Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1

«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»

по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. P4135

Фамилия И.О.,

Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,

должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Подп. и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подп. и дата

Инв. № подл.

					КСУИ.101.4135.001 ПЗ
Изм.	*Лист*	*№ докум.*	*Подп.*	*Дата*	
Разраб.		*Антонов, Артемов*			*Разработка системы управления для манипулятора Kuka Youbot*
Пров.		*Котельников Ю.П.*			
Н. контр.					
Утв.					*Пояснительная записка*

Лит.	*Лист*	*Листов*
	2	*29*

Университет ИТМО
Кафедра СУиИ
гр. P4135

Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

n — количество звеньев робота, $n = 5$;

q_i — i-ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i-ом сочленении);

q — вектор-столбец обобщенных координат робота, $q = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5]^T$;

${}^iR_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;

${}^iA_j$ — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$*;

$r^i_{j,k}$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$**;

g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

v^i_j — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО,*** выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

a^i_j — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

---

* За пояснениями обратитесь к Приложению А

** За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0y_0z_0$.

Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

ω_j^i — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega_{j,k}^i$ — угловая скорость вращения $Ox_ky_kz_k$ относительно $Ox_jy_jz_j$, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

z_j^i — орт $[0\ 0\ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

f_j^i — сила, действующая на j-ое звено (тело) механизма со стороны $(j-1)$-го звена (тела), выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_j^i — момент силы, действующий на j-ое звено (тело) механизма со стороны $(j-1)$-го звена (тела), выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_i — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты q_i;

m_i — масса i-го звена;

$\mathcal{I}_j^i$ — тензор инерции j-го звена относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1,n}$;

α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1,n}$;

s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;

s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно.

Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

– в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;

– раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;

– в разделе 3 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах аппробации на реальном роботе и проч.

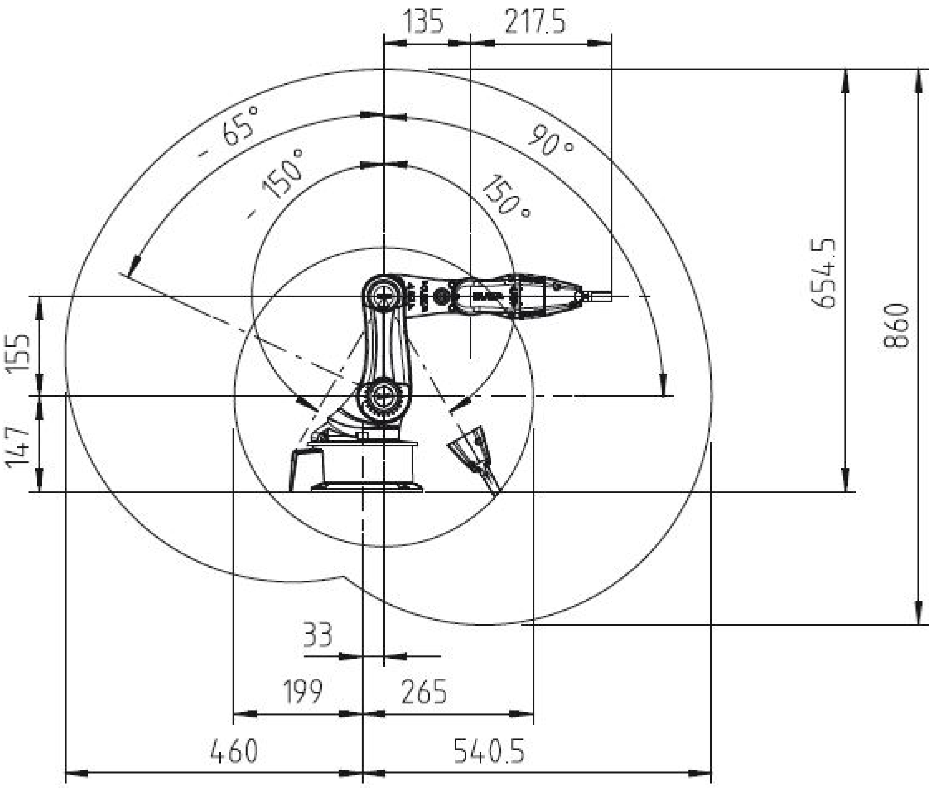
* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движении схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

1 Описание манипулятора

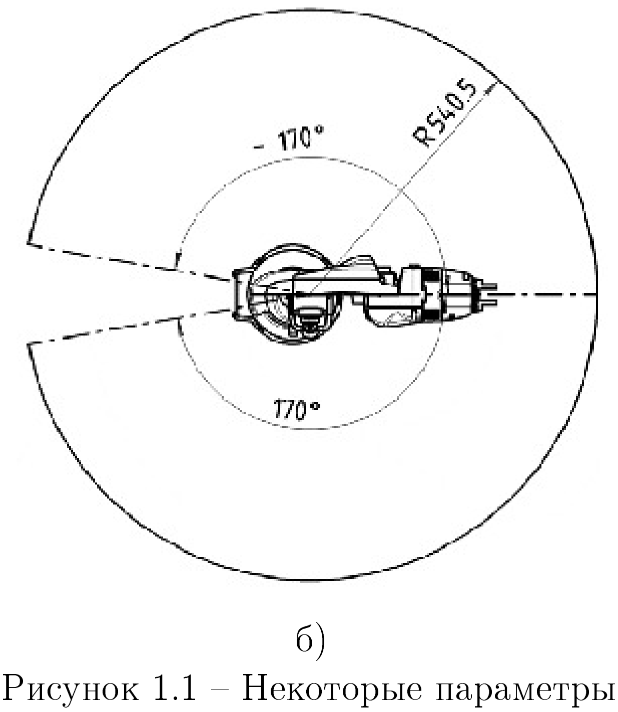
Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

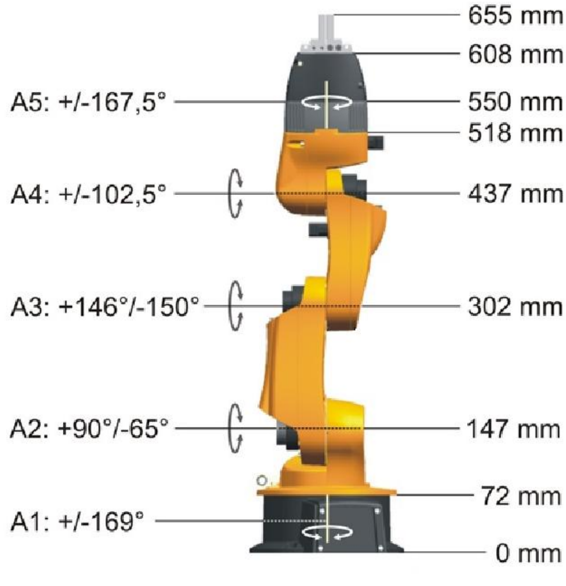
Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с$^{-1}$
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В



а)



б)



в)

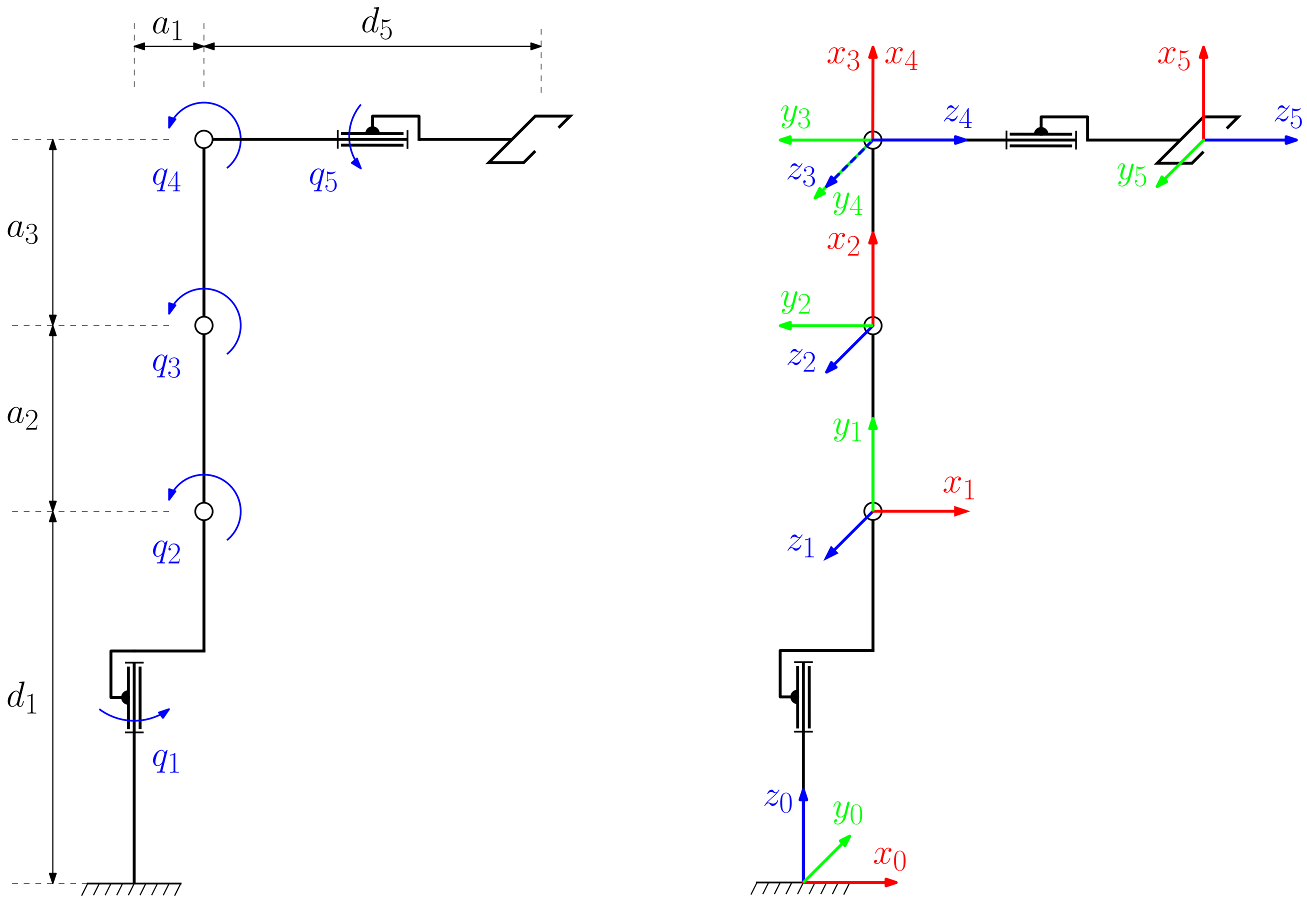
Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

2 Математическая модель манипулятора

2.1 Кинематика манипулятора

2.1.1 Общие замечания

Последовательная кинематическая цепь рассматриваемого манипулятора, включающая только вращательные КП V-класса (цилиндрические шарниры), изображена на рисунке 2.1а.



а) б)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при $q_i = 0$, $i = \overline{1,5}$; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

а) «привязка» к каждому звену СК, чьи оси удовлетворяют следующим условиям:

    1) ось z_{i-1} направлена вдоль оси i-ой КП;
    2) ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и пересекает ее;
    3) ось y_i дополняет оси z_i и x_i до правой декартовой СК.

б) определение параметров ДХ:

    1) a_i — расстояния от z_{i-1} до z_i вдоль x_i;
    2) α_i — угла от z_{i-1} до z_i вокруг x_i;
    3) d_i — расстояния от x_{i-1} до x_i вдоль z_{i-1};
    4) θ_i — угла от x_{i-1} до x_i вокруг z_{i-1}.

в) расчет матриц однородного преобразования в соответствии со следующими формулами:

$$^{i-1}A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i} \tag{2.1}$$

где R_{z,θ_i} — матрица поворота вокруг оси z на угол θ_i, T_{z,d_i} — матрица смещения вдоль оси z на расстояние d, T_{x,a_i} —матрица смещения вдоль оси x на расстояние a_i, R_{x,α_i} — матрица поворота вокруг оси x на угол α_i, равные

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{2.3}$$

итого

$$
{}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}
$$

Результаты выполнения для исследуемого манипулятора двух первых шагов представлены на рисунке 2.1б и в таблице 2.1, а третьего — в лице следующих выражений:

$$
{}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};
$$

$$
{}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.5}
$$

Таблица 2.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

Звено	a_i, мм	α_i, рад	d_i, мм	θ_i, рад
1	33	$\pi/2$	147	q_1
2	155	0	0	$q_2 + \pi/2$
3	135	0	0	q_3
4	0	$\pi/2$	0	q_4
5	0	0	218	q_5

2.1.2 Прямая задача кинематики

Информация о смещении и повороте СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ содержится в матрице ${}^0A_5$. Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, остается лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$$^{0}A_5 = \prod_{i=1}^{5} {^{i-1}A_i(q_i)}. \tag{2.6}$$

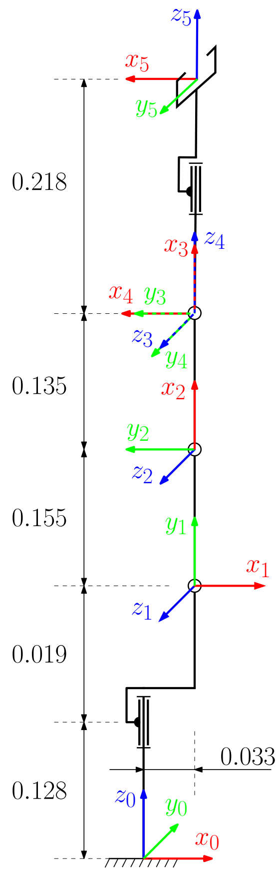


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при
$q = [q_1,\, q_2,\, q_3,\, q_4,\, q_5]^T = [0,\, 0,\, 0,\, \pi/2,\, 0]^T$.

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$$^{0}R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad r^0_{0,\,5} = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Выполняя соответствующие вычисления получаем:

$$ {}^0A_5 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.147 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.155 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot $$

$$ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.135 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.218 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.655 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.8) $$

что предложенный способ решения ПЗК в данном случае приводит к правильному ответу.

2.1.3 Обратная задача кинематики

Заданные смещение и поворот СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ можно описать с помощью матрицы ${}^0A_5$. Используя ее и матрицы из (2.5), найти расчетные формулы для углов q_i $(i = \overline{1,5})$ можно из следующих соображений.

Введем обозначения для элементов матрицы ${}^0A_5$ в соответствии с формулой:

$$ {}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9) $$

Приравняв матрицу ${}^0A_5$ и правую часть выражения (2.6) и домножив с обеих сторон на ${}^0A_1^{-1}$, придем к выражению:

$$ {}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5, \quad (2.10) $$

где левая часть с учетом (2.5) равна

$$ {}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11}c_1 + r_{21}s_1 & r_{12}c_1 + r_{22}s_1 & r_{13}c_1 + r_{23}s_1 & p_xc_1 + p_ys_1 - a_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ r_{11}s_1 - r_{21}c_1 & r_{12}s_1 - r_{22}c_1 & r_{13}s_1 - r_{23}c_1 & p_xs_1 - p_yc_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11) $$

а правая —

$$
{}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5c_{234} & -s_5c_{234} & s_{234} & a_2c_2 + a_3c_{23} + d_5s_{234} \\ c_5s_{234} & -s_5s_{234} & -c_{234} & a_2s_2 + a_3s_{23} - d_5c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.12)
$$

где в свою очередь

$$
\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \qquad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \qquad (2.13)
$$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов θ_1, θ_5 и θ_{234} дают

– равенство элементов $(3, 4)$:

$$
p_xs_1 - p_yc_1 = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \theta_1^{\mathrm{I}} = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{\mathrm{II}} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \qquad (2.14)
$$

– равенство элементов $(3, 1)$ и $(3, 2)$:

$$
\begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \theta_5^{\mathrm{I}} = \operatorname{atan2}(r_{11}\sin\theta_1^{\mathrm{I}} - r_{21}\cos\theta_1^{\mathrm{I}},\; r_{12}\sin\theta_1^{\mathrm{I}} - r_{22}\cos\theta_1^{\mathrm{I}}) \\ \theta_5^{\mathrm{II}} = \operatorname{atan2}(r_{11}\sin\theta_1^{\mathrm{II}} - r_{21}\cos\theta_1^{\mathrm{II}},\; r_{12}\sin\theta_1^{\mathrm{II}} - r_{22}\cos\theta_1^{\mathrm{II}}) \end{cases} \qquad (2.15)
$$

– равенство элементов $(2, 3)$ и $(1, 3)$:

$$
\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \qquad \begin{cases} \theta_{234}^{\mathrm{I}} = \operatorname{atan2}(r_{13}\cos\theta_1^{\mathrm{I}} + r_{23}\sin\theta_1^{\mathrm{I}},\; -r_{33}) \\ \theta_{234}^{\mathrm{II}} = \operatorname{atan2}(r_{13}\cos\theta_1^{\mathrm{II}} + r_{23}\sin\theta_1^{\mathrm{II}},\; -r_{33}) \end{cases} \qquad (2.16)
$$

Далее домножим выражение (2.11) на ${}^4A_5^{-1}$ справа — получим матрицу ${}^1A_4$:

$$
{}^1A_4 = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_x s_1 - p_y c_1 - d_5(r_{13}s_1 - r_{23}c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.17)
$$

в которой символами $\cdots$ обозначены элементы, не представляющие интереса в дальнейших расчетах. Заметим, что с учетом (2.14) и равенства элементов $(3, 3)$ в (2.11) и (2.12) справедливо

$$
p_x s_1 - p_y c_1 - d_5(r_{13}s_1 - r_{23}c_1) = 0. \qquad (2.18)
$$

С учетом этого и (2.17), имеем что

$$
r^1_{1,4} = \begin{bmatrix} (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.19)
$$

Далее заметим, что одно и то же положение 4-го звена может достигаться при двух разных способах расположения звеньев 2 и 3 (см. рисунок 2.3). Следовательно, углы θ_2, θ_3 и θ_4 при одних и тех же значениях углов θ_1 и θ_5 имеют по два возможных значения. Ниже выводятся формулы для последних.

Выпишем, пользуясь теоремой косинусов, выражение для $\cos\theta_3$ (его зависимость от θ_1 обуславливается зависимостью от этого угла вектора $r^1_{1,4}$):

$$
c_3(\theta_1) = \frac{(r^1_{1,4})^T \cdot r^1_{1,4} - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \qquad (2.20)
$$

С учетом этого для θ_3 можно получить следующие формулы

$$
\theta_3^{\mathsf{I,II}} = \mp\,\mathrm{atan2}\big(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\mathsf{I}})},\ c_3(\theta_1^{\mathsf{I}})\big) \qquad (2.21)
$$

$$
\theta_3^{\mathsf{III,IV}} = \mp\,\mathrm{atan2}\big(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\mathsf{II}})},\ c_3(\theta_1^{\mathsf{II}})\big) \qquad (2.22)
$$

Как видно из рисунка 2.3, $\theta_2 = \varphi + \beta$ при $\theta_3^{\mathsf{I,III}} < 0$ и $\theta_2 = \varphi - \beta$ при $\theta_3^{\mathsf{II,IV}} > 0$. Следовательно, принимая во внимание то, что

$$
\varphi(\theta_1) = \mathrm{atan2}(y_r,\, x_r), \qquad \beta(\theta_3) = \mathrm{atan2}(a_3 \sin|\theta_3|,\ a_2 + a_3\cos|\theta_3|), \qquad (2.23)
$$

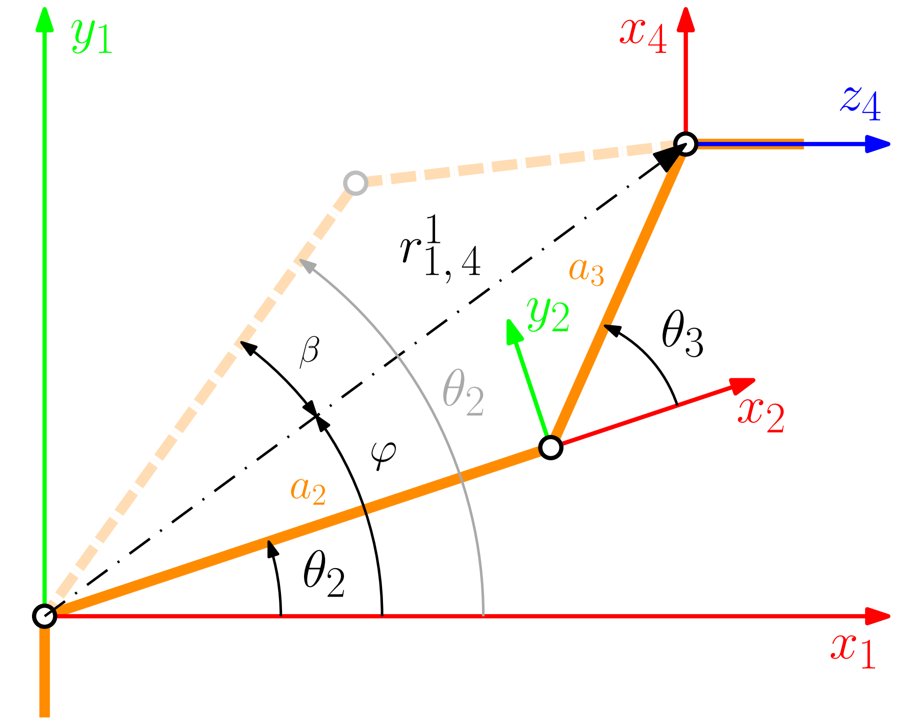


Рисунок 2.3 – Плоская часть манипулятора

где x_r и y_r — проекции вектора $r^1_{1,4}$ на оси абсцисс и ординат (их значения см. в (2.19)), для возможных значений угла θ_2 получаем следующие формулы:

$$\theta_2^{\mathsf{I}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{I}}) + \beta(\theta_3^{\mathsf{I}}), \qquad \theta_2^{\mathsf{II}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{I}}) - \beta(\theta_3^{\mathsf{II}}), \tag{2.24}$$

$$\theta_2^{\mathsf{III}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{II}}) + \beta(\theta_3^{\mathsf{III}}), \qquad \theta_2^{\mathsf{IV}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{II}}) - \beta(\theta_3^{\mathsf{IV}}). \tag{2.25}$$

Формулы для значений угла θ_4 после этого с учетом (2.13) приобретают простой вид:

$$\theta_4^{\mathsf{I,II}} = \theta_{234}^{\mathsf{I}} - \theta_2^{\mathsf{I,II}} - \theta_3^{\mathsf{I,II}}, \qquad \theta_4^{\mathsf{III,IV}} = \theta_{234}^{\mathsf{II}} - \theta_2^{\mathsf{III,IV}} - \theta_3^{\mathsf{III,IV}}. \tag{2.26}$$

Таким образом, любые положение и ориентацию схвата относительно основания манипулятор может обеспечить 4-мя собственными конфигурациями, которым соответствуют следующие наборы значений для его обобщенных координат $q = [q_1,\, q_2,\, q_3,\, q_4,\, q_5]^T$ (с учетом таблицы 2.1):

$$q^{\mathsf{I}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\mathsf{I}} & \theta_2^{\mathsf{I}} - \dfrac{\pi}{2} & \theta_3^{\mathsf{I}} & \theta_4^{\mathsf{I}} & \theta_5^{\mathsf{I}} \end{bmatrix}^T, \qquad q^{\mathsf{II}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\mathsf{I}} & \theta_2^{\mathsf{II}} - \dfrac{\pi}{2} & \theta_3^{\mathsf{II}} & \theta_4^{\mathsf{II}} & \theta_5^{\mathsf{I}} \end{bmatrix}^T, \tag{2.27}$$

$$q^{\mathsf{III}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\mathsf{II}} & \theta_2^{\mathsf{III}} - \dfrac{\pi}{2} & \theta_3^{\mathsf{III}} & \theta_4^{\mathsf{III}} & \theta_5^{\mathsf{II}} \end{bmatrix}^T, \qquad q^{\mathsf{IV}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\mathsf{II}} & \theta_2^{\mathsf{IV}} - \dfrac{\pi}{2} & \theta_3^{\mathsf{IV}} & \theta_4^{\mathsf{IV}} & \theta_5^{\mathsf{II}} \end{bmatrix}^T. \tag{2.28}$$

2.2 Динамика манипулятора

2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$*, где $i = \overline{1,5}$, показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$ сонаправлена с $Ox_iy_iz_i$.

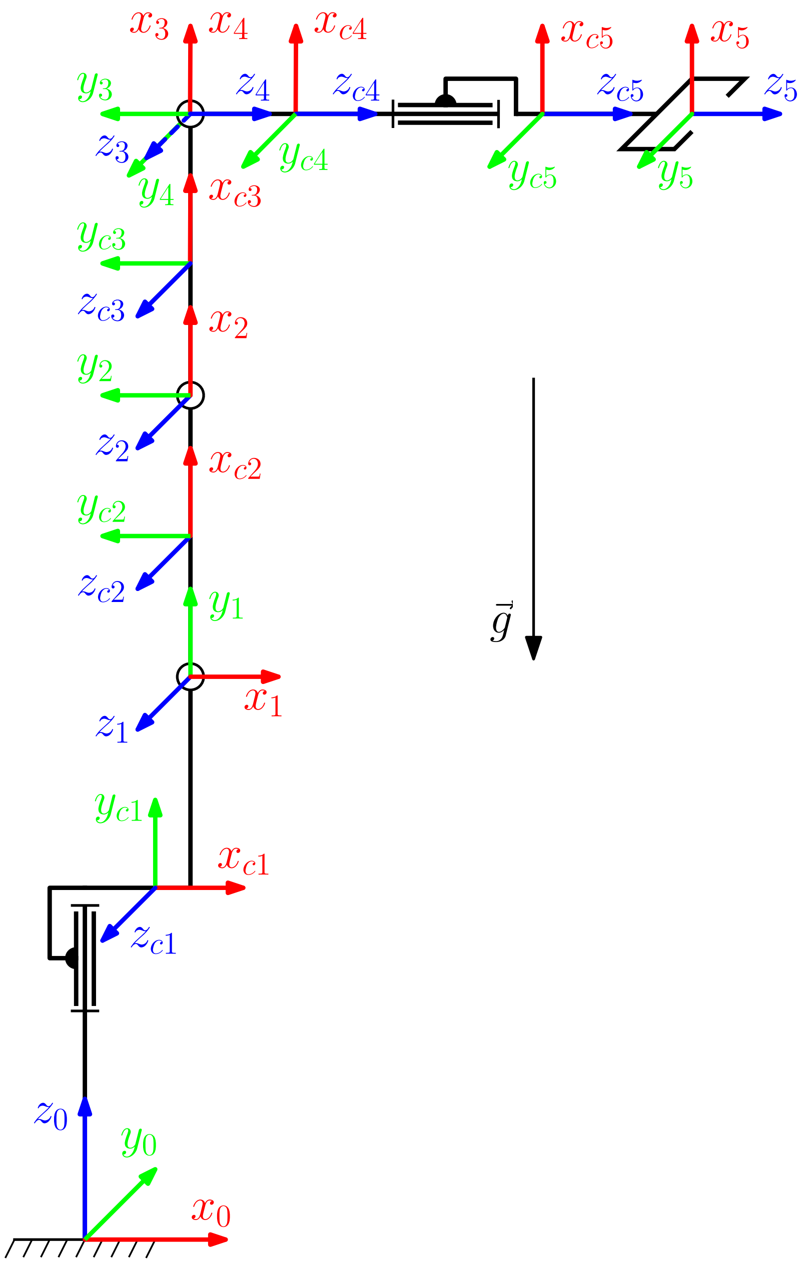


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора $\vec{g}$.

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Для описания положения введенных СК воспользуемся следующими векторами:

$$r^i_{i,\,ci} = \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \\ z_{ci} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,5}, \tag{2.29}$$

где x_{ci}, y_{ci} и z_{ci} — некоторые постоянные величины.

Для компонент тензоров инерции $\mathcal{I}^{ci}_i = const$ введем следующие обозначения:

$$\mathcal{I}^{ci}_i = \begin{bmatrix} I_{i,\,xx} & I_{i,\,xy} & I_{i,\,xz} \\ I_{i,\,xy} & I_{i,\,yy} & I_{i,\,yz} \\ I_{i,\,xz} & I_{i,\,yz} & I_{i,\,zz} \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

Заметим, что

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \tag{2.31}$$

где $g = 9.82$ м/с^2.

В заключении раздела приведем формулы для расчета величин, которые потребуются в дальнейшем (везде $i = \overline{1,5}$):

– для расчета $r^0_{0,\,i}$ и ${}^0R_i$ (см. Приложение А):

$${}^0A_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot \ldots \cdot {}^{i-1}A_i; \tag{2.32}$$

– для расчета $r^0_{0,\,ci}$:

$$\begin{bmatrix} r^0_{0,\,ci} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0A_i \begin{bmatrix} r^i_{i,\,ci} \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{2.33}$$

– для расчета $r^i_{i-1,\,i}$:

$${}^{i-1}A_i \quad \Rightarrow \quad {}^{i-1}R_i,\ r^{i-1}_{i-1,\,i}, \tag{2.34}$$

$$r^i_{i-1,\,i} = {}^{i-1}R_i^{-1} \cdot r^{i-1}_{i-1,\,i}; \tag{2.35}$$

– для расчета z^0_i:

$$z^0_i = {}^0R_i \cdot z^i_i = {}^0R_i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

2.2.2 Получение уравнений движения методом Эйлера-Лагранжа

Потенциальная энергия манипулятора

$$U = -g_0^T \cdot \sum_{i=1}^{5} m_i r^0_{0,\,ci} = -\left(m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + m_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \\ z_{c3} \end{bmatrix} + m_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c4} \\ y_{c4} \\ z_{c4} \end{bmatrix} + m_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c5} \\ y_{c5} \\ z_{c5} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= g_0 m_1 z_{c1} + g_0 m_2 z_{c2} + g_0 m_3 z_{c3} + g_0 m_4 z_{c4} + g_0 m_5 z_{c5}$$

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$v^0_{ci} = J_{vi}\dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \tag{2.37}$$

связь между линейными скоростями центров масс звеньев и вектором $\dot{q}$:

$$J_{v1} = \Big[z^0_0 \times \left(r^0_{0,\,c1} - r^0_{0,\,0} \right) \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \Big], \tag{2.38}$$

$$J_{v2} = \Big[z^0_0 \times \left(r^0_{0,\,c2} - r^0_{0,\,0} \right) \;\; z^0_1 \times \left(r^0_{0,\,c2} - r^0_{0,\,1} \right) \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \Big], \tag{2.39}$$

$$J_{v3} = \Big[z^0_0 \times \left(r^0_{0,\,c3} - r^0_{0,\,0} \right) \;\; z^0_1 \times \left(r^0_{0,\,c3} - r^0_{0,\,1} \right) \;\; z^0_2 \times \left(r^0_{0,\,c3} - r^0_{0,\,2} \right) \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \Big], \tag{2.40}$$

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z^0_0 \times \left(r^0_{0,\,c4} - r^0_{0,\,0} \right) \\ z^0_1 \times \left(r^0_{0,\,c4} - r^0_{0,\,1} \right) \\ z^0_2 \times \left(r^0_{0,\,c4} - r^0_{0,\,2} \right) \\ z^0_3 \times \left(r^0_{0,\,c4} - r^0_{0,\,3} \right) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \qquad J_{v5} = \begin{bmatrix} z^0_0 \times \left(r^0_{0,\,c5} - r^0_{0,\,0} \right) \\ z^0_1 \times \left(r^0_{0,\,c5} - r^0_{0,\,1} \right) \\ z^0_2 \times \left(r^0_{0,\,c5} - r^0_{0,\,2} \right) \\ z^0_3 \times \left(r^0_{0,\,c5} - r^0_{0,\,3} \right) \\ z^0_4 \times \left(r^0_{0,\,c5} - r^0_{0,\,4} \right) \end{bmatrix}^T, \tag{2.41}$$

где $\mathbf{0} = [0\ 0\ 0]^T$ — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega^0_{ci} = J_{\omega i}\dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \tag{2.42}$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором $\dot{q}$:

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.43}$$

$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.44}$$

$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \tag{2.45}$$

Кинетическая энергия манипулятора:

$$K = \frac{1}{2}\,\dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^{5} \left(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T \, {}^0R_i \, \mathcal{I}_i^{ci} \, {}^0R_i^T \, J_{\omega i} \right) \right) \dot{q} = \tag{2.46}$$

Функция Лагранжа

$$L = K - U. \tag{2.47}$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1,5} \qquad \Rightarrow \tag{2.48}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} = \tau_1 \\ = \tau_2 \\ = \tau_3 \\ = \tau_4 \\ = \tau_5 \end{cases} \tag{2.49}$$

2.2.3 Получение уравнений движения методом Ньютона-Эйлера

Для определения необходимых скоростей и ускорений с учетом «начальных условий»:

$$\omega_0^0 = 0, \quad \dot{\omega}_0^0 = 0, \quad a_0^0 = 0, \tag{2.50}$$

служат следующие рекурсивные формулы:

$$\omega_i^i = {}^{i-1}R_i^T \left(\omega_{i-1}^{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1}^{i-1} \right), \tag{2.51}$$

$$\dot{\omega}_i^i = {}^{i-1}R_i^T \left(\dot{\omega}_{i-1}^{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1}^{i-1} + \dot{q}_i \omega_{i-1}^{i-1} \times z_{i-1}^{i-1} \right), \tag{2.52}$$

$$a_i^i = {}^{i-1}R_i^T a_{i-1}^{i-1} + \dot{\omega}_i^i \times r_{i-1,\,i}^i + \omega_i^i \times \left(\omega_i^i \times r_{i-1,\,i}^i\right), \qquad (2.53)$$

$$a_{ci}^i = a_i^i + \dot{\omega}_i^i \times r_{i,\,ci}^i + \omega_i^i \times \left(\omega_i^i \times r_{i,\,ci}^i\right). \qquad (2.54)$$

Применив их, получим:

$$\omega_1^1 = {}^0R_1^T\left(\omega_0^0 + \dot{q}_1 z_0^0\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.55)$$

$$\dot{\omega}_1^1 = {}^0R_1^T\left(\dot{\omega}_0^0 + \ddot{q}_1 z_0^0 + \dot{q}_1 \omega_0^0 \times z_0^0\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.56)$$

$$a_1^1 = {}^0R_1^T a_0^0 + \dot{\omega}_1^1 \times r_{0,\,1}^1 + \omega_1^1 \times \left(\omega_1^1 \times r_{0,\,1}^1\right) = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1{}^2 a_1 \\ 0 \\ -\ddot{q}_1 a_1 \end{bmatrix}, \qquad (2.57)$$

$$a_{c1}^1 = a_1^1 + \dot{\omega}_1^1 \times r_{1,\,c1}^1 + \omega_1^1 \times \left(\omega_1^1 \times r_{1,\,c1}^1\right) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 z_{c1} - \dot{q}_1{}^2 a_1 - \dot{q}_1{}^2 x_{c1} \\ 0 \\ -\ddot{q}_1 a_1 - \ddot{q}_1 x_{c1} - \dot{q}_1{}^2 z_{c1} \end{bmatrix}, \qquad (2.58)$$

$$\omega_2^2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \sin\left(q_2\right) + \dot{q}_2 \sin\left(q_1 - q_2\right) \\ \dot{q}_1 \cos\left(q_2\right) - \dot{q}_2 \cos\left(q_1 - q_2\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.59)$$

$$\dot{\omega}_2^2 = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \sin\left(q_2\right) + \ddot{q}_2 \sin\left(q_1 - q_2\right) \\ \ddot{q}_1 \cos\left(q_2\right) - \ddot{q}_2 \cos\left(q_1 - q_2\right) \\ -\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin\left(q_1\right) \end{bmatrix}, \qquad (2.60)$$

$$a_2^2 = \left[\begin{matrix} -\dot{q}_1{}^2 a_1 \cos\left(q_2\right) - \dot{q}_1{}^2 a_2 \cos^2\left(q_2\right) + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 a_2 \sin\left(q_2\right)\sin\left(q_1 - q_2\right) + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 a_2 \cos\left(q_1\right) - \\ \dot{q}_1{}^2 a_1 \sin\left(q_2\right) + \frac{\dot{q}_1{}^2 a_2}{2}\sin\left(2q_2\right) - \dot{q}_1\dot{q}_2 a_2 \sin\left(q_1\right) + \\ -\ddot{q}_1 a_1 - \ddot{q}_1 a_2 \cos\left(q_2\right) + \end{matrix}\right. \qquad (2.61)$$

$$a_{c2}^2 = \left[\begin{matrix} \ddot{q}_1 z_{c2}\cos\left(q_2\right) - \ddot{q}_2 z_{c2}\cos\left(q_1 - q_2\right) - \dot{q}_1{}^2 a_1 \cos\left(q_2\right) - \frac{\dot{q}_1{}^2 a_2}{2}\cos\left(2q_2\right) - \frac{\dot{q}_1{}^2 a_2}{2} - \frac{\dot{q}_1{}^2 x_{c2}}{2} \\ -\ddot{q}_1 z_{c2}\sin\left(q_2\right) - \ddot{q}_2 z_{c2}\sin\left(q_1 - q_2\right) + \dot{q}_1{}^2 a_1 \sin\left(q_2\right) + \frac{\dot{q}_1{}^2 a_2}{2}\sin\left(2q_2\right) + \frac{\dot{q}_1{}^2 x_{c2}}{2} \\ \; \end{matrix}\right. \qquad (2.62)$$

(2.63)

Для определения сил и моментов, с которыми звенья робота действуют друг на друга, с учетом «начальных условий»:

$$f_6^5 = 0, \qquad \tau_6^5 = 0, \qquad g_5 = {}^0R_5^T g_0, \tag{2.64}$$

используются следующие рекурсивные формулы:

$$f_i^i = f_{i+1}^i + m_i(a_{ci}^i - g_i), \tag{2.65}$$

$$\tau_i^i = \tau_{i+1}^i - f_i^i \times (r_{i-1,\,i}^i - r_{i,\,ci}^i) + f_{i+1}^i \times r_{i,\,ci}^i + \mathcal{I}_i^{ci}\dot{\omega}_i^i + \omega_i^i \times (\mathcal{I}_i^{ci}\omega_i^i). \tag{2.66}$$

$$g_{i-1} = {}^{i-1}R_i g_i, \qquad f_i^{i-1} = {}^{i-1}R_i f_i^i, \qquad \tau_i^{i-1} = {}^{i-1}R_i \tau_i^i. \tag{2.67}$$

Воспользовавшись ими, получим:

$$g_5 = {}^0R_5^T g_0 = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \tag{2.68}$$

$$f_5^5 = f_6^5 + m_5(a_{c5}^5 - g_5) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \tag{2.69}$$

$$\tau_5^5 = \tau_6^5 - f_5^5 \times (r_{4,\,5}^5 - r_{5,\,c5}^5) + f_6^5 \times r_{5,\,c5}^5 + \mathcal{I}_5^{c5}\dot{\omega}_5^5 + \omega_5^5 \times (\mathcal{I}_5^{c5}\omega_5^5) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \tag{2.70}$$

$$g_4 = {}^4R_5 g_5 = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad f_5^4 = {}^4R_5 f_5^5 = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad \tau_5^4 = {}^4R_5 \tau_5^5 = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \tag{2.71}$$

$$f_4^4 = f_5^4 + m_4(a_{c4}^4 - g_4) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \tag{2.72}$$

$$\dots$$

Обобщенные моменты, а вместе с тем и уравнения движения манипулятора могут быть найдены по формуле:

$$\tau_i = (\tau_i^i)^T \, {}^{i-1}R_i^T z_{i-1}^{i-1}, \quad i = \overline{1,5}. \tag{2.73}$$

С учетом их получаем, что

$$\begin{cases} \tau_1 = \\ \tau_2 = \\ \tau_3 = \\ \tau_4 = \\ \tau_5 = \end{cases} \tag{2.74}$$

2.2.4 Уравнение движения в матричном виде

Уравнение движения системы в матричном виде, записанное на основании (2.49) или (2.74), примет вид

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) = \tau, \tag{2.75}$$

где $M(q)$ — матрица инерции, $C(q,\dot{q})$ — вектор центробежных и Кориолисовых сил, $G(q)$ — вектор гравитации, τ — вектор обобщенных сил и моментов, равные

$$M(q) = \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix}, \quad C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix}, \tag{2.76}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix}, \qquad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix}. \tag{2.77}$$

3 Синтез систем управления

Заключение

Текст заключения

Список использованных источников

1 KUKA YOUBOT. — URL: http://www.technomatix.ru/kuka-youbot (дата обращения: 08.03.2017).

2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Приложение А
(рекомендуемое)
Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования ${}^iA_j$ называется матрица размера 4×4, служащая для описания смещения и поворота СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$ и имеющая следующую структуру:

$$ {}^iA_j = \begin{bmatrix} {}^iR_j & r^i_{i,j} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

где $O_{1\times 3} = [0\ 0\ 0]$.

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки C относительно $Ox_0y_0z_0$ при известных векторах r^2_C, $r^0_{0,1}$ и $r^1_{1,2}$ и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r^0_C = {}^0R_1 r^1_C + r^0_{0,1} \\ r^1_C = {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r^0_C = {}^0R_1 {}^1R_2 r^2_C + {}^0R_1 r^1_{1,2} + r^0_{0,1} \tag{A.2}$$

где r^0_C, r^1_C, r^2_C — радиус-векторы точки C в $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$ соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами ${}^0A_1$ и ${}^1A_2$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} r^0_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} r^1_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 r^1_C + r^0_{0,1} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r^1_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r^1_{1,2} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2} \begin{bmatrix} r^2_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} r^0_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r^1_{1,2} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2}}_{{}^0A_2} \begin{bmatrix} r^2_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} {}^0R_1 {}^1R_2 r^2_C + {}^0R_1 r^1_{1,2} + r^0_{0,1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [].

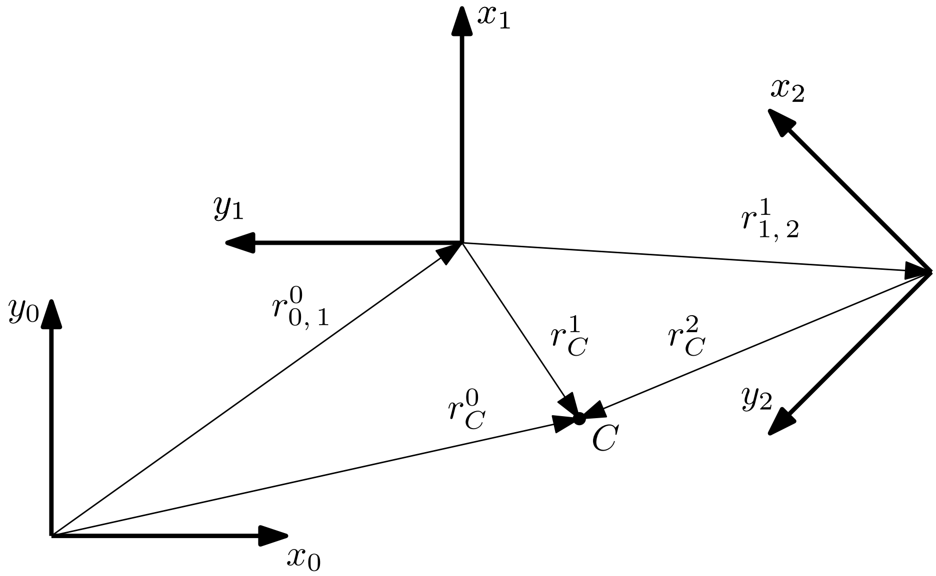


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Приложение Б
(рекомендуемое)
Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «…относительно такой-то системы координат…» и при этом «…выражены относительно такой-то системы координат…». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором V. В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

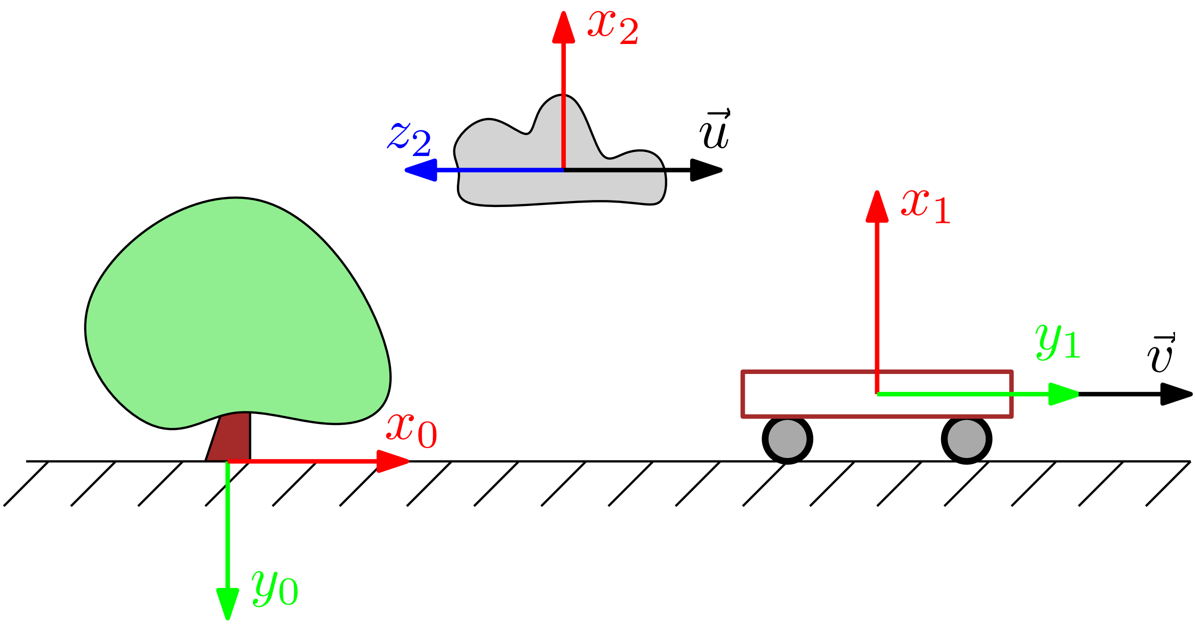


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Таблица Б.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора V	Значение V^T
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$