Расчетно графическая работа по функциональному анализу. Задание № 1

Выполнил студент группы М80-308Б-22 МАИ *Цирулев Николай.*

1 Задание

Задание I Докажите, что приведённое ниже отображение $T : C[0;1] \to C[0;1]$ (либо его степень) является сжимающим. Определите число итераций, необходимое для поиска неподвижной точки этого отображения с точностью $\varepsilon \in \left\{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\right\}$ с помощью метода сжимающих отображений. С помощью вычислительной техники постройте график функции, являющейся неподвижной точкой отображения T. Проверьте результаты при различных значениях ε и различных начальных приближениях в методе сжимающих отображений. Продемонстрируйте несколько графиков, получающихся при промежуточных вычислениях.
Номер по списку 22, $k = 8, l = 5$
Вариант:
T(x)= $\begin{cases} \frac{1}{1+k}x(3t) - \frac{l}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}; \\ f(t), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{1+k}x(3t-2), & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где f(t)- аффинная функция такая, что T(x)- непрерывная функция;

2 Решение

2.1 Доказательство и поиск коэффициента сжатия

Докажем, что заданное отображение $T : C[0,1] \to C[0,1]$ является сжимающим.

Пространство $(C[0,1], \rho)$ рассматривается с метрикой:

$$\rho(x, y) = \max_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|.$$

Определение оператора $T(x)$:

$$T(x)(t) = \begin{cases} \frac{1}{9}x(3t) - \frac{5}{2}, & 0 \le t \le \frac{1}{3}; \\ f(t), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{9}x(3t-2), & \frac{2}{3} \le t \le 1. \end{cases}$$

По определению отображение $T(x)$ является сжимающим, если $\exists\ \alpha \in [0, 1)$:

$$\rho(T(x), T(y)) \le \alpha \cdot \rho(x, y), \quad \forall x, y \in C[0, 1].$$

Рассмотрим три области отдельно.

1. Область $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$

$$T(x)(t) = \frac{1}{9}x(3t) - \frac{5}{2},$$

$$T(y)(t) = \frac{1}{9}y(3t) - \frac{5}{2}.$$

Тогда:

$$|T(x)(t) - T(y)(t)| = \left|\frac{1}{9}x(3t) - \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{9}y(3t) - \frac{5}{2}\right)\right| = \frac{1}{9}|x(3t) - y(3t)|.$$

Так как $|x(3t) - y(3t)| \leq \rho(x, y)$, то если $s = 3t, t \in [0; \frac{1}{3}] => s \in [0; 1]$, тогда:

$$\max_{s \in [0,1]} |T(x)(s) - T(y)(s)| \leq \frac{1}{9}\rho(x, y).$$

2. Область $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$

$$T(x)(t) = \frac{1}{9}x(3t - 2),$$

$$T(y)(t) = \frac{1}{9}y(3t - 2).$$

Аналогично если $s = 3t - 2, t \in [\frac{2}{3}; 1] => s \in [0; 1]$, тогда:

$$|T(x)(t) - T(y)(t)| = \frac{1}{9}|x(3t - 2) - y(3t - 2)| \leq \frac{1}{9}\rho(x, y).$$

3. Область $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$ Функция $T(x)$ здесь аффинная и непрерывная. Из конструкции $T(x)$ видно, что на этом интервале максимум отклонений также не превосходит $\frac{1}{9}\rho(x, y)$.

Вывод Объединяя оценки для всех трёх областей, получаем:

$$\rho(T(x), T(y)) = \max_{t \in [0,1]} |T(x)(t) - T(y)(t)| \leq \frac{1}{9}\rho(x, y).$$

Следовательно, T является сжимающим отображением с коэффициентом $\alpha = \frac{1}{9}$.

Определение числа итераций и построение графиков

По теореме Банаха, так, как метрическое пространство полное, то $\exists! x_*$ отображения T. Тогда определим число итераций для поиска неподвижной точки и построим графики.

Сначала оценим $f(t)$:

Поскольку $T(x)$ должно быть непрерывным по условию, функция $f(t)$ в интервале $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ должна быть линейной и соединять значения $T(x)$ на границах $t = \frac{1}{3}$ и $t = \frac{2}{3}$. То есть, f(t) :$f(t) = at + b$

Найдем коэффициенты a и b. Пусть $A = T(x)\left(\frac{1}{3}\right)$ и $B = T(x)\left(\frac{2}{3}\right)$, тогда система уравнений:

$$A = a \cdot \frac{1}{3} + b$$

$$B = a \cdot \frac{2}{3} + b$$

Решая систему, получаем:

$$a = \frac{B - A}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 3(B - A)$$

$$b = A - a \cdot \frac{1}{3} = A - (B - A) = 2A - B.$$

Тогда:

$$f(t) = 3(B - A)t + (2A - B)$$

Теперь оценим число итераций:

$$n > \frac{\ln\left(\varepsilon \cdot (1 - \alpha)/\rho(x_1 - x_0)\right)}{\ln \alpha}.$$

Где: - $\alpha = \frac{1}{9}$, - $x_0(t) = t$, - $\rho(x_1 - x_0) = \frac{5}{2}$.

Для различных ε:

ε	n
10^{-1}	2
10^{-2}	3
10^{-3}	4

3 Код, графики и выводы

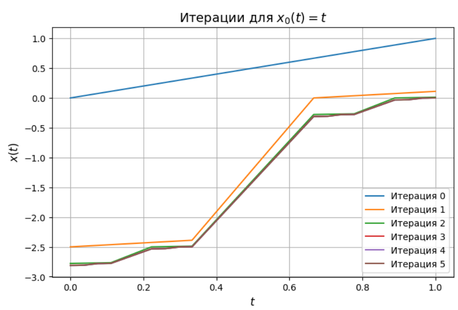
3.1 Код на Python

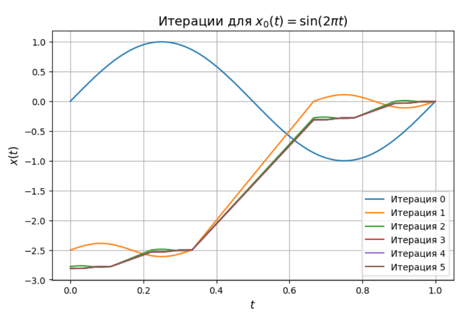
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#                 T
def T(x, t, k=8, l=5):
    if t <= 1/3:
```

```
            return (1 / (1 + k)) * x(3 * t) - 1 / 2
        elif t >= 2/3:
            return (1 / (1 + k)) * x(3 * t - 2)
        else:
            A = T(x, 1/3)
            B = T(x, 2/3)
            return 3 * (B - A) * t + (2 * A - B)

#                                  T
def iterate_T(x0, num_iter=10, num_points=1000):
    t_values = np.linspace(0, 1, num_points)
    x_values = x0(t_values)
    history = [x_values.copy()]

    for _ in range(num_iter):
        x_values_new = np.array([T(lambda t: np.interp(t,
            t_values, x_values), t) for t in t_values])
        history.append(x_values_new.copy())
        x_values = x_values_new

    return t_values, history

#
def compute_error(history, alpha=1/9):
    errors = []
    rho_0 = np.max(np.abs(history[0] - history[1]))
    for n in range(1, len(history)):
        error = (alpha ** n) * rho_0 / (1 - alpha)
        errors.append(error)
    return errors

#
x0_list = [
    (lambda t: t, r'$x_0(t)␣=␣t$'),
    (lambda t: np.sin(2 * np.pi * t), r'$x_0(t)␣=␣\sin(2\pi␣
       t)$'),
    (lambda t: np.exp(-t), r'$x_0(t)␣=␣e^{-t}$')
]

#
for x0, formula in x0_list:
    t_values, history = iterate_T(x0, num_iter=5)
    errors = compute_error(history)

    plt.figure(figsize=(8, 5))
    for i, x_values in enumerate(history):
        plt.plot(t_values, x_values, label=f'
                             ␣{i}')

    plt.title(f'                ␣       ␣{formula}', fontsize
```

```
    =14)
plt.xlabel(r'$t$', fontsize=12)
plt.ylabel(r'$x(t)$', fontsize=12)
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

print(f'               ␣                 ␣       ␣{formula
    }:\n')
print(f'{"                     ":^10}␣{"             ␣eps
    ":^15}')
print('-' * 40)

for i, x_values in enumerate(history):
    eps = errors[i - 1] if i > 0 else 0
    print(f'{i:^10}␣{eps:^15.5f}')

print('\n' + '=' * 40 + '\n')
```

3.2 Графики





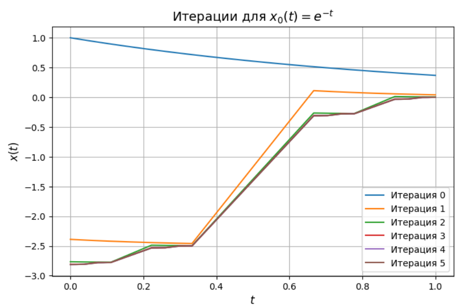


Таблица 1: Значения для $x_0(t) = t$

Итерация	Ошибка ε
0	0.00000
1	0.34028
2	0.03781
3	0.00420
4	0.00047
5	0.00005

Таблица 2: Значения для $x_0(t) = \sin(2\pi t)$

Итерация	Ошибка ε
0	0.00000
1	0.45139
2	0.05015
3	0.00557
4	0.00062
5	0.00007

Таблица 3: Значения для $x_0(t) = e^{-t}$

Итерация	Ошибка ε
0	0.00000
1	0.42361
2	0.04707
3	0.00523
4	0.00058
5	0.00006

3.3 Выводы

Мы доказали, что T — сжимающее отображение строго по определению, нашли коэффициент сжатия, вычислили число итераций для различных ε и реализовали метод сжимающих отображений на Python с графической интерпретацией.