

# Расчетно графическая работа по функциональному анализу. Задание № 1

Выполнил студент группы М80-308Б-22 МАИ *Цирулев Николай*.

## 1 Задание

Задание I Докажите, что приведённое ниже отображение  $T : C[0; 1] \rightarrow C[0; 1]$  (либо его степень) является сжимающим. Определите число итераций, необходимое для поиска неподвижной точки этого отображения с точностью  $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$  с помощью метода сжимающих отображений. С помощью вычислительной техники постройте график функции, являющейся неподвижной точкой отображения  $T$ . Проверьте результаты при различных значениях  $\varepsilon$  и различных начальных приближениях в методе сжимающих отображений. Продемонстрируйте несколько графиков, получающихся при промежуточных вычислениях.

Номер по списку 22,  $k = 8, l = 5$

Вариант:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+k}x(3t) - \frac{l}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ f(t), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{1+k}x(3t-2), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{cases} \text{ где } f(t)\text{- аффинная функция такая, что}$$

$T(x)$ - непрерывная функция;

## 2 Решение

### 2.1 Доказательство и поиск коэффициента сжатия

Докажем, что заданное отображение  $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  является сжимающим.

Пространство  $(C[0, 1], \rho)$  рассматривается с метрикой:

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|.$$

Определение оператора  $T(x)$ :

$$T(x)(t) = \begin{cases} \frac{1}{9}x(3t) - \frac{5}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ f(t), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{9}x(3t-2), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

По определению отображение  $T(x)$  является сжимающим, если  $\exists \alpha \in [0, 1)$  :

$$\rho(T(x), T(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, y), \quad \forall x, y \in C[0, 1].$$

Рассмотрим три области отдельно.

**1. Область**  $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$

$$T(x)(t) = \frac{1}{9}x(3t) - \frac{5}{2},$$

$$T(y)(t) = \frac{1}{9}y(3t) - \frac{5}{2}.$$

Тогда:

$$|T(x)(t) - T(y)(t)| = \left| \frac{1}{9}x(3t) - \frac{5}{2} - \left( \frac{1}{9}y(3t) - \frac{5}{2} \right) \right| = \frac{1}{9}|x(3t) - y(3t)|.$$

Так как  $|x(3t) - y(3t)| \leq \rho(x, y)$ , то если  $s = 3t, t \in [0; \frac{1}{3}] \Rightarrow s \in [0; 1]$ , тогда:

$$\max_{s \in [0, 1]} |T(x)(s) - T(y)(s)| \leq \frac{1}{9}\rho(x, y).$$

**2. Область**  $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$

$$T(x)(t) = \frac{1}{9}x(3t - 2),$$

$$T(y)(t) = \frac{1}{9}y(3t - 2).$$

Аналогично если  $s = 3t - 2, t \in [\frac{2}{3}; 1] \Rightarrow s \in [0; 1]$ , тогда:

$$|T(x)(t) - T(y)(t)| = \frac{1}{9}|x(3t - 2) - y(3t - 2)| \leq \frac{1}{9}\rho(x, y).$$

**3. Область**  $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$  Функция  $T(x)$  здесь аффинная и непрерывная. Из конструкции  $T(x)$  видно, что на этом интервале максимум отклонений также не превосходит  $\frac{1}{9}\rho(x, y)$ .

**Вывод** Объединяя оценки для всех трёх областей, получаем:

$$\rho(T(x), T(y)) = \max_{t \in [0, 1]} |T(x)(t) - T(y)(t)| \leq \frac{1}{9}\rho(x, y).$$

Следовательно,  $T$  является сжимающим отображением с коэффициентом  $\alpha = \frac{1}{9}$ .

## Определение числа итераций и построение графиков

По теореме Банаха, так, как метрическое пространство полное, то  $\exists! x_*$  отображения  $T$ . Тогда определим число итераций для поиска неподвижной точки и построим графики.

Сначала оценим  $f(t)$ :

Поскольку  $T(x)$  должно быть непрерывным по условию, функция  $f(t)$  в интервале  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  должна быть линейной и соединять значения  $T(x)$  на границах  $t = \frac{1}{3}$  и  $t = \frac{2}{3}$ . То есть,  $f(t) : f(t) = at + b$

Найдем коэффициенты  $a$  и  $b$ . Пусть  $A = T(x)(\frac{1}{3})$  и  $B = T(x)(\frac{2}{3})$ , тогда система уравнений:

$$\begin{aligned} A &= a \cdot \frac{1}{3} + b \\ B &= a \cdot \frac{2}{3} + b \end{aligned}$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{aligned} a &= \frac{B - A}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 3(B - A) \\ b &= A - a \cdot \frac{1}{3} = A - (B - A) = 2A - B. \end{aligned}$$

Тогда:

$$f(t) = 3(B - A)t + (2A - B)$$

Теперь оценим число итераций:

$$n > \frac{\ln(\varepsilon \cdot (1 - \alpha) / \rho(x_1 - x_0))}{\ln \alpha}.$$

Где: -  $\alpha = \frac{1}{9}$ , -  $x_0(t) = t$ , -  $\rho(x_1 - x_0) = \frac{5}{2}$ .

Для различных  $\varepsilon$ :

$\varepsilon$	$n$
$10^{-1}$	2
$10^{-2}$	3
$10^{-3}$	4

## 3 Код, графики и выводы

### 3.1 Код на Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# T
def T(x, t, k=8, l=5):
    if t <= 1/3:
```

```

        return (1 / (1 + k)) * x(3 * t) - 1 / 2
    elif t >= 2/3:
        return (1 / (1 + k)) * x(3 * t - 2)
    else:
        #

        A = T(x, 1/3)
        B = T(x, 2/3)
        return 3 * (B - A) * t + (2 * A - B)

#
T
def iterate_T(x0, num_iter=10, num_points=1000):
    t_values = np.linspace(0, 1, num_points)
    x_values = x0(t_values)
    history = [x_values.copy()]

    for _ in range(num_iter):
        x_values_new = np.array([T(lambda t: np.interp(t,
            t_values, x_values), t) for t in t_values])
        history.append(x_values_new.copy())
        x_values = x_values_new

    return t_values, history

#
def compute_error(history, alpha=1/9):
    errors = []
    rho_0 = np.max(np.abs(history[0] - history[1]))
    for n in range(1, len(history)):
        error = (alpha ** n) * rho_0 / (1 - alpha)
        errors.append(error)
    return errors

#
LaTeX-

x0_list = [
    (lambda t: t, r'$x_0(t)_{\square}=\square t$'),
    (lambda t: np.sin(2 * np.pi * t), r'$x_0(t)_{\square}=\square \sin(2\pi\square
        t)$'),
    (lambda t: np.exp(-t), r'$x_0(t)_{\square}=\square e^{-t}$')
]

#
for x0, formula in x0_list:
    t_values, history = iterate_T(x0, num_iter=5)
    errors = compute_error(history)

    plt.figure(figsize=(8, 5))
    for i, x_values in enumerate(history):
        plt.plot(t_values, x_values, label=f'

```

```

        x[i])

plt.title(f'Итерации для  $x_0(t) = t$  {formula}', fontsize=14)
plt.xlabel(r'$t$', fontsize=12)
plt.ylabel(r'$x(t)$', fontsize=12)
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

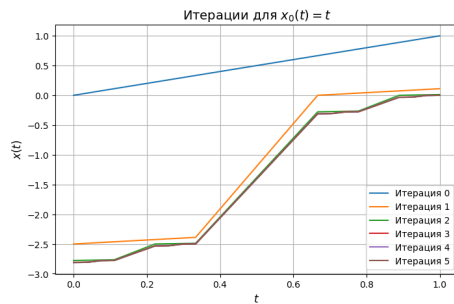
# Итерации для  $x_0(t) = t$ 
print(f'Итерации для  $x_0(t) = t$  {formula}:\n')
print(f'{"x(0.5)":^10}{x(0.5)":^15}{eps":^15}')
print('-' * 40)

for i, x_values in enumerate(history):
    x_mid = x_values[len(x_values) // 2]
    eps = errors[i - 1] if i > 0 else 0
    print(f'{"x(0.5)":^10}{x_mid:^15.5f}{eps:^15.5f}')

print('\n' + '=' * 40 + '\n')

```

## 3.2 Графики



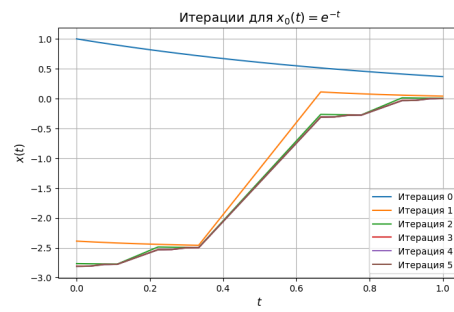
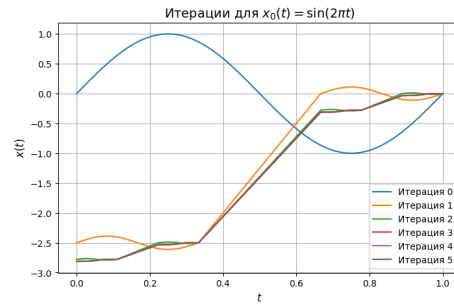


Таблица 1: Значения для  $x_0(t) = t$

Итерация	$x(0.5)$	Ошибка $\varepsilon$
0	0.50050	0.00000
1	-1.19086	0.34028
2	-1.37940	0.03781
3	-1.40035	0.00420
4	-1.40267	0.00047
5	-1.40293	0.00005

Таблица 2: Значения для  $x_0(t) = \sin(2\pi t)$

Итерация	$x(0.5)$	Ошибка $\varepsilon$
0	-0.00314	0.00000
1	-1.24625	0.45139
2	-1.38555	0.05015
3	-1.40103	0.00557
4	-1.40275	0.00062
5	-1.40294	0.00007

Таблица 3: Значения для  $x_0(t) = e^{-t}$

Итерация	$x(0.5)$	Ошибка $\varepsilon$
0	0.60623	0.00000
1	-1.17015	0.42361
2	-1.37710	0.04707
3	-1.40009	0.00523
4	-1.40265	0.00058
5	-1.40293	0.00006

### 3.3 Выводы

Мы доказали, что  $T$  — сжимающее отображение строго по определению, нашли коэффициент сжатия, вычислили число итераций для различных  $\varepsilon$  и реализовали метод сжимающих отображений на Python с графической интерпретацией.