

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1
«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»
по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. Р4135
Фамилия И.О.,
Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,
должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Обозначения и сокращения	3
Введение	5
1 Описание манипулятора	6
2 Математическая модель манипулятора	8
2.1 Кинематика манипулятора	8
2.1.1 Общие замечания	8
2.1.2 Прямая задача кинематики	10
2.1.3 Обратная задача кинематики	12
2.2 Динамика манипулятора	16
2.2.1 Общие замечания	16
2.2.2 Получение уравнений движения методом Эйлера-Лагранжа	18
3 Синтез систем управления	20
Заключение	21
Список использованных источников	22
Приложение А Матрицы однородного преобразования	23
Приложение Б Терминология относительных измерений	25

Подп. и дата		Заключение					21			
Подп. и дата		Список использованных источников					22			
Подп. и дата		Приложение А Матрицы однородного преобразования					23			
Инв. № дубл.		Приложение Б Терминология относительных измерений					25			
Взам. инв. №										
Подп. и дата										
Инв. № подл.						КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					
	Разраб.	Антонов, Артемов					Разработка системы управления для манипулятора Kuka Youbot Пояснительная записка	Лит.	Лист	Листов
	Пров.	Котельников Ю.П.							2	26
Н. контр.					Университет ИТМО Кафедра СУиИ гр. Р4135					
Утв.										

Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

n — количество звеньев робота, $n = 5$;

q_i — i -ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i -ом сочленении);

q — вектор-столбец обобщенных координат робота, $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$;

iR_j — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;

iA_j — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_iy_iz_i$ относительно СК $Ox_iy_iz_i^*$;

$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i^{**}$;

g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;

v_j^i — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО^{***} выраженной относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

* За пояснениями обратитесь к Приложению А

^{**} За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0y_0z_0$.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	${}^i R_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$;
										${}^i A_j$ — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i^*$;
$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_j y_j z_j$ в начало $Ox_k y_k z_k$, выраженный относительно $Ox_i y_i z_i^{**}$;										
g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;										
v_j^i — линейная скорость начала $Ox_j y_j z_j$ относительно используемой в решении ИСО, ^{***} выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$;										
a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_j y_j z_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;										
<hr/>										
[*] За пояснениями обратитесь к Приложению А										
^{**} За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.										
^{***} В качестве ИСО в документе используется $Ox_0 y_0 z_0$.										
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										3

ω_j^i — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega_{j,k}^i$ — угловая скорость вращения $Ox_ky_kz_k$ относительно $Ox_jy_jz_j$, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

z_j^i — орт $[0 \ 0 \ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

f_j^i — сила, действующая на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_j^i — момент силы, действующий на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_i — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты q_i ;

m_i — масса i -го звена;

\mathcal{I}_j^i — тензор инерции j -го звена относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;

s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						4	

Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

- в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;
- раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;
- в разделе 3 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах апробации на реальном роботе и проч.

* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движения схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп.			
--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--------------	--------------	-------	--	--	--

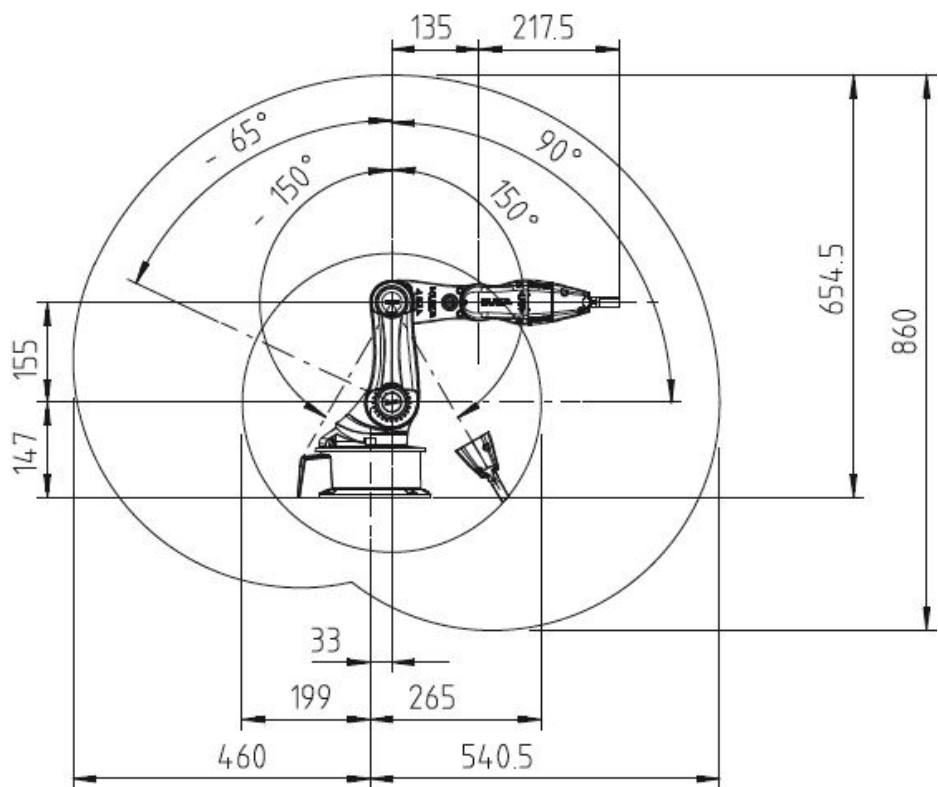
1 Описание манипулятора

Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

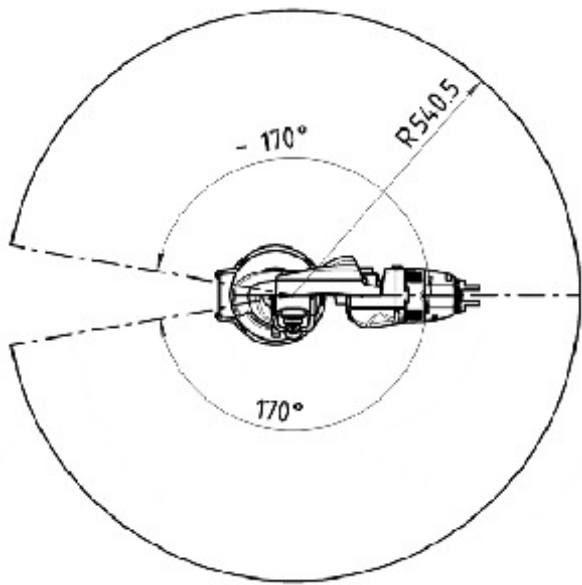
Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с ⁻¹
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В

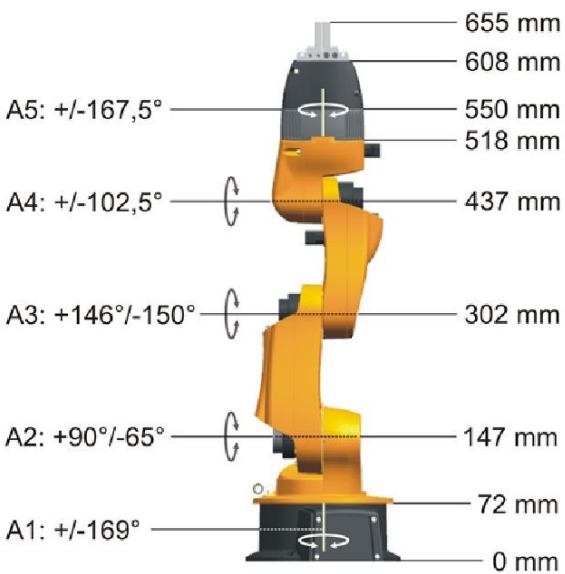
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата



а)



б)



в)

Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

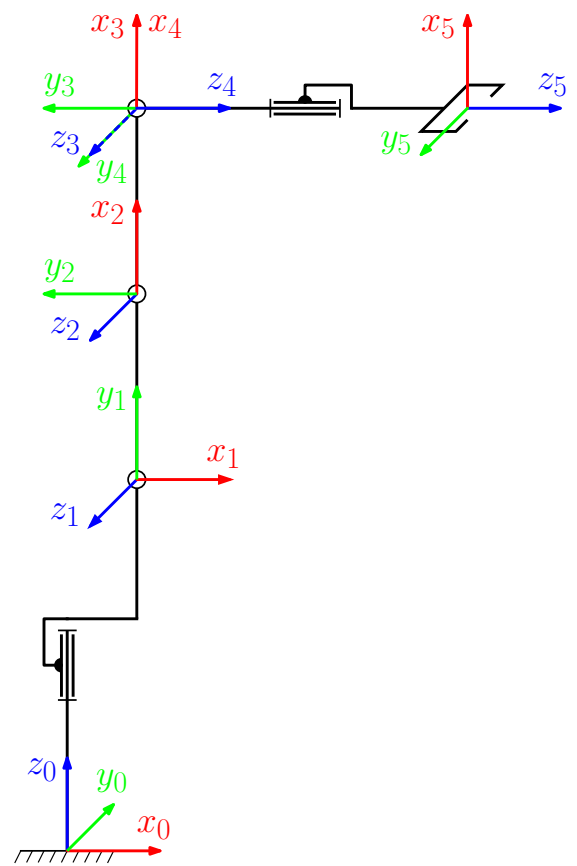
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

2.1.1 Общие замечания

The diagram illustrates a 5-DOF robot arm. It starts with a fixed base at the bottom left. A vertical link of length a_1 connects the base to a revolute joint q_1 . A horizontal link of length a_2 extends from joint q_1 to a second revolute joint q_2 . From joint q_2 , a vertical link of length a_3 goes up to a third revolute joint q_3 . A horizontal link of length a_4 extends from joint q_3 to a fourth revolute joint q_4 . Finally, a horizontal link of length a_5 extends from joint q_4 to a prismatic joint q_5 , which is represented by a slider on a horizontal track. Blue curved arrows indicate the degrees of freedom for each joint: rotation for q_1, q_2, q_3, q_4 and translation for q_5 .

a)



6)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при $q_i = 0$, $i = \overline{1, 5}$; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

- 1) ось z_{i-1} направлена вдоль оси i -ой КП;
- 2) ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и пересекает ее;
- 3) ось y_i дополняет оси z_i и x_i до правой декартовой СК.

- 1) a_i — расстояния от z_{i-1} до z_i вдоль x_i ;
- 2) α_i — угла от z_{i-1} до z_i вокруг x_i ;
- 3) d_i — расстояния от x_{i-1} до x_i вдоль z_{i-1} ;
- 4) θ_i — угла от x_{i-1} до x_i вокруг z_{i-1} .

$${}^{i-1}A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i} \quad (2.1)$$

где R_{z,θ_i} — матрица поворота вокруг оси z на угол θ_i , T_{z,d_i} — матрица смещения вдоль оси z на расстояние d , T_{x,a_i} — матрица смещения вдоль оси x на расстояние a_i , R_{x,α_i} — матрица поворота вокруг оси x на угол α_i , равные

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$
$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Звено	a_i , мм	α_i , рад	d_i , мм	θ_i , рад
1	33	$\pi/2$	147	q_1
2	155	0	0	$q_2 + \pi/2$
3	135	0	0	q_3
4	0	$\pi/2$	0	q_4
5	0	0	218	q_5

Информация о смещении и повороте СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ содержится в матрице 0A_5 . Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, оста-

ется лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$${}^0A_5 = \prod_{i=1}^5 {}^{i-1}A_i(q_i).$$

(2.6)

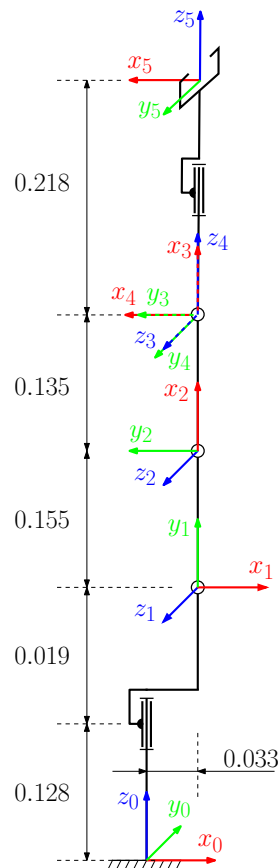


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T = [0, 0, 0, \pi/2, 0]^T$.

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$${}^0R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}.$$

(2.7)

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

а правая —

$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 c_{234} & -s_5 c_{234} & s_{234} & a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_5 s_{234} \\ c_5 s_{234} & -s_5 s_{234} & -c_{234} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_5 c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где в свою очередь

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \quad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \quad (2.13)$$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов θ_1 , θ_5 и θ_{234} дают

— равенство элементов (3, 4):

$$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14)$$

— равенство элементов (3, 1) и (3, 2):

$$\begin{cases} s_5 = r_{11} s_1 - r_{21} c_1 \\ c_5 = r_{12} s_1 - r_{22} c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \quad (2.15)$$

— равенство элементов (2, 3) и (1, 3):

$$\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13} c_1 + r_{23} s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16)$$

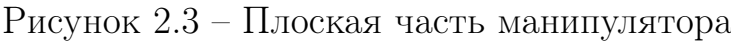
Подп. и дата	Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата	Инв. № подл.	<div>КСУИ.101.4135.001 ПЗ</div>	Лист
						13
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		

– равенство элементов (3, 1) и (3, 2):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \text{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \text{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.15}$$

– равенство элементов (2, 3) и (1, 3):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \text{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \text{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.16}$$


$$\theta_2^{\text{III}} = \varphi(\theta_1^{\text{II}}) + \beta(\theta_3^{\text{III}}), \quad \theta_2^{\text{IV}} = \varphi(\theta_1^{\text{II}}) - \beta(\theta_3^{\text{IV}}). \quad (2.25)$$
$$\theta_4^{I,II} = \theta_{234}^I - \theta_2^{I,II} - \theta_3^{I,II}, \quad \theta_4^{III,IV} = \theta_{234}^{II} - \theta_2^{III,IV} - \theta_3^{III,IV}. \quad (2.26)$$
$$q^{\text{III}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{III}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{III}} & \theta_4^{\text{III}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T, \quad q^{\text{IV}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{IV}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{IV}} & \theta_4^{\text{IV}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T. \quad (2.28)$$

2.2.1 Общие замечания

The diagram illustrates a multi-link robotic arm with five joints. The base is fixed to the ground. A vertical axis z_0 points upwards from the base. The base frame has axes x_0 (red, horizontal right), y_0 (green, diagonal up-right), and z_0 (blue, vertical up). The arm consists of five links, each with a local coordinate frame (x_i, y_i, z_i) and a corresponding center-of-mass frame (x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}) . The frames are defined as follows:

- Link 1: x_1 (red, horizontal right), y_1 (green, vertical up), z_1 (blue, diagonal down-left).
- Link 2: x_2 (red, vertical up), y_2 (green, horizontal left), z_2 (blue, diagonal down-left).
- Link 3: x_3 (red, vertical up), y_3 (green, horizontal left), z_3 (blue, diagonal down-left).
- Link 4: x_4 (red, vertical up), y_4 (green, diagonal down-left), z_4 (blue, horizontal right).
- Link 5: x_5 (red, vertical up), y_5 (green, diagonal down-left), z_5 (blue, horizontal right).

 The center-of-mass frames are defined relative to the local frames:

- x_{c1} (red, horizontal right), y_{c1} (green, vertical up), z_{c1} (blue, diagonal down-left).
- x_{c2} (red, vertical up), y_{c2} (green, horizontal left), z_{c2} (blue, diagonal down-left).
- x_{c3} (red, vertical up), y_{c3} (green, horizontal left), z_{c3} (blue, diagonal down-left).
- x_{c4} (red, vertical up), y_{c4} (green, diagonal down-left), z_{c4} (blue, horizontal right).
- x_{c5} (red, vertical up), y_{c5} (green, diagonal down-left), z_{c5} (blue, horizontal right).

 A gravity vector \vec{g} is shown pointing vertically downwards. The joints are represented by circles with a dot, indicating revolute joints. The base joint is a revolute joint around the z_0 axis. The other joints are revolute joints around the x or y axes of the previous link's frame.

Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора \vec{g} .

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звезд.

2.2.2 Получение уравнений движения методом Эйлера-Лагранжа

Потенциальная энергия манипулятора

$$U = -g_0^T \cdot \sum_{i=1}^5 m_i r_{0,ci}^0 = \quad (2.37)$$

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$v_{ci}^0 = J_{vi} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.38)$$

связь между линейными скоростями центров масс звеньев и вектором \dot{q} :

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,c1}^0 - r_{0,0}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,c2}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,c2}^0 - r_{0,1}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$J_{v3} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,c3}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,c3}^0 - r_{0,1}^0) & z_2^0 \times (r_{0,c3}^0 - r_{0,2}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}^T, \quad (2.42)$$

где $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_{ci}^0 = J_{wi} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.43)$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором \dot{q} :

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Кинетическая энергия манипулятора:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^5 (m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{wi}^T {}^0 R_i \mathcal{I}_i^{ci} {}^0 R_i^T J_{wi}) \right) \dot{q} = \quad (2.47)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									18
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					Формат А4

Функция Лагранжа

$$L = K - U. \tag{2.48}$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1,5} \quad \Rightarrow \tag{2.49}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \tau_1 \\ = \tau_2 \\ = \tau_3 \\ = \tau_4 \\ = \tau_5 \end{array} \right. \tag{2.50}$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										19
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Копировал					Формат А4

3 Синтез систем управления

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист 20

Заключение

Текст заключения

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						21

Список использованных источников

- 1 KUKA YUBOT. — URL: <http://www.technomatix.ru/kuka-youbot> (дата обращения: 08.03.2017).
- 2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										22
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Приложение А
(рекомендуемое)

Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования ${}^i A_j$ называется матрица размера 4×4 , служащая для описания смещения и поворота СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$ и имеющая следующую структуру:

$${}^i A_j = \begin{bmatrix} {}^i R_j & r_{i,j}^i \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где $O_{1 \times 3} = [0 \ 0 \ 0]$.

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки C относительно $Ox_0 y_0 z_0$ при известных векторах r_C^2 , $r_{0,1}^0$ и $r_{1,2}^1$ и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r_C^0 = {}^0 R_1 r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ r_C^1 = {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \end{cases} \Rightarrow r_C^0 = {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \quad (\text{A.2})$$

где r_C^0 , r_C^1 , r_C^2 — радиус-векторы точки C в $Ox_0 y_0 z_0$, $Ox_1 y_1 z_1$ и $Ox_2 y_2 z_2$ соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами ${}^0 A_1$ и ${}^1 A_2$:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0 R_1 r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										23
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [1].

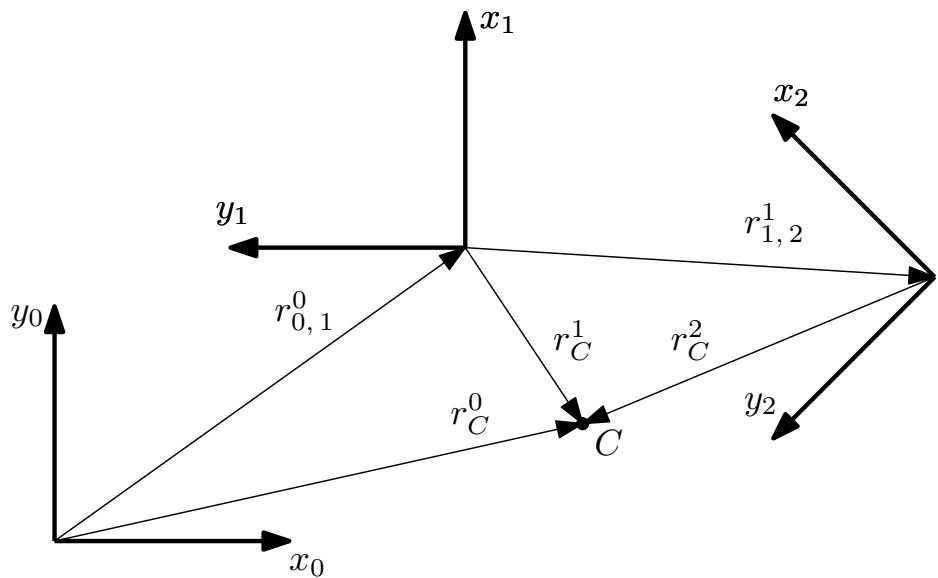


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
</							

Приложение Б
(рекомендуемое)

Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором \vec{V} . В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

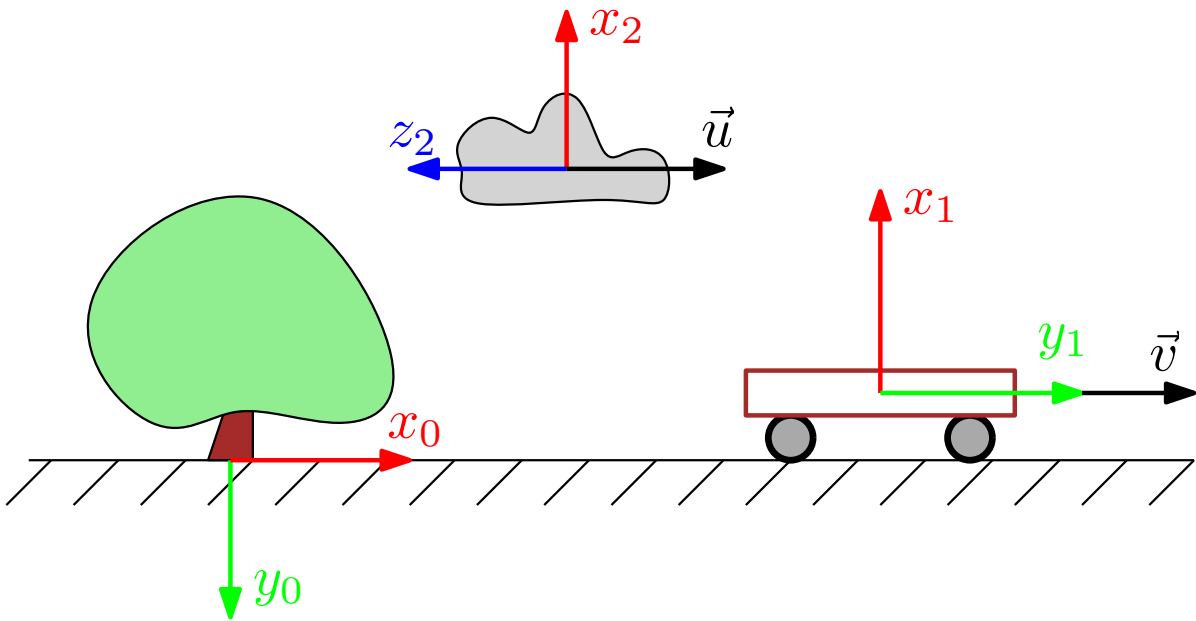


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Таблица Б.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора V	Значение V^T
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата