahko prepričamo, če izraz vstavimo v obosno valovno enačbo (enačba 3.5) in upoštevamo, da Hermitovi polinomi zadoščajo enačbi

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \tag{3.32}$$

Osnovni Gaussov snop je očitno poseben primer gornje rešitve za $m = n = 0$. Polmer snopa $w(z)$ in kompleksni krivinski radij $q(z)$ sta za vse m in n enaka kot za osnovni snop in podana z enačbama (3.19) in (3.29). Razlika je v fazi, ki je odvisna tudi od n in m:

$$\eta_{n,m}(z) = (n+m+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.33}$$

To hitrejše spreminjanje faze v bližnjem polju snopov višjega reda je analogno večji fazni hitrosti valov višjega reda v valovodih.

Nekaj višjih redov Hermite-Gaussovih snopov je na sliki (3.5), kjer rišemo $|\Re\psi_{n,m}(x,y,0)|$. Vidimo, da indeksa n in m predstavljata število vozlov v prečni smeri, pri danem w pa polmer snopa narašča z n in m.

Slika 3.5: Prečni profil Hermite-Gaussovih snopov za različne vrednosti (n,m)

Naloga 3.4.1 Pokaži, da za Hermite-Gaussove snope višjih redov efektivni polmer snopa narašča sorazmerno s korenom iz števila prečnih vozlov $w_{eff} \propto w\sqrt{n+m}$. Namig: pri zapisu prečne odvisnosti polja upoštevaj le vodilni člen Hermitovih polinomov ($\psi_{n,m} \propto x^n y^m \exp(-(x^2+y^2)/w^2)$) in določi, na kateri razdalji od središča snopa ima polje ψ največjo amplitudo.

[4] Francoski matematik Charles Hermite, 1822–1901.

Hermite-Gaussovi snopi (enačba 3.31) tvorijo popoln ortogonalen sistem funkcij koordinat x in y:

$$\int \psi^*_{n,m}(x,y)\,\psi_{n',m'}(x,y)\,dxdy = \pi w_0^2\, 2^{n+m-1} n!\; m!\; \delta_{n,n'}\; \delta_{m,m'} \tag{3.34}$$

Polje nekega valovanja, ki ga poznamo v ravnini $z = 0$, lahko pri poljubnem z dobimo z razvojem po Hermite-Gaussovih snopih. Pri tem je izbira premera grla w_0 poljubna, bo pa seveda vplivala na hitrost konvergence razvoja. Na tak način lahko obravnavamo uklon na odprtini, kjer je očitno smiselno vzeti w_0 približno enak dimenziji odprtine. Dobljeni rezultat je enako natančen kot Fresnelov uklonski integral.

Pri velikih z, kjer velja Fraunhoferjeva uklonska teorija, je polje Fouriereva transformacija polja pri $z = 0$. Hermite-Gaussovi snopi ohranjajo prečno obliko, ki pa se z naraščajočim z širi. Od tod vidimo, da je Fouriereva transformacija Hermite-Gaussove funkcije $H_n(x)e^{-x^2/2}$ zopet Hermite-Gaussova funkcija.

V cilindričnih koordinatah imajo snopi višjega reda obliko Laguerre-Gaussovih snopov[5]

$$\psi_{p,l}(r,\phi,z) = \frac{w_0}{w}\left(\frac{\sqrt{2}r}{w}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) e^{\pm il\phi} \exp\left[\frac{ikr^2}{2q} - i\eta_{p,l}\right], \tag{3.35}$$

kjer je L_p^l pridruženi Laguerrov polinom in

$$\eta_{p,l}(z) = (2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{3.36}$$

Podobno kot je v kartezičnem primeru red polinoma določal število prečnih ničel, določata p in l v cilindričnem primeru število vozelnih črt, kjer je gostota svetlobnega toka nič. Na sliki (3.6) je prikazanih nekaj oblik amplitud $|\Re\psi_{p,l}(r,\phi,0)|$.

Slika 3.6: Prečni profil Laguerre-Gaussovih snopov za različne vrednosti (p,l)

Iz laserjev navadno želimo dobiti čim čistejši osnovni snop, vendar lahko pogosto opazimo tudi snope višjega reda. Da dobimo le osnovni snop, je treba posebej paziti pri konstrukciji laserja.

[5] Francoski matematik Edmond Nicolas Laguerre, 1834–1886.

Tirna vrtilna količina in spin

Valovne fronte Laguerre-Gaussovih snopov pri $l \neq 0$ imajo obliko vijačnic. Poyntingov vektor pri njih ni vzporeden z osjo žarka, ampak ima komponento tudi v prečni smeri. Ta spreminja smer, zato pride do pojava vrtilne količine v smeri osi snopa in snop na snov deluje z navorom. Pravimo, da Laguerre-Gaussovi snopi nosijo t.i. tirno vrtilno količino. V kvantni mehaniki funkcija $\psi_{p,l}$ predstavlja foton s tirno vrtilno količino $L = \hbar l$, medtem ko leva in desna cirkularna polarizacija predstavljata spin fotona.

Slika 3.7: Valovna fronta Laguerre-Gaussovega snopa

3.5 Besselov snop

Poglejmo si še poseben primer omejenega snopa, to je Besselov snop[6]. Kot nastavek za rešitev valovne enačbe (enačba 3.3) izberemo

$$E = E_0 \psi(x,y) e^{i\beta z - i\omega t}, \tag{3.37}$$

kjer mora nastavek ψ zadostovati Helmholtzevi enačbi

$$\nabla_\perp^2 \psi + k_\perp^2 \psi = 0, \tag{3.38}$$

pri $k_\perp^2 = k^2 - \beta^2$. V cilindričnih koordinatah ($x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$) se enačba prepiše v

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k_\perp^2 \psi = 0. \tag{3.39}$$

Rešitve gornje enačbe so s faznim faktorjem pomnožene Besselove funkcije:

$$\psi_m(x,y) = A_m J_m(k_\perp r) e^{im\phi}, \tag{3.40}$$

kjer je J_m Besselova funkcija in $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Za $m = 0$ ima val obliko

$$E(r,\phi,z,t) = A_0 J_0(k_\perp r) e^{i\beta z - i\omega t}, \tag{3.41}$$

ki ga imenujemo Besselov snop. Valovne fronte takega snopa so ravne in snop nima divergence. Vendar pa Besselov snop ni omejen v pravem smislu. Za velike oddaljenosti od središča snopa r intenzitetni profil namreč pojema kot $I \propto J_0^2(k_\perp r) \sim (2/\pi k_\perp r)\cos^2(k_\perp r - \pi/4)$. Energija takega snopa ni omejena znotraj efektivnega radija, kot je to pri Gaussovih snopih. Za konstrukcijo Besselovih snopov bi (tako kot za konstrukcijo ravnega vala) potrebovali neskončno energije, kar je seveda nemogoče. Kljub temu pa lahko ustvarimo približke Besselovih snopov, ki imajo pomembne in uporabne lastnosti.

[6] Nemški astronom, matematik in fizik Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846.

Slika 3.8: Prečni presek in profil intenziteta Besselovega snopa

Z uporabo stožčaste leče lahko Gaussov snop preoblikujemo v približek Besselovega snopa (slika 3.9). Na plašču stožčaste leče se namreč Gaussov snop zlomi in valovni vektorji nastalega žarka opisujejo stožec, kar je sicer lastnost Besselovih žarkov. Dobljeni žarek je približek Besselovega snopa, vendar le na določenem območju, dolgem z_{max}. Znotraj tega območja je divergenca snopa praktično enaka nič. Poleg manjše divergence imajo ti snopi še lastnost regeneracije. To pomeni, da se snop v senčni strani za objektom, ki ga osvetljuje (na primer v optični pinceti), regenerira. Profil snopa v senčni strani (daleč stran od objekta) je tako enak profilu snopa pred objektom.

Slika 3.9: Nastanek Besselovega snopa na stožčasti leči

3.6 Transformacije snopov z lečami

Vrnimo se h Gaussovim snopom in poglejmo, kaj se zgodi z njimi pri prehodu skozi optične naprave. Začnimo z enostavno tanko lečo z goriščno razdaljo f. V geometrijski optiki je krivinski radij krogelnega vala, ki izhaja iz točke na osi, kar enak razdalji do točke. Leča preslika točko na osi v točko na osi, od tod pa sledi, da se sferični val s krivinskim radijem R_1 po prehodu skozi lečo spremeni v val s krivinskim radijem R_2. Pri tem velja zveza

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}. \tag{3.42}$$

Krivinski radij v točki z je pozitiven, če je središče krožnice pri $z' \leq z$.

Kako pa je z Gaussovim snopom? Polmer snopa w se pri prehodu skozi tanko lečo ne spremeni, zato velja po enačbi (3.30) za kompleksni krivinski radij tik pred lečo in tik za njo

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f}. \tag{3.43}$$

Kompleksni krivinski radij q je po enačbi (3.29) linearna funkcija koordinate z. To nam skupaj z enačbo (3.43) omogoča račun prehoda snopa skozi poljuben sistem leč brez aberacij. Kot primer poglejmo, kako z zbiralno lečo zberemo snop.

Slika 3.10: Prehod Gaussovega snopa skozi tanko lečo. Grlo velikosti w_{01} v oddaljenosti x_1 od gorišča leče se preslika v grlo w_{02} v oddaljenosti x_2 od gorišča leče.

Vpadni snop naj ima grlo s polmerom w_{01} in parametrom z_{01}. Lega grla je v točki, ki je za x_1 oddaljena od levega gorišča leče (slika 3.10). Naj bosta

$$q_1^F = x_1 - iz_{01} \qquad \text{in} \qquad q_2^F = -x_2 - iz_{02} \tag{3.44}$$

kompleksna krivinska radija v levem in desnem gorišču, pri čemer je koordinatna os z usmerjena v desno, gledamo pa referenčno glede na lego grla vsakega posameznega snopa. Velja tudi

$$q_1 = q_1^F + f \qquad \text{in} \qquad q_2 = q_2^F - f. \tag{3.45}$$

Od tod dobimo z uporabo enačbe (3.43) enačbo za q v goriščih v kompaktni obliki

$$\boxed{q_1^F q_2^F = -f^2.} \tag{3.46}$$

Enačba je po obliki podobna enačbi za oddaljenost slike od gorišča v geometrijski optiki, pomen pa ima drugačen. Zapišimo posebej realni in imaginarni del

$$x_1 x_2 = f^2 - z_{01} z_{02} \qquad \text{in} \qquad \frac{x_1}{z_{01}} = \frac{x_2}{z_{02}}. \tag{3.47}$$

Dobimo enačbi za preslikavo Gaussovega snopa čez lečo z goriščno razdaljo f. Prva da povečavo:

$$\boxed{\frac{w_{02}}{w_{01}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}},} \tag{3.48}$$

druga enačba pa lego grla na desni strani leče:

$$\boxed{x_2 = \frac{x_1 f^2}{x_1^2 + z_{01}^2}.} \tag{3.49}$$

Gornja enačba se ujema z izrazom za preslikavo točke v geometrijski optiki le, kadar je $z_{01} \ll x_1$. Kadar je $z_{01} \gg f$, je val na leči pri vsakem x_1 skoraj raven in $x_2 \to 0$, kar pomeni, da dobimo grlo na desni strani v gorišču. V praksi dobimo Gaussove snope iz laserjev in pogosto ne velja ne prva ne druga limita, temveč je treba uporabiti izraz (3.49). Tudi povečava polmera grla na desni, podana z enačbo (3.48), je precej drugačna kot v geometrijski optiki.

Za primer vzemimo snop iz He-Ne laserja (valovna dolžina 632,8 nm), ki ima grlo s polmerom $w_{01} = 0,5$ mm na izhodnem ogledalu in je 50 cm pred lečo z goriščno razdaljo $f = 25$ cm. Tedaj je $z_{01} = 124$ cm. Po enačbi (3.49) dobimo grlo za lečo v oddaljenosti 1 cm od gorišča in 26 cm za lečo, po enačbi (3.48) pa izračunamo polmer $w_{02} = 100\ \mu$m. Enačbe geometrijske optike bi dale popolnoma napačen položaj grla 50 cm za lečo, polmer grla pa 0,5 mm. Po drugi strani bi približek, da je vpadni snop kar raven, dal grlo na desni v gorišču s približno pravim polmerom. Zakaj da približek ravnih valov bolj pravilen rezultat, lahko hitro uvidimo, če pogledamo Rayleighovo dolžino snopa: snop vpada na lečo še v območju bližnjega polja ($x_1 + f < z_{01}$), kjer je približno oblike ravnih valov.

Če postavimo grlo snopa v gorišče leče ($x_1 = 0$), je grlo na desni strani tudi v gorišču ($x_2 = 0$). Razmerje polmerov grl na eni in drugi strani leče lahko izračunamo:

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{x_2}{x_1} = \frac{f^2}{z_{01}^2} \qquad \text{in} \qquad \frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f}{z_{01}}. \tag{3.50}$$

Velikost grla na desni strani je

$$w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01}}, \tag{3.51}$$

torej tem manjša, čim večji je polmer grla na levi. Vpadni žarek je tako smiselno razširiti, vendar je polmer žarka lahko največ enak polmeru leče a. Najmanjša velikost grla na desni je tako

$$\boxed{w_{02\ \mathrm{min}} = \frac{\lambda f}{\pi a} \sim \lambda.} \tag{3.52}$$

Dobri mikroskopski in fotografski objektivi dosegajo numerično odprtino $f/a \simeq 1$ in z njimi je mogoče Gaussov snop zbrati v piko velikosti $\sim \lambda$.

Omenili smo, da je treba za dosego majhnega polmera grla za lečo žarek pred lečo čim bolj razširiti. Razširitev vpadnega snopa naredimo s teleskopom (slika 3.11), katerega značilnost je, da je razmik med lečama enak vsoti goriščnih razdalj leč in zato gorišči leč sovpadata. Povečava teleskopa je pri taki postavitvi leč enaka razmerju med goriščnima razdaljama (glej nalogo 3.6.1).

Slika 3.11: Prehod Gaussovega snopa skozi sistem dveh leč z goriščnima razdaljama f_1 in f_2

Naloga 3.6.1 Imamo dve leči z goriščnima razdaljama f_1 in f_2, ki sta na medsebojni razdalji $d = f_1 + f_2$. Pokaži, da je povečava takega teleskopa enaka

$$\frac{w_{02}}{w_{01}} = \frac{f_2}{f_1}, \tag{3.53}$$

in je neodvisna od postavitve grla snopa x_1.

3.7 Matrične (ABCD) preslikave v geometrijski optiki

Preden se lotimo splošnejšega zapisa preslikav Gaussovega snopa, se spomnimo, kako se lotimo preslikav v geometrijski optiki. Sliko dobimo kot presečišče geometrijskih žarkov, ki izhajajo iz točke predmeta pred optičnim sistemom. Geometrijski žarek je pravokoten na valovne ploskve, pri čemer moramo vzeti še limito, ko gre valovna dolžina proti nič. Ukrivljenost valovne fronte je neposredno povezana s spreminjanjem naklona žarkov, pri čemer bomo privzeli, da so nakloni žarkov glede na os majhni.

Geometrijski žarek v izbrani ravnini z lahko opišemo z dvema parametroma: oddaljenostjo od osi y in naklonom glede na os θ. Ti dve količini sta med seboj neodvisni in ju sestavimo v vektor

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}. \tag{3.54}$$

Preslikavo snopa bomo zapisali kot matriko, ki bo delovala na gornji vektor. Matrike bodo v splošnem oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{3.55}$$

zato jih imenujemo tudi ABCD matrike. Zapišimo nekaj primerov.

Pri premiku za d se spremeni odmik od osi, naklon pa ostane enak:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + d\theta_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.56}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.57}$$

Matrika za premik d vzdolž osi z je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

Poglejmo še matriko za prehod skozi lečo. Pri prehodu skozi tanko lečo se spremeni nagib žarka. Če je pred lečo vzporeden z osjo, gre za lečo skozi gorišče, zato

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -\frac{y_1}{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

Pri tem koeficientov B in D še ne poznamo. Določimo jih iz drugega pogoja, ki pravi, da ostane žarek, ki gre skozi lečo na osi, nespremenjen:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B \\ -\frac{1}{f} & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

Sledi $B = 0$ in $D = 1$. Matrika za prehod skozi lečo je tako

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

Podobno izpeljavo kot za prehod skozi lečo lahko naredimo za odboj na sferičnem ogledalu s krivinskim radijem R. Pripadajoča matrika je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.62}$$

pri čemer je $R > 0$ za konkavna zrcala. Matrika za odboj na ravnem zrcalu je identiteta.

Matriko sestavljene optične naprave dobimo z množenjem matrik posameznih komponent. Pri tem moramo paziti na vrstni red množenja, saj množenje matrik ni komutativno. Matriko preslikave čez dva optična elementa, pri čemer žarek najprej preide element z indeksom 1 in nato element z indeksom 2, zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2A_1 + B_2C_1 & A_2B_1 + B_2D_1 \\ C_2A_1 + D_2C_1 & C_2B_1 + D_2D_1 \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

V sistemu z več elementi (slika 3.12) zapišemo produkt matrik za vse elemente, pri čemer ne smemo pozabiti na premike med elementi.

Poglejmo primer. Žarek naj najprej prepotuje razdaljo d, nato pa ga usmerimo na tanko lečo z goriščno razdaljo f. Matrika za celoten prehod je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix}. \tag{3.64}$$

Gornji matrični formalizem je zelo prikladen predvsem za računanje zapletenih optičnih sistemov, saj ga je prav lahko izvesti na računalnik. Poleg tega bomo spoznali, da je enolično povezan z matričnim formalizmom izračuna kompleksne ukrivljenosti Gaussovih snopov, zato da preprosto možnost prenosa rezultatov računov geometrijske optike v optiko snopov.

Slika 3.12: Preslikave žarkov lahko obravnavamo z matrikami. Optični element M preslika žarek (y_1, θ_1) v (y_2, θ_2). Matriko za prehod poljubnega zaporedja optičnih elementov dobimo z množenjem matrik.

3.8 Linearne racionalne transformacije kompleksnega krivinskega radija

Poskusimo zdaj zapisati podoben matrični formalizem še za kompleksne krivinske radije. Za opis Gaussovega snopa zadošča, če v izbrani ravnini z poznamo kompleksni krivinski radij q. Ugotovili smo že, da je q linearna funkcija premika po z (enačba 3.29). Vemo tudi, kako se q spremeni pri prehodu skozi tanko lečo (enačba 3.43).

Pri premiku iz ravnine z_1 v ravnino z_2, ki je premaknjena za d, se q spremeni

$$q_2 = q_1 + d. \tag{3.65}$$

Po enačbi (3.43) je pri prehodu skozi lečo

$$q_2 = \frac{q_1 f}{f - q_1} = \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1}. \tag{3.66}$$

Premik in leča dasta skupaj

$$q_2 = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1 + d}{f} + 1} = \frac{q_1 + d}{-\frac{q_1}{f} - \frac{d}{f} + 1}. \tag{3.67}$$

V vseh treh primerih lahko transformacijo kompleksnega krivinskega radija q zapišemo v obliki ulomljene linearne preslikave

$$\boxed{q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}.} \tag{3.68}$$

Koeficiente preslikave razvrstimo v matriko

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{3.69}$$

Če iz gornjih enačb razberemo koeficiente ABCD matrik, vidimo, da so povsem enake kot v primeru geometrijske optike. Hitro lahko tudi preverimo, da je matrika za premik in lečo enaka produktu matrike za premik in matrike za lečo (enačba 3.64).

Omenimo še eno lastnost ABCD matrik. Kadar po prehodu čez optične elemente preidemo v snov z enakim lomnim količnikom kot je bil na začetku, je determinanta ABCD matrike enaka 1. V nasprotnem primeru je determinanta matrike enaka razmerju lomnih količnikov začetne in končne snovi.

$$AD - BC = \frac{n_1}{n_2}. \tag{3.70}$$

Opis prehoda	Skica	Matrika za prehod
Prehod skozi prostor za d		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Prehod preko meje dveh snovi		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod preko konveksno ukrivljene meje $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1-n_2)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Prehod preko konveksne leče $f > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Odboj na konkavnem zrcalu $R > 0$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3.1: Matrike ABCD za nekaj osnovnih preslikav, ki veljajo tako v geometrijski optiki kot tudi za izračun preslikave kompleksnega krivinskega radija q Gaussovih snopov.

Naloga 3.8.1 Pokaži, da za naslednje prehode veljajo ustrezne ABCD matrike.

Prehod skozi prostor in lečo		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{d}{f} \end{bmatrix}$
Prehod preko leče z debelino d in krivinskima radijema R_1 in R_2		$\begin{bmatrix} 1-\frac{d}{nf_1} & \frac{d}{n} \\ -\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1}-\frac{d}{nf_1f_2} & 1-\frac{d}{nf_2} \end{bmatrix}$ $f_i = \frac{R_i}{n-1}$
Prehod čez zaporedje plasti		$\begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Optični resonatorji

Osnovni gradnik vsakega laserja je resonator. V njem je vzbujeno lastno valovanje, ki skozi delno prepustno steno resonatorja izhaja iz sistema. V tem poglavju bomo najprej spoznali optične resonatorje in kriterije za njihovo stabilno delovanje, nato pa izračunali lastne frekvence ter povezali širino črt z izgubami v sistemu.

4.1 Odprti resonatorji

Optični resonatorji so votline, v katerih je mogoče vzpostaviti stoječe svetlobno valovanje. Taka stoječa valovanja so skoraj stacionarne rešitve valovne enačbe z ustreznimi robnimi pogoji v votlini in se obnašajo kot harmonska nihala. Če vzbujamo v resonatorju valovanja z različnimi frekvencami, dobimo pri nekaterih diskretnih frekvencah resonančno obnašanje. Te frekvence imenujemo lastne frekvence resonatorja. Zaradi dušenja imajo lastne frekvence končno širino, pri čemer je čas dušenja mnogo daljši od nihajne periode.

Optične resonatorje uporabljamo predvsem v dva namena:

1. V resonatorjih lahko z razmeroma šibkim zunanjim vzbujanjem dobimo veliko električno poljsko jakost pri resonančni frekvenci. Za vzdrževanje konstantne amplitude lastnega nihanja mora zunanji vir zgolj pokrivati izgube v resonatorju. Če so te majhne, je zunanji vir lahko šibek, polje v resonatorju pa vseeno veliko.

2. Resonatorji delujejo kot filtri, ki prepuščajo le polje s točno določeno frekvenco in prostorsko odvisnostjo. Primer take uporabe je Fabry-Perotov interferometer, opisan v nadaljevanju poglavja.

Resonatorje poznamo z različnih področij, na primer akustične pri glasbilih ali mikrovalovne in radijske. V mikrovalovnem področju, kjer so valovne dolžine valovanja okoli 1 cm, so resonatorji zaprte kovinske votline z dimenzijami, ki so primerljive z valovno dolžino vzbujenega valovanja. Resonančne frekvence so v takem resonatorju med seboj dobro ločene in ni težko doseči enega samega nihanja v izbranem frekvenčnem intervalu.

V optičnem področju je drugače, saj so resonatorji navadno mnogo večji od valovne dolžine. Vzemimo kocko s stranico $L \gg \lambda$, v kateri je vzbujeno zelo veliko število lastnih nihanj. Število lastnih nihanj N na frekvenčni interval $\Delta\nu$ zapišemo z zvezno gostoto stanj

$$N = 2\frac{1}{8}4\pi k^2 \Delta k \frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V \Delta\omega = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V \Delta\nu. \tag{4.1}$$

Do gornje enačbe smo prišli tako, da smo prešteli stoječa valovanja z velikostjo valovnega vektorja med k in $k+\Delta k$: volumen pripadajoče krogelne lupine v pozitivnem oktantu $\frac{1}{8}4\pi k^2 \Delta k$ smo delili z volumnom $(\pi/L)^3$, ki pripada enemu stanju. Upoštevali smo tudi, da ima vsako lastno nihanje dve možni polarizaciji.

Poglejmo primer. Izberimo osrednjo frekvenco $\nu = 3 \cdot 10^{14}$ Hz, ki ustreza valovni dolžini 1 μm, in širino frekvenčnega intervala $\Delta\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz, ki je tipična za Dopplerjevo razširjeno emisijsko črto v plinu. Potem je v votlini s stranico $L = 1$ cm in prostornino $V = 1$ cm^3 število lastnih nihanj na izbran interval po enačbi (4.1) enako $N = 2,5 \cdot 10^8$. Če bi bile vse stene votline idealna zrcala, bi bil čas dušenja vseh lastnih nihanj približno enako dolg in vedno bi vzbujali zelo veliko število resonanc hkrati. Tak resonator bi bil neuporaben.

Hkratnemu vzbujanju velikega števila nihanj se izognemo z zmanjšanjem odbojnosti stranskih sten votline, saj s tem povečamo dušenje stoječih valov v prečni smeri. Dušenje valov, ki so pravokotni na idealno odbojni končni steni, ostane nespremenjeno. Nazadnje lahko stranske stene povsem odstranimo, tako da stoječih valov v prečni smeri ni več. Ostane le še nekaj valov, ki so pravokotni na končni steni. Takemu resonatorju pravimo odprt resonator (slika 4.1).

Slika 4.1: Odprt resonator. Levo: lastni nihajni načini takega resonatorja imajo diskretne vrednosti valovnih vektorjev k_n. Desno: žarki, ki niso pravokotni na zrcali, uidejo iz resonatorja.

Oglejmo si odprte resonatorje podrobneje. V zaprti pravokotni votlini velikosti $a \times a \times L$ z idealno prevodnimi (zrcalnimi) stenami so dovoljene vrednosti valovnega vektorja za lastna nihanja

$$\mathbf{k}_{l,m,n} = \left(\frac{l\pi}{a}, \frac{m\pi}{a}, \frac{n\pi}{L} \right), \tag{4.2}$$

kjer so l, m in n cela števila, L dolžina, a pa prečna dimenzija resonatorja. Lastne frekvence so

$$\omega_{l,m,n} = c|\mathbf{k}_{l,m,n}|. \tag{4.3}$$

Dolžina resonatorja L je velika v primerjavi z λ in zato je n veliko število. Če prečnih sten ni, mora biti $\mathbf{k}$ približno vzporeden z osjo z, zato morata biti l in m majhna. Tedaj lahko velikost valovnega vektorja razvijemo in dobimo za frekvenco

$$\omega_{l,m,n} = c \left(\frac{n\pi}{L} + \frac{l^2 + m^2}{2n} \frac{L\pi}{a^2} \right). \tag{4.4}$$

Drugi člen v oklepaju je navadno le majhen popravek, tako da so lastne frekvence odprtih optičnih resonatorjev odvisne predvsem od števila vozlov v vzdolžni smeri. To število je navadno veliko, med 10^5 in 10^7. Možna so tudi lastna nihanja z nekaj vozli v prečni smeri, ki pa le malo vplivajo na lastne frekvence. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali predvsem lastna stanja brez vozlov v prečni smeri, ki jih bomo označili z enim samim indeksom n.

Razlika med frekvencama dveh zaporednih lastnih nihanj n in $n+1$ je

$$\boxed{\Delta\omega_n = \frac{\pi c}{L}.} \tag{4.5}$$

Pri dolžini resonatorja $L = 30$ cm je v frekvenčnem intervalu s širino $3 \cdot 10^9$ Hz le še 6 nihanj, ki jih je brez težav mogoče razločiti.

V zaprtih votlinah z zrcalnimi stenami dobimo dobro določena lastna stanja pri poljubni obliki votline. Pri odprtih resonatorjih to ne velja. Da dobimo lastna nihanja z majhnimi izgubami, morata biti izpolnjena dva pogoja:

1. Snop geometrijskih žarkov mora ostati po mnogih odbojih ujet med zrcaloma resonatorja.

2. Polmer zrcala mora biti večji od polmera uklonsko razširjenega snopa, ki izhaja iz nasprotnega zrcala.

Resonatorjem, ki zadoščajo gornjima pogojema, pravimo stabilni resonatorji. Drugi pogoj lahko zapišemo tudi z enačbami, izhajajoč iz enačbe za oceno divergence (enačba 3.1):

$$\vartheta = \frac{\lambda}{a_1} < \frac{a_2}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_1 a_2}{\lambda L} > 1, \tag{4.6}$$

kjer sta a_1 in a_2 polmera zrcal resonatorja. Izrazu $F = a_1 a_2/\lambda L$ pravimo tudi Fresnelovo število.

Fabry-Perotov interferometer

Poglejmo preprost primer resonatorja, omejenega z dvema vzporednima ravnima zrcaloma z veliko odbojnostjo. Takemu sistemu pravimo Fabry-Perotov interferometer[1]. Da nastane med zrcaloma stoječe valovanje, mora biti razdalja med zrcaloma večkratnik polovične valovne dolžine (enačba 4.2)

$$L = \frac{n\lambda}{2}. \tag{4.7}$$

Prepustnost interferometra za ravni val, ki vpada pravokotno na zrcali z odbojnostjo $\mathscr{R}$, je

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2 kL} \tag{4.8}$$

in je prikazana na sliki (4.2). Ko je frekvenca vpadnega valovanja ravno enaka lastni frekvenci resonatorja, je sistem v resonanci in $T = 1$. Širina resonance je tem manjša, čim večja je odbojnost zrcal. Ta tudi določa čas dušenja vzbujenega lastnega nihanja.

Slika 4.2: Prepustnost Fabry-Perotovega interferometra v odvisnosti od valovnega vektorja k za tri različne odbojnosti zrcal $\mathscr{R}$.

[1] Francoska fizika Maurice Paul Auguste Charles Fabry, 1867–1945, in Jean-Baptiste Alfred Perot, 1863–1925.

Naloga 4.1.1 Pokaži, da je prepustnost Fabry-Perotovega interferometra, katerega zrcali imata odbojnost $\mathscr{R}$, enaka

$$T = \frac{1}{1 + \frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2\delta}, \tag{4.9}$$

kjer je $\delta = kL\cos\vartheta$, L razmik med zrcaloma, ϑ vpadni kot, k pa valovni vektor svetlobe.

Prvemu pogoju stabilnosti ustrezajo v Fabry-Perotovem interferometru le žarki, ki so natanko pravokotni na zrcali. Čim sta zrcali le malo nevzporedni, stabilnih žarkov sploh ni več. Tako imenovani planparalelni interferometer je tako na meji stabilnosti. Z izpolnjevanjem drugega pogoja ni težav, saj morata biti pri na primer 30 cm dolgem resonatorju in valovni dolžini $0,5\ \mu$m zrcali večji od $0,4$ mm, da zadostita pogoju, zapisanem v enačbi (4.6).

Bolj stabilni resonatorji so sestavljeni iz dveh konkavno ukrivljenih zrcal. Tedaj so žarki, ki potujejo pod majhnim kotom glede na osrednjo os, ujeti med zrcaloma in energija lastnih valovanj ostaja lokalizirana blizu osi.

4.2 Gaussovi snopi v resonatorjih

V stabilnih resonatorjih s konkavnima zrcaloma pričakujemo, da so lastna valovanja omejena na bližino osrednje osi in zrcali mnogo večji od polmera lastnega nihanja. Tedaj lahko za obravnavo električnega polja uporabimo obosno valovno enačbo (enačba 3.5). Veliko odbojnost na zrcalih dobimo, kadar je njuna električna prevodnost velika. Iz tega izhaja robni pogoj, ki pravi, da je električno polje na zrcalu približno enako nič. Valovna fronta stoječega valovanja na zrcalu mora zato sovpadati s površino zrcala.

Slika 4.3: Gaussov snop v odprtem resonatorju s konkavno ukrivljenima zrcaloma s krivinskima radijema R_1 in R_2. Krivinski radij zrcal se ujema s krivinskim radijem čela snopa. Kadar sta polmera različna, grlo ne leži na sredini med zrcaloma.

V prečni smeri omejene rešitve obosne enačbe smo našli v obliki potujočih Gaussovih snopov (enačba 3.27). Podobno kot zapišemo stoječe valovanje na vrvi kot vsoto valovanj v nasprotnih smereh lahko stoječe snope dobimo s superpozicijo snopov, ki se širijo v različnih smereh ob osi. Da zadostimo robnim pogojem na zrcalih, se mora krivinski radij snopa ujemati s krivinskima radijema zrcal R_1 in R_2 (slika 4.3). Pri tem sta neznanki polmer grla snopa, ki je podan s parametrom z_0, in lega grla.

Postavimo izhodišče osi z v grlo, kot smo navajeni, tako da sta zrcali pri $z_1 < 0$ in $z_2 > 0$. Z uporabo enačbe za krivinski radij snopa R (enačba 3.23) dobimo

$$-R_1 = z_1 \left[1 + \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2\right] \quad \text{in} \tag{4.10}$$

$$R_2 = z_2 \left[1 + \left(\frac{z_0}{z_2}\right)^2\right]. \tag{4.11}$$

Pri tem smo upoštevali, da je krivinski radij za konkavno zrcalo glede na pozitivno smer z pozitiven. Prvo enačbo smo zapisali z negativnim predznakom pri R_1, zato da je krivinski radij pozitivno število. Veljati mora še

$$z_2 - z_1 = L. \tag{4.12}$$

Iz gornjih enačb najprej izračunamo razdaljo z_1, ki določa lego grla v resonatorju, nato pa parameter z_0, ki določa območje bližnjega polja, in preko enačbe (3.20) enolično tudi polmer grla

$$z_0^2 = \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}. \tag{4.13}$$

Da je snop realen in omejen, mora biti $z_0^2 > 0$ in zato števec gornjega izraza pozitiven. Ta pogoj lahko po kratkem računu zapišemo v obliki stabilnostnega kriterija

$$0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1. \tag{4.14}$$

Resonatorji, ki zadoščajo gornjemu pogoju, so stabilni.

Naloga 4.2.1 Izhajajoč iz pogoja, da se na zrcalih krivinski radij valovnih front snopa ujema s krivinjskim radijem zrcal (enačbi 4.10 in 4.11) izpelji kriterij za stabilno delovanje resonatorja (enačba 4.14).

Stabilnostni kriterij za resonatorje je najbolj nazorno predstaviti na diagramu, kjer na os x nanašamo L/R_1, na os y pa L/R_2. Na sliki (4.4) je stabilno območje delovanja resonatorjev, kot ga razberemo iz enačbe (4.14), označeno senčeno. Opazimo, da je možnih veliko različnih vrst stabilnih resonatorjev, ob tem da resonatorji, ki so sestavljeni iz dveh konveksnih zrcal, niso nikoli stabilni. Če je eno zrcalo ravno (plankonkavni resonatorji), je grlo Gaussovega snopa vedno na ravnem zrcalu. V primeru konveksno-konkavnega resonatorja leži grlo snopa izven resonatorja. Podrobneje si oglejmo nekaj posebnih primerov stabilnih resonatorjev.

Simetrični resonatorji

Za simetrični resonator velja $R_1 = R_2 = R$. Na diagramu (slika 4.4) se taki resonatorji nahajajo na simetrali lihih kvadrantov pri $x = y$. Pri simetričnih resonatorjih je grlo v sredini resonatorja in enačba (4.13) se poenostavi v

$$z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(2R - L)L}. \tag{4.15}$$

Polmer grla v simetričnem resonatorju je enak

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\sqrt[4]{(2R - L)L}. \tag{4.16}$$

Slika 4.4: Področje stabilnih resonatorjev. Resonator je stabilen, če sta parametra L/R_1 in L/R_2 znotraj osenčenega območja: (a) konfokalni resonator, (b) koncentrični resonator, (c) planparalelni resonator (Fabry-Perot), (d) konveksno-konkavni resonator in (e) plankonkavni resonator.

Po enačbi (3.19) lahko izračunamo še polmer snopa na ogledalu

$$w_1^2 = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{L}{2z_0} \right)^2 \right] = \frac{\lambda}{\pi} \frac{R\sqrt{L}}{\sqrt{2R-L}}. \tag{4.17}$$

Pri izbrani dolžini simetričnega resonatorja je polmer snopa na zrcalu najmanjši, kadar je $R = L$. Tedaj sovpadata geometrijski gorišči obeh zrcal, zato imenujemo tak resonator konfokalni. Hiter račun pokaže, da velja $z_0 = L/2$, snop od grla do zrcala pa se razširi za $w_1/w_0 = \sqrt{2}$.

Naloga 4.2.2 Pokaži, da je polmer snopa na izhodnem zrcalu v simetričnem resonatorju z danima parametroma R in L najmanjši, kadar je resonator konfokalni.

Pri dejanskem načrtovanju laserjev imamo dodatno omejitev, saj želimo ojačevalno sredstvo, ki je v resonatorju, čim boljše izrabiti. Pogosto je zato polmer grla snopa razmeroma velik. Iz enačbe (4.16) sledi, da mora biti v tem primeru velik tudi krivinski radij zrcal. S tem pridobimo na ojačanju, po drugi strani pa se nekoliko poslabša stabilnost.

Poglejmo primer. Naj bo dolžina resonatorja laserja $L = 1$ m in valovna dolžina $\lambda = 633$ nm. Tedaj je v konfokalni geometriji po enačbi (4.16) polmer grla $w_0 = 0,32$ mm. Premer razelektritvene cevi je navadno nekaj milimetrov in približno tako debel mora biti tudi svetlobni snop, če naj dobro izkoristi ojačanje zaradi stimuliranega sevanja. Da bi pri isti dolžini laserja dobili grlo s premerom 2 mm, moramo vzeti zrcali s krivinskim radijem okoli 50 m. Primer kaže, da že majhna ukrivljenost zrcal zagotovi dokaj ozke snope.

★ Izkaže se, da so konfokalni resonatorji najmanj občutljivi na majhne zasuke zrcal. Pri zasuku zrcala se v navadnih stabilnih resonatorjih namreč premakne os, ki gre skozi krivinski središči obeh zrcal. Če želimo, da je največji odmik nove osi čim manjši, uporabimo konfokalne resonatorje.

Skrajna primera stabilnega simetričnega resonatorja sta koncentrični resonator, pri katerem sovpadata krivinski središči zrcal in $L = 2R$, in planparalelni resonator, pri katerem sta zrcali ravni. V prvem primeru gre po enačbi (4.16) polmer grla proti nič, v drugem pa raste sorazmerno z $R^{1/4}$. Pri ravnih zrcalih postanejo uklonske izgube na robovih znatne. Račun z Gaussovimi snopi tedaj ni več veljaven in treba je uporabiti pristope, ki jih bomo opisali v razdelku (4.6).

Spomnimo se, da obstajajo poleg osnovnega Gaussovega snopa še rešitve obosne enačbe z vozli v prečni smeri, to so snopi višjega reda. Imajo enak parameter z_0 in enako ukrivljenost valovnih ploskev, zato so seveda tudi dobre rešitve za polje v stabilnih resonatorjih. Pri tem je treba vedeti, da je pri enakem w_0 dejanski polmer snopa reda n za približen faktor $\sqrt{n}$ večji (glej nalogo 3.4.1). Če želimo dobiti iz laserja samo osnovni Gaussov snop (imenovan tudi TEM_{00}), ki ima od vseh snopov najbolj gladko valovno fronto in ima najmanjšo divergenco pri danem w_0, pogosto uporabimo zaslonko, ki snope višjih redov poreže, ali kakšen drug element, na primer Fabry-Perotov etalon, ki poveča izgube za snope višjega reda.

★ V praksi se včasih uporabljajo tudi nestabilni resonatorji, to je taki, za katere ne obstojajo rešitve v obliki Gaussovih snopov. Taki resonatorji imajo velike izgube na robovih zrcal, ker žarki v njih niso ujeti. Uporabni so v laserjih z velikim ojačanjem. Njihova prednost je, da je cel volumen resonatorja enakomerno pokrit s svetlobo.

4.3 Stabilnostni kriterij z ABCD formalizmom

V prejšnjem razdelku smo izpeljali pogoj za stabilnost resonatorja, sestavljenega iz dveh zrcal s polmeroma R_1 in R_2, ki sta med seboj oddaljeni za L. Izhajali smo iz pogoja, da se ukrivljenost valovnih front na zrcalu ujema z ukrivljenostjo zrcal. Vendar so sistemi, kjer imamo zgolj dve zrcali, razmeroma redki. Pogosto so v resonatorju druge optične komponente, ki jih je treba upoštevati pri zapisu kriterija za stabilnost. Takrat si pomagamo z matrikami ABCD.

Izhajamo iz zahteve, da se v stabilnem resonatorju snop po enem celotnem obhodu preslika sam vase. Gaussov snop na neki točki v resonatorju zapišemo s kompleksno ukrivljenostjo (enačba 3.30). V najpreprostejšem primeru resonatorja snop prepotuje dano razdaljo, se odbije od zrcala, prepotuje resonator v nasprotni smeri, se odbije od drugega zrcala in se vrne v začetno lego. V bolj zapletenih primerih dodamo še prehode skozi druge optične elemente. Matriko za celotni prehod potem zapišemo kot produkt matrik ABCD za posamezne prehode $M = M_N M_{N-1} ... M_2 M_1$. Končni produkt za celoten obhod je matrika oblike

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

kompleksni krivinski radij po prehodu pa je enak začetnemu kompleksnemu radiju

$$q_2 = \frac{Aq + B}{Cq + D} = q. \tag{4.19}$$

Gornjo enačbo prepišemo v

$$Cq^2 + (D - A)q - B = 0. \tag{4.20}$$

Da dobimo realno vrednost w, mora biti q kompleksen in diskriminanta negativna

$$(D-A)^2+4BC<0. \tag{4.21}$$

Upoštevamo še, da je determinanta matrike $AD-BC=1$ in dobimo pogoj za stabilnost, zapisan s koeficienti matrike M:

$$-1<\left(\frac{A+D}{2}\right)<1. \tag{4.22}$$

Naloga 4.3.1 Pokaži, da je za resonator z dolžino L in s konkavnima zrcaloma s krivinskima radijema R_1 in R_2 pogoj za stabilnost (enačba 4.22) ekvivalenten pogoju (4.14).

★ Podoben, a malo bolj zapleten račun lahko naredimo tudi za resonatorje, v katerih se snop ne vrne v svojo začetno obliko po enem obhodu, ampak je teh obhodov n. Potem zapišemo matriko M kot produkt elementov v enem obhodu, celotna matrika pa je enaka M^n. Iz pogoja, da matrika ne divergira za velike n, dobimo pogoj za stabilnost, ki je natančno enak pogoju (4.22), ki smo ga ravnokar izpeljali.

4.4 Resonančne frekvence

Doslej smo obravnavali le prostorsko obliko polja v resonatorju, ničesar pa še nismo povedali o časovni odvisnosti lastnih nihanj. Frekvence lastnih nihanj dobimo iz pogoja, da se mora faza snopa pri enem obhodu (preletu resonatorja v obeh smereh) spremeniti za mnogokratnik 2π. Fazo za osnovni snop zapišemo po enačbi (3.27)

$$kz+\frac{kr^2}{2R}-\eta(z)=kz-\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \tag{4.23}$$

pri čemer gledamo valovanje na osi, pri $r=0$. Razlika faze pri enem preletu je

$$\frac{\omega_n}{c}L-\left[\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right)-\arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right]=n\pi \tag{4.24}$$

Pri tem smo zanemarili, da lahko pride do dodatne majhne spremembe faze pri odboju na zrcalu. Ta za delček valovne dolžine spremeni efektivno dolžino resonatorja, ki je niti ne poznamo tako natančno. Iz istega razloga za osnovni snop ni treba upoštevati člena v oglatem oklepaju enačbe (4.24). Tako dobimo znano enačbo za resonančne frekvence

$$\omega_n=\frac{n\pi c}{L}. \tag{4.25}$$

Razmik med dvema zaporednima lastnima frekvencama je v skladu z enačbo (4.5)

$$\Delta\omega=\frac{\pi c}{L}. \tag{4.26}$$

Za snope višjega reda, ki imajo vozle v prečni smeri, je fazni premik odvisen tudi od števila vozlov. Tako je na primer v cilindričnih koordinatah (enačba 3.36)

$$\eta_{p,l}(z)=(2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right). \tag{4.27}$$

Resonančni pogoj zapišemo kot

$$\frac{\omega_{n,p,l}}{c}L-(2p+l+1)\left[\arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right)-\arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right)\right]=n\pi. \tag{4.28}$$

Resonančne frekvence so torej odvisne tudi od števila prečnih vozlov (slika 4.5), kar je dodaten razlog, da v laserjih vzbujamo le osnovno lastno nihanje.

Slika 4.5: Resonančne frekvence za skoraj planparalelni ($R \gg L$) resonator.

Zanimiv in praktično pomemben je primer konfokalnega resonatorja, pri katerem je $z_0 = L/2$ in $\arctan(L/2z_0) = \arctan(1) = \pi/4$. Resonančne frekvence so

$$\omega_{n,p,l}=\frac{\pi c}{L}\left[n+\frac{1}{2}(2p+l+1)\right]. \tag{4.29}$$

Za snope, pri katerih je $2p+l$ liho število, dobimo iste resonančne frekvence kot za osnovne snope, pri sodih $2p+l$ pa dobimo še resonance na sredini med osnovnimi. Razmik med sosednjimi frekvencami je tako $\Delta\nu = c/4L$ in konfokalni interferometer se obnaša kot dvakrat daljši planparalelni. To lahko razumemo tudi iz geometrijske slike: žarek, ki vstopi v konfokalni interferometer vzporedno z osjo, se šele po dveh preletih vrne sam vase.

Slika 4.6: V konfokalnem resonatorju se žarek šele po dveh preletih vrne sam vase.

Pri skoraj planparalelnem resonatorju je $z_0 \gg L$, $\arctan(L/2z_0)$ lahko razvijemo, upoštevamo enačbo (4.15) in dobimo

$$\omega_{n,p,l}=\frac{\pi c}{L}\left[n+(2p+l+1)\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2L}{R}}\right]. \tag{4.30}$$

Ker je L majhen v primerjavi z R, so resonance snopov nizkega prečnega reda zelo blizu resonancam osnovnih snopov, niso pa čisto enake. Poglejmo primer. Vzemimo simetrični resonator z dolžino $L = 1$ m in krivinskim radijem zrcal $R = 50$ m, valovna dolžina pa naj bo $\lambda = 500$ nm. Z uporabo enačbe (4.15) hitro lahko izračunamo $z_0 = 4,97$ m. Ker je pogoj $z_0 \gg L$ izpolnjen, lahko uporabimo gornji približek. Razlika med frekvencama za dva zaporedna osnovna snopa

$$\Delta\omega_{n,p,l}=\frac{\pi c}{L}=940\ \text{MHz}, \tag{4.31}$$

medtem ko je razlika med frekvencama dveh prečnih snopov

$$\Delta\omega_{n,p,l}=\frac{c}{L}\sqrt{\frac{2L}{R}}=60\ \text{MHz}. \tag{4.32}$$

4.5 Izgube v resonatorjih

Energija lastnega nihanja odprtega resonatorja ni konstantna, ampak se počasi zmanjšuje iz več vzrokov:

1. Odbojnost ogledal ni enaka 1. Tudi če bi znali narediti popolno odbojna zrcala, tak resonator ne bi bil uporaben, saj nihanja ne bi mogli sklopiti z zunanjim poljem. Če torej hočemo dobiti nekaj svetlobe iz laserja ali filtrirati vpadajoči snop, mora biti odbojnost zrcal manjša od 1.

2. Na sredstvu in na optičnih elementih v resonatorju pride do absorpcije in sipanja svetlobe. Te izgube želimo navadno čim bolj zmanjšati.

3. Uklonske izgube so odvisne od premera zrcal in premera snopa na njih. V dani geometriji imajo najmanjši polmer osnovni snopi, snopi višjega reda so širši, zato imajo večje uklonske izgube. Merilo za uklonske izgube je Fresnelovo število (enačba 4.6) $N_F = a^2/(L\lambda)$, kjer je a polmer ogledal. Pri enakem N_F je polmer snopa na izhodnem zrcalu najmanjši, če je resonator konfokalni, zato ima tak resonator tudi najmanjše uklonske izgube (glej nalogo 4.2.2). Če je N_F znatno večji od 1, kar navadno je, so uklonske izgube zanemarljive.

Vse izgube lahko popišemo z razpadnim časom za energijo nihanja

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\tau}W, \tag{4.33}$$

in

$$W = W_0 e^{\frac{-2t}{\tau}}, \tag{4.34}$$

pri čemer τ imenujemo življenjski ali razpadni čas nihanj. Izguba energije na celoten obhod resonatorja je

$$-dW = (1-\mathscr{R}_1)W + (1-\mathscr{R}_2)W + \Lambda_0 W = \Lambda W. \tag{4.35}$$

Z $\mathscr{R}_1$ in $\mathscr{R}_2$ smo označili odbojnosti zrcal, od katerih je navadno ena kolikor mogoče blizu 1. Parameter Λ_0 popiše absorpcijo in sipanje znotraj resonatorja ter morebitne uklonske izgube. Tipične vrednosti zanj so do nekaj stotink. Celotne izgube popišemo s parametrom Λ.

Razpadni čas nihanja lahko neposredno povežemo z izgubami, če v enačbo (4.33) vstavimo čas enega obhoda $t = 2L/c$. Dobimo

$$\frac{dW}{W} = \Lambda = -\frac{2}{\tau}\frac{2L}{c}, \tag{4.36}$$

od koder sledi

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\Lambda c}{4L} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{c}{4L}[(1-\mathscr{R}_1) + (1-\mathscr{R}_2)], \tag{4.37}$$

kjer smo s

$$\tau_0 = \frac{4L}{\Lambda_0 c} \tag{4.38}$$

označili razpadni čas zaradi notranjih izgub.

Notranje izgube so navadno zelo majhne, odbojnost enega zrcala pa je približno enaka 1, tako da dobimo za življenjski čas nihanj približno

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{4L}(1-\mathscr{R}). \tag{4.39}$$

Zaradi dušenja se energija lastnih nihanj eksponentno zmanjšuje, prav tako tudi amplituda jakosti električnega polja. Amplituda pojema z dvakrat daljšim karakterističnim časom, ki je enak kar τ. Spekter eksponentno pojemajoče funkcije lahko izračunamo (glej nalogo 2.4.2) in dobimo Lorentzovo krivuljo s širino črte, ki ustreza ravno

$$\Delta\omega_{1/2} = \frac{1}{\tau}. \tag{4.40}$$

Lastne frekvence torej niso neskončno ozke, ampak imajo končno širino $2/\tau$. Poglejmo primer. Naj bodo notranje izgube na en obhod $\Lambda_0 = 0,01$, eno zrcalo naj bo idealno, drugo naj ima odbojnost $\mathscr{R} = 0,93$. Dolžina resonatorja naj bo $L = 0,5$ m, valovna dolžina pa 500 nm. Tedaj je $1/\tau = 12 \cdot 10^6$ s^{-1}. Zanimivo je pogledati razmerje med razmikom med zaporednima resonančnima frekvencama $\Delta\omega$ (enačba 4.5) in širino resonance $2/\tau$. Dobimo $\Delta\omega\tau/2 \approx 80$.

★ Namesto razpadnega časa τ se pogosto za opis izgub uporablja dobrota resonatorja, ki jo vpeljemo kot razmerje med resonančno frekvenco in širino črte

$$Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega_{1/2}}. \tag{4.41}$$

Za tipične optične resonatorje dobimo resonančno frekvenco $\omega_n \sim 10^{15}$ Hz, širino pa smo izračunali, da je reda $1/\tau \sim 10^7$ Hz. Faktor dobrote je tako $Q \sim 10^8$. Optični resonatorji imajo zelo velike faktorje dobrote!

Poglejmo še primer, ko so notranje izgube zanemarljive in sta odbojnosti obeh zrcal enaki. Potem dobimo iz enačbe (4.37)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{2L}(1-\mathscr{R}). \tag{4.42}$$

Do istega rezultata pridemo tudi z razvojem izraza za prepustnost Fabry-Perotovega interferometra (enačba 4.8) okoli vrha pri ω_n:

$$T = \frac{1}{1+\frac{4\mathscr{R}}{(1-\mathscr{R})^2}\sin^2 L\frac{c}{(\omega-\omega_n)}} \approx \frac{1}{1+\left[\frac{2}{(1-\mathscr{R})}\frac{L}{c}(\omega-\omega_n)\right]^2}, \tag{4.43}$$

kjer smo upoštevali še, da je odbojnost blizu $\mathscr{R} \approx 1$. Dobimo znano Lorentzovo krivuljo oblike

$$T = \frac{(\Delta\omega_{1/2})^2}{(\omega-\omega_n)^2+(\Delta\omega_{1/2})^2}, \tag{4.44}$$

od koder hitro razberemo

$$\frac{1}{\tau} = \Delta\omega_{1/2} = \frac{c}{2L}(1-\mathscr{R}). \tag{4.45}$$

4.6 *Obravnava z uklonskim integralom

V nestabilnih resonatorjih stacionarna rešitev v obliki stoječega Gaussovega snopa ne obstoja. Zato je v takih resonatorjih poiskati rešitev za električno polje precej zahtevno. Ker pa je problem soroden uklonu, ga lahko obravnavamo s pomočjo uklonske teorije.

Naj bo električno polje v točki P_1 prvega zrcala E_1. Polje na drugem zrcalu v točki P_2 lahko zapišemo s pomočjo Kirchhoffovega uklonskega integrala (enačba 1.56)

$$E_2 = -\frac{i}{2\lambda}\int_1 E_1(P_1)\frac{e^{ikr}(1+\cos\vartheta)}{r}\,dS_1 \tag{4.46}$$

$$= \int_1 E_1(P_1)K(P_1,P_2)dS_1, \tag{4.47}$$

kjer je r razdalja med točkama P_1 in P_2, ϑ je kot med zveznico in normalo na zrcali, druge faktorje pa smo pospravili v faktor

$$K(P_1,P_2) = -\frac{i}{2\lambda}\frac{e^{ikr}(1+\cos\vartheta)}{r}, \tag{4.48}$$

ki predstavlja jedro integralske enačbe. Polje na prvem zrcalu mora biti na enak način povezano s poljem na drugem. Če naj zapisano polje predstavlja lastno nihanje resonatorja, mora biti po dveh odbojih sorazmerno začetnemu polju:

$$E_1(P) = \gamma\int_1\int_2 E_1(P_1)K(P_1,P_2)K(P_2,P_1)\,dS_1\,dS_2. \tag{4.49}$$

Enačba (4.49) je homogena integralska enačba, katere lastne rešitve so iskana lastna nihanja elektromagnetnega polja v resonatorju. Kompleksne lastne vrednosti γ določajo frekvenco in dušenje nihanj. V splošnem rešitev ni mogoče poiskati analitično in treba je uporabiti numerične metode. Najenostavnejša je iterativna metoda, pri kateri začnemo z nekim začetnim poljem in ponavljamo integracijo v enačbi (4.49), dokler se polje ne spreminja več.

Integralsko enačbo (4.49) je mogoče rešiti v posebnem primeru konfokalnega resonatorja. Privzemimo, da je brez izgub. Ker je resonator simetričen, se polje na obeh zrcalih lahko razlikuje kvečjemu za predznak. Vpeljimo kartezične koordinate na obeh zrcalih, kot kaže slika (4.7).

Slika 4.7: Koordinatna sistema na zrcalih resonatorja

Pričakujemo, da bo prečna razsežnost lastnega stanja majhna v primerjavi z dolžino resonatorja, zato lahko r razvijemo

$$r \approx L - \frac{xx' + yy'}{L}. \tag{4.50}$$

Ker obravnavamo konfokalni resonator, je krivinski radij zrcal kar enak dolžini resonatorja. V imenovalcu jedra integrala (enačba 4.48) zato lahko r nadomestimo z L. Koti med zveznico točk na obeh zrcalih in normalo na zrcali so majhni, zato je $\cos\vartheta \approx 1$.

Tako iz enačbe (4.47) dobimo

$$E(x',y') = \pm\frac{ie^{ikL}}{\lambda L}\int E(x,y)\exp\left[\frac{-ik(xx'+yy')}{L}\right]dx\,dy. \tag{4.51}$$

Integracija poteka po celem zrcalu. Jedro integrala je produkt dveh faktorjev, ki vsebujeta vsak le x' ali y' koordinati. Zato poiščimo rešitev enačbe (4.51) v obliki produkta $E(x',y') = E_0 f(x')g(y')$. S tem nastavkom morata biti funkciji $f(x')$ in $g(y')$ rešitvi enačbe

$$\alpha f(x') = \int f(x)\exp\left[\frac{-ikxx'}{L}\right]dx, \tag{4.52}$$

kjer je α še neznana konstanta. Meje integrala so od enega do drugega roba zrcala. Če je zrcalo dovolj veliko, pričakujemo, da je polje na robu dovolj majhno, da lahko meje vzamemo kar od $-\infty$ do ∞. Vpeljimo še brezdimenzijski koordinati

$$X' = x'\sqrt{k/L} \quad \text{in} \quad Y' = y'\sqrt{k/L} \tag{4.53}$$

in dobimo

$$\alpha f(X') = \sqrt{\frac{L}{k}}\int_{-\infty}^{\infty} f(X)e^{-iXX'}\,dX \tag{4.54}$$

ter podobno enačbo za $g(Y')$. Enačba (4.54) pravi, da mora biti $f(X)$ podobna svoji Fourierevi transformiranki. Najpreprostejša funkcija s to lastnostjo je Gaussova funkcija

$$f(X) = \exp[-\frac{1}{2}X^2]. \tag{4.55}$$

Polje na zrcalu ima tako po pričakovanju obliko Gaussovega snopa

$$E(x,y) = E_0\exp\left[-\frac{k(x^2+y^2)}{2L}\right]. \tag{4.56}$$

Poglejmo še konstanto α. Imeti mora imeti vrednost $\alpha = \sqrt{2\pi L/k} = \sqrt{\lambda L}$. Enaki izrazi veljajo tudi za smer y. Postavimo zdaj izračunano električno poljsko jakost (enačba 4.56) z ustrezno vrednostjo za α v enačbo (4.51) in upoštevajmo, da mora biti $E_2 = \pm E_1$. Dobimo

$$i\alpha^2\frac{e^{ikL}}{\lambda L} = ie^{ikL} = \pm 1. \tag{4.57}$$

Dobimo resonančni pogoj za frekvenco lastnega stanja, ki ga že poznamo (enačba 4.29)

$$\omega_n = ck_n = \frac{c}{L}(2n+1)\frac{\pi}{2}. \tag{4.58}$$

Integralska enačba, dobljena iz uklonske teorije, tako da isti rezultat kot stoječe valovanje oblike Gaussovih snopov, ki so rešitve obosne valovne enačbe. To nas seveda ne preseneča, saj je obosna valovna enačba enako natančna kot Fresnelova uklonska teorija.

Naloga 4.6.1 Pokaži, da so funkcije, ki so sorazmerne svoji Fourierevi transformaciji, Hermite-Gaussove funkcije (enačba 3.31), in izračunaj lastne frekvence stanj višjega reda.

V tem poglavju smo obravnavali samo dva primera laserskih resonatorjev: Fabry-Perotov resonator z dvema vzporednima ravnima zrcaloma (a) in resonator z dvema sferičnima zrcaloma (b). Poleg teh dveh primerov je v uporabi še cela vrsta različnih resonatorjev. Ciklični resonator (c) je sestavljen iz več zrcal in žarek ciklično potuje med njimi. V vlakenskih laserjih je resonator optično vlakno med dvema zrcaloma ali pa sklenjeno vlakno. Kot laserski resonator lahko delujejo tudi mikroploščice (d) ali mikrokroglice (e), v katere je s totalnim odbojem ujeta svetloba. Namesto zrcal v mikroresonatorjih uporabimo tudi periodične dielektrične strukture, na katerih pride do Braggovega odboja (f).

5. Interakcija svetlobe s snovjo

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali svetlobo v praznem prostoru. Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. To je seveda zelo obširna tema in jo bomo obdelali le toliko, kolikor je treba za obravnavo ojačevanja svetlobe s stimulirano emisijo, ki je osnova za delovanje laserjev. Najprej bomo na kratko pogledali termodinamsko ravnovesje svetlobe v stiku s toplotnim rezervoarjem, torej sevanje črnega telesa, ki zahteva kvantno obravnavo elektromagnetnega polja. Nato bomo vpeljali fenomenološki Einsteinov opis mikroskopskih procesov absorpcije, spontane in stimulirane emisije in pokazali, da ti procesi niso neodvisni. Izpeljali bomo izraze za absorpcijski koeficient in koeficient ojačanja, na koncu poglavja pa bomo nakazali še kvantnomehansko izpeljavo verjetnosti za prehod atoma iz višjega energijskega stanja v nižje s sevanjem.

5.1 Kvantizacija elektromagnetnega polja

Ravni valovi so enostavne in zelo prikladne rešitve valovne enačbe (1.14), zato jih pri reševanju problemov pogosto uporabimo kot bazo, po kateri razvijemo elektromagnetno polje. Možen je razvoj po celotnem prostoru, vendar je tedaj nekoliko nerodna normalizacija baznih funkcij. Če je omejimo na le del prostora, se temu problemu izognemo. Mora pa biti izbrani del prostora dovolj velik, da končni rezultat ni odvisen od izbire njegove velikosti in oblike.

Najpreprosteje je vzeti votlino v obliki velike kocke s stranico L in idealno prevodnimi stenami. Rešitve Maxwellovih enačb (1.1 do 1.4) znotraj take votline so ob upoštevanju robnih pogojev (1.10) stoječa valovanja. Zapišemo jih v obliki

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos\frac{\pi l x}{L} \sin\frac{\pi m y}{L} \sin\frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t}, \\ E_y &= E_{y0} \sin\frac{\pi l x}{L} \cos\frac{\pi m y}{L} \sin\frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t}, \\ E_z &= E_{z0} \sin\frac{\pi l x}{L} \sin\frac{\pi m y}{L} \cos\frac{\pi n z}{L} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kjer so l, m in n cela števila. Vsako stoječe valovanje je določeno z valovnim vektorjem

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\pi l}{L}, \frac{\pi m}{L}, \frac{\pi n}{L}\right), \tag{5.2}$$

katerega velikost je povezana s frekvenco $k = \omega/c$. Iz Maxwellove enačbe za prazen prostor (enačba 1.3) $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ sledi $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Za vsako trojico števil l, m, n imamo tako le dve neodvisni polarizaciji.

Naloga 5.1.1 Pokaži, da stoječe valovanje, zapisano v obliki (5.1), reši valovno enačbo v kocki s stranico L in zadosti robnim pogojem idealno prevodnih sten votline.

Preštejmo, koliko je lastnih nihanj v intervalu velikosti valovnega vektorja med k in $k+dk$ - to smo na hitro naredili že pri obravnavni resonatorjev (enačba 4.1). Možni valovni vektorji tvorijo tridimenzionalno mrežo v prvem oktantu prostora vseh valovnih vektorjev. Razmik med dvema zaporednima mrežnima točkama v smeri ene od osi je π/L. Število točk v osmini krogelne plasti med k in $k+dk$ je za dovolj velike l, m in n enako volumnu plasti, deljenemu z volumnom, ki pripada posamezni mrežni točki, to je $(\pi/L)^3$. Upoštevati moramo še, da imamo pri vsakem $\mathbf{k}$ dve polarizaciji, in dobimo

$$dN = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \pi k^2\, dk. \tag{5.3}$$

Zapišemo število nihanj na enoto volumna

$$\rho(k)\, dk = \frac{k^2}{\pi^2} dk \tag{5.4}$$

in ga prevedemo na frekvenčno odvisnost

$$\rho(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu. \tag{5.5}$$

oziroma

$$\boxed{\rho(\omega)\, d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega.} \tag{5.6}$$

Številu nihanj na frekvenčni interval in enoto volumna votline $\rho(\omega)$ pravimo gostota stanj.

Vsote po lastnih valovanjih, to je po dovoljenih vrednostih valovnega vektorja k lahko s pomočjo gostote stanj spremenimo v integrale po k ali po ω

$$\sum_k \ldots \quad \rightarrow \quad V \int \rho(k) \ldots dk = V \int \rho(\omega) \ldots d\omega. \tag{5.7}$$

Označimo zdaj brezdimenzijski krajevni del rešitve (5.1) z E_α, kjer α označuje vsa tri cela števila l, m in n in še obe možni polarizaciji, da bo manj pisave. Pripadajoče magnetno polje izračunamo z Maxwellovo enačbo (1.2)

$$\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = i\omega \mathbf{B}_\alpha. \tag{5.8}$$

Polja $\mathbf{E}_\alpha$ in $\mathbf{B}_\alpha$ tvorijo poln ortogonalen sistem, zato lahko vsako elektromagnetno polje v votlini razvijemo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}} \sum_\alpha p_\alpha(t) \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \quad \text{in} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= i\sqrt{\frac{\mu_0}{V}} c_0 \sum_\alpha \omega_\alpha q_\alpha(t) \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Postavimo razvoj (5.9) v Maxwellovi enačbi (1.2 in 1.1), upoštevamo zvezo (5.8) in njej analogno za rotor magnetnega polja in dobimo

$$p_\alpha = \dot{q}_\alpha \quad \text{in} \quad \omega_\alpha^2 q_\alpha = -\dot{p}_\alpha, \tag{5.10}$$

od koder sledi še

$$\ddot{p}_\alpha + \omega_\alpha^2 p_\alpha = 0. \tag{5.11}$$

Ta enačba da seveda pričakovano odvisnost od časa oblike $e^{-i\omega_\alpha t}$.

Z upoštevanjem razvoja (enačbi 5.9) lahko zapišemo še energijo polja – Hamiltonovo funkcijo[1]

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int (\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0})\, dV = \frac{1}{2}\sum_\alpha (p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2). \tag{5.12}$$

Enačbi (5.11) in (5.12) kažeta, da lahko elektromagnetno polje v votlini obravnavamo kot sistem neodvisnih harmonskih oscilatorjev. Pri tem se koeficienti razvoja p_α in q_α obnašajo kot impulzi in koordinate.

Prehod v kvantno mehaniko dosežemo tako, da klasičnim spremenljivkam impulza in koordinate priredimo operatorje $\hat{p}_\alpha$ in $\hat{q}_\alpha$, ki morajo zadoščati komutacijskim pravilom

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha,\beta}. \tag{5.13}$$

Iz kvantne mehanike vemo, da so lastne vrednosti energije harmonskega oscilatorja, opisanega s Hamiltonianom (enačba 5.12), enake

$$\boxed{W_{n,\alpha} = \hbar\omega_\alpha(n_\alpha + \frac{1}{2}), \quad n_\alpha = 1,\, 2, \ldots} \tag{5.14}$$

Celotna energija kvantiziranega elektromagnetnega polja v votlini je torej

$$W = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha n_\alpha, \tag{5.15}$$

pri čemer smo izpustili ničelno energijo. Izpuščali jo bomo tudi v nadaljevanju, saj je to energija osnovnega stanja, ki se ne more sprostiti.

Razliki energije harmonskega oscilatorja, če se n_α spremeni za 1, pravimo foton. Iz same konstrukcije vidimo, da je pojem fotona vezan na določen opis elektromagnetnega polja – reprezentacijo. V njej na primer vprašanje, kje se foton nahaja, očitno nima smisla.

5.2 Sevanje črnega telesa

Obravnavajmo sevanje v votlini, ki je v toplotnem ravnovesju s stenami s temperaturo T. Iz statistične fizike vemo, da verjetnost P, da je v izbranem stanju votline α n_α fotonov, zapišemo s kanonično porazdelitvijo

$$P(n_\alpha) = \frac{e^{-W_{n,\alpha}/k_B T}}{\sum_{n_\alpha} e^{-W_{n,\alpha}/k_B T}} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}}{\sum_{n_\alpha} e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}} = e^{-\beta\hbar\omega_\alpha n_\alpha}(1 - e^{-\beta\hbar\omega_\alpha}), \tag{5.16}$$

pri čemer $\beta = 1/k_B T$ in k_B Boltzmannova konstanta. Povprečno število fotonov v stanju α je potem

$$\overline{n_\alpha} = \sum_{n_\alpha} n_\alpha P(n_\alpha) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_\alpha} - 1}. \tag{5.17}$$

S tem izrazom lahko tudi verjetnost $P(n)$ zapišemo nekoliko drugače

$$P(n) = \frac{\overline{n}^n}{(1+\overline{n})^{1+n}}. \tag{5.18}$$

[1] Irski fizik in matematik Sir William Rowan Hamilton, 1805–1865.

Ravnovesno gostoto energije elektromagnetnega polja v votlini na frekvenčni interval u dobimo tako, da povprečno energijo posameznega stanja $n_\alpha \hbar\omega_\alpha$ pomnožimo s številom stanj na frekvenčnem intervalu, to je, z gostoto stanj $\rho(\omega)$ (enačba ref4.4)

$$u(\omega)\,d\omega = \hbar\omega\overline{n}\,\rho(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3\,d\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}. \tag{5.19}$$

Dobimo znano formulo za energijo na enoto volumna na enoto frekvence, to je Planckov zakon[2] za spekter svetlobe v toplotnem ravnovesju z okolico s temperaturo T

$$\boxed{u(\omega) = \hbar\omega\overline{n}\,\rho(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}.} \tag{5.20}$$

Lahko ga zapišemo tudi z valovno dolžino in dobimo energijo na enoto volumna na interval valovne dolžine

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\beta hc/\lambda}-1}. \tag{5.21}$$

Slika 5.1: Planckov spekter za sevanje črnega telesa pri različnih temperaturah

5.3 Absorpcija, spontano in stimulirano sevanje

Oglejmo si zdaj osnovne procese interakcije svetlobe s snovjo. Naj bo v votlini poleg elektromagnetnega polja še N atomov, ki se med seboj ne motijo. Za začetek naj bodo prav enostavni: imajo naj le dve energijski stanji z energijama E_1 in $E_2 > E_1$ (glej sliko 5.2 a).

Zaradi interakcije s poljem pri frekvenci prehoda $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ atomi prehajajo iz nižjega stanja v višje in obratno. Trije procesi opisujejo to prehajanje: spontano sevanje, absorpcija in stimulirano sevanje. Oglejmo si te procese bolj natančno.

Spontano sevanje

Vemo, da atom v vzbujenem stanju tudi brez vpliva zunanjega polja ni stabilen, temveč prej ali slej preide v nižje stanje. Temu pojavu pravimo spontano sevanje ali spontana emisija (slika 5.2 b).

[2] Nemški fizik in nobelovec Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858–1947.

Slika 5.2: Shema energijskih nivojev dvonivojskega atoma (a) in prehodov med njima: spontano sevanje (a), absorpcija (b) in stimulirano sevanje (c).

Pri spontanem sevanju se izseva foton v katerokoli stanje polja v bližini frekvence prehoda. Verjetnost za prehod na enoto časa označimo z A_{21}. Karakteristični razpadni čas gornjega stanja je tako $1/A_{21}$.

Absorpcija

Absorpcija fotona je prehod, pri katerem se foton z ustrezno energijo absorbira, atom pa preide iz spodnjega stanja v zgornje (slika 5.2 c). Verjetnost za prehod na časovno enoto r_{12} je sorazmerna spektralni gostoti energije polja $u(\omega)$, to je energiji na enoto volumna in frekvenčni interval, pri frekvenci prehoda ω_0

$$r_{12} = B_{12} u(\omega_0). \tag{5.22}$$

Vpeljali smo sorazmernostni koeficient B_{12}. Pri absorpciji se seveda zmanjša število fotonov v enem od stanj polja pri frekvenci ω_0.

Stimulirano sevanje

Tretji pojav je prehod atoma iz gornjega stanja v spodnje zaradi interakcije s poljem. Temu procesu pravimo stimulirano sevanje ali stimulirana emisija. Tudi verjetnost za stimuliran prehod na časovno enoto r_{21} je sorazmerna spektralni gostoti energije polja pri frekvenci prehoda ω_0

$$r_{21} = B_{21} u(\omega_0). \tag{5.23}$$

V tem primeru smo sorazmernostni koeficient označili z B_{21}. V primeru stimuliranega sevanja, se število fotonov v stanju, ki je prehod povzročilo, poveča za ena.

Preden nadaljujemo, se še nekoliko pomudimo pri izrazih za absorpcijo (enačba 5.22) in stimulirano emisijo (enačba 5.23). Zaradi končnega življenjskega časa ima gornje stanje tudi končno spektralno širino. Zapisani enačbi (5.22) in (5.23) veljata le, kadar je spektralna gostota elektromagnetnega polja $u(\omega)$ preko celotne širine prehoda približno konstantna (slika 5.3 a). To je gotovo res, če obravnavamo sevanje v votlini, ki je v termičnem ravnovesju (črno telo).

Če pa na atome svetimo s svetlobo s spektrom, ki je ozek v primerjavi s širino prehoda, na primer iz laserskega resonatorja, je verjetnost za prehod odvisna tudi od tega, kako blizu centralne frekvence prehoda je frekvenca vpadne svetlobe (slika 5.3 b). Naj bo $w_{\omega R}$ gostota energije (ne spekter!) monokromatske svetlobe s frekvenco ω_R. Tedaj lahko verjetnost za absorpcijo na časovno enoto zapišemo v obliki

$$r_{12} = B_{12} g(\omega_R) w_{\omega R}. \tag{5.24}$$

Slika 5.3: Pri izračunu verjetnosti za absorpcijo in stimulirano emisijo je pomembno, ali je širina spektralne gostote elektromagnetnega polja bistveno večja (a) ali bistveno manjša (b) glede na atomsko spektralno črto.

Pri tem funkcija $g(\omega)$ opisuje obliko atomske spektralne črte z vrhom pri ω_0 ima vrh.

V splošnem primeru, ko se spekter vpadne svetlobe spreminja v območju frekvence prehoda, moramo sešteti prispevke pri posameznih frekvencah (5.24) po ozkih frekvenčnih intervalih

$$r_{12} = B_{12} \int g(\omega)\, u(\omega)\, d\omega. \tag{5.25}$$

Če preverimo gornji zapis na primeru spektra črnega telesa, ki se ne spreminja dosti v območju prehoda, lahko $u(\omega)$ postavimo pred integral in po pričakovanju dobimo znano enačbo (5.22). Iz tega sledi, da mora biti funkcija $g(\omega)$ normirana

$$\int g(\omega)\, d\omega = 1. \tag{5.26}$$

Zelo pogosto je $g(\omega)$ Lorentzove oblike

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \tag{5.27}$$

Za grobe ocene lahko funkcijo $g(\omega)$ aproksimiramo tudi s pravokotnikom širine $\delta\omega \simeq \gamma$ in višine $1/\delta\omega$.

Einsteinovi koeficienti

Vrnimo se k fenomenološkim koeficientom A_{21}, B_{21} in B_{12}, ki jih je vpeljal Einstein[3]. S temi koeficienti, pravimo jim tudi Einsteinovi koeficienti, je mogoče uspešno opisati velik del pojavov pri interakciji svetlobe s snovjo.

Vpeljimo pojem zasedenost stanj, ki pove število atomov v določenem stanju. Ker obravnavamo preproste modele atomov z zgolj dvema stanjema, zapišemo samo dve zasedenosti. Naj bo N_1 zasedenost spodnjega stanja, N_2 zasedenost zgornjega, skupno število atomov pa $N = N_1 + N_2$. V prisotnosti svetlobe se bo število atomov v spodnjem in zgornjem stanju v splošnem spreminjalo, skupno število pa se bo ohranjalo.

Obravnavajmo termično ravnovesje, ko je spekter svetlobe bistveno širši od širine atomskega prehoda (slika 5.3 a), tako da lahko uporabljamo enačbi (5.22) in (5.23). Zasedenost zgornjega nivoja se zmanjšuje zaradi spontanih in stimuliranih prehodov v spodnje stanje, povečuje pa se zaradi absorpcije s spodnjega stanja. To zapišemo z enačbo

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2 - r_{21}N_2 + r_{12}N_1 = -A_{21}N_2 - B_{21}u(\omega_0)N_2 + B_{12}u(\omega_0)N_1. \tag{5.28}$$

[3]Nemški fizik in nobelovec Albert Einstein, 1879–1955.

Zaradi ohranitve skupnega števila atomov velja

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{-dN_2}{dt}. \tag{5.29}$$

V termičnem ravnovesju sta zasedenosti konstantni, tako da lahko zapišemo

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21}N_2 + B_{21}u(\omega_0)N_2 - B_{12}u(\omega_0)N_1 = 0. \tag{5.30}$$

Vemo pa, da mora biti v termičnem ravnovesju spektralna gostota energije sevanja $u(\omega)$ kar termična Planckova gostota $u_T(\omega)$. Izrazimo najprej spektralno gostoto iz enačbe (5.30)

$$u_T(\omega_0) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{N_1}{N_2} - B_{21}}. \tag{5.31}$$

Vemo tudi, da v termičnem ravnovesju za zasedenosti N_1 in N_2 velja kanonična porazdelitev

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2-E_1)} = e^{-\beta\hbar\omega_0}, \tag{5.32}$$

kjer je $\beta = 1/k_BT$. Sledi

$$u_T(\omega_0) = \frac{A_{21}/B_{12}}{e^{\beta\hbar\omega_0} - B_{21}/B_{12}}. \tag{5.33}$$

Za določitev koeficientov primerjamo gornji izraz s Planckovo formulo za $u_T(\omega_0)$ (enačba 5.20). Očitno morata biti koeficienta B_{21} in B_{12} enaka (če sta stanji nedegenerirani), med A_{21} in B_{12} pa velja zveza

$$\boxed{A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}B_{12} \qquad \text{in} \qquad B_{12} = B_{21}.} \tag{5.34}$$

Koeficient pred B_{12} je ravno enak gostoti stanj elektromagnetnega polja $\rho(\omega)$ (enačba 5.6), pomnoženi z energijo fotona $\hbar\omega$. Videli bomo, da to ni slučajno in da sledi iz verjetnosti za prehod v kvantni elektrodinamiki (poglavje 5.10). Pozoren bralec je lahko tudi opazil, da je z enačbo (5.33), ki smo jo dobili le z uporabo kanonične porazdelitve za atome, že določena oblika Planckove formule, ne da bi karkoli rekli o fotonih.

5.4 Absorpcijski koeficient

V prejšnjem razdelku smo napovedali, da lahko velik del pojavov pri interakciji svetlobe s snovjo opišemo z Einsteinovimi koeficienti. Poskusimo zdaj koeficienta A_{21} in B_{21} povezati z makroskopskim absorpcijskim koeficientom plina atomov.

Naj na izbran volumen plina vpada snop svetlobe s frekvenco ω, ki je blizu frekvence atomskega prehoda ω_0. Gostota vpadnega energijskega toka je $j_\omega = w_\omega c$ (enačba 1.33), pri čemer je w_ω gostota energije. Obravnavajmo primer, ko je spekter vpadnega snopa ozek v primerjavi s širino atomskega prehoda (slika 5.3 b). V tej obliki zapisane enačbe bodo bolj priročne pozneje pri obravnavi laserja. Privzemimo še, da je stanje stacionarno.

Ko svetloba vpade na plast plina debeline dz, se gostota energijskega toka zmanjša zaradi absorpcije in hkrati poveča zaradi stimulirane emisije (slika 5.5). Spontano sevanje, ki je seveda tudi prisotno, lahko zanemarimo, saj bo izsevano na vse strani enakomerno in ga bo le zelo

Slika 5.4: K absorpciji snopa svetlobe v plasti atomov

majhen del v smeri snopa. Sprememba energije snopa na enoto časa je enaka razliki med številom absorpcij in stimuliranih prehodov na enoto časa, pomnoženih z energijo fotona. To popišemo z enačbo

$$dP = S\,dj = (N_2 - N_1)\,\frac{Sdz}{V}\,\hbar\omega\, r_{12} = (N_2 - N_1)\,\frac{Sdz}{V}\,\hbar\omega\, B_{21} g(\omega) w_\omega, \tag{5.35}$$

pri čemer smo verjetnost z prehod izrazili iz enačbe (5.24). S S smo označili presek snopa, z V pa volumen plina. Tako dobimo enačbo za spreminjanje gostote toka

$$dj = \frac{1}{V}(N_2 - N_1)\, B_{21} g(\omega)\, \frac{\hbar\omega}{c}\, j_\omega\, dz \tag{5.36}$$

Priročno je vpeljati še presek za absorpcijo ali stimulirano sevanje

$$\sigma(\omega) = \frac{B_{21}\, g(\omega)\, \hbar\omega}{c}. \tag{5.37}$$

Z njim se izraz (5.36) poenostavi v

$$\boxed{\frac{dj}{dz} = \frac{N_2 - N_1}{V}\sigma(\omega) j.} \tag{5.38}$$

Navadno imamo opravka s plinom, ki je blizu termičnega ravnovesja, zato je $N_2 < N_1$ in je dj negativen. V tem primeru pride do absorpcije z absorpcijskim koeficientom

$$\mu(\omega) = \frac{N_1 - N_2}{V} B_{21}\, g(\omega) \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{N_1 - N_2}{V}\sigma(\omega), \tag{5.39}$$

za gostoto energijskega toka pa velja enačba

$$\frac{dj}{j} = -\mu dz. \tag{5.40}$$

Energija se pri absorpciji na našem plinu dvonivojskih atomov seveda ne izgublja, temveč le siplje. Atom, ki je prešel v vzbujeno stanje, se s spontano emisijo vrne nazaj v osnovno, svetloba pa se izseva na vse strani – se siplje.

5.5 Nasičenje absorpcije

Čeprav je na prvi pogled enačba (5.40) za zmanjševanje gostote svetlobnega toka pri prehodu skozi absorbirajoči plin preprosta, je ni mogoče enostavno integrirati, saj je μ odvisen od gostote

energijskega toka. Pri dovolj veliki gostoti svetlobnega toka namreč z absorpcijo znaten delež atomov preide v višje stanje, zaradi česar se zmanjša razlika $N_1 - N_2$, posledično se pa zmanjša tudi absorpcijski koeficient – absorpcija se nasiti. Zato temu pojavu pravimo nasičenje absorpcije. Obravnavajmo ga še matematično.

Obravnavajmo snop monokromatske svetlobe, ki vpada na plin. Atomi v plinu prehajajo med nivoji zaradi absorpcije, spontane in stimulirane emisije. Podobno kot smo zapisali enačbo (5.30) za termično ravnovesje v primeru širokega spektra, zapišemo stacionarno enačbo za naš primer kot

$$A_{21}N_2 + B_{21}\, g(\omega)\,(N_2 - N_1)\frac{j}{c} = 0, \tag{5.41}$$

pri čemer smo za verjetnost za prehod namesto enačbe (5.23) vzeli enačbo (5.24). Zasedenost višjega stanja N_2 lahko izrazimo s celotnim številom atomov N in razliko zasedenosti

$$N_2 = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}(N_2 - N_1). \tag{5.42}$$

S tem lahko izračunamo razliko zasedenosti

$$N_2 - N_1 = -\frac{N}{1 + 2\frac{Bg(\omega)}{cA}j}. \tag{5.43}$$

Pri majhni gostoti toka j so praktično vsi atomi v osnovnem stanju in prispevajo k absorpciji. Pri velikih gostotah toka pa imenovalec gornjega izraza močno naraste, razlika zasedenosti gre proti nič in absorpcija se zmanjšuje. Ko drugi člen v imenovalcu enačbe (5.43) doseže vrednost 1, pravimo, da gostota energijskega toka doseže vrednost saturacijske gostote. Zapišemo jo kot

$$j_s(\omega) = \frac{cA_{21}}{2B_{21}g(\omega)} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^2g(\omega)}, \tag{5.44}$$

pri čemer smo upoštevali zvezo (5.34) med koeficientoma A_{21} in B_{21}. Kot vidimo, je saturacijska gostota odvisna le od frekvence vpadnega valovanja in širine atomskega prehoda. Za črto z valovno dolžino okoli 600 nm in širino črte 10^8 s^{-1} znaša saturacijska gostota svetlobnega toka okoli 20 mW/cm^2. Tako gostoto toka v ozek frekvenčni interval je z običajnimi svetili, na primer plinsko razelektritveno cevjo, praktično nemogoče doseči, medtem ko jo iz laserjev dobimo z lahkoto. Izraz za razliko zasedenosti stanj lahko zdaj zapišemo v pregledni obliki

$$N_2 - N_1 = -\frac{N}{1 + \frac{j}{j_s(\omega)}}. \tag{5.45}$$

Vstavimo gornji izraz v enačbo za zmanjševanje gostote toka (enačba 5.38) in dobimo

$$\boxed{dj = -\frac{\mu_0}{1 + \frac{j}{j_s}}\, j\, dz,} \tag{5.46}$$

kjer smo z $\mu_0 = NB_{21}\, g(\omega)\hbar\omega/Vc$ označili absorpcijski koeficient pri majhnih gostotah vpadnega toka. Enačbo brez težav integriramo in dobimo

$$\ln\frac{j}{j_0} + \frac{1}{j_s}(j - j_0) = -\mu_0 z, \tag{5.47}$$

kjer smo z j_0 označili začetno gostoto toka. Kadar je ta dosti manjša od j_s, lahko drugi člen v

Slika 5.5: Pojemanje gostote svetlobnega toka v absorbirajočem plinu

gornji enačbi zanemarimo in dobimo navadno eksponentno pojemanje

$$j = j_0 e^{-\mu_0 z}. \tag{5.48}$$

Pri zelo velikih vpadnih gostotah pa lahko zanemarimo prvi člen in dobimo, da je pojemanje zgolj linearno

$$j = j_0 - \mu_0 j_s z = j_0 - \frac{N}{2V} A\hbar\omega z. \tag{5.49}$$

V primeru močnega vpadnega toka je zasedenost spodnjega in zgornjega nivoja skoraj enaka in je absorpcija omejena s tem, kako hitro se atomi vračajo v osnovno stanje preko spontanega sevanja, kar je razvidno tudi iz zadnje oblike izraza (5.49).

5.6 Optično ojačevanje

V prejšnjih razdelkih smo obravnavali prehod svetlobe skozi dvonivojski plin. V primeru termičnega ravnovesja je zgornji nivo manj zaseden od spodnjega in v plinu pride do absorpcije svetlobe. Če pa nekako dosežemo primer, da je $N_2 > N_1$, se bo snop svetlobe pri prehodu skozi tako pripravljen plin ojačeval. Takemu primeru pravimo stanje obrnjene zasedenosti. Tako stanje seveda ni v termičnem ravnovesju in ga je treba vzdrževati z dovajanjem energije plinu. Dovajanju energije pravimo tudi optično črpanje. Načinov, kako dosežemo obrnjeno zasedenost z optičnim črpanjem je veliko. Oglejmo si nekaj primerov.

V plinih je najpogostejši način vzbujanja z električnim tokom. Elektroni, ki so glavni nosilci toka, se zaletavajo v atome ali ione in jih vzbujajo na višje nivoje, pri čemer lahko pride do obrnjene zasedenosti med nekim parom nivojev. Pogost proces v plinih je tudi prenos energije med atomi s trki. Vzemimo mešanico dveh plinov, pri katerih se nek nivo enih atomov ujema po energiji s stanjem drugih atomov. Vzbujen atom prve vrste lahko pri trku preda energijo brez sevanja atomu druge vrste, ki iz osnovnega stanja preide v ustrezen višji nivo. Če je pod tem nivojem še drugo vzbujeno stanje, bomo med njima dobili obrnjeno zasedenost, kadar je življenjski čas gornjega nivoja daljši od spodnjega.

V trdnih neprevodnih kristalih sta v optičnem področju absorpcija in sevanje pri določeni valovni dolžini navadno posledica primesi. Obrnjeno zasedenost para nivojev primesi največkrat dobimo tako, da kristal obsevamo s svetlobo s frekvenco, ki ustreza prehodu na nek nivo nad izbranim parom. Tak način optičnega črpanja deluje tudi v organskih barvilih.

V polprevodnikih dosežemo obrnjeno zasedenost med prevodnim in valenčnim pasom z vbrizgavanjem elektronov in vrzeli v območje p-n spoja z električnim tokom v prevodni smeri. Možen mehanizem vzbujanja so tudi kemične reakcije. Po reakciji lahko produkti ostanejo v vzbujenem stanju in lahko dobimo obrnjeno zasedenost med paroma stanj.

Nekoliko bolj podrobno si bomo nekaj teh mehanizmov ogledali v nadaljevanju na konkretnih laserjih. Zaenkrat si kot primer oglejmo le model optičnega črpanja plina atomov s tremi stanji.

5.7 Optično črpanje trinivojskega sistema

Naj imajo atomi poleg osnovnega stanja z energijo E_0, označimo ga $|0\rangle$, še dve vzbujeni stanji z energijo E_1 (stanje $|1\rangle$) in energijo $E_2 > E_1$ (stanje $|2\rangle$). Na plin svetimo s svetlobo, ki vzbuja atome iz stanja $|0\rangle$ v stanje $|2\rangle$, pri čemer je lahko spektralna gostota u_p črpalne svetlobe široka. Poleg tega naj se po plinu širi še monokromatska svetloba s frekvenco ω blizu frekvence prehoda ω_0 med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$ in z gostoto energije w. Ugotoviti želimo, pri kakšnih pogojih lahko dosežemo obrnjeno zasedenost med stanjema $|1\rangle$ in $|2\rangle$ in s tem ojačevanje svetlobe okoli frekvence ω_0.

Slika 5.6: Shema energijskih nivojev trinivojskega sistema in prehodov med njimi (a). V plinskih laserjih imamo navadno stanje obrnjene zasedenosti med drugim in prvim vzbujenim stanjem (b), v navadni trdninskih laserjih (npr. rubinskem) pa med prvim vzbujenim in osnovnim stanjem (c).

Zapišimo enačbe za spreminjanje zasedenosti posameznih stanj. Osnovno stanje se prazni zaradi absorpcije črpalne svetlobe in polni zaradi spontanih prehodov iz stanj $|1\rangle$ in $|2\rangle$, stimulirane prehode iz stanja $|2\rangle$ pa bomo zanemarili. Zasedenost stanja $|2\rangle$ se povečuje zaradi absorpcije s spodnjih nivojev in zmanjšuje zaradi spontanega in stimuliranega sevanja. Srednje stanje se polni s stimuliranimi in spontanimi prehodi iz stanja $|2\rangle$ in prazni zaradi absorpcije v $|2\rangle$ in spontanih prehodov v $|0\rangle$. Pri tem velja, da je vsota vseh treh zasedenosti enaka številu vseh atomov: $N_0 + N_1 + N_2 = N$. Zasedbene enačbe so torej

$$\frac{dN_0}{dt} = -rN + A_{20}N_2 + A_{10}N_1 \tag{5.50}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10}N_1 + B_{21}\,g(\omega)\,w\,(N_2 - N_1) + A_{21}N_2 \tag{5.51}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = rN_0 - A_{20}N_2 - A_{21}N_2 + B_{21}\,g(\omega)\,w\,(N_1 - N_2), \tag{5.52}$$

pri čemer predpostavili, da je $N_0 \approx N \gg N_1, N_2$ in zato lahko črpanje $B_{20}\,u_p(N_0 - N_2)$, ki je praktično konstantno, zapisali s koeficientom r. Mehanizem črpanja smo tako skrili v r in prav nič ni pomembno, na kakšen način poteka.

Zanima nas stacionarno stanje, ko so vsi trije časovni odvodi enaki nič. Brez škode lahko tudi zanemarimo spontano sevanje iz stanja $|2\rangle$ v osnovno stanje. Tako iz druge enačbe sistema (5.51) dobimo

$$B_{21}\,g(\omega)wN_2 + A_{21}N_2 = B_{21}\,g(\omega)wN_1 + A_{10}N_1 \tag{5.53}$$

in

$$N_2 = \frac{B_{21}\,g(\omega)w + A_{10}}{B_{21}\,g(\omega)w + A_{21}}N_1. \tag{5.54}$$

Ob upoštevanju zveze, ki jo dobimo iz prve enačbe sistema (5.50)

$$N_1 = \frac{rN}{A_{10}}, \tag{5.55}$$

zapišemo razliko zasedenosti kot

$$N_2 - N_1 = \left(\frac{N_2}{N_1} - 1\right)N_1 = \frac{A_{10} - A_{21}}{A_{21} + B_{21}g(\omega)w}\frac{rN}{A_{10}}. \tag{5.56}$$

Iz gornje enačbe sledi, da dobimo obrnjeno zasedenost, če je $A_{10} > A_{21}$, torej kadar je razpadni čas stanja $|1\rangle$ krajši kot razpadni čas stanja $|2\rangle$. Tak rezultat smo seveda lahko pričakovali.

V praktični primerih navadno velja $A_{10} \gg A_{21}$. Ob upoštevanju zveze $j = wc$ povežemo razliko zasedenosti z gostoto vpadnega svetlobnega toka

$$N_2 - N_1 = \frac{rN}{A_{21}}\frac{1}{1 + \frac{B_{21}g(\omega)j}{cA_{21}}} = \frac{rN}{A_{21}}\frac{1}{1 + j/j_s}. \tag{5.57}$$

Konstante $cA_{21}/B_{21}g(\omega)$ smo pospravili v j_s, ki ga bomo imenovali saturacijska gostota svetlobnega toka. Vidimo, da je dobljen izraz zelo podoben saturacijski gostoti za dvonivojski sistem (enačba 5.44), razlika je le v faktorju 2. Do te razlike pride zaradi različnega števila stanj in pogoj $N_1 + N_2 = N$ ne velja več.

Naloga 5.7.1 Pokaži, da je saturacijska gostota toka j_2 odvisna le od frekvence valovanja in širine atomske črte $\delta\omega$.

Poglejmo zdaj, kaj se ob vpadu na plast trinivojskega plina zgodi s svetlobo s frekvenco ω in gostoto svetlobnega toka $j = wc$. Račun je zelo podoben računu pri absorpciji (enačba 5.36). Zapišemo spremembo gostote toka na debelini dz

$$dj = \frac{1}{V}(N_2 - N_1)B_{21}g(\omega)\frac{\hbar\omega}{c}j\,dz, \tag{5.58}$$

pri čemer gostota toka $j = wc$ nastopa tudi v izrazu za razliko zasedenosti (enačba 5.57). Če to upoštevamo, dobimo diferencialno enačbo za gostoto toka

$$\frac{1}{j}\left(1 + \frac{j}{j_s}\right)dj = G\,dz \tag{5.59}$$

oziroma

$$\boxed{dj = \frac{G}{1 + \frac{j}{j_s}}\,j\,dz,} \tag{5.60}$$

ki je spet zelo podobna enačbi za absorpcijo (enačba 5.46). Z G smo označili t.i. koeficient ojačenja pri majhnih vpadnih gostotah toka. Podan je z

$$G = \frac{rNB_{21}\hbar\omega g(\omega)}{VcA_{21}}. \tag{5.61}$$

Rešitev diferencialne enačbe je prikazana na sliki (5.7).

Slika 5.7: Naraščanje gostote svetlobnega toka pri optičnem ojačanju

Obnašanje gostote svetlobnega toka ima, tako kot pri absorpciji, dva režima. Pri majhnih gostotah toka $j \ll j_s$ je naraščanje eksponentno

$$j(z) = j_0 e^{Gz}. \tag{5.62}$$

Pri velikih gostotah toka pride do nasičenja in gostota svetlobnega toka se ojačuje linearno z razdaljo

$$j(z) = \tilde{j}_0 + j_s Gz = \tilde{j}_0 + \frac{rN}{V}\hbar\omega z. \tag{5.63}$$

V tem primeru je gostota toka dovolj velika, da vsi atomi, ki jih s črpanjem spravimo v najvišje stanje, preidejo v stanje $|1\rangle$ s stimuliranim sevanjem. Pri konstantnem črpanju je tedaj linearno naraščanje gostote toka razumljivo.

5.8 Homogena in nehomogena razširitev spektralne črte

Doslej smo predpostavili, da svetijo vsi atomi obravnavane snovi pri isti frekvenci ω_0 in z isto spektralno širino, ki smo jo popisali s funkcijo $g(\omega)$, z vrhom pri ω_0. Če to drži, pravimo, da je razširitev spektralne črte homogena. Primera homogene razširitve sta naravna širina in razširitev zaradi trkov med atomi. Funkcija $g(\omega)$ je v tem primeru Lorentzove oblike

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \tag{5.64}$$

s širino črte γ.

Spektralna črta je lahko razširjena tudi zato, ker vsi atomi ne svetijo pri povsem enaki frekvenci. Tedaj govorimo o nehomogeni razširitvi. Najpomembnejši primer nehomogene razširitve je

Dopplerjeva razširitev v plinu. Atomi plina vedno sevajo pri praktično isti frekvenci, vendar jih zaradi gibanja opazovalec v mirujočem (laboratorijskem) sistemu v skladu z Dopplerjevim pojavom zazna pri različnih frekvencah. Tako so frekvence ω posameznih atomov odvisne od hitrosti v atoma glede na smer opazovanja. Zapišemo jih kot

$$\omega = \omega_0 - \frac{v}{c}\omega_0 = \omega_0 - k_0 v. \tag{5.65}$$

Označimo z $\mathcal{N}(v)$ porazdelitev gostote atomov po hitrostih v smeri opazovanja. V termičnem ravnovesju je $\mathcal{N}(v)$ Maxwellova porazdelitev

$$\mathcal{N}(v) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}. \tag{5.66}$$

Porazdelitev atomov po frekvencah dobimo tako, da hitrost izrazimo iz enačbe (5.65), pri čemer dobljeno funkcijo $g_D(\omega)$ normiramo tako. Dobimo

$$g_D(\omega) = \frac{c}{\omega_0}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mc^2}{2k_B T}\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0}}. \tag{5.67}$$

Dopplerjeva razširitev v plinu je torej Gaussove oblike. Njena širina pri polovični višini[4] je

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\frac{2k_B T \ln 2}{mc^2}}\,\omega_0. \tag{5.68}$$

Naloga 5.8.1 Izpelji obliko nehomogeno razširjene črte za Dopplerjevo razširitev (enačba 5.67) in pokaži, da je njena širina podana z enačbo (5.68).

Izračunajmo Dopplerjevo razširitev na primeru He-Ne laserja. Za prehod atoma neona pri 632,8 nm in temperaturi 300 K dobimo $\Delta\omega_D = 8 \times 10^9$ Hz. Nehomogena Dopplerjeva razširitev v redkem plinu je navadno nekaj redov velikosti večja od homogene naravne širine in razširitve zaradi trkov.

5.9 *Nasičenje nehomogeno razširjene absorpcijske črte

V razdelku (5.5) smo obravnavali nasičenje absorpcije pri homogeno razširjenem prehodu. Pri nasičenju absorpcije, kadar prevladuje nehomogena razširitev, nastopijo pomembni novi pojavi, zato si to podrobneje oglejmo.

Naj na plin vpada močan snop monokromatske svetlobe s frekvenco ω, ki je blizu osrednje frekvence ω_0 Dopplerjevo razširjene črte. S svetlobo lahko sodeluje le skupina atomov, pri kateri se Dopplerjevo premaknjena frekvenca od ω ne razlikuje več kot za homogeno širino, ki jo opisuje funkcija $g(\omega)$. Zato ne moremo zapisati zasedbenih enačb za vse atome hkrati, ampak le za tiste, ki imajo hitrost med v in $v + dv$ in ki absorbirajo pri frekvenci $\omega_0 - kv$.

Naj sta $\mathcal{N}_1(v)$ in $\mathcal{N}_2(v)$ hitrostni porazdelitvi atomov v spodnjem in v zgornjem stanju. Enačba za spreminjanje gostote $\mathcal{N}_2(v)$ je analogna enačbi (5.28) za celotno zasedenost v homogenem primeru

$$\frac{d\mathcal{N}_2(v)}{dt} = -A\mathcal{N}_2(v) - B\,g(\omega - \omega_0 + kv)\frac{j_\omega}{c}\left[\mathcal{N}_2(v) - \mathcal{N}_1(v)\right], \tag{5.69}$$

[4] To širino imenujemo FWHM – *Full width at half maximum.*

kjer je j_ω gostota vpadnega svetlobnega toka. Upoštevali smo, da je zaradi Dopplerjevega pojava prehod premaknjen k frekvenci $\omega_0 - kv$. Velja tudi

$$\mathscr{N}_1(v) + \mathscr{N}_2(v) = \mathscr{N}(v) \qquad \text{in} \qquad \frac{d\mathscr{N}_2(v)}{dt} = -\frac{d\mathscr{N}_1(v)}{dt}. \tag{5.70}$$

Vpeljimo $\mathscr{Z}(v) = \mathscr{N}_2(v) - \mathscr{N}_1(v)$. Podobno kot v enačbi (5.42) zapišemo

$$\mathscr{N}_2(v) = 1/2\mathscr{N}(v) + 1/2\mathscr{Z}(v) \tag{5.71}$$

in dobimo

$$\dot{\mathscr{Z}}(v) = -A\mathscr{Z}(v) - A\mathscr{N}(v) - 2Bg(\omega - \omega_0 + kv)\frac{j_\omega}{c}\mathscr{Z}(v). \tag{5.72}$$

V stacionarnem stanju je

$$\mathscr{Z}(v) = \frac{\mathscr{N}(v)}{1 + \frac{2B}{Ac}g(\omega - \omega_0 + kv)j_\omega}. \tag{5.73}$$

Če je nasičenje majhno, lahko imenovalec v gornji enačbi razvijemo

$$\mathscr{Z}(v) \simeq \mathscr{N}(v)[1 - \frac{2B}{Ac}g(\omega - \omega_0 + kv)j_\omega]. \tag{5.74}$$

Porazdelitev $\mathscr{Z}(v)$je podobna nemoteni porazdelitvi atomov po hitrosti $\mathscr{N}(v)$, le da je pri hitrosti $v = (\omega_0 - \omega)/k$ zmanjšana zaradi vpliva vpadne svetlobe, ki jo atomi s to hitrostjo lahko absorbirajo in s tem prehajajo v gornje stanje. V porazdelitvi atomov v spodnjem stanju tako nastane vdolbina, pravijo ji tudi Bennetova vdolbina, v gornjem stanju, ki je bilo na začetku prazno, pa dobimo ustrezen ozek vrh (Slika **??**). Širina vdolbine je določena s homogeno širino prehoda, to je s funkcijo $g(\omega - \omega_0 + kv)$, globina pa z gostoto vpadnega toka.

Zapišimo sedaj absorpcijski koeficient pri neki frekvenci ω', ki ga izmerimo tako, da na plin posvetimo z dodatnim, šibkim testnim snopom. Upoštevati moramo, da k absorpciji prispevajo vsi atomi, katerih hitrost je taka, da je prehod dovolj blizu ω'. Zato dobimo absorpcijski koeficient s seštevanjem po porazdelitvi $\mathscr{Z}(v)$

$$\mu(\omega') = \frac{\hbar\omega'}{c}\int \mathscr{Z}(v)Bg(\omega' - \omega_0 + k'v)\,dv \tag{5.75}$$

Homogena razširitev je navadno dosti manjša od Dopplerjeve širine. V prvem približku vzemimo, da lahko $g(\omega)$ nadomestimo kar z $\delta(\omega)$, pri čemer to ne smemo narediti tudi v imenovalcu izraza za $\mathscr{Z}(v)$. Tako dobimo V drugi vrstici smo uporabili približek 5.74. Odvisnost $\mu(\omega')$, ki jo izmerimo tako, da spreminjamo frekvenco testnega snopa ω', je Gaussove oblike z vdolbino pri ω in je podobna porazdelitvi $\mathscr{Z}(v)$, kot jo kaže slika **??**. Vdolbina ima obliko homogeno razširjene črte. Merjenje nasičenja absorpcije s testnim žarkom torej omogoča dobiti obliko homogene črte kljub mnogo večji nehomogeni Dopplerjevi razširitvi in je zato v moderni spektroskopiji velikega pomena.

Absorpcijski koeficient za prvi, močan vpadni snop dobimo s tem, da v gornjem izrazu postavimo $\omega' = \omega$. $\mathscr{N}((\omega - \omega')/k)$ opisuje običajno Gaussovo obliko Dopplerjevo razširjene črte, izraz v oglatem oklepaju pa da zmanjšanje absorpcije zaradi nasičenja, ki je odvisno le od vrednosti $g(0)$ in zato enako pri vseh ω. Z enim samim snopom izmerjena črta je kljub nasičenju še vedno Gaussove oblike. Vdolbina, ki jo izžge svetloba v hitrostni porazdelitvi atomov, s takim preprostim opazovanjem ne moremo zaznati.

Namesto z dvema različnima snopoma, od katerih lahko enemu spreminjamo frekvenco, lahko vdolbino v porazdelitvi zaznamo tudi z enim snopom spremenljive frekvence, ki se po prvem prehodu skozi plin odbije od ogledala in vrne v nasprotni smeri. S tem se v porazdelitvi atomov v spodnjem stanju simetrično pri hitrostih $\pm(\omega_0-\omega)/k$ pojavita dve vdolbini. Kadar je ω blizu ω_0, se začneta obe vdolbini prekrivati, stopnja nasičenja se poveča in s tem se celotna absorpcija po dveh prehodih zmanjša (Slika **??**).

Zapišimo še enačbe za ta primer. Snop povzroči spremembo zasedenosti pri prehodu skozi plin v obeh smereh, zato je sedaj

$$\mathscr{Z}(v) \simeq \mathscr{N}(v)\{1-\frac{2B}{Ac}j_\omega[g(\omega-\omega_0+kv)+g(\omega-\omega_0-kv)]\}. \tag{5.76}$$

Enako kot prej je absorpcijski koeficient za širjenje svetlobe v pozitivni smeri

$$\begin{aligned}\mu_+(\omega) &= \frac{\hbar\omega}{c}B\int \mathscr{Z}(v)g(\omega-\omega_0+kv)\,dv \\ &\simeq \hbar B\mathscr{N}(\frac{\omega-\omega 0}{k})\{1-\frac{2B}{Ac}[g(0)+g(2(\omega-\omega_0))]j_\omega\}\,. \end{aligned}\tag{5.77}$$

Ker je $\mathscr{Z}(v)=\mathscr{Z}(-v)$, je izraz za absorpcijo v negativni smeri enak. Pri $\omega=\omega_0$ je nasičenje večje in absorpcija se zato zmanjša. Izmerjeni absorpcijski profil ima na sredini vdolbino, ki je zopet podobna homogeno razširjeni črti. Faktor 2 v argumentu funkcije $g(2(\omega-\omega_0))$ je posledica našega grobega približka, ko smo v integraciji $g(\omega-\omega_0+kv)$ nadomestili kar z δ funkcijo. Natančnejši račun pokaže, da je vrh pri ω_0 kar oblike $g(\omega-\omega_0)$ (Naloga).

5.10 Izpeljava verjetnosti za prehod

Verjetnosti za prehod atoma iz enega stanja v drugo s sevanjem, ki smo jih opisali s fenomenološkimi Einsteinovimi koeficienti A_{21} in B_{21} (razdelek 5.3), je mogoče izpeljati tudi drugače. Pri tem se poslužimo kvantne elektrodinamike, kar pomeni kvantno obravnavo tako atoma kot elektromagnetnega polja. Povsem strog račun je zahteven in presega okvir te knjige, zato si na kratko oglejmo le, kako pridemo do rezultata s perturbacijsko metodo.

Postavimo dvonivojski atom v votlino z elektromagnetnim poljem. Izračunajmo verjetnost, da zaradi interakcije s poljem atom preide iz stanja $|2\rangle$ v stanje $|1\rangle$, pri čemer se število fotonov v izbranem stanju elektromagnetnega polja α poveča z n_α na $n_\alpha+1$. V vseh ostalih stanjih polja naj bo število fotonov enako nič.

Med atomom in poljem privzemimo električno dipolno interakcijo

$$\hat{H}_i = -e\hat{E}(\mathbf{r},t)\hat{x}, \tag{5.78}$$

kjer je $\hat{x}$ operator koordinate elektrona v atomu. Privzeli smo, da je nihajoče polje polarizirano v smeri osi x. Stanja celotnega sistema, to je atoma in polja, zapišimo v obliki produkta atomskih stanj in stanja elektromagnetnega polja, pri čemeer moramo navesti število fotonov v vsakem nihanju votline α

$$|i,\{n_\alpha\}\rangle \equiv |i\rangle|\{n_\alpha\}\rangle. \tag{5.79}$$

Začetno stanje celotnega sistem naj bo tako $|2,n_\alpha\rangle$, kar pomeni, da je atom v gornjem stanju, polje pa ima n_α fotonov v enem samem stanju α. Ustrezno končno stanje je $|1,n_\alpha+1\rangle$.

V prvem redu teorije motenj je verjetnost za prehod iz začetnega v končno stanje na časovno enoto enaka

$$w_{21} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle 1, n_\alpha + 1 | \hat{H}_i | 2, n_\alpha \rangle|^2 \, \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \tag{5.80}$$

Z delta funkcijo izberemo le prehoda, pri katerih se ohranja energija.

Operator elektromagnetnega polja lahko po enačbi (5.9) razvijemo po lastnih nihanjih votline

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\sqrt{V\varepsilon_0}} \sum_\alpha \hat{p}_\alpha(t) E_\alpha(\mathbf{r}), \tag{5.81}$$

kjer je $\hat{p}_\alpha$ operator impulza nihanja α, E_α pa funkcija, ki popisuje krajevno odvisnost polja. Vemo, da se vsako elektromagnetno nihanje votline obnaša kot harmonski oscilator. Zato lahko vpeljemo kreacijske in anihilacijske operatorje

$$\hat{a}_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}} (\omega_\alpha \hat{q}_\alpha - i\hat{p}_\alpha) \tag{5.82}$$

$$\hat{a}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}} (\omega_\alpha \hat{q}_\alpha + i\hat{p}_\alpha). \tag{5.83}$$

Kreacijski operatorji povečujejo, anihilacijski pa znižujejo število fotonov v danem stanju

$$\hat{a}_\alpha^\dagger |n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha + 1} |n_\alpha + 1\rangle \quad \text{in} \tag{5.84}$$

$$\hat{a}_\alpha |n_\alpha\rangle = \sqrt{n_\alpha} |n_\alpha - 1\rangle. \tag{5.85}$$

Edini od nič različni matrični elementi so tako oblike

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha + 1 | \hat{a}_\alpha^\dagger | n_\alpha \rangle &= \sqrt{n_\alpha + 1} \quad \text{in} \\ \langle n_\alpha - 1 | \hat{a}_\alpha | n_\alpha \rangle &= \sqrt{n_\alpha}. \end{aligned} \tag{5.86}$$

Operatorje $\hat{p}_\alpha$ zdaj lahko izrazimo s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji in jih vstavimo v razvoj električnega polja (enačba 5.81). Dobimo

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = -i \sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}} \left(\hat{a}_\alpha^\dagger - \hat{a}_\alpha\right) E_\alpha(\mathbf{r}). \tag{5.87}$$

Nadaljujemo z izračunom potrebnega matričnega elementa. Operator koordinate $\hat{x}$ deluje le na atomski del stanja, $\hat{E}$ pa le na elektromagnetno polje, zato velja

$$\langle 1, n_\alpha + 1 | \hat{H}_i | 2, n_\alpha \rangle = -e \langle 1, n_\alpha + 1 | \hat{E}\hat{x} | 2, n_\alpha \rangle \tag{5.88}$$

$$= -e \langle 1 | \hat{x} | 2 \rangle \langle n_\alpha + 1 | \hat{E} | n_\alpha \rangle. \tag{5.89}$$

Vstavimo polje, ki smo ga izrazili s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji (enačba 5.87), upoštevamo zvezi (5.86) in dobimo

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha + 1 | \hat{E} | n_\alpha \rangle &= -i \sum_\beta \sqrt{\frac{\hbar\omega_\beta}{2V\varepsilon_0}} \langle n_\alpha + 1 | \hat{a}_\beta^\dagger - \hat{a}_\beta | n_\alpha \rangle E_\beta(\mathbf{r}) \\ &= -i \sqrt{\frac{\hbar\omega_\alpha}{2V\varepsilon_0}} \sqrt{n_\alpha + 1} \, E_\alpha(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{5.90}$$

Od vseh operatorjev v razvoju polja dobimo namreč od nič različen matrični element le za kreacijski operator za stanje α.

Vpeljimo še simbol za matrični element koordinate med atomskimi stanji $\langle 1|\hat{x}|2\rangle = x_{12}$. Iskana verjetnost za prehod iz začetnega stanja, v katerem smo imeli vzbujen atom in n_α fotonov, v končno stanje z atomom v osnovnem stanju in $n_\alpha + 1$ fotonov v stanju α je tako

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{V\varepsilon_0}(n_\alpha + 1)\, E_\alpha^2(\mathbf{r})\, \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \tag{5.91}$$

Verjetnost za prehod je sorazmerna z $n_\alpha + 1$ in je od nič različna, tudi če je število kvantov polja enako nič. Tedaj imamo seveda spontano sevanje. Prispevek, ki je sorazmeren s številom že prisotnih fotonov, pa predstavlja stimulirano sevanje. Prehodna verjetnost vsebuje še kvadrat prostorske odvisnosti polja $E_\alpha^2(\mathbf{r})$. Če ne poznamo natančnega položaja atoma ali če imamo plin atomov, ki je enakomerno porazdeljen po votlini, lahko ta člen nadomestimo kar s povprečno vrednostjo. Kadar imamo stoječe valovanje, je to 1/2.

Spontana emisija je možna v vsa elektromagnetna nihanja votline s pravo frekvenco. Celotno verjetnost za prehod atoma iz vzbujenega v osnovno stanje dobimo, če seštejemo verjetnosti za prehod z izsevanim fotonom v določenem stanju. Spomnimo se, da je ta verjetnost ravno enaka Einsteinovem koeficientu A_{21} (enačba 5.34)

$$A_{21} = \sum_\alpha w_{21} = \sum_\alpha \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V\varepsilon_0}\, \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_\alpha). \tag{5.92}$$

Za prostorsko odvisnost polja $E^2(\mathbf{r})$ smo vzeli povprečje 1/2. Vsoto po nihanjih lahko z uporabo enačbe (5.7) spremenimo v integral in upoštevamo enačbo (5.6). Dobimo

$$A_{21} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\hbar\varepsilon_0} \int \rho(\omega_\alpha)\omega_\alpha\, \delta(\omega_0 - \omega_\alpha)\, d\omega_\alpha = \frac{e^2 \omega_0^3 x_{12}^2}{2\pi\varepsilon_0 \hbar c^3}. \tag{5.93}$$

Z $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ smo označili frekvenco prehoda. S tem smo izpeljali vrednost Einsteinovega koeficienta A_{21}.

Zaradi spontanega sevanja vzbujeno atomsko stanje ne more biti popolnoma stacionarno. Poleg tega energija stanja s končnim razpadnim časom ni natančno določeno. Zato moramo verjetnost za stimulirano sevanje (enačba 5.91) malo popraviti. Delta funkcijo energije nadomestimo s končno široko funkcijo $g(\omega)$, ki ima vrh pri ω_0 in je njen integral enak 1. Pri tem dobimo zaradi spremembe integracijske spremenljivke še en dodaten faktor $1/\hbar$. Tako imamo

$$w_{21} = \frac{\pi e^2 \omega_\alpha x_{12}^2}{2V\varepsilon_0\hbar}(n_\alpha + 1) g(\omega_\alpha). \tag{5.94}$$

Einsteinov koeficient za stimulirano sevanje lahko izrazimo iz enačbe (5.24), če upoštevamo, da je gostota energije polja $n_\alpha \hbar\omega_\alpha / V$

$$B_{21} g(\omega_\alpha) = \frac{V w_{21}}{n_\alpha \hbar\omega_\alpha g(\omega_\alpha)} = \frac{\pi e^2 x_{12}^2}{2\varepsilon_0 \hbar^2}. \tag{5.95}$$

Poglejmo še razmerje izračunanih Einsteinovih koeficientov iz enačb (5.93) in (5.95). Vidimo, da se ujema z razmerjem, ki smo ga izpeljali z uporabo Planckove formule (enačba 5.34). Prehojena pot jasno kaže zvezo med spontanim in stimuliranim sevanjem ter gostoto stanj elektromagnetnega polja.

6. Laser

6.1 Zasedbene enačbe

6.2 Spektralna širina enega laserskega nihanja

6.3 Primerjava laserjev in običajnih svetil

6.4 Mnogofrekvenčni laser

6.5 Relaksacijske oscilacije

6.6 Delovanje v sunkih s preklopom dobrote

6.7 Uklepanje faz

6.8 Stabilizacija frekvence laserja na nasičeno absorpcijo

6.9 Absolutna meritev frekvence laserja in definicija metra

7. Primeri laserjev

7.1 Nd:YAG laser

7.2 He-Ne laser

7.3 Argonski ionski laser

7.4 Laser na ogljikov dioksid

7.5 Ekscimerski laser

7.6 Laserji na organska barvila

7.7 Titan-safirni laser

7.8 Polvodniški laser

8. Nelinearna optika

Pri obravnavi svetlobnega valovanja v snovi smo doslej vedno privzeli linearno zvezo med polarizacijo in jakostjo električnega polja. To je seveda približek, ki je dovolj dober le pri razmeroma majhnih jakostih polja. Kadar doseže jakost polja velike vrednosti – in v laserskih snopih jih nedvomno lahko doseže – je treba upoštevati tudi višje člene v razvoju. Takrat govorimo o nelinearni optiki. V tem poglavju bomo spoznali, kakšne zanimive pojave povzroči nelinearni del polarizacije, med drugim podvajanje frekvenc, optično usmerjanje, samozbiranje laserkega snopa in fazno konjugacijo.

8.1 Nelinarna susceptibilnost

V linearnem približku odziva snovi velja, da je polarizacija snovi $\mathbf{P}$ linearna funkcija električne poljske jakosti svetlobe $\mathbf{E}$. Takrat zapišemo (enačba 1.7)

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\underline{\varepsilon} - 1) \cdot \mathbf{E}. \tag{8.1}$$

Če uvedemo še tenzor linearne susceptibilnosti

$$\chi^{(1)} = \underline{\varepsilon} - 1, \tag{8.2}$$

lahko linearni odziv snovi zapišemo strnjeno kot

$$\mathbf{P}_\mathrm{L} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E}. \tag{8.3}$$

Ta približek je dober za majhne jakosti električnega polja. Pri večjih poljih postanejo pomembni tudi členi višjega reda v razvoju polarizacije po $\mathbf{E}$

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{P}_\mathrm{L} + \mathbf{P}_\mathrm{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E}\,\mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\,\mathbf{E}\,\mathbf{E} + \ldots} \tag{8.4}$$

Vpeljali smo nelinearni susceptibilnosti $\chi^{(2)}$ in $\chi^{(3)}$, ki sta tenzorja tretjega in četrtega ranga. Za bolj nazorno predstavo izpišimo nelinearna dela še po komponentah

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},2})_i = \varepsilon_0 \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k \tag{8.5}$$

in

$$(\mathbf{P}_{\mathrm{NL},3})_i = \varepsilon_0 \chi^{(3)}_{ijkl} E_j E_k E_l, \tag{8.6}$$

pri čemer smo seveda uporabili Einsteinov zapis seštevanja po indeksih.

Podrobneje si oglejmo tenzor susceptibilnosti $\chi^{(2)}$. Ta tenzor je od nič različen le v snoveh, ki nimajo centra inverzije. Značilne vrednosti za snovi, ki jih pogosto uporabimo v nelinearni optiki (npr. kristali KDP, BBO in $LiNbO_3$[1]) so okoli $\chi^{(2)} \sim 10^{-12}$ m/V = 1 pm/V.

[1] KH_2PO_4 – kalijev dihidrogenfosfat; β-BaB_2O_4 – beta barijev borat; $LiNbO_3$ – litijev niobat

Naloga 8.1.1 Pokaži, da so električne poljske jakosti, pri katerih dosežemo znaten nelinearen prispevek k polarizaciji

$$\frac{P_{NL}}{P_L} \sim 10^{-6}$$

okoli 1 MW/cm^2. Take vrednosti so z navadnim svetilom povsem nedosegljive, za laser pa niso nič posebnega. Zato je bilo mogoče nelinearne optične pojave opazovati šele po iznajdbi laserjev. Potrebno polje je tudi primerljivo polju v atomu, kar nas seveda ne preseneča.

Povejmo še nekaj o komponentah tenzorja $\chi^{(2)}$. Ker lahko v produktu (enačba 8.5) vrstni red $E_j E_k$ zamenjamo, mora biti tenzor invarianten na to zamenjavo

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj}. \tag{8.7}$$

Posledično vpeljemo poenostavljen zapis, pri katerem prvi indeks prepišemo $(x = 1, y = 2, z = 3)$, zadnja dva indeksa pa zapišemo kot enega. Dogovorjene oznake so $xx = 1, yy = 2, zz = 3, yz = 4, xz = 5, xy = 6$. Tako na primer χ_{xxz} zapišemo kot χ_{15}. Namesto splošnega tenzorja tretjega ranga smo torej uvedli matriko velikosti 3×6. Vendar koeficienti matrike niso poljubni. Zaradi simetrijskih lastnosti kristala se matrika poenostavi in navadno je le nekaj komponent različnih od nič. Kadar je v snovi absorpcija pri vseh treh frekvencah dovolj majhna, lahko matriko poenostavimo z dodatnim približkom, tako imenovano Kleinmanovo domnevo[2]. Ta pravi, da je

$$\chi_{ijk} = \chi_{ikj} = \chi_{kij} = \chi_{kji} = \chi_{jik} = \chi_{jki}. \tag{8.8}$$

Kristal	Grupa	Neničelne komponente tenzorja χ	Vrednosti (10^{-12} m/V)
$BaTiO_3$	4mm	$\chi_{xxz} = \chi_{yyz} = \chi_{xzx} = \chi_{yzy} = \chi_{15} = \chi_{24}$ $\chi_{zxx} = \chi_{zyy} = \chi_{31} = \chi_{32}$ $\chi_{zzz} = \chi_{33}$	$\chi_{15} = 42,6$ $\chi_{31} = 45,2$ $\chi_{33} = 16,0$
KDP	$\bar{4}$2m	$\chi_{xyz} = \chi_{yxz} = \chi_{xzy} = \chi_{yzx} = \chi_{14} = \chi_{25}$ $\chi_{zxy} = \chi_{zyx} = \chi_{36}$	$\chi_{14} = 0,88$ $\chi_{36} = 1,12$
Telur	32	$\chi_{xxx} = -\chi_{xyy} = -\chi_{yyx} = -\chi_{yxy} =$ $= \chi_{11} = -\chi_{12} = -\chi_{26}$ $\chi_{xyz} = \chi_{xzy} = -\chi_{yxz} = -\chi_{yzx} = \chi_{14} = -\chi_{25}$	$\chi_{11} = 1300$ $\chi_{14} \approx 0$
$LiNbO_3$	3m	$\chi_{xxz} = \chi_{yyz} = \chi_{xzx} = \chi_{yzy} = \chi_{15} = \chi_{24}$ $\chi_{zxx} = \chi_{zyy} = \chi_{31} = \chi_{32}$ $\chi_{zzz} = \chi_{33}$ $-\chi_{xxy} = -\chi_{xyx} = \chi_{yyy} = -\chi_{yxx} =$ $= -\chi_{16} = \chi_{22} = -\chi_{21}$	$\chi_{15} \approx \chi_{31}$ $\chi_{31} = -11,9$ $\chi_{33} = 68,8$ $\chi_{22} = 5,52$

Tabela 8.1: Koeficienti nelinearne susceptibilnosti za nekaj izbranih snovi

[2] D. A. Kleinman, Phys. Rev. 126, 1977 (1962).

Poglejmo primer. Vzemimo barijev titanat ($BaTiO_3$) s točkovno grupo 4mm. To pomeni, da ima 4-števno os simetrije in dve zrcalni ravnini, od katerih ena preslika $x \to -x$ ali $y \to -y$, druga pa $x \to y$ in $y \to x$. Od nič različni elementi susceptibilnosti so tako samo:

$$\chi_{xxz} = \chi_{xzx} = \chi_{yyz} = \chi_{yzy}; \quad \chi_{zzz}; \quad \chi_{zxx} = \chi_{zyy}. \tag{8.9}$$

Z upoštevanjem Kleinmanove domneve se število različnih členov še zmanjša in ostaneta le dva

$$\chi_{xxz} = \chi_{xzx} = \chi_{yyz} = \chi_{yzy} = \chi_{zxx} = \chi_{zyy} \quad \text{in} \quad \chi_{zzz}. \tag{8.10}$$

V tabeli (8.1)[3] so navedene izmerjene vrednosti in vidimo, da Kleinmanova domneva ni povsem točna, ampak zgolj dober približek.

8.2 Nelinearni optični pojavi drugega reda

Vzemimo optično nelinearni kristal s $\chi^{(2)} \neq 0$. V smeri pravokotno glede na njegovo mejno ploskev naj vpadata dve valovanji s frekvencama ω_1 in ω_2. Zaradi nelinearne sklopitve nastajajo v snovi nova valovanja z različnimi kombinacijami frekvenc (glej sliko 8.2).

Slika 8.1: Shematski prikaz nastanka valovanj pri nelinearnih optičnih pojavih drugega reda

Slika 8.2: Shematski prikaz spektra izhodne svetlobe

Nastanku valov pri podvojeni frekvenci pravimo tudi SHG (*Second harmonic generation*), nastanku valov pri vsoti frekvenc SFG (*Sum frequency generation*), pri razliki frekvenc DFG (*Difference frequency generation*) in pojavu statičnega polja pri $\omega = 0$ optično usmerjanje (*Optical rectification*).

Za opis nelinearnih pojavov drugega reda moramo rešiti valovno enačbo

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2}. \tag{8.11}$$

Pri tem je $\mathbf{P}_{\mathrm{NL}} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E}$.

[3] Izmerjene vrednosti, ki jih najdemo v literaturi, se med seboj pogosto znatno razlikujejo.

Naloga 8.2.1 Iz Maxwellovih enačb (1.1 do 1.4) izpelji nelinearno valovno enačbo (8.11). Pri tem si pomagaj z identiteto

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Nehomogene valovne enačbe v splošnem ne znamo rešiti in se moramo zateči k približkom. Prva poenostavitev, ki jo bomo naredili, je omejitev na vzporedna vpadna žarka, ki se širita v smeri osi z. Poleg tega se bomo omejili na izračun samo enega nastalega valovanja in privzeli, da je neodvisno od drugih nastalih valovanj. Ta omejitev ni huda. Dokler sta namreč amplitudi valov pri vsoti in razliki frekvenc majhni, ju lahko obravnavamo vsako posebej. Ni sicer nujno, da sta obe nastali amplitudi vedno majhni, vendar je lahko, kot bomo videli kasneje, le en val naenkrat primerljiv z vpadnim. V snovi so tako prisotna tri valovanja: dve vpadni in tretje, novo nastalo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1}{2}\left[A_1(z)\,e^{i(k_1 z-\omega_1 t)} + A_1^*(z)\,e^{-i(k_1 z-\omega_1 t)}\right] \\
\mathbf{E}_2 &= \frac{\mathbf{e}_2}{2}\left[A_2(z)\,e^{i(k_2 z-\omega_2 t)} + A_2^*(z)\,e^{-i(k_2 z-\omega_2 t)}\right] \\
\mathbf{E}_3 &= \frac{\mathbf{e}_3}{2}\left[A_3(z)\,e^{i(k_3 z-\omega_3 t)} + A_3^*(z)\,e^{-i(k_3 z-\omega_3 t)}\right].
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Polja smo zapisali v realni obliki, to je s kompleksno konjugiranimi deli, saj valovna enačba (8.11) ni linearna. Upoštevali smo tudi, da so zaradi nelinearne polarizacije amplitude funkcije kraja, za katere pa lahko privzamemo, da se le počasi spreminjajo. Njihova kompleksna vrednost dopušča pojav dodatnega faznega zamika. Za valovna števila naj seveda velja $k_i^2 = \varepsilon_i \omega^2/c^2$, pri čemer je ε_i dielektrična konstanta pri frekvenci ω_i in polarizaciji $\mathbf{e}_i$. S tem vsak od treh valov pri konstantni amplitudi reši linearni del valovne enačbe. Naša naloga je ugotoviti, kako se zaradi nelinearnosti spreminjajo amplitude posameznih valovanj. Dogovorimo se še, da bomo v tem poglavju z indeksi 1, 2 ... ločevali valove z različnimi frekvencami in polarizacijami, kartezične komponente vektorjev pa bomo označevali z x, y in z.

Nastavek za polje, ki bo rešil nelinearno valovno enačbo, je tako

$$\mathbf{E}(z,t) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_j}{2}\left[A_j(z)\,e^{i(k_j z-\omega_j t)} + A_j^*(z)\,e^{-i(k_j z-\omega_j t)}\right]. \tag{8.13}$$

Izračunajmo najprej

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_j}{2}\left[k_j^2 A_j(z) - 2ik_j \frac{dA_j(z)}{dz}\right] e^{i(k_j z-\omega_j t)} + \text{ k. k.} \tag{8.14}$$

S k. k. smo označili kompleksno konjugirani del. Upoštevali smo, da se $A_j(z)$ le počasi spreminja s krajem in smo zato njen drugi odvod zanemarili. Izračunamo še drugi odvod po času

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_j}{2}\left(-\omega_j^2\right)\left[A_j(z)\,e^{i(k_j z-\omega_j t)} + \text{ k. k.}\right]. \tag{8.15}$$

Nelinearna polarizacija vsebuje produkte polj, ki nihajo z vsemi možnimi vsotami in razlikami parov frekvenc ω_1, ω_2 in ω_3. Drugi odvod nelinearnega dela polarizacije po času je tako

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\mathrm{NL}}}{\partial t^2} &= \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{j'=1}^{3}\sum_{j''=1}^{3} \left(\frac{1}{4}\chi : \mathbf{e}_{j'}\,\mathbf{e}_{j''}\right) A_{j'}(z) A_{j''}(z) e^{i(k_{j'}+k_{j''})z - i(\omega_{j'}+\omega_{j''})t} + \\
&+ \left(\frac{1}{4}\chi : \mathbf{e}_{j'}\,\mathbf{e}_{j''}\right) A_{j'}(z) A_{j''}^*(z) e^{i(k_{j'}-k_{j''})z - i(\omega_{j'}-\omega_{j''})t} + \text{k.k.}
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Če želimo, da je valovna enačba (8.11) izpolnjena ob vsakem času t, se morajo ujemati izrazi pri istih časovnih odvisnostih, to je pri istih frekvencah. Izberimo najprej člene pri $\omega_j = \omega_3$, $j' = 1, j'' = 2$ in $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Dobimo

$$ik_3\mathbf{e}_3 \frac{dA_3}{dz} e^{ik_3 z} = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega_3^2}{4} \chi : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 A_1 A_2 e^{i(k_1+k_2)z}. \tag{8.17}$$

Množimo še obe strani skalarno z $\mathbf{e}_3$, upoštevajmo zvezo med k_3 in ω_3 in ravnajmo podobno še za druga dva valova. Tako dobimo sistem sklopljenih enačb za amplitude valovanj v optično nelinearnem sredstvu

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\omega_3 \chi_{ef}}{4c_0 n_3} A_1 A_2 e^{-i\Delta kz} \tag{8.18}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2 \chi_{ef}}{4c_0 n_2} A_1^* A_3 e^{i\Delta kz} \tag{8.19}$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1 \chi_{ef}}{4c_0 n_1} A_2^* A_3 e^{i\Delta kz}. \tag{8.20}$$

Pri tem je $\chi_{ef} = \mathbf{e}_3 \cdot \chi : \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$. Ker ni nujno, da so polarizacijski vektorji vzporedni s koordinatnimi osmi, tudi χ_{ef} niso čiste kartezične komponente tenzorja nelinearne susceptibilnosti. Z Δk smo označili razliko valovnih vektorjev

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2. \tag{8.21}$$

Čeprav je $\omega_3 - \omega_2 - \omega_1 = 0$, je Δk navadno različen od nič zaradi frekvenčne disperzije lomnega količnika. Videli bomo, da je to ključnega pomena za vrsto nelinearnih optičnih pojavov. Dobljeni sistem sklopljenih diferencialnih enačb opisuje več pojavov, odvisno od začetnih pogojev in relativnih intenzitet valovanj. Mi si bomo ogledali le nekaj najpomembnejših primerov.

Naloga 8.2.2 Pokaži, da nastavek za polje v nelinearni snovi (enačba 8.13) reši nelinearno valovno enačbo (8.11), in pokaži, da spreminjanje amplitude posameznih valovanj ustreza enačbam (8.18-8.20).

8.3 Optično podvajanje frekvenc

Obravnavajmo optično nelinearno sredstvo, na katerega vpadata valovanji E_1 in E_2. Naj bosta frekvenci vpadnih valovanj enaki $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, valovanji pa razlikujemo zaradi možnosti dveh različnih vpadnih polarizacij. Takrat je $\omega_3 = 2\omega$ in dobimo najpreprostejši in tudi najpomembnejši optični nelinearni pojav - podvajanje frekvence. Pogosto ga uporabljamo za pridobivanje laserskih snopov pri krajših valovnih dolžinah, na primer pri Nd:YAG laserju, ko infrardeče izhodno valovanje (1064 nm) pretvorimo v vidno svetlobo zelene barve (532 nm).

Zanima nas, kako se $A_3(z) = A_{2\omega}(z)$ spreminja pri začetnem pogoju $A_{2\omega}(0) = 0$. Privzemimo še, da se pretvori le manjši del vpadnega energijskega toka, tako da sta amplitudi $A_1 = A_2 = A_0$ približno konstantni. Tedaj lahko enačbo za $A_3(z)$ (enačba 8.18) brez težav integriramo do dolžine kristala L in dobimo

$$A_{2\omega}(L) = \frac{i\omega}{2} \frac{\chi_{ef} A_0^2}{c_0 n_{2\omega}} e^{-i\Delta kL/2} \frac{\sin\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\frac{\Delta kL}{2}} L, \tag{8.22}$$

kjer smo z $n_{2\omega}$ označili lomni količnik pri dvojni frekvenci. Iz tega izraza dobimo izhodno gostoto svetlobnega toka pri dvojni frekvenci

$$\langle j_{2\omega}(L)\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{2\omega}c_0|A_3|^2 = \frac{\omega^2\chi_{ef}^2}{2n_{2\omega}n_\omega^2c_0^3\varepsilon_0}\langle j_\omega\rangle^2L^2\left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\frac{\Delta kL}{2}}\right)^2. \tag{8.23}$$

Gostota energijskega toka frekvenčno podvojene svetlobe torej narašča s kvadratom intenzitete vpadne svetlobe. Razmerje med energijskim tokom pri podovojeni in osnovni frekvenci oziroma izkoristek pretvorbe je potem

$$\boxed{\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^2\chi_{ef}^2}{2Sn_{2\omega}n_\omega^2c_0^3\varepsilon_0}P_\omega L^2\left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta kL}{2}\right)}{\frac{\Delta kL}{2}}\right)^2,} \tag{8.24}$$

pri čemer je S presek snopa. V izrazih (8.23) in (8.24) nastopa faktor $\sin^2(\Delta kL/2)/(\Delta kL/2)^2$ (slika 8.3). Zaradi njega je na poti, ki je daljša od $\pi/\Delta k$, stopnja pretvorbe zelo majhna.

Slika 8.3: Izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje je sorazmeren s funkcijo $(\sin(x)/x)^2$, pri čemer je $x = \Delta kL/2$.

Poglejmo primer. Faktor Δk je različen od nič zaradi odvisnosti lomnih količnikov od frekvence. V KH_2PO_4 je redni lomni količnik pri 1000 nm 1,496, pri 500 nm pa 1,514. Vrednost, pri kateri pade intenziteta frekvečno podvojenega valovanja na nič $L_c = \pi/\Delta k$ je tako le okoli 30 mikrometrov. Na večjih dolžinah postane stopnja pretvorbe zanemarljivo majhna.

Za visok izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje je torej pomembno, da se faze čim bolj ujemajo in da je $\Delta k = 0$. Takrat je vrednost faktorja $\sin(\Delta kL/2)/(\Delta kL/2)$ največja in izkoristek pretvorbe narašča sorazmerno s kvadratom dolžine

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^2\chi_{ef}^2}{2Sn_{2\omega}n_\omega^2c_0^3\varepsilon_0}P_\omega L^2. \tag{8.25}$$

Za uporabno pretvorbo v frekvenčno podvojeno valovanje je torej treba doseči fazno ujemanje valovnih vektorjev pri osnovni in podvojeni frekvenci. Kako to naredimo, bomo spoznali v prihodnjem razdelku.

Naloga 8.3.1 Pokazali smo, da intenziteta frekvenčno podvojenega valovanja narašča sorazmerno s kvadratom debeline kristala. Takšna odvisnost velja le, če je intenziteta valovanja pri podvojeni frekvenci bistveno manjša od intenzitete vpadnega valovanja, oziroma $A_3 \ll A_1, A_2$. Pokaži, da v nasprotnem primeru intenziteta frekvenčno podvojenega valovanja $j_{2\omega}(L)$ narašča kot

$$j_{2\omega}(L) = j_0 \tanh^2\left(\chi_{ef}\omega\sqrt{\frac{j_0}{2n_3 n_1^2 c_0^3 \varepsilon_0}}L\right), \tag{8.26}$$

pri čemer je j_0 vpadna intenziteta valovanja pri osnovni frekvenci. Namig: upoštevaj ohranitev energije.

Slika 8.4: Izkoristek pretvorbe v frekvenčno podvojeno valovanje. Če privzamemo, da se intenziteta osnovnega žarka ne zmanjšuje, dobimo parabolično odvisnost (rdeča krivulja), ki je dober približek le za majhne intenzitete. Bolj natančen izračun pokaže, da je izkoristek pretvorbe sorazmeren s $\tanh^2(\kappa L)$. Izračun je bil narejen za $\kappa = 0,35$ /cm.

Povsem drugačno obnašanje dobimo v primeru, kadar pogoj ujemanja faz ni izpolnjen in $\Delta k \neq 0$. Takrat dolžino kristala L v izrazu (8.24) pokrajšamo in izkoristek pretvorbe z naraščajočim L sinusno niha med nič in neko največjo vrednostjo. Tak pojav lahko opazimo, če imamo klinast vzorec, ki se mu debelina spreminja, ali pa če vzorec sučemo in na ta način spreminjamo razliko faz. Ta pojav, imenujemo ga Makerjeve oscilacije[4], uporabljamo za določanje nelinearne susceptibilnost kristalov.

Ujemanje faz

Poglejmo, kako lahko dosežemo ujemanje faz, ki je nujno za učinkovito optično podvajanje frekvenc. Spomnimo se, da je pogoj za ujemanje faz

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k - 2 = k_3^{2\omega} - k_1^{\omega} - k_2^{\omega} = \frac{2\omega}{c}n_3 - \frac{\omega}{c}n_1 - \frac{\omega}{c}n_2 = 0. \tag{8.27}$$

Iz tega sledi pogoj za ujemanje faz

$$\boxed{n_1^{\omega} + n_2^{\omega} = n_3^{2\omega}.} \tag{8.28}$$

[4] P. D. Maker et al., Phys. Rev. Lett. 8, 21 (1962).

Da lahko zadostimo gornjemu pogoju, izkoristimo dvojni lom v anizotropnih kristalih (glej poglavje 1.8), pri čemer se zaradi enostavnosti omejimo le na optično enoosne kristale. Obravnavajmo samo kristale brez absorpcije in z normalno disperzijo, to pomeni, da oba lomna količnika naraščata s frekvenco.

Za razumevanje je najbolj nazoren grafični prikaz (slika 8.5). Podrobneje poglejmo primer s slike (a). Na njem so narisani lomni količniki za pozitivno anizotropni ($n_e > n_o$) enoosni kristal pri enojni in dvojni frekvenci v odvisnosti od kota glede na optično os. Rdeča barva nakazuje lomne količnike pri vpadni frekvenci, modra pa pri podvojeni. Ekscentričnost elipse za izredni lomni količnik in frekvenčna disperzija sta zaradi večje nazornosti močno pretirani. Opazimo, da je pri nekem kotu ϑ med smerjo širjenja svetlobe in optično osjo redni lomni količnik pri dvojni frekvenci enak izrednemu količniku pri osnovni frekvenci. Če torej izberemo izredno polarizacijo vpadnega vala (tako, ki leži v ravnini optične osi in smeri širjenja), bo za podvojeni val z redno polarizacijo (to je pravokotno na optično os) pri kotu ϑ_m izpolnjen pogoj ujemanja faz (enačba 8.28). Zapišimo to še z enačbo.

Slika 8.5: Štirje primeri, pri katerih je izpolnjen pogoj za ujemanje faz. (a) Ujemanje faz prvega reda za pozitivno anizotropno snov, (b) ujemanje faz prvega reda za negativno anizotropno snov ter ujemanje faz drugega reda za pozitivno (c) in negativno (d) anizotropno snov.

Lomni količnik za redni val pri podvojeni frekvenci mora biti enak lomnemu količniku za izredni val pri osnovni frekvenci. Pri tem je lomni količnik za izredni val odvisen od kota

$$\frac{1}{(n_o^{2\omega})^2} = \frac{1}{(n^{\omega}(\vartheta))^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{(n_o^{\omega})^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{(n_e^{\omega})^2}. \tag{8.29}$$

Tako dobimo

$$\cos^2 \vartheta_m = \frac{(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{\omega})^{-2}}{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_e^{\omega})^{-2}}. \tag{8.30}$$

Naloga 8.3.2 Pokaži, da v primeru negativne anizotropije pogoj za ujemanje faz zapišemo kot

$$\cos^2 \vartheta_m = \frac{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}}{(n_o^{2\omega})^{-2} - (n_e^{2\omega})^{-2}}. \tag{8.31}$$

S slike (8.5 c in d) lahko razberemo, da obstoja še en primer, pri katerem je izpolnjen pogoj za ujemanje faz. To je primer, pri katerem sta v vpadnem valu prisotni obe polarizaciji, redna in izredna, podvojeni val pa je spet redni. Tedaj mora biti za ujemanje faz redni lomni količnik pri dvojni frekvenci enak povprečju rednega in izrednega lomnega količnika pri osnovni frekvenci. Za praktično uporabo je ta izbira, kadar obstoja, celo ugodnejša, ker je pri njej kot ujemanja faz bliže $\pi/2$. Ujemanje faz je zato manj občutljivo na majhna odstopanja v kotu ali na temperaturne spremembe lomnih količnikov. Račun kota ϑ_m za ta primer je bolj zahteven, saj je treba rešiti enačbo četrte stopnje.

Efektivna susceptibilnost

Na moč podvojenega snopa poleg faznega faktorja vpliva tudi efektivna susceptibilnost χ_{ef}, ki jo moramo izračunati za vsak primer posebej. V optično enoosnem kristalu je kriterij ujemanja faz izpolnjen na stožcu okoli optične osi, pri čemer je stožec določen z izračunanim kotom ϑ_m (enačbi 8.30 in 8.31). Drugi kot, ki določa smer širjenja v ravnini, ki je pravokotna na optično os, pa izberemo tako, da izkoristimo največje komponente nelinearne susceptibilnosti.

Oglejmo si kot primer spet KH_2PO_4, ki je negativno anizotropen z vrednostmi $n_o^{\omega} = 1,4942$, $n_e^{\omega} = 1,4603$, $n_o^{2\omega} = 1,5129$ in $n_e^{2\omega} = 1,4709$ (slika 8.5 b). Valovna dolžina osnovnega snopa naj bo 1064 nm. Po podatkih, navedenih zgoraj, dobimo po enačbi (8.31) za kot ujemanja faz $\vartheta_m = 41,25°$. Nelinearna susceptibilnost ima v tetragonalni simetriji $\bar{4}2m$ od nič različne komponente χ_{xyz}, χ_{zxy} in χ_{yzx} (glej tabelo 8.1). Zaradi poenostavitve privzamimo, da so njihove vrednosti enake. Smer širjenja osnovnega in podvojenega vala naj bo (slika 8.6)

$$\mathbf{s} = (\cos\varphi \sin\vartheta_m, \sin\varphi \sin\vartheta_m, \cos\vartheta_m), \tag{8.32}$$

kjer je φ kot med osjo x in projekcijo $\mathbf{s}$ na ravnino xy, ki ga je treba še določiti. Poiščemo vrednost kota φ, pri katerem je moč frekvenčno podvojenega valovanja največja. Iz pogoja za ujemanje faz vidimo, da mora biti vpadna svetloba redno polarizirana, izhodna frekvenčno podvojena pa izredno polarizirana. Redna polarizacija je pravokotna na os z (optično os) in hkrati pravokotna na smer vektorja $\mathbf{s}$. Zapišemo jo kot

$$\mathbf{e}_o = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0), \tag{8.33}$$

izredno polarizacijo pa kot

$$\mathbf{e}_e = (-\cos\varphi \cos\vartheta_m, -\sin\varphi \cos\vartheta_m, \sin\vartheta_m). \tag{8.34}$$

Spomnimo se, da efektivno susceptibilnost izračunamo kot

$$\chi_{ef} = \sum_{ijk} \chi_{ijk} e_{ei} e_{oj} e_{ok}. \tag{8.35}$$

Slika 8.6: K izračunu efektivne susceptibilnosti. Rdeč vektror označuje polarizacijo vhodnega vala, moder pa polarizacijo frekvenčno podvojenega vala.

Krajši račun pokaže, da je zaradi oblike tenzorja nelinearne susceptibilnosti v izbranem primeru od nič različna le z komponenta nelinearne polarizacije. Dobimo

$$\chi_{ef} = \chi_{\mathrm{zxy}} e_{ez} e_{ox} e_{oy} + \chi_{\mathrm{zyx}} e_{ez} e_{oy} e_{ox} \tag{8.36}$$

in

$$P_{\mathrm{z}}^{2\omega} = -2\varepsilon_0 \chi_{\mathrm{zxy}} E_0^2 \cos\varphi \sin\varphi \sin\vartheta_m = -\varepsilon_0 \chi_{\mathrm{zxy}} E_0^2 \sin(2\varphi) \sin\vartheta_m. \tag{8.37}$$

Nelinearna polarizacija je v tem primeru največja, kadar je $\varphi = \pi/4$. Največji efektivni koeficient χ_{ef}, ki nastopa v izrazih za amplitudo in moč podvojene svetlobe (enačbi 8.23 in 8.24), je torej v izbranem primeru

$$\chi_{ef} = \sin\vartheta_m \chi_{\mathrm{zxy}} \approx 0,66\,\chi_{\mathrm{zxy}} \approx 0,66\ \mathrm{pm/V}. \tag{8.38}$$

Naloga 8.3.3 Izračunaj efektivno nelinearno susceptibilnost za frekvenčno podvajanje svetlobe z valovno dolžino 10 μm v kristalu telurja s simetrijsko grupo 32 (glej tabelo 8.1). Lomni količniki: $n_o^{\omega} = 4,7969$, $n_e^{\omega} = 6,2455$, $n_o^{2\omega} = 4,8657$ in $n_e^{2\omega} = 6,3152$.

8.4 Frekvenčno podvajanje Gaussovih snopov

Doslej smo vpadni in frekvenčno podvojeni snop obravnavali kot ravni valovanji, ki sta bili razsežni v prečni smeri. Izračunali smo, da v primeru ujemanja faz ($\Delta k = 0$) moč frekvenčno podvojene svetlobe narašča s kvadratom dolžine poti po nelinearnem sredstvu. Pretvorba v frekvenčno podvojeno svetlobo je po enačbi (8.24) tem učinkovitejša, čim večja je gostota svetlobnega toka pri osnovni frekvenci. Zato v praksi vpadno svetlobo vselej fokusiramo.

Poglejmo, kako se enačbe spremenijo, če je vpadni snop pri osnovni frekvenci Gaussove oblike. Rezultat lahko ocenimo, če vzamemo, da je efektivna dolžina za pretvorbo L kar dolžina grla; za njim se gostota toka zmanjšuje, s tem pa tudi pretvorba v podvojeni snop. Dolžina grla je

$$L = 2z_0 = \frac{2n\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{n w_0^2 \omega}{c_0}. \tag{8.39}$$

Tako je presek vpadnega snopa

$$S = \pi w_0^2 = \frac{\pi c_0 L}{n\omega.} \tag{8.40}$$

Daljše ko je grlo, večji je presek snopa in zato manjša intenziteta svetlobe. Vstavimo S v enačbo (8.24), upoštevamo ujemanje faz in dobimo

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{\omega^3 \chi_{ef}^2}{2\pi n_{2\omega} n_\omega c_0^4 \varepsilon_0} P_\omega L. \tag{8.41}$$

Ob optimalnem fokusiranju je torej izkoristek pretvorbe sorazmeren z dolžino kristala in ne z njenim kvadratom.

Naloga 8.4.1 Imamo 1 cm dolg kristal KH_2PO_4. Valovna dolžina vpadne svetlobe je 1,06 μm, vhodna moč $P_\omega = 10$ kW, efektivna nelinearna susceptibilnost $\chi_{ef} = 7 \cdot 10^{-13}$ m/V, $\Delta k = 0$ in $n = 1,5$. Pokaži, da je faktor pretvorbe v frekvenčno podvojeno svetlobo okoli 20 %.

Da je dolžina grla $2z_0 = 1$ cm, mora biti polmer grla okoli 40 μm. Gostota svetlobnega toka v kristalu je pri tem $2 \cdot 10^8$ W/cm^2, kar je že blizu praga za poškodbe, predvsem na vstopni ali izstopni površini. Zato je pri podvajanju frekvenc zelo pomembna odpornost nelinearnega kristala proti poškodbam zaradi velike gostote svetlobnega toka. To in možnost izpolnitve kriterija ujemanja faz sta poglavitna kriterija pri izbiri snovi za frekvenčno podvajanje.

8.5 *Račun podvajanja Gaussovih snopov

V prejšnjem razdelku smo na hitro grobo ocenili vpliv oblike Gaussovih snopov na frekvečno podvajanje. Naredimo zdaj še natančejši izračun. Vrnimo se k valovni enačbi (8.11) in spet imejmo vpadna snopa pri frekvencah ω_1 in ω_2 in nastajajoč snop pri frekvenci $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Podobno kot prej naj ima vsako od polj obliko

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{2} \left[\tilde{A}_i(r,z)\, e^{i(k_i z - \omega_i t)} + \tilde{A}_i^*(r,z)\, e^{-i(k_i z - \omega_i t)} \right], \tag{8.42}$$

pri čemer je $A(r,z)$ zdaj funkcija tako vzdolžne kot tudi prečne koordinate. Privzeli bomo, da se vzdolž z le počasi spreminja. Zaradi poenostavljenega zapisa vpeljimo novo spremenljivko

$$\psi_i = \sqrt{\frac{n_i}{\omega_i}} \tilde{A}_i. \tag{8.43}$$

Tako dobimo nastavek za električno poljsko jakost

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{2} \sqrt{\frac{\omega_i}{n_i}} \psi_i(r,z) e^{i(k_i z - \omega_i t)} + \text{ k. k.} \tag{8.44}$$

Vstavimo nastavek (8.44) v valovno enačbo (8.11) in ločimo na levi in desni člene z enako frekvenco. Zaradi počasnega spreminjanja vzdolž smeri z lahko zanemarimo tudi druge odvode ψ po z. Tako dobimo sklopljen sistem obosnih enačb

$$\nabla_\perp^2 \psi_1 + 2ik_1 \psi_1' = -\frac{k_1}{2} \kappa \psi_2^* \psi_3 e^{-i\Delta k z} \tag{8.45}$$

$$\nabla_\perp^2 \psi_2 + 2ik_2 \psi_2' = -\frac{k_2}{2} \kappa \psi_1^* \psi_3 e^{-i\Delta k z} \tag{8.46}$$

$$\nabla_\perp^2 \psi_3 + 2ik_3 \psi_3' = -\frac{k_3}{2} \kappa \psi_1 \psi_2 e^{i\Delta k z} \tag{8.47}$$

s pripadajočim sistemom konjugiranih enačb. Pri tem je

$$\kappa = \frac{\chi_{ef}}{c_0} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n_1 n_2 n_3}}. \tag{8.48}$$

S črtico smo označili odvajanje po z. Gornji sistem enačb je očitno posplošitev sistema enačb (8.18 do 8.20) za primer, ko je valovanje odvisno tudi od prečne koordinate. Reševanje tega nelinearnega sistema parcialnih diferencialnih enačb je seveda v splošnem zelo zapleteno.

Poglejmo le najenostavnejši primer frekvenčnega podvojevanja, ko je $\omega_3 = 2\omega_1 = 2\omega$. Vpadna snopa naj bosta enaka in Gaussove oblike (enačba 3.27), njuna amplituda pa naj bo enaka A_1

$$\psi_1 = \psi_2 = A_1 \frac{1}{1+iz/z_1} \exp\left(-\frac{r^2}{w_1^2(z)} + \frac{ik_1 r^2}{2R_1(z)}\right). \tag{8.49}$$

Privzemimo še, da je izpolnjen pogoj za ujemanje faz, $\Delta k = 0$, in da je ψ_3 dovolj majhen, da nam zmanjševanja ψ_1 ni treba upoštevati. Tudi za podvojeni snop privzemimo Gaussovo obliko, njegova amplituda A_3 pa naj le počasi narašča

$$\psi_3 = A_3(z)\psi_{3H}(z,r) = A_3(z)\frac{1}{1+iz/z_3} \exp\left(-\frac{r^2}{w_3^2(z)} + \frac{ik_3 r^2}{2R_3(z)}\right), \tag{8.50}$$

pri čemer ψ_{3H} reši homogeno obosno valovno enačbo (3.5). Ko izraza za ψ_1 in ψ_3 vstavimo v tretjo enačbo sistema sklopljenih enačb (8.47), ostane na levi le člen oblike $2ik_3A_3'(z)\psi_{3H}$. Tako dobimo pogoj

$$A_3'(z)\frac{1}{1+iz/z_3} \exp\left(-\frac{r^2}{w_3^2(z)} + \frac{ik_3 r^2}{2R_3(z)}\right) = \frac{i\kappa}{4}A_1^2 \frac{1}{(1+iz/z_1)^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_1^2(z)} + \frac{ik_1 r^2}{R_1(z)}\right). \tag{8.51}$$

Poiščimo rešitev te enačbe v obliki, za katero velja $w_{30}^2 = w_{10}^2/2$. Tedaj je

$$z_3 = \frac{k_3 w_{30}^2}{2} = \frac{2k_1 w_{10}^2}{4} = z_1 \tag{8.52}$$

in je tudi $w_3^2(z) = w_1^2(z)/2$. Poleg tega je $R_3(z) = R_1(z)$ in lahko na obeh straneh pokrajšamo eksponentna faktorja. Ostane

$$A_3'(z) = \frac{i\kappa}{4}A_1^2 \frac{1}{1+iz/z_1}. \tag{8.53}$$

Gornjo enačbo seveda brez težav integriramo. Naj bo grlo vpadnega snopa ravno na sredini nelinearnega sredstva, tako da integriramo od $-L/2$ do $L/2$

$$\begin{aligned} A_3(L) &= \frac{i\kappa}{4}A_1^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{1+iz/z_1} = \\ &= \frac{\kappa}{4}A_1^2 z_1 \ln \frac{1+i\frac{L}{2z_1}}{1-i\frac{L}{2z_1}} = \\ &= \frac{\kappa}{2}A_1^2 z_1 \arctan \frac{L}{2z_1}. \end{aligned} \tag{8.54}$$

Moč Gaussovega snopa je

$$P_i = \pi w_{i0}^2 \frac{1}{2} c_0 n_i \varepsilon_0 E_{i0}^2 = \frac{\pi}{2} w_{i0}^2 \varepsilon_0 c_0 \omega_i A_i^2, \tag{8.55}$$

tako da je izkoristek pri frekvenčnem podvajanju Gaussovega snopa

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{A_3^2}{A_1^2} = \frac{\chi_{ef}^2 \omega^3 P_\omega z_1}{2\pi c_0^4 \varepsilon_0 n_1 n_3} \arctan^2\left(\frac{L}{2z_1}\right) = \frac{\chi_{ef}^2 \omega^3 P_\omega}{2\pi c_0^4 \varepsilon_0 n_1 n_3} \frac{L}{2} \arctan^2\left(\frac{L}{2z_1}\right) \frac{1}{L/2z_1}. \tag{8.56}$$

Funkcija $(\arctan^2 x)/x$ zavzame največjo vrednost pri 0,64 pri $x = L/2z_1 = 1,39$. Pri dani dolžini nelinearnega sredstva L dobimo torej največji izkoristek, kadar je $z_1 = 0,36L$, kar je malo manj kot smo dobili s preprosto oceno $2z_1 = L$ (enačba 8.39). Največji izkoristek frekvenčnega podvojevanja Gaussovih snopov je tako

$$\frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = 0,32\frac{\chi_{ef}^2\omega^3}{2\pi c_0^4\varepsilon_0 n_1 n_3}P_\omega L. \tag{8.57}$$

To je malo manj od preproste ocene, ki smo jo naredili v prejšnjem razdelku (enačba 8.41), v obeh primerih pa izkoristek narašča linearno z dolžino kristala.

8.6 Optično parametrično ojačevanje

Oglejmo si še en zelo uporaben primer mešanja treh valov, ki ga opisujejo enačbe (8.18) do (8.20). Gre za optično parametrično ojačevanje, pri katerem nelinearne optične pojave izkoristimo za ojačevanje optičnih signalov. Imejmo vhodni signal pri frekvenci ω_1, ki ga želimo ojačati, in močen črpalni val pri frekvenci $\omega_3 > \omega_1$. Zaradi nelinearnosti v snovi se val pri ω_1 ojačuje, val pri ω_3 zmanjšuje, hkrati pa zaradi ohranitve energije nastaja dodaten val pri razliki frekvenc $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$. Proces parametričnega ojačevanja si torej lahko predstavljamo kot pretvorbo enega fotona pri frekvenci ω_3 v dva fotona pri ω_1 in ω_2. Parametrično ojačevanje pogosto uporabljamo za ojačevanje šibkih signalov v infrardečem območju.

Slika 8.7: Shematski prikaz nastanka valovanj pri optičnem parametričnem ojačevanju

Izhajajmo iz splošnih enačb za nelinearne optične pojave drugega reda (enačbe 8.18 do 8.20).

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{i\omega_3\chi_{ef}}{4c_0n_3}A_1A_2\,e^{-i\Delta kz} \tag{8.58}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2\chi_{ef}}{4c_0n_2}A_1^*A_3\,e^{i\Delta kz} \tag{8.59}$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1\chi_{ef}}{4c_0n_1}A_2^*A_3\,e^{i\Delta kz}. \tag{8.60}$$

Privzemimo, da je črpalni val vselej dosti močnejši od ostalih dveh, $A_3 \gg A_1, A_2$ in približno konstanten $A_3 = A_{30}$. Poskrbimo še, da je izpolnjen pogoj za ujemanje faz, $\Delta k = 0$, začetna pogoja pa zapišemo kot $A_1(z=0) = A_{10}$ in $A_2(z=0) = 0$. Ko vse to upoštevamo, dobimo dve sklopljeni enačbi

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{i\omega_1\chi_{ef}}{4c_0n_1}A_2^*A_{30} \qquad \text{in} \tag{8.61}$$

$$\frac{dA_2^*}{dz} = -\frac{i\omega_2\chi_{ef}}{4c_0n_2}A_1A_{30}^*. \tag{8.62}$$

Enačbi lahko rešimo, tako da prvo odvajamo po z in vanjo vstavimo drugo enačbo. Dobimo

$$\frac{d^2A_1}{dz^2} = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}A_1 = \kappa^2A_1 \tag{8.63}$$

in podobno za A_2

$$\frac{d^2A_2}{dz^2} = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2}A_2 = \kappa^2A_2. \tag{8.64}$$

Ob upoštevanju začetnih pogojev dobimo

$$A_1 = A_{10}\cosh(\kappa L) \tag{8.65}$$

$$A_2 = A_{20}\sinh(\kappa L), \tag{8.66}$$

pri čemer je L dolžina nelinearnega sredstva,

$$\kappa^2 = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2n_1n_2} \quad \text{in} \quad A_{20} = i\sqrt{\frac{\omega_2n_1}{\omega_1n_2}}A_{10}. \tag{8.67}$$

V začetku torej oba vala naraščata približno eksponentno na račun črpalnega vala. Ko postane njuna intenziteta znatna in se začne A_3 zmanjševati, je treba to seveda tudi upoštevati pri izračunu.

Naloga 8.6.1 Pokaži, da sta izraza za amplitudi polji A_1 in A_2 (enačbi 8.65 in 8.66) rešitvi sklopljenih enačb (8.61) in (8.62) ob vrednosti parametrov A_{20} in κ, kot sta zapisana v enačbah (8.67).

Slika 8.8: Normirani intenziteti ojačanega žarka in dodatnega žarka, ki nastane zaradi ohranitve energije. Naraščajoči funkciji sta seveda samo približek, ki velja, dokler je ojačanje majhno. Izračun je narejen za $\kappa = 0,35$ /cm.

Do zdaj smo vedno privzeli, da je izpolnjen pogoj ujemanja faz in $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = 0$. Ta pogoj lahko izpolnimo na enak način kot pri podvajanju frekvence: v dvolomnem kristalu izberemo ustrezno smer glede na optično os in ustrezne polarizacije, tako da velja $\omega_3n_3 = \omega_1n_1 + \omega_2n_2$.

Lahko na primer vzamemo izredno polarizacijo za črpalni val in redni polarizaciji za oba ojačevana valova, podobno kot pri podvajanju frekvence. Tedaj mora veljati

$$\left[\left(\frac{\cos\vartheta_m}{n_o^{\omega_3}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta_m}{n_e^{\omega_3}}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{\omega_1}{\omega_3}n_o^{\omega_1} + \frac{\omega_2}{\omega_3}n_o^{\omega_2}. \tag{8.68}$$

Naloga 8.6.2 Obravnavali smo optično parametrično ojačevanje, ko je bil izpolnjen kriterij za ujemanje faz. Pokaži, v primeru neujemanja faz $\Delta k \neq 0$ amplitudi ojačevanega in dodatnega žarka naraščata kot

$$A_1 = A_{10}\left(\cosh(\kappa z) - \frac{i\Delta k z}{2\kappa}\sinh(\kappa z)\right)e^{\frac{i\Delta k z}{2}} \qquad A_2 = A_{20}\sinh(\kappa z)e^{\frac{i\Delta k}{2}}, \tag{8.69}$$

pri čemer sta

$$\kappa^2 = \frac{\omega_1\omega_2\chi_{ef}^2|A_{30}|^2}{16c_0^2 n_1 n_2} - \frac{\Delta k^2}{4} \quad \text{in} \quad A_{20} = i\sqrt{\frac{\omega_2 n_1}{\omega_1 n_2}}\sqrt{1+\frac{\Delta k^2}{4\kappa^2}}\,A_{10}. \tag{8.70}$$

Hitro uvidimo, da so gornje enačbe v limitnem primeru $\Delta k = 0$ enake prej zapisanim enačbam (8.65, 8.66 in 8.67).

Za konec še ocenimo koeficient ojačanja v nelinearnem kristalu $LiNbO_3$, v katerem želimo ojačati svetlobo z valovno dolžino $\lambda = 1\ \mu$m. Črpajmo z laserjem z valovno dolžino okoli 500 nm in gostoto svetlobnega toka 5 MW/cm^2. Lomni količnik snovi je približno $n = 2,2$, $\chi_{eff} = 5$ pm/V. Vstavimo podatke v enačbo (8.67) in dobimo vrednost $\kappa \sim 0,15$/cm. Faktor ojačanja vpadne intenzitete svetlobe v 1 cm dolgem kristalu je tako približno 2 %.

Optični parametrični oscilator

Gornji izračun kaže, da optično parametrično ojačevanje pri prehodu skozi kristal ni prav veliko, kljub dokaj močnemu črpalnemu valu. Zato je smiselno, da svetloba večkrat preide skozi ojačevalno sredstvo. To naredimo tako, da optično ojačevalno sredstvo zapremo v optični resonator in signal se ob vsakem obhodu ojača. Dobimo t. i. optični parametrični oscilator.

8.7 Optično usmerjanje in teraherčno valovanje

8.8 Nelinearni pojavi 3. reda

Doslej smo obravnavali najnižji red nelinearnosti, katerega glavni učinek je mešanje treh frekvenc, na primer podvajanje frekvence ali parametrično ojačevanje. Ti pojavi so možni le v kristalih brez centra inverzije. Naslednji člen razvoja nelinearne polarizacije po električnem polju obstaja v vsaki snovi. V njem nastopa polje v tretji potenci. Če vsebuje vpadno polje le eno frekvenco, zaradi nelinearnosti tretjega reda dobimo polarizacijo pri 3ω in ω. Pri dveh vpadnih frekvencah ω_1 in ω_2 so možne kombinacije $2\omega_1 \pm \omega_2$ in $\omega_1 \pm 2\omega_2$, pri treh vpadnih frekvencah pa vse možne vsote in razlike frekvenc. Možnosti je torej precej več kot pri nelinearnosti drugega reda. Obravnava nastajanja valovanja pri kombinaciji frekvenc je povsem analogna podvajanju frekvence in parametričnemu ojačevanju. V enačbah za nastajanje novega valovanja ali ojačevanje katerega od vpadnih snopov spet nastopi fazni faktor, ki vsebuje razliko vseh valovnih vektorjev $\Delta\mathbf{k}$. Da bo nastajanje novega valovanja znatno, mora biti $\Delta kL \simeq 0$, spet mora biti torej izpolnjen pogoj ujemanja faz. Ker sedaj nastopajo v splošnem štirje valovni vektorji, je seveda tudi pri izbiri geometrije in polarizacij za ujemanje faz precej več možnosti.

Če vsebuje vapdno valovanje le eno frekvenco, je v nelinearni polarizaciji tudi komponenta pri tej frekvenci, kar je ena od bistvenih razlik med nelinearnostjo drugega in tretjega reda.

Nelinearne pojave pri eni sami frekvenci v"asih imenujejo tudi degenerirano mešanje štirih valov. Najpreprostejši tak učinek je odvisnost lomnega količnika od intenzitete vpadne svetlobe.

Vzemimo v smeri osi x polarizirano valovanje, ki vpada na nelinearno, zaradi enostavnosti izotropno snov. Nelinearna polarizacija ima tudi le komponento

$$P_1^{NL} = \varepsilon_0 \chi_{1111}^{(3)} E^3 \tag{8.71}$$

Polje spet zapišimo kot vsoto dveh kompleksno konjugiranih členov:

$$E = \frac{1}{2}(E_1 e^{i(kz-\omega t)} + E_1^* e^{-i(kz-\omega t)}) \tag{8.72}$$

Del polarizacije pri ω dobimo tako, da v izrazu za E^3 vzamemo dvakrat nekonjugirani del, enkrat pa konjugiranega. Taki členi so trije. Tako imamo

$$P_1^{\omega} = \frac{3}{8}\varepsilon_0 \chi_{1111}^{(3)} |E_1|^2 E_1 \tag{8.73}$$

Ta del polarizacije lahko prištejemo k linearnemu delu in s tem dobimo lomni količnik, ki je odvisen od intenzitete:

$$\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_1 + \frac{3}{8}\varepsilon_0 \chi_{1111}^{(3)} |E_1|^2 = \varepsilon_0[n(I)^2 - 1]E_1 \tag{8.74}$$

Lomni količnik zapišimo v obliki

$$n(I) = n_0 + n_2|E_1|^2, \tag{8.75}$$

$$n_2 = \frac{3}{8}\chi_{1111}^{(3)} . \tag{8.76}$$

Pojavu, pri katerem je sprememba lomnega količnika sorazmerna s kvadratom električnega polja, smo imenovali Kerrov pojav. Ker je sedaj spremembo povzroča kar optično polje samo, govorimo tudi o optičnem Kerrovem pojavu. Zanimivi posledici sta samozbiranje svetlobnega snopa in širjenje solitonov po optičnih vlaknih, kar si bomo pogledali v naslednjih razdelkih.

Tudi splošni primer degeneriranega štirivalovnega mešanja je pomemben, kjer se valovanja razlikujejo po smereh valovnih vektorjev. Vodi do pojava *fazne konjugacije.* Pri njem dobimo valovanje z enako valovno fronto kot eno od vpadnih valovanj, ki pa se širi v nasprotni smeri od prvotnega valovanja. Fazna konjugacija ima nekaj zanimivih uporab in jo bomo obravnavali v zadnjem razdelku poglavja.

8.9 Samozbiranje

Poglejmo si najprej pojav *samozbiranja* ali samofokusacije (anlgeško self focusing). Osnovni Gaussov snop naj vpada na sredstvo, v katerem je lomni količnik odvisen od intenzitete po enačbi 8.76. Optična Kerrova konstanta n_2 je običajno pozitivna. Tedaj je lomni količnik v sredini snopa večji od nemotenega količnika na robu. V osi snopa se optična pod podaljša in valovna fronta začne v osi zaostajati glede na rob snopa. Če je zaostajanje dovolj veliko, lahko krivinski radij valovne fronte postane negativen in snop se ne širi, temveč oži (Slika**??**). Samozbiranje je pri dovolj veliki moči snopa tolikšno, da pride do katastrofične zožitve snopa in s tem do tolikšnega povečanja gostote svetlobnega toka, da nastanejo poškodbe v snovi.

Zaradi običajnega uklona se snop širi, pojav samozbiranja pa ima nasprotni učinek. Zato je pri primerni moči snopa možno, da se oba pojava po velikosti izenačita in snop ima v snovi

konstanten polmer, valovne fronte pa so ravne. Snop samemu sebi ustvarja valovni vodnik, kjer je v sredi lomni količnik večji kot na robu. Ocenimo, kolišna mora biti moč v stacionarnem stanju.

Vzemimo, da je na izbranem mestu valovna fronta ravna. Lahko si mislimo, da je tam grlo Gaussovega snopa. Brez samozbiranja bi bil na razdalji dolžine grla z_0 po izrazih iz drugega poglavja krivinski radij valovne fronte

$$R(z_0) = z_0[1 + \left(\frac{z_0}{z_0}\right)^2] = 2z_0 \tag{8.77}$$

V bližini osi lahko Gaussovo funkcijo, ki opisuje prečno odvisnost amplitude poja v snopu, razvijemo po prečni koordinati r do drugega reda; po enačbi 8.76 je odvisnost lomnega količnika približno

$$n(r) = n_0 + E_0^2(1 - 2\frac{r^2}{w_0^2})n_2 \ . \tag{8.78}$$

Razlika med lomnim količniko na osi in pri w_0 od osi je $\Delta n = 2E_0^2 n_2$. Zaradi tega je razlika optičnih poti za žarek na osi in za w_0 od osi $\Delta n z_0$. Valovna fronta bi se ukrivila na krivinski radij $-R$. Iz preproste geometrije velja zveza

$$\Delta n z_0 = R - R\sqrt{1 - \frac{w_0^2}{R^2}} \simeq \frac{1}{2}\frac{w_0^2}{R} \tag{8.79}$$

Da bo valovna fronta ostala ravna, morata biti krivinska radija v enačbah 8.77 in 8.79 enaka; od tu sledi

$$\Delta n = \frac{w_0^2}{4z_0^2} \tag{8.80}$$

Amplitudo polja v osi izrazimo z mo"jo: $E_0^2 = 2P/(\pi\varepsilon_0 c w_0^2)$, pa dobimo za moč snopa s stacionarnim polmerom

$$P_s = \pi\varepsilon_0 c\frac{w_0^4}{2n_2 z_0^2} = \frac{\varepsilon_0 c\lambda^2}{4n_2} \tag{8.81}$$

Zanimivo je, da kritična moč ni odvisna od začetnega polmera snopa. Pri manjši moči se snop širi, čeprav nekoliko počasneje kot v sredstvu s konstantnim lomnim količnikom, če pa je moč znatno večja, lahko pride do katastrofičnega samozbiranja in porušitve snovi.

Primer. V CS_2, ki je tekočina z razmeroma velikim optičnim Kerrovim pojavom, je $n_2 = 10^{-20}$ (m/V)^2. Tedaj dobimo po gornji formuli za kritično moč vrednost

$$P_s = 10^4\text{W}.$$

Za podrobnejši račun moramo zapisati valovno enačbo v obosnem približku. Začnimo spet s krajevnim delom valovne enačbe za monokromatsko valovanje v skalarnem približku

$$\nabla^2 E + n^2\frac{\omega^2}{c^2}E = 0 \tag{8.82}$$

Kot v drugem poglavju zapišimi polje v obliki počasi spreminjajoče se amplitude in faznega faktorja:

$$E = \psi(r,z)e^{ik_0 z} \tag{8.83}$$

kjer je $k_0 = n_0\omega/c$ valovno število brez nelinearnosti. $\psi(r,z)$ se v smeri osi z le počasi spreminja, zato drugi odvod po z zanemarimo in dobimo

$$\nabla_\perp^2 \psi + \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - n_0^2)\psi + 2ik_0\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \tag{8.84}$$

Upoštevajmo odvisnost lomnega količnika od intenzitete, pri čemer zanemarimo člen z n_2^2, ker je gotovo majhen:

$$\nabla_\perp^2 \psi + 2k_0^2\frac{n_2}{n_0}|\psi|^2\psi + 2ik_0\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \tag{8.85}$$

Preden se lotimo reševanja gornje enačbe, jo še nekoliko polepšajmo. Vpeljimo

$$\kappa = 2k_0^2\frac{n_2}{n_0} \tag{8.86}$$

in novo spremenljivko vzdolž osi z

$$\zeta = \frac{z}{2k_0} \tag{8.87}$$

S tem preide enačba 8.85 v standardno oblikonelinearne Schrodingerjeve enačbe

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} + \nabla_\perp^2\psi + \kappa|\psi|^2\psi = 0\,. \tag{8.88}$$

V treh dimenzijah je reševanje enačbe 8.88 težavno in analitične rešitve niso znane. V dveh dimenzijah pa stacionarno rešitev znamo poiskati. Ker nam bo koristila tudi nekoliko kasneje pri računu širjenja solitonov po optičnih vlaknih, si jo je vredno ogledati.

Stacionarni rešitvi se vzdolž ζ lahko spreminja le faza, zato rešitev iščimo v obliki

$$\psi = e^{i\eta^2\zeta}u(x) \tag{8.89}$$

kjer je η poljubna konstanta, katere pomen bomo videli kasneje. Iz enačbe 8.88 sledi za funkcijo $u(x)$, ki naj bo realna,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{2}\eta^2 u - \kappa u^3 \tag{8.90}$$

Z množenjem obeh strani z u' lahko enačbo enkrat integriramo

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + C = \eta^2u^2 - \frac{1}{2}\kappa u^4 \tag{8.91}$$

Naj bo integracijska konstanta C kar 0. Ločimo spremenljvki in dobimo

$$\int_1^u \frac{du}{u\sqrt{\eta^2 - \frac{1}{2}\kappa u^2}} = x - x_0 \tag{8.92}$$

kjer smo novo integracijsko konstanto zapisali tako, da je pri $x = x_0$ vrednost $u = 1$. Integral brez tezžav izračunamo:

$$\ln\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\frac{u}{\eta + \sqrt{\eta^2 - \kappa u^2/2}}\right) = x - x_0 \tag{8.93}$$

Izarazimo iskano funkcijo:

$$u = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\eta \frac{2}{e^{\eta(x-x_0)} + e^{-\eta(x-x_0)}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\eta \frac{1}{\mathrm{ch}\eta(x-x_0)} \tag{8.94}$$

tako da je po enačbi 8.89

$$\psi(x,z) = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\eta \frac{e^{i\eta^2\zeta}}{\mathrm{ch}\eta(x-x_0)} \tag{8.95}$$

Vidimo, da predstavlja $1/\eta$ mero za polmer snopa, x_0 pa je le prečni premik snopa, ki ga lahko brey škode postavimo 0. Tako je polje stacionarnega snopa

$$E_s(x,z) = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{\eta}{\mathrm{ch}\eta(x-x_0)} \exp[ik_0 z(1+\frac{\eta^2}{2k_0^2})] \tag{8.96}$$

Od parametra η je torej odvisna tudi konstanta širjenja in s tem fazna hitrost. Ta je tem manjša, čim manjši je polmer snopa:

$$v_f = \frac{c}{n_0(1+\frac{\eta^2}{2k_0^2})} \tag{8.97}$$

Moč dvodimenzionalnega snopa 8.96 je sorazmerna z integralom kvadrata polja po x. Integriramo brez težav in dobimo

$$\int |E_s|^2 dx = \frac{2}{\kappa}\eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\mathrm{ch}^2\eta x} = \frac{4\eta}{\kappa} \tag{8.98}$$

Moč stacionarnega snopa v dveh dimenzijah je je obratno sorazmerna s širino snopa $1/\eta$. Zato obstoja pri poljubni moči stacionarna širina. To je bistvena razlika med dvo- in tridimenzionalnim primerom, kjer se snop z nadkritično močjo krči v singularnost.

8.10 Optični solitoni

V prejšnjem razdelkusmo ugotovili, da pojav samozbiranja svetlobnega snopa lahko ravno kompenzira širjenje zaradi uklona, tako da ima pri ustrezni moči snop povsod konstnatno širino in obliko. Povsem analogen pojav imamo tudi v časovni domeni. Sunek svetlob, ki se širi po snovi s frekvenčno siperzijo lomnega količnika, se podaljšuje, kot smo ugotovili v poglavju o optičnih vlaknih. Ob primernih pogojih lahko odvisnost lomnega količnika od intenzitete ravno kompenzira disperzijo in sunek ohranja obliko. Sunkom svetlobe, ki potujejo po sredstvu brez spremembe oblike, pravimo tudi *optični solitoni*. Posebej so pomembni v optičnih vlaknih, kjer je disperzija izrazita in bi se je radi za učinkovit prenos informacije čim bolj iznebili.

Poijav optičnih solitonov ni težko razložiti. V vrhu svetlobenga sunka je pri $n_2 > 0$ lomni količnik največji, zato je na dani geometrijski razdalji optična faza $k_0 nz$ največja. Ker faza vzdolž sunka ni več povsod enaka, se od začetka do konca sunka spreminja tudi frekvenca, ki je odvod faze, in sicer je v sprednejm delu sunka nižja , v zadnjem pa višja. Če je disperzija lomnega količnika taka, da grupna hitrost narašča s frekvenco, bo zadnji del sunka dohiteval sprednjega. Ta učinek nelinearnosti lahko ravno kompenzira širjenje sunka zaradi disperzije.

Računsko obravnavajmo primer širjenja solitona po enorodnem optičnem vlaknu. Spomnimo se (en. **??**), da se zaradi spremembme lomnega količnika vlakna spremeni valovno število

$$\delta\beta = \frac{\omega^2}{c^2\beta} \frac{\int n\,\delta n\,|u|^2 dS}{\int |u|^2 dS} \tag{8.99}$$

kjer $u(r)$ opisuje prečno obliko valovanja v vlaknu. Valovno število je v vlaknu funkcija frekvence. Kot v razdelku ???? ga razvijmo okoli centralne frekvence in dodajmo še prispevek 8.99:

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\omega^2}{c^2\beta}\frac{\int n\,\delta n\,|u|^2 dS}{\int |u|^2 dS} \tag{8.100}$$

Svetlobni sunek, ki se širi po vlaknu, zapišimo, kot smo že vajeni, v obliki počasi spreminjajoče se amplitudne funkcije in faznega faktorja pri nosilni frekvenci:

$$E(r,z,t) = A(z,t)\,u(r)\exp i\left[\beta(\omega_0)z - \omega_0 t\right] \tag{8.101}$$

V razdelku ???? smo s pomočjo razvoja 8.100 in Foureirove transformacije izpeljali diferencialno enačbo ??? za $A(z,t)$. Na isti način moramo sedaj le dodati člen $\delta\beta$ iz en. 8.99:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t}\right)A = -\frac{i}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\kappa|A|^2 A \tag{8.102}$$

kjer je

$$\kappa = \frac{\omega^2}{c^2\beta}\frac{\int n_0 n_2 |u|^4 dS}{\int |u|^2 dS} \tag{8.103}$$

Vpeljimo novo neodvisno spremenljivko

$$\tau = t - \frac{z}{v_g} \tag{8.104}$$

s katero opišemo obliko sunka, kot ga vidi opazovalec, ki se giblje z grupno hitrostjo skupaj s sunkom. Enačba 8.102 dobi s tem obliko

$$i\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \kappa|A|^2 A = 0 \tag{8.105}$$

Ta enačba ima kot pri obravnavi samozbiranja svetlobnega snopa v prejšnjem razdelku obliko nelinearne Schrodingerjeve enačbe 8.88, v kateri ima sedaj τ isto vlogo kot prej prečna koordinata x. Rešitev s stacionarno dolžino sunka, ki ustreza rešitvi s konstantnim premerom snopa v primeru samozbiranja, tako dobimo, kadar je $d^2\beta/d\omega^2 < 0$. To pomeni, da grupna hitrost narašča s frekvenco, kar je v skladu z razmislekom na začetku tega razdelka. Optični soliton v vlaknu ima torej obliko

$$A(z,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\frac{\eta}{\mathrm{ch}\left[\sqrt{2\left|\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|^{-1}}\eta\tau\right]}\exp\left(i\eta^2 z\right)$$

$$A(z,t) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\frac{\eta}{\mathrm{ch}\left[\sqrt{2\left|\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|^{-1}}\frac{\eta}{v_g}(v_g t - z)\right]}\exp\left(i\eta^2 z\right) \tag{8.106}$$

Parameter η je sorazmeren z energijo solitona. Ta potuje z grupno hitrostjo in pri tem ohranja obliko. Analiza majhnih odmikov od dobljene rešitve pokaže, da je soliton tudi stabilen (Naloga). Zaradi tega se zdi, da bilo solitone mogoče izrabiti v optičnih komunikacijskih sistemih, kjer je potrebna velika gostota prenosa informacije na velike razdalje. S tem bi se izognili težavam, ki jih pri linearnem prenosu povzroča disperzija.

8.11 Optična fazna konjugacija

Fazna konjugacija je zanimiv in danes tudi prektično pomemben pojav, pri katerem dobimo iz danega novo valovanje, ki ima enake valovne fronte in potuje v nasprotni smeri od prvotnega valovanja; novo valovanje je tako, kot bi začetnemu obrnili predznak časa. Pojav je v ozki zvezi s holografijo, kjer najprej zapišemo predmetni snop, ki ga kasneje reproduciramo, pri fazni konugaciji pa zapis začetnega vala in njegova reprodukcija potekata sočasno.

Napravimo poskus, ki ga kaže slika **??**. Na nelinearen kristal naj v nasprotnih smereh vpadata dva močna ravna črpalna vala z valovnima vektorjema $\mathbf{k}_1$ in $-\mathbf{k}_1$. Poleg tega naj vpada še tretji, signalni snop, ki ni nujno raven val. Signalni val interferira s prvim črpalnim valom in s tem zaradi nelineranosti tretejga reda povzroči modulacijo lomnega količnika, ki je skoraj periodična, če je signalni val blizu ravnega vala. Na tej periodični modulaciji se drugi črpalni val uklanja, pri čemer je uklonjeni val enake oblike kot signalni, le potuje v nasprotni smeri, ker ima drugi črpalni val nasprotno smer od prvega. Črpalna vala sta seveda enakovredna in ni mogoče ločiti, s katerim je signalni val interferiral in kateri se uklanja.

Pozoren bralec je ugotovil, da je gornja razlaga podobna razlagi holografije, le da sta tam postopka zapisa interference predmetnega vala z refernčnim in reprodukcije ločena.

Signalni val lahko zapišemo v obliki

$$E_3 = \mathrm{Re}\left[\psi(r)\, e^{i(kz-\omega t)}\right] \tag{8.107}$$

Videli bomo, da je novonastali val

$$E_4 = \mathrm{Re}\left[\psi^*(r)\, e^{i(-kz-\omega t)}\right] \tag{8.108}$$

Zaradi nasprotnega predznaka k potuje v obratni smeri od signalnega vala; poleg tega je še amplituda kompleksno konjugirana. To seveda ne pliva na obliko valovnih front, te so popolnoma enake kot pri signalnem valu. Zaradi lastnosti, da lahko novi val iz signalnega dobimo tako, da krajevni del kompleksno konjugiramo, nastalemu valu pravimo fazno konjugiran val.

Uporabna posledica fazne konjugacije je prikazana na sliki **??**. Naj na neko nerpavilno sredstvo z leve vpada Gaussov snop. Po prehodu skozi sredstvo valovne fronte niso več gladke. Ta popačen snop v faznem konjugatorju generira fazno konjugiran snop, ki potuje proti levi in ima enako nepravilne valoven fronte kot vpadni val. Po prehodu skozi nepravilno sredstvo se neravnosti valovne fronte kompenzirajo in dobimo enake gladke valoven ploskeve Gaussovega snopa, kot smo jih imeli na začetku. To lastnost popravljanja valovne fronte je mogoče koristni uporabiti, na primer namesto enega zrcala v laserskem resonatorju.

Poglejmo podrobneje, kako v nelinearnem sredstvu nastane fazno konjugiran val. Kot kaže slika **??**, je celotno polje v nelienarnem kristalu vsota štirih valov, dveh črpalnih, signalnega in odbitega:

$$E = \frac{1}{2}E_1 e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{2}E_2 e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{2}E_3(z)\, e^{ikz} + \frac{1}{2}E_4(z)\, e^{-ikz} + \text{k.k.} \tag{8.109}$$

S k.k. smo spet označili kompleksno konjugirane člene. Ker so vsa polje pri isti frekvenci, nam časovenga faktorja ni treba pisati. Zaradi enostavnosti zapisa nelinearne polarizacije vzemimo, da so vse polarizacije enake. Privzeli smo še, da sta črpalna vala E_1 in E_2 dosti močnejša od E_3 in E_4, tako da sta njuni amplitudi konstantni, $E_3(z)$ in $E_4(z)$ pa se le počasi spreminjata.

Postavimo E v časovno neodvisno valovno enačbo z nelinearno polarizacijo:

$$\nabla^2 E + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} E = -\mu_0 \omega^2 P^{NL} \tag{8.110}$$

Pri tem je $\varepsilon\, \omega^2/c^2 = k^2$. Ker obravnavamo le polje pri osnovni frekvenci, nastopajo v nelinearni polarozaciji le členi s to frekvenco. Vsebujejo še vedno različne kombinacije valovnih vektorjev. K enačbi za E_4 prispevajo le tisti s krajevnim faznim faktorjem $\exp(-ikz)$, to je

$$P_4^{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} [E_1 E_2 E_3^* + (|E_1|^2 + |E_2|^2) E_4] \tag{8.111}$$

Tu je $\chi^{(3)}$ efektivna nelinearna susceptibilnost za izbrano polarizacijo vseh polj. Zanemarili smo člene, kjer E_3 in E_4 nastopata v višjih potencah, ker so majhni v primeri z zapisanimi. Z upoštevanjem, da se $E(z)$ le počasi spreminja, dobimo enako kot pri mešanju treh frekvenc

$$\frac{dE_4}{dz} = i \frac{\omega}{nc} \chi^{(3)} \left[E_1 E_2 E_3^* + (|E_1|^2 + |E_2|^2) E_4 \right] \tag{8.112}$$

Drugi člen na desni že poznamo; opisuje odvisnost lomnega količnika od intenzitete črpalnih valov, torej optični Kerrov pojav. Vpeljimo nove amplitude

$$A_k = E_k \exp\left[-i \frac{\omega}{nc} \left(|E_1|^2 + |E_2|^2 \right) z \right] \tag{8.113}$$

ki se od prvotnih razlikujejo le po faznem faktorju. S tem se enačba 8.112 poenostavi:

$$\frac{dA_4}{dz} = i \frac{\omega}{nc} \chi^{(3)} A_1 A_2 A_3^* \tag{8.114}$$

Podobno dobimo

$$\frac{dA_3^*}{dz} = i \frac{\omega}{nc} \chi^{(3)} A_1^* A_2^* A_4 \tag{8.115}$$

Z vpeljavo sklopitvene konstante

$$\kappa = \frac{\omega}{nc} \chi^{(3)} \tag{8.116}$$

se enačbi poenstavita:

$$\frac{dA_4}{dz} = i \kappa^* A_3^*$$

$$\frac{dA_3^*}{dz} = i \kappa A_4 \tag{8.117}$$

Bralcu priporočam, da si še enkrat ogleda korake, s katerimi smo zelo težaven problem nelinearne valovne enačbe poenostavili na lineanren sistem dveh preprostih sklopljenih enačb za amplitudi signalnega in odbitega vala.

Splošni rešitvi sistema 8.117 sta

$$\begin{aligned} A_4(z) &= C_1 \cos|\kappa| z + C_2 \sin|\kappa| z \\ A_3^*(z) &= -i \frac{|\kappa|}{\kappa^*} (-C_1 \sin|\kappa| z + C_2 \cos|\kappa| z) \end{aligned} \tag{8.118}$$

Potrebujemo še robne pogoje za obe valovanji. Z leve, pri $z = 0$, poznamo $A_3^*(0)$, pri $z = L$ pa ne more biti odbitega vala:$A_4(L) = 0$. S tem lahko določimo konstanti C_1 in C_2:

$$\begin{aligned} A_4(z) &= i\frac{\kappa^*}{|\kappa|}\frac{\sin|\kappa|(L-z)}{\cos|\kappa|L}A_3^*(0) \\ A_3^*(z) &= \frac{\cos|\kappa|(z-L)}{\cos|\kappa|L}A_3^*(0) \end{aligned} \tag{8.119}$$

Amplituda odbitega vala pri $z = 0$ je

$$A_4(0) = i\frac{\kappa^*}{|\kappa|}\tan|\kappa|L\,A_3^*(0) \tag{8.120}$$

Odbiti val je sorazmeren s kompleksno konjugirano amplitudo vpadnega vala in ima natnako nasproten valovni vektor, zato tudi ime fazno konjugiran val. Ker je lahko $\tan|\kappa|L > 1$, je možno tudi ojačenje odbitega vala, ki gre seveda na račun moči črpalnih valov.

Doslej smo predpostavili, da je signalni val raven. Če je njegova amplituda odvisna še od prečne koordinate, ga lahko razvijemo po ravnih valovih in velja za vsako komponento posebej en. 8.120. Odbite komponente so sorazmerne s konjugiranimi komponentami signalnega vala z nasprotnim valovnim vektorjem in dajo skupaj valovno fronto enake oblike kot pri signalnem valu, le giblje se v nasprtni smeri, kot smo opisali že na začetku razdelka.

V NOVO POGLAVJE Poseben primer nelinearne susceptibilnosti d_{ijk} smo pravzaprav že srečali pri elektrooptičnem pojavu: elektrooptični tenzor r_{ijk} opisuje isto lastnost snovi, le da smo tam zahtevali, da je eno polje skoraj statično. Za d_{ijk} velja, kot za vsak tenzor tretjega ranga, da je lahko od nič različen le v snoveh brez centra inverzije. V centrosimetričnih snoveh je prvi od nič različni nelinearni člen tretjega reda.

9. Modulacija svetlobe

V optičnih napravah pogosto želimo spreminjati lastnosti svetlobnega valovanja. Nekaj takih primerov smo že srečali pri obravnavi laserja, kjer smo za preklop kvalitete laserja potrebovali element, ki mu je moč hitro spreminjati prepustnost. Pri optičnem prenašanju in obdelavi informacij je možnost modulacije amplitude, frekvence ali faze svetlobnega vala z električnim signalom osnova skoraj vsake naprave.

Optični modulatorji izkoriščajo nekaj pojavov, od katerih sta najpomembnejša elektrooptični in elstooptični pojav. Pri prvem dosežemo spremembo lomnega količnika snovi z električnim poljem, pri drugem pa z deformacijo, ki jo navadno dobimo v zvočnem valu, zato takim modulatorjem pravimo akustooptični. Poseben zelo pomemben primer elektrooptičnih modulatorjev predstavljajo naprave na osnovi tekočih kristalov.

9.1 Elektrooptični pojav

V zunanjem električnem polju, katerega frekvenca naj bo majhna v primeri z optično frekvenco, se optični dielektrični tenzor lahko spremeni. Omejitev na nizko frekvenco je potrebna zato, da optično polje še vedno lahko obravnavamo linearno. Kako je, kadar to omejitev opustimo, si bomo ogledali v prihodnjem poglavju o nelinearni optiki, kamor pravzaprav formalno sodi tudi elektrooptični pojav.

Iz zgodovinskih razlogov zapišimo raje spremembo dielektričnemu inverznega tenzorja $b = \varepsilon^{-1}$. Spremembo komponente b_{ij} lahko zapišemo kot potenčno vrsto zunanjega polja:

$$\delta b_{ij} = r_{ijk} E_k + q_{ijkl} E_k E_l \ . \tag{9.1}$$

Prvi člen, linearen z ozirom na zunanje polje, opisuje linearni elektrooptični pojav. Tenzor tretjega ranga r_{ijk}, ki lastnost snovi, imenujemo kar elektrooptični tenzor ali tudi Pockelsov tenzor. Kvadratnemu elektrooptičnemu pojavu pravimo Kerrov pojav. Za uporabo trdnih kristalov je pomemben predvsem linearni člen, zato se v nadaljevanju za Kerrov pojav ne bomo zanimali.

Preden si nekoliko pobliže ogledamo Pockelsov tenzor, zapišimo še, kako se z δb_{ij} izrazijo spremembe komponent dielektričnega tenzorja. Vzemimo tak koordinatni sistem, da bo nemoten dieletkrični tenzor v njem diagonalen. Ker so spremembe majhne, velja

$$(b + \delta b)^{-1} = [b(1 + b^{-1}\delta b)]^{-1} = (1 + b^{-1})^{-1} b^{-1} \simeq b^{-1} - b^{-1}\delta b b^{-1} \ , \tag{9.2}$$

torej

$$\delta \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ik} \delta b_{kl} \varepsilon_{lj} = \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \delta b_{ij} \ . \tag{9.3}$$

Seveda je povsem vseeno, kako definiramo elektrooptični pojav, preko b ali ε. Običajna definicija Pockelsovega tenzorja ima za posledico, da v izrazih, kjer nastopa sprememba dielektričnega tenzorja, nstopajo še nemotene vrednosti ε ali lomnih količnikov.

Simetrija pomembno vpliva na obliko tenzorjev, ki popisujejo lastnosti snovi. Pockelsov tenzor je tretjega ranga, zato je lahko različen od nič le v takih kristalih, katerih simetrijska grupa ne vsebuje inverzije. Pri inverziji namreč električno polje spremeni predznak. Komponente simetričnega tenzorja drugega ranga se obnašajo kot produkti koordinat, b_{12} se transformira na primer enako kot xy, zato je b_{ij} na inverzijo neobčutljiv. Pockelsov tenzor r_{ijk} je lastnost snovi, zato se v primeru, da je inverzija simetrijski element kristala, ne sme spremeniti. Od tod sledi, da mora biti r_{ijk} identično enak nič. Kvadratni Kerrov pojav pa je dovoljen v vseh snoveh.

Simetrija tudi v primeru, ko nimamo centra inverzije, navadno močno zmanjša število neodvisnih komponent r_{ijk}. Pockelsov tenzor je po definiciji simetričen v prvih dveh indeksih, zato ima v najmanj simetričnem primeru triklinskega kristala 18 neodvisnih komponent, v kristalih z višjo simetrijo pa manj. Za primer poglejmo, kako štiristevna simetrijska os zmnanjša število komponent.

Naj bo simetrijska os v smeri z. Električno polje naj bo najprej paralelno osi. Rotacija za $\pi/2$ je simetrijska operacija in prevede os x v y, zato $r_{113} = r_{223}$. Poglejmo zvezo

$$\delta b_{12} = r_{123} E_3 \ . \tag{9.4}$$

Pri rotaciji za $\pi/4$ gre x v y, y pa v $-y$, zato gre δb_{12} v $-\delta b_{12}$ in dobimo

$$-\delta b_{12} = r_{123} E_3 \ . \tag{9.5}$$

Zvezi 9.4 in9.5 lahko veljata le, če je $r_{123} = 0$. Rotacija za π prevede zvezo $\delta b_{13} = r_{133} E_3$ v $-\delta b_{13} = r_{133} E_3$, zato je tudi $r_{133} = 0$ in z ozirom na enakovrednost x in y $r_{233} = 0$.

Naj bo sedaj polje v smeri osi x. Pri rotaciji za π gre E_1 v $-E_1$, δb_{11} se ne spremeni in je $r_{111} E_1 = -r_{111} E_1$, torej $r_{111} = 0$. Rotacija za $\pi/2$ zvezo $\delta b_{23} = r_{231} E_1$ prevede v $-\delta b_{13} = r_{231} E_2$. Po definiciji pa je $\delta b_{13} = r_{132} E_2$, zato velja $r_{231} = -r_{132}$.

Podobno ravnamo še s preostalimi komponentami in tako ugotovimo, da imamo v tetragonalni grupi, ki vsebuje le štiristevno os, štiri neodvisne komponente elektrooptičnega tenzorja: $r_{113} = r_{223}$, r_{333}, $r_{231} = -r_{132}$ in $r_{131} = r_{232}$, vse ostale komponente pa so nič. Oblika različnih tenzorjev pri različnih kristalnih simetrijah je dana na primer v **??** ali **??**.

V literaturi pogosto uporabljajo skrajšan zapis za elektrooptični tenzor. Prva dva indeksa, v katerih je r_{ijk} simetričen, združijo v enega z vrednostmi od 1 do 6 po dogovoru $xx = 1$, $yy = 2$, $zz = 3$, $yz = 4$, $zx = 5$ in $xy = 6$. Tako postane r_{ijk} matrika velikosti 6×3, simetrični tenzor drugega ranga b_{ij} pa šetkomponenten vektor. Tak zapis je prikladen, se pa v račune hitro prikradejo napake, posebej še pri transformacijah koordinat, zato je računati bolje v normalnem tenzorskem zapisu.

9.2 Amplitudna modulacija

Poglejmo sedaj, kako lahko elektrooptični pojav izkoristimo za modulacijo amplitude svetlobnega snopa. Osnovna zamisel je, da z električnim poljem tako spremenimo dvolomnost primerno izbranega in odrezanega kristala, da se spremeni polarizacija vpadnega vala, zaradi česar se spremeni tudi svetlobna moč, ki jo prepusti analizator za kristalom. Poglejmo si to kar na primerih.

Vzemimo kristal s kubično simetrijo $\bar{4}3m$, na primer ZnTe. Elektrooptični tenzor ima le eno neodvisno komponento

$$r_{123} = r_{231} = r_{312} = r \ . \tag{9.6}$$

Dieletktrični tenzor brez polja je seveda izotropen, dvolomnosti ni. Električno polje vzdolž ene od osi, na primer z, povzroči spremembo $\delta\varepsilon_{12} = -\varepsilon^2 r E_3$, zaradi česar postane kristal dvoosen z optičnima osema v ravnini xy, torej pravokotno na $\vec{E}$. To ni najbolj ugodno. Bolje je izbrati polje v smeri (1,1,1):

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{3}}(1,1,1)\ , \tag{9.7}$$

to je vzdolž trištevne osi, ki ostane tudi pod poljem. Optične lastnosti so tedaj enake kot v trigonalnem kristalu, to je kristal postane enoosen z optično osjo vzdolž $\vec{E}$. Dielektrični tenzor dobi obliko

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}\ , \qquad \delta\varepsilon = \frac{E_0}{\sqrt{3}}\varepsilon^2 r\ . \tag{9.8}$$

Da bomo znali izračunati, kako se po takem kristalu širi vpadni svetlobni snop, moramo gornji dielektrični tenzor diagonalizirati. V našem primeru je to preprosto, saj smo že ugotovili, da predstavlja enoosno sredstvo z optično osjo vzdolž $\vec{E}$. Uvedimo torej nove koordinate z osjo z' vzporedno z $\vec{E}$:

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)\ . \tag{9.9}$$

V ravnini, pravokotni na z' so vse smeri enakovredne, zato je vseeno, kako izberemo novi osi x' in y', le pravokotni morata biti na z' in med seboj. Vzemimo

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-2x+y+z)\ . \end{aligned} \tag{9.10}$$

Matrika prehoda iz starega v novi sistem je torej

$$R = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{9.11}$$

in dielektrični tenzor v novem sistemu

$$\underline{\varepsilon'} = R\underline{\varepsilon}R^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon + \delta\varepsilon \end{bmatrix}\ . \tag{9.12}$$

Iz oblike ε' razberemo, da je redni lomni količnik, to je količnik za svetlobo, ki je polarizirana pravokotno na z',

$$n_r = \sqrt{\varepsilon + \delta\varepsilon} \simeq n_0(1 + \frac{\delta\varepsilon}{2\varepsilon}) = n_0 + \frac{n_0^3 r E_0}{2\sqrt{3}}\ , \tag{9.13}$$

kjer je $n_0 = \sqrt{\varepsilon}$ nemoteni lomni količnik. Izredni lomni količnik, za katerega je polarizacija vzporedna z osjo z', je

$$n_i = n_0 - \frac{n_0^3 r E_0}{\sqrt{3}}\ . \tag{9.14}$$

Odrežimo iz obravnavanega kristala kvader z robovi vzdolž osi x', y' in z'. Postavimo ga med prekrižan polarizator in analizator tako, da se svetloba širi vzdolž osi x', kot kaže slika **??**.

Polarizator naj tvori z osjo z' kot 45°. Svetlobni val, ki vpada na kristal, moramo razdeliti na redni in izredni del. Po prehodu skozi kristal nastane med njima fazna razlika

$$\phi = k_0 L(n_i - n_r) = \frac{\sqrt{3}\pi n_0^3 rLU}{\lambda d} , \tag{9.15}$$

kjer je U napetost na kristalu.

Polarizator na izhodni strani prepusti le projekcijo obeh lastnih polarizacij:

$$E_{izh} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{vh} (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi}) , \tag{9.16}$$

kjer je E_{vh} amplituda svetlobnega vala za vhodnim polarizatorjem. Gostota prepuščenega svetlobnega toka bo torej

$$j_{izh} = \frac{1}{4} j_{vh} |1 - e^{i\phi}|^2 = \frac{1}{2} j_{vh} (1 - \cos\phi) . \tag{9.17}$$

Ko je napetost na kristalu nič, je $\phi = 0$ in je tudi $j_{izh} =)$, kot pričakujemo, saj sta analizator in polarizator prekrižana, kristal pa je brez polja optično izotropen. Največjo prepustnost dobimo, ko je $\phi = \pi$. V ZnTe je $r_{123} = 4 \cdot 10^{-12}$ m/V in $n = 3$. Naj bo kristal dolg 1 cm. Potrebno elekrično polje, da bo $\phi = \pi$, z drugimi besedami, da bo kristal deloval kot ploščica $\lambda/2$, je pri valovni dol"ini 600 nm

$$E_{\lambda/2} = \frac{U_{\lambda/2}}{d} = \frac{\lambda}{\sqrt{3} n^3 rL} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ V/m} . \tag{9.18}$$

Napetost, da popolnoma odpremo modulator, je torej precej velika, pri debelini kistala 1 cm je potrebnih 3000 V. Velike delovne napetosti so značilne za kristalne elektrooptične modulatorje in so njihova glavna slaba stran.

Včasih želimo, da je zveza med modulacijsko napetostjo in izhodno gostoto toka linearna. Za to mora modulator delovati v okolici $\phi = \pi/2$. Namesto visoke stalne napetosti lahko uporabimo med polarizatorjem in kristalom še ploščico $\lambda/4$, ki nam da zahtevani stalni fazni premik med rednim in izrednim valom.

V praksi se pogosto uporabljajo kristali, ki imajo simetrijo nižjo od kubične in so dvolomni že brez zunanjega polja. Zato si kot primer poglejmo še modulator s kristalom kalijevega dihidrogen fosfata (KH_2PO_4). Je tetragonalne simetrije $\bar{4}2m$ in ima dve neodvisni komponenti Pockelsovega tenzorja: $r_{123} = 10^{-11}$ m/V in $r_{231} = r_{132} = 8\dot{1}0^{-12}$ m/V. V uporabi sta dve geometriji, pri eni je optična os, to je štiristevna os kristala, vzporedna s smerjo svetlobnega vala in je tudi zunanje modulacijsko polje v isti smeri, kar je manj ugodno, pri drugi pa sta optična os in zunanje polje pravokotna na smer širjenja svetlobe, kot kaže slika **??**. Električno polje v smeri z povzroči, da se pojavi izvendiagonalna komponenta dielektričnega tenzorja $\delta\varepsilon_{12} = \varepsilon_1^2 r_{123} E$ in lastni vrednosti dielektričnega tenzorja v ravnini xy nista več enaki. Ena lastna vrednost postane $\varepsilon_1 + \delta\varepsilon$ z lastno smerjo x' 45° glede na kristalno os x, druga pa $\varepsilon_1 - \delta\varepsilon$ z lastno smerjo y' -45° na os x. Kristal odrežemo tako, da se svetloba širi vzdolž osi y'. Tedaj se zaradi zunanjega polja lomni količnik za svetlobo, polarizirano v smeri x' spremeni za $n_r^3 r_{123} E/2$ in je fazna razlika med obema lastnima polarizacijama (smeri x' in z) po prehodu skozi kristal

$$\phi = k_0 L \left[(n_r - n_i) + \frac{n_r^3}{2} r_{123} E \right] , \tag{9.19}$$

kjer sta n_r in n_i redni in izredni lomni količnik nemotenega kristala. Ker je kristal že sam po sebi dvolomen, povzroči zunanje polje le majhno dodatno fazno razliko. Dolžina kristala mora

biti taka, da velja $k_0L(n_r - n_i) = 2N\pi$, če naj bo modulator brez zunanjega polja zaprt. Pri tem nastopi težava. Pogoj je lahko zaradi temperaturnega raztezanja in odvisnosti lomnih količnikov od temperature izpolnjen le pri eni temperaturi, poleg tega bi bil tak modulator tudi zelo občutljiv na to, da se svetloba širi natanko v smeri y'. Zato dvolomnost nemotenega kristala kompenziramo tako, da vzamemo dva enako dolga kristala in ju postavimo zapored tako, da sta optični osi med seboj pravokotni, kot kaže slika **??**. Modulacijska napetost na drugem kosu mora imeti nasprotni predznak. Tedaj se fazna razlika med obema polarizacijama zaradi naravne dvolomnosti odšteje, zaradi modulacijske napetosti pa sešteje.

9.3 Fazna in frekvenčna modulacija

Amplitudno modulacijo svetlobe smo dobili tako, da smo z zunanjim poljem spremenili fazi lastnih valov, zaradi česar je postalo linearno polarizirano vpadno valovanje po prehodu kristala eliptično polarizirano. Spremembo polarizacije smo z analizatorjem prevedli v spremembo amplitude. Včasih pa želimo modulirati fazo vpadne svetlobe. Dobimo jo tako, da odstranimo izhodni polarizator, vhodno polarizacijo pa usmerimo tako, da je vpadna svetloba lastno valovanje, za katero je sprememba lomnega količnika zaradi modulacijskega polja večja. V primeru ZnTe, ki smo ga obravnavali v prejšnjem razdelku, je to izredno valovanje, polarizirano v smeri modulacijskega polja. Dodatna faza na izhodni strani kristala je

$$\phi = k_0L(n_i - n_0) = \frac{\omega n_0^3 rLU}{\sqrt{3}cd} \ . \tag{9.20}$$

Če je sprememba faze linearna funkcija časa, to je, če jo lahko zapišemo v obliki $\phi = \omega_1 t + \phi_0$, predstavlja koeficient ω_1 spremembo frekvence vpadne svetlobe. Linearno naraščajoča modulacijska napetost da torej spremembo frekvence, kar v optiki pogosto potrebujemo. Dosegljive spremembe frekvence ω_1 so seveda dokaj majhne, do nekaj sto MHz. Omejene so z možno hitrostjo spreminjanja napetosti. Napetost seveda tudi ne more neomejeno naraščati. Kadar se napetost vrača na nič, dobimo frekvenčni premik v nasprotni smeri, ki pa ga lahko zanemarimo, če je čas vračanja kratek primeri s časom naraščanja.

Poglejmo še, kakšen je spekter svetlobe, če je fazna modulacija periodična:

$$U = U_m \sin \omega_m t \ . \tag{9.21}$$

Polje izhodne svetlobe bo tedaj

$$E_{izh} = E_{vh} \cos(\omega t + \delta \sin \omega_m t) \ , \tag{9.22}$$

kjer je $\delta = \omega n_0^3 r U_m L/(\sqrt{3}cd)$. Z uporabo identitet

$$\begin{aligned} \cos(\delta \sin x) &= \mathrm{J}_0(\delta) + 2\mathrm{J}_2(\delta)\cos 2x + \ldots \\ \sin(\delta \sin x) &= 2\mathrm{J}_1(\delta)\sin x + 2\mathrm{J}_3 \sin 3x + \ldots \end{aligned} \tag{9.23}$$

je izhodno polje mogoče zapisati v obliki

$$\begin{aligned} E_{izh} &= E_{vh}[\mathrm{J}_0(\delta)\cos\omega t \pm \mathrm{J}_1(\delta)\cos(\omega \pm \omega_m)t + \\ &\quad + \mathrm{J}_2(\delta)\cos(\omega \pm 2\omega_m)t \pm \ldots] \end{aligned} \tag{9.24}$$

Periodična fazna modulacija torej da v spektru stranske pasove, odmaknjene od osnovne frekvence ω za modulacijsko frekvenco. Njihova velikost je podana s kvadratom Besselovih funkcij parametra δ. Če je ta majhen, se lahko zadovoljimo le s prvim členom.

9.4 Modulacija pri visokih frekvencah

Pogosto je pomembna hitrost elektrooptične modulacije. Zato polejmo, kaj se zgodi pri visokih modulacijskih frekvencah.

Elektrooptični pojav pri nizkih frekvencah ima dva prispevka: direktnega, kjer zunanje polje vpliva neposredno na elektronsko polarizabilnost, in posrednega preko piezoelektričnega pojava. Snovi, ki nimajo centra inverzije, so tudi piezoelektrične in se v zunanjem električnem polju deformirajo. Deformacija pa povzroči spremembo lomnega količnika, o čemer bomo podrobneje govorili v enem od naslednjih oddelkov. Celotno spremembo tenzorja b_{ij} lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \delta b_{ij} &= r^*_{ijk}E_k + p_{ijlm}S_{lm} \\ &= r^*_{ijk}E_k + p_{ijlm}\pi_{lmk}E_k \end{aligned} \tag{9.25}$$

Tu je $S_{lm} = \pi_{lmk}E_k$ piezoelektrično povzročena deformacija. Pri nizkih frekvencah sta oba prispevka primerljivo velika in je efektivni elektrooptični tenzor $r_{ijk} = r^*_{ijk} + p_{ijlm}\pi_{lmk}$. Pri dovolj velikih frekvencah deformacija kristala ne more več slediti modulacijski napetosti in ostane le direktni prispevek r^*_{ijk}. To se zgodi nad akustičnimi resonancami kristala. Pri akustičnih resonancah, to je, kadar modulacija v kristalu vzbudi stoječe zvočno valovanje, pa se piezoelektrični prispevek resonančno poveča.

Pogoj za akustično resonanco je, da je dimenzija kristala mnogokratnik polovice valovne dolžine akustičnega vala v kristalu. Uporabne dimenzije kristalov so reda velikosti centimeter, hitrost zvočnih valov je okoli 5000 m/s, tako da dobimo resonance v področju od nekaj sto kHz do nekaj deset MHz. Mogoče jih je tudi izkoristiti za povečanje elektrooptičnega efekta pri izbrani frekvenci.

Pri visokih frekvencah postane pomembna tudi električna vezava modulatorja. Kristal predstavlja neko kapacitivno breme. Njegova impedanca pada z rastočo frekvenco, zato je vedno večji del padca napetosti na notranjem uporu izvora napetosti. Pomagamo si lahko tako, da vzporedno s kristalom vežemo še tuljavo, tako da je resonančna frekvenca $1/(L_tC)$ nastalega nihajnega kroga enaka željeni modulacijski frekvenci ω_m. Tedaj je večina padca napetosti na kristalu in tuljavi. Da resonanca ni preostra in da imamo na voljo dovolj širok pas modulacijskih frekvenc, vežemo vzporedno s kristalom še upor z upornostjo R. Širina modulacijskega pasu je

$$\Delta\omega_m = \frac{1}{RC} \,. \tag{9.26}$$

Na uporu se troši moč

$$P = \frac{1}{2}\frac{U^2}{R} = \frac{1}{2}U^2C\Delta\omega_m = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 La}{2d}U^2C\Delta\omega_m \,, \tag{9.27}$$

kjer je a velikost kristala v prečni smeri. Naj bo U ravno napetost, ki da fazno razliko π. Potem dobimo z uporabo enačbe 9.18

$$P = \frac{A}{L}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\Delta\omega_m\lambda^2}{3n_0^6r^2} \,, \tag{9.28}$$

kjer je A prečni presek kristala. Potrebna moč je odvisna od lastnosti modulatorja in širine modulacijskega pasu. Pri širini modulacijskega pasu 1 MHz in preseku kristala 1 cm^2 je potrebna moč nekaj deset W, kar je za visokonapetosten in hiter izvor že znatna moč.

9.5 Elastooptični pojav

Dielektrične lastnosti in lomni količnik so odvisne tudi od deformacije snovi. Podobno kot pri elektrooptičnem pojavu lahko spremembo obratnega dielektričnega tenzorja zapišemo

$$\delta b_{ij} = p_{ijkl} S_{kl} \ . \tag{9.29}$$

S_{kl} je tenzor defomacije snovi:

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \ , \tag{9.30}$$

p_{ijkl} pa *elastooptični tenzor*. Ta je različen od nič v vsaki snovi, ker povezuje dva simetrična tenzorja drugega ranga. Popisuje tudi spremembo dielektrične konstante in lomnega količnika zaradi spremembe gostote snovi. Je simetričen v prvem in drugem paru indeksov, tako da ima v najbolj splošnem primeru 36 neodvisnih komponent. Simetrija danega kristala seveda to število zmanjša.

Podobno kot pri elektrooptičnem pojavu lahko iz 9.29 izrazimo spremembo dielektričnega tenzorja

$$\delta \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} p_{ijkl} S_{kl} \ , \tag{9.31}$$

kjer smo že predpostavili, da je nemoteni ε diagonalen.

Dvojni lom, ki se pojavi v deformirani snovi, izkoriščamo za študij mehanskih napetosti v modelih, ki so izdelani iz prozorne plastične snovi. Nas bo v nadaljevanju zanimal uklon svetlobe na periodični modulaciji lomnega količnika, ki nastane zaradi zvočnih valov v snovi.

9.6 Braggov uklon na zvočnih valovih

V plasti prozorne snovi vzbudimo stoječe zvočno valovanje. V zgoščini je lomni količnik nekoliko večji, zato je optična pot na takem mestu skozi plast daljša. Ravno svetlobno valovanje, ki pada na plast, po izstopu iz plasti ne bo imelo več povsod enake faze, valovno čelo bo periodično modulirano s periodo valovne dolžine zvoka. V veliki oddaljenosti od plasti bomo poleg osnovnega snopa dobili še uklonjene snopa v smereh, za katere velja

$$\Lambda \sin\theta = \pm 2N\pi \ , \tag{9.32}$$

kjer smo z Λ označili valovno dolžino zvoka v snovi. Zgoščine in razredčine izginejo vsake pol zvočne periode, zato je tudi intenziteta uklonjenih snopov modulirana z dvojno frekvenco zvoka.

V splošnem je delež uklonjene svetlobe neuporabno majhen. Znaten postane le tedaj, kadar je za enega od uklonjenih valov izpolnjen Braggov pogoj, to je, kadar velja

$$\vec{k}_0 \pm \vec{q} = \vec{k}_1 \ , \tag{9.33}$$

kjer je $\vec{k}_0$ valovni vektor vpadne svetlobe, $\vec{k}_1$ valovni vektor uklonjenega svetlobnega snopa, $\vec{q}$ pa valovni vektor zvočnega vala. Znak plus velja, kadar potuje zvok proti projekciji $\vec{k}_0$ na $\vec{q}$. Enačba 9.33 je pogoj za ohranitev gibalne količine fotona pri sipanju na zvočnem valu. Lahko jo prepišemo še nekoliko drugače. Frekvenca zvočnega vala je dosti nižja od frekvence svetlobe,

zato se frekvenca svetlobe pri sipanju le malo spremeni in sta $veck_0$ in $\vec{k}_1$ po velikosti skoraj enaka. Tedaj je $q = 2k_0 \sin\theta_B/2$ (glej sliko 9.7), od koder imamo Braggov pogoj v obliki

$$2\Lambda \sin\frac{\theta_B}{2} = \lambda_0 \,. \tag{9.34}$$

Obenem mora biti vpadni kot na zvočni val enak izhodnemu, torej na zvočnem valu se Braggovo sipana svetloba zrcalno odbije. Razmere so povsem analogne Braggovemu sipanju rentgenske svetlobe na kristalnih ravninah. Kadar je izpolnjen Braggov pogoj, je mogoče doseči, da se vsa vapdna svetloba siplje, kot bomo pokazali nekoliko kasneje.

Če je zvočni val potujoč, kar smo v gornjem razmišljanju že privzeli s tem, ko smo mu pripisali natanko določen valovni vektor $\vec{q}$, se spremeni tudi frekvenca sipanega vala zaradi Dopplerjevega premika pri odboju zvočnem valu, ki potuje s hitrostjo v_z. Upoštevati moramo le projekcijo na smer vapdne in odbite svetlobe, zato je

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \pm\frac{2v_z \sin\theta_B/2}{c} = \pm\frac{2\Omega\Lambda \sin\theta_B/2}{c} = \pm\frac{\Omega}{\omega};. \tag{9.35}$$

Upoštevali smo, da velja Braggov pogoj 9.34. Sprememba frekvence sipane svetlobe je kar enaka frekvenci zvočnega vala. To sledi tudi iz zahteve, da se mora pri sipanju na zvočnem valu ohraniti energija vpadnega fotona in kvanta zvo"nega valovanja - fonona, ki se pri sipanju absorbira (znak plus, zvočni val potuje proti projekciji $\vec{k}_0$ na $\vec{q}$) ali nastane.

Kadar imamo v snovi stoječe zvočno valovanje, lahko sipanje obravnavamo kot vsoto sipanja na dveh valovanjih z valovnima vektorjema $\vec{q}$ in $-\vec{q}$. Smer Braggovo sipanega vala je obakrat enaka, frekvenca pa se enkrat poveča, drugič zmanjša za Ω. Zato dobimo utripanje sipanega vala s frekvenco 2Ω.

Braggovo sipanje svetlobe na zvočnih valovih se uporablja v več optičnih napravah. Najpomembnejše je uklanjanje svetlobe iz vpadne smeri, pri čemer ima uklonjeni snop še spremenjeno frekvenco. Z vklaplanjem in izklaplanjem zvočnega vala, ki ga vzbujamo s piezoelektričnim elementom, na katerega pritisnemo izmenično napetost, lahko moduliramo intenziteto direktnega svetlobnega snopa. To potrebujemo na primer pri preklaplanju kvalitete laserskega resonatorja. S spreminjanjem zvočne frekvence pa lahko spreminjamo smer uklonjenega snopa, pri čemer pa smo precej omejeni s tem, da mora biti približno izpolnjen Braggov pogoj.

Druga uporaba je spreminjanje frekvence svetlobe. Možne so spremembe do nekaj sto MHz, kar je ravno primerno za uporabo v laserskih merilnikih hitrosti, kjer merimo frekvenco utripanja med svetlobo, odbito od merjenega predmeta, in referenčno svetlobo. Če ima referenčna svetloba isto frekvenco kot merilni snop, ni mogoče določiti predznaka hitrosti predmeta, če pa referenčni svetlobi nekoliko spremenimo frekvenco, dobimo utripanje tudi tedaj, ko predmet miruje. Frekvenca utripanja se poveča ali zmanjša glede na predznak hitrosti predmeta.

Tretja pomembna uporaba je kombinacija obeh gornjih za uklepanje faz v laserskem resonatorju. Če imamo v Braggovem elementu stoječe zvočno valovanje, je amplituda direktnega snopa modulirana s frekvenco zvoka. Če je frekvenca zvoka ravno enaka razmiku frekvenc laserskih nihanj, lahko dobimo uklenjene faze vzbujenih nihanj in s tem kratke, periodične sunke svetlobe, kot smo videli v petem poglavju.

Zanimiva je tudi možnost, da napravimo s pomočjo Braggovega elementa hiter frekvenčni analizator električnih signalov. Shemo kaže slika **??**. Piezoelektrični element vzbujamo z električnim siganlom, ki ima neznan spekter. Enak spekter imajo tudi vzbujeni zvočni valovi. Vsakemu valu določene frekvence ustreza določen kot odklona svetlobnega snopa. Za Braggovim

elementom postavimo lečo. Vsak delni uklonjeni snop da v goriščni ravnini svetlo točko, katere položaj je odvisen od kota odklona in s tem od frekvence zvočnega vala. Spekter zaznamo z vrstičnim detektorjem. Na celo napravo lahko pogledamo tudi takole: Braggova celica frekvenčni spekter zvočnih valov prevede v prostorski spekter prepuščene svetlobe. Prostorski spekter svetlobe pa lahko analiziramo z lečo, ki nam v goriščni ravnini na desni da prostorsko Fourierovo transformacijo svetlobnega snopa na levi strani leče.

Nismo še ugotovili, kolikšen je delež uklonjene svetlobe. Rešiti moramo valovno enačbo v nehomogenem sredstvu, kar je dokaj težaven problem in se moramo zateči k približkom. Ena možnost je, da uporabimo običajno uklonsko teorijo, kjer privzamemo, da lahko vpliv periodične modulacije lomnega količnika snovi upoštevamo s spremembo faze svetlobnega vala na izhodu iz snovi: $\delta\phi = \delta n k_0 L$, kjer je L debelina plasti. (Naloga) Vendar je tak račun dober le v primeru, kadar je prečna variacija faze majhna in je debelina L majhna.

Primernejša je metoda *sklopljenih valov*. Paralelen snop zvočnega valovanja z valovnim vektorjem *vecq* naj potuje v smeri x. Širina snopa naj bo L. Nanj pod kotom ϕ glede na os z vpada ravno svetlobno valovanje z valovnim vektorjem $\vec{k} = (k_1, 0, k_3) = k(\sin\phi, 0, \cos\phi)$. Vse valovanje, vpadno na levi zvočnega snopa in izhodno na desni, obravnavajmo znotraj snovi, da nam ni treba upoštevati še loma, ki le zaplete izraze. Zaradi periodične modulacije lomnega količnika so ravni valovi, katerih x-komponente valovnih vektorjev se razlikujejo za q, med seboj sklopljeni, zato njihove amplitude niso konstantne, temveč se v smeri z počasi spreminjajo, kar želimo v različnih približkih izračunati.

Privzemimo, da se v snovi zaradi zvočnih valov spremeni le velikost dielektrične konstante, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon_1 \sin(qx - \Omega t) \ , \tag{9.36}$$

kjer je sprememba ε_1 povezana z amplitudo deformacije S_0 v zvočnem valu :$\varepsilon_1 = -\varepsilon^2 p S_0$. Izpustili smo indekse tenzorjev.

Valovna enačba ima obliko

$$\nabla^2 E = \frac{\varepsilon'}{c^2}\frac{\partial E^2}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial P_1^2}{\partial t^2} \ . \tag{9.37}$$

Na levi strani smo zanemarili, da $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$, če je ε funkcija kraja. Da s tem nismo zagrešili znantne napake, naj bralec ugotovi sam (Naloga). $P_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \sin(qx - \Omega t) E$ predstavlja dodatno polarizacijo snovi, ki nastane zaradi zvočnega vala.

Enačbo 9.37 brez P_1 rešijo ravni valovi. Učinek člena s P_1 je, da ravnemu valu z valovnim vektorjem $\vec{k}$ in frekvenco ω primeša val z valovnim vektorjem $\vec{k} \pm \vec{q}$ in frekvenco $\omega \pm \Omega$. Zato iščimo rešitve v obliki vsote ravnih valov, torej Fourierove vrste

$$E = \sum_n A_n(z) e^{in(qx - \Omega t)} e^{i(k_1 x + k_3 z - \omega t)} \ . \tag{9.38}$$

Zaradi sklopitve preko P_1 moramo dovoliti, da so amplitude A_n funkcije z. Če je ε_1 dovolj majhen, se $A_n(z)$ le počasi spreminjajo.

Izračunajmo

$$\nabla^2 E = \sum_n \left\{ -[k_3^2 + (k_1 + nq)^2] A_n + 2ik_3 A_n' \right\} e^{i[(k_1 + nq)x + k_3 z - (\omega + n\Omega)t]} \ . \tag{9.39}$$

Člen z A_n'' lahko izpustimo, če je le $k_3 A_n' >> A_n''$, to je, če se A_n spreminjajo počasi v primerjavi z $\exp(ik_3 z)$. Vstavimo izraza 9.38 in 9.39 v valovno enačbo 9.37 in zahtevajmo, da je vsak člen vsote po n posebej enak nič. Tako dobimo

$$\begin{aligned} -[k_3^2 + (k_1 + nq)^2]A_n + 2ik_3 A_n' = \\ = -\frac{\varepsilon'}{c^2}(\omega + n\Omega)^2[A_n - \frac{\varepsilon_1}{2i\varepsilon'}(A_{n-1} - A_{n+1}) \quad . \end{aligned} \tag{9.40}$$

Upoštevamo, da je $k_1^2 + k_3^2 = \varepsilon'(\omega/c)^2 = k^2$ in $\Omega = v_z q$. Ker je $v_z << c$, zanemarimo člene reda v_z/c, pa dobimo

$$A_n' + i\beta_n A_n + \xi(A_{n+1} - A_{n-1}) = 0 \, , \tag{9.41}$$

kjer je

$$\beta_n = \frac{nq}{k_3}(k_1 + nq) \tag{9.42}$$

in

$$\xi = \frac{\varepsilon_1}{4\varepsilon'}\frac{k^2}{k_3} \, . \tag{9.43}$$

Reševanje sistema 9.41 je težavno. Rešitve poiščimo le v treh pomembnih limitnih primerih. Naj bo amplituda vala, ki vpada z leve, $A_0(0) = A_0$, ostale $A_n(0)$ pa nič.

Najprej privzemimo, da je $L\xi << 1$, da je torej ε_1 majhen in debelina zvočnega snopa ne prevelika. Tedaj je pri vseh z in za pozitivne n $A_{n+1} << A_n$ in lahko člen A_{n+1} v enačbi 9.41 ispustimo. S tem dobimo preprost sistem enačb

$$A_n' + i\beta_n A_n = \xi A_n \, , \tag{9.44}$$

ki jih lahko zapored integriramo:

$$A_n(z) = \xi e^{-i\beta_n z}\int_0^z A_{n-1}(z')e^{i\beta_n z'}dz' \, . \tag{9.45}$$

Podobne izraze dobimo za negativne n, to je za uklonjene valove, ki se jim frekvenca pri sipanju zmanjša.

Poglejmo posebej prvi uklonjeni val z amplitudo A_1. Po predpostavki, da je $A_{\pm 1} << A_0$, se le malo energije uklanja iz osnovnega vala in je $A_0(z)$ skoraj konstanta. Potem lahko integral v 9.46 izračunamo:

$$A_1(L) = A_0 \xi L \frac{\sin\beta_1 L/2}{\beta_1 L/2} e^{-i\beta_1 L/2} \, . \tag{9.46}$$

$A_1(L)$ ima vrh pri $\beta_1 = 0$, to je pri

$$\frac{q}{\cos\phi}(k\sin\phi + \frac{q}{2}) = 0 \tag{9.47}$$

ali

$$2k\sin\phi = -q \, . \tag{9.48}$$

Prečna komponenta valovnega vektorja sipanega vala je tedaj

$$k_1 + q = k\sin\phi - 2k\sin\phi = -k\sin\phi \, . \tag{9.49}$$

Smer sipanega vala je torej pod kotom $-\phi$ glede na os z, simetrično z vpadnim valom. Če še označimo $\theta = 2\phi$, vidimo, da predstavlja $\beta_1 = 0$ ravno pogoj za Braggovo sipanje vpadnega vala.

Razmere pri Braggovem sipanju je vredno pogledati še nekoliko podrobneje. Ker je hitrost zvoka mnogo manjša od hitrosti svetlobe, je $\Omega/c << q$ in sta velikosti vpadnega in sipanega valovnega vektorja enaki. Komponenti x se razlikujeta za q. Kadar je Braggov pogoj izpolnjen, velja tudi da je sipani valovni vektor $\vec{k}_s = \vec{k} + \vec{q}$, kot je razvidno iz slike **??** ali kot se lahko prepričamo s kratkim računom. Braggov pogoj je torej enakovreden zahtevi, da se morajo pri sipanju ohraniti valovni vektorji. V kvantni mehaniki je $\hbar\vec{k}$ gibalna količina fotona, $\hbar\vec{q}$ pa gibalna količina kvanta zvočnega valovanja fonona. Braggov pogoj je torej primer ohranitve gibalne količine. Če se ta ne ohranja, je sipanje neučinkovito in le oscilira okoli majhne vrednosti, kar opisuje faktor $\sin(\xi L/2)$.

Delež moči uklonjenga vala je

$$\frac{I_1}{I_0} = \left|\frac{A_1}{A_0}\right|^2 = (\xi L)^2 \left(\frac{\sin\beta_1 L/2}{\beta_1 L/2}\right)^2 . \tag{9.50}$$

Kadar je Braggov pogoj izpolnjen, je $I_0/I_1 = (\xi L)^2$, kar lahko velja le, dokler je $\xi L << 1$. Da se izognem tej omejitvi, moramo upoštevati tudi zmanjšanje moči vpadnega snopa.

Braggov pogoj je hkrati lahko izpolnjen le za en uklonjen val, na primer $n = 1$. Zato so tedaj vse ostale amplitude A_n, $n \neq 0, 1$ majhne in ne vplivajo na A_1. To nam omogoča drug približek, ki je za uporabo zelo pomemben. Opustimo omejitev $L\xi << 1$, vendar zahtevajmo, da sta le A_0 in A_1 različni od nič. Sedaj $A_0(z)$ ne smemo več obravnavati kot konstante. Iz sistema 9.41 dobimo

$$\begin{aligned} A_0' + \xi A_1 &= 0 \\ A_1' - \xi A_0 &= 0 . \end{aligned} \tag{9.51}$$

Začetni pogoji so $A_0(0) = A_0$ in $A_1(0) = 0$. Rešitev enačb **??** je

$$\begin{aligned} A_0(L) &= A_0 \cos\xi L \\ A_1(L) &= A_0 \sin\xi L . \end{aligned} \tag{9.52}$$

Če je izpolnjen Braggov pogoj, se moč vpadnega vala na razdalji $\pi\xi/2$ skoraj vsa pretoči v uklonjeni snop, nato pa zopet nazaj (slika **??**). Za čim bolj učinkovito delovanje akustooptičnega modulatorja seveda želimo doseči ravno take pogoje.

Razmerje med močjo uklonjenega in vpadnega snopa je

$$\frac{I_1}{I_0} = \sin^2\left(\frac{\pi n_0^3 p S_0 L}{2\lambda\cos\phi}\right) . \tag{9.53}$$

kjer smo upoštevali, da je $\xi = \pi\varepsilon_1/(2n_0\lambda\cos\phi)$ in $\varepsilon_1 = n_0^4 p S_0$, kjer je S_0 amplituda deformacije v zvočnem valu. Izrazimo jo lahko z gostoto moči zvočnega vala

$$j_z = \frac{1}{2} C S_0^2 v_z , \tag{9.54}$$

kjer je C elastična konstanta snovi. Iz $v_z^2 = C/\rho$ izrazimo še C, s čemer dobimo

$$S_0 = \sqrt{\frac{2 j_z}{\rho v_z^3}} . \tag{9.55}$$

Merilo uporabnosti neke snovi za akustooptični modulator je

$$M = \frac{n_0^6 p^2}{\rho v_z^3} \ . \tag{9.56}$$

Poglejmo primer. V kremenu $\rho = 2,2 \cdot 10^3$ kg/m^3, $v_z = 6000$ m/s, $n_0 = 1,46$ in $p = 0,2$, tako da je $M = 8 \cdot 10^{-16}$ W/m^2. Pri gostoti zvočnega toka 10 W/cm^2 in valovni dolžini 633 nm je za popolen prenos močiv uklonjeni snop $L = 3$ cm. Gornja gostota zvočnega toka je kar velika in je ni prav lahko doseči, zato so običajni uklonski izkoristki nekaj manjši od 1.

Kot odklona uklonjenega vala 2ϕ je

$$2\phi = \frac{q}{k} = \frac{\lambda}{n_0 \Lambda} = 1,7 \cdot 10^{-3} \ . \tag{9.57}$$

Kot je torej precej majhen.

Opisani račun izkoristka uklona na zvočnih valovih je uporaben tudi pri računu izkoristka holograma. V primeru faznega holograma je račun čisto enak in nam kaže tudi razliko med tankim in debelim hologramom, kako pa je z izkoristkom amplitudnega holograma, kjer je modulirana absorpcija v snovi, lahko bralec izračuna sam (Naloga).

Enačbe 9.41 je enostavno rešiti še v it Raman- Nathovem približku, ki sicer ni posebno pomemben za uporabo, je pa zanimiv. Vpeljimo novo neodvisno spremenljivko $\zeta = 2\xi z$. Zveza 9.41 preide v

$$2\frac{dA_n(\zeta)}{d\zeta} + A_{n+1}(\zeta) - A_{n-1}(\zeta) = \frac{\beta_n}{\xi} A_n \ . \tag{9.58}$$

Člen na desni lahko izpustimo, če je

$$\frac{\beta_n}{\xi} = \frac{4nq}{k}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_1}(\sin\phi - \frac{nq}{2k}) << 1 \ , \tag{9.59}$$

to je, če je pri danem ε_1 valovna dolžina zvoka dovolj velika v primeri z valovno dolžino svetlobe. Iz 9.58 dobimo tedaj rekurzijsko zvezo za Besselove funkcije

$$2\mathrm{J}_n' + \mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_{n-1} = 0 \tag{9.60}$$

in je $A_n(z) = A_0 \mathrm{J}_n(2\xi z)$. Kadar je $2\xi L$ ničla J_0, prvič je to pri $2\xi L = 2.4$, se vsa energija ukloni iz vpadnega snopa, vendar gre v tem primeru, ko Braggov pogoj ni izpolnjen, v mnogo uklonjenih snopov.

9.7 Modulacija s tekočimi kristali

Tekoči kristali so anizotropne kapljevine in so vmesna faza med običajnimi izotropnimi kapljevinami in kristali. Stopnja njihove urejenosti je lahko različna. Tekoče kristale tvorijo podolgovate ali ploščate molekule, vendar so za sedaj praktično pomembne le faze, ki jih tvorijo podolgovate organske molekule. Tudi med njimi so bili do nedavnega v uporabi le optične naprave z nematskimi tekočimi kristali, zato se zanimajmo le zanje. Običajno jih tvorijo molekule z relativno togim jedrom iz dveh ali treh benzenovih obročev, ki imajo na koncih krajše ali daljše alifatske verige (slika **??**). Težišča molekul so v nematski fazi neurejena, enako kot v navadni tekočini, osi molekul pa so v povprečju urejene v določeno smer. Smer povprečne urejenosti opišemo

z enotnim vektorjem $\vec{n}$, ki mu rečemo it direktor. Smeri $\vec{n}$ in $-\vec{n}$ sta enakovredni, z drugimi besedami, molekule z enako verjetnostjo kažejo v smeri $+\vec{n}$ kot v $-\vec{n}$. Stopnja urejenosti v mikroskopski sliki ni prav velika, povprečen odklon molekul od $\vec{n}$ je nekaj deset stopinj.

Nematski tekoči kristal se obnaša kot enoosen dvolomni kristal z optično osjo vzporedno z $\vec{n}$. Ker je optična polarizabilnost benzenovih obročev vzdolž osi molekul precej večja od prečne, je razlika med rednim in izrednim lomnim količnikom razmeroma velika, navadno med 0,1 in 0,2.

V makroskopskem vzorcu nematskega tekočega kristala se smer $\vec{n}$ po vzorcu neurejeno spreminja, če posebej ne poskrbimo, da ima povsod isto smer. Energija takega deformiranega stanja je nekoliko večja od energije homogenega stanja, zaradi česar na delček tekočega kristala okolica deluje z navorom, ki deluje v smeri zmanjševanja nehonogenosti $\vec{n}$. Temu pojavu, zna"ilnemu za tekoče kristale, pravimo orientacijska elastičnost. Nekoliko podrobneje je opisan v Dodatku na koncu poglavja. Vendar so ti elastični navori prešibki, da bi uredili razsežne vzorce. Urejene vzorce, kakršne potrebujemo za uporabo v optičnih elementih, lahko dobimo s pomočjo zunanjega polja ali pa v dovolj tankih plasteh, kjer mejne površine ustrezno pripravimo.

Zunanje električno ali magnetno polje na tekoče kristale tudi deluje z navorom. Električna in magnetna susceptibilnost nematskega tekočega kristala nista skalarja, temveč imata dve različni lastni vrednosti, eno v za smer vzporedno z $\vec{n}$, drugo za pravokotno. Zato je elektrostatična energija odvisna od kota med zunanjim poljem $vecE$ in $\vec{n}$. Od kota odvisni del energije lahko zapišemo v obliki

$$w_a = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_a(\vec{E}\cdot\vec{n})^2 \,, \tag{9.61}$$

kjer je $\varepsilon_a = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$ anizotropni del dielektrične konstante. Če je $\varepsilon_a > 0$, se molekule skušajo postaviti v smer polja, če je $\varepsilon_a < 0$, pa pravokotno na polje.

Urejen vzorec je mogoče narediti tudi v tankih plasteh. Če površino, ki je v stiku s tekočim kristalom, prevlečemo z primerno pastjo, se molekule tekočega kristala tik ob povšini na določen način uredijo. Tanka plast najlona, ki jo podrgnemo v željeni smeri, povzroči, da je $\vec{n}$ ob površini paralelen s površino v smeri drgnenja. Drgnenje deloma uredi verige najlona, zato se tudi molekule tekočega kristala raje uredijo v isti smeri. Da je $\vec{n}$ pravokoten na površino, dosežemo na primer s tanko plastjo lecitina. Ta ima polarno glavo, ki se adsorbira na stekleno površino, in alifatsko verigo, ki stoji približno pravokotno na površino. Zato se tudi alifatski repi molekul tekočega kristala uredijo enako. V obeh primerih, paralelni ali pravokotni orientaciji ob steni, se urejenost zaradi orientacijske elastičnosti ohranja tudi stran od stene, tako da lahko brez težav dobimo urejene vzorce debeline do kakih 200 μm. Pri večjih debelinah so elastični navori prešibki in ostanejo v vzorcu defekti.

Struktura tekočekristalnega vzorca je tako odvisna od orientacijske elastičnosti, od robnih pogojev, ki jih določimo z obdelavo mejne površine, in od zunanjega električnega ali magnetnega polja.

Preprost elektrooptični modulator ali kazalnik na osnovi nematskih tekočih kristalov lahko dobimo takole. Vzemimo vzorec tekočega kristala med dvema stekloma, na katerih sta prozorni elektrodi. Ureditev tekočega kristala naj bo vzporedna s površino stekel. Tudi optična os ima isto smer. Dovolj velika napetost zasuče $\vec{n}$ in s tem optično os pravokotno na stene, razen tik ob površini. Pri debelini 10 μm je potrebna napetost nekaj voltov. Nekaj več o tem preklopu najde bralec v Dodatku na koncu poglavja.

Naj debelina h obravnavane plasti za izbrano valovno dolžino svetlobe ustreza pogoju

$$h(n_i - n_r) = (2N+1)\frac{\lambda}{2}\,, \tag{9.62}$$

kjer je N celo število. Plast torej deluje kot ploščica $\lambda/2$. Ker je $n_i - n_r \simeq 0,1$, je potrebna debelina nekaj μm. Vzorec damo med prekrižana polarizatorja s prepustno smerjo 45° na $\vec{n}$. Ploščica polarizacijo svetlobe z izbrano valovno dolžino zasuče za 90°, tako da gre svetlobe tudi skozi analizator. Ko vključimo napetost, se optična os obrne, polarizacija svetlobe se pri prehodu skozi plast ohrani in analizator je ne prepusti.

Tak preklopnik ima nekaj slabih lastnosti. Prepustnost je odvisna od valovne dolžine svetlobe in od temperature in debelina preklopnika mora biti povsod enaka. Zato se v praksi uporablja zasukana nematska plast.

Obrnimo eno od stekel za 90°, tako da sta smeri urejanja na obeh mejah med seboj pravokotni. Tedaj se smer $\vec{n}$ v plasti zvezno zavrti od ene do druge površine, kot kaže slika **??**. Polarizacija svetlobe, ki je ob vstopu v plast polarizirana v smeri urejanja, skozi plast približno sledi smeri $\vec{n}$, kot bomo pokazali nekoliko kasneje, in je ob izstopu iz plasti polarizirana pravokotno na vpadno polarizacijo. Z električnim poljem preklopimo optično os pravokotno na plast in polarizacija se ne zasuče. Plast med prekrižanima polarizatorjema brez polja prepušča svetlobo, v polju pa ne. Pri tem delovanje kazalnika ni dosti odvisno niti od debeline plasti niti od valovne dolžine. Kadar želimo, da kazalnik deluje v odbiti svetlobi, damo za zadnji analizator še odbojno površino.

Pri kristalnem elektrooptičnem modulatorju smo lahko dobili tudi vmesne prepustnosti, medtem ko s tekočimi kristali na opisan način lahko dobimo le zaprto in odprto stanje, vmesna stanja pa je zelo težko kontrolirati.

Pokažimo še, da polarizacija v sredstvu, ki je lokalno enoosno in se optična os suče v pravokotni smeri, v določenih pogojih res približno sledi optični osi. Poleg zasukane nematske celice je pomemben primer snovi s takimi lastnostmi holesteričen tekoči kristal, ki je zelo podoben nematskim, le da se $\vec{n}$ spontano počasi suče okoli smeri, pravokotne na $\vec{n}$.

Optična os sredstva naj leži v ravnini xy in naj se enakomerno suče, ko se premikamo vzdolž osi z. Kot med optično osjo in osjo x lahko zapišemo

$$\phi = qz\,. \tag{9.63}$$

Pri tem je $2\pi/q$ perioda sukanja optične osi. Zanimajmo se le za širjenje svetlobe v smeri z. Tedaj potrebujemo le del dielektričnega tenzorja v xy ravnini. Njegova oblika je

$$\varepsilon(z) = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon_a \cos 2\phi & \frac{1}{2}\varepsilon_a \sin 2\phi \\ \frac{1}{2}\varepsilon_a \sin 2\phi & \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon_a \cos 2\phi \end{bmatrix}\,, \tag{9.64}$$

kjer je

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_\parallel + \varepsilon_\perp}{2} \tag{9.65}$$

Valovna enačba za valovanje s frekvenco ω je

$$\frac{d^2\vec{E}}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(z)\vec{E} \tag{9.66}$$

ali v komponentah

$$
\begin{aligned}
-\frac{d^2E_x}{dz^2} &= (\beta^2+\alpha^2\cos 2qz)E_x+\alpha^2E_y\sin 2qz \\
-\frac{d^2E_y}{dz^2} &= \alpha^2E_x\sin 2qz+(\beta^2+\alpha^2\cos 2qz)E_y\,,
\end{aligned}
\tag{9.67}
$$

kjer je $\alpha^2=\varepsilon_a\omega^2/(2c^2)$ in $\beta^2=\bar{\varepsilon}\omega^2/c^2$.

Ugodno je vpeljati krožni polarizaciji $E_+=E_x+iE_y$ in $E_-=E_x-iE_y$. Enačbi **??** preieta v

$$
\begin{aligned}
-\frac{d^2E_+}{dz^2} &= \beta^2E_++\alpha^2E_-e^{2iqz} \\
-\frac{d^2E_-}{dz^2} &= \alpha^2E_+e^{-2iqz}+\beta^2E_-\,.
\end{aligned}
\tag{9.68}
$$

Iščemo lastne rešitve valovne enačbe v sredstvu s periodično modulacijo lomnega količnika. Matematično podoben problem je iskanje lastnih funkcij elektronov v kristalu. Za te vemo, da morajo imeti Blochovo obliko, to je, biti morajo produkt periodične funkcije s periodo kristalne mreže in faktorja $\exp(ikz)$. Matematiki pravijo tej trditvi Floquetov izrek. Veljati mora tudi v našem primeru. Lastne valove torej poiščimo v obliki

$$
\begin{aligned}
E_+ &= Ae^{i(k+q)z} \\
E_- &= Be^{i(k-q)z}\,.
\end{aligned}
\tag{9.69}
$$

Nastavek reši sistem **??**, če A in B rešita sistem homogenih linearnih enačb

$$
\begin{aligned}
[(k+q)^2-\beta^2]A-\alpha^2B &= 0 \\
-\alpha^2A+[(k-q)^2-\beta^2]B &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{9.70}
$$

Sistem je netrivialno rešljiv, če je determinanta kkoeficientov enaka nič:

$$
(k^2+q^2-\beta^2)^2-4k^2q^2-\alpha^4=0\,. \tag{9.71}
$$

β in α sta sorazmerna z ω. Dobljena enačba tako predstavlja disperzijsko relacijo - zvezo med ω in k - za svetlobo v zavitem sredstvu. Prikazana je na sliki **??**. Vsaki vrednosti ω, razen v ozkem območju med ω_- in ω_+, recimo mu frekvenčna špranja, pripadajo 4 realne rešitve za k, po dve za valovanji v pozitivni in negativni smeri. V območju špranje je en par rešitev imaginaren. Vsaki vrednosti k pripada neko razmerje koeficientov A in B, ki ga izračunamo iz enčb **??** in ki določa polarizacijo lastnega vala. Polarizacije lastnih valov so v splošnem eliptične in med pri dani frekvenci med seboj niso pravokotne, kar je posledica tega, da sistem **??** ne predstavlja čisto navadnega problema lastnih vektorjev simetrične matrike. V območju frekvenčne špranje le en par rešitev predstavlja potujoč val, drug pa polje, ki eksponento pojema v sredstvo. Zato se svetloba s frekvenco v špranji in z ustrezno polarizacijo, ki vpada na holesteričen tekoči kristal, totalno odbije. Pojav je povsem analogen Braggovemu odboju na kristalih in daje holesterikom značilen obarvan videz. Več o zanimivih podrobnostih optike holesteričnih tekočih kristalov najde bralec v **??** in nalogah k temu poglavju.(naloga)

Za razlago delovanja zasukane nematske celice zadošča primer, ko je $q << \beta$ in α, ko je torej perioda sukanja optične osi velika v primeri z valovno dolžino svetlobe. Tedaj lahko q v disperzijski zvezi kar zanemarimo, prvi popravek je šele reda q^2, in dobimo

$$
k^2=\left\{\beta^2+\alpha^2=\tfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\|}\right. \tag{9.72}
$$

Ti vrednosti, ki ustrezata velikosti valovnega vektorja za izredni in redni val v običajnem enoosnem kristalu, postavimo v eno od enačb **??** in dobimo še polarizaciji lastnih valov: $B = \pm A$.

Izračunajmo obe kartezični komponenti električnega polja za prvo rešitev:

$$\begin{aligned} E_x &= \tfrac{1}{2}(E_+ + E_-) &= \tfrac{1}{2}Ae^{ikz}(e^{iqz} + e^{-iqz}) &= Ae^{ikz}\cos qz \\ E_y &= \tfrac{1}{2}(E_+ - E_-) &= \tfrac{1}{2i}Ae^{ikz}(e^{iqz} - e^{-iqz}) &= Ae^{ikz}\sin qz \end{aligned} \quad . \tag{9.73}$$

Polarizacija torej res kar sledi optični osi. Druga rešitev da val, ki je polariziran pravokotno na lokalno optično os in se prav tako suče z njo. Prvi val se širi s fzano hitrostjo c/n_i, torej kot izredni val, drugi pa s c/n_r, to je kot redni val. Če na zasukano nematsko celico vpada svetloba, polarizirana ali paralelno ali pravokotno na optično os ob meji, dobimo na izhodni strani polarizacijo zasukano za pravi kot. V primeru, da vpadna polarizacija ne sovpada z eno od lastnih, jo moramo seveda razstaviti na obe lastni in po prehodu skozi tekoči kristal zopet sestaviti, s čemer seveda na splošno dobimo eliptično polarizacijo.

9.8 Dodatek

Energija nematskega tekočega kristala je najnižja, kadar ima $\vec{n}$ povsod isto smer. Povečanje energije zaradi krajevne odvisnosti $\vec{n}$ je v najnižjem redu sorazmerno s $(\nabla\vec{n}(\vec{r}))^2$. Najsplo"nejši izraz za it orientacijsko elastično energijo dobimo tako, da tvorimo vse neodvisne člene, v katerih nastopa $(\nabla\vec{n}(\vec{r}))^2$ in ki so invariantni na simetrijske operacije nematske faze. Dobimo[**?**]

$$F_e = \int \left\{K_1(\nabla\cdot\vec{n})^2 + K_2[\vec{n}\times(\nabla\times\vec{n})]^2 + K_3[\vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{n})]^2\right\} dV \tag{9.74}$$

K_1, K_2 in K_3 so tri Frankove orientacijske elastične konstante. Prvi člen predstavlja deformacijo v obliki pahljače, drugi upogib, tretji pa zasuk (slika **??**)

V zunanjem električnem polju se energija spremeni. Običajno je neodvisna električna količina električna poljska jakost, ker je polje posledica predpisanih napetosti na fiksnih elektrodah. Ustrezni člen v termodinamičnem potencialu je tedaj $-\vec{D}\cdot\vec{E}/2$. $\vec{E}$ razstavimo na komponento, paraleleno in pravokotno z $\vec{n}$. Dielektrični tenzor ima v smeri $\vec{n}$ vrednost $\varepsilon_\parallel$, v pravokotni smeri pa $\varepsilon_\perp$. Tako je

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0\underline{\varepsilon}\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_\parallel(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{n} + \varepsilon_0\varepsilon_\perp[\vec{E} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{n}] \\ &= \varepsilon_0\varepsilon_a(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{n} - \varepsilon_0\varepsilon_\perp\vec{E}\ , \end{aligned} \tag{9.75}$$

kjer je $\varepsilon_a = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$. Drugi člen je neodvisen od $\vec{n}$, zato ga lahko izpustimo. Prosta energija nematičnega tekočega kristala v električnem polju je tako

$$F = F_0 + F_e - \frac{1}{2}(\vec{n}\cdot\vec{E})^2\ . \tag{9.76}$$

F_0 predstavlja del proste energije, ki je neodvisen od $\vec{n}$ in $\vec{E}$. V ravnovesju je prosta energija najmanjša. Kadar je $\varepsilon_a > 0$, se zato skuša $\vec{n}$ postaviti vzporedno s poljem. Da lahko z minimizacijo F dobimo $\vec{n}(\vec{r})$, moramo poznati še robne pogoje.

Poglejmo primer. Naj bo nematski kristal med dvema paralelnima steklenima ploščama v razmiku h. Na obeh ploščah naj bo $\vec{n}$ vzporeden s površino v isti smeri. Brez zunanjega polja je $\vec{n}$ povsod enako usmerjen. V dovolj velike zunanjem polju, pravokotnem na plošči, naj bo to smer z, dobi $\vec{n}$ komponento v smeri z:

$$\vec{n}(z) = (n_1(z), 0, n_3(z))\ . \tag{9.77}$$

Deformacija n_3 naj bo majhna. Tedaj je $n_1 = 1n_3^2/2$. Robna pogoja sta $n_3(0) = n_3(h) = 0$. Približno rešitev, ki ustreza robnima pogojema, poiščemo z nastavkom

$$n_3(z) = a \sin qz \,, \qquad q = \frac{\pi}{h} \,. \tag{9.78}$$

Ta nastavek je prvi člen razvoja prave rešitve v Fourierovo vrsto. Velja

$$\nabla \times \vec{n} = (0, -\frac{dn_1}{dz}, 0) \tag{9.79}$$

in

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{n}) = (n_3 \frac{dn_1}{dz}, 0, n_1 \frac{dn_3}{dz}) \simeq (0, 0, n_3 \frac{dn_3}{dz}) \tag{9.80}$$

do drugega reda v n_3. Prosta energija je tako

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int \left[K_1 \left(\frac{dn_3}{dz} \right)^2 + K_2 n_3^2 \left(\frac{dn_3}{dz} \right)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_a (n_3 E)^2 \right] dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h [K_1 q^2 a^2 \cos^2 qz + K_3 q^2 a^4 \sin^2 qz \cos^2 qz - \varepsilon_0 \varepsilon_a E a^2 \sin^2 qz] dz = \\ &= \frac{\pi}{4q} [K_1 q^2 a^2 + \frac{1}{4} K_3 q^2 a^4 - \varepsilon_0 \varepsilon_a E a^2] \,. \end{aligned} \tag{9.81}$$

Iščemo amplitudo deformacije a, pri kateri je prosta energija najmanjša. Tedaj mora biti a rešitev enačbe

$$(K_1 q^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_a E) a + \frac{1}{2} K_3 q^2 a^3 = 0 \,. \tag{9.82}$$

Rešitvi sta

$$a = 0 \qquad \text{in} \qquad a^2 = 2 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a E - K_1 q^2}{K_3 q^2} \,. \tag{9.83}$$

Pri majhnih poljih, ko je $\varepsilon_0 \varepsilon_a E < K_1 q^2$, je fizikalno smiselna le prva rešitev, ko defomacije ni. Pri večjih poljih pa je stabilna druga rešitev. Ko večamo polje, deformacija v sredini plasti hitro naraste, tako da se $\vec{n}$ postavi skoraj popolnoma v smer zunanjega polja. Tedaj naša rešitev seveda ni dobra, saj smo računali, kot da je $n_3 << 1$. Prehodu iz nedefromiranega stanja v deformirano stanje pravimo tudi Fredericksov prehod. Na njem je osnovano preklaplanje optičnih kazalnikov na nematske tekoče kristale.

V primeru zasukane nematske celice je prehod podoben, le račun je nekoliko bolj zapleten, ker ima deformacija vse tri komponente, tudi zasuk (Naloga).

10. Optična vlakna

Optična vlakna vodijo svetlobno valovanje s tem, da se na meji med sredico z večjim lomnim količnikom in plaščem valovanje totalno odbije. So torej dielektrični valovni vodniki za svetlobo. Njihove prednosti pred bakrenimi vodniki v komunikacijski tehnologiji so bistveno večja količina informacij, ki jo je mogoče prenašati po enem vlaknu, majhne izgube in neobčutljivost na elektromagnetne motnje. Zato danes v veliki meri nadomeščajo kovinske vodnike, posebej v medkrajevni telefoniji in računalniških povezavah.

Njaenostavnejši model optičnega vodnika je planparalelna plast prozornega dielektrika z lomnim količnikom n_1 večjim od od okolice (slika **??**). Plasti z večjim lomnim količnikom recimo sredica, okolici pa plašč vlakna. Žarek je ujet v sredici, če je vpadni kot θ večji od kota totalnega odboja, za katerega velja $\sin\theta_c = n_0/n_1$. Količini $\sin(\pi/2-\theta_c)$, ki določa največji kot divergence svetlobnega snopa, ki je še ujet v vlaknu, pravimo *numerična odprtina* vlakna. Razlika lomnih količnikov $n_1 - n_0 = \Delta n$ je običajno dokaj majhna, to je le nekaj stotink.

Za podroben opis širjenja svetlobe po vlaknih, ki imajo običajno polmer sredice od nekaj do nekaj deset mikrometrov, geometrijska optika ne zadošča. Rešiti moramo Maxwellove enačbe z ustreznimi robnimi pogoji, kar je za praktična vlakna dokaj dolg račun. Ugotovimo najprej, kakšne so osnovne značilnosti valovanja po vlaknu.

Geometrijskemu žarku, ki potuje po sredici pod kotom in se na meji odbija, ustreza v valovni sliki val, ki ima prečno komponento valovnega vektorja različno $k_\perp$ od nič. Kot totalnega odboja pri dani frekvenci določa največjo možno vrednost $k_{\perp\max} \simeq n_1 k_0 \cos\theta_c = k_0\sqrt{n_1^2 - n_0^2} \simeq k_0\sqrt{2n\Delta n}$, kjer je $k_0 = \omega/c$, n pa povprečni lomni količnik. Ker je valovanje v prečni smeri omejeno na sredico dimenzije a, ima lahko $k_\perp$ le diskretne vrendosti, ki so približno $N\pi/a$, kjer je N celo število. Z vsakim N je določen en *rod* valovanj v vlaknu. Ker je omejen $k_\perp$, je število rodov je navzgor omejeno: $N_{\max} \simeq k_0 a/\pi\sqrt{2n\Delta n}$. N je tudi število vozlov, ki jih ima valovanje v prečni smeri. Število rodov v danem vlaknu je odvisno od razlike lomnih količnikov in od dimenzije vlakna. Videli bomo, da v optičnih vlaknih en rod vselej obstaja, kar je ena od razlik med dielektričnimi in kovinskimi vodniki, kakršne poznamo iz mikrovalovne tehnike in po katerih se pod določeno frekvenco ne more širiti nobeno valovanje. Optični vodniki, po katerih se širi en sam rod, imajo posebej lepe lastnosti za uporabo v komunikacijskih sistemih.

Fazna hitrost valovanja, ki potuje po valovnem vodniku, je odvisna od frekvence, imamo torej disperzijo. Razlog je v diskretnih vrednostih $k_\perp$. Naj bo β komponenta valovnega vektorja vzdolž vlakna, recimo ji tudi valovno število, tako da je odvisnost polja od koordinate vzdolž vlakna $\exp i\beta z$. Veljati mora

$$n_1\frac{\omega}{c} = \sqrt{\beta^2 + k_\perp^2} \tag{10.1}$$

. Za dano vrednost $k_\perp$ torej zveza med valovnim številom in frekvenco ni linearna, zato je fazna hitrost $v_f = \omega/\beta$ odvisna od frekvence. Grupna hitrost $v_g = d\omega/d\beta$ je različna od fazne in tudi odvisna od frekvence, kar ima za uporabo vlaken pomembne posledice.

10.1 Planparalelni vodnik

Preprost dvodimenzionalen model optičnega vlakna je planparalelna plast prozornega dielektrika z lomnim količnikom večjim od okolice: $n_1 > n_0$ (Slika **??**). Rešitev krajevnega dela valovne enačbe

$$\nabla^2\mathbf{E}+n(x)^2 k_0^2\mathbf{E} = 0 \tag{10.2}$$

kjer je $k_0 = \omega/c$, iščimo v obliki

$$\mathbf{E} = \psi(x)\, e^{i\beta z} \tag{10.3}$$

Za amplitudo $\psi(x)$ dobimo enačbo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[n(x)^2 k_0^2 - \beta^2\right]\psi = 0 \tag{10.4}$$

kjer je v plasti (območje II.) lomni količnik n_1, v okolici (območji I. in III.) pa n_0. Robni pogoji so, da sta tangencialni komponenti električne in magnetne poljske jakosti na meji zvezni. V planparalelnem primeru lahko valovanja ločimo na transverzalno električna (TE) in transverzalno magnetna (TM). V prvem primeru je $\mathbf{E}$ v smeri osi y, v drugem pa $\mathbf{H}$. Pri TE valovih je tangencialna komponenta magnetnega polja H_z. Ker je $\nabla\times\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}$, dobimo iz zveznosti H_z, da je na meji zvezen tudi odvod $\partial E_y/\partial x$. S tem postane problem matematično enak iskanju lastnih stanj energije za delec v končno globoki enodimenzionalni potencialni jami v kvantni mehaniki, kjer lastni vrednosti energije ustreza β^2. Poglejmo najprej, kakšne so možne rešitve:

a. $k_0 n_0 < \beta < k_0 n_1$. Tedaj so rešitve oscilatorne v sredici in eksponentno pojemajoče v plašču. Predstavljajo vodene valove v plasti. V kvantni mehaniki ustrezajo vezanim stanjem.

b. $\beta < k_0 n_0$. Rešitve so oscilatorne v vseh treh območjih in opisujejo valove, ki niso ujeti v plasti, temveč z ene strani vpadajo na plast, se delno skoznjo lomijo, delno pa odbijejo. V rešitvi je upoštevana tudi interferenca na plasti (Naloga). Taka stanja v kvantni mehaniki opisujejo prost delec.

Zanima nas predvsem prvi primer. Začnimo s TE polarizacijo, to je $\psi(x) = (0, \psi(x), 0)$. Naj bo $x = 0$ v sredini plasti. Zaradi simetrije morajo biti rešitve za $\psi(x)$ ali sode ali lihe. Sode re"itve imajo v sredici obliko

$$\psi_{II}(x) = C_1 \cos k_\perp x \tag{10.5}$$

v območjih I in III pa

$$\psi_{I,III}(x) = C_0\, e^{\kappa(a\mp x)} \tag{10.6}$$

Tu je $k_\perp = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}$ in $\kappa = \sqrt{\beta^2 - n_0^2 k_0^2}$. Zveznost električne poljske jakosti na meji nam da

$$C_1 \cos k_\perp a = C_0 \tag{10.7}$$

Iz zveznosti odvoda dobimo

$$C_1 k_\perp \sin k_\perp a = \kappa C_0 \tag{10.8}$$

Zadnji dve enačbi morata biti hkrati izpolnjeni, zato velja zveza

$$k_\perp \tan k_\perp a = \kappa \tag{10.9}$$

Iz izrazov za $k_\perp$ in κ dobimo še drugo zvezo

$$k_\perp^2 + \kappa^2 = k_0^2\left(n_1^2 - n_0^2\right) \tag{10.10}$$

Vpeljimo brezdimenzijske količine $\xi = ak_\perp$, $\eta = a\kappa$ in $V^2 = a^2k_0^2\left(n_1^2 - n_0^2\right)$. Z njimi lahko gornji enačbi zapišemo v prglednejši obliki

$$\xi \tan\xi = \eta \tag{10.11}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = V^2 \tag{10.12}$$

Dovoljene vrednosti ξ in η dobimo kot presečišča krogov z radijem V in funkcije $\xi\tan\xi$, kar je prikazano na sliki **??**.

Lihe rešitve imajo v sredici obliko

$$\psi_{II}(x) = C_1 \sin k_\perp x \tag{10.13}$$

v plašču pa

$$\psi_{I,III}(x) = \pm C_0\, e^{\kappa(a\mp x)} \tag{10.14}$$

Na enak način kot za sode rešitve dobimo iz robnih pogojev, da mora veljati zveza

$$k_\perp \cot k_\perp a = -\kappa \tag{10.15}$$

ali

$$-\xi\cot\xi = \eta \tag{10.16}$$

Funkcija $-\xi\cot\xi$ je na sliki **??** prikazana črtkano. Lastne vrednosti za lihe rešitve dobimo kot njena presečišča s krogomz radijem V.

Parameter V meri globino potencialne jame; iz slike vidimo, da eno vodeno valovanje (ali vezano stanje v kvantni mehaniki) vselej obstaja. Pri velikih vrednostih V je rešitev za dovoljene vrednosti ξ več. Razen največje so zelo blizu mnogokratniku $\pi/2$, kar da za dovoljene vrednosti $k_\perp$ približno mnogokratnike $\pi/(2a)$, kot smo pričakovali že v uvodu. Ko smo določili lastne vrednosti $k_\perp$, poznamo za vsak rod tudi disperzijsko zvezo med frekvenco in valovnim številom:

$$n_1^2\frac{\omega^2}{c^2} = \beta^2 + k_\perp^2 \tag{10.17}$$

Pri tem je tudi lastna vrednost $k_\perp$ lahko nekoliko odvisna od ω, ker je ta vsebovana v V.

Osnovna lastna vrednost ξ_0 je pri $V << 1$ približno kar V. Zato je $k_\perp^2 \simeq k_0^2(n_1^2 - n_0^2)$ in je $\beta = n_0k_0$. V primeru zelo šibkega vodenja je torej fazna hitrost vodenega vala približno enaka fazni hitrosti v plašču, to je c/n_0. To je lahko razumeti; pri majhnem V je namreč tudi κ majhen in se eksponentno pojemajoče valovanje razteza daleč v plašč. (Naloga:Kakšna je v tej limiti grupna hitrost?). V nasprotnem primeru, ko je $V >> 1$, je $\xi_0 \simeq \pi/2 << V$. Zato je tudi $k_\perp \simeq \pi/(2a) << n_1k_0$ in je približno $\beta \simeq n_1k_0$. V tem primeru je torej fazna hitrost taka kot v sredstvu z lomnim količnikom sredice, kar je v skladu s preprosto predstavo, da se pri velikem V osnovni vodeni rod širi po sredici vzdolž osi vlakna.

Račun za transverzalno magnetne (TM) valove je zelo podoben, le v robnem pogoju za tangencialno komponento električnega polja nastopita dielektrični konstanti sredice in plašča, zato je predvsem najnižja lastna vrednost za $k_\perp$ nekoliko večja kot za TE valove. (Naloga)

10.2 Cilindrično vlakno

Običajna vlakna so seveda tridimenzionalna s cilindrično geometrijo. Najpreprostejša strukutra, povsem analogna gornjemu primeru planparalene plasti, je jedro s konstatnim lomnim količnikom, ki je nekoliko večji od lomnega količnika plašča. Pogoste so tudi zapletenejše konstrukcije, pri katerih je sredica sestavljena iz več kolobarjev z različnimi lomnimi količniki. S primerno izbiro je tako mogoče zelo zmanjšati disperzijo (Slika **??**).

Račun za širjenje svetlobe po cilindričnem vlaknu s homogeno sredico je sicer podoben kot za planparalelni primer, vendar je precej bolj zapleten. Glavna komplikacija je, da v cilindrični geomteriji ni več delitve na čisto električno in magnento transverzalne valove, zato postanejo robni pogoji bolj zapleteni. Rešitve se izrazajo v obliki kombinacij Besselovih funkcij. Podrobnosti si bralec lahko ogleda v literaturi [**?**]. Osnovne značilnosti rešite pa ostajajo enako kot v dvodimenzionalnem primeru. Kot smo ugotovili že na začetku, obstoja končno število vodenih valov, odvisno od premera sredice in razlike lomnih količnikov sredice in plašča. Če sta ti količini majhni, obstoja le eno vodeno valovanje in imamo enorodovno vlakno. Za njegovo valovno število velja $n_0 k_0 < \beta < n_1 k_0$.

10.3 Cilindrično vlakno s paraboličnim profilom lomnega količnika

V treh dimenzijah lahko hitro poiščemo rešitve za vlakno, v katerem je dielektrična konstanta kvadratna funkcija radialne koordinate r:

$$n(r)^2 = n_0^2 + n_2^2 r^2 \tag{10.18}$$

Parameter n_2 je v praksi vselej majhen, zato ima za vse smiselne vrednosti r tudi lomni količnik paraboličen profil. Parabolična sredica mora sveda biti omejena, okoli nje imamo zopet plašč s konstantnim lomnim količnikom (Slika **??**). Tipičen radij sredice je nekaj deset mikrometrov.

Komponento polja za izbrano polarizacijo napišimo v obliki

$$E = E_0 \psi(x,y)\, e^{i\beta z} \tag{10.19}$$

Zanemarili smo, da zaradi odvisnosti od prečnih koordinat in $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ polje ne more imeti povsod iste smeri; če hočemo biti natančni, moramo v gornji obliki zapisati vektorski potencial. Postavimo približni nastavek v valovno enačbo. Dobimo enačbo

$$\nabla_\perp^2 \psi + \left[k_0^2 \left(n_0^2 + n_2^2 r^2\right) - \beta^2\right] \psi = 0 \tag{10.20}$$

ki je popolnoma enaka enačbi za krajevni del lastnih funkcij dvodimenzionalnega harmonskega oscilatorja v kvantni mehaniki. Rešitve imajo obliko

$$\psi_{lm} = H_l\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right) e^{-(x^2+y^2)/w^2}, \qquad w^2 = \frac{\lambda}{\pi n_2} \tag{10.21}$$

z lastnimi vrednostmi

$$\beta_{lm}^2 = n_0^2 k_0^2 \left[1 - \frac{2n_2}{k_0 n_0}(l+m+1)\right] \tag{10.22}$$

Razmerje $2n_2/(k_0 n_0)$ je majhno, zato je približno $\beta_{lm} = n_0 k_0 \left[1 - \frac{n_2}{k_0 n_0}(l+m+1)\right]$.Če je n_2 neodvisen od frekvence, je grupna hitrost

$$v_g = \left(\frac{d\beta_{lm}}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c_0}{n_0} \tag{10.23}$$

enaka za vse rodove, kar je značilnost vlakna s kvadratnim profilom lomnega količnika. V dejanskem vlaknu je seveda taka odvisnost možna le v omejenem območju sredice, zato je tudi gornja analiza le približna in velja dobro za tiste rodove, ki se ne raztezajo izven sredice.

Neodvisnost grupne hitrosti od reda valovanja v vlaknu je praktično pomembna. Grupna hitrost določa čas potovanja svetlobnega sunka, ki lahko predstavlja en bit informacije. Če se po vlaknu lahko širi več rodov, ki imajo različno grupno hitrost, se sunek po prehodu skozi vlakno razširi, kar omejuje uporabno dolžino vlakna, kot bomo podrobneje videli kasneje. Temu se lahko izognemo z uporabo enorodovnih vlaken, ki pa so dražja in je vanje te"je uvesti svetlobni snop, katerega divergenca in premer morata ustrezati ujetemu valu enorodovnega vlakna, če naj ne bo izgub. Zato se za krajše zveze uporabljajo mnogorodovna vlakna, ki imajo sredico s približno paraboličnim profilom lomnega količnika.

10.4 Sprememba lomnega količnika vlakna

Sprememba lomnega količnika sredice ali plašča vlakna povzroči spremembo valovnega števila β danega roda. V enorodovnih vlaknih je to mogoče izkoristiti za izdelavo senzorjev, na primer temperature ali tlaka. Zaradi zunanjih vplivov, ki jih želimo zaznati, se spremeni lomni količnik vlakna in s tem propagacijska konstanta, kar lahko izmerimo preko spremembe faze valovanja na izhodu iz vlakna, to je, z ustrezno sestavljenim interferometrom. Ker je dolžina vlakna lahko velika, v nekaj centimetrov velik tulec lahko brez težav navijemo kilometre vlakna, je celotna sprememba faze velika že pri majhnih spremembah merjene količine. Sprememba valovnega števila povzroča tudi nezaželjene spremembe faze in odboje pri prenosu informacij. V tem razdelku zato poglejmo, kako se spremeni valovno število pri dani spremembi lomenga količnika.

Vzemimo rod vlakna s propagacijsko konstanto β_{lm} in prečnim profilom $\psi_{lm}(r,\phi)$. Ta mora zadoščati valovni enačbi

$$\nabla_\perp^2 \psi_{lm} + \left(\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2\right)\psi_{lm} = 0 \tag{10.24}$$

Naj se dielektrična konstanta vlakna spremeni za $\delta\varepsilon$. Zato se spremenita tudi propagacijska konstanta $\beta = \beta_{lm} + \delta\beta$ in prečna oblika $\psi = \psi_{lm} + \delta\psi$. Tudi motena funckija ψ mora zadoščati enačbi 10.24, zato za perturbacijo velja

$$\nabla_\perp^2 \delta\psi + \left(\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2\right)\delta\psi + \delta\varepsilon\, k_0^2 \psi_{lm} = 2\beta_{lm}\delta\beta\, \psi_{lm} \tag{10.25}$$

kjer smo zanemarili produkte majhnih količin. Množimo obe strani enačbe s ψ_{lm}^* in integrirajmo po preseku vlakna, pri čemer upoštevajmo, da je $\delta\psi$ ortogonalna na ψ_{lm}:

$$\int \psi_{lm}^* \nabla_\perp^2 \delta\psi\, dS + \int \left(\varepsilon(r)k_0^2 - \beta_{lm}^2\right)\delta\psi\, \psi_{lm}^* + k_0^2 \int \delta\varepsilon\, |\psi_{lm}|^2\, dS \tag{10.26}$$

$$= \quad 2\beta_{lm}\,\delta\beta \int |\psi_{lm}|^2\, dS \tag{10.27}$$

Prvi člen na levi preoblikujmo z uporabo zvez $\int (u\nabla_\perp^2 v - v\nabla_\perp^2 u)\, dS = \int \nabla_\perp \cdot (u\nabla_\perp v - v\nabla_\perp u)\, dS = \oint \mathbf{ds} \times (u\nabla_\perp v - v\nabla_\perp u)$. Ker fukncijі ψ_{lm} in $\delta\psi$ opisujeta vodene valove, morata iti za velike r proti nič, zato je integral po krivulji v gornji zvezi nič in velja $\int \psi_{lm}^* \nabla_\perp^2 \delta\psi\, dS = \int \delta\psi \nabla_\perp^2 \psi_{lm}^*\, dS$. Ker ψ_{lm}^* zadošča enačbi 10.24, se v enačbi 10.26 prvi in drugi člen uničita in dobimo željeno zvezo

$$\delta\beta = \frac{k_0^2 \int \delta\varepsilon\, |\psi_{lm}|^2\, dS}{2\beta \int |\psi_{lm}|^2\, dS} \tag{10.28}$$

ki je seveda analogna kvantnomehanskemu rezultatu s teorijo motenj prvega reda za spremembo energije lastnega stanja pri majhni sprmembi Hamiltonovega operatorja. Rezultat je tudi intuitivno razumljiv: v najnižjem redu je $\delta\beta$ sorazmerna s uteženim povprečjem $\delta\varepsilon$, kjer je utež ψ_{lm}.

Sprememba valovnega števila β v delu vlakna, po katerem potuje svetloba, ne povzroči le spremembe faze, ampak tudi odboj dela valovanja. Ta pojav je le nekoliko druga oblika odboja na meji (zvezni ali ostri) dveh dielektrikov, ali splošneje, odboja vsakega valovanja na območju, kjer se spremeni fazna hitrost valovanja.

Odboj na območju vlakna, kjer se spreminja β, bomo najlažje dobili preko formule za odboj na meji dveh dielektrikov pri pravokotnem vpadu. Odbita amplituda je tedaj

$$E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_0 \tag{10.29}$$

Mislimo si, da je sprememba β na delu vlakna sestavljena iz majhnih stopničastih sprememb $\Delta\beta_i$ na intervalih $\Delta\dot{z}$. Za ravno valovanje, za katerega velja enačba 10.29, je sprememba lomnega količnika sorazmerna s spremembo fazne hitrosti. Ker tudi β določa fazno hitrost valovanja po vlaknu, je delež odbitega valovanja na stopničasti spremembi $\Delta\beta_i$

$$\Delta E_i = \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} E_0 \tag{10.30}$$

Predpostavili smo, da je celotni del odbitega valovanja tako majhen, da ni treba upoštevati spremembe amplitude vpadnega vala E_0. Vse odbito valovanje je vsota prispevkov na posameznih stopnicah $\Delta\beta_i$, pri čemer moramo upoštevati še različne faze delnih odbitih valovanj:

$$E_r = \sum \frac{\Delta\beta_i}{2\beta} e^{2i\beta z_i} E_0 = \frac{1}{2\beta} \sum \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z_i} \Delta z E_0 \tag{10.31}$$

Preidimo z vsote na integral, pa dobimo, da je odbita amplituda

$$E_r = \frac{E_0}{2\beta} \int \frac{d\beta}{dz} e^{2i\beta z} dz \tag{10.32}$$

Primer: Naj se valovno število linearno spermeni za $\Delta\beta_0$ na razdalji L. Tedaj je po gornji formuli

$$\frac{E_r}{E_0} = 2\frac{\Delta\beta_0}{L} \frac{\sin\beta L/2}{\beta} \tag{10.33}$$

Odbojnost je največja, kadar je L majhen v primeri z $1/\beta$, torej kadar je sprememba β ostra stopnica. Čim počasnejša je sprememba, tem manj je odboja, poleg tega pa odboja ni vsakič, ko je $\sin\beta L/2 = 0$, to je, pride do destruktivne interference vseh delnih odbojev.(Naloga: Odboj na erf stopnici).

10.5 Izgube v optičnih vlaknih

Ena najpomembnejših lastnosti optičnih valken je majhno slabljenje svetlobnega vala, posebej še v vlaknih iz kremenovega stekla. Najboljša vlakna imajo danes izgube okoli 0,2 db/km pri valovni dolžini 1,55 μm. (1 decibel je $0,1\log(j_0/j)$.). Glavni vzroki izgub so absorpcija in sipanje na nečistočah in sipanje na termičnih fluktuacijah gostote (Rayleighovo sipanje).

Slika **??** prikazuje tipično odvisnost izgub od valovne dolžine za dobro enorodovno vlakno iz kremenovega stekla s primesjo GeO_2. Sipanje na fluktuacijah gostote je sorazmerno z λ^{-4}, zato dominira pri majhnih valovnih dolžinah, sipanje na defektih in nepravilnostih je skoraj zanemarljivo, pri valovnih dolžinah nad 1,6 μm pa prevlada absorpcija. Vrh med 1,3 μm in 1,5 μm je posledica absorpcije na OH ionih, ki se jih je v steklu zelo težko znebiti. Iz slike je razvidno, da so izgube najmanjše okoli 1,55 μm, zato se to območje največ uporablja za zveze na velike razdalje. Najboljših modernih vlaken tudi ni več mogoče kaj dosti izboljšati glede izgub, saj so že dosegla spodnjo mejo, določeno s termičnimi fluktuacijami.

Pri optičnih zvezah nastanejo še izgube na spojih vlaken, ki so okoli 0,2 db na spoj. Skupne izgube so tako dosti manjše kot v koaksialnem kablu in je možen prenos signala do nekaj sto kilometrov brez vmesnega ojačevanja. S tem pri dolžini optičnih zvez izgube niso več glavna omejitev, ampak je to popačitev signala zaradi disperzije.

V optičnem vlaknu nastanejo izgube tudi, kadar je vlakno ukrivljeno. Te izgube postanejo znantne, kadar je krivinski radij vlakna centimeter ali manj. Ta pojav je dovolj zanimiv, da si ga je vredno nekoliko podrobneje ogledati.

Vzemimo spet dvodimenzionalno plast debeline $2a$ z lomnim količnikom n_1 v sredstvu z lomnim količnikom n_0, ki naj bo ukrivljena s krivinskim radijem R. Taka plast tvori del kolobarja z notranjim radijem $R-a$ in zunanjim radijem $R+a$, pri čemer je $\dot{R} >> a$ (Slika **??**). Zapišimo valovno enačbo za dve dimenziji v cilindrični geometriji:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} + k_0^2 n^2(r)\, E = 0 \tag{10.34}$$

kjer ima $n(r)$ vrednost n_1 v sredici in n_0 drugje. Zanimajo nas rešitve oblike

$$E = \psi(r)\, e^{im\phi} \tag{10.35}$$

kjer je $\psi(r)$ znatna le v sredici. Ker je valovna dolžina svetlobe dosti manjša od R, je m veliko število, ki je povezano z valovnim številom β: naj bo $z = R\phi$ dolžina loka vzdolž sredine sredice. Tedaj je $m\phi = (m/R)\, z$ in je torej $\beta = m/R$. ψ zadošča enačbi

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \left[k_0^2 n^2(r) - \frac{m^2}{r^2}\right]\psi = 0 \tag{10.36}$$

Rešitve za ψ so kombinacije Besselovih funkcij reda m, kar pa zaradi velikosti m ni posebno zanimivo. Dosti več bomo izvedeli, če primerno preoblikujemo valovno enačbo 10.34. Namesto r in ϕ vpeljimo koordinati $x = r - R$ in $z = R\phi$. S tem smo prešli nazaj na koordinate planparelelne plasti in iščemo popravke valovne enacbe 10.4 reda $1/R$. Tako je $1/r \simeq 1/R$ in

$$\frac{m^2}{r^2} = \frac{m^2}{(R+x)^2} \simeq \frac{m^2}{R^2}\left(1 - 2\frac{x}{R}\right) = \beta^2\left(1 - 2\frac{x}{R}\right) \tag{10.37}$$

S tem dobimo iz enačbe 10.36 približno enačbo za prečno obliko polja

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[k_0^2 n^2(r) - \beta^2\right]\psi + \frac{1}{R}\left(\frac{d\psi}{dr} - 2\beta^2 x\,\psi\right) = 0 \tag{10.38}$$

10.6 Disperzija

Zaradi disperzije, to je odvisnosti fazne in grupne hitrosti od frekvence, se sunek svetlobe, ki potuje po vlaknu, podaljšuje. Ta pojav omejuje količino informacije, ki jo je mogoče prenašati po

vlaknu dane dolžine. Zato je čim manjša disperzija v vlaknih vsaj toliko pomembna kot majhne izgube.

Vzemimo najprej enorodovno vlakno in naj bo svetloba v vlaknu modulirana v obliki kratkih sunkov, ki nosijo informacijo. Sunki potujejo z grupno hitrostjo

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} \tag{10.39}$$

Po enačbi 10.1 je grupna hitrost odvisna od frekvence tako zaradi eksplicitne korenske zveze med ω in β kot zaradi odvisnosti lomnih količnikov sredice in plašča od frekvence. Prvemu prispevku recimo valovodna disperzija, ker je posledica omejitve valovanja v sredico vlakna, drugemu pa materialna disperzija. Oba prispevka sta pomembna.

Naj bo dolžina vlakna L in trajanje posameznega sunka τ. Sunek potuje po vlaknu čas

$$T = \frac{L}{v_g} = L\frac{d\beta}{d\omega} \tag{10.40}$$

Svetloba ima končno spektralno širino $\Delta\omega$. Ta mora biti vsaj $1/\tau$, lahko pa je tudi večja, če svetlobni izvor, običajno polvodniški laser, ni povsem monokromatski. Ker vse spektralne komponente ne potujejo z isto hitrostjo, se sunek na koncu vlakna razleze za

$$\Delta\tau = \left|\frac{dT}{d\omega}\right|\Delta\omega = L\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\Delta\omega \tag{10.41}$$

Naj bo tudi razmik me zaporednimi sunki τ. Da se sunki ne bodo prekrivali, mora biti $\Delta\tau < \tau$ in sme biti najvišja frekvenca modulacije kvečjemu

$$v_{\max} = \frac{1}{2\Delta\tau} \tag{10.42}$$

Ločiti moramo dva mejna primera. Kadar je $\Delta\omega >> 1/\tau$, to je, kadar je spektralna širina izvora mnogo večja od širine zaradi modulacije, je

$$v_{\max} = \frac{1}{L\Delta\omega}\left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)^{-1} \tag{10.43}$$

Največja gostota informacije, ki jo lahko prenašamo po vlaknu, je v tem primeru obratno sorazmerna z dolžino vlakna in spektralno širino laserja.

V nasprotnem primeru, ko je laser dosti bolj monokromatski od razširitve zaradi same modulacije, imamo $\Delta\omega = 1/\tau$. Pri najvišji možni frekvenci modulacije $v_{\max}$ je $\tau \simeq \Delta\tau$ in je po enačbi 10.41

$$(\Delta\tau)^2 = L\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \tag{10.44}$$

in je

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{1}{L}\left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)^{-1}} \tag{10.45}$$

V tem primeru je najvišja frekvenca modulacije obratno sorazmerna s korenom dolžine vlakna.

Večji del dicperzije grupne hitrosti prinese materialna disperzija, to je, odvisnost lomnega količnika od frekvence. Primer meritve razširitve sunka z znano spektralno širino v izbrani

dolžini vlakna kaže slika **??**. Pri valovni dolžini okoli 1,3 μm ima materialna disperzija, to je $d^2n/d\omega^2$, ničlo, ki je v celotni disperziji nekoliko premaknjena zaradi prispevka valovodne disperzije. Na valovodno disperzijo je mogoče vplivati s konstrucijo vlakna. Sredica je lahko sestavljena iz več plasti z različnimi lomnimi količniki in različnimi debelinami, s čimer se spremeni prispevek valovodne disperzije in se položaj ničle celotne disperzije premakne k valovni dolžini izvora.

Iz slike **??** razberemo, da je tipična disperzija enorodovnega vlakna okoli 10 ps/km pri spektralni širini 1 nm. Od tod je $d^2\beta/d\omega^2 = \Delta\tau\lambda/(\Delta\lambda L\omega) \simeq 5\cdot 10^{-23}$ s^2/m. Po enačbi 10.45 je v 100 km dolgem vlaknu tedaj najvišja frekvenca modulacije okoli 10^9 Hz. Pri zmogljivih zvezah na velike razdalje je torej za največjo dolžino vlakna brez obnovitve signala disperzija hujaša omejitev kot izgube. Največja možna razdalja in najvišje frekvenca modulacije sta danes nekaj sto kilometrov in nekaj GHz.

V mnogorodvnih vlaknih se sunek širi zaradi razli"nih grupnih hitrosti posameznih rodov. Različne grupne hitrosti v valovni sliki ustrezajo različni dolžini optične poti za žarke, ki potujejo pod različnimi koti glede na os vlakna. Te razlike so mnogo večje od disperzije v enorodnih vlaknih, zato je pri dani dolžini vlakna popačitev signala dosti večja in se mnogorodovna vlakna ne uporabljajo za dolge zveze.

10.7 Potovanje sunka po enorodovnem vlaknu

Poglejmo si nekoliko podrobneje, kako po enorodovnem vlaknu ali drugem sredstvu z disperzijo potuje sunek valovanja z dano začetno obliko. Denimo, da smo poiskali lastna valovanja in da torej poznamo zvezo med valovnim številom β in frekvenco ω. Zapišimo sunek v obliki

$$E(z,t) = a(z,t)\ \psi(x,y) \tag{10.46}$$

kjer je $\psi(x,y)$ lastna rešitev prečenega dela valovne enačbe, ki določa tudi $\beta(\omega)$. Funkcijo $a(z,t)$, ki opisuje širjenje sunka in njegovo obliko v z smeri, lahko zapišemo s Fourierovim integralom po frekvencah

$$a(z,t) = \int a(\omega,z)\, e^{-i\omega t} d\omega \tag{10.47}$$

Sunek naj bo približno monokromatičen s frekvenco ω_0, to pomeni, da je mnogo daljši od optične periode. Pri določeni ω ima Fourierova amplituda krajevno odvisnost $\exp[i\beta(\omega)z]$, zato zadošča enačbi

$$\frac{\partial a(z,\omega)}{\partial z} = i\beta(\omega)\, a(z,\omega) \tag{10.48}$$

Privzeli smo, da je spekter sunka ozek, zato lahko $\beta(\omega)$ razvijemo okoli ω_0:

$$\frac{\partial a(z,\omega)}{\partial z} = i\left[\beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega-\omega_0)^2\right] a \tag{10.49}$$

Vpeljimo novo amplitudno funkcijo, ki ne bo vsebovala osnovne odvisnosti $\exp[i\beta(\omega_0)z]$

$$a(z,\omega) = A(z,\omega-\omega_0)\, e^{i\beta(\omega_0)z} \tag{10.50}$$

Ker je spkter različen od nič le okoli ω_0, je prikladno A pisati kot funkcijo $\omega - \omega_0$. Napravimo obratno Fourierovo transformacijo zadnjega izraza:

$$\begin{aligned} a(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z,\omega-\omega_0)\, e^{i[\beta(\omega_0)z-\omega t]}\, d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(z,\omega-\omega_0)\, e^{-i(\omega-\omega_0)t} d(\omega-\omega_0)\; e^{i[\beta(\omega_0)z-\omega_0 t]} \\ &= A(z,t)\; e^{i[\beta(\omega_0)z-\omega_0 t]} \end{aligned} \tag{10.51}$$

Funkcija $A(z,t)$, katere Fourierova transformacija je $A(z,\omega)$, očitno predstavlja prostorsko in časovno odvisnost ovojnice sunka. Postavimo definicijo 10.50 v enačbo 10.49:

$$\frac{\partial A(z,\omega-\omega_0)}{\partial z} = i\left[\frac{d\beta}{d\omega}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega-\omega_0)^2\right] A(z,\omega-\omega_0) \tag{10.52}$$

Z obratno Fourierovo transformacijo dobimo

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t}\right) A(z,t) = -\frac{i}{2}\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2} \tag{10.53}$$

Upoštevali smo, da je

$$\int (i\omega)^n A(z,\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega = \frac{\partial^n}{\partial t^n} A(z,t) \tag{10.54}$$

in da je $d\beta/d\omega = 1/v_g$.

Enačba 10.53 opisuje razvoj oblike sunka pri širjenju po vlaknu. Če ni disperzije grupne hitrosti, to je, če je desna stran enačbe nič, je rešitev poljubna funkcija $f(z - v_g t)$. Sunek poljubne začetne oblike potuje po vlaknu nepopačen z grupno hitrostjo. Disperzija pa povzroči, da se spreminja tudi oblika. Enačbo lahko še nekoliko poenostavimo z vpeljavo novih neodvisnih spremenljivk

$$\begin{aligned} \tau &= t - \frac{z}{v_g} \\ \zeta &= z \end{aligned} \tag{10.55}$$

Za vrh sunka, ki naj ima pri $t = 0$ koordinato $z = 0$ in se giblje z grupno hitrostjo, je vselej $\tau = 0$. Spremenljivka predstavlja τ torej čas v točki $z = \zeta$, merjen od trenutka, ko tja prispe center sunka. Z novima spremenljivkama se enačba 10.53 zapiše

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + 2i\frac{\partial A}{\partial \zeta} = 0 \tag{10.56}$$

Ta enačba ima isto obliko kot obosna valovna enačba, ki smo jo v drugem poglavju uporabili za obravnavo koherentnih snopov. Podobnost seže dlje od formalne oblike. Pri snopih, ki so omejeni v prečni smeri, disperzija fazne in grupne hitrosti po prečnih komponentah valovnega vektorja povzroča spreminjanje prečnega preseka snopa, pri časovno omejenih sunkih v sredstvu s frekvenčno disperzijo pa se spreminja vzdolžna oblika sunka. Kot se morda bralec spominja, je tudi v praznem prostoru pri širjenju snopa v okolici grla fazna hitrost funkcija frekvence. Zato se kratek sunek, ki je omejen v prečni smeri, tudi v praznem prostoru razširi tako v prečni kot v vzdolžni smeri. (Naloga)

Obosno valovno enačbo rešijo Gaussovi snopi. V en. 10.56 ima vlogo prečne koordinate τ. Po analogiji s snopi se bo zaradi disperzije najmanj širil sunek z Gaussovo časovno odvisnostjo.

Računa nam ni treba ponavljati, kar v izrazu za Gaussove snope napravimo ustrezno zamenjavo črk. Valovnemu številu k pri snopih na primer ustreza parameter $\mu = (d^2\beta/d\omega^2)^{-1}$. Tako dobimo

$$A(\tau,\zeta) = \frac{A_0}{\sigma_0\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-i\frac{\mu\tau^2}{2b}\right) e^{i\phi(\zeta)} \tag{10.57}$$

kjer je σ trajanje sunka, za katerega velja enaka zveza kot za polmer Gaussovega snopa:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2\left(1+\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}\right) \tag{10.58}$$

Tu je σ_0 trajanje sunka pri $\zeta = 0$, to je na mestu, kjer je sunek najkrajši. Dodatna skupna faza $\phi(\zeta)$ ni posebno pomembna, pač pa je zanimiv drugi eksponentni faktor v enačbi 10.57. V njem smo z $b = \zeta\left(1+\zeta_0^2/\zeta^2\right)$ označili količino, ki je analogna krivinskemu radiju valovnih front v primeru Gaussovih snopov. Odvod faze po τ predstavlja spremembo frekvence glede na centralno frekvenco sunka ω_0:

$$\omega - \omega_0 = \frac{\mu\tau}{b} \tag{10.59}$$

Za pozitivno disperzijo μ je frekvenca na prednji strani sunka, to je pri $\tau < 0$, večja in se linearno zmanjšuje proti koncu sunka. Pri $\zeta = 0$ je sunek toliko kratek, kolikor je možno pri dani spektralni širini. Pri potovanju po vlaknu se zaradi disperzije sunek razširi, spektralna širina pa ostaja enaka, zato se je del pojavi kot spreminjanje frekvence znotraj sunka. Lahko si mislimo tudi, da je sunek najkrajši, to je omejen z Fourierovo transformacijo spektra, tedaj, kadar se vse frekvenčne komponente seštejejo z isto fazo, to je pri $\zeta = 0$. Da dobimo najkrajše sunke, kadar je faza vseh delnih valov enaka, smo srečali že pri fazno uklenjenih sunkih iz mnogofrekvenčnih laserjev. Pri potovanju sunka se zaradi disperzije faze frekvenčnih komponent različno spreminjajo in sunek se podaljša. Zanimivo je, da je pri tem pomemben šele drugi odvod fazne hitrosti po frekvenci, ki je sorazmeren z μ, linearno spreminjanje faze pa ne povzroči razširitve.

Naloga: Pokaži, da je spekter sunka nespremenjen.

Naloga: Pokaži, da je za sunek poljubne začetne oblike razširitev mogoče zapisati z uklonskim integralom.

Naloga: Pokaži, da iz en. 10.58 sledi podobna ocena za maksimalno frekvenco modulacije (minimalno razširitev sunka) pri dani dolžini vlakna, kot jo da en. 10.45.

Razširitev sunka zaradi disperzije je pri $\dot{\mu} > 0$ mogoče kompenzirati s parom paralelnih uklonskih mrežic, kot kaže slika **??**. Prva mrežica različne frekvenčna komponente razkloni, druga pa zopet zbere, vendar dolžine optičnih poti za različne komponente niso enake. celoten učinek je enak kot pri razširjanju sunka po sredstvu z negativno disperzijo. Račun je nekoliko preglednejši, rezultat pa povsem enak, če namesto refleksijskih mrežic vzamemo transmisijski, kot kaže slika **??**. Naj na par vpada raven val pod kotom α. Pred prvo mre"ico je fazni faktor $\exp(ik_1x)$, kjer je $k_1 = \omega/c\sin\alpha$. Pri prehodu skozi mrežico se polje pomnoži s kompleksno prepustnostjo mrežice, ki povzroči razcep vala na uklonjene valove. Pri tem se faza za prvi uklonski red poveča za qx, kje je $q = 2\pi/\Lambda$ in je Λ perioda mrežice. Premik do druge mrežice poveča fazo za k_3L. Za komponento valovnega vektorja v smeri z velja seveda $k_3 = \sqrt{(\omega/c)^2 - (k_1+q)^2}$. Po prehodu

skozi drugo mrežico nas zanima prvi negativni uklonski red, ki da val v smeri prvotnega vala. Za ta red se faza spremeni za $-qx$, tako da je celotna sprememba faze

$$\Phi = L\sqrt{(\omega/c)^2 - (k_1+q)^2} = \frac{L}{c}\sqrt{\omega^2 - (\omega \sin\alpha + qc)^2} \tag{10.60}$$

Disperzija, ki jo povzroči par mrežic, je določena zdrugim odvodom faze po frekvenci:

$$\frac{d^2\Phi}{d\omega^2} = -\frac{Lq}{\left[\omega^2 - (\omega \sin\alpha + qc)^2\right]^{3/2}} \tag{10.61}$$

Drugi odvod je vselej negativen. Par mrežic torej deluje kot sredstvo z negativno disperzijo. Sunek, ki se je razširil zaradi potovanja po sredstvu s pozitivno disperzijo, lahko ponovno skrajšamo do meje, določene s širino spektra. Postopek se uporablja za pridobivanje zelo kratkih sunkov. Sunku iz fazno uklenjenega barvilnega ali Ti:safirnega laserja najprej v nelinearnem sredstvu razširijo spekter, pri čemer se sunek tudi časovno podaljša. O tem najde bralec nekaj več v poglavju o nelinearni optiki. Razširjen sunek nato s parom mrežic skrajšajo za faktor 10-100 glede na prvotno dolžino sunka. Tako dobijo sunke dolge le okoli 10 fs, kar je le še nekaj optičnih period.

10.8 Sklopitev v optična vlakna

11. Detektorji svetlobe

11.1 Kalorimetrični detektorji

11.2 Fotoprevodni detektorji

11.3 PN in PiN fotodiode

11.4 Plazovne fotodiode

11.5 Šum pri optični detekciji

Stvarno kazalo

Življenjski čas nihanj, 62

ABCD matrike, 49, 51, 59
Absorpcija, 74
Absorpcija fotona, 71
Absorpcijski koeficient, 74
Avtokorelacijska funkcija, 28

Besselov snop, 45
Brewsterjev kot, 16

DFG, *glej* Generacija razlike frekvenc
Dielektričnost, 9, 21
Dobrota resonatorja, 63
Dopplerjeva razširitev, 80
Dvolomnost, 23
Dvonivojski sistem, 70

Einsteinovi koeficienti, 72, 84
Električna polarizacija, 9
Električna susceptibilnost, 9
Električno polje
    gostota, 9
    jakost, 9, 11
Elektromagnetno valovanje, 11, 67

Fabry-Perotov interferometer, 53, 55, 63
Foton, 69
Fraunhoferjev uklon, 19, 37
Fresnel-Kirchhoffov integral, 18
Fresnelov uklon, 19, 37
Fresnelove enačbe, 15
Fresnelovo število, 19, 55, 62

Gaussov snop, 41, 56
    divergenca, 40
    grlo, 40
    krivinski radij, 41
    polmer, 40
Generacija razlike frekvenc, 89
Generacija vsote frekvenc, 89
Gostota energije, 11, 13
Gostota energijskega toka, 11–13, 29
Gostota stanj, 53, 68
Gouyeva faza, 41, 60

Hamiltonova funkcija, 102
Harmonski oscilator, 69
Helmholtzeva enačba, 12, 38
Hermite-Gaussovi snopi, 43, 66
Huygensovo načelo, 19

Intenziteta, *glej* Gostota energijskega toka
Interferenca, 25, 28, 32, 35
Izgube v resonatorju, 62

Jonesov vektor, 13
Jonesova matrika, 14, 15

Kirchhoffov integral, 17, 64
Kleinmanova domneva, 88
Koherenčna dolžina, 28
Koherenčna ploskev, 33, 34
Koherenčna razdalja, 26, 33
Koherenčni čas, 25, 28
Koherenca, 25
    časovna, 25, 27
    prostorska, 26, 32
Kompleksna ukrivljenost, 42
Kompleksni krivinski radij, 42

Laguerre-Gaussovi snopi, 44
Laser
    Nd:YAG, 91
Lastne frekvence resonatorja, 53, 54, 60
Lomni količnik, 10, 21
    izredni, 22
    redni, 22
Lomni zakon, 15, 23
Lorentzov spekter, 72
Lorenzov spekter, 63

Magnetizacija, 9
Magnetna permeabilnost, 9
Magnetna susceptibilnost, 9
Magnetno polje
    gostota, 9
    jakost, 9, 11
Maxwellove enačbe, 9
Michelsonov interferometer, 27

Nasičena absorpcija, 75

Nelinearna optika, 87

Obosna valovna enačba, 38, 56
Obrnjena zasedenost, 76
Omejen snop, 37
Optična indikatrisa, 21
Optična os, 22
Optično črpanje, 76
Optično podvajanje frekvenc, 89, 91
Optično usmerjanje, 89

Planckov zakon, 70
Ploščica $\lambda/2$, 14
Ploščica $\lambda/4$, 14
Polarizacija valovanja, 13
    TE, 15
    TM, 15
Poyntingov teorem, 11
Poyntingov vektor, 11, 12
Presek za absorpcijo, 74
Presek za stimulirano sevanje, 74
Preslikava čez lečo, 46

Ravni val, 12, 38, 67
Rayleighova dolžina, 40
Resonator, 53
    ciklični, 66
    koncentrični, 59
    konfokalni, 58, 61, 62, 64
    nestabilen, 59
    odprt, 54
    planparalelni, 56, 59, 61
    simetrični, 57
Robni pogoji, 10

Saturacijska gostota toka, 75, 78
Sevanje črnega telesa, 69
SFG, *glej* Generacija vsote frekvenc
SHG, *glej* Optično podvajanje frekvenc
Spekter, 29
    Gaussov, 29, 31
    Lorentzov, 29, 31
    Planckov, 32
Spektralna črta
    homogena razširitev, 79
    nehomogena razširitev, 79
Spektralna širina, 30
Spontano sevanje, 70, 84
Stabilnost resonatorja, 55, 57, 60
Stimulirano sevanje, 71, 84
Susceptibilnost
    linearna, 87
    nelinearna, 87

Tirna vrtilna količina, 45

Uklon, 17, 37, 64

Valovna enačba, 10
Valovni vektor, 12
van Cittert-Zernikov teorem, 34

Wiener-Hinčinov teorem, 30

Youngov poskus, 25, 32

Zasedenost stanj, 72