

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1
«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»
по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. Р4135
Фамилия И.О.,
Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,
должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Обозначения и сокращения	3
Введение	5
1 Описание манипулятора	6
2 Математическая модель манипулятора	8
2.1 Кинематика манипулятора	8
2.1.1 Общие замечания	8
2.1.2 Прямая задача кинематики	10
2.1.3 Обратная задача кинематики	12
2.2 Динамика манипулятора	16
2.2.1 Общие замечания	16
2.2.2 Вывод уравнений движения	18
2.2.3 Учет динамики приводов	20
3 Идентификация параметров манипулятора	23
3.1 Описание метода	23
3.2 Результаты	24
4 Синтез систем управления	25
Заключение	26
Список использованных источников	27
Приложение А Матрицы однородного преобразования	28
Приложение Б Терминология относительных измерений	30

Подп. и дата	
Инв. № дубл.	
Взам. инв. №	
Подп. и дата	
Инв. № подл.	

					КСУИ.101.4135.001 ПЗ								
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата									
Разраб.	Антонов, Артемов				Разработка системы управления для манипулятора Kuka Youbot Пояснительная записка				Лит.	Лист	Листов		
Пров.	Котельников Ю.П.										2	31	
									Университет ИТМО Кафедра СУиИ гр. Р4135				
Н. контр.													
Утв.													

Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

n — количество звеньев робота, $n = 5$;

q_i — i -ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i -ом сочленении);

q — вектор-столбец обобщенных координат робота, $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$;

iR_j — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;

iA_j — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_iy_iz_i$ относительно СК $Ox_iy_iz_i^*$;

$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i^{**}$;

g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;

v_j^i — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО^{***} выраженной относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

* За пояснениями обратитесь к Приложению А

^{**} За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0y_0z_0$.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Инт. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	${}^i R_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$;
										${}^i A_j$ — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i^*$;
$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_j y_j z_j$ в начало $Ox_k y_k z_k$, выраженный относительно $Ox_i y_i z_i^{**}$;										
g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;										
v_j^i — линейная скорость начала $Ox_j y_j z_j$ относительно используемой в решении ИСО, ^{***} выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$;										
a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_j y_j z_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;										
<div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div></div>										

ω_j^i — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega_{j,k}^i$ — угловая скорость вращения $Ox_k y_k z_k$ относительно $Ox_j y_j z_j$, выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$;

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

z_j^i — орт $[0 \ 0 \ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

f_j^i — сила, действующая на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$;

τ_j^i — момент силы, действующий на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженный относительно $Ox_i y_i z_i$;

τ_i — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты q_i ;

m_i — масса i -го звена;

\mathcal{I}_j^i — тензор инерции j -го звена относительно $Ox_i y_i z_i$;

a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;

s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно;

$x\{a\}$ — абсцисса вектора a ; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно.

Подп. и дата		<p>m_i — масса i-го звена;</p> <p>\mathcal{I}_j^i — тензор инерции j-го звена относительно $Ox_i y_i z_i$;</p> <p>a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;</p> <p>α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;</p> <p>s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;</p> <p>s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно;</p> <p>$x\{a\}$ — абсцисса вектора a; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно.</p>				
Инв. № дубл.						
Инв. №						
Взам. инв. №						
Подп. и дата						
Инв. № подл.						
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						4

Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

- в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;
- раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;
- в разделе 4 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах апробации на реальном роботе и проч.

* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движения схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
				Лист
				5

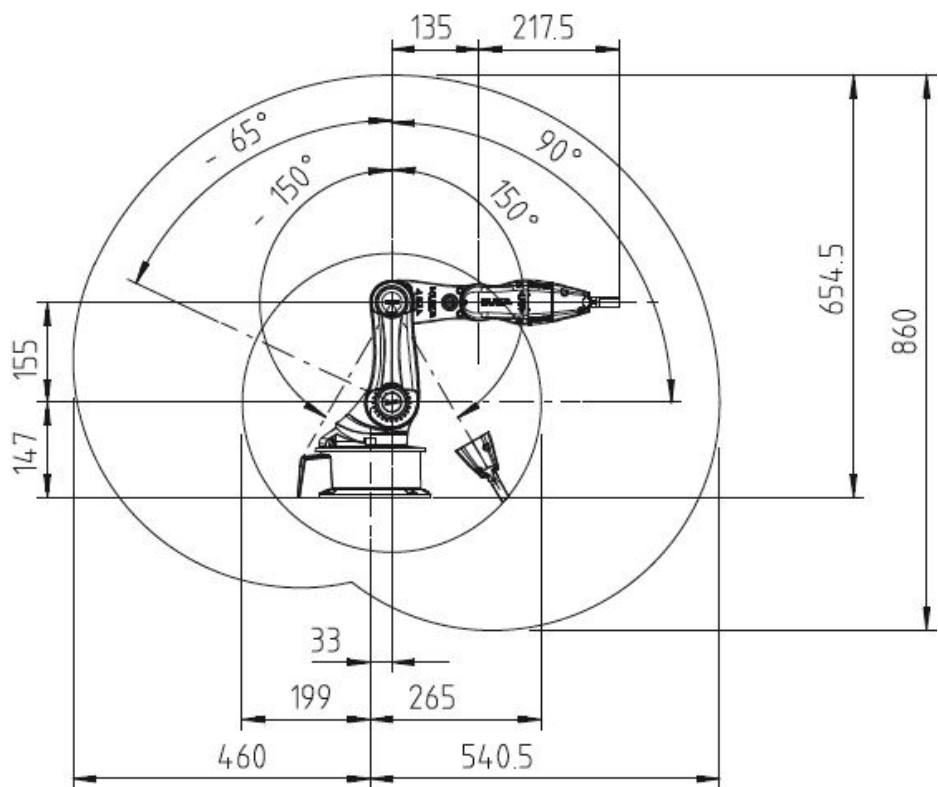
1 Описание манипулятора

Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

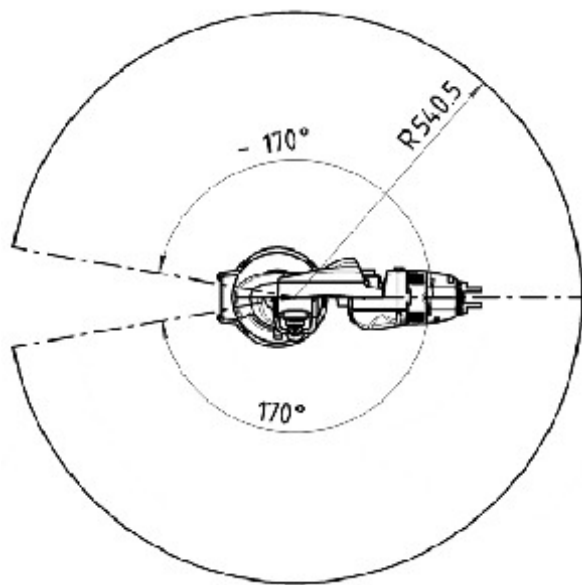
Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с ⁻¹
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В

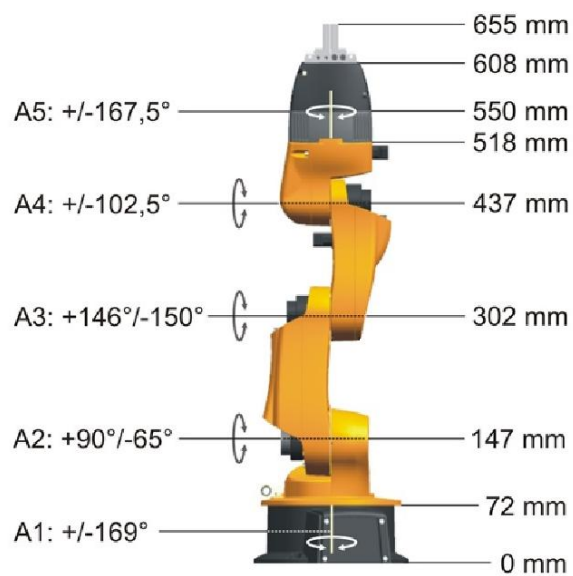
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата



а)



б)



в)

Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

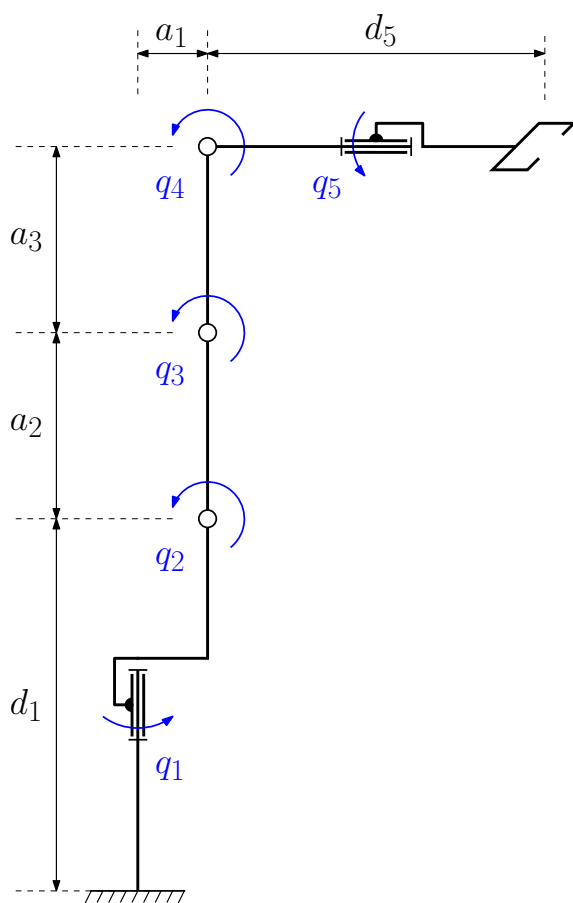
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата					
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									7

2 Математическая модель манипулятора

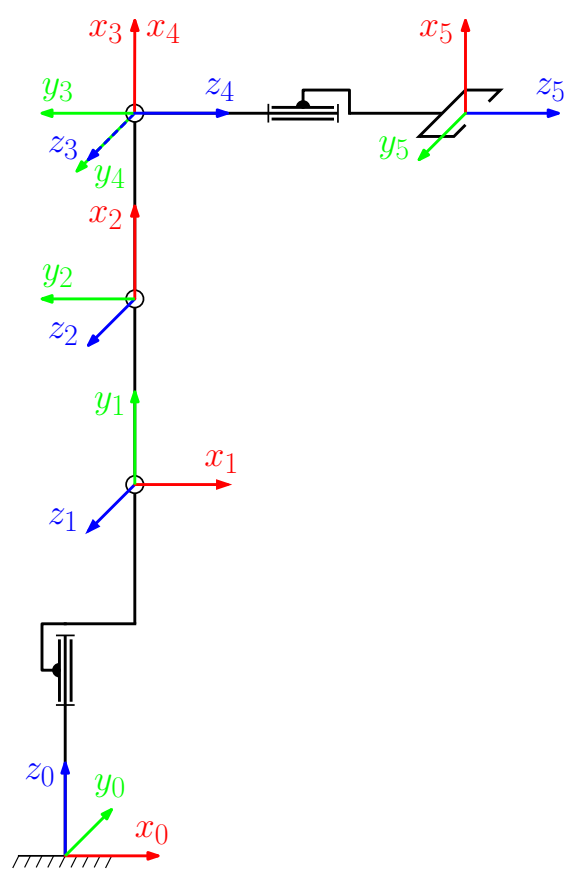
2.1 Кинематика манипулятора

2.1.1 Общие замечания

Последовательная кинематическая цепь рассматриваемого манипулятора, включающая только вращательные КП V-класса (цилиндрические шарниры), изображена на рисунке 2.1а.



а)



б)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при $q_i = 0$, $i = \overline{1, 5}$; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

Инов. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инов. № дубл.
Подп. и дата	Подп. и дата
Инов. № подл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

- 1) ось z_{i-1} направлена вдоль оси i -ой КП;
- 2) ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и пересекает ее;
- 3) ось y_i дополняет оси z_i и x_i до правой декартовой СК.

- 1) a_i — расстояния от z_{i-1} до z_i вдоль x_i ;
- 2) α_i — угла от z_{i-1} до z_i вокруг x_i ;
- 3) d_i — расстояния от x_{i-1} до x_i вдоль z_{i-1} ;
- 4) θ_i — угла от x_{i-1} до x_i вокруг z_{i-1} .

$${}^{i-1}A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i} \quad (2.1)$$

где R_{z,θ_i} — матрица поворота вокруг оси z на угол θ_i , T_{z,d_i} — матрица смещения вдоль оси z на расстояние d , T_{x,a_i} — матрица смещения вдоль оси x на расстояние a_i , R_{x,α_i} — матрица поворота вокруг оси x на угол α_i , равные

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$
$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Звено	a_i , мм	α_i , рад	d_i , мм	θ_i , рад
1	33	$\pi/2$	147	q_1
2	155	0	0	$q_2 + \pi/2$
3	135	0	0	q_3
4	0	$\pi/2$	0	q_4
5	0	0	218	q_5

Информация о смещении и повороте СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ содержится в матрице 0A_5 . Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, оста-

ется лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$${}^0A_5 = \prod_{i=1}^5 {}^{i-1}A_i(q_i). \quad (2.6)$$

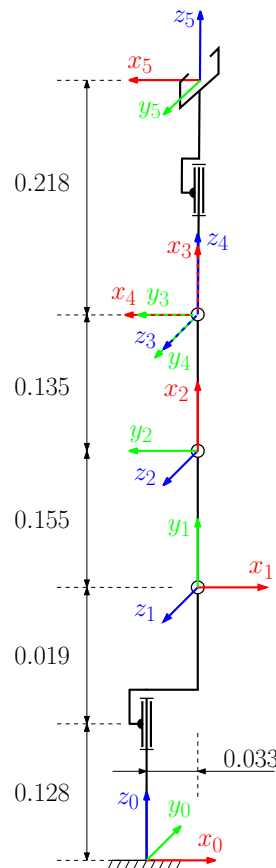


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T = [0, 0, 0, \pi/2, 0]^T$.

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$${}^0R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
Лист				
11				

а правая —

$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 c_{234} & -s_5 c_{234} & s_{234} & a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_5 s_{234} \\ c_5 s_{234} & -s_5 s_{234} & -c_{234} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_5 c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где в свою очередь

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \quad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \quad (2.13)$$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов θ_1 , θ_5 и θ_{234} дают

— равенство элементов (3, 4):

$$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14)$$

— равенство элементов (3, 1) и (3, 2):

$$\begin{cases} s_5 = r_{11} s_1 - r_{21} c_1 \\ c_5 = r_{12} s_1 - r_{22} c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \quad (2.15)$$

— равенство элементов (2, 3) и (1, 3):

$$\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13} c_1 + r_{23} s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16)$$

Подп. и дата						КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
Инв. № дубл.							13
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Инв. № подл.		Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	

– равенство элементов (3, 1) и (3, 2):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \text{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \text{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.15}$$

– равенство элементов (2, 3) и (1, 3):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \text{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \text{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.2 Динамика манипулятора

2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}^*$, где $i = \overline{1,5}$, показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$ сонаправлена с $Ox_iy_iz_i$.

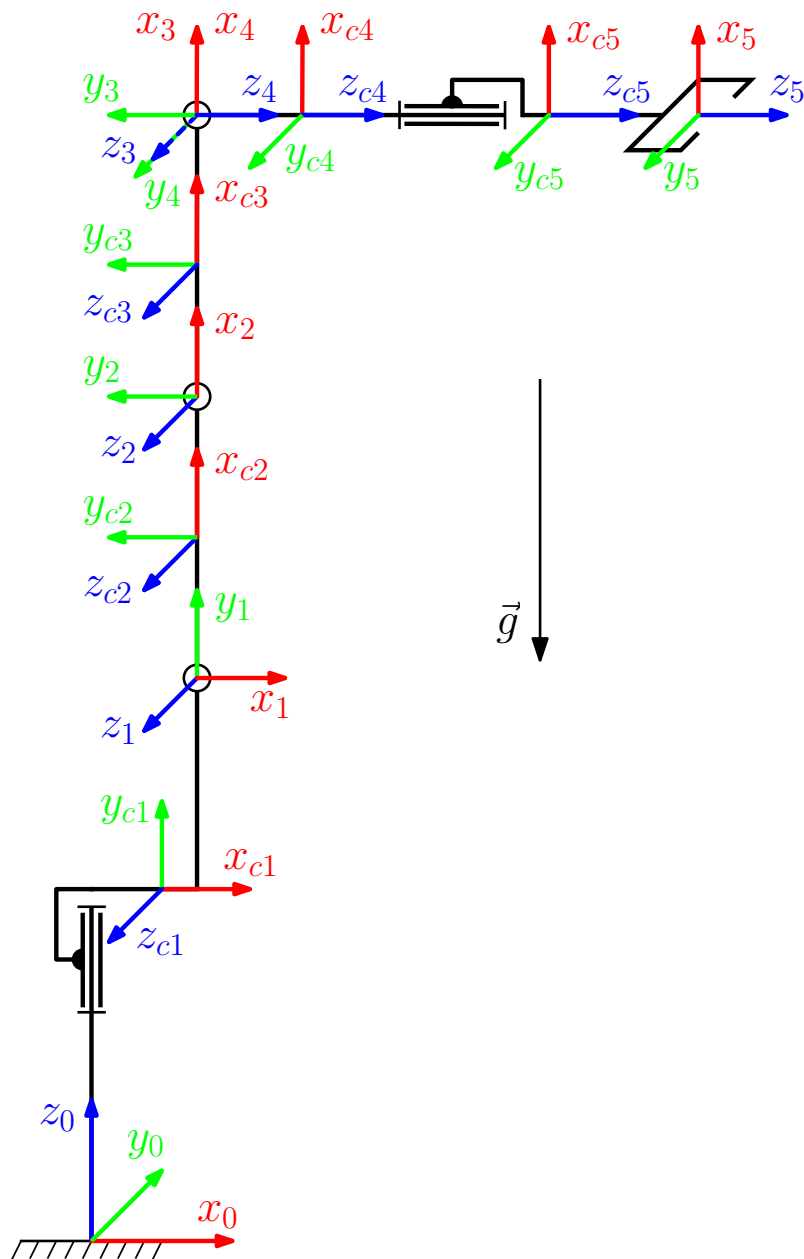


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора \vec{g} .

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

The diagram illustrates three coordinate systems and the direction of gravity. At the bottom, a fixed coordinate system (x_0, y_0, z_0) is shown with x_0 in red, y_0 in green, and z_0 in blue. A vertical rod is attached to the origin of this system. A second coordinate system (x_{c1}, y_{c1}, z_{c1}) is centered on the rod, with x_{c1} in red, y_{c1} in green, and z_{c1} in blue. A third coordinate system (x_1, y_1, z_1) is centered at the top of the rod, with x_1 in red, y_1 in green, and z_1 in blue. A gravity vector \vec{g} is shown pointing downwards from the top coordinate system.

Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора \vec{g} .

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист16

2.2.2 Вывод уравнений движения

Потенциальная энергия манипулятора

$$U = - \sum_{i=1}^5 (m_i g_i^T r_{0,ci}^i) = - \sum_{i=1}^5 (m_i g_i^T r_{0,i}^i + g_i^T (m_i r_{i,ci}^i)), \quad (2.36)$$

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$v_i^0 = J_{vi} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.37)$$

связь между линейными скоростями начал соответствующих СК и вектором \dot{q} :

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,1}^0 - r_{0,0}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,1}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$J_{v3} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,1}^0) & z_2^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,2}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}^T, \quad (2.41)$$

где $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_i^0 = J_{\omega i} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.42)$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором \dot{q} :

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Кинетическая энергия манипулятора

$$K = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i (v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i) \right). \quad (2.46)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_2^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_2^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}, \quad (2.41)$	
где $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ — нулевой вектор.						
Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой						
$\omega_i^0 = J_{\omega i} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.42)$						
связь между угловыми скоростями звеньев и вектором \dot{q} :						
$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$						
$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$						
$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$						
Кинетическая энергия манипулятора						
$K = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i (v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i) \right). \quad (2.46)$						
Инв. № подл.	Подп. и дата				КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						18
		Изм.	Лист	№ докум.		Подп.

Функция Лагранжа

$$\begin{aligned}
L &= K - U = \\
&= \sum_{i=1}^5 \left(m_i \left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right) + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i + g_i) + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i \right) = \\
&= \sum_{i=1}^5 \left(m_i \underbrace{\left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right)}_{L_{i,1}} + m_i x_{ci} \cdot \underbrace{x \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,2}} + \right. \\
&\quad + m_i y_{ci} \cdot \underbrace{y \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,3}} + m_i z_{ci} \cdot \underbrace{z \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,4}} + I_{i,xx} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (x \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,5}} + \\
&\quad + I_{i,yy} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (y \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,6}} + I_{i,zz} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (z \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,7}} + I_{i,xy} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot y \{\omega_i^i\}}_{L_{i,8}} + \\
&\quad \left. + I_{i,xz} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,9}} + I_{i,yz} \cdot \underbrace{y \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,10}} \right). \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1, 5} \quad \Rightarrow \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,10}\}) = \tau_5 \end{cases} \quad (2.49)$$

где \mathcal{L}_j — оператор, работающий в соответствии с формулой:

$$\mathcal{L}_j : \quad \mathcal{L}_j \{f\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad (2.50)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
				19

где в свою очередь $f = f(\dot{q}(t), q(t))$. Если же заметить, что

$$\mathcal{L}_j\{L_{i,k}\} = 0 \quad \text{при } j > i, \quad i, j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 10}, \quad (2.51)$$

то выражения для них упрощаются до:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=2}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ m_5 \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,1}\} + m_5 x_{c5} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,2}\} + \dots + I_{5,yz} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,10}\}) = \tau_5 \end{cases} \quad (2.52)$$

или в матричном виде

$$\tau = \xi \chi, \quad (2.53)$$

где $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_5]^T$ — вектор обобщенных моментов,

$\chi = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_5]^T \in \mathbb{R}^{50}$ — вектор параметров робота, где в свою очередь

$$\chi_i = \begin{bmatrix} m_i & m_i x_{ci} & m_i y_{ci} & m_i y_{ci} & I_{i,xx} & I_{i,yy} & I_{i,zz} & I_{i,xy} & I_{i,xz} & I_{i,yz} \end{bmatrix}^T; \quad (2.54)$$

ξ — так называемый регрессор, равный

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \dots & \xi_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \xi_{2,2} & \dots & \xi_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \xi_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

где в свою очередь $O_{1 \times 10}$ — вектор-строка, состоящая из 10 нулей, а $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ — вектор-строка, рассчитываемый по формуле

$$\xi_{j,i} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_j\{L_{i,1}\} & \mathcal{L}_j\{L_{i,2}\} & \dots & \mathcal{L}_j\{L_{i,10}\} \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

2.2.3 Учет динамики приводов

Уравнения, описывающие динамику приводов, в матричном виде имеют вид

$$I_a \ddot{q} = \tau_e - \tau, \quad (2.57)$$

Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									20

где I_a — диагональная матрица приведенных к выходным валам моментов инерции приводов, τ_e — вектор-столбец приведенных к выходным валам приводов моментов силы, развиваемых двигателями, имеющие вид:

$$I_a = \begin{bmatrix} I_{a,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{a,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_{a,5} \end{bmatrix}, \quad \tau_e = \begin{bmatrix} \tau_{e,1} \\ \tau_{e,2} \\ \vdots \\ \tau_{e,5} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Объединяя уравнения (2.53) и (2.57), получим

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi \chi, \quad (2.59)$$

а, добавив в это выражение учет моментов трения, окончательно будем иметь

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi \chi + t_f. \quad (2.60)$$

В качестве модели трения возьмем поясняемую рисунком 2.5 и описываемую следующим уравнением

$$\tau_f = f_v \dot{q} + f_c \operatorname{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}, \quad (2.61)$$

где f_v , f_c — диагональные матрицы коэффициентов вязкого и сухого трения соответственно, f_{off} — вектор-столбец сдвигов в моментах силы, имеющие вид

$$f_v = \begin{bmatrix} f_{v,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{v,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{v,5} \end{bmatrix}, \quad f_c = \begin{bmatrix} f_{c,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{c,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{c,5} \end{bmatrix}, \quad f_{\text{off}} = \begin{bmatrix} f_{\text{off},1} \\ f_{\text{off},2} \\ \vdots \\ f_{\text{off},5} \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Подставляя (2.61) в (2.60), получим

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi \chi + f_v \dot{q} + f_c \operatorname{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}. \quad (2.63)$$

Если ввести в рассмотрение новые матрицы $\bar{\chi} = [\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_5]^T$ и

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{1,1} & \bar{\xi}_{1,2} & \cdots & \bar{\xi}_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \bar{\xi}_{2,2} & \cdots & \bar{\xi}_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \bar{\xi}_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										21
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						Копировал
										Формат А4

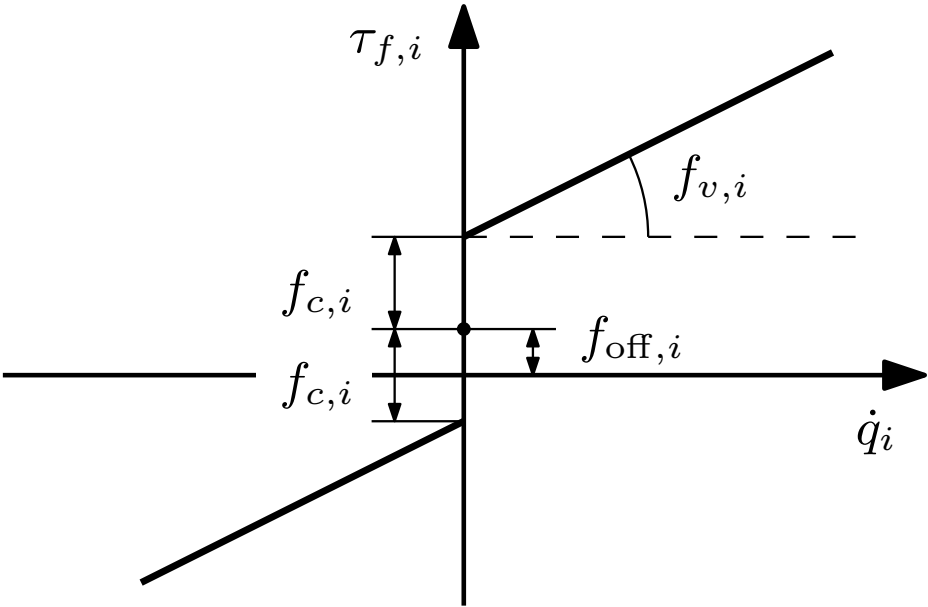


Рисунок 2.5 – График, поясняющий выбранную модель трения.

определяемые выражениями

$$\bar{\chi}_i = \begin{bmatrix} \chi_i & I_{a,i} & f_{v,i} & f_{c,i} & f_{\text{off},i} \end{bmatrix}^T, \tag{2.65}$$

$$\bar{\xi}_{j,i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & i \neq j \\ \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & \ddot{q} & \dot{q} & \text{sign}(\dot{q}) & 1 \end{bmatrix}, & i = j \end{cases} \tag{2.66}$$

то данное выражение может быть записано в следующем матричном виде:

$$\tau_e = \bar{\xi} \bar{\chi}. \tag{2.67}$$

Инов. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инов. № дубл.
Подп. и дата	
Инов. № подл.	

3 Идентификация параметров манипулятора

3.1 Описание метода

Для определения неизвестных значений параметров робота, составляющих вектор $\bar{\chi}$, воспользуемся методом наименьших квадратов. Алгоритм необходимых действий в таком случае будет следующим:

- а) с помощью поставляемого производителем робота ПО* дать манипулятору команды на последовательное достижение N произвольных конфигураций, по возможности охватывающих всю его рабочую область; во время его работы снять и записать следующие показания:

$q(t_1)$	$\dot{q}(t_1)$	$\ddot{q}(t_1)$	$\tau_e(t_1)$
$q(t_2)$	$\dot{q}(t_2)$	$\ddot{q}(t_2)$	$\tau_e(t_2)$
$q(t_3)$	$\dot{q}(t_3)$	$\ddot{q}(t_3)$	$\tau_e(t_3)$
\dots	\dots	\dots	\dots
$q(t_k)$	$\dot{q}(t_k)$	$\ddot{q}(t_k)$	$\tau_e(t_k)$

где $t_k > t_3 > t_2 > t_1$;

- б) используя полученные данные, составить матрицы

$$\Xi = \begin{bmatrix} \bar{\xi}(\ddot{q}(t_1), \dot{q}(t_1), q(t_1)) \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_2), \dot{q}(t_2), q(t_2)) \\ \dots \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_k), \dot{q}(t_k), q(t_k)) \end{bmatrix}, \quad T_e = \begin{bmatrix} \tau_e(t_1) \\ \tau_e(t_2) \\ \dots \\ \tau_e(t_k) \end{bmatrix}; \quad (3.1)$$

- в) рассчитать оценку $\hat{\chi}$ вектора $\bar{\chi}$ по формуле:

$$\hat{\chi} = (\Xi^T \cdot \Xi)^{-1} \cdot \Xi^T \cdot T_e; \quad (3.2)$$

* У Youbot такое «стандартное» ПО осуществляет управление углами в сочленениях робота с помощью ПИД-регуляторов.

Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									23

- г) дать роботу команды на достижение других N позиций и при этом получить те же самые данные;
- д) используя найденную в п. в) оценку $\hat{\chi}$ и снятые в п. г) данные, рассчитать по формуле (2.67) значения для τ_e ; сравнить их с полученными в п. г) и сделать выводы об успешности идентификации.

3.2 Результаты

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										24
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						Копировал
										Формат А4

4 Синтез систем управления

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
	25

Заключение

Текст заключения

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Список использованных источников

- 1 KUKA YUBOT. — URL: <http://www.technomatix.ru/kuka-youbot> (дата обращения: 08.03.2017).
- 2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										27
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Приложение А
(рекомендуемое)

Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования ${}^i A_j$ называется матрица размера 4×4 , служащая для описания смещения и поворота СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$ и имеющая следующую структуру:

$${}^i A_j = \begin{bmatrix} {}^i R_j & r_{i,j}^i \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где $O_{1 \times 3} = [0 \ 0 \ 0]$.

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки C относительно $Ox_0 y_0 z_0$ при известных векторах r_C^2 , $r_{0,1}^0$ и $r_{1,2}^1$ и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r_C^0 = {}^0 R_1 r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ r_C^1 = {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \end{cases} \Rightarrow r_C^0 = {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \quad (\text{A.2})$$

где r_C^0 , r_C^1 , r_C^2 — радиус-векторы точки C в $Ox_0 y_0 z_0$, $Ox_1 y_1 z_1$ и $Ox_2 y_2 z_2$ соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами ${}^0 A_1$ и ${}^1 A_2$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										28
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [1].

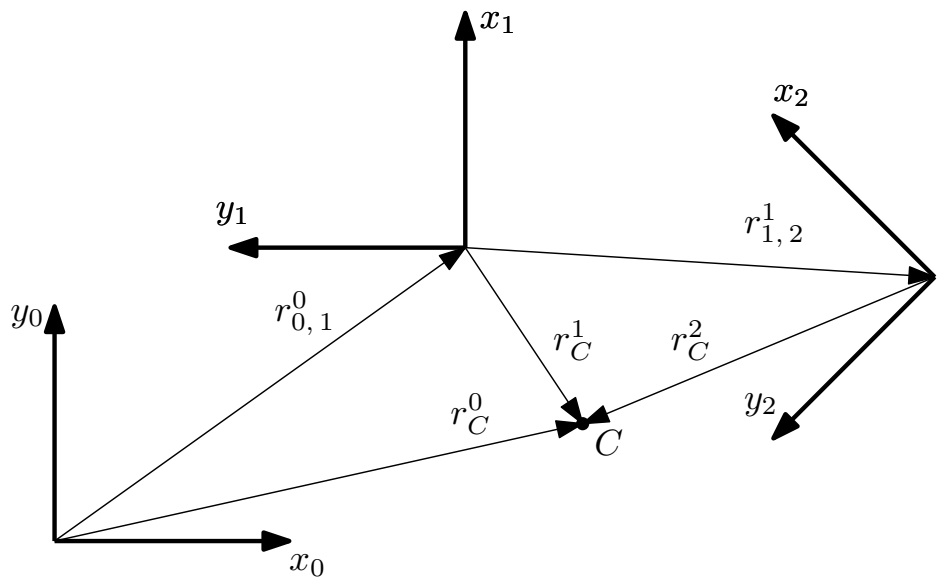


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №				Инв. № дубл.				Подп. и дата					
Изм.	Лист	№ докум.			Подп.			Дата			КСУИ.101.4135.001 ПЗ						Лист	
																	29	

Приложение Б

(рекомендуемое)

Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором \vec{V} . В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

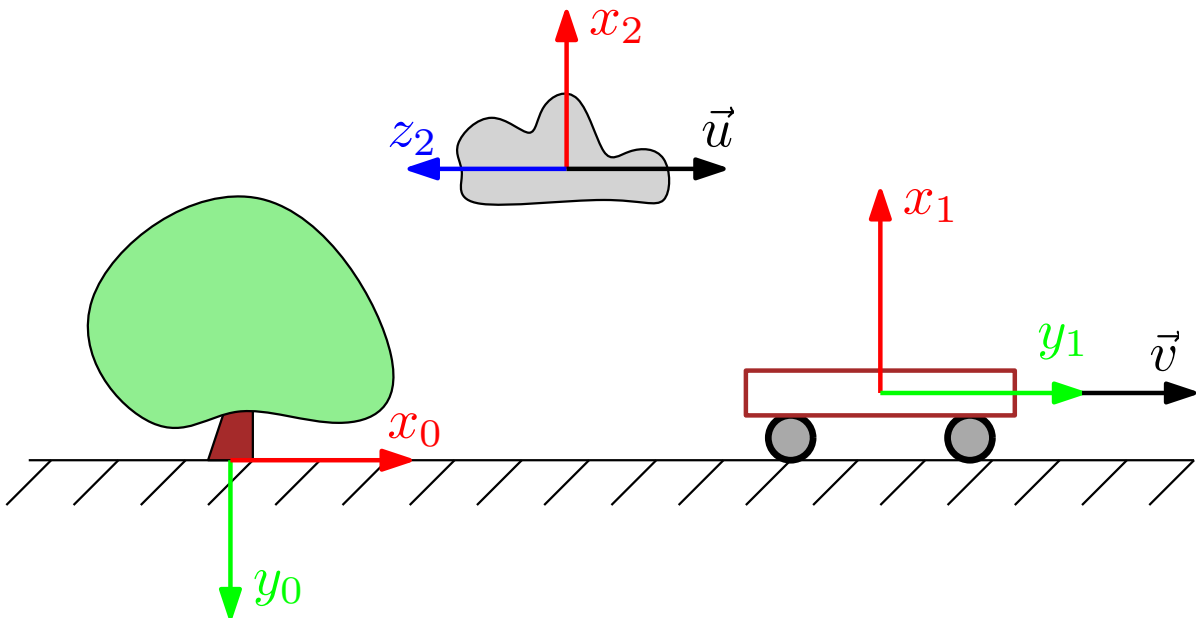


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Таблица Б.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора V	Значение V^T
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата