Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1

«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»

по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. P4135

Фамилия И.О.,

Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,

должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

q_i — i-ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i-ом сочленении);

n — количество звеньев робота, $n = 5$;

${}^iR_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;

${}^iA_j$ — матрица однородных преобразований, описывающая смещение и поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$

$r^i_{j,k}$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$*;

g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

V^i_j — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

a^i_j — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

ω^i_j — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega^i_{j,k}$ — угловая скорость вращения $Ox_ky_kz_k$ относительно $Ox_jy_jz_j$, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

* За пояснениями применяемой здесь и далее терминологии обратитесь к Приложению А.

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

z_j^i — орт $[0\ 0\ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

f_j^i — сила, действующая на j-ое звено (тело) механизма со стороны $(j-1)$-го звена (тела), выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_j^i — момент силы, действующий на j-ое звено (тело) механизма со стороны $(j-1)$-го звена (тела), выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_i — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты q_i;

m_i — масса i-го звена;

$\mathcal{I}_j^i$ — тензор инерции j-го звена, выраженный относительно жестко связанной с его центром масс системой координат, сонаправленной с $Ox_iy_iz_i$;

a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно.

Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

– в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;

– раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;

– в разделе 3 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах аппробации на реальном роботе и проч.

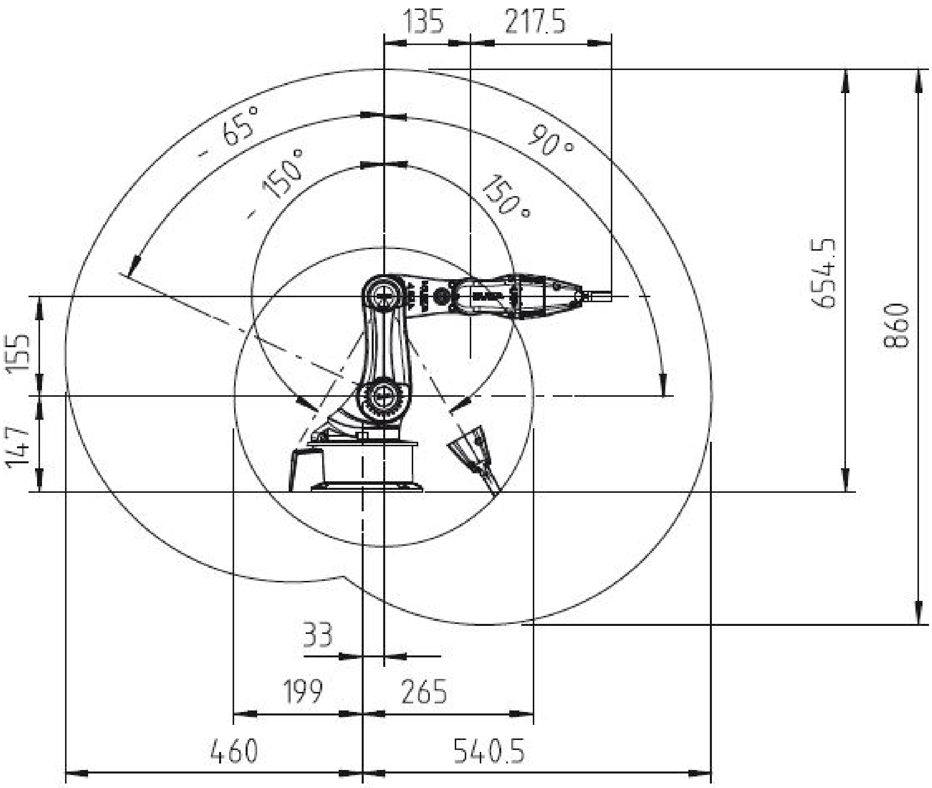
* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движении схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

1 Описание манипулятора

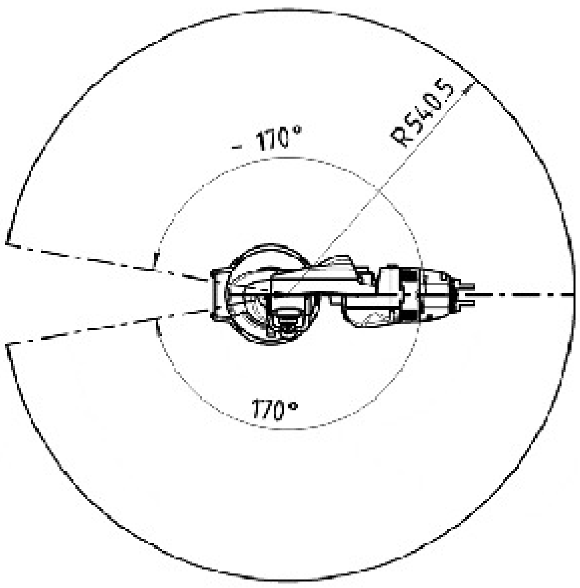
Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

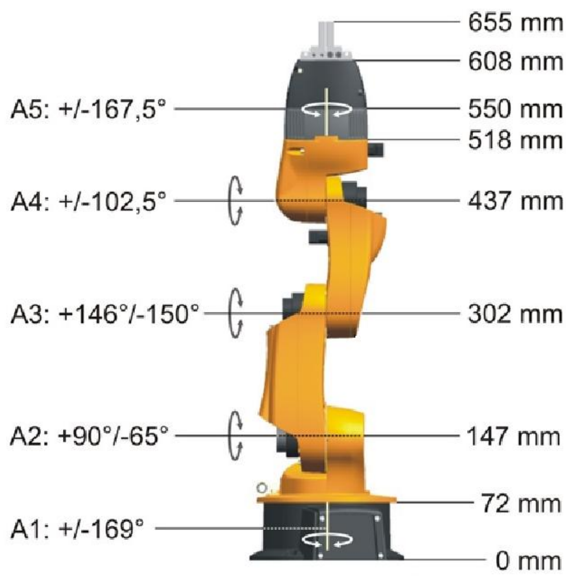
Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с$^{-1}$
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В



а)





б) в)

Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

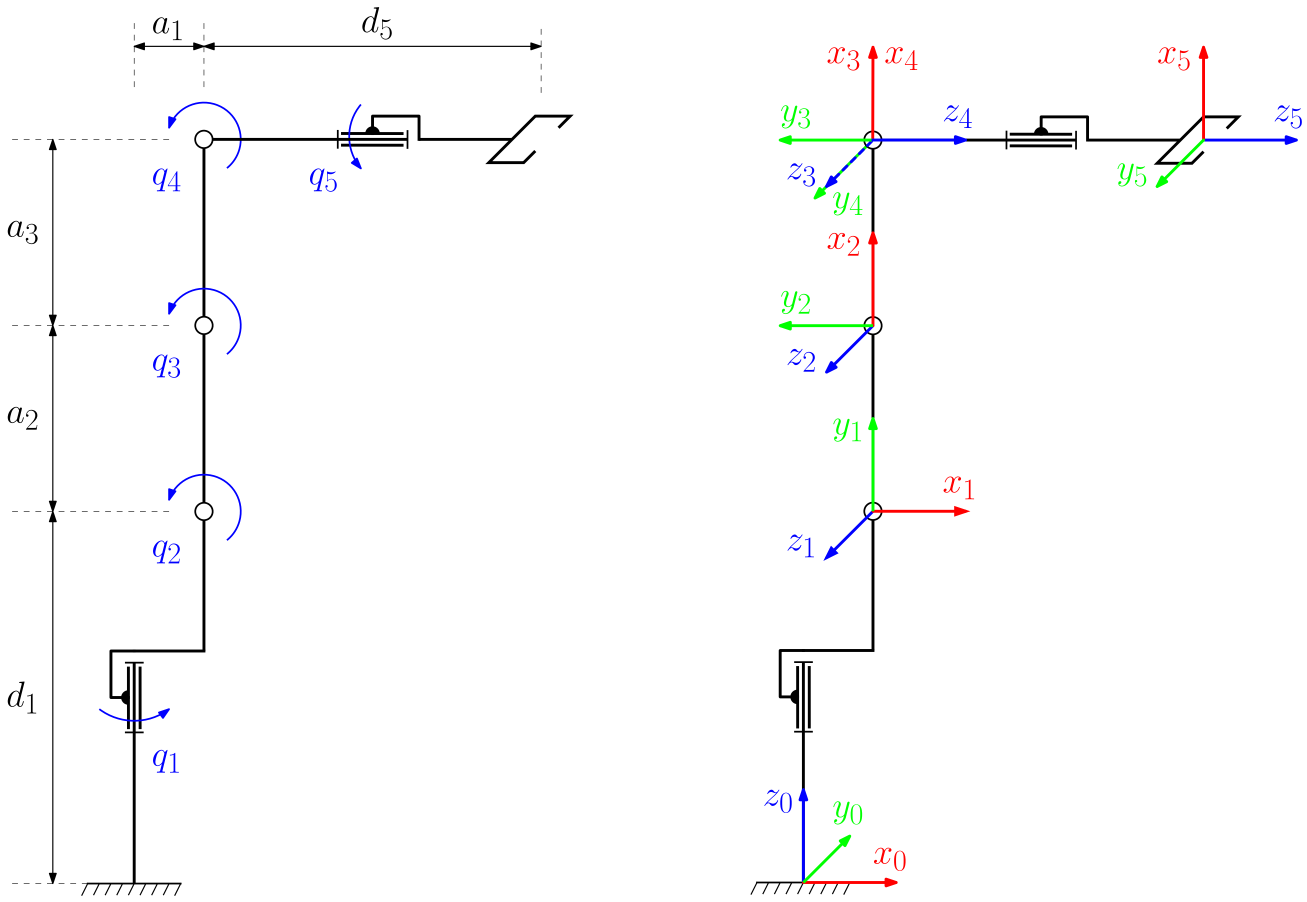
КСУИ.101.4135.001 ПЗ

2 Математическая модель манипулятора

2.1 Кинематика манипулятора

2.1.1 Общие замечания

Последовательная кинематическая цепь рассматриваемого манипулятора, включающая только вращательные КП V-класса (цилиндрические шарниры), изображена на рисунке 2.1а.



а) б)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при $q_i = 0$, $i = \overline{1, 5}$; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

а) «привязка» к каждому звену СК, чьи оси удовлетворяют следующим условиям:

   1) ось z_{i-1} направлена вдоль оси i-ой КП;
   2) ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и пересекает ее;
   3) ось y_i дополняет оси z_i и x_i до правой декартовой СК.

б) определение параметров ДХ:

   1) a_i — расстояния от z_{i-1} до z_i вдоль x_i;
   2) α_i — угла от z_{i-1} до z_i вокруг x_i;
   3) d_i — расстояния от x_{i-1} до x_i вдоль z_{i-1};
   4) θ_i — угла от x_{i-1} до x_i вокруг z_{i-1}.

в) расчет однородных матриц преобразования* в соответствии со следующими формулами:

$$^{i-1}A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i} \tag{2.1}$$

где R_{z,θ_i} — матрица поворота вокруг оси z на угол θ_i, T_{z,d_i} — матрица смещения вдоль оси z на расстояние d, T_{x,a_i} —матрица смещения вдоль оси x на расстояние a_i, R_{x,α_i} — матрица поворота вокруг оси x на угол α_i, равные

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{2.3}$$

* За пояснениями обратитесь к Приложению Б

итого

$$
{}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}
$$

Результаты выполнения для исследуемого манипулятора двух первых шагов представлены на рисунке 2.1б и в таблице 2.1, а третьего — в лице следующих выражений:

$$
{}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} & 0 & s_{\theta_1} & a_1c_{\theta_1} \\ s_{\theta_1} & 0 & -c_{\theta_1} & a_1s_{\theta_1} \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} & -s_{\theta_2} & 0 & a_2c_{\theta_2} \\ s_{\theta_2} & c_{\theta_2} & 0 & a_2s_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_3} & -s_{\theta_3} & 0 & a_3c_{\theta_3} \\ s_{\theta_3} & c_{\theta_3} & 0 & a_3s_{\theta_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};
$$

$$
{}^{3}A_4 = \begin{bmatrix} c_{\theta_4} & 0 & s_{\theta_4} & 0 \\ s_{\theta_4} & 0 & -c_{\theta_4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ {}^{4}A_5 = \begin{bmatrix} c_{\theta_5} & -s_{\theta_5} & 0 & 0 \\ s_{\theta_5} & c_{\theta_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.5}
$$

Таблица 2.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

Звено	a_i, мм	α_i, рад	d_i, мм	θ_i, рад
1	33	$\pi/2$	147	q_1
2	155	0	0	$q_2 + \pi/2$
3	135	0	0	q_3
4	0	$\pi/2$	0	q_4
5	0	0	218	q_5

2.1.2 Прямая задача кинематики

Представим прямую задачу кинематики (ПЗК) манипулятора выражением:

$$^{0}A_6 = \prod_{i=1}^{6} {}^{i-1}A_i(q_i) = ^0 A_1 \cdot ^1 A_2 \cdot ^2 A_3 \cdot ^3 A_4 \cdot ^4 A_5 \cdot ^5 A_6 \tag{2.6}$$

где $^0A_6$ — матрица 4×4, первые 3 столбца которой представляют ориентацию, последний — положение схвата; $^{i-1}A_i$ — однородная матрица преобразования из $(i-1)$ в i-ую СК в общем виде:

$$^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Теперь, учитывая ДХ-параметры из таблицы 2.1 находим матрцы преобразования СК, рисунок 2.1 б.

$$^0A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; ^1A_2 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} & 0 & s_{\theta_1} & a_2c_{\theta_1} \\ s_{\theta_1} & 0 & -c_{\theta_1} & a_2s_{\theta_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; ^2A_3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} & -s_{\theta_2} & 0 & a_3c_{\theta_2} \\ s_{\theta_2} & c_{\theta_2} & 0 & a_3s_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$^3A_4 = \begin{bmatrix} c_{\theta_3} & -s_{\theta_3} & 0 & a_4c_{\theta_3} \\ s_{\theta_3} & c_{\theta_3} & 0 & a_4s_{\theta_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; ^4A_5 = \begin{bmatrix} c_{\theta_4} & 0 & s_{\theta_4} & 0 \\ s_{\theta_4} & 0 & -c_{\theta_4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; ^5A_6 = \begin{bmatrix} c_{\theta_5} & -s_{\theta_5} & 0 & 0 \\ s_{\theta_5} & c_{\theta_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, для любого вектора q, позьзуясь выражением (2.6) и ДХ-параметрами маниплятора, можно определить однозначное положение и ориентацию схвата манипулятора в пространстве.

Для проверки, зададим вектор обобщенных координат:

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

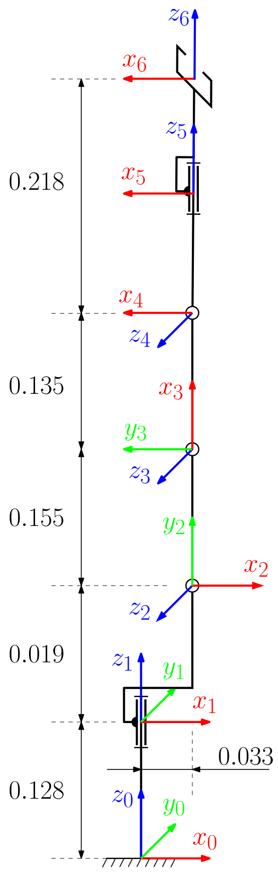


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора для заданного вектора q

В результате решения ПЗК должны получить:

$$p = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}, o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 180 \end{bmatrix},$$

где p — положение схвата, o — ориентация схвата (крен, рыскание, тангаж).

Вычислим матрицу ${}^0A_6$:

$$ {}^0A_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.655 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Из приведенного примера следует, что ДХ-параметры и матрицы трансформации найдены верно.

2.1.3 Обратная задача кинематики

Обратную задачу кинематики представим, как функцию $g = f^{-1}$, представляющую переход из рабочего в конфигурационное пространство:

$$\mathbf{q} = g(\mathbf{p}, \mathbf{o}) = f^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{o}) \tag{2.10}$$

где вектор $\mathbf{p}$ — заданное положение в рабочем пространстве, вектор $\mathbf{o}$ — заданная ориентация системы координат схвата.

Для удобства будем пользоваться однородными матрицами преобразования. Матрица, задающая положение и ориентацию схвата в системе координат базы, имеет вид:

$$^0T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p^x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p^y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p^z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Приравняв матрицу $^0T_6$ и правую часть выражения (2.6) и домножив с обеих сторон на $(^0A_1 \cdot {}^1A_2)^{-1}$, получим выражение:

$$(^0A_1 \cdot {}^1A_2)^{-1} \cdot {}^0T_6 = {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6 \tag{2.12}$$

где левая часть:

$$^2T_6 = \begin{bmatrix} r_{11}c_1 + r_{21}s_1 & r_{12}c_1 + r_{22}s_1 & r_{13}c_1 + r_{23}s_1 & -a_2 + p^x c_1 + p^y s_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & -d_1 - d_2 + p^z \\ r_{11}s_1 - r_{21}c_1 & r_{12}s_1 - r_{22}c_1 & r_{13}s_1 - r_{23}c_1 & p^x s_1 - p^y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

правая часть:

$$^2A_6 = \begin{bmatrix} c_5 c_{234} & -s_5 c_{234} & s_{234} & a_3 c_2 + a_4 c_{23} + d_6 s_{234} \\ s_{234} c_5 & -s_5 s_{234} & -c_{234} & a_3 s_2 + a_4 s_{23} - d_6 c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь, приравнивая элементы с одинаковыми индексами получим уравнения, из которых найдем обобщенные координаты.

Из равенства элементов $(3,4)$:

$$p^x s_1 - p^y c_1 = 0 \tag{2.13}$$

Найдем θ_1:

$$\theta_1 = Atan2(p^y, p^x) \tag{2.14}$$

Из равенств элементов $(3,1)$ и $(3,2)$:

$$s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1,$$

$$c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1$$

Вычислим θ_5:

$$\theta_5 = Atan2(r_{11}s_1 - r_{21}c_1, r_{12}s_1 - r_{22}c_1) \tag{2.15}$$

Из равенств элементов $(2,3)$ и $(1,3)$:

$$c_{234} = -r_{33},$$

$$s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1$$

Вычислим θ_{234}:

$$\theta_{234} = Atan2(r_{13}c_1 + r_{23}s_1, -r_{33}) \tag{2.16}$$

Далее применим геометрический подход.

Выпишем, пользуясь теоремой косинусов, выражения для θ_3:

$$\cos\theta_3 = \frac{({}^2p_4^x)^2 + ({}^2p_4^y)^2 + ({}^2p_4^z)^2 - a_3^2 - a_3^2}{2a_3a_4} \tag{2.17}$$

$$\theta_3^{1,2} = \mp Atan2(\sqrt{1-\cos^2\theta_3}, \cos\theta_3) \tag{2.18}$$

Из рисунка 2.3 видно, что, при $\theta_3 < 0$, $\theta_2 = \phi + \beta$:

$$\theta_2^1 = Atan2(\sqrt{({}^2p_4^x)^2 + ({}^2p_4^y)^2}, {}^2p_4^z) + Atan2(a_4\sin\theta_3^1, a_3 + a_4\cos\theta_3^1) \tag{2.19}$$

При $\theta_3 > 0$, $\theta_2 = \phi - \beta$:

$$\theta_2^2 = Atan2(\sqrt{({}^2p_4^x)^2 + ({}^2p_4^y)^2}, {}^2p_4^z) - Atan2(a_4\sin\theta_3^2, a_3 + a_4\cos\theta_3^2) \tag{2.20}$$

И, наконец:

$$\theta_4^{1,2} = \theta_{234} - \theta_2^{1,2} - \theta_3^{1,2} \tag{2.21}$$

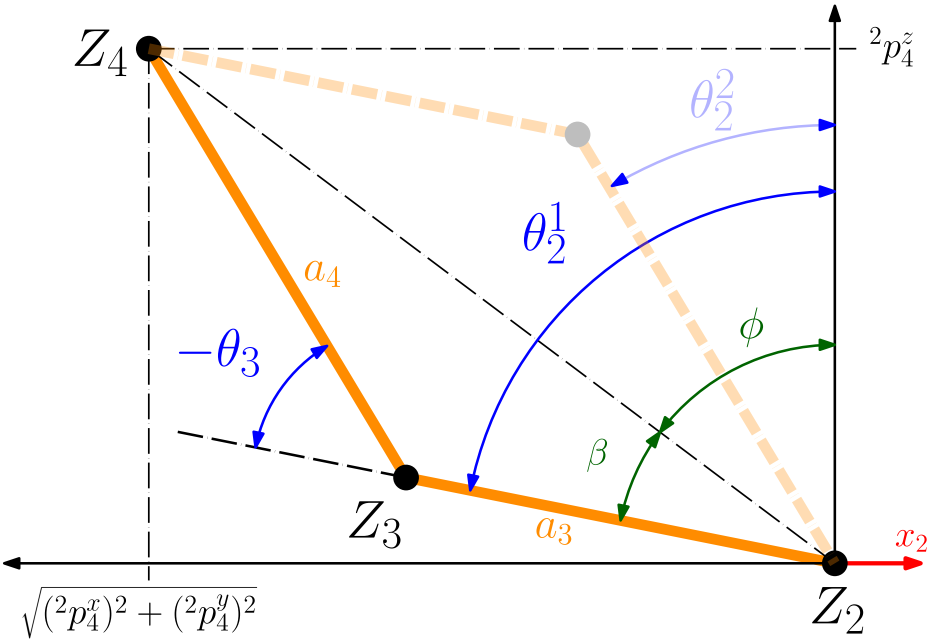


Рисунок 2.3 – Плоская часть манипулятора

3 Синтез систем управления

Заключение

Текст заключения

Список использованных источников

1 KUKA YOUBOT. — URL: http://www.technomatix.ru/kuka-youbot (дата обращения: 08.03.2017).

2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Приложение А
(рекомендуемое)
Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «…относительно такой-то системы координат…» и при этом «…выражены относительно такой-то системы координат…». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок А.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором V. В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица А.1.

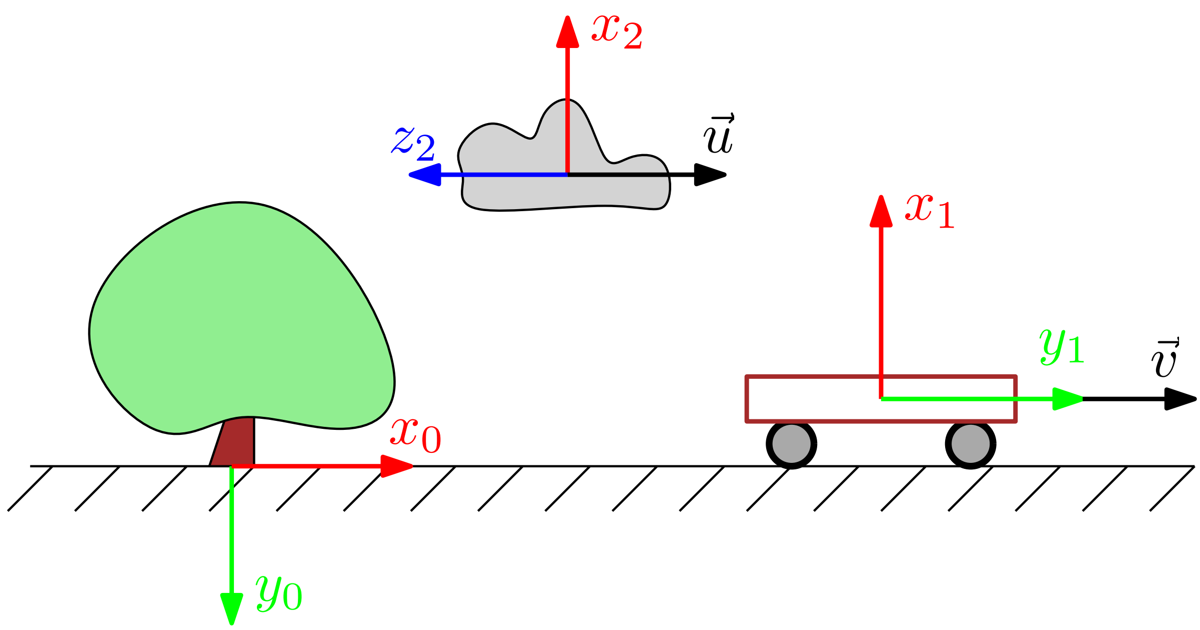


Рисунок А.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Таблица А.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора V	Значение V^T
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

Приложение Б

(рекомендуемое)

Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования ${}^iA_j$ называется матрица размера 4×4, служащая для описания смещения и поворота СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$ и имеющая следующую структуру:

$$ {}^iA_j = \begin{bmatrix} {}^iR_j & r^i_{i,j} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}, \tag{Б.1} $$

где $O_{1\times 3} = [0\ 0\ 0]$.

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок Б.1. Чтобы найти координаты точки C относительно $Ox_0y_0z_0$ при известных векторах r^2_C, $r^0_{0,1}$ и $r^1_{1,2}$ и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$ \begin{cases} r^0_C = {}^0R_1 r^1_C + r^0_{0,1} \\ r^1_C = {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \end{cases} \Rightarrow \quad r^0_C = {}^0R_1 {}^1R_2 r^2_C + {}^0R_1 r^1_{1,2} + r^0_{0,1} \tag{Б.2} $$

где r^0_C, r^1_C, r^2_C — радиус-векторы точки C в $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$ соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами ${}^0A_1$ и ${}^1A_2$:

$$ \begin{cases} \begin{bmatrix} r^0_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} r^1_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 r^1_C + r^0_{0,1} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r^1_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r^1_{1,2} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2} \begin{bmatrix} r^2_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} r^0_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r^1_{1,2} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2}}_{{}^0A_2} \begin{bmatrix} r^2_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \\ 1 \end{bmatrix} = $$

$$ = \begin{bmatrix} {}^0R_1 {}^1R_2 r^2_C + {}^0R_1 r^1_{1,2} + r^0_{0,1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{Б.3} $$

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [].

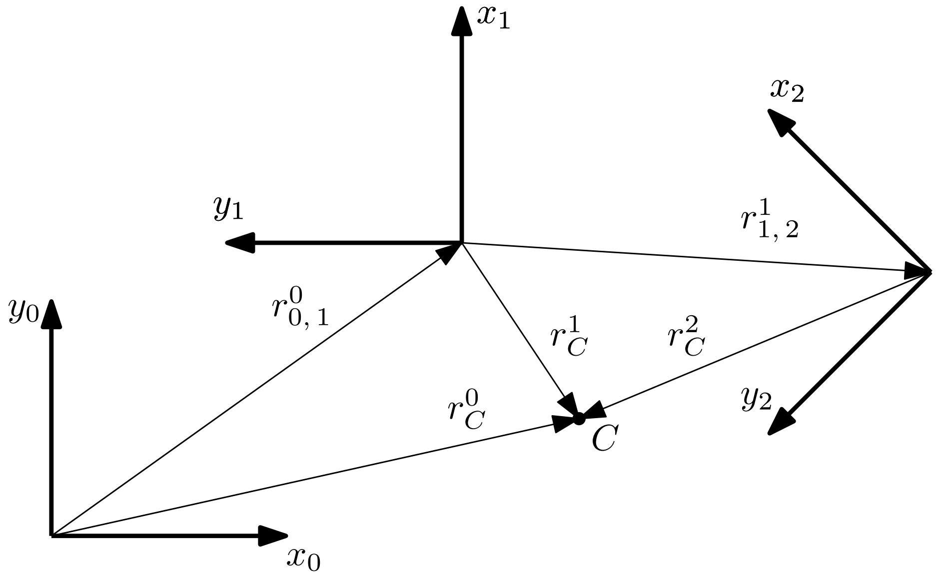


Рисунок Б.1 – Системы координат из пояснительного примера.