

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1
«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»
по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. Р4135
Фамилия И.О.,
Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,
должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Обозначения и сокращения	4
Введение	6
1 Описание манипулятора	7
2 Математическая модель манипулятора	9
2.1 Кинематика манипулятора	9
2.1.1 Общие замечания	9
2.1.2 Прямая задача кинематики	11
2.1.3 Обратная задача кинематики	13
2.2 Динамика манипулятора	17
2.2.1 Общие замечания	17
2.2.2 Вывод уравнений движения	19
2.2.3 Учет динамики приводов	21
2.2.4 Альтернативная матричная форма записи	23
3 Идентификация параметров манипулятора	26
3.1 Описание метода	26
3.2 Результаты	27
4 Синтез систем управления	28
4.1 Предварительные замечания	28
Заключение	29
Список использованных источников	30
Приложение А Матрицы однородного преобразования	31

Подп. и дата							
Инв. № дубл.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Инв. № подл.							
Инв. № подл.	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		
	Разраб.	Антонов, Артемов					
	Пров.	Котельников Ю.П.					
	Н. контр.						
	Утв.						
<p align="center">КСУИ.101.4135.001 ПЗ</p> <p align="center">Разработка системы управления для манипулятора Kuka Youbot Пояснительная записка</p>					Лит.	Лист	Листов
						2	34
					<p align="center">Университет ИТМО Кафедра СУиИ гр. Р4135</p>		

Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

n — количество звеньев робота, $n = 5$;

q_i — i -ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i -ом сочленении);

q — вектор-столбец обобщенных координат робота, $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$;

iR_j — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;

iA_j — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_iy_iz_i$ относительно СК $Ox_iy_iz_i^*$;

$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i^{**}$;

g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;

v_j^i — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО^{***} выраженной относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

* За пояснениями обратитесь к Приложению А

^{**} За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0y_0z_0$.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	${}^i R_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$;
										${}^i A_j$ — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i^*$;
$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_j y_j z_j$ в начало $Ox_k y_k z_k$, выраженный относительно $Ox_i y_i z_i^{**}$;										
g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;										
v_j^i — линейная скорость начала $Ox_j y_j z_j$ относительно используемой в решении ИСО, ^{***} выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$;										
a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_j y_j z_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;										
<hr/>										
[*] За пояснениями обратитесь к Приложению А										
^{**} За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.										
^{***} В качестве ИСО в документе используется $Ox_0 y_0 z_0$.										
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										4

ω_j^i — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega_{j,k}^i$ — угловая скорость вращения $Ox_ky_kz_k$ относительно $Ox_jy_jz_j$, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

z_j^i — орт $[0 \ 0 \ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

f_j^i — сила, действующая на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_j^i — момент силы, действующий на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_i — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты q_i ;

m_i — масса i -го звена;

\mathcal{I}_j^i — тензор инерции j -го звена относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;

s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно;

$x\{a\}$ — абсцисса вектора a ; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно;

$A^{\{i\}}$ — i -ая строка матрицы A .

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										5
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	

Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории^{*}. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

- в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;
- раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;
- в разделе 4 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах апробации на реальном роботе и проч.

^{*} Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движения схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
Лист				
6				

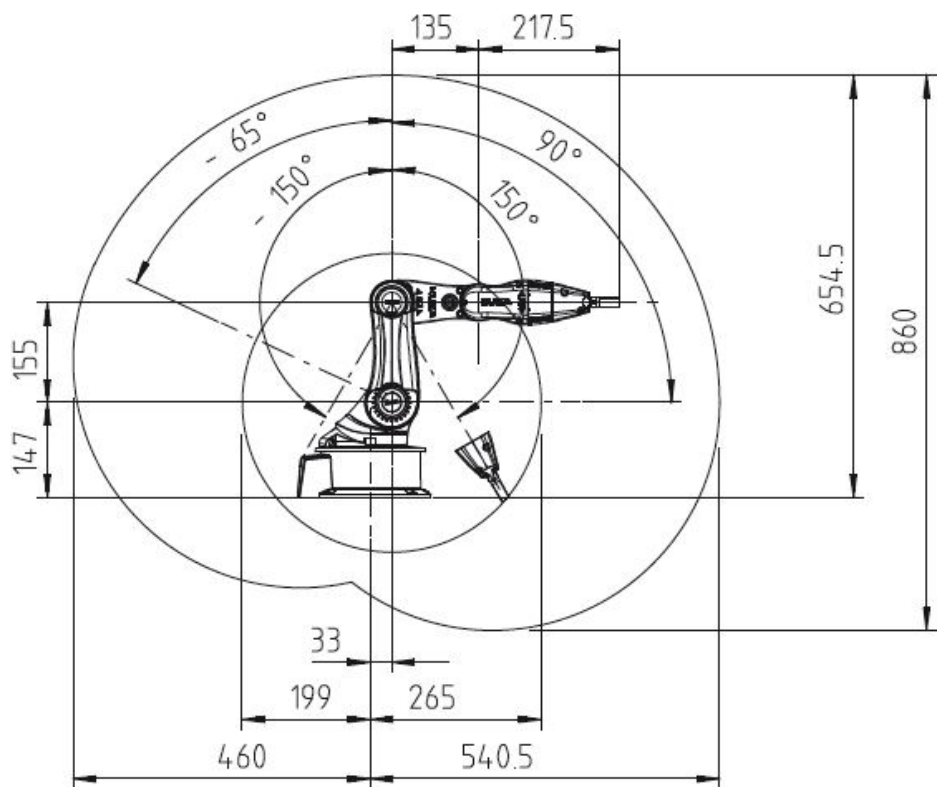
1 Описание манипулятора

Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

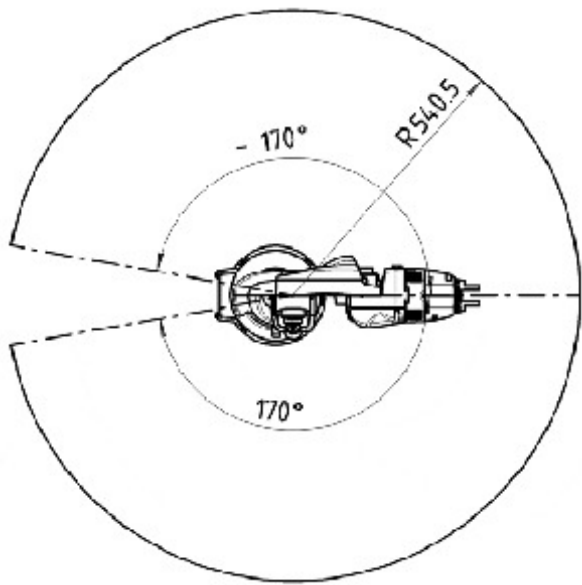
Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с ⁻¹
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В

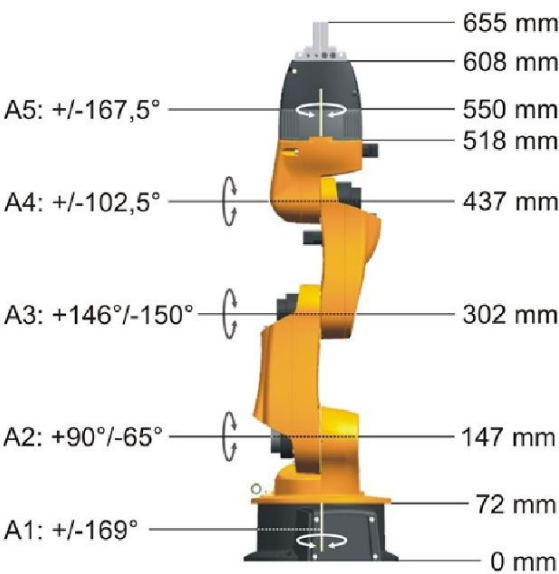
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата



а)



б)



в)

Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

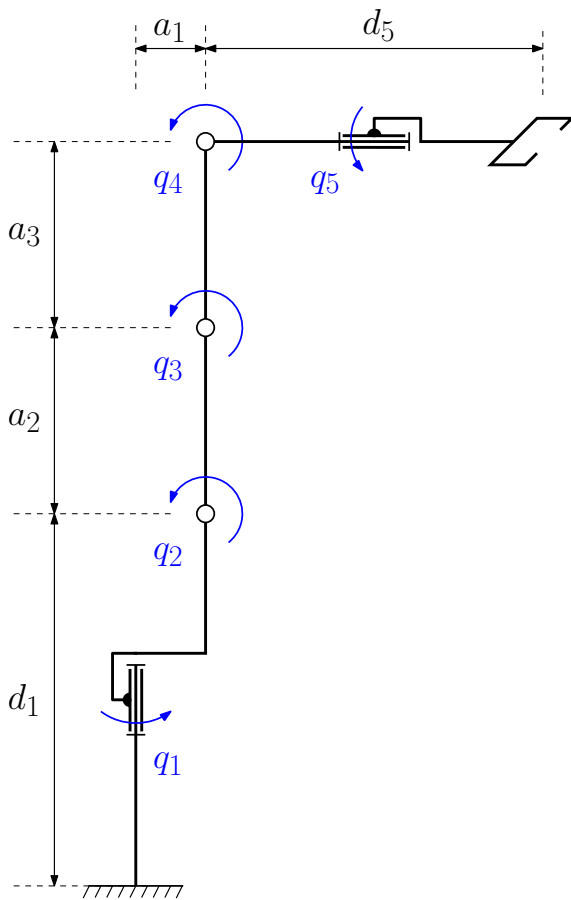
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

2 Математическая модель манипулятора

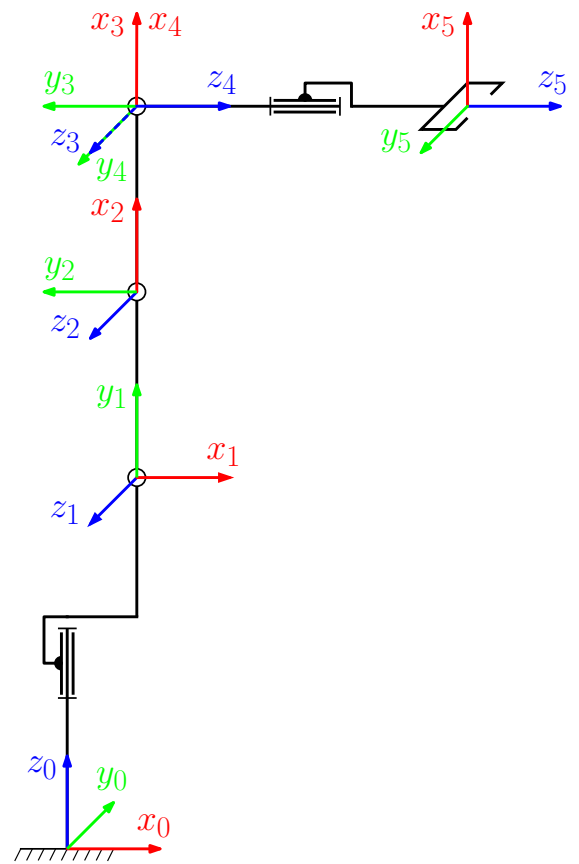
2.1 Кинематика манипулятора

2.1.1 Общие замечания

Последовательная кинематическая цепь рассматриваемого манипулятора, включающая только вращательные КП V-класса (цилиндрические шарниры), изображена на рисунке 2.1а.



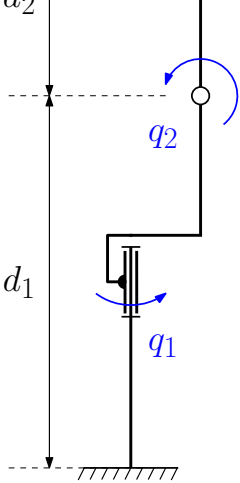
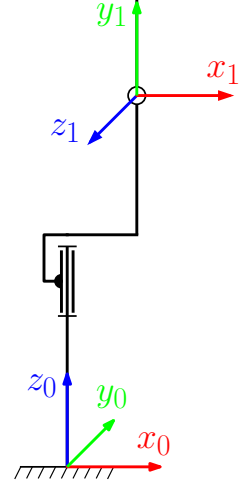
а)



б)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при $q_i = 0$, $i = \overline{1, 5}$; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

Инв. № подл.	Подп. и дата				Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
	Взам. инв. №										
	Инв. № дубл.										
	Подп. и дата										
<div><div><p>а)</p></div><div><p>б)</p></div></div> <p>Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при $q_i = 0, i = \overline{1, 5}$; б — расположения СК КП.</p> <p>Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:</p>											

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$
$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Звено	a_i , мм	α_i , рад	d_i , мм	θ_i , рад
1	33	$\pi/2$	147	q_1
2	155	0	0	$q_2 + \pi/2$
3	135	0	0	q_3
4	0	$\pi/2$	0	q_4
5	0	0	218	q_5

Информация о смещении и повороте СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ содержится в матрице 0A_5 . Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, оста-

ется лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$${}^0A_5 = \prod_{i=1}^5 {}^{i-1}A_i(q_i). \quad (2.6)$$

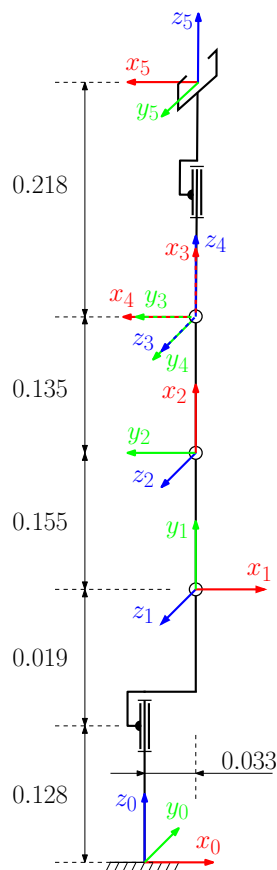


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T = [0, 0, 0, \pi/2, 0]^T$.

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$${}^0R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
Лист				
12				

а правая —

$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 c_{234} & -s_5 c_{234} & s_{234} & a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_5 s_{234} \\ c_5 s_{234} & -s_5 s_{234} & -c_{234} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_5 c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где в свою очередь

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \quad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \quad (2.13)$$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов θ_1 , θ_5 и θ_{234} дают

— равенство элементов (3, 4):

$$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14)$$

— равенство элементов (3, 1) и (3, 2):

$$\begin{cases} s_5 = r_{11} s_1 - r_{21} c_1 \\ c_5 = r_{12} s_1 - r_{22} c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \quad (2.15)$$

— равенство элементов (2, 3) и (1, 3):

$$\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13} c_1 + r_{23} s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										14
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

$${}^1A_4 = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_x s_1 - p_y c_1 - d_5 (r_{13} s_1 - r_{23} c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$
$$p_x s_1 - p_y c_1 - d_5(r_{13}s_1 - r_{23}c_1) = 0. \quad (2.18)$$
$$r_{1,4}^1 = \begin{bmatrix} (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Выпишем, пользуясь теоремой косинусов, выражение для $\cos \theta_3$ (его зависимость от θ_1 обуславливается зависимостью от этого угла вектора $r_{1,4}^1$):

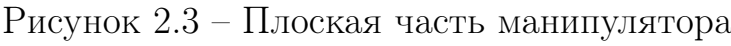
$$c_3(\theta_1) = \frac{(r_{1,4}^1)^T \cdot r_{1,4}^1 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \quad (2.20)$$

$$\theta_3^{l,II} = \mp \text{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^I)}, c_3(\theta_1^I)) \quad (2.21)$$

$$\theta_3^{\text{III,IV}} = \mp \text{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\text{II}})}, c_3(\theta_1^{\text{II}})) \quad (2.22)$$

Как видно из рисунка 2.3, $\theta_2 = \varphi + \beta$ при $\theta_3^{I,III} < 0$ и $\theta_2 = \varphi - \beta$ при $\theta_3^{II,IV} > 0$. Следовательно, принимая во внимание то, что

$$\varphi(\theta_1) = \text{atan2}(y_r, x_r), \quad \beta(\theta_3) = \text{atan2}(a_3 \sin |\theta_3|, a_2 + a_3 \cos |\theta_3|), \quad (2.23)$$


$$\begin{aligned}\theta_2^{\text{I}} &= \varphi(\theta_1^{\text{I}}) + \beta(\theta_3^{\text{I}}), & \theta_2^{\text{II}} &= \varphi(\theta_1^{\text{I}}) - \beta(\theta_3^{\text{II}}), & (2.24) \\ \theta_2^{\text{III}} &= \varphi(\theta_1^{\text{II}}) + \beta(\theta_3^{\text{III}}), & \theta_2^{\text{IV}} &= \varphi(\theta_1^{\text{II}}) - \beta(\theta_3^{\text{IV}}). & (2.25)\end{aligned}$$
$$\theta_4^{\text{I,II}} = \theta_{234}^{\text{I}} - \theta_2^{\text{I,II}} - \theta_3^{\text{I,II}}, \quad \theta_4^{\text{III,IV}} = \theta_{234}^{\text{II}} - \theta_2^{\text{III,IV}} - \theta_3^{\text{III,IV}}. \quad (2.26)$$
$$q^I = \begin{bmatrix} \theta_1^I & \theta_2^I - \frac{\pi}{2} & \theta_3^I & \theta_4^I & \theta_5^I \end{bmatrix}^T, \quad q^{II} = \begin{bmatrix} \theta_1^{II} & \theta_2^{II} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{II} & \theta_4^{II} & \theta_5^I \end{bmatrix}^T, \quad (2.27)$$
$$q^{\text{III}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{III}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{III}} & \theta_4^{\text{III}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T, \quad q^{\text{IV}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{IV}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{IV}} & \theta_4^{\text{IV}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T. \quad (2.28)$$

2.2 Динамика манипулятора

2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}^*$, где $i = \overline{1,5}$, показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$ сонаправлена с $Ox_iy_iz_i$.

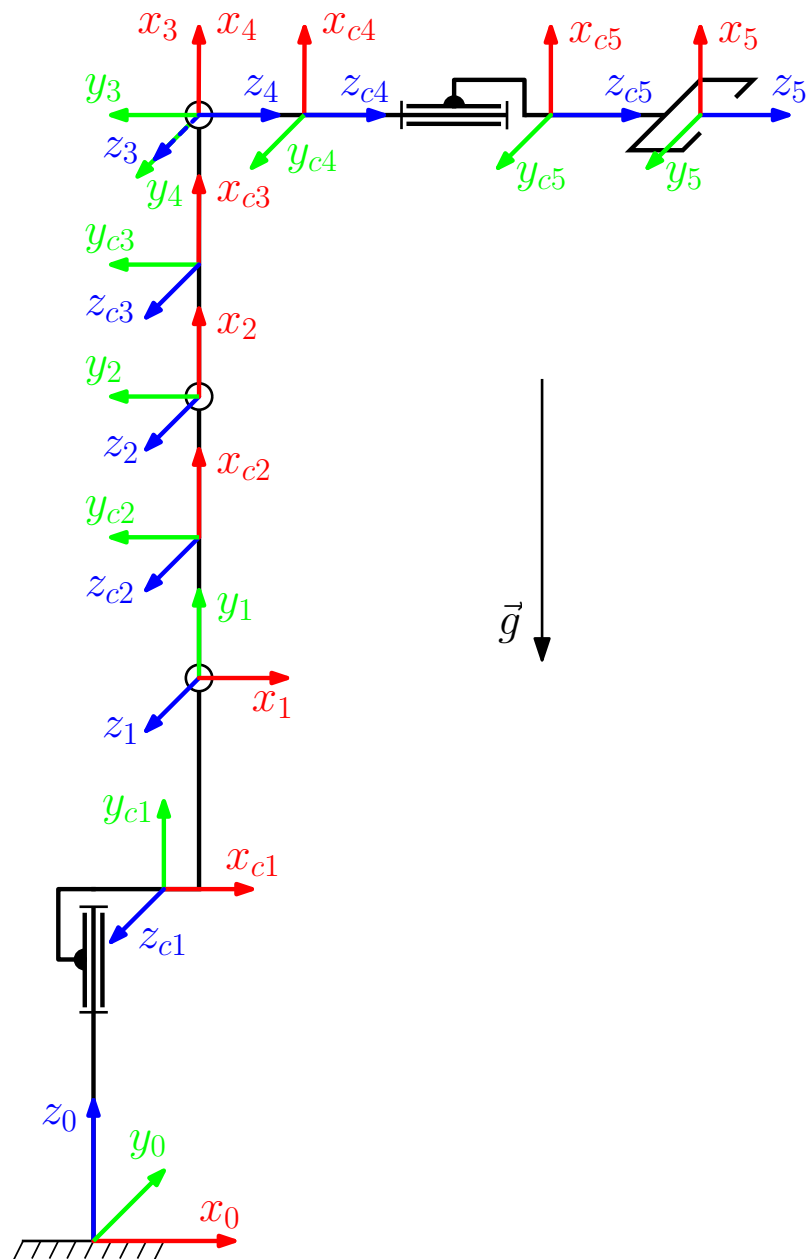


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора \vec{g} .

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

2.2.2 Вывод уравнений движения

Потенциальная энергия манипулятора

$$U = - \sum_{i=1}^5 (m_i g_i^T r_{0,ci}^i) = - \sum_{i=1}^5 (m_i g_i^T r_{0,i}^i + g_i^T (m_i r_{i,ci}^i)), \quad (2.36)$$

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$v_i^0 = J_{vi} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.37)$$

связь между линейными скоростями начал соответствующих СК и вектором \dot{q} :

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,1}^0 - r_{0,0}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,1}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$J_{v3} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,1}^0) & z_2^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,2}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}^T, \quad (2.41)$$

где $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_i^0 = J_{\omega i} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.42)$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором \dot{q} :

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Кинетическая энергия манипулятора

$$K = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i (v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i) \right). \quad (2.46)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата							
<div>$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_2^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_2^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}, \quad (2.41)$</div> <div>где $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ — нулевой вектор.</div> <div>Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой</div> <div>$\omega_i^0 = J_{\omega i} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.42)$</div> <div>связь между угловыми скоростями звеньев и вектором \dot{q}:</div> <div>$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$</div> <div>$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$</div> <div>$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$</div> <div>Кинетическая энергия манипулятора</div> <div>$K = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i (v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i) \right). \quad (2.46)$</div>					Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						19					

Функция Лагранжа

$$\begin{aligned}
 L &= K - U = \\
 &= \sum_{i=1}^5 \left(m_i \left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right) + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i + g_i) + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^5 \left(m_i \underbrace{\left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right)}_{L_{i,1}} + m_i x_{ci} \cdot \underbrace{x \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,2}} + \right. \\
 &\quad + m_i y_{ci} \cdot \underbrace{y \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,3}} + m_i z_{ci} \cdot \underbrace{z \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,4}} + I_{i,xx} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (x \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,5}} + \\
 &\quad + I_{i,yy} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (y \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,6}} + I_{i,zz} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (z \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,7}} + I_{i,xy} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot y \{\omega_i^i\}}_{L_{i,8}} + \\
 &\quad \left. + I_{i,xz} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,9}} + I_{i,yz} \cdot \underbrace{y \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,10}} \right). \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1, 5} \quad \Rightarrow \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,10}\}) = \tau_5 \end{cases} \quad (2.49)$$

где \mathcal{L}_j — оператор, работающий в соответствии с формулой:

$$\mathcal{L}_j : \quad \mathcal{L}_j \{f\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad (2.50)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
				Лист
				20

где I_a — диагональная матрица приведенных к выходным валам моментов инерции приводов, τ_e — вектор-столбец приведенных к выходным валам приводов моментов силы, развиваемых двигателями, имеющие вид:

$$I_a = \begin{bmatrix} I_{a,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{a,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_{a,5} \end{bmatrix}, \quad \tau_e = \begin{bmatrix} \tau_{e,1} \\ \tau_{e,2} \\ \vdots \\ \tau_{e,5} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Объединяя уравнения (2.53) и (2.57), получим

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi \chi, \quad (2.59)$$

а, добавив в это выражение учет моментов трения, окончательно будем иметь

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi \chi + t_f. \quad (2.60)$$

В качестве модели трения возьмем поясняемую рисунком 2.5 и описываемую следующим уравнением

$$\tau_f(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}, \quad (2.61)$$

где f_v , f_c — диагональные матрицы коэффициентов вязкого и сухого трения соответственно, f_{off} — вектор-столбец сдвигов в моментах силы, имеющие вид

$$f_v = \begin{bmatrix} f_{v,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{v,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{v,5} \end{bmatrix}, \quad f_c = \begin{bmatrix} f_{c,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{c,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{c,5} \end{bmatrix}, \quad f_{\text{off}} = \begin{bmatrix} f_{\text{off},1} \\ f_{\text{off},2} \\ \vdots \\ f_{\text{off},5} \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Подставляя (2.61) в (2.60), получим

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi \chi + f_v \dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}. \quad (2.63)$$

Если ввести в рассмотрение новые матрицы $\bar{\chi} = [\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_5]^T$ и

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{1,1} & \bar{\xi}_{1,2} & \cdots & \bar{\xi}_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \bar{\xi}_{2,2} & \cdots & \bar{\xi}_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \bar{\xi}_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
<div>$\tau_f(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}, \tag{2.61}$<p>где f_v, f_c — диагональные матрицы коэффициентов вязкого и сухого трения соответственно, f_{off} — вектор-столбец сдвигов в моментах силы, имеющие вид</p>$f_v = \begin{bmatrix} f_{v,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{v,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{v,5} \end{bmatrix}, \quad f_c = \begin{bmatrix} f_{c,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{c,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{c,5} \end{bmatrix}, \quad f_{\text{off}} = \begin{bmatrix} f_{\text{off},1} \\ f_{\text{off},2} \\ \vdots \\ f_{\text{off},5} \end{bmatrix}. \tag{2.62}$<p>Подставляя (2.61) в (2.60), получим</p>$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi \chi + f_v \dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}. \tag{2.63}$<p>Если ввести в рассмотрение новые матрицы $\bar{\chi} = [\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_5]^T$ и</p>$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{1,1} & \bar{\xi}_{1,2} & \cdots & \bar{\xi}_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \bar{\xi}_{2,2} & \cdots & \bar{\xi}_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \bar{\xi}_{5,5} \end{bmatrix}, \tag{2.64}$</div>				
<div><div><div>Изм.</div><div>Лист</div><div>№ докум.</div><div>Подп.</div><div>Дата</div></div><div>КСУИ.101.4135.001 ПЗ</div><div><div>Лист</div><div>22</div></div></div>				

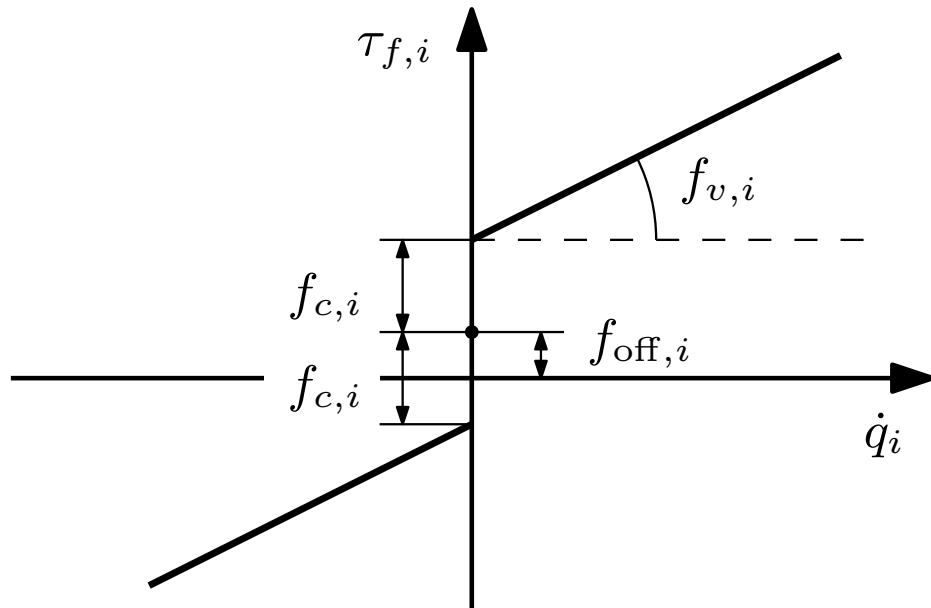


Рисунок 2.5 – График, поясняющий выбранную модель трения.

определяемые выражениями

$$\bar{\chi}_i = \begin{bmatrix} \chi_i & I_{a,i} & f_{v,i} & f_{c,i} & f_{\text{off},i} \end{bmatrix}^T, \quad (2.65)$$

$$\bar{\xi}_{j,i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & i \neq j \\ \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & \ddot{q} & \dot{q} & \text{sign}(\dot{q}) & 1 \end{bmatrix}, & i = j \end{cases} \quad (2.66)$$

то данное выражение может быть записано в следующем матричном виде:

$$\tau_e = \bar{\xi} \bar{\chi}. \quad (2.67)$$

2.2.4 Альтернативная матричная форма записи

Выражение (2.53) может быть переписано в форме

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q), \quad (2.68)$$

где $D(q)$ — матрица инерции, $C(q, \dot{q})$ — матрица центробежных и Кориолисовых сил, $G(q)$ — вектор гравитации. С учетом этого факта и уравнения (2.60) можно получить, что

$$\tau_e = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \quad (2.69)$$

где $M(q) = I_a + D(q)$.

Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									23

$$= \begin{bmatrix} -\dot{q}^T (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} + \dot{q}^T (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \\ \dot{q}^T (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} - \dot{q}^T (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \\ -\dot{q}^T (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} + \dot{q}^T (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T J_x \dot{q} \\ \dot{q}^T J_y \dot{q} \\ \dot{q}^T J_z \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

где

$$J_x = -(J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} + (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \quad (2.76)$$

$$J_y = (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} - (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \quad (2.77)$$

$$J_z = -(J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} + (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}}. \quad (2.78)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										25
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Копировал					Формат А4

3 Идентификация параметров манипулятора

3.1 Описание метода

Для определения неизвестных значений параметров робота, составляющих вектор $\bar{\chi}$, воспользуемся методом наименьших квадратов. Алгоритм необходимых действий в таком случае будет следующим:

- а) с помощью поставляемого производителем робота ПО* дать манипулятору команды на последовательное достижение N произвольных конфигураций, по возможности охватывающих всю его рабочую область; во время его работы снять и записать следующие показания:

$q(t_1)$	$\dot{q}(t_1)$	$\ddot{q}(t_1)$	$\tau_e(t_1)$
$q(t_2)$	$\dot{q}(t_2)$	$\ddot{q}(t_2)$	$\tau_e(t_2)$
$q(t_3)$	$\dot{q}(t_3)$	$\ddot{q}(t_3)$	$\tau_e(t_3)$
\dots	\dots	\dots	\dots
$q(t_k)$	$\dot{q}(t_k)$	$\ddot{q}(t_k)$	$\tau_e(t_k)$

где $t_k > t_3 > t_2 > t_1$;

- б) используя полученные данные, составить матрицы

$$\Xi = \begin{bmatrix} \bar{\xi}(\ddot{q}(t_1), \dot{q}(t_1), q(t_1)) \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_2), \dot{q}(t_2), q(t_2)) \\ \dots \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_k), \dot{q}(t_k), q(t_k)) \end{bmatrix}, \quad T_e = \begin{bmatrix} \tau_e(t_1) \\ \tau_e(t_2) \\ \dots \\ \tau_e(t_k) \end{bmatrix}; \quad (3.1)$$

- в) рассчитать оценку $\hat{\chi}$ вектора $\bar{\chi}$ по формуле:

$$\hat{\chi} = (\Xi^T \cdot \Xi)^{-1} \cdot \Xi^T \cdot T_e; \quad (3.2)$$

* У Youbot такое «стандартное» ПО осуществляет управление углами в сочленениях робота с помощью ПИД-регуляторов.

Изн. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Изн. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										26
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						Формат А4

- г) дать роботу команды на достижение других N позиций и при этом получить те же самые данные;
- д) используя найденную в п. в) оценку $\hat{\chi}$ и снятые в п. г) данные, рассчитать по формуле (2.67) значения для τ_e ; сравнить их с полученными в п. г) и сделать выводы об успешности идентификации.

3.2 Результаты

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										27
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						Формат А4
Копировал										

4 Синтез систем управления

4.1 Предварительные замечания

Каждый из приводов манипулятора робота Kuka Youbot имеет собственную систему управления, структура которой иллюстрируется схемой с рисунка 4.1. Из нее видно, что каждый из приводов робота может управляться заданием значения для угла q_{di} , или скорости \dot{q}_{di} , или момента силы $\tau_{ed,i}$, который должен быть на нем обеспечен. Это значение подается на вход соответствующего ПИД-регулятора, коэффициенты которого доступны настройке, и далее (уже в виде сигнала напряжения u) — на контролируемый двигатель.

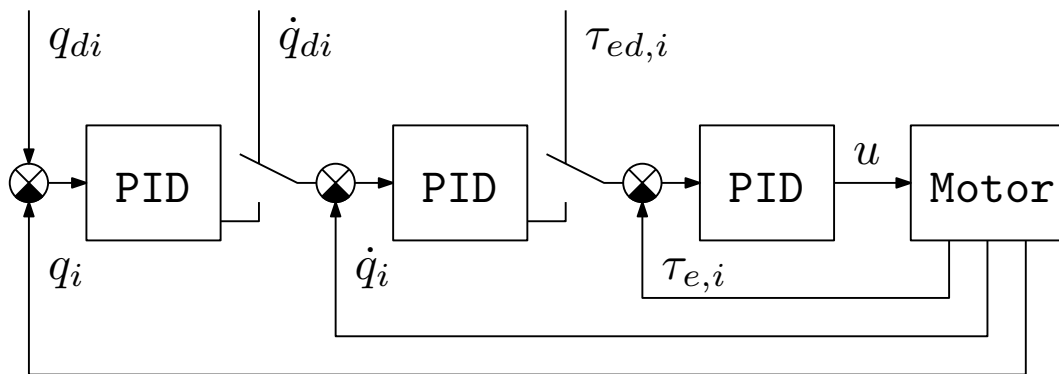


Рисунок 4.1 – Структура системы управления, контролирующей работу каждого из приводов робота.

Далее в тексте документа будут рассмотрены системы управления, в которых в качестве управляющего сигнала рассматривается вектор $\tau_e(t)$. При этом будет предполагаться, что задаваемые значения для моментов сил достигаются на двигателях мгновенно. Такое предположение будем считать возможным по той причине, что процессы в контуре момента в рассмотренной выше системе управления характеризуются малыми временами переходных процессов. В качестве иллюстрации к сказанному можно привести рисунок 4.2. На нем показан график переходной функции системы управления моментом силы, развиваемым приводом ???-го звена.

Из величин, описывающих состояние робота в данный момент времени, в используемом ПО доступны вектора $q(t)$, $\dot{q}(t)$ и $\tau_e(t)$.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
				Лист
				28

pid_transition_function.pdf

Рисунок 4.2 – График переходной функции системы управления приводом
???-го звена.

Заключение

Текст заключения

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						29

Список использованных источников

- 1 KUKA YUBOT. — URL: <http://www.technomatix.ru/kuka-youbot> (дата обращения: 08.03.2017).
- 2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										30
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Приложение А
(рекомендуемое)

Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования ${}^i A_j$ называется матрица размера 4×4 , служащая для описания смещения и поворота СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$ и имеющая следующую структуру:

$${}^i A_j = \begin{bmatrix} {}^i R_j & r_{i,j}^i \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где $O_{1 \times 3} = [0 \ 0 \ 0]$.

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки C относительно $Ox_0 y_0 z_0$ при известных векторах r_C^2 , $r_{0,1}^0$ и $r_{1,2}^1$ и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r_C^0 = {}^0 R_1 r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ r_C^1 = {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \end{cases} \Rightarrow r_C^0 = {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \quad (\text{A.2})$$

где r_C^0 , r_C^1 , r_C^2 — радиус-векторы точки C в $Ox_0 y_0 z_0$, $Ox_1 y_1 z_1$ и $Ox_2 y_2 z_2$ соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами ${}^0 A_1$ и ${}^1 A_2$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										31
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [1].

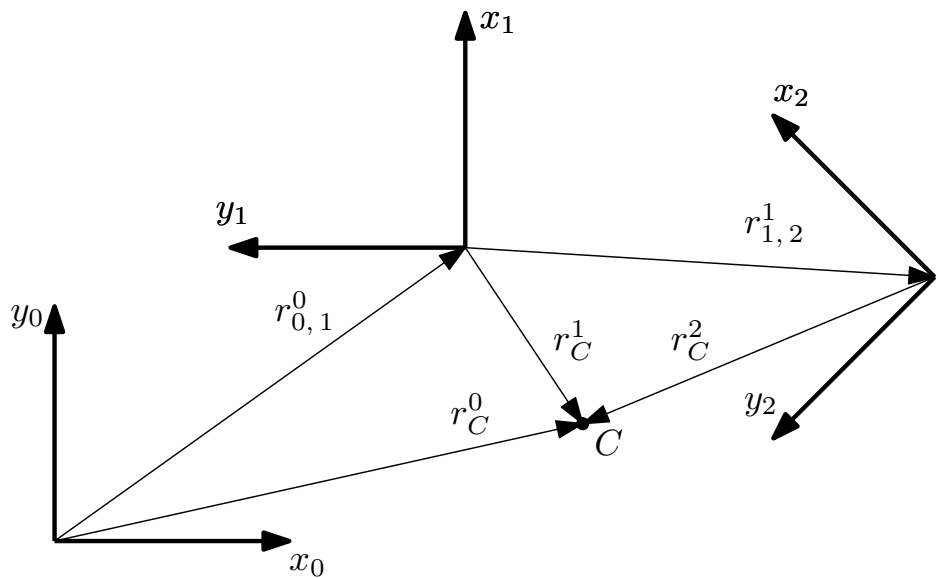


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						
Инв. № инв.	Взам. инв. №				Инв. № дубл.	Подп. и дата							

Приложение Б
(рекомендуемое)

Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором \vec{V} . В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

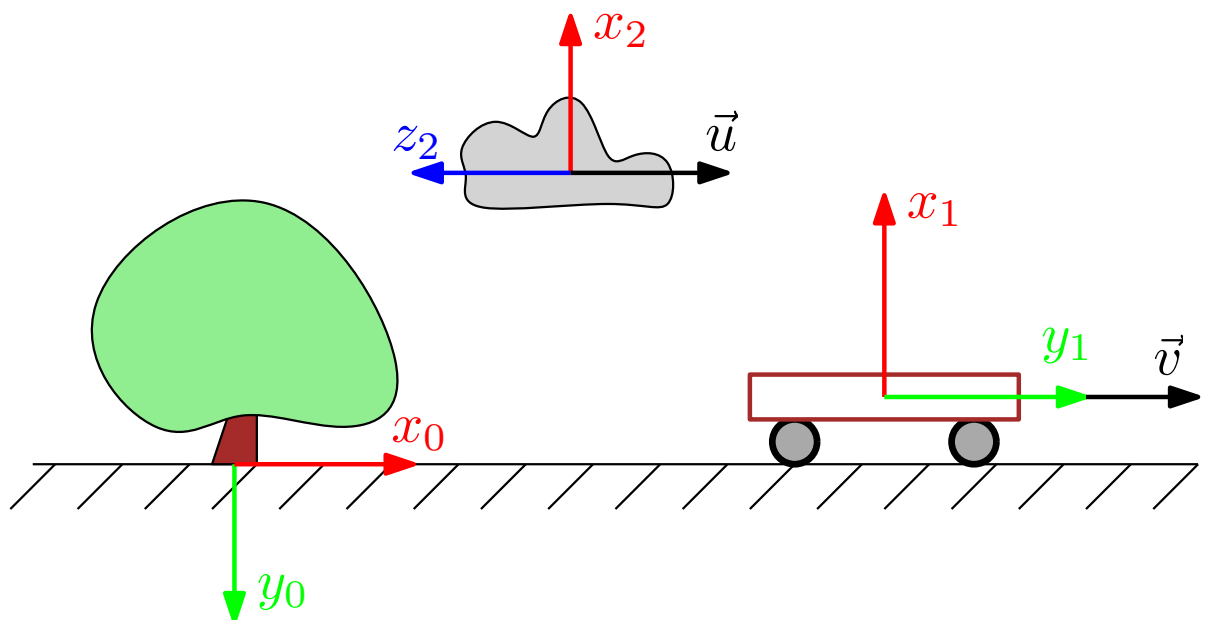


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата			
	Инв. № дубл.			
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
Лист				
33				

ты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Таблица Б.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора V	Значение V^T
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата