

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,  
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1  
«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»  
по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. Р4135  
Фамилия И.О.,  
Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,  
должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

# Содержание

Обозначения и сокращения	3
Введение	5
1 Описание манипулятора	6
2 Математическая модель манипулятора	8
2.1 Кинематика манипулятора . . . . .	8
2.1.1 Общие замечания . . . . .	8
2.1.2 Прямая задача кинематики . . . . .	10
2.1.3 Обратная задача кинематики . . . . .	12
2.2 Динамика манипулятора . . . . .	16
2.2.1 Общие замечания . . . . .	16
2.2.2 Вывод уравнений движения . . . . .	18
3 Синтез систем управления	21
Заключение	22
Список использованных источников	23
Приложение А Матрицы однородного преобразования	24
Приложение Б Терминология относительных измерений	26

Подп. и дата		Заключение					22						
		Список использованных источников					23						
Инв. № дубл.		Приложение А Матрицы однородного преобразования					24						
		Приложение Б Терминология относительных измерений					26						
Взам. инв. №													
Подп. и дата													
Инв. № подл.							КСУИ.101.4135.001 ПЗ						
		Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата							
		Разраб.	Антонов, Артемов				Разработка системы управления для манипулятора Kuka Youbot Пояснительная записка			Лит.	Лист	Листов	
		Пров.	Котельников Ю.П.									2	27
		Н. контр.								Университет ИТМО Кафедра СУиИ гр. Р4135			
		Утв.											

## Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

$n$  — количество звеньев робота,  $n = 5$ ;

$q_i$  —  $i$ -ая ( $i = \overline{1, n}$ ) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в  $i$ -ом сочленении);

$q$  — вектор-столбец обобщенных координат робота,  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$ ;

${}^iR_j$  — матрица поворота, характеризующая поворот СК  $Ox_jy_jz_j$  относительно СК  $Ox_iy_iz_i$ ;

${}^iA_j$  — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК  $Ox_iy_iz_i$  относительно СК  $Ox_iy_iz_i^*$ ;

$r_{j,k}^i$  — вектор из начала  $Ox_jy_jz_j$  в начало  $Ox_ky_kz_k$ , выраженный относительно  $Ox_iy_iz_i^{**}$ ;

$g_i$  — ускорение свободного падения, выраженное относительно  $Ox_i y_i z_i$ ;

$v_j^i$  — линейная скорость начала  $Ox_jy_jz_j$  относительно используемой в решении ИСО<sup>\*\*\*</sup> выраженной относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$a_j^i$  — линейное ускорение начала  $Ox_jy_jz_j$  относительно ИСО, выраженное относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

\* За пояснениями обратитесь к Приложению А

<sup>\*\*</sup> За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

\*\*\* В качестве ИСО в документе используется  $Ox_0y_0z_0$ .

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Ив. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Ив. № дубл.	Подп. и дата	${}^i R_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$ ;
										${}^i A_j$ — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i^*$ ;
$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_j y_j z_j$ в начало $Ox_k y_k z_k$ , выраженный относительно $Ox_i y_i z_i^{**}$ ;										
$g_i$ — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$ ;										
$v_j^i$ — линейная скорость начала $Ox_j y_j z_j$ относительно используемой в решении ИСО, <sup>***</sup> выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$ ;										
$a_j^i$ — линейное ускорение начала $Ox_j y_j z_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$ ;										
<hr/>										
<sup>*</sup> За пояснениями обратитесь к Приложению А										
<sup>**</sup> За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.										
<sup>***</sup> В качестве ИСО в документе используется $Ox_0 y_0 z_0$ .										
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										3

$\omega_j^i$  — угловая скорость вращения  $Ox_jy_jz_j$  относительно ИСО, выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$\omega_{j,k}^i$  — угловая скорость вращения  $Ox_k y_k z_k$  относительно  $Ox_j y_j z_j$ , выраженная относительно  $Ox_i y_i z_i$ ;

$\dot{\omega}_j^i$  — угловое ускорение  $Ox_jy_jz_j$  относительно ИСО, выраженное относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$z_j^i$  — орт  $[0 \ 0 \ 1]^T$  системы координат  $Ox_jy_jz_j$ , выраженный относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$f_j^i$  — сила, действующая на  $j$ -ое звено (тело) механизма со стороны  $(j-1)$ -го звена (тела), выраженная относительно  $Ox_i y_i z_i$ ;

$\tau_j^i$  — момент силы, действующий на  $j$ -ое звено (тело) механизма со стороны  $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженный относительно  $Ox_i y_i z_i$ ;

$\tau_i$  — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты  $q_i$ ;

$m_i$  — масса  $i$ -го звена;

$\mathcal{I}_j^i$  — тензор инерции  $j$ -го звена относительно  $Ox_i y_i z_i$ ;

$a_i, d_i$  — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга,  $i = \overline{1, n}$ ;

$\alpha_i, \theta_i$  — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга,  $i = \overline{1, n}$ ;

$s_\gamma, c_\gamma$  — синус и косинус угла  $\gamma$  соответственно;

$s_i, c_i$  — синус и косинус угла  $\theta_i$  соответственно;

$x\{a\}$  — абсцисса вектора  $a$ ; аналогично  $y\{a\}$  и  $z\{a\}$  означают его ординату и аппликату соответственно.

Изн. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$m_i$ — масса $i$ -го звена;
					$\mathcal{I}_j^i$ — тензор инерции $j$ -го звена относительно $Ox_iy_iz_i$ ;
Изн. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$a_i, d_i$ — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$ ;
					$\alpha_i, \theta_i$ — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$ ;
Изн. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$s_\gamma, c_\gamma$ — синус и косинус угла $\gamma$ соответственно;
					$s_i, c_i$ — синус и косинус угла $\theta_i$ соответственно;
Изн. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$x\{a\}$ — абсцисса вектора $a$ ; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно.

# Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории\*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

- в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;
- раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;
- в разделе 3 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах апробации на реальном роботе и проч.

\* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движения схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

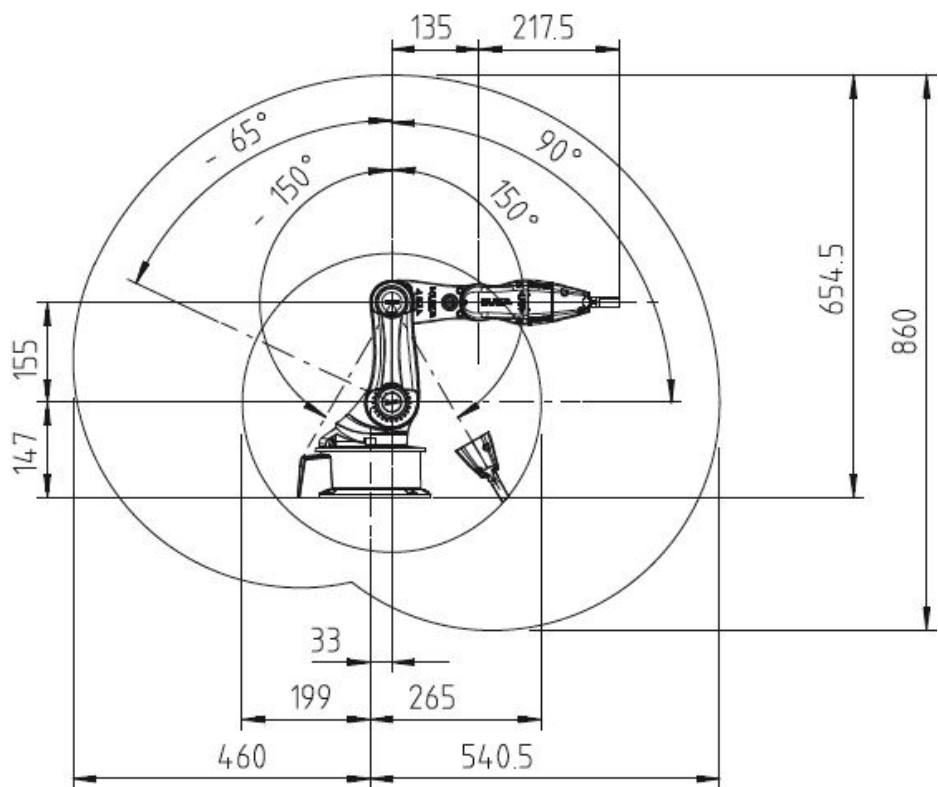
# 1 Описание манипулятора

Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

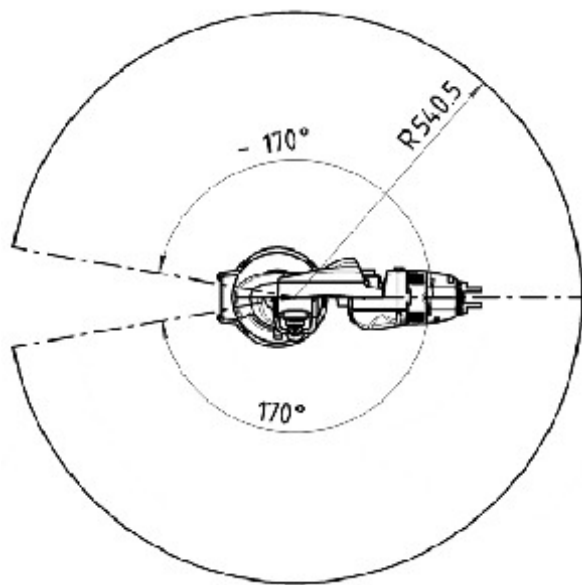
Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с <sup>-1</sup>
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В

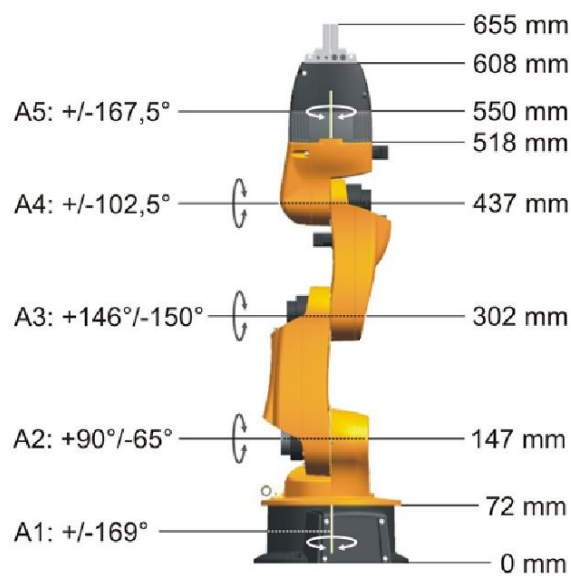
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата



а)



б)



в)

Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

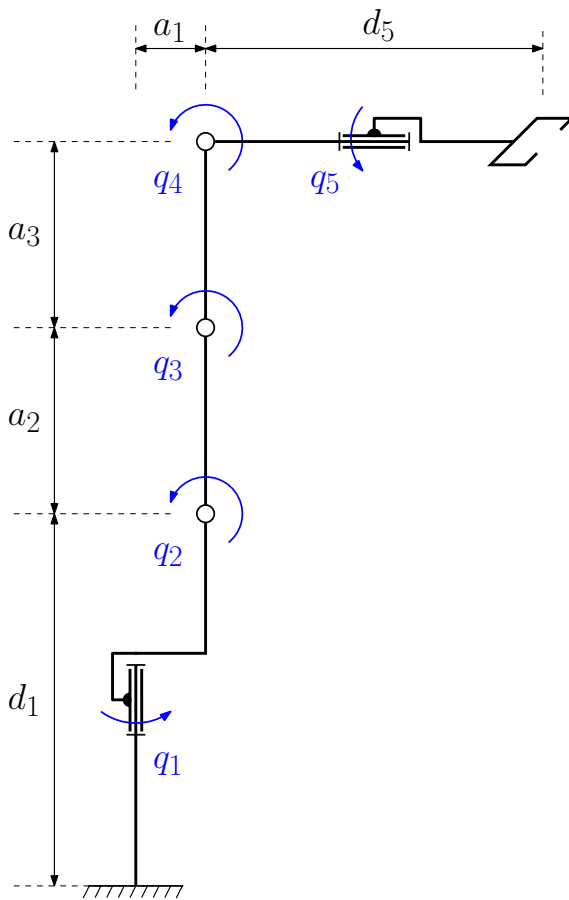
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

## 2 Математическая модель манипулятора

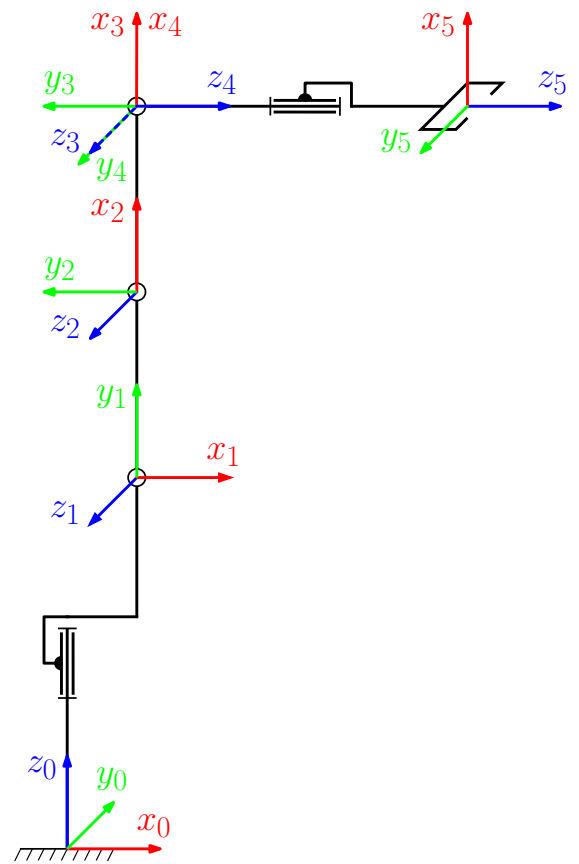
### 2.1 Кинематика манипулятора

#### 2.1.1 Общие замечания

Последовательная кинематическая цепь рассматриваемого манипулятора, включающая только вращательные КП V-класса (цилиндрические шарниры), изображена на рисунке 2.1а.



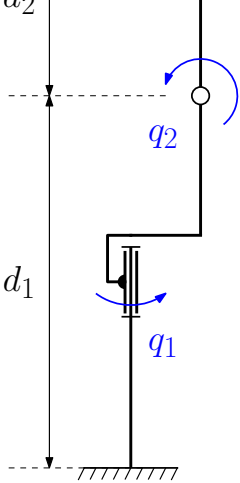
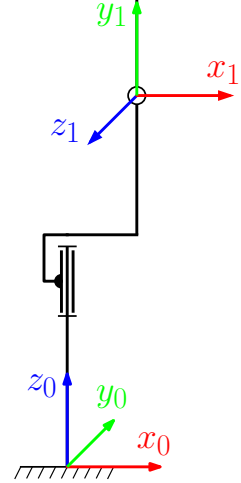
а)



б)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при  $q_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 5}$ ; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

Инв. № подл.	Подп. и дата				Изм.	Лист	
	Взам. инв. №						
	Инв. № дубл.						
	Подп. и дата						
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>а)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>б)</p> </div> </div> <p>Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при <math>q_i = 0, i = \overline{1, 5}</math>; б — расположения СК КП.</p> <p>Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:</p>							
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div> <p>КСУИ.101.4135.001 ПЗ</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Лист</p> <p>8</p> </div> </div>							
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата			





$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$
$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Звено	$a_i$ , мм	$\alpha_i$ , рад	$d_i$ , мм	$\theta_i$ , рад
1	33	$\pi/2$	147	$q_1$
2	155	0	0	$q_2 + \pi/2$
3	135	0	0	$q_3$
4	0	$\pi/2$	0	$q_4$
5	0	0	218	$q_5$

Информация о смещении и повороте СК  $Ox_5y_5z_5$  относительно СК  $Ox_0y_0z_0$  содержится в матрице  ${}^0A_5$ . Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, оста-

ется лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$${}^0A_5 = \prod_{i=1}^5 {}^{i-1}A_i(q_i). \quad (2.6)$$

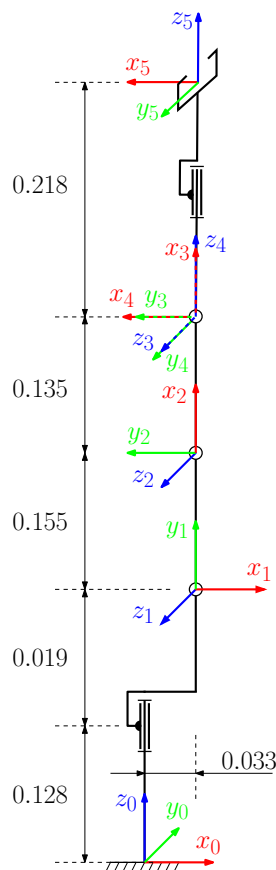


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T = [0, 0, 0, \pi/2, 0]^T$ .

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$${}^0R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
Лист				
11				



а правая —

$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 c_{234} & -s_5 c_{234} & s_{234} & a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_5 s_{234} \\ c_5 s_{234} & -s_5 s_{234} & -c_{234} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_5 c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где в свою очередь

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \quad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \quad (2.13)$$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов  $\theta_1$ ,  $\theta_5$  и  $\theta_{234}$  дают

– равенство элементов (3, 4):

$$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14)$$

– равенство элементов (3, 1) и (3, 2):

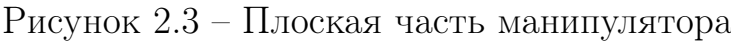
$$\begin{cases} s_5 = r_{11} s_1 - r_{21} c_1 \\ c_5 = r_{12} s_1 - r_{22} c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \quad (2.15)$$

– равенство элементов (2, 3) и (1, 3):

$$\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13} c_1 + r_{23} s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
				13




$$\begin{aligned}\theta_2^{\text{I}} &= \varphi(\theta_1^{\text{I}}) + \beta(\theta_3^{\text{I}}), & \theta_2^{\text{II}} &= \varphi(\theta_1^{\text{I}}) - \beta(\theta_3^{\text{II}}), & (2.24) \\ \theta_2^{\text{III}} &= \varphi(\theta_1^{\text{II}}) + \beta(\theta_3^{\text{III}}), & \theta_2^{\text{IV}} &= \varphi(\theta_1^{\text{II}}) - \beta(\theta_3^{\text{IV}}). & (2.25)\end{aligned}$$
$$\theta_4^{\text{I,II}} = \theta_{234}^{\text{I}} - \theta_2^{\text{I,II}} - \theta_3^{\text{I,II}}, \quad \theta_4^{\text{III,IV}} = \theta_{234}^{\text{II}} - \theta_2^{\text{III,IV}} - \theta_3^{\text{III,IV}}. \quad (2.26)$$
$$q^I = \begin{bmatrix} \theta_1^I & \theta_2^I - \frac{\pi}{2} & \theta_3^I & \theta_4^I & \theta_5^I \end{bmatrix}^T, \quad q^{II} = \begin{bmatrix} \theta_1^{II} & \theta_2^{II} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{II} & \theta_4^{II} & \theta_5^{II} \end{bmatrix}^T, \quad (2.27)$$
$$q^{\text{III}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{III}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{III}} & \theta_4^{\text{III}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T, \quad q^{\text{IV}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{IV}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{IV}} & \theta_4^{\text{IV}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T. \quad (2.28)$$

## 2.2 Динамика манипулятора

### 2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК  $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}^*$ , где  $i = \overline{1,5}$ , показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК  $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$  сонаправлена с  $Ox_iy_iz_i$ .

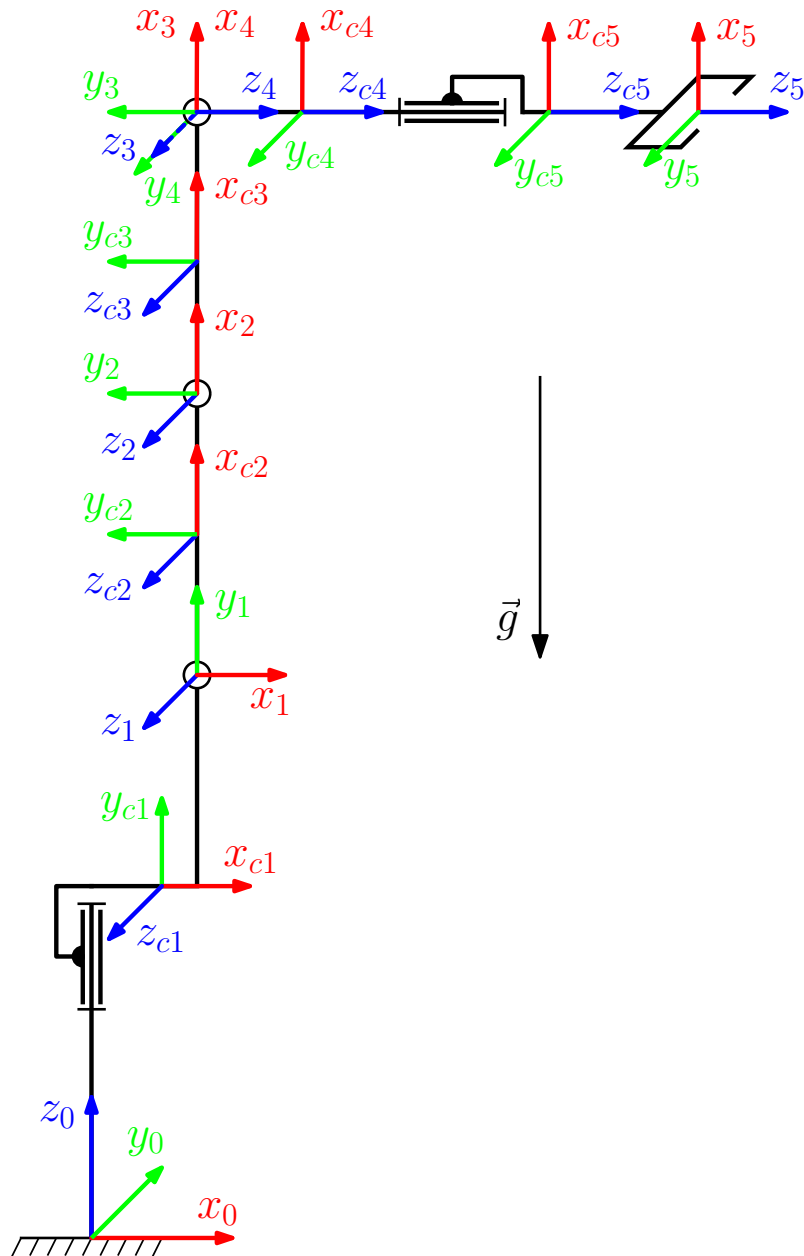


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора  $\vec{g}$ .

\* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата							
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата										

Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора  $\vec{g}$ .

\* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
					16





### 2.2.2 Вывод уравнений движения

Потенциальная энергия манипулятора

$$U = - \sum_{i=1}^5 (m_i g_i^T r_{0,ci}^i) = - \sum_{i=1}^5 (m_i g_i^T r_{0,i}^i + g_i^T (m_i r_{i,ci}^i)), \quad (2.36)$$

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$v_i^0 = J_{vi} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.37)$$

связь между линейными скоростями начал соответствующих СК и вектором  $\dot{q}$ :

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,1}^0 - r_{0,0}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,1}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$J_{v3} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,1}^0) & z_2^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,2}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}^T, \quad (2.41)$$

где  $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$  — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_i^0 = J_{\omega i} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.42)$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором  $\dot{q}$ :

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Кинетическая энергия манипулятора

$$K = \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{2} m_i (v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i) \right). \quad (2.46)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						18	

Функция Лагранжа

$$\begin{aligned}
 L &= K - U = \\
 &= \sum_{i=1}^5 \left( m_i \left( \frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right) + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i + g_i) + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^5 \left( m_i \underbrace{\left( \frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right)}_{L_{i,1}} + m_i x_{ci} \cdot \underbrace{x \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,2}} + \right. \\
 &\quad + m_i y_{ci} \cdot \underbrace{y \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,3}} + m_i z_{ci} \cdot \underbrace{z \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,4}} + I_{i,xx} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (x \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,5}} + \\
 &\quad + I_{i,yy} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (y \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,6}} + I_{i,zz} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (z \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,7}} + I_{i,xy} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot y \{\omega_i^i\}}_{L_{i,8}} + \\
 &\quad \left. + I_{i,xz} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,9}} + I_{i,yz} \cdot \underbrace{y \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,10}} \right). \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1, 5} \quad \Rightarrow \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,10}\}) = \tau_5 \end{cases} \quad (2.49)$$

где  $\mathcal{L}_j$  — оператор, работающий в соответствии с формулой:

$$\mathcal{L}_j : \quad \mathcal{L}_j \{f\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad (2.50)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
Лист				
19				

где в свою очередь  $f = f(\dot{q}(t), q(t))$ . Если же заметить, что

$$\mathcal{L}_j\{L_{i,k}\} = 0 \quad \text{при } j > i, \quad i, j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 10}, \quad (2.51)$$

то выражения для них упрощаются до:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=2}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ m_5 \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,1}\} + m_5 x_{c5} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,2}\} + \dots + I_{5,yz} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,10}\}) = \tau_5 \end{cases} \quad (2.52)$$

или в матричном виде

$$\tau = \xi \chi, \quad (2.53)$$

где  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_5]^T$  — вектор обобщенных моментов,

$\chi = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_5]^T \in \mathbb{R}^{50}$  — вектор параметров робота, где в свою очередь

$$\chi_i = \begin{bmatrix} m_i & m_i x_{ci} & m_i y_{ci} & m_i y_{ci} & I_{i,xx} & I_{i,yy} & I_{i,zz} & I_{i,xy} & I_{i,xz} & I_{i,yz} \end{bmatrix}^T; \quad (2.54)$$

$\xi$  — так называемый регрессор, равный

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \dots & \xi_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \xi_{2,2} & \dots & \xi_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \xi_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

где в свою очередь  $O_{1 \times 10}$  — вектор-строка, состоящая из 10 нулей, а  $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\ddot{q}, \dot{q}, q)$  — вектор-строка, рассчитываемый по формуле

$$\xi_{j,i} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_j\{L_{i,1}\} & \mathcal{L}_j\{L_{i,2}\} & \dots & \mathcal{L}_j\{L_{i,10}\} \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\chi_i = \begin{bmatrix} m_i & m_i x_{ci} & m_i y_{ci} & m_i y_{ci} & I_{i,xx} & I_{i,yy} & I_{i,zz} & I_{i,xy} & I_{i,xz} & I_{i,yz} \end{bmatrix}^T \quad (2.54)$ <p><math>\xi</math> — так называемый регрессор, равный</p> $\xi = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \cdots & \xi_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \xi_{2,2} & \cdots & \xi_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \xi_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$ <p>где в свою очередь <math>O_{1 \times 10}</math> — вектор-строка, состоящая из 10 нулей, а <math>\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\ddot{q}, \dot{q}, q)</math> — вектор-строка, рассчитываемый по формуле</p> $\xi_{j,i} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_j\{L_{i,1}\} & \mathcal{L}_j\{L_{i,2}\} & \cdots & \mathcal{L}_j\{L_{i,10}\} \end{bmatrix}. \quad (2.56)$	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						20

3 Синтез систем управления

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						21

Заключение

Текст заключения

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						22

## Список использованных источников

- 1 KUKA YUBOT. — URL: <http://www.technomatix.ru/kuka-youbot> (дата обращения: 08.03.2017).
- 2 YouBot Detailed Specifications. — URL: [http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot\\_Detailed\\_Specifications](http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications) (дата обращения: 04.04.2017).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										23
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Приложение А  
(рекомендуемое)

**Матрицы однородного преобразования**

Матрицей однородного преобразования  ${}^iA_j$  называется матрица размера  $4 \times 4$ , служащая для описания смещения и поворота СК  $Ox_jy_jz_j$  относительно СК  $Ox_iy_izi$  и имеющая следующую структуру:

$${}^iA_j = \begin{bmatrix} {}^iR_j & r_{i,j}^i \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где  $O_{1 \times 3} = [0 \ 0 \ 0]$ .

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки  $C$  относительно  $Ox_0y_0z_0$  при известных векторах  $r_C^2$ ,  $r_{0,1}^0$  и  $r_{1,2}^1$  и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r_C^0 = {}^0R_1 r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ r_C^1 = {}^1R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \end{cases} \Rightarrow r_C^0 = {}^0R_1 {}^1R_2 r_C^2 + {}^0R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \quad (\text{A.2})$$

где  $r_C^0$ ,  $r_C^1$ ,  $r_C^2$  — радиус-векторы точки  $C$  в  $Ox_0y_0z_0$ ,  $Ox_1y_1z_1$  и  $Ox_2y_2z_2$  соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами  ${}^0A_1$  и  ${}^1A_2$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} {}^1R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^0R_1 {}^1R_2 r_C^2 + {}^0R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										24
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						



Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [1].

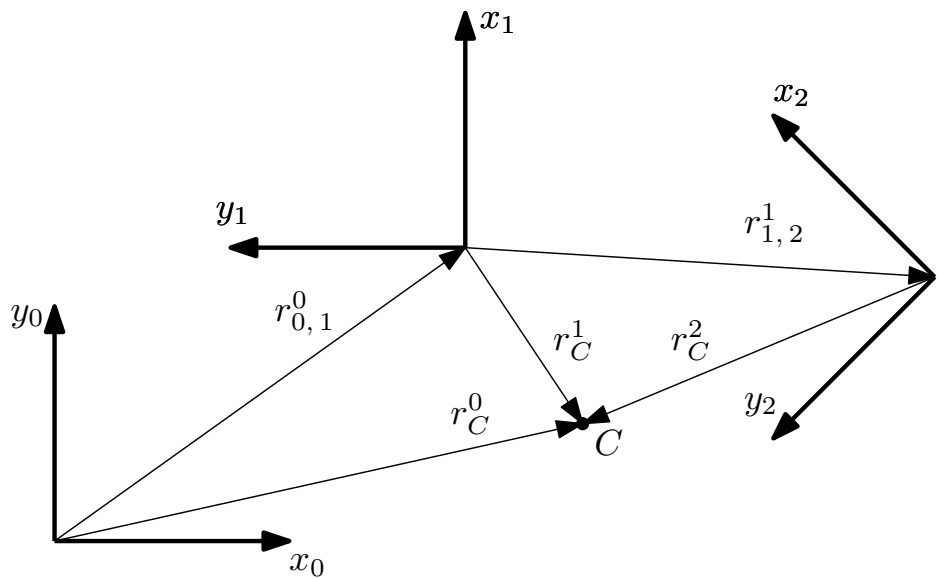


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №				Инв. № дубл.				Подп. и дата												

Приложение Б  
(рекомендуемое)

Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью  $v = 1$  м/с, облако, движущееся со скоростью  $u = 3$  м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат  $Ox_0y_0z_0$ ,  $Ox_1y_1z_1$  и  $Ox_2y_2z_2$ . Опишем скорость движения облака вектором  $\vec{V}$ . В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

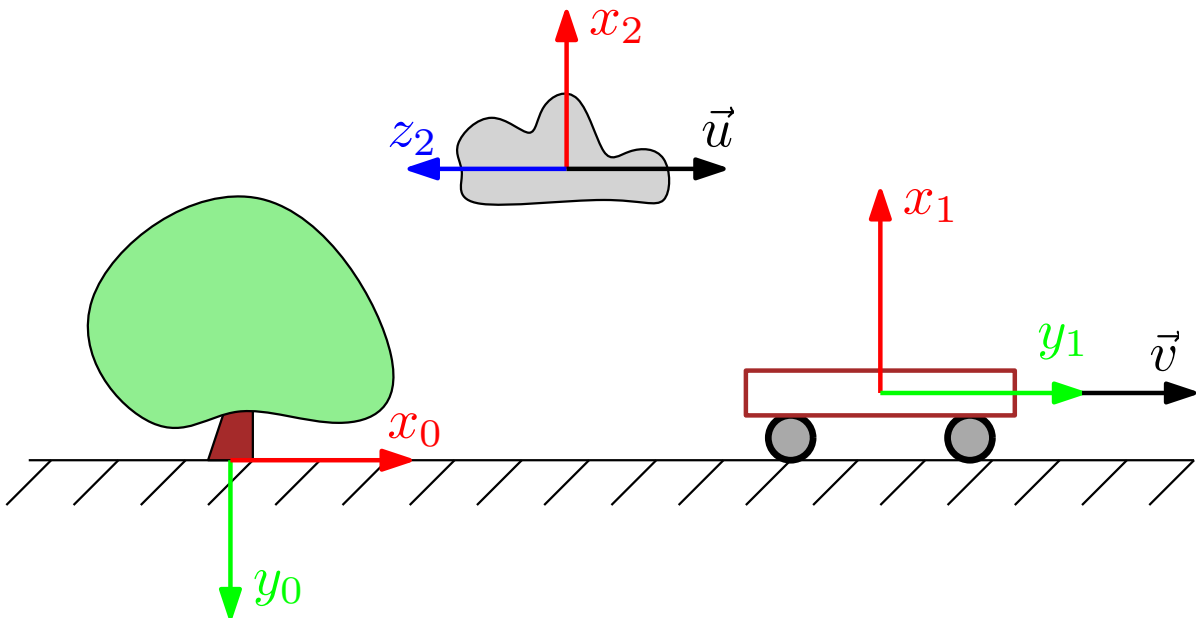


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Таблица Б.1 – Координаты вектора  $V$  в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора $V$	Значение $V^T$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$ , выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$ , выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$ , выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$ , выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$ , выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$ , выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата