

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1
«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»
по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. Р4135
Фамилия И.О.,
Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,
должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Обозначения и сокращения	3
Введение	5
1 Описание манипулятора	6
2 Математическая модель манипулятора	8
2.1 Кинематика манипулятора	8
2.1.1 Общие замечания	8
2.1.2 Прямая задача кинематики	10
2.1.3 Обратная задача кинематики	12
2.2 Динамика манипулятора	16
2.2.1 Общие замечания	16
2.2.2 Вывод уравнений движения	18
2.2.3 Учет динамики приводов	20
2.2.4 Альтернативная матричная форма записи	22
3 Идентификация параметров манипулятора	25
3.1 Описание метода	25
3.2 Результаты	26
4 Синтез систем управления	27
Заключение	28
Список использованных источников	29
Приложение А Матрицы однородного преобразования	30
Приложение Б Терминология относительных измерений	32

Подп. и дата							
Инв. № дубл.							
Взам. инв. №							
Подп. и дата							
Инв. № подл.	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		
	Разраб.	Антонов, Артемов					
	Пров.	Котельников Ю.П.					
	Н. контр.						
	Утв.						
<p align="center">КСУИ.101.4135.001 ПЗ</p> <p align="center">Разработка системы управления для манипулятора Kuka Youbot Пояснительная записка</p>					Лит.	Лист	Листов
						2	33
					<p align="center">Университет ИТМО Кафедра СУиИ гр. Р4135</p>		

Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

n — количество звеньев робота, $n = 5$;

q_i — i -ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i -ом сочленении);

q — вектор-столбец обобщенных координат робота, $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$;

iR_j — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;

iA_j — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_iy_iz_i$ относительно СК $Ox_iy_iz_i^*$;

$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i^{**}$;

g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;

v_j^i — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО^{***} выраженной относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

* За пояснениями обратитесь к Приложению А

^{**} За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0y_0z_0$.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	${}^i R_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$;
										${}^i A_j$ — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i^*$;
$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_j y_j z_j$ в начало $Ox_k y_k z_k$, выраженный относительно $Ox_i y_i z_i^{**}$;										
g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;										
v_j^i — линейная скорость начала $Ox_j y_j z_j$ относительно используемой в решении ИСО, ^{***} выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$;										
a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_j y_j z_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;										
<div><div></div><div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div><div></div><div></div></div>										

ω_j^i — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega_{j,k}^i$ — угловая скорость вращения $Ox_k y_k z_k$ относительно $Ox_j y_j z_j$, выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$;

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

z_j^i — орт $[0 \ 0 \ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

f_j^i — сила, действующая на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j-1)$ -го звена (тела), выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$;

τ_j^i — момент силы, действующий на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженный относительно $Ox_i y_i z_i$;

τ_i — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты q_i ;

m_i — масса i -го звена;

\mathcal{I}_j^i — тензор инерции j -го звена относительно $Ox_i y_i z_i$;

a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;

s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно;

$x\{a\}$ — абсцисса вектора a ; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно;

$A^{\{i\}}$ — i -ая строка матрицы A .

Изнв. № подл.	Подл. и дата	Взм. инв. №	Изнв. № дубл.	Подл. и дата	m_i — масса i -го звена;
					\mathcal{I}_j^i — тензор инерции j -го звена относительно $Ox_iy_iz_i$;
Изнв. № подл.	Подл. и дата	Взм. инв. №	Изнв. № дубл.	Подл. и дата	a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;
					α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;
Изнв. № подл.	Подл. и дата	Взм. инв. №	Изнв. № дубл.	Подл. и дата	s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;
					s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно;
Изнв. № подл.	Подл. и дата	Взм. инв. №	Изнв. № дубл.	Подл. и дата	$x\{a\}$ — абсцисса вектора a ; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно;
					$A^{\{i\}}$ — i -ая строка матрицы A .

Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

- в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;
- раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;
- в разделе 4 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах апробации на реальном роботе и проч.

* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движения схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
				Лист
				5

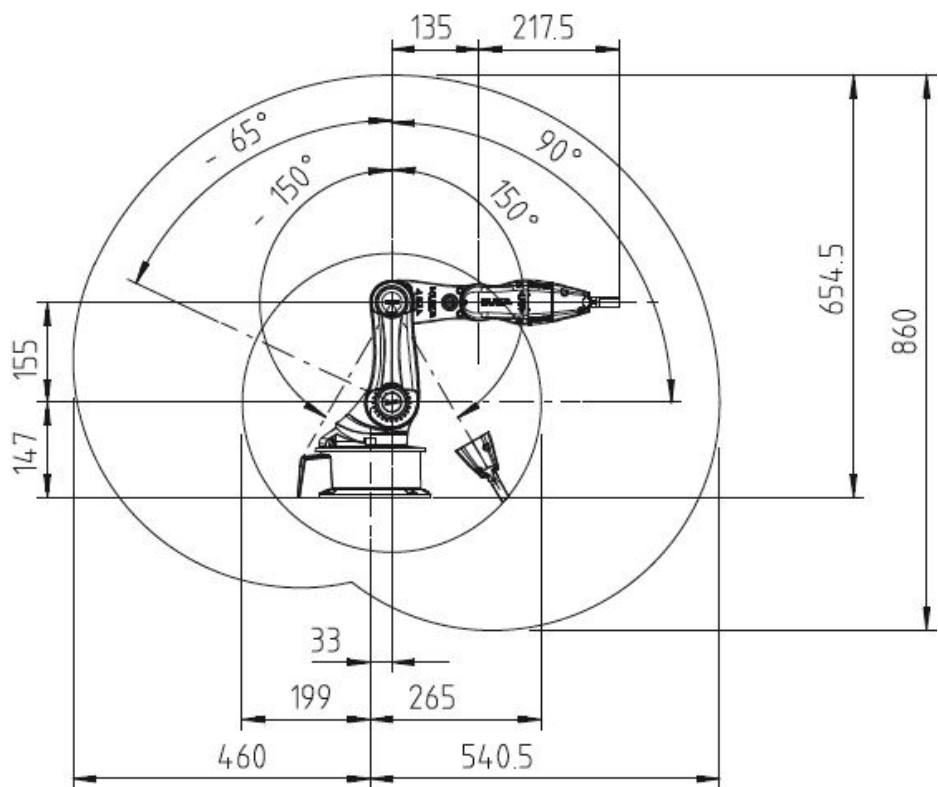
1 Описание манипулятора

Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

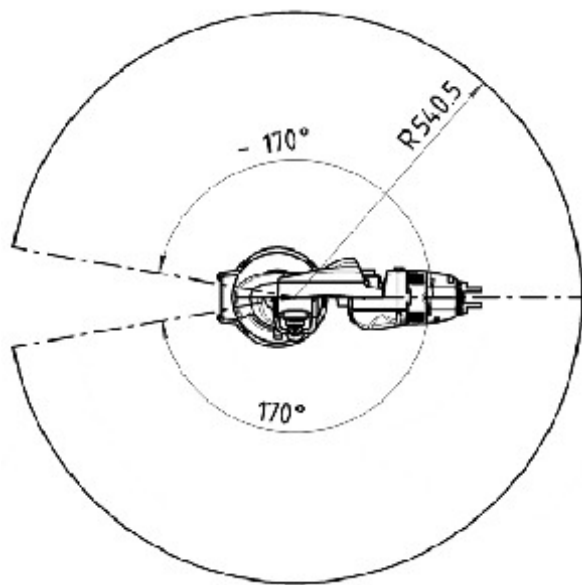
Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с ⁻¹
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В

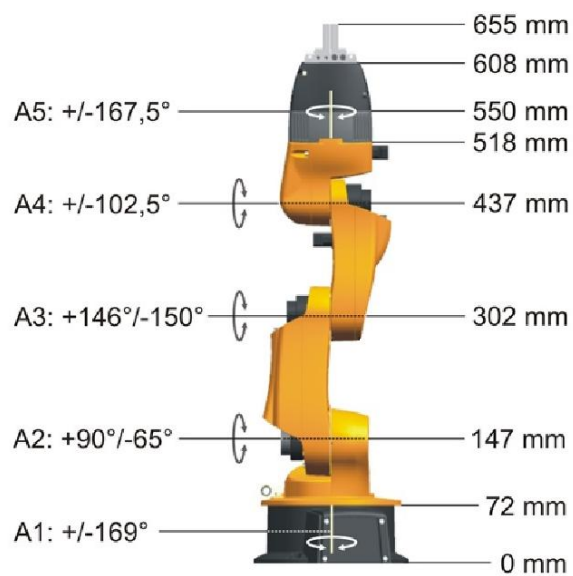
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата



а)



б)



в)

Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

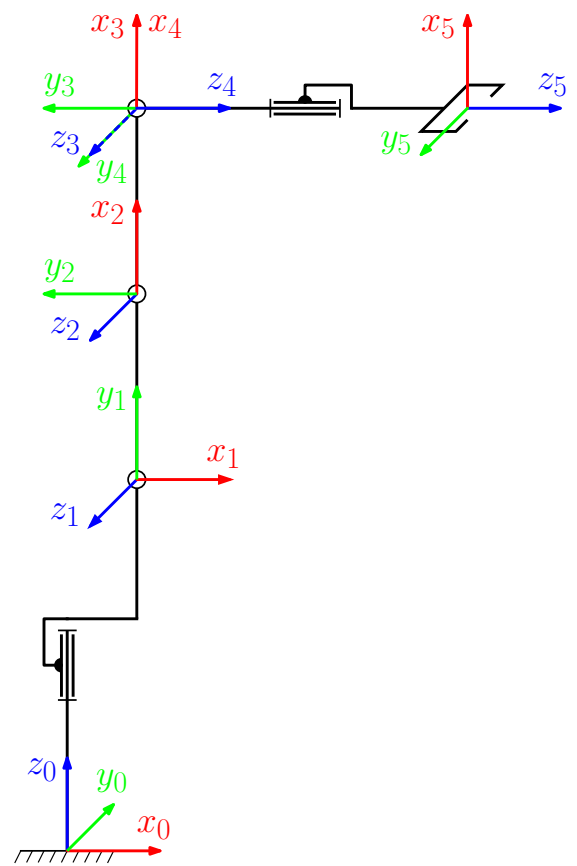
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

2.1.1 Общие замечания

The diagram illustrates a 5-DOF robot arm. It starts with a fixed base at the bottom left. A vertical link of length a_1 connects the base to a revolute joint q_1 . A horizontal link of length a_2 extends from joint q_1 to a second revolute joint q_2 . From joint q_2 , a vertical link of length a_3 goes up to a third revolute joint q_3 . A horizontal link of length a_4 extends from joint q_3 to a fourth revolute joint q_4 . Finally, a horizontal link of length a_5 connects joint q_4 to a prismatic joint q_5 , which is represented by a slider on a horizontal track. All joints are indicated by blue curved arrows showing their degrees of freedom.

a)



6)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при $q_i = 0$, $i = \overline{1, 5}$; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$
$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Звено	a_i , мм	α_i , рад	d_i , мм	θ_i , рад
1	33	$\pi/2$	147	q_1
2	155	0	0	$q_2 + \pi/2$
3	135	0	0	q_3
4	0	$\pi/2$	0	q_4
5	0	0	218	q_5

Информация о смещении и повороте СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ содержится в матрице 0A_5 . Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, оста-

ется лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$${}^0A_5 = \prod_{i=1}^5 {}^{i-1}A_i(q_i). \quad (2.6)$$

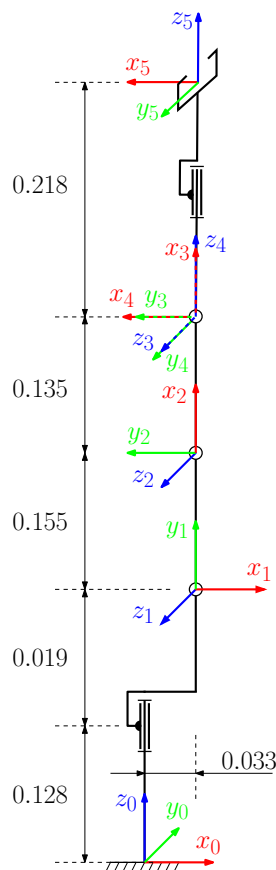


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T = [0, 0, 0, \pi/2, 0]^T$.

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$${}^0R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
Лист				
11				

а правая —

$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 c_{234} & -s_5 c_{234} & s_{234} & a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_5 s_{234} \\ c_5 s_{234} & -s_5 s_{234} & -c_{234} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_5 c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где в свою очередь

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \quad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \quad (2.13)$$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов θ_1 , θ_5 и θ_{234} дают

– равенство элементов (3, 4):

$$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14)$$

– равенство элементов (3, 1) и (3, 2):

$$\begin{cases} s_5 = r_{11} s_1 - r_{21} c_1 \\ c_5 = r_{12} s_1 - r_{22} c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \quad (2.15)$$

– равенство элементов (2, 3) и (1, 3):

$$\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13} c_1 + r_{23} s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										13
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

$${}^1A_4 = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_x s_1 - p_y c_1 - d_5 (r_{13} s_1 - r_{23} c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$
$$p_x s_1 - p_y c_1 - d_5(r_{13}s_1 - r_{23}c_1) = 0. \quad (2.18)$$
$$r_{1,4}^1 = \begin{bmatrix} (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Выпишем, пользуясь теоремой косинусов, выражение для $\cos \theta_3$ (его зависимость от θ_1 обуславливается зависимостью от этого угла вектора $r_{1,4}^1$):

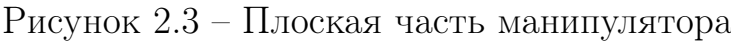
$$c_3(\theta_1) = \frac{(r_{1,4}^1)^T \cdot r_{1,4}^1 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \quad (2.20)$$

$$\theta_3^{l,II} = \mp \operatorname{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^I)}, c_3(\theta_1^I)) \quad (2.21)$$

$$\theta_3^{\text{III,IV}} = \mp \text{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\text{II}})}, c_3(\theta_1^{\text{II}})) \quad (2.22)$$

Как видно из рисунка 2.3, $\theta_2 = \varphi + \beta$ при $\theta_3^{I,III} < 0$ и $\theta_2 = \varphi - \beta$ при $\theta_3^{II,IV} > 0$. Следовательно, принимая во внимание то, что

$$\varphi(\theta_1) = \text{atan2}(y_r, x_r), \quad \beta(\theta_3) = \text{atan2}(a_3 \sin |\theta_3|, a_2 + a_3 \cos |\theta_3|), \quad (2.23)$$


$$\begin{aligned}\theta_2^{\text{I}} &= \varphi(\theta_1^{\text{I}}) + \beta(\theta_3^{\text{I}}), & \theta_2^{\text{II}} &= \varphi(\theta_1^{\text{I}}) - \beta(\theta_3^{\text{II}}), & (2.24) \\ \theta_2^{\text{III}} &= \varphi(\theta_1^{\text{II}}) + \beta(\theta_3^{\text{III}}), & \theta_2^{\text{IV}} &= \varphi(\theta_1^{\text{II}}) - \beta(\theta_3^{\text{IV}}). & (2.25)\end{aligned}$$
$$\theta_4^{\text{I,II}} = \theta_{234}^{\text{I}} - \theta_2^{\text{I,II}} - \theta_3^{\text{I,II}}, \quad \theta_4^{\text{III,IV}} = \theta_{234}^{\text{II}} - \theta_2^{\text{III,IV}} - \theta_3^{\text{III,IV}}. \quad (2.26)$$
$$q^I = \begin{bmatrix} \theta_1^I & \theta_2^I - \frac{\pi}{2} & \theta_3^I & \theta_4^I & \theta_5^I \end{bmatrix}^T, \quad q^{II} = \begin{bmatrix} \theta_1^{II} & \theta_2^{II} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{II} & \theta_4^{II} & \theta_5^I \end{bmatrix}^T, \quad (2.27)$$
$$q^{\text{III}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{III}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{III}} & \theta_4^{\text{III}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T, \quad q^{\text{IV}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{IV}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{IV}} & \theta_4^{\text{IV}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T. \quad (2.28)$$

2.2 Динамика манипулятора

2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}^*$, где $i = \overline{1,5}$, показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$ сонаправлена с $Ox_iy_iz_i$.

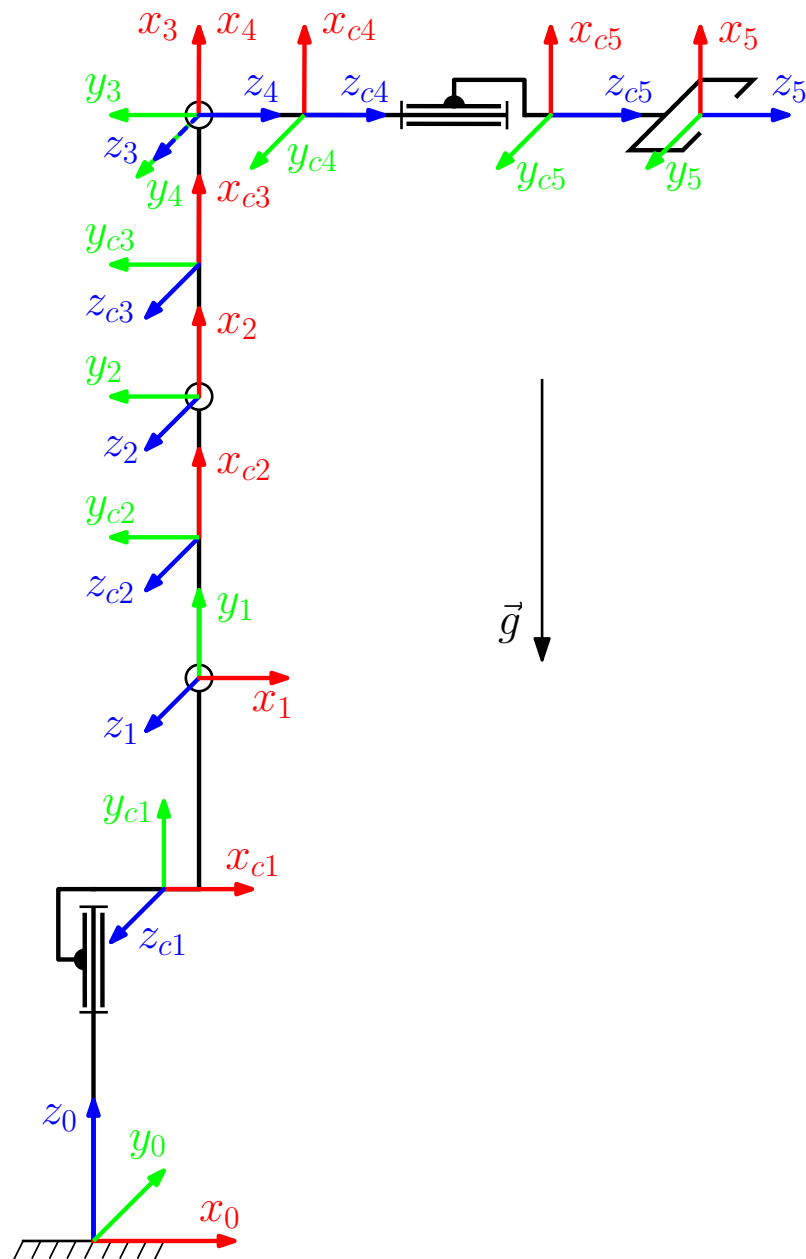


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора \vec{g} .

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
Копировал				
Формат А4				
Лист				
16				

2.2.2 Вывод уравнений движения

Потенциальная энергия манипулятора

$$U = - \sum_{i=1}^5 (m_i g_i^T r_{0,ci}^i) = - \sum_{i=1}^5 (m_i g_i^T r_{0,i}^i + g_i^T (m_i r_{i,ci}^i)), \quad (2.36)$$

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$v_i^0 = J_{vi} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.37)$$

связь между линейными скоростями начал соответствующих СК и вектором \dot{q} :

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,1}^0 - r_{0,0}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,1}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$J_{v3} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,1}^0) & z_2^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,2}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}^T, \quad (2.41)$$

где $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_i^0 = J_{\omega i} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.42)$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором \dot{q} :

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Кинетическая энергия манипулятора

$$K = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i (v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i) \right). \quad (2.46)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_2^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_2^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}, \quad (2.41)$		
где $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ — нулевой вектор.							
Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой							
$\omega_i^0 = J_{\omega i} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.42)$							
связь между угловыми скоростями звеньев и вектором \dot{q} :							
$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$							
$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$							
$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$							
Кинетическая энергия манипулятора							
$K = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i (v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i) \right). \quad (2.46)$							
Инв. № подл.	Подп. и дата					Лист	
							18
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ		

Функция Лагранжа

$$\begin{aligned}
L &= K - U = \\
&= \sum_{i=1}^5 \left(m_i \left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right) + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i + g_i) + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i \right) = \\
&= \sum_{i=1}^5 \left(m_i \underbrace{\left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right)}_{L_{i,1}} + m_i x_{ci} \cdot \underbrace{x \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,2}} + \right. \\
&\quad + m_i y_{ci} \cdot \underbrace{y \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,3}} + m_i z_{ci} \cdot \underbrace{z \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,4}} + I_{i,xx} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (x \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,5}} + \\
&\quad + I_{i,yy} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (y \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,6}} + I_{i,zz} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (z \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,7}} + I_{i,xy} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot y \{\omega_i^i\}}_{L_{i,8}} + \\
&\quad \left. + I_{i,xz} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,9}} + I_{i,yz} \cdot \underbrace{y \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,10}} \right). \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1, 5} \quad \Rightarrow \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,10}\}) = \tau_5 \end{cases} \quad (2.49)$$

где \mathcal{L}_j — оператор, работающий в соответствии с формулой:

$$\mathcal{L}_j : \quad \mathcal{L}_j \{f\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad (2.50)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
				19

где в свою очередь $f = f(\dot{q}(t), q(t))$. Если же заметить, что

$$\mathcal{L}_j\{L_{i,k}\} = 0 \quad \text{при } j > i, \quad i, j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 10}, \quad (2.51)$$

то выражения для них упрощаются до:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=2}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ m_5 \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,1}\} + m_5 x_{c5} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,2}\} + \dots + I_{5,yz} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,10}\}) = \tau_5 \end{cases} \quad (2.52)$$

или в матричном виде

$$\tau = \xi \chi, \quad (2.53)$$

где $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_5]^T$ — вектор обобщенных моментов,

$\chi = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_5]^T \in \mathbb{R}^{50}$ — вектор параметров робота, где в свою очередь

$$\chi_i = \begin{bmatrix} m_i & m_i x_{ci} & m_i y_{ci} & m_i y_{ci} & I_{i,xx} & I_{i,yy} & I_{i,zz} & I_{i,xy} & I_{i,xz} & I_{i,yz} \end{bmatrix}^T; \quad (2.54)$$

ξ — так называемый регрессор, равный

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \dots & \xi_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \xi_{2,2} & \dots & \xi_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \xi_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

где в свою очередь $O_{1 \times 10}$ — вектор-строка, состоящая из 10 нулей, а $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ — вектор-строка, рассчитываемый по формуле

$$\xi_{j,i} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_j\{L_{i,1}\} & \mathcal{L}_j\{L_{i,2}\} & \dots & \mathcal{L}_j\{L_{i,10}\} \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

2.2.3 Учет динамики приводов

Уравнения, описывающие динамику приводов, в матричном виде имеют вид

$$I_a \ddot{q} = \tau_e - \tau, \quad (2.57)$$

Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									20

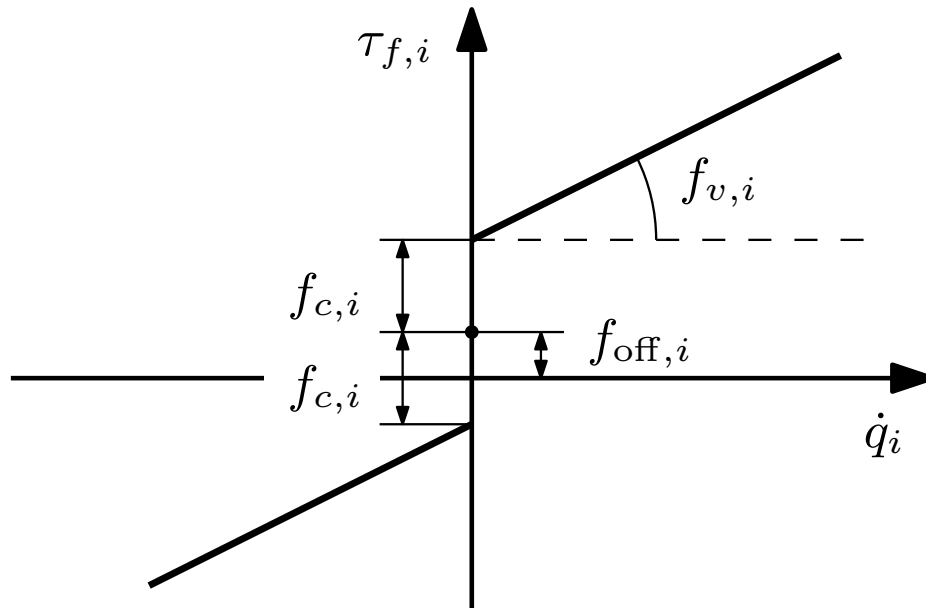


Рисунок 2.5 – График, поясняющий выбранную модель трения.

определяемые выражениями

$$\bar{\chi}_i = \begin{bmatrix} \chi_i & I_{a,i} & f_{v,i} & f_{c,i} & f_{\text{off},i} \end{bmatrix}^T, \quad (2.65)$$

$$\bar{\xi}_{j,i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & i \neq j \\ \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & \ddot{q} & \dot{q} & \text{sign}(\dot{q}) & 1 \end{bmatrix}, & i = j \end{cases} \quad (2.66)$$

то данное выражение может быть записано в следующем матричном виде:

$$\tau_e = \bar{\xi} \bar{\chi}. \quad (2.67)$$

2.2.4 Альтернативная матричная форма записи

Выражение (2.53) может быть переписано в форме

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q), \quad (2.68)$$

где $D(q)$ — матрица инерции, $C(q, \dot{q})$ — матрица центробежных и Кориолисовых сил, $G(q)$ — вектор гравитации. С учетом этого факта и уравнения (2.60) можно получить, что

$$\tau_e = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \quad (2.69)$$

где $M(q) = I_a + D(q)$.

Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									22

$$= \begin{bmatrix} -\dot{q}^T (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} + \dot{q}^T (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \\ \dot{q}^T (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} - \dot{q}^T (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \\ -\dot{q}^T (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} + \dot{q}^T (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T J_x \dot{q} \\ \dot{q}^T J_y \dot{q} \\ \dot{q}^T J_z \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

где

$$J_x = -(J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} + (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \quad (2.76)$$

$$J_y = (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} - (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \quad (2.77)$$

$$J_z = -(J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} + (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}}. \quad (2.78)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ			Лист
								24

3 Идентификация параметров манипулятора

3.1 Описание метода

Для определения неизвестных значений параметров робота, составляющих вектор $\bar{\chi}$, воспользуемся методом наименьших квадратов. Алгоритм необходимых действий в таком случае будет следующим:

- а) с помощью поставляемого производителем робота ПО* дать манипулятору команды на последовательное достижение N произвольных конфигураций, по возможности охватывающих всю его рабочую область; во время его работы снять и записать следующие показания:

$q(t_1)$	$\dot{q}(t_1)$	$\ddot{q}(t_1)$	$\tau_e(t_1)$
$q(t_2)$	$\dot{q}(t_2)$	$\ddot{q}(t_2)$	$\tau_e(t_2)$
$q(t_3)$	$\dot{q}(t_3)$	$\ddot{q}(t_3)$	$\tau_e(t_3)$
\dots	\dots	\dots	\dots
$q(t_k)$	$\dot{q}(t_k)$	$\ddot{q}(t_k)$	$\tau_e(t_k)$

где $t_k > t_3 > t_2 > t_1$;

- б) используя полученные данные, составить матрицы

$$\Xi = \begin{bmatrix} \bar{\xi}(\ddot{q}(t_1), \dot{q}(t_1), q(t_1)) \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_2), \dot{q}(t_2), q(t_2)) \\ \dots \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_k), \dot{q}(t_k), q(t_k)) \end{bmatrix}, \quad T_e = \begin{bmatrix} \tau_e(t_1) \\ \tau_e(t_2) \\ \dots \\ \tau_e(t_k) \end{bmatrix}; \quad (3.1)$$

- в) рассчитать оценку $\hat{\chi}$ вектора $\bar{\chi}$ по формуле:

$$\hat{\chi} = (\Xi^T \cdot \Xi)^{-1} \cdot \Xi^T \cdot T_e; \quad (3.2)$$

* У Youbot такое «стандартное» ПО осуществляет управление углами в сочленениях робота с помощью ПИД-регуляторов.

Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									25

- г) дать роботу команды на достижение других N позиций и при этом получить те же самые данные;
- д) используя найденную в п. в) оценку $\hat{\chi}$ и снятые в п. г) данные, рассчитать по формуле (2.67) значения для τ_e ; сравнить их с полученными в п. г) и сделать выводы об успешности идентификации.

3.2 Результаты

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										26
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						Копировал
										Формат А4

4 Синтез систем управления

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						27

Заключение

Текст заключения

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						28

Список использованных источников

- 1 KUKA YUBOT. — URL: <http://www.technomatix.ru/kuka-youbot> (дата обращения: 08.03.2017).
- 2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										29
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Приложение А
(рекомендуемое)

Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования ${}^i A_j$ называется матрица размера 4×4 , служащая для описания смещения и поворота СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$ и имеющая следующую структуру:

$${}^i A_j = \begin{bmatrix} {}^i R_j & r_{i,j}^i \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где $O_{1 \times 3} = [0 \ 0 \ 0]$.

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки C относительно $Ox_0 y_0 z_0$ при известных векторах r_C^2 , $r_{0,1}^0$ и $r_{1,2}^1$ и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r_C^0 = {}^0 R_1 r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ r_C^1 = {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \end{cases} \Rightarrow r_C^0 = {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \quad (\text{A.2})$$

где r_C^0 , r_C^1 , r_C^2 — радиус-векторы точки C в $Ox_0 y_0 z_0$, $Ox_1 y_1 z_1$ и $Ox_2 y_2 z_2$ соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами ${}^0 A_1$ и ${}^1 A_2$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										30
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [1].

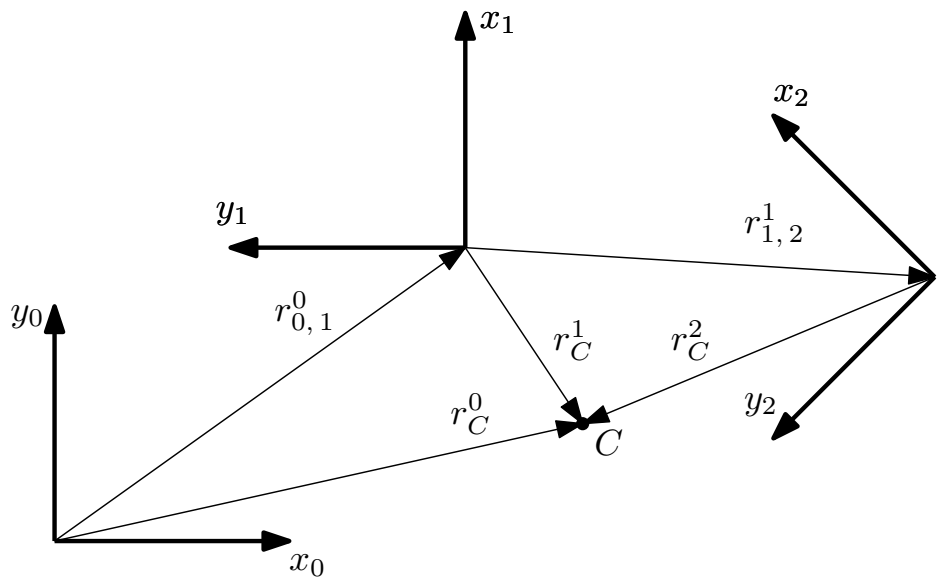


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						
Инв. № инв.	Подп. и дата				Инв. № дубл.	Подп. и дата							
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ		Лист						
							31						

Приложение Б
(рекомендуемое)

Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором \vec{V} . В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

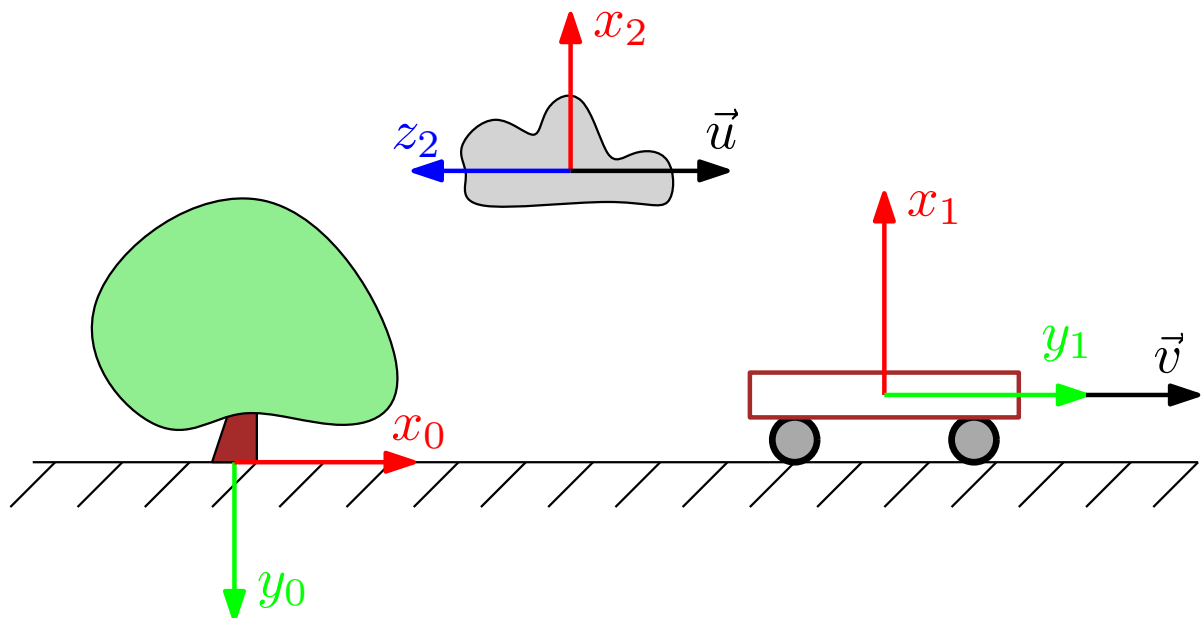


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата				КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист				
	Взам. инв. №					32				
	Инв. № дубл.									
	Подп. и дата									
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Таблица Б.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора V	Значение V^T
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата