Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1

«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»

по дисциплине «Название дисциплины»


| | |
|---|---|
| Выполнили: | студенты гр. P4135<br>Фамилия И.О.,<br>Фамилия И.О. |
| Преподаватель: | Фамилия И.О.,<br>должность каф. СУиИ |


Санкт-Петербург

2017

# Содержание



Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.

| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата | КСУИ.101.4135.001 ПЗ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Разраб. | | Антонов, Артемов | | | Разработка системы управления для манипулятора Kuka Youbot | Лит. | Лист: 2 / Листов: 29 |
| Пров. | | Котельников Ю.П. | | | | | |
| Н. контр. | | | | | | Университет ИТМО Кафедра СУиИ гр. P4135 | |
| Утв. | | | | | Пояснительная записка | | |

Копировал Формат А4

# Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

$n$ — количество звеньев робота, $n = 5$;

$q_i$ — $i$-ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в $i$-ом сочленении);

$q$ — вектор-столбец обобщенных координат робота, $q = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5]^T$;

${}^iR_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;

${}^iA_j$ — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$*;

$r^i_{j,k}$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$**;

$g_i$ — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

$v^i_j$ — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО,*** выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$a^i_j$ — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

---

* За пояснениями обратитесь к Приложению А

** За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0y_0z_0$.

$\omega_j^i$ — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega_{j,k}^i$ — угловая скорость вращения $Ox_ky_kz_k$ относительно $Ox_jy_jz_j$, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

$z_j^i$ — орт $[0\ 0\ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

$f_j^i$ — сила, действующая на $j$-ое звено (тело) механизма со стороны $(j-1)$-го звена (тела), выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\tau_j^i$ — момент силы, действующий на $j$-ое звено (тело) механизма со стороны $(j-1)$-го звена (тела), выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\tau_i$ — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты $q_i$;

$m_i$ — масса $i$-го звена;

$\mathcal{I}_j^i$ — тензор инерции $j$-го звена относительно $Ox_iy_iz_i$;

$a_i, d_i$ — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

$\alpha_i, \theta_i$ — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

$s_\gamma, c_\gamma$ — синус и косинус угла $\gamma$ соответственно;

$s_i, c_i$ — синус и косинус угла $\theta_i$ соответственно;

$x\{a\}$ — абсцисса вектора $a$; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно.

# Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

– в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;

– раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;

– в разделе 3 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах аппробации на реальном роботе и проч.

* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движении схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

# 1 Описание манипулятора

Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

| Параметр | Значение |
|---|---|
| Количество сочленений | 5 |
| Масса | 5.3 кг |
| Допустимая нагрузка | 0.5 кг |
| Точность повторного воспроизведения позиции | 1 мм |
| Максимальная скорость в сочленении | $90^\circ$ с$^{-1}$ |
| Интерфейс | EtherCAT |
| Напряжение питание | 24 В |

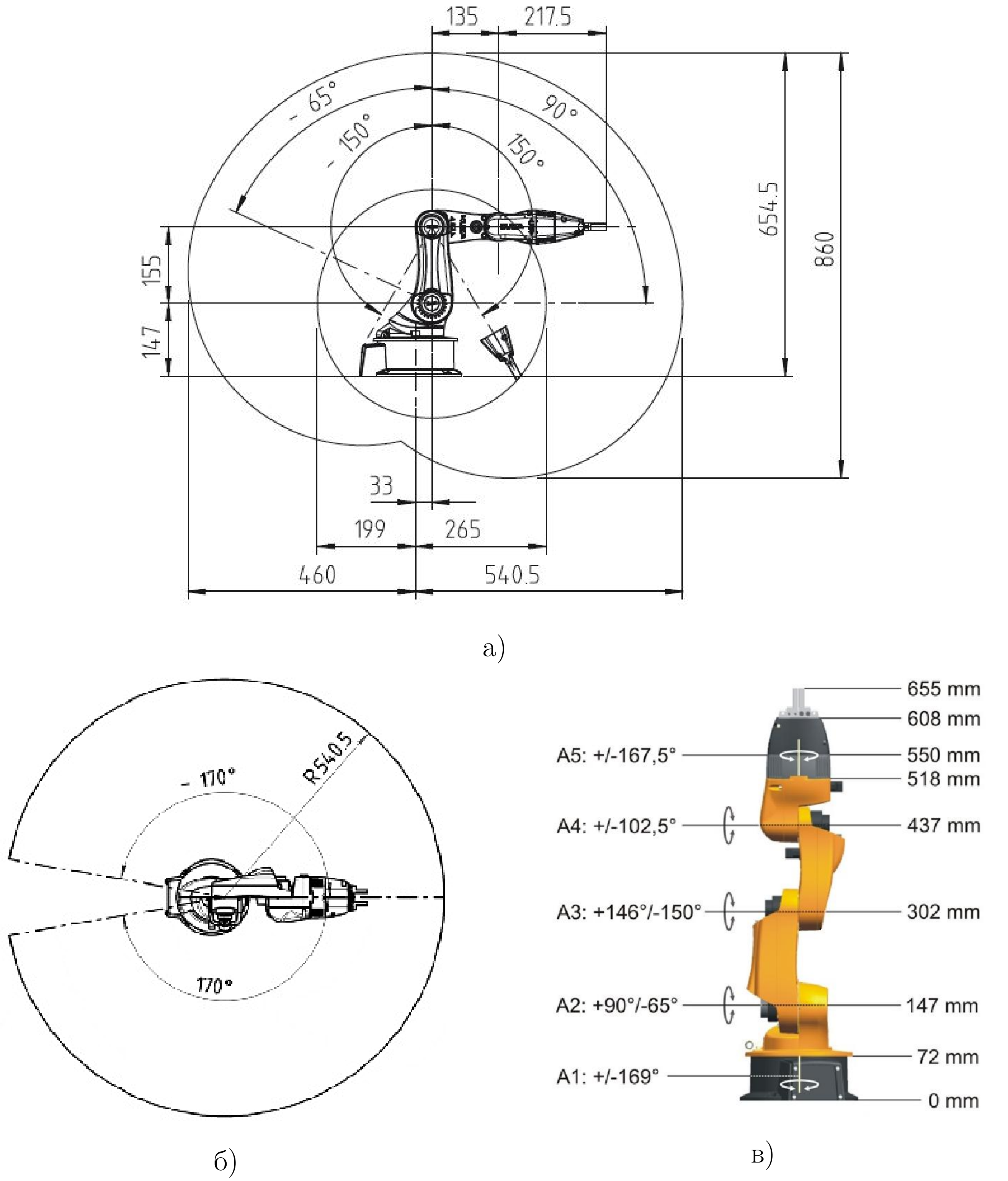


Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

# 2 Математическая модель манипулятора

## 2.1 Кинематика манипулятора

### 2.1.1 Общие замечания

Последовательная кинематическая цепь рассматриваемого манипулятора, включающая только вращательные КП V-класса (цилиндрические шарниры), изображена на рисунке 2.1а.

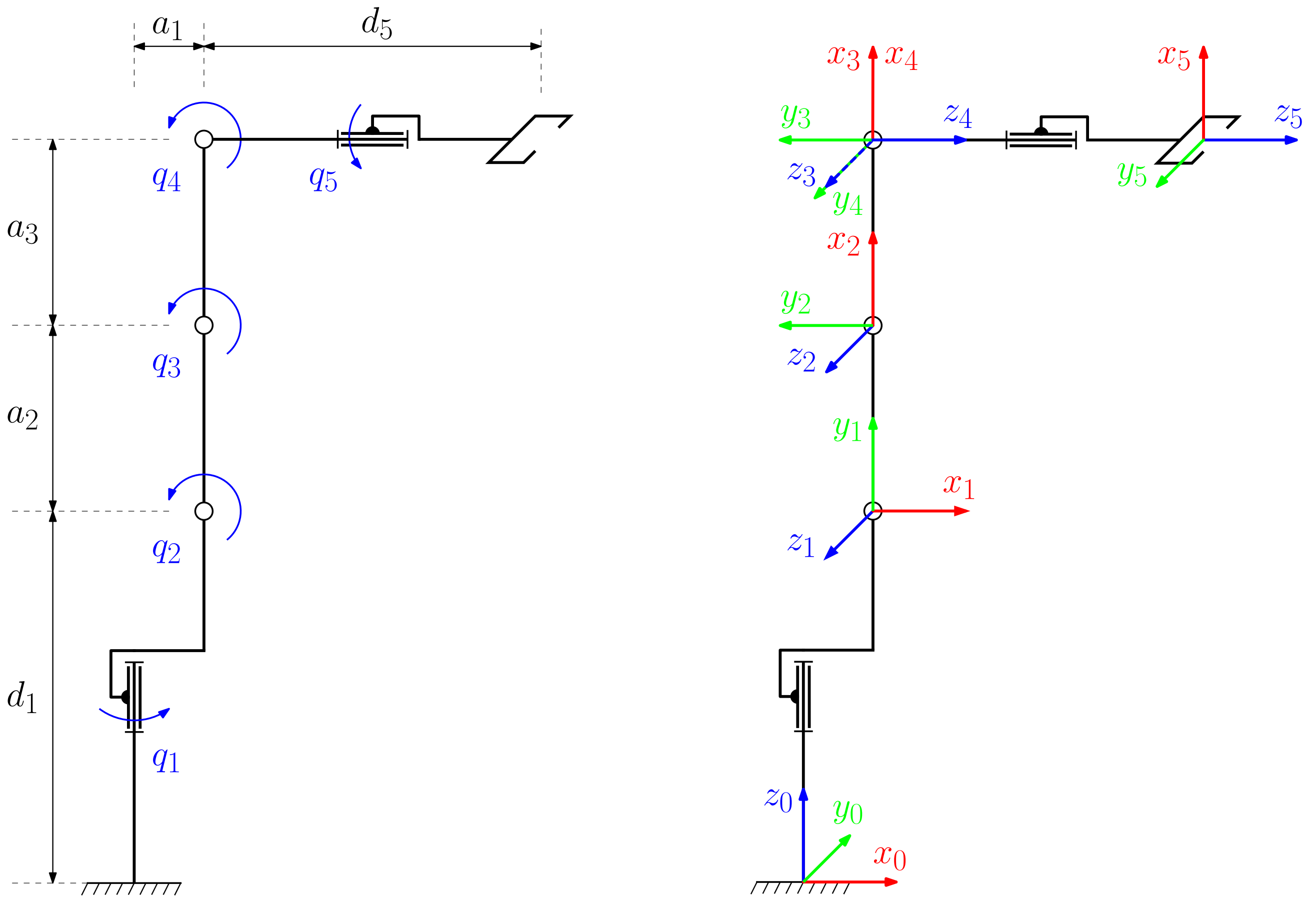


Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при $q_i = 0$, $i = \overline{1,5}$; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

а) «привязка» к каждому звену СК, чьи оси удовлетворяют следующим условиям:

1) ось $z_{i-1}$ направлена вдоль оси $i$-ой КП;

2) ось $x_i$ перпендикулярна оси $z_{i-1}$ и пересекает ее;

3) ось $y_i$ дополняет оси $z_i$ и $x_i$ до правой декартовой СК.

б) определение параметров ДХ:

1) $a_i$ — расстояния от $z_{i-1}$ до $z_i$ вдоль $x_i$;

2) $\alpha_i$ — угла от $z_{i-1}$ до $z_i$ вокруг $x_i$;

3) $d_i$ — расстояния от $x_{i-1}$ до $x_i$ вдоль $z_{i-1}$;

4) $\theta_i$ — угла от $x_{i-1}$ до $x_i$ вокруг $z_{i-1}$.

в) расчет матриц однородного преобразования в соответствии со следующими формулами:

$$^{i-1}A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i} \tag{2.1}$$

где $R_{z,\theta_i}$ — матрица поворота вокруг оси $z$ на угол $\theta_i$, $T_{z,d_i}$ — матрица смещения вдоль оси $z$ на расстояние $d$, $T_{x,a_i}$ —матрица смещения вдоль оси $x$ на расстояние $a_i$, $R_{x,\alpha_i}$ — матрица поворота вокруг оси $x$ на угол $\alpha_i$, равные

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{2.3}$$

итого

$$
{}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}
$$

Результаты выполнения для исследуемого манипулятора двух первых шагов представлены на рисунке 2.1б и в таблице 2.1, а третьего — в лице следующих выражений:

$$
{}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};
$$

$$
{}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.5}
$$

Таблица 2.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

| Звено | $a_i$, мм | $\alpha_i$, рад | $d_i$, мм | $\theta_i$, рад |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 33 | $\pi/2$ | 147 | $q_1$ |
| 2 | 155 | 0 | 0 | $q_2 + \pi/2$ |
| 3 | 135 | 0 | 0 | $q_3$ |
| 4 | 0 | $\pi/2$ | 0 | $q_4$ |
| 5 | 0 | 0 | 218 | $q_5$ |

### 2.1.2 Прямая задача кинематики

Информация о смещении и повороте СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ содержится в матрице ${}^0A_5$. Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, остается лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$$ {}^{0}A_5 = \prod_{i=1}^{5} {}^{i-1}A_i(q_i). \tag{2.6} $$

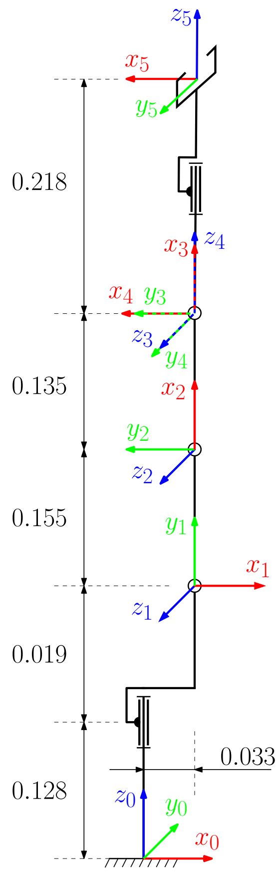


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при $q = [q_1,\, q_2,\, q_3,\, q_4,\, q_5]^T = [0,\, 0,\, 0,\, \pi/2,\, 0]^T$.

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$$ {}^{0}R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad r^{0}_{0,5} = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}. \tag{2.7} $$

Выполняя соответствующие вычисления получаем:

$$
{}^0A_5 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.147 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.155 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot
$$

$$
\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.135 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.218 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.655 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)
$$

что предложенный способ решения ПЗК в данном случае приводит к правильному ответу.

### 2.1.3 Обратная задача кинематики

Заданные смещение и поворот СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ можно описать с помощью матрицы ${}^0A_5$. Используя ее и матрицы из (2.5), найти расчетные формулы для углов $q_i$ $(i = \overline{1,5})$ можно из следующих соображений.

Введем обозначения для элементов матрицы ${}^0A_5$ в соответствии с формулой:

$$
{}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)
$$

Приравняв матрицу ${}^0A_5$ и правую часть выражения (2.6) и домножив с обеих сторон на ${}^0A_1^{-1}$, придем к выражению:

$$
{}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5, \quad (2.10)
$$

где левая часть с учетом (2.5) равна

$$
{}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11}c_1 + r_{21}s_1 & r_{12}c_1 + r_{22}s_1 & r_{13}c_1 + r_{23}s_1 & p_xc_1 + p_ys_1 - a_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ r_{11}s_1 - r_{21}c_1 & r_{12}s_1 - r_{22}c_1 & r_{13}s_1 - r_{23}c_1 & p_xs_1 - p_yc_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11)
$$

а правая —

$$ {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5c_{234} & -s_5c_{234} & s_{234} & a_2c_2 + a_3c_{23} + d_5s_{234} \\ c_5s_{234} & -s_5s_{234} & -c_{234} & a_2s_2 + a_3s_{23} - d_5c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12) $$

где в свою очередь

$$ \theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \qquad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \quad (2.13) $$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов $\theta_1$, $\theta_5$ и $\theta_{234}$ дают

– равенство элементов $(3, 4)$:

$$ p_xs_1 - p_yc_1 = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \theta_1^{\text{I}} = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{\text{II}} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14) $$

– равенство элементов $(3, 1)$ и $(3, 2)$:

$$ \begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^{\text{I}} = \operatorname{atan2}(r_{11}\sin\theta_1^{\text{I}} - r_{21}\cos\theta_1^{\text{I}},\ r_{12}\sin\theta_1^{\text{I}} - r_{22}\cos\theta_1^{\text{I}}) \\ \theta_5^{\text{II}} = \operatorname{atan2}(r_{11}\sin\theta_1^{\text{II}} - r_{21}\cos\theta_1^{\text{II}},\ r_{12}\sin\theta_1^{\text{II}} - r_{22}\cos\theta_1^{\text{II}}) \end{cases} \quad (2.15) $$

– равенство элементов $(2, 3)$ и $(1, 3)$:

$$ \begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^{\text{I}} = \operatorname{atan2}(r_{13}\cos\theta_1^{\text{I}} + r_{23}\sin\theta_1^{\text{I}},\ -r_{33}) \\ \theta_{234}^{\text{II}} = \operatorname{atan2}(r_{13}\cos\theta_1^{\text{II}} + r_{23}\sin\theta_1^{\text{II}},\ -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16) $$

Далее домножим выражение (2.11) на ${}^4A_5^{-1}$ справа — получим матрицу ${}^1A_4$:

$$ {}^1A_4 = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_x s_1 - p_y c_1 - d_5(r_{13}s_1 - r_{23}c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.17} $$

в которой символами $\cdots$ обозначены элементы, не представляющие интереса в дальнейших расчетах. Заметим, что с учетом (2.14) и равенства элементов $(3,3)$ в (2.11) и (2.12) справедливо

$$ p_x s_1 - p_y c_1 - d_5(r_{13}s_1 - r_{23}c_1) = 0. \tag{2.18} $$

С учетом этого и (2.17), имеем что

$$ r^1_{1,4} = \begin{bmatrix} (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.19} $$

Далее заметим, что одно и то же положение 4-го звена может достигаться при двух разных способах расположения звеньев 2 и 3 (см. рисунок 2.3). Следовательно, углы $\theta_2$, $\theta_3$ и $\theta_4$ при одних и тех же значениях углов $\theta_1$ и $\theta_5$ имеют по два возможных значения. Ниже выводятся формулы для последних.

Выпишем, пользуясь теоремой косинусов, выражение для $\cos\theta_3$ (его зависимость от $\theta_1$ обуславливается зависимостью от этого угла вектора $r^1_{1,4}$):

$$ c_3(\theta_1) = \frac{(r^1_{1,4})^T \cdot r^1_{1,4} - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \tag{2.20} $$

С учетом этого для $\theta_3$ можно получить следующие формулы

$$ \theta_3^{\mathsf{I},\mathsf{II}} = \mp\,\mathrm{atan2}\big(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\mathsf{I}})},\ c_3(\theta_1^{\mathsf{I}})\big) \tag{2.21} $$

$$ \theta_3^{\mathsf{III},\mathsf{IV}} = \mp\,\mathrm{atan2}\big(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\mathsf{II}})},\ c_3(\theta_1^{\mathsf{II}})\big) \tag{2.22} $$

Как видно из рисунка 2.3, $\theta_2 = \varphi + \beta$ при $\theta_3^{\mathsf{I},\mathsf{III}} < 0$ и $\theta_2 = \varphi - \beta$ при $\theta_3^{\mathsf{II},\mathsf{IV}} > 0$. Следовательно, принимая во внимание то, что

$$ \varphi(\theta_1) = \mathrm{atan2}(y_r,\, x_r), \qquad \beta(\theta_3) = \mathrm{atan2}(a_3\sin|\theta_3|,\ a_2 + a_3\cos|\theta_3|), \tag{2.23} $$

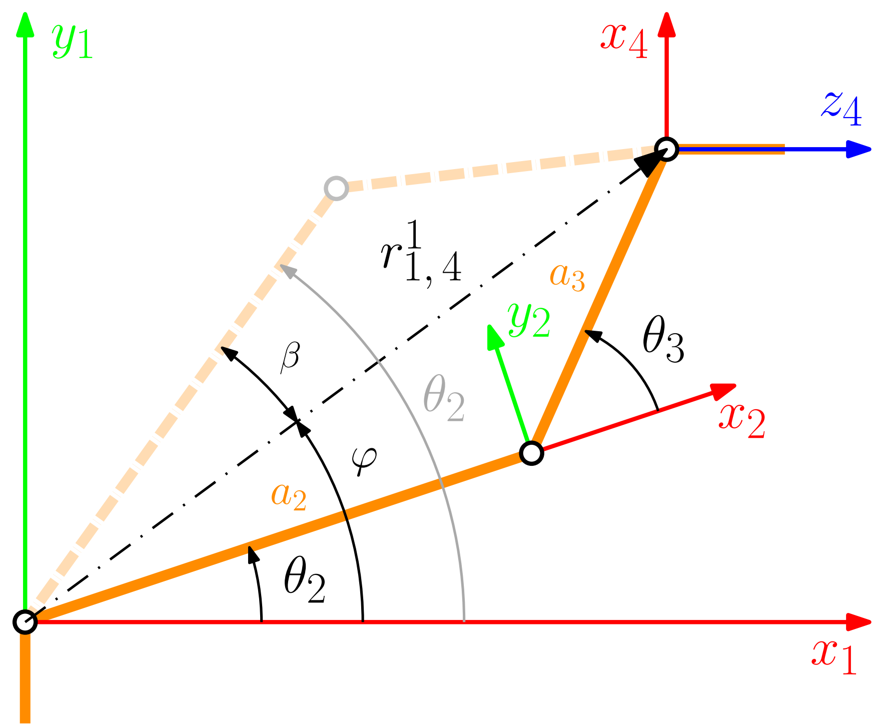


Рисунок 2.3 – Плоская часть манипулятора

где $x_r$ и $y_r$ — проекции вектора $r^1_{1,4}$ на оси абсцисс и ординат (их значения см. в (2.19)), для возможных значений угла $\theta_2$ получаем следующие формулы:

$$\theta_2^{\mathsf{I}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{I}}) + \beta(\theta_3^{\mathsf{I}}), \qquad \theta_2^{\mathsf{II}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{I}}) - \beta(\theta_3^{\mathsf{II}}), \tag{2.24}$$

$$\theta_2^{\mathsf{III}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{II}}) + \beta(\theta_3^{\mathsf{III}}), \qquad \theta_2^{\mathsf{IV}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{II}}) - \beta(\theta_3^{\mathsf{IV}}). \tag{2.25}$$

Формулы для значений угла $\theta_4$ после этого с учетом (2.13) приобретают простой вид:

$$\theta_4^{\mathsf{I,II}} = \theta_{234}^{\mathsf{I}} - \theta_2^{\mathsf{I,II}} - \theta_3^{\mathsf{I,II}}, \qquad \theta_4^{\mathsf{III,IV}} = \theta_{234}^{\mathsf{II}} - \theta_2^{\mathsf{III,IV}} - \theta_3^{\mathsf{III,IV}}. \tag{2.26}$$

Таким образом, любые положение и ориентацию схвата относительно основания манипулятор может обеспечить 4-мя собственными конфигурациями, которым соответствуют следующие наборы значений для его обобщенных координат $q = [q_1,\, q_2,\, q_3,\, q_4,\, q_5]^T$ (с учетом таблицы 2.1):

$$q^{\mathsf{I}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\mathsf{I}} & \theta_2^{\mathsf{I}} - \dfrac{\pi}{2} & \theta_3^{\mathsf{I}} & \theta_4^{\mathsf{I}} & \theta_5^{\mathsf{I}} \end{bmatrix}^T, \qquad q^{\mathsf{II}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\mathsf{I}} & \theta_2^{\mathsf{II}} - \dfrac{\pi}{2} & \theta_3^{\mathsf{II}} & \theta_4^{\mathsf{II}} & \theta_5^{\mathsf{I}} \end{bmatrix}^T, \tag{2.27}$$

$$q^{\mathsf{III}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\mathsf{II}} & \theta_2^{\mathsf{III}} - \dfrac{\pi}{2} & \theta_3^{\mathsf{III}} & \theta_4^{\mathsf{III}} & \theta_5^{\mathsf{II}} \end{bmatrix}^T, \qquad q^{\mathsf{IV}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\mathsf{II}} & \theta_2^{\mathsf{IV}} - \dfrac{\pi}{2} & \theta_3^{\mathsf{IV}} & \theta_4^{\mathsf{IV}} & \theta_5^{\mathsf{II}} \end{bmatrix}^T. \tag{2.28}$$

## 2.2 Динамика манипулятора

### 2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$*, где $i = \overline{1,5}$, показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$ сонаправлена с $Ox_iy_iz_i$.

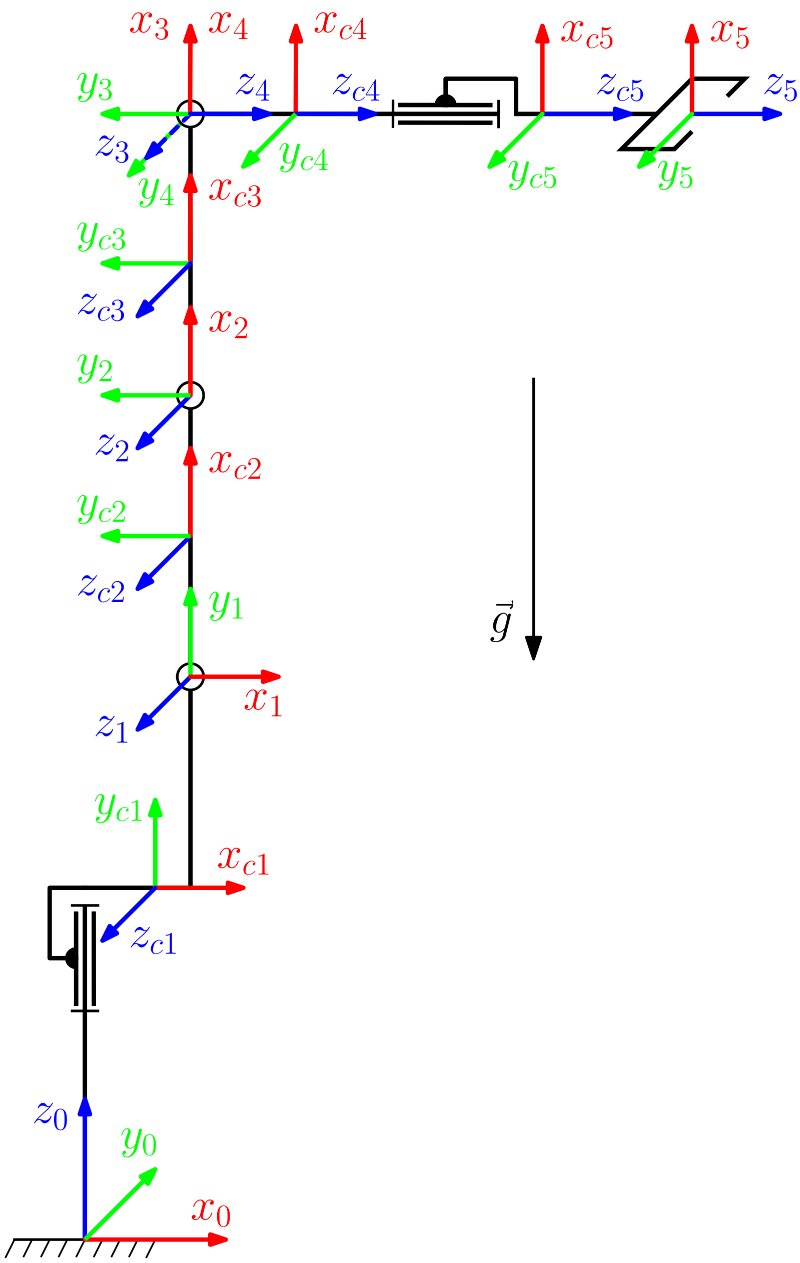


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора $\vec{g}$.

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Для описания положения введенных СК воспользуемся следующими векторами:

$$r^i_{i,\,ci} = \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \\ z_{ci} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,5}, \tag{2.29}$$

где $x_{ci}$, $y_{ci}$ и $z_{ci}$ — некоторые постоянные величины.

Для компонент тензоров инерции $\mathcal{I}^i_i = const$ введем следующие обозначения:

$$\mathcal{I}^i_i = \begin{bmatrix} I_{i,\,xx} & I_{i,\,xy} & I_{i,\,xz} \\ I_{i,\,xy} & I_{i,\,yy} & I_{i,\,yz} \\ I_{i,\,xz} & I_{i,\,yz} & I_{i,\,zz} \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

Заметим, что

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \tag{2.31}$$

где $g = 9.82$ м/с$^2$.

В заключении раздела приведем формулы для расчета величин, которые потребуются в дальнейшем (везде $i = \overline{1,5}$):

– для расчета $r^0_{0,\,i}$ и ${}^0R_i$ (см. Приложение А):

$${}^0A_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot \ldots \cdot {}^{i-1}A_i; \tag{2.32}$$

– для расчета $r^i_{0,\,i}$:

$$r^i_{0,\,i} = {}^0R^T_i \cdot r^0_{0,\,i}; \tag{2.33}$$

– для расчета $z^0_i$:

$$z^0_i = {}^0R_i \cdot z^i_i = {}^0R_i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{2.34}$$

– для расчета $g_i$, $v^i_i$ и $\omega^i_i$:

$$g_i = {}^0R^T_i \cdot g_0, \qquad v^i_i = {}^0R^T_i \cdot v^0_i, \qquad \omega^i_i = {}^0R^T_i \cdot \omega^0_i. \tag{2.35}$$

### 2.2.2 Вывод уравнений движения

Потенциальная энергия манипулятора

$$U = -\sum_{i=1}^{5}\left(m_i g_i^T r_{0,\,ci}^i\right) = -\sum_{i=1}^{5}\left(m_i g_i^T r_{0,\,i}^i + g_i^T(m_i r_{i,\,ci}^i)\right), \tag{2.36}$$

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$v_i^0 = J_{vi}\dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \tag{2.37}$$

связь между линейными скоростями начал соответствующих СК и вектором $\dot{q}$:

$$J_{v1} = \left[z_0^0 \times \left(r_{0,\,1}^0 - r_{0,\,0}^0\right) \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \tag{2.38}$$

$$J_{v2} = \left[z_0^0 \times \left(r_{0,\,2}^0 - r_{0,\,0}^0\right) \;\; z_1^0 \times \left(r_{0,\,2}^0 - r_{0,\,1}^0\right) \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \tag{2.39}$$

$$J_{v3} = \left[z_0^0 \times \left(r_{0,\,3}^0 - r_{0,\,0}^0\right) \;\; z_1^0 \times \left(r_{0,\,3}^0 - r_{0,\,1}^0\right) \;\; z_2^0 \times \left(r_{0,\,3}^0 - r_{0,\,2}^0\right) \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \tag{2.40}$$

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times \left(r_{0,\,4}^0 - r_{0,\,0}^0\right) \\ z_1^0 \times \left(r_{0,\,4}^0 - r_{0,\,1}^0\right) \\ z_2^0 \times \left(r_{0,\,4}^0 - r_{0,\,2}^0\right) \\ z_3^0 \times \left(r_{0,\,4}^0 - r_{0,\,3}^0\right) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \qquad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times \left(r_{0,\,5}^0 - r_{0,\,0}^0\right) \\ z_1^0 \times \left(r_{0,\,5}^0 - r_{0,\,1}^0\right) \\ z_2^0 \times \left(r_{0,\,5}^0 - r_{0,\,2}^0\right) \\ z_3^0 \times \left(r_{0,\,5}^0 - r_{0,\,3}^0\right) \\ z_4^0 \times \left(r_{0,\,5}^0 - r_{0,\,4}^0\right) \end{bmatrix}^T, \tag{2.41}$$

где $\mathbf{0} = [0\ 0\ 0]^T$ — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_i^0 = J_{\omega i}\dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \tag{2.42}$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором $\dot{q}$:

$$J_{\omega 1} = \left[z_0^0 \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \qquad J_{\omega 2} = \left[z_0^0 \;\; z_1^0 \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \tag{2.43}$$

$$J_{\omega 3} = \left[z_0^0 \;\; z_1^0 \;\; z_2^0 \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \qquad J_{\omega 4} = \left[z_0^0 \;\; z_1^0 \;\; z_2^0 \;\; z_3^0 \;\; \mathbf{0}\right], \tag{2.44}$$

$$J_{\omega 5} = \left[z_0^0 \;\; z_1^0 \;\; z_2^0 \;\; z_3^0 \;\; z_4^0\right]. \tag{2.45}$$

Кинетическая энергия манипулятора

$$K = \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{2}m_i(v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2}(\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,\,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i)\right). \tag{2.46}$$

Функция Лагранжа

$$
\begin{aligned}
L &= K - U = \\
&= \sum_{i=1}^{5}\left(m_i\left(\frac{1}{2}(v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,\,i}^i\right) + (m_i r_{i,\,ci}^i)^T \cdot \left(v_i^i \times \omega_i^i + g_i\right) + \frac{1}{2}(\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{5}\Bigg( m_i \underbrace{\left(\frac{1}{2}(v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,\,i}^i\right)}_{L_{i,1}} + m_i x_{ci} \cdot \underbrace{x\left\{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\right\}}_{L_{i,2}} + \\
&+ m_i y_{ci} \cdot \underbrace{y\left\{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\right\}}_{L_{i,3}} + m_i z_{ci} \cdot \underbrace{z\left\{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\right\}}_{L_{i,4}} + I_{i,\,xx} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(x\{\omega_i^i\}\right)^2}_{L_{i,5}} + \\
&+ I_{i,\,yy} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(y\{\omega_i^i\}\right)^2}_{L_{i,6}} + I_{i,\,zz} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(z\{\omega_i^i\}\right)^2}_{L_{i,7}} + I_{i,\,xy} \cdot \underbrace{x\{\omega_i^i\} \cdot y\{\omega_i^i\}}_{L_{i,8}} + \\
&+ I_{i,\,xz} \cdot \underbrace{x\{\omega_i^i\} \cdot z\{\omega_i^i\}}_{L_{i,9}} + I_{i,\,yz} \cdot \underbrace{y\{\omega_i^i\} \cdot z\{\omega_i^i\}}_{L_{i,10}} \Bigg).
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Уравнения движения робота:

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1,5} \qquad \Rightarrow
\tag{2.48}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\Big(m_i \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,2}\} + \ldots + I_{i,\,yz} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,10}\}\Big) = \tau_1 \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\Big(m_i \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,2}\} + \ldots + I_{i,\,yz} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,10}\}\Big) = \tau_2 \\
\ldots \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\Big(m_i \cdot \mathcal{L}_5\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{i,2}\} + \ldots + I_{i,\,yz} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{i,10}\}\Big) = \tau_5
\end{cases}
\tag{2.49}
$$

где $\mathcal{L}_j$ — оператор, работающий в соответствии с формулой:

$$
\mathcal{L}_j : \quad \mathcal{L}_j\{f\} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j},
\tag{2.50}
$$

где в свою очередь $f = f(\dot{q}(t), q(t))$. Если же заметить, что

$$\mathcal{L}_j\{L_{i,k}\} = 0 \qquad \text{при } j > i, \quad i, j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 10}, \tag{2.51}$$

то выражения для них упрощаются до:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5}\Big(m_i \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,2}\} + \ldots + I_{i,\,yz} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,10}\}\Big) = \tau_1 \\ \sum\limits_{i=2}^{5}\Big(m_i \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,2}\} + \ldots + I_{i,\,yz} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,10}\}\Big) = \tau_2 \\ \ldots \\ m_5 \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,1}\} + m_5 x_{c5} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,2}\} + \ldots + I_{5,\,yz} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,10}\}\Big) = \tau_5 \end{cases} \tag{2.52}$$

или в матричном виде

$$\tau = \xi\chi, \tag{2.53}$$

где $\tau = [\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_5]^T$ — вектор обобщенных моментов,
$\chi = [\chi_1,\ \chi_2,\ \ldots,\ \chi_5]^T \in \mathbb{R}^{50}$ — вектор параметров робота, где в свою очередь

$$\chi_i = \Big[m_i \;\; m_i x_{ci} \;\; m_i y_{ci} \;\; m_i y_{ci} \;\; I_{i,\,xx} \;\; I_{i,\,yy} \;\; I_{i,\,zz} \;\; I_{i,\,xy} \;\; I_{i,\,xz} \;\; I_{i,\,yz}\Big]^T; \tag{2.54}$$

$\xi$ — так называемый регрессор, равный

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \cdots & \xi_{1,5} \\ O_{1\times10} & \xi_{2,2} & \cdots & \xi_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1\times10} & O_{1\times10} & O_{1\times10} & \xi_{5,5} \end{bmatrix}, \tag{2.55}$$

где в свою очередь $O_{1\times10}$ — вектор-строка, состоящая из 10 нулей, а $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ — вектор-строка, рассчитываемый по формуле

$$\xi_{j,i} = \Big[\mathcal{L}_j\{L_{i,1}\} \;\; \mathcal{L}_j\{L_{i,2}\} \;\; \ldots \;\; \mathcal{L}_j\{L_{i,10}\}\Big]. \tag{2.56}$$

### 2.2.3 Учет динамики приводов

Уравнения, описывающие динамику приводов, в матричном виде имеют вид

$$I_a\ddot{q} = \tau_e - \tau, \tag{2.57}$$

где $I_a$ — диагональная матрица приведенных к выходным валам моментов инерции приводов, $\tau_e$ — вектор-столбец приведенных к выходным валам приводов моментов силы, развиваемых двигателями, имеющие вид:

$$I_a = \begin{bmatrix} I_{a,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{a,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_{a,5} \end{bmatrix}, \qquad \tau_e = \begin{bmatrix} \tau_{e,1} \\ \tau_{e,2} \\ \vdots \\ \tau_{e,5} \end{bmatrix}. \tag{2.58}$$

Объединяя уравнения (2.53) и (2.57), получим

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi\chi, \tag{2.59}$$

а, добавив в это выражение учет моментов трения, окончательно будем иметь

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi\chi + t_f. \tag{2.60}$$

В качестве модели трения возьмем поясняемую рисунком 2.5 и описываемую следующим уравнением

$$\tau_f = f_v \dot{q} + f_c \operatorname{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}, \tag{2.61}$$

где $f_v$, $f_c$ — диагональные матрицы коэффициентов вязкого и сухого трения соответственно, $f_{\text{off}}$ — вектор-столбец сдвигов в моментах силы, имеющие вид

$$f_v = \begin{bmatrix} f_{v,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{v,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{v,5} \end{bmatrix}, \quad f_c = \begin{bmatrix} f_{c,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{c,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{c,5} \end{bmatrix}, \quad f_{\text{off}} = \begin{bmatrix} f_{\text{off},1} \\ f_{\text{off},2} \\ \vdots \\ f_{\text{off},5} \end{bmatrix}. \tag{2.62}$$

Подставляя (2.61) в (2.60), получим

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi\chi + f_v \dot{q} + f_c \operatorname{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}. \tag{2.63}$$

Если ввести в рассмотрение новые матрицы $\bar{\chi} = [\bar{\chi}_1,\ \bar{\chi}_2,\ \ldots,\ \bar{\chi}_5]^T$ и

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{1,1} & \bar{\xi}_{1,2} & \cdots & \bar{\xi}_{1,5} \\ O_{1\times10} & \bar{\xi}_{2,2} & \cdots & \bar{\xi}_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1\times10} & O_{1\times10} & O_{1\times10} & \bar{\xi}_{5,5} \end{bmatrix}, \tag{2.64}$$

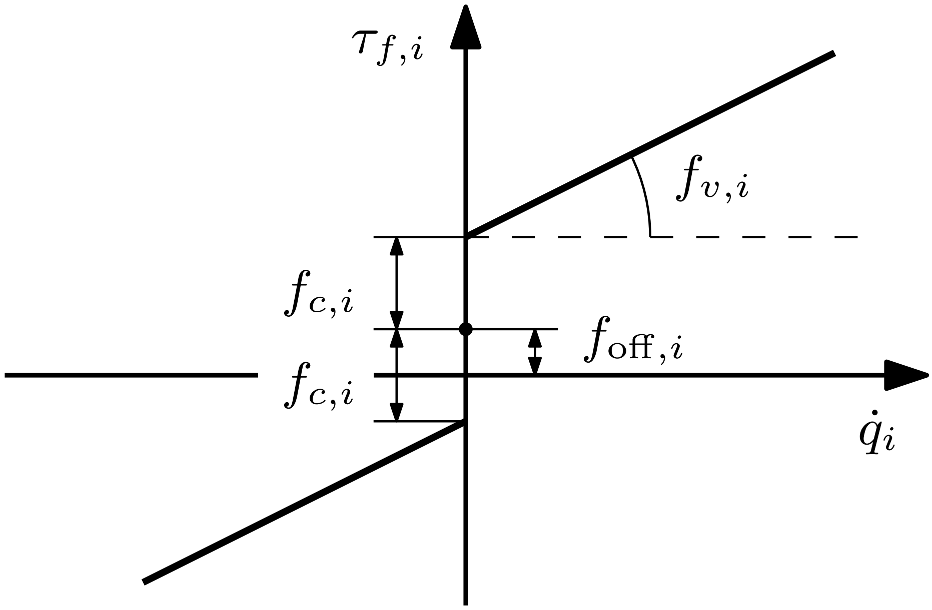


Рисунок 2.5 – График, поясняющий выбранную модель трения.

определяемые выражениями

$$\bar{\chi}_i = \begin{bmatrix} \chi_i & I_{a,i} & f_{v,i} & f_{c,i} & f_{\text{off},i} \end{bmatrix}^T, \tag{2.65}$$

$$\bar{\xi}_{j,i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & i \neq j \\ \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & \ddot{q} & \dot{q} & \operatorname{sign}(\dot{q}) & 1 \end{bmatrix}, & i = j \end{cases} \tag{2.66}$$

то данное выражение может быть записано в следующем матричном виде:

$$\tau_e = \bar{\xi}\bar{\chi}. \tag{2.67}$$

# 3 Синтез систем управления

# Заключение

Текст заключения

# Список использованных источников

1 KUKA YOUBOT. — URL: http://www.technomatix.ru/kuka-youbot (дата обращения: 08.03.2017).

2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Приложение А

(рекомендуемое)

## Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования ${}^iA_j$ называется матрица размера $4 \times 4$, служащая для описания смещения и поворота СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$ и имеющая следующую структуру:

$$ {}^iA_j = \begin{bmatrix} {}^iR_j & r^i_{i,j} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}, \tag{А.1}$$

где $O_{1\times 3} = [0\ 0\ 0]$.

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки $C$ относительно $Ox_0y_0z_0$ при известных векторах $r^2_C$, $r^0_{0,1}$ и $r^1_{1,2}$ и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r^0_C = {}^0R_1 r^1_C + r^0_{0,1} \\ r^1_C = {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \end{cases} \Rightarrow \quad r^0_C = {}^0R_1 {}^1R_2 r^2_C + {}^0R_1 r^1_{1,2} + r^0_{0,1} \tag{А.2}$$

где $r^0_C$, $r^1_C$, $r^2_C$ — радиус-векторы точки $C$ в $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$ соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами ${}^0A_1$ и ${}^1A_2$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} r^0_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} r^1_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 r^1_C + r^0_{0,1} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r^1_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r^1_{1,2} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2} \begin{bmatrix} r^2_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} r^0_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r^1_{1,2} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2}}_{{}^0A_2} \begin{bmatrix} r^2_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} {}^0R_1 {}^1R_2 r^2_C + {}^0R_1 r^1_{1,2} + r^0_{0,1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{А.3}$$

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [].

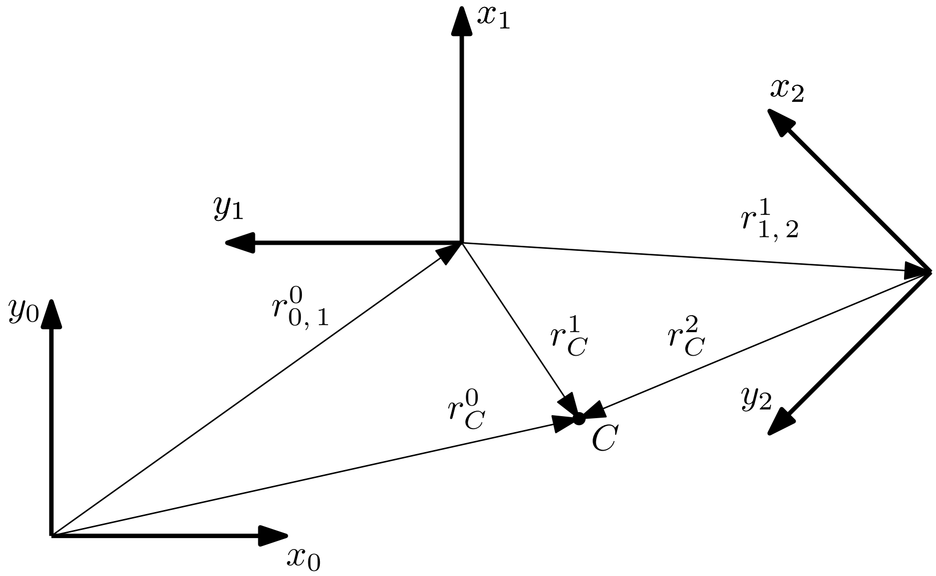


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

## Приложение Б
## (рекомендуемое)
## **Терминология относительных измерений**

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «…относительно такой-то системы координат…» и при этом «…выражены относительно такой-то системы координат…». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором $V$. В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

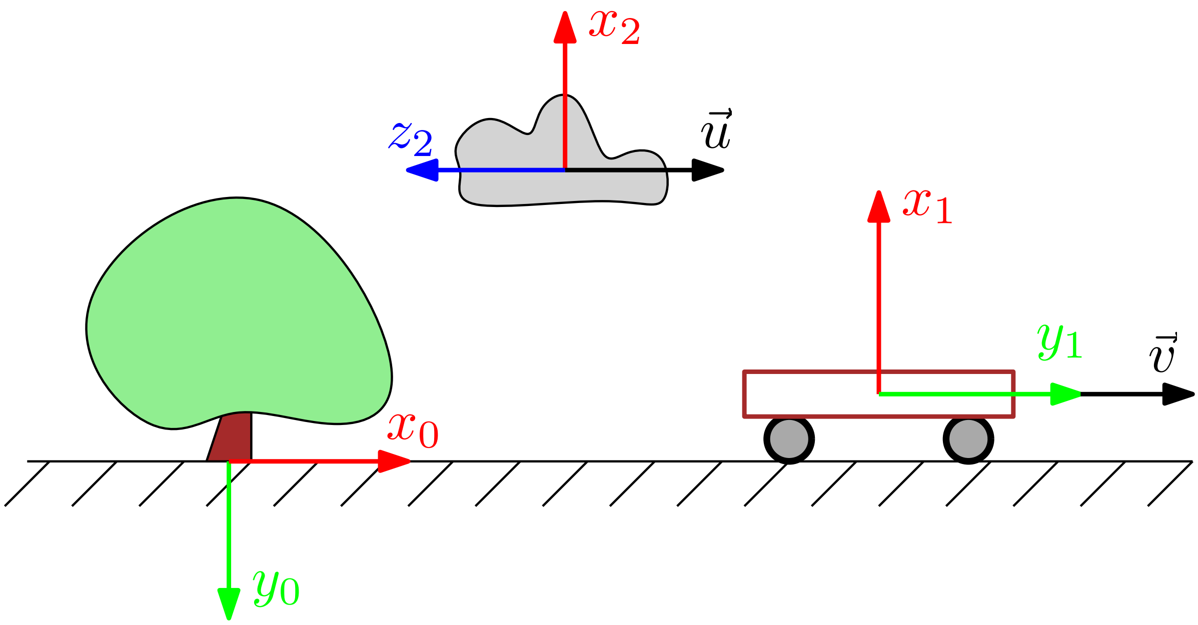


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Таблица Б.1 – Координаты вектора $V$ в зависимости от его физического смысла.

| Смысл вектора $V$ | Значение $V^T$ |
|---|---|
| Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$ | $\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\end{bmatrix}$ |
| Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$ | $\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\end{bmatrix}$ |
| Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$ | $\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\end{bmatrix}$ |
| Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$ | $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix}$ |
| Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$ | $\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\end{bmatrix}$ |
| Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$ | $\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ |