# Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

# САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1 «НАЗВАНИЕ РАБОТЫ» по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. Р4135

Фамилия И.О.,

Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,

должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

# Содержание

O	бозі	начения	и сокр	аще	ния	3
$\mathbf{B}_{1}$	веде	ение				5
1	Оп	исание	манип	улят	opa	6
2	Ma	атемати	гческая	моде	ель манипулятора	8
	2.1	Кинем	атика м	анипу	илятора	8
		2.1.1	Общие	замеч	ания	8
		2.1.2	Прямая	я зада	ча кинематики	10
		2.1.3	Обратн	ая за	дача кинематики	12
	2.2	Динам	ика ман	нипул:	ятора	16
		2.2.1	Общие	замеч	ания	16
3	Си	інтез си	стем у	правл	пения	17
3a	аклі	очение				18
$\mathbf{C}_1$	пис	ок испо	льзоваі	нных	источников	19
$\Pi$	рил	ожение	A Man	гриці	ы однородного преобразования	20
	-					
$\Pi$	рил	ожение	Б Тер	мино	логия относительных измерений	22
			Ī	1 1		
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ	
Изм. Ј. Разра		№ докум. Антонов, Артем	Подп.	Дата	Разработка систоми Лит. Лист Л	Іистов
1 азра Пров.		китонов, артек Котельников Ю			управления лля	23
П					управления для  манипулятора Kuka Youbot  Кафедра СУи	
H. ког Утв.	нтр.			+	Пояснительная записка гр. Р4135	¥1

Взам. инв. №

Инв. № подл.

## Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

- СК система координат;
- КП кинематическая пара;
- ДХ Денавита-Хартенберга (Denavit-Hartenberg), например, соглашение;
- ИСО инерциальная система отсчета;
- ПЗК прямая задача кинематики;
- ОЗК обратная задача кинематики;
  - $q_i i$ -ая  $(i = \overline{1,n})$  обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i-ом сочленении);
  - n количество звеньев робота, n = 5;
  - $^iR_j$  матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i;$
  - ${}^{i}A_{j}$  матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК  $Ox_{j}y_{j}z_{j}$  относительно СК  $Ox_{i}y_{i}z_{i}^{*}$ ;
  - $r_{j,k}^{i}$  вектор из начала  $Ox_{j}y_{j}z_{j}$  в начало  $Ox_{k}y_{k}z_{k}$ , выраженный относительно  $Ox_{i}y_{i}z_{i}^{**}$ ;
    - $g_i$  ускорение свободного падения, выраженное относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;
    - $V_j^i$  линейная скорость начала  $Ox_jy_jz_j$  относительно используемой в решении ИСО, выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;
    - $a_j^i$  линейное ускорение начала  $Ox_jy_jz_j$  относительно ИСО, выраженное относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;
    - $\omega_j^i$  угловая скорость вращения  $Ox_jy_jz_j$  относительно ИСО, выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;
      - \* За пояснениями обратитесь к Приложению А
- \*\* За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

инв.  $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 

Взам. 1

Подп.

Инв. № подл.

 $KCУИ.101.4135.001\ \Pi 3$ 

- $\omega_{j,\,k}^i$  угловая скорость вращения  $Ox_ky_kz_k$  относительно  $Ox_jy_jz_j$ , выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;
  - $\dot{\omega}^i_j$  угловое ускорение  $Ox_jy_jz_j$  относительно ИСО, выраженное относительно  $Ox_iy_iz_i;$
  - $z_j^i$  орт  $[0\ 0\ 1]^T$  системы координат  $Ox_jy_jz_j$ , выраженный относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;
  - $f_j^i$  сила, действующая на j-ое звено (тело) механизма со стороны (j-1)- го звена (тела), выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;
  - $au_j^i$  момент силы, действующий на j-ое звено (тело) механизма со стороны (j-1)-го звена (тела), выраженный относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;
  - $au_i$  обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты  $q_i$ ;
  - $m_i$  масса i-го звена;
  - $\mathcal{I}^i_j$  тензор инерции j-го звена, выраженный относительно жестко связанной с его центром масс системой координат, сонаправленной с  $Ox_iy_iz_i$ ;
- $a_i, d_i$  обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга,  $i = \overline{1,n};$
- $\alpha_i, \theta_i$  обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга,  $i=\overline{1,n};$
- $s_{\gamma}, c_{\gamma}$  синус и косинус угла  $\gamma$  соответственно;
- $s_i, c_i$  синус и косинус угла  $\theta_i$  соответственно.

Подп. и дата Взам. инв. № Инв. № дубл.

Инв. № подл.

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

### Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории\*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

- в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;
- раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;
- в разделе 3 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах аппробации на реальном роботе и проч.

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

Подп. и дата

Взам. инв. №

Подп.

Инв. № подл.

 $KCУИ.101.4135.001\ \Pi 3$ 

<sup>\*</sup> Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движении схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

## 1 Описание манипулятора

Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Macca	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 MM
Максимальная скорость в сочленении	$90^{\circ} {\rm c}^{-1}$
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 B

Инв. № подл. Подп. и дата Взам. инв. № Инв. № дубл. Подп. и д

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

 $KСУИ.101.4135.001\ \Pi 3$ 

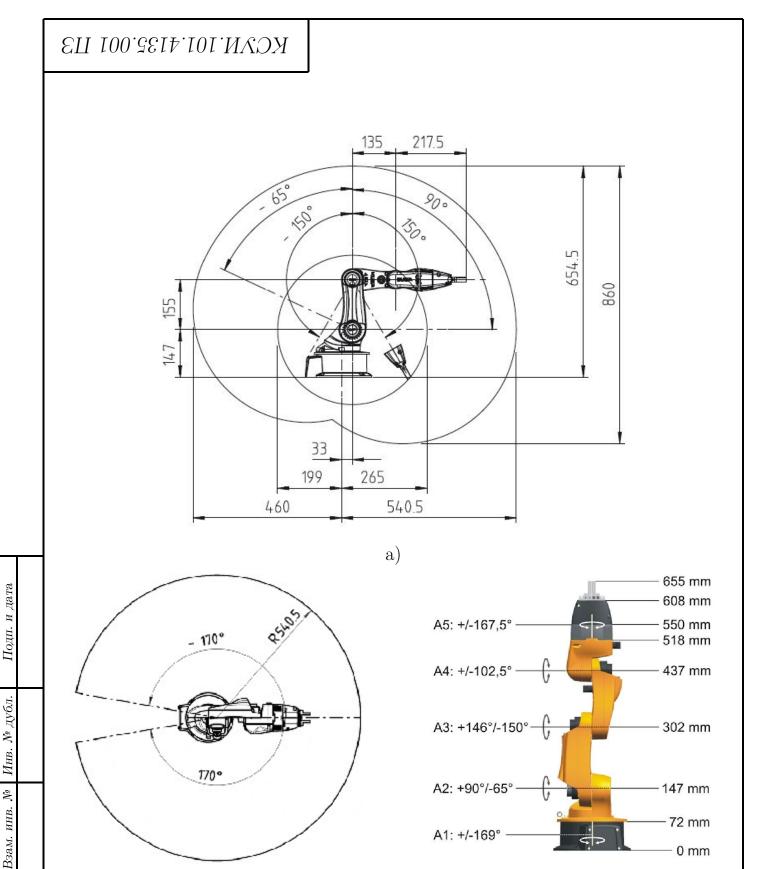


Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

Подп. Лист № докум. Дата

Подп. и дата

Инв. № подл.

б)

 $KCУИ.101.4135.001\ \Pi 3$ 

в)

Лист

A1: +/-169°

0 mm

## 2 Математическая модель манипулятора

#### 2.1 Кинематика манипулятора

#### 2.1.1 Общие замечания

Последовательная кинематическая цепь рассматриваемого манипулятора, включающая только вращательные КП V-класса (цилиндрические шарниры), изображена на рисунке 2.1а.

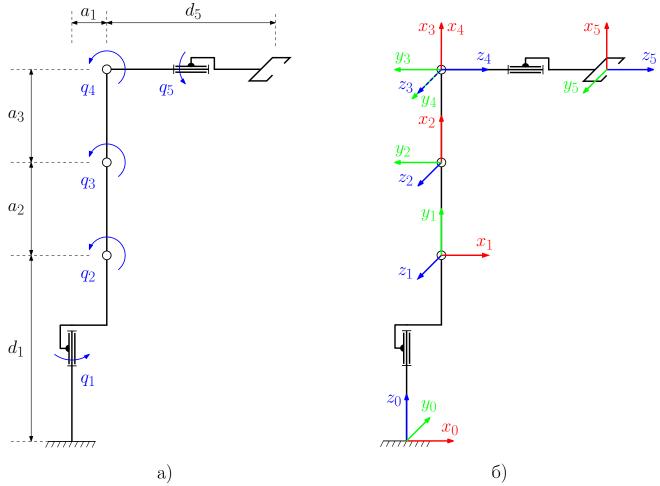


Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при  $q_i=0,\,i=\overline{1,5};\,$ б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита—Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

подл.

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

- а) «привязка» к каждому звену СК, чьи оси удовлетворяют следующим условиям:
  - 1) ось  $z_{i-1}$  направлена вдоль оси i-ой КП;
  - 2) ось  $x_i$  перпендикулярна оси  $z_{i-1}$  и пересекает ее;
  - 3) ось  $y_i$  дополняет оси  $z_i$  и  $x_i$  до правой декартовой СК.
- б) определение параметров ДХ:
  - 1)  $a_i$  расстояния от  $z_{i-1}$  до  $z_i$  вдоль  $x_i$ ;
  - 2)  $\alpha_i$  угла от  $z_{i-1}$  до  $z_i$  вокруг  $x_i$ ;
  - 3)  $d_i$  расстояния от  $x_{i-1}$  до  $x_i$  вдоль  $z_{i-1}$ ;
  - 4)  $\theta_i$  угла от  $x_{i-1}$  до  $x_i$  вокруг  $z_{i-1}$ .
- в) расчет матриц однородного преобразования в соответствии со следующими формулами:

$$^{i-1}A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i}$$
(2.1)

где  $R_{z,\theta_i}$  — матрица поворота вокруг оси z на угол  $\theta_i$ ,  $T_{z,d_i}$  — матрица смещения вдоль оси z на расстояние d,  $T_{x,a_i}$  —матрица смещения вдоль оси x на расстояние  $a_i$ ,  $R_{x,\alpha_i}$  — матрица поворота вокруг оси x на угол  $\alpha_i$ , равные

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{2.3}$$

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

Взам. инв. №

подл.

 $KСУИ.101.4135.001\ \Pi 3$ 

ИТОГО

$$^{i-1}A_{i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i} & -\cos\alpha_{i}\sin\theta_{i} & \sin\alpha_{i}\sin\theta_{i} & a_{i}\cos\theta_{i} \\ \sin\theta_{i} & \cos\alpha_{i}\cos\theta_{i} & -\sin\alpha_{i}\cos\theta_{i} & a_{i}\sin\theta_{i} \\ 0 & \sin\alpha_{i} & \cos\alpha_{i} & d_{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.4)

Результаты выполнения для исследуемого манипулятора двух первых шагов представлены на рисунке 2.16 и в таблице 2.1, а третьего — в лице следующих выражений:

$${}^{0}A_{1} = \begin{bmatrix} c_{1} & 0 & s_{1} & a_{1}c_{1} \\ s_{1} & 0 & -c_{1} & a_{1}s_{1} \\ 0 & 1 & 0 & d_{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^{1}A_{2} = \begin{bmatrix} c_{2} & -s_{2} & 0 & a_{2}c_{2} \\ s_{2} & c_{2} & 0 & a_{2}s_{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^{2}A_{3} = \begin{bmatrix} c_{3} & -s_{3} & 0 & a_{3}c_{3} \\ s_{3} & c_{3} & 0 & a_{3}s_{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^{3}A_{4} = \begin{bmatrix} c_{4} & 0 & s_{4} & 0 \\ s_{4} & 0 & -c_{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^{4}A_{5} = \begin{bmatrix} c_{5} & -s_{5} & 0 & 0 \\ s_{5} & c_{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
 (2.5)

Таблица 2.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

Звено	$a_i$ , MM	$\alpha_i$ , рад	$d_i$ , mm	$\theta_i$ , рад
1	33	$\pi/2$	147	$q_1$
2	155	0	0	$q_2 + \pi/2$
3	135	0	0	$q_3$
4	0	$\pi/2$	0	$q_4$
5	0	0	218	$q_5$

#### 2.1.2 Прямая задача кинематики

Информация о смещении и повороте СК  $Ox_5y_5z_5$  относительно СК  $Ox_0y_0z_0$  содержится в матрице  ${}^0A_5$ . Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, оста-

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

 $KCУИ.101.4135.001\ \Pi 3$ 

ется лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$${}^{0}A_{5} = \prod_{i=1}^{5} {}^{i-1}A_{i}(q_{i}). \tag{2.6}$$

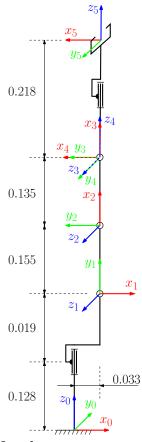


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при  $q=[q_1,\,q_2,\,q_3,\,q_4,\,q_5]=[0,\,0,\,0,\,\pi/2,\,0].$ 

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$${}^{0}R_{5} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad r_{0,5}^{0} = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}.$$
 (2.7)

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

инв.

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Выполняя соответствующие вычисления получаем:

$${}^{0}A_{5} = {}^{0}A_{1} \cdot {}^{1}A_{2} \cdot {}^{2}A_{3} \cdot {}^{3}A_{4} \cdot {}^{4}A_{5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.147 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.155 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0.135 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0.218 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0.033 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0.655 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}, (2.8)$$

что предложенный способ решения ПЗК в данном случае приводит к правильному ответу.

#### 2.1.3 Обратная задача кинематики

Заданные смещение и поворот СК  $Ox_5y_5z_5$  относительно СК  $Ox_0y_0z_0$  можно описать с помощью матрицы  ${}^0A_5$ . Используя ее и матрицы из (2.5), найти расчетные формулы для углов  $q_i$   $(i=\overline{1,5})$  можно из следующих соображений.

Введем обозначения для элементов матрицы  ${}^0A_5$  в соответствии с формулой:

$${}^{0}A_{5} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_{x} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_{y} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_{z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(2.9)$$

Приравняв матрицу  ${}^0A_5$  и правую часть выражения (2.6) и домножив с обеих сторон на  ${}^0A_1^{-1}$ , придем к выражению:

$${}^{0}A_{1}^{-1} \cdot {}^{0}A_{5} = {}^{1}A_{2} \cdot {}^{2}A_{3} \cdot {}^{3}A_{4} \cdot {}^{4}A_{5}, \tag{2.10}$$

где левая часть с учетом (2.5) равна

$${}^{0}A_{1}^{-1} \cdot {}^{0}A_{5} = \begin{bmatrix} r_{11}c_{1} + r_{21}s_{1} & r_{12}c_{1} + r_{22}s_{1} & r_{13}c_{1} + r_{23}s_{1} & p_{x}c_{1} + p_{y}s_{1} - a_{1} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_{z} - d_{1} \\ r_{11}s_{1} - r_{21}c_{1} & r_{12}s_{1} - r_{22}c_{1} & r_{13}s_{1} - r_{23}c_{1} & p_{x}s_{1} - p_{y}c_{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (2.11)$$

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

Инв. № дубл.

инв.  $N^{\underline{o}}$ 

Взам.

подл.

Инв. №

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

а правая —

$${}^{1}A_{2} \cdot {}^{2}A_{3} \cdot {}^{3}A_{4} \cdot {}^{4}A_{5} = \begin{bmatrix} c_{5}c_{234} & -s_{5}c_{234} & s_{234} & a_{2}c_{2} + a_{3}c_{23} + d_{5}s_{234} \\ c_{5}s_{234} & -s_{5}s_{234} & -c_{234} & a_{2}s_{2} + a_{3}s_{23} - d_{5}c_{234} \\ s_{5} & c_{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (2.12)$$

где в свою очередь

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \qquad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4.$$
 (2.13)

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов  $\theta_1$ ,  $\theta_5$  и  $\theta_{234}$  дают

— равенство элементов (3,4):

$$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \implies \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \implies \begin{cases} \theta_1^{\mathsf{I}} = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{\mathsf{II}} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases}$$
 (2.14)

- равенство элементов (3,1) и (3,2):

$$\begin{cases} s_{5} = r_{11}s_{1} - r_{21}c_{1} \\ c_{5} = r_{12}s_{1} - r_{22}c_{1} \end{cases} \Rightarrow \\ c_{5} = r_{12}s_{1} - r_{22}c_{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{5}^{\mathsf{I}} = \operatorname{atan2}(r_{11}\sin\theta_{1}^{\mathsf{I}} - r_{21}\cos\theta_{1}^{\mathsf{I}}, \ r_{12}\sin\theta_{1}^{\mathsf{I}} - r_{22}\cos\theta_{1}^{\mathsf{I}}) \\ \theta_{5}^{\mathsf{II}} = \operatorname{atan2}(r_{11}\sin\theta_{1}^{\mathsf{II}} - r_{21}\cos\theta_{1}^{\mathsf{II}}, \ r_{12}\sin\theta_{1}^{\mathsf{II}} - r_{22}\cos\theta_{1}^{\mathsf{II}}) \end{cases}$$
(2.15)

- равенство элементов (2,3) и (1,3):

$$\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^{\mathsf{I}} = \operatorname{atan2}(r_{13}\cos\theta_1^{\mathsf{I}} + r_{23}\sin\theta_1^{\mathsf{I}}, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{\mathsf{II}} = \operatorname{atan2}(r_{13}\cos\theta_1^{\mathsf{II}} + r_{23}\sin\theta_1^{\mathsf{II}}, -r_{33}) \end{cases}$$
(2.16)

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

инв.  $N^{\underline{\varrho}}$ 

Взам. 1

подл.

Инв. №

 $KCУИ.101.4135.001\ \Pi 3$ 

Далее домножим выражение (2.11) на  $^4A_5^{-1}$  справа — получим матрицу  $^1A_4$ :

$${}^{1}A_{4} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & (p_{y} - d_{5}r_{23})s_{1} + (p_{x} - d_{5}r_{13})c_{1} - a_{1} \\ \cdots & \cdots & p_{z} - d_{1} - d_{5}r_{33} \\ \cdots & \cdots & p_{x}s_{1} - p_{y}c_{1} - d_{5}(r_{13}s_{1} - r_{23}c_{1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.17)$$

в которой символами  $\cdots$  обозначены элементы, не представляющие интереса в дальнейших расчетах. Заметим, что с учетом (2.14) и равенства элементов (3,3) в (2.11) и (2.12) справедливо

$$p_x s_1 - p_y c_1 - d_5(r_{13} s_1 - r_{23} c_1) = 0. (2.18)$$

С учетом этого и (2.17), имеем что

$$r_{1,4}^{1} = \begin{bmatrix} (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ 0 \end{bmatrix}.$$
 (2.19)

Далее заметим, что одно и то же положение 4-го звена может достигаться при двух разных способах расположения звеньев 2 и 3 (см. рисунок 2.3). Следовательно, углы  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  и  $\theta_4$  при одних и тех же значениях углов  $\theta_1$  и  $\theta_5$  имеют по два возможных значения. Ниже выводятся формулы для последних.

Выпишем, пользуясь теоремой косинусов, выражение для  $\cos \theta_3$  (его зависимость от  $\theta_1$  обуславливается зависимостью от этого угла вектора  $r_{1,4}^1$ ):

$$c_3(\theta_1) = \frac{(r_{1,4}^1)^T \cdot r_{1,4}^1 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3}$$
 (2.20)

С учетом этого для  $\theta_3$  можно получить следующие формулы

$$\theta_3^{\mathsf{I},\mathsf{II}} = \mp \operatorname{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\mathsf{I}})}, c_3(\theta_1^{\mathsf{I}}))$$
 (2.21)

$$\theta_3^{\text{III,IV}} = \mp \operatorname{atan2}\left(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\text{II}})}, \ c_3(\theta_1^{\text{II}})\right) \tag{2.22}$$

Как видно из рисунка 2.3,  $\theta_2=\varphi+\beta$  при  $\theta_3^{\mathsf{I,III}}<0$  и  $\theta_2=\varphi-\beta$  при  $\theta_3^{\mathsf{II,IV}}>0$ . Следовательно, принимая во внимание то, что

$$\varphi(\theta_1) = \text{atan2}(y_r, x_r), \qquad \beta(\theta_3) = \text{atan2}(a_3 \sin |\theta_3|, a_2 + a_3 \cos |\theta_3|), \qquad (2.23)$$

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

Инв. № дубл.

подл.

Инв. №

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

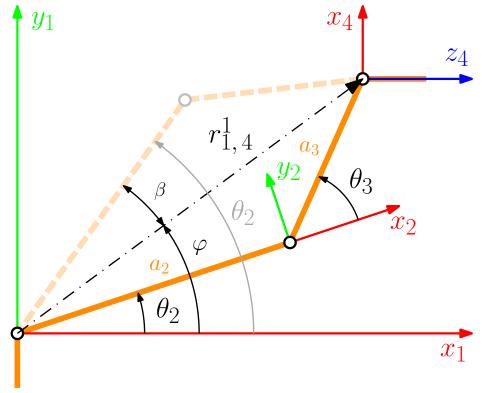


Рисунок 2.3 – Плоская часть манипулятора

где  $x_r$  и  $y_r$  — проекции вектора  $r_{1,4}^1$  на оси абсцисс и ординат (их значения см. в (2.19)), для возможных значений угла  $\theta_2$  получаем следующие формулы:

$$\theta_2^{\mathsf{I}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{I}}) + \beta(\theta_3^{\mathsf{I}}), \qquad \qquad \theta_2^{\mathsf{II}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{I}}) - \beta(\theta_3^{\mathsf{II}}), \qquad (2.24)$$

$$\theta_2^{\mathsf{III}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{II}}) + \beta(\theta_3^{\mathsf{III}}), \qquad \qquad \theta_2^{\mathsf{IV}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{II}}) - \beta(\theta_3^{\mathsf{IV}}).$$
 (2.25)

Формулы для значений угла  $\theta_4$  после этого с учетом (2.13) приобретают простой вид:

$$\theta_4^{\text{I,II}} = \theta_{234}^{\text{I}} - \theta_2^{\text{I,II}} - \theta_3^{\text{I,II}}, \qquad \theta_4^{\text{III,IV}} = \theta_{234}^{\text{II}} - \theta_2^{\text{III,IV}} - \theta_3^{\text{III,IV}}.$$
 (2.26)

Таким образом, любые положение и ориентацию схвата относительно основания манипулятор может обеспечить 4-мя собственными конфигурациями, которым соответствуют следующие наборы значений для его обобщенных координат  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]$  (с учетом таблицы 2.1):

$$q^{\mathsf{I}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\mathsf{I}} & \theta_2^{\mathsf{I}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\mathsf{I}} & \theta_4^{\mathsf{I}} & \theta_5^{\mathsf{I}} \end{bmatrix}, \qquad q^{\mathsf{II}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\mathsf{I}} & \theta_2^{\mathsf{II}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\mathsf{II}} & \theta_4^{\mathsf{II}} & \theta_5^{\mathsf{I}} \end{bmatrix}, \tag{2.27}$$

$$q^{\text{III}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{III}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{III}} & \theta_4^{\text{III}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}, \qquad q^{\text{IV}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{IV}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{IV}} & \theta_4^{\text{IV}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

Подп. и дата

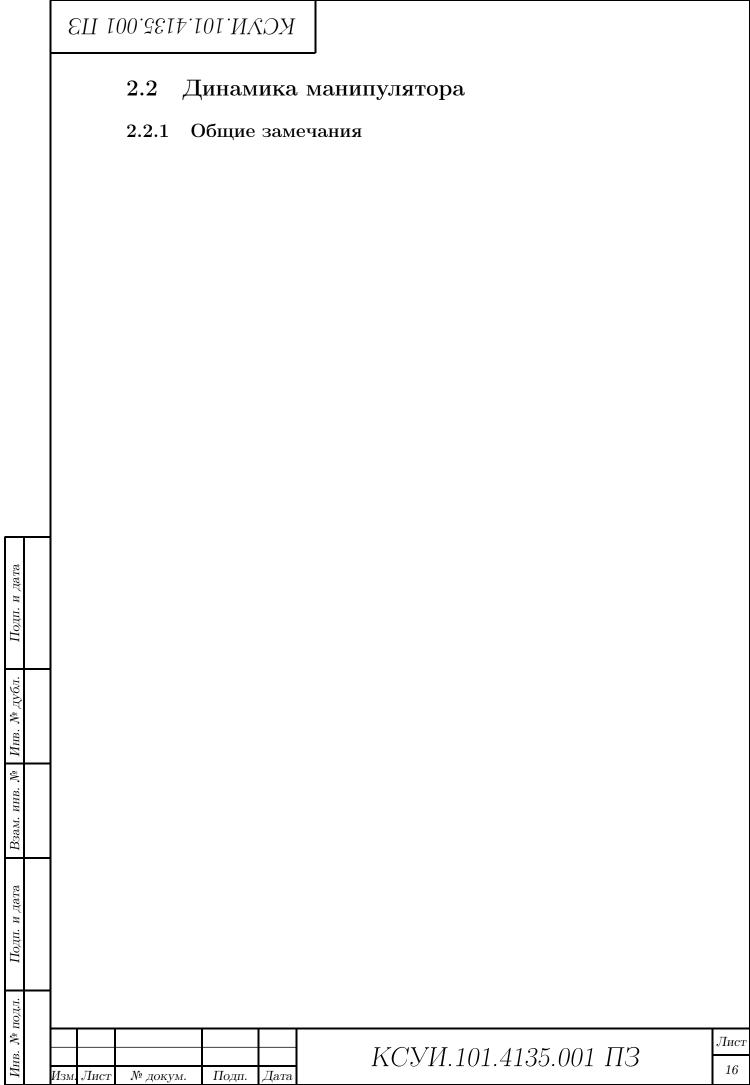
Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подп.

Инв. № подл.

 $KCУИ.101.4135.001\ \Pi 3$ 



	EH 100.8	CAN'101'4132	У		
	3	Синтез	сис	стем управления	
Подп. и дата					
Инв. № дубл.					
Взам. инв. №					
Подп. и дата					
і подл.		1 1	<u> </u>		
Инв. № подл.	Изм. Лист № д	докум. Подп. Да	та	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист 17

	KCVM.101.4135.001 ПЗ		
	Заключение		
	Текст заключения		
га	_		
Подп. и дата			
	_		
Инв. № дубл.			
_			
Взам. инв. №			
т дата			
Подп. и дата			
подл.			<u>,</u>
Инв. № подл.	Изм Лист № докум Поли Лэтэ	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист 18

# Список использованных источников

- 1 KUKA YOUBOT. URL: <a href="http://www.technomatix.ru/kuka-youbot">http://www.technomatix.ru/kuka-youbot</a> (дата обращения: 08.03.2017).
- 2 YouBot Detailed Specifications.— URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot\_Detailed\_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Подп. и дата		
Инв. № дубл.		
Взам. инв. №		
Подп. и дата		
Инв. № подл.		Лист 19
	Копировал	$\Phi$ ормат $A4$

# Приложение A (рекомендуемое)

#### Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования  ${}^iA_j$  называется матрица размера  $4\times 4$ , служащая для описания смещения и поворота СК  $Ox_jy_jz_j$  относительно СК  $Ox_iy_iz_i$  и имеющая следующую структуру:

$${}^{i}A_{j} = \begin{bmatrix} {}^{i}R_{j} & r_{i,j}^{i} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

где  $O_{1\times 3} = [0\ 0\ 0].$ 

Подп. и дата

Инв. № дубл.

инв.

Взам.

подл.

Инв. №

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки C относительно  $Ox_0y_0z_0$  при известных векторах  $r_C^2$ ,  $r_{0,1}^0$  и  $r_{1,2}^1$  и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r_C^0 = {}^{0}R_1r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ r_C^1 = {}^{1}R_2r_C^2 + r_{1,2}^1 \end{cases} \Rightarrow r_C^0 = {}^{0}R_1{}^{1}R_2r_C^2 + {}^{0}R_1r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0$$
 (A.2)

где  $r_C^0,\,r_C^1,\,r_C^2$  — радиус-векторы точки C в  $Ox_0y_0z_0,\,Ox_1y_1z_1$  и  $Ox_2y_2z_2$  соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами  $^0A_1$  и  $^1A_2$ :

$$\begin{cases}
\begin{bmatrix} r_{C}^{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{0}R_{1} & r_{0,1}^{0} \\ {}^{0}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}A_{1}} \begin{bmatrix} r_{C}^{1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}R_{1}r_{C}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} r_{C}^{1} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2} & r_{1,2}^{1} \\ {}^{0}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{1}A_{2}} \begin{bmatrix} r_{C}^{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + r_{1,2}^{1} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\Rightarrow \begin{bmatrix} r_{C}^{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{0}R_{1} & r_{0,1}^{0} \\ {}^{0}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}A_{1}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2} & r_{1,2}^{1} \\ {}^{0}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}A_{2}} \begin{bmatrix} r_{C}^{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{0}R_{1} & r_{0,1}^{0} \\ {}^{0}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}A_{1}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + r_{1,2}^{1} \\ {}^{0}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}A_{1}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + r_{1,2}^{1} \\ {}^{0}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}A_{1}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + r_{1,2}^{1} \\ {}^{0}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}A_{1}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{1}L_{3}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}R_{2}r_{C}^{2} + {}^{0}R_{1}r_{1,2}^{1} + r_{0,1}^{0} \\ {}^{1}L_{3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{$$

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

 $KCУИ.101.4135.001\ \Pi 3$ 

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [].

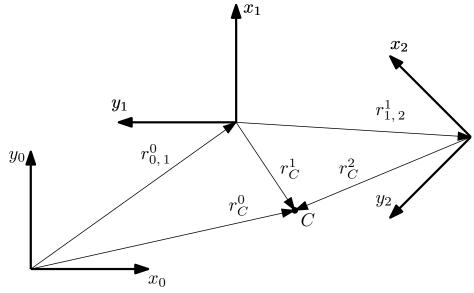


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

	-	
Подп. и дата		
Инв. № дубл.		
Взам. инв. №		
Подп. и дата		
нв. № подл.	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист

Дата

Подп.

Изм. Лист

№ докум.

# Приложение Б (рекомендуемое)

#### Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью  $v=1\,\mathrm{m/c}$ , облако, движущееся со скоростью  $u=3\,\mathrm{m/c}$ , и жестко связанные с ними правосторонние системы координат  $Ox_0y_0z_0,\,Ox_1y_1z_1$  и  $Ox_2y_2z_2$ . Опишем скорость движения облака вектором V. В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

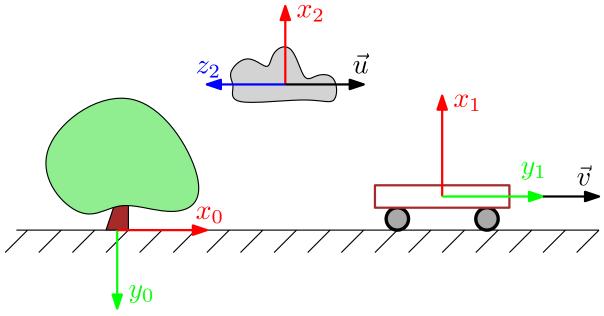


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Подп.

Инв. № дубл.

инв.

Взам. 1

Подп.

Инв. № подл.

Таблица Б.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора $V$	Значение $V^T$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$ , выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$ , выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	[0 3 0]
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$ , выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$ , выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$ , выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$ , выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Изм. Лист № докум. Подп. Дата

Взам. инв. №

Подп. и дата

 $\overline{M}$ нв.  $\mathcal{N}^{\underline{o}}$  подл.

 $KСУИ.101.4135.001\ \Pi 3$