Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1

«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»

по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили:	студенты гр. P4135
	Фамилия И.О.,
	Фамилия И.О.
Преподаватель:	Фамилия И.О.,
	должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

n — количество звеньев робота, $n = 5$;

q_i — i-ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i-ом сочленении);

q — вектор-столбец обобщенных координат робота, $q = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5]^T$;

${}^iR_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;

${}^iA_j$ — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$*;

$r^i_{j,k}$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$**;

g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

v^i_j — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО,*** выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

a^i_j — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

* За пояснениями обратитесь к Приложению А

** За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0y_0z_0$.

Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

Копировал Формат А4

ω_j^i — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega_{j,k}^i$ — угловая скорость вращения $Ox_ky_kz_k$ относительно $Ox_jy_jz_j$, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

z_j^i — орт $[0\ 0\ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

f_j^i — сила, действующая на j-ое звено (тело) механизма со стороны $(j-1)$-го звена (тела), выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_j^i — момент силы, действующий на j-ое звено (тело) механизма со стороны $(j-1)$-го звена (тела), выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_i — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты q_i;

m_i — масса i-го звена;

$\mathcal{I}_j^i$ — тензор инерции j-го звена относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;

s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно;

$x\{a\}$ — абсцисса вектора a; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно;

$A^{\{i\}}$ — i-ая строка матрицы A.

Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

– в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;

– раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;

– в разделе 4 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах аппробации на реальном роботе и проч.

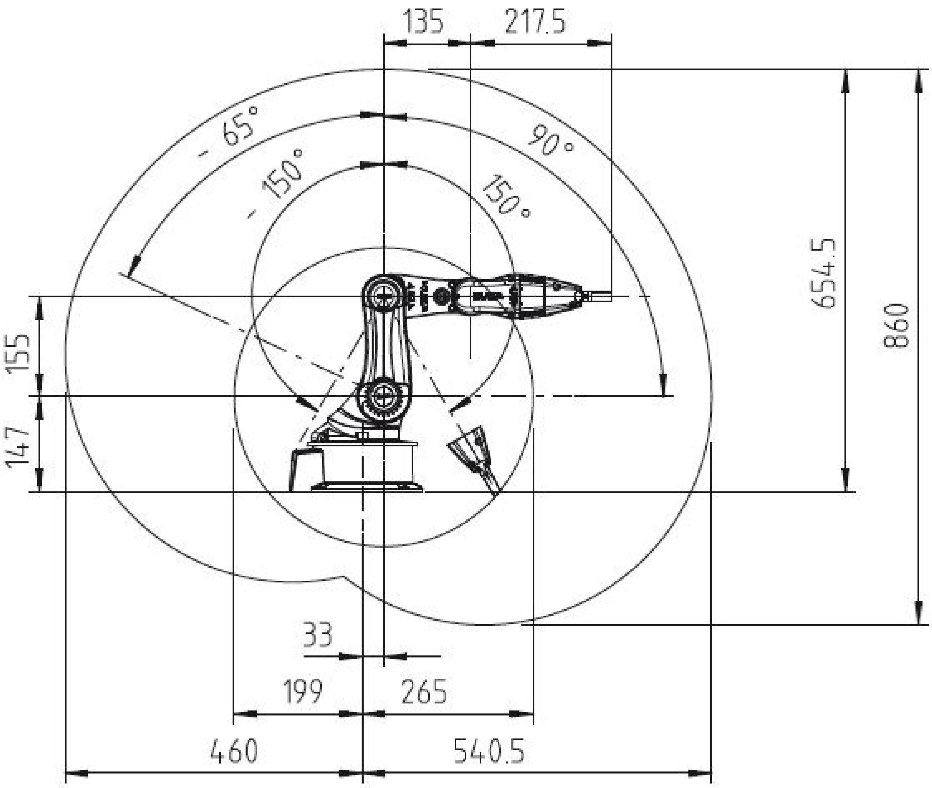
* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движении схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

1 Описание манипулятора

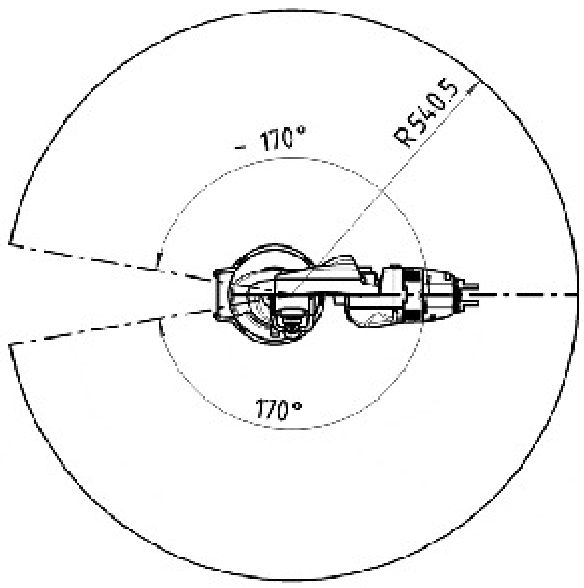
Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

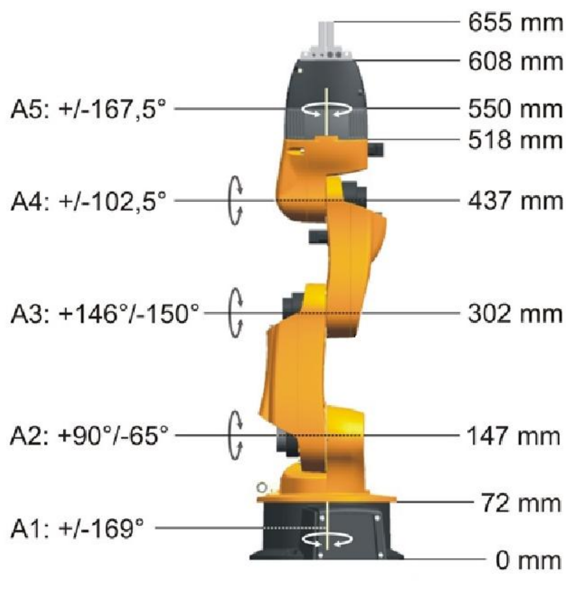
Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	$90° \text{ с}^{-1}$
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В



а)



б)



в)

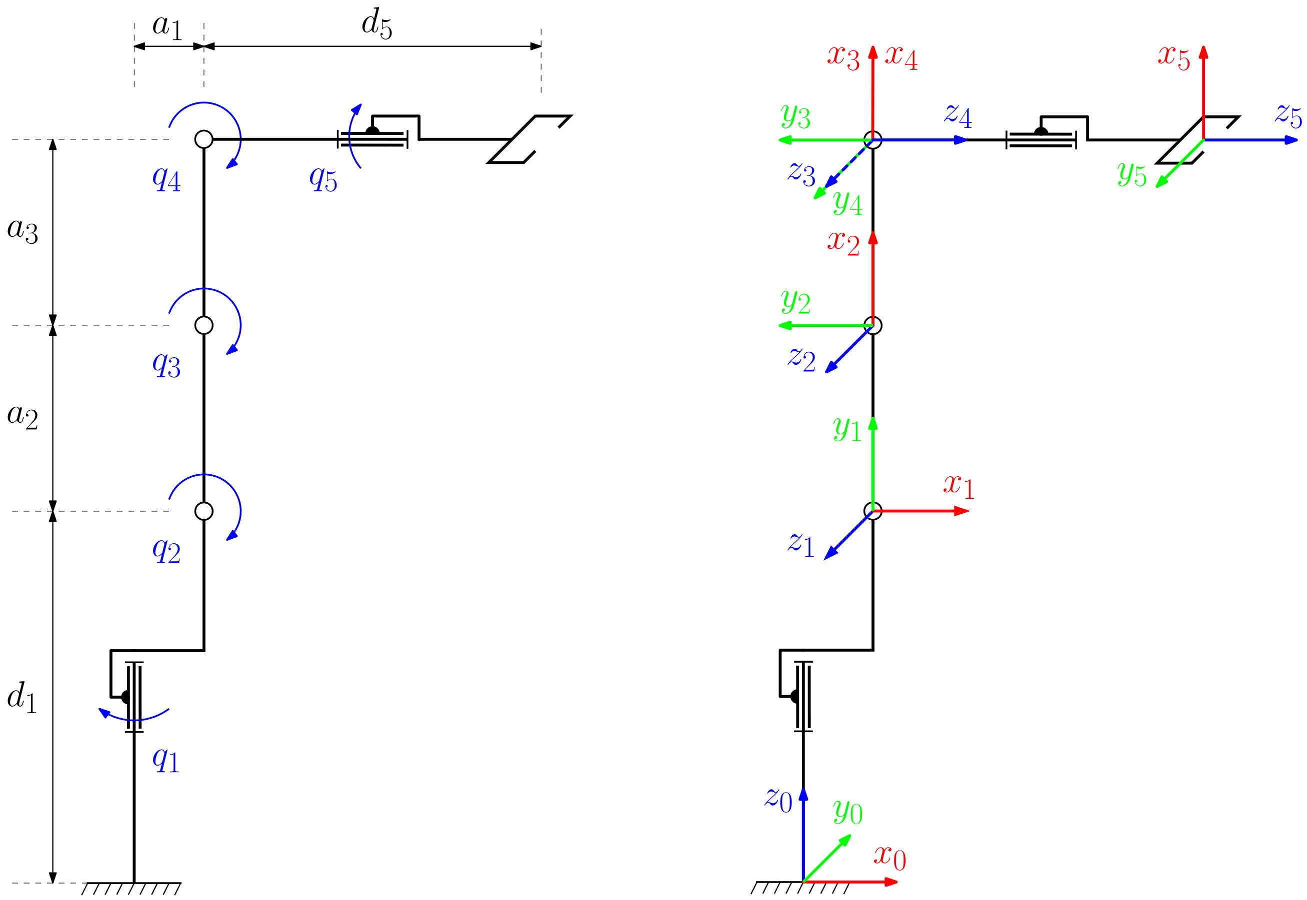
Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

2 Математическая модель манипулятора

2.1 Кинематика манипулятора

2.1.1 Общие замечания

Последовательная кинематическая цепь рассматриваемого манипулятора, включающая только вращательные КП V-класса (цилиндрические шарниры), изображена на рисунке 2.1а.



а) б)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при $\theta = [\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3,\, \theta_4,\, \theta_5]^T = [0,\, \pi/2,\, 0,\, 0,\, 0]^T$; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

а) «привязка» к каждому звену СК, чьи оси удовлетворяют следующим условиям:

   1) ось z_{i-1} направлена вдоль оси i-ой КП;
   2) ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и пересекает ее;
   3) ось y_i дополняет оси z_i и x_i до правой декартовой СК.

б) определение параметров ДХ:

   1) a_i — расстояния от z_{i-1} до z_i вдоль x_i;
   2) α_i — угла от z_{i-1} до z_i вокруг x_i;
   3) d_i — расстояния от x_{i-1} до x_i вдоль z_{i-1};
   4) θ_i — угла от x_{i-1} до x_i вокруг z_{i-1}.

в) расчет матриц однородного преобразования в соответствии со следующими формулами:

$$ {}^{i-1}A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i} \tag{2.1} $$

где R_{z,θ_i} — матрица поворота вокруг оси z на угол θ_i, T_{z,d_i} — матрица смещения вдоль оси z на расстояние d, T_{x,a_i} —матрица смещения вдоль оси x на расстояние a_i, R_{x,α_i} — матрица поворота вокруг оси x на угол α_i, равные

$$ R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2} $$

$$ T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{2.3} $$

итого

$$
{}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}
$$

Результаты выполнения для исследуемого манипулятора двух первых шагов представлены на рисунке 2.1б и в таблице 2.1, а третьего — в лице следующих выражений:

$$
{}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};
$$

$$
{}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.5}
$$

2.1.2 Прямая задача кинематики

Информация о смещении и повороте СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ содержится в матрице ${}^0A_5$. Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, остается лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$$
{}^0A_5 = \prod_{i=1}^{5} {}^{i-1}A_i(q_i). \tag{2.6}
$$

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$$
{}^0R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad r^0_{0,5} = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}. \tag{2.7}
$$

Таблица 2.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

Звено, i	a_i, мм	α_i, рад	d_i, мм	θ_i, рад
1	33	$\pi/2$	147	$\pi \cdot \dfrac{169^\circ}{180^\circ} - q_1$
2	155	0	0	$\pi \cdot \dfrac{65^\circ}{180^\circ} + \dfrac{\pi}{2} - q_2$
3	135	0	0	$-\pi \cdot \dfrac{146^\circ}{180^\circ} - q_3$
4	0	$\pi/2$	0	$\pi \cdot \dfrac{102.5^\circ}{180^\circ} + \dfrac{\pi}{2} - q_4$
5	0	0	218	$\pi \cdot \dfrac{167.5^\circ}{180^\circ} - q_5$

Выполняя соответствующие вычисления получаем:

$$
{}^0A_5 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.147 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.155 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot
$$

$$
\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.135 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.218 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.655 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)
$$

что предложенный способ решения ПЗК в данном случае приводит к правильному ответу.

2.1.3 Обратная задача кинематики

Заданные смещение и поворот СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ можно описать с помощью матрицы ${}^0A_5$. Используя ее и матрицы из (2.5), найти расчетные формулы для углов q_i $(i = \overline{1,5})$ можно из следующих соображений.

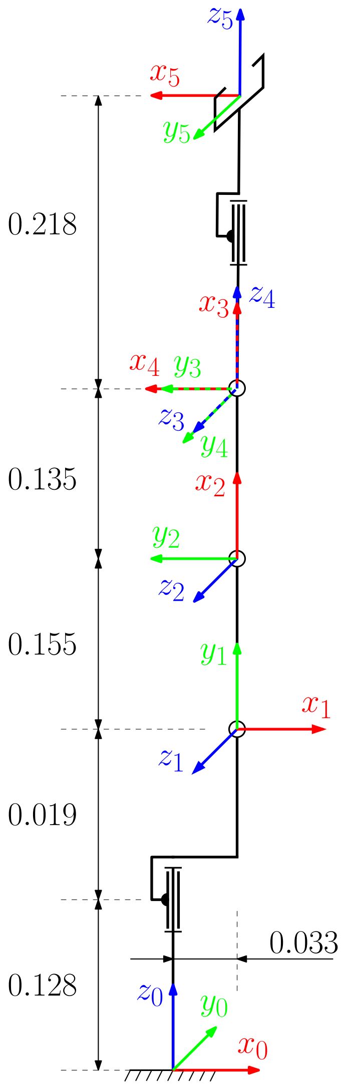


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при
$\theta = [\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \theta_5]^T = [0,\ \pi/2,\ 0,\ \pi/2,\ 0]^T$.

Введем обозначения для элементов матрицы ${}^0A_5$ в соответствии с формулой:

$$
{}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.9}
$$

Приравняв матрицу ${}^0A_5$ и правую часть выражения (2.6) и домножив с обеих сторон на ${}^0A_1^{-1}$, придем к выражению:

$$
{}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5, \tag{2.10}
$$

где левая часть с учетом (2.5) равна

$$ {}^0A_1^{-1}\cdot{}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11}c_1 + r_{21}s_1 & r_{12}c_1 + r_{22}s_1 & r_{13}c_1 + r_{23}s_1 & p_xc_1 + p_ys_1 - a_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ r_{11}s_1 - r_{21}c_1 & r_{12}s_1 - r_{22}c_1 & r_{13}s_1 - r_{23}c_1 & p_xs_1 - p_yc_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11) $$

а правая —

$$ {}^1A_2\cdot{}^2A_3\cdot{}^3A_4\cdot{}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5c_{234} & -s_5c_{234} & s_{234} & a_2c_2 + a_3c_{23} + d_5s_{234} \\ c_5s_{234} & -s_5s_{234} & -c_{234} & a_2s_2 + a_3s_{23} - d_5c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12) $$

где в свою очередь

$$ \theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \qquad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \quad (2.13) $$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов θ_1, θ_5 и θ_{234} дают

– равенство элементов $(3,4)$:

$$ p_xs_1 - p_yc_1 = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \theta_1^{\mathsf{I}} = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{\mathsf{II}} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14) $$

– равенство элементов $(3,1)$ и $(3,2)$:

$$ \begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^{\mathsf{I}} = \operatorname{atan2}(r_{11}\sin\theta_1^{\mathsf{I}} - r_{21}\cos\theta_1^{\mathsf{I}},\ r_{12}\sin\theta_1^{\mathsf{I}} - r_{22}\cos\theta_1^{\mathsf{I}}) \\ \theta_5^{\mathsf{II}} = \operatorname{atan2}(r_{11}\sin\theta_1^{\mathsf{II}} - r_{21}\cos\theta_1^{\mathsf{II}},\ r_{12}\sin\theta_1^{\mathsf{II}} - r_{22}\cos\theta_1^{\mathsf{II}}) \end{cases} \quad (2.15) $$

– равенство элементов $(2,3)$ и $(1,3)$:

$$ \begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^{\mathsf{I}} = \operatorname{atan2}(r_{13}\cos\theta_1^{\mathsf{I}} + r_{23}\sin\theta_1^{\mathsf{I}},\ -r_{33}) \\ \theta_{234}^{\mathsf{II}} = \operatorname{atan2}(r_{13}\cos\theta_1^{\mathsf{II}} + r_{23}\sin\theta_1^{\mathsf{II}},\ -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16) $$

Далее домножим выражение (2.11) на ${}^4A_5^{-1}$ справа — получим матрицу ${}^1A_4$:

$$
{}^1A_4 = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_x s_1 - p_y c_1 - d_5(r_{13}s_1 - r_{23}c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.17}
$$

в которой символами $\cdots$ обозначены элементы, не представляющие интереса в дальнейших расчетах. Заметим, что с учетом (2.14) и равенства элементов $(3, 3)$ в (2.11) и (2.12) справедливо

$$
p_x s_1 - p_y c_1 - d_5(r_{13}s_1 - r_{23}c_1) = 0. \tag{2.18}
$$

С учетом этого и (2.17), имеем что

$$
r^1_{1,4} = \begin{bmatrix} (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.19}
$$

Далее заметим, что одно и то же положение 4-го звена может достигаться при двух разных способах расположения звеньев 2 и 3 (см. рисунок 2.3). Следовательно, углы θ_2, θ_3 и θ_4 при одних и тех же значениях углов θ_1 и θ_5 имеют по два возможных значения. Ниже выводятся формулы для последних.

Выпишем, пользуясь теоремой косинусов, выражение для $\cos\theta_3$ (его зависимость от θ_1 обуславливается зависимостью от этого угла вектора $r^1_{1,4}$):

$$
c_3(\theta_1) = \frac{(r^1_{1,4})^T \cdot r^1_{1,4} - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} \tag{2.20}
$$

С учетом этого для θ_3 можно получить следующие формулы

$$
\theta_3^{\mathsf{I,II}} = \mp \operatorname{atan2}\big(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\mathsf{I}})},\ c_3(\theta_1^{\mathsf{I}})\big) \tag{2.21}
$$

$$
\theta_3^{\mathsf{III,IV}} = \mp \operatorname{atan2}\big(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\mathsf{II}})},\ c_3(\theta_1^{\mathsf{II}})\big) \tag{2.22}
$$

Как видно из рисунка 2.3, $\theta_2 = \varphi + \beta$ при $\theta_3^{\mathsf{I,III}} < 0$ и $\theta_2 = \varphi - \beta$ при $\theta_3^{\mathsf{II,IV}} > 0$. Следовательно, принимая во внимание то, что

$$
\varphi(\theta_1) = \operatorname{atan2}(y_r,\, x_r), \qquad \beta(\theta_3) = \operatorname{atan2}(a_3 \sin|\theta_3|,\ a_2 + a_3\cos|\theta_3|), \tag{2.23}
$$

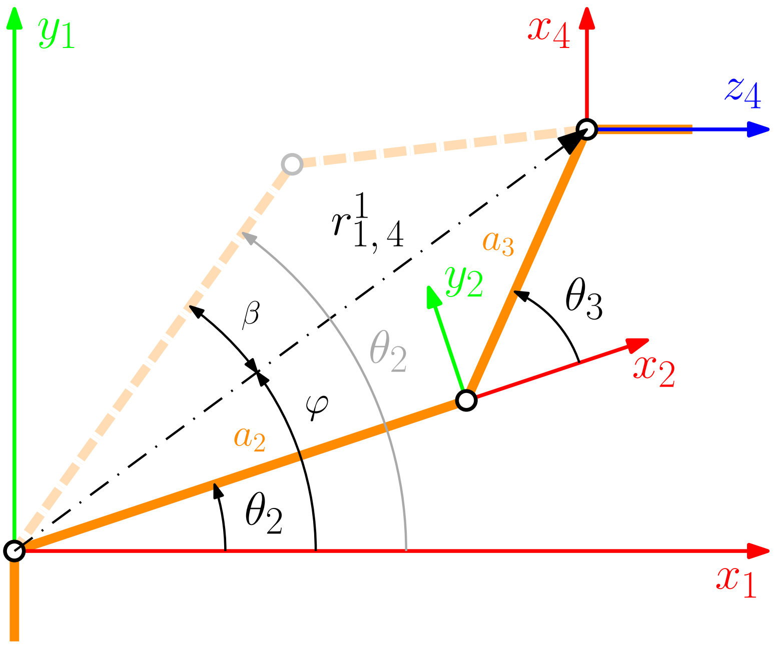


Рисунок 2.3 – Плоская часть манипулятора

где x_r и y_r — проекции вектора $r^1_{1,4}$ на оси абсцисс и ординат (их значения см. в (2.19)), для возможных значений угла θ_2 получаем следующие формулы:

$$\theta_2^{\mathsf{I}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{I}}) + \beta(\theta_3^{\mathsf{I}}), \qquad \theta_2^{\mathsf{II}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{I}}) - \beta(\theta_3^{\mathsf{II}}), \tag{2.24}$$

$$\theta_2^{\mathsf{III}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{II}}) + \beta(\theta_3^{\mathsf{III}}), \qquad \theta_2^{\mathsf{IV}} = \varphi(\theta_1^{\mathsf{II}}) - \beta(\theta_3^{\mathsf{IV}}). \tag{2.25}$$

Формулы для значений угла θ_4 после этого с учетом (2.13) приобретают простой вид:

$$\theta_4^{\mathsf{I,II}} = \theta_{234}^{\mathsf{I}} - \theta_2^{\mathsf{I,II}} - \theta_3^{\mathsf{I,II}}, \qquad \theta_4^{\mathsf{III,IV}} = \theta_{234}^{\mathsf{II}} - \theta_2^{\mathsf{III,IV}} - \theta_3^{\mathsf{III,IV}}. \tag{2.26}$$

Таким образом, любые положение и ориентацию схвата относительно основания манипулятор может обеспечить 4-мя собственными конфигурациями, которым соответствуют следующие наборы значений для его обобщенных координат $q = [q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5]^T$ (с учетом таблицы 2.1):

$$\theta^{\mathsf{I}} = \begin{bmatrix}\theta_1^{\mathsf{I}} & \theta_2^{\mathsf{I}} & \theta_3^{\mathsf{I}} & \theta_4^{\mathsf{I}} & \theta_5^{\mathsf{I}}\end{bmatrix}^T, \qquad \theta^{\mathsf{II}} = \begin{bmatrix}\theta_1^{\mathsf{I}} & \theta_2^{\mathsf{II}} & \theta_3^{\mathsf{II}} & \theta_4^{\mathsf{II}} & \theta_5^{\mathsf{I}}\end{bmatrix}^T, \tag{2.27}$$

$$\theta^{\mathsf{III}} = \begin{bmatrix}\theta_1^{\mathsf{II}} & \theta_2^{\mathsf{III}} & \theta_3^{\mathsf{III}} & \theta_4^{\mathsf{III}} & \theta_5^{\mathsf{II}}\end{bmatrix}^T, \qquad \theta^{\mathsf{IV}} = \begin{bmatrix}\theta_1^{\mathsf{II}} & \theta_2^{\mathsf{IV}} & \theta_3^{\mathsf{IV}} & \theta_4^{\mathsf{IV}} & \theta_5^{\mathsf{II}}\end{bmatrix}^T, \tag{2.28}$$

$$q^{\mathsf{I,II,III,IV}} = \pi \cdot \begin{bmatrix}\frac{169^\circ}{180^\circ} & \frac{65^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} & -\frac{146^\circ}{180^\circ} & \frac{102.5^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} & \frac{167.5^\circ}{180^\circ}\end{bmatrix}^T - \theta^{\mathsf{I,II,III,IV}}. \tag{2.29}$$

2.2 Динамика манипулятора

2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$*, где $i = \overline{1,5}$, показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$ сонаправлена с $Ox_iy_iz_i$.

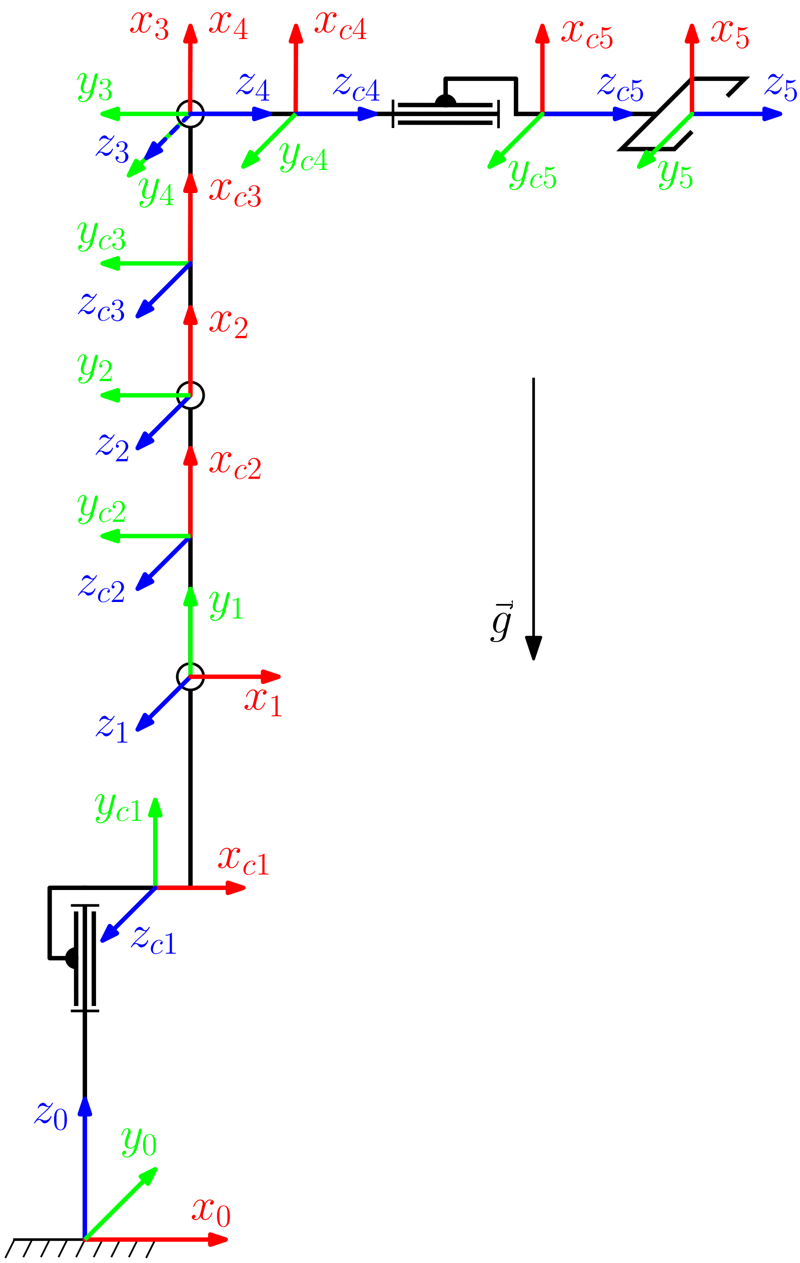


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора $\vec{g}$.

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Для описания положения введенных СК воспользуемся следующими векторами:

$$r^i_{i,\,ci} = \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \\ z_{ci} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,5}, \tag{2.30}$$

где x_{ci}, y_{ci} и z_{ci} — некоторые постоянные величины.

Для компонент тензоров инерции $\mathcal{I}^i_i = const$ введем следующие обозначения:

$$\mathcal{I}^i_i = \begin{bmatrix} I_{i,\,xx} & I_{i,\,xy} & I_{i,\,xz} \\ I_{i,\,xy} & I_{i,\,yy} & I_{i,\,yz} \\ I_{i,\,xz} & I_{i,\,yz} & I_{i,\,zz} \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Заметим, что

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

где $g = 9.82$ м/с^2.

В заключении раздела приведем формулы для расчета величин, которые потребуются в дальнейшем (везде $i = \overline{1,5}$):

– для расчета $r^0_{0,\,i}$ и ${}^0R_i$ (см. Приложение А):

$${}^0A_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot \ldots \cdot {}^{i-1}A_i; \tag{2.33}$$

– для расчета $r^i_{0,\,i}$:

$$r^i_{0,\,i} = {}^0R_i^T \cdot r^0_{0,\,i}; \tag{2.34}$$

– для расчета z^0_i:

$$z^0_i = {}^0R_i \cdot z^i_i = {}^0R_i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{2.35}$$

– для расчета g_i, v^i_i и ω^i_i:

$$g_i = {}^0R_i^T \cdot g_0, \qquad v^i_i = {}^0R_i^T \cdot v^0_i, \qquad \omega^i_i = {}^0R_i^T \cdot \omega^0_i. \tag{2.36}$$

2.2.2 Вывод уравнений движения

Потенциальная энергия манипулятора

$$U = -\sum_{i=1}^{5}\left(m_i g_i^T r_{0,\,ci}^i\right) = -\sum_{i=1}^{5}\left(m_i g_i^T r_{0,\,i}^i + g_i^T(m_i r_{i,\,ci}^i)\right), \tag{2.37}$$

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$v_i^0 = -J_{vi}\dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \tag{2.38}$$

связь между линейными скоростями начал соответствующих СК и вектором $\dot{q}$:

$$J_{v1} = \left[z_0^0 \times \left(r_{0,\,1}^0 - r_{0,\,0}^0\right) \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \tag{2.39}$$

$$J_{v2} = \left[z_0^0 \times \left(r_{0,\,2}^0 - r_{0,\,0}^0\right) \;\; z_1^0 \times \left(r_{0,\,2}^0 - r_{0,\,1}^0\right) \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \tag{2.40}$$

$$J_{v3} = \left[z_0^0 \times \left(r_{0,\,3}^0 - r_{0,\,0}^0\right) \;\; z_1^0 \times \left(r_{0,\,3}^0 - r_{0,\,1}^0\right) \;\; z_2^0 \times \left(r_{0,\,3}^0 - r_{0,\,2}^0\right) \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \tag{2.41}$$

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times \left(r_{0,\,4}^0 - r_{0,\,0}^0\right) \\ z_1^0 \times \left(r_{0,\,4}^0 - r_{0,\,1}^0\right) \\ z_2^0 \times \left(r_{0,\,4}^0 - r_{0,\,2}^0\right) \\ z_3^0 \times \left(r_{0,\,4}^0 - r_{0,\,3}^0\right) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \qquad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times \left(r_{0,\,5}^0 - r_{0,\,0}^0\right) \\ z_1^0 \times \left(r_{0,\,5}^0 - r_{0,\,1}^0\right) \\ z_2^0 \times \left(r_{0,\,5}^0 - r_{0,\,2}^0\right) \\ z_3^0 \times \left(r_{0,\,5}^0 - r_{0,\,3}^0\right) \\ z_4^0 \times \left(r_{0,\,5}^0 - r_{0,\,4}^0\right) \end{bmatrix}^T, \tag{2.42}$$

где $\mathbf{0} = [0\;0\;0]^T$ — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_i^0 = -J_{\omega i}\dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \tag{2.43}$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором $\dot{q}$:

$$J_{\omega 1} = \left[z_0^0 \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \qquad J_{\omega 2} = \left[z_0^0 \;\; z_1^0 \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \tag{2.44}$$

$$J_{\omega 3} = \left[z_0^0 \;\; z_1^0 \;\; z_2^0 \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\right], \qquad J_{\omega 4} = \left[z_0^0 \;\; z_1^0 \;\; z_2^0 \;\; z_3^0 \;\; \mathbf{0}\right], \tag{2.45}$$

$$J_{\omega 5} = \left[z_0^0 \;\; z_1^0 \;\; z_2^0 \;\; z_3^0 \;\; z_4^0\right]. \tag{2.46}$$

Кинетическая энергия манипулятора

$$K = \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{2}m_i(v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2}(\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,\,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i)\right). \tag{2.47}$$

Функция Лагранжа

$$L = K - U =$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \left(m_i \left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,\,i}^i \right) + (m_i r_{i,\,ci}^i)^T \cdot \left(v_i^i \times \omega_i^i + g_i \right) + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \left(m_i \underbrace{\left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,\,i}^i \right)}_{L_{i,1}} + m_i x_{ci} \cdot \underbrace{x \left\{ v_i^i \times \omega_i^i + g_i \right\}}_{L_{i,2}} + \right.$$

$$+ m_i y_{ci} \cdot \underbrace{y \left\{ v_i^i \times \omega_i^i + g_i \right\}}_{L_{i,3}} + m_i z_{ci} \cdot \underbrace{z \left\{ v_i^i \times \omega_i^i + g_i \right\}}_{L_{i,4}} + I_{i,\,xx} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(x\{\omega_i^i\} \right)^2}_{L_{i,5}} +$$

$$+ I_{i,\,yy} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(y\{\omega_i^i\} \right)^2}_{L_{i,6}} + I_{i,\,zz} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(z\{\omega_i^i\} \right)^2}_{L_{i,7}} + I_{i,\,xy} \cdot \underbrace{x\{\omega_i^i\} \cdot y\{\omega_i^i\}}_{L_{i,8}} +$$

$$\left. + I_{i,\,xz} \cdot \underbrace{x\{\omega_i^i\} \cdot z\{\omega_i^i\}}_{L_{i,9}} + I_{i,\,yz} \cdot \underbrace{y\{\omega_i^i\} \cdot z\{\omega_i^i\}}_{L_{i,10}} \right). \qquad (2.48)$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1,5} \qquad \Rightarrow \qquad (2.49)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5} \left(m_i \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,2}\} + \ldots + I_{i,\,yz} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,10}\} \right) = \tau_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{5} \left(m_i \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,2}\} + \ldots + I_{i,\,yz} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,10}\} \right) = \tau_2 \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{5} \left(m_i \cdot \mathcal{L}_5\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{i,2}\} + \ldots + I_{i,\,yz} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{i,10}\} \right) = \tau_5 \end{cases} \qquad (2.50)$$

где $\mathcal{L}_j$ — оператор, работающий в соответствии с формулой:

$$\mathcal{L}_j : \quad \mathcal{L}_j\{f\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}, \qquad (2.51)$$

где в свою очередь $f = f(\dot{q}(t), q(t))$. Если же заметить, что

$$\mathcal{L}_j\{L_{i,k}\} = 0 \qquad \text{при } j > i, \quad i, j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,10}, \tag{2.52}$$

то выражения для них упрощаются до:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5}\Big(m_i \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,2}\} + \ldots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,10}\}\Big) = \tau_1 \\ \sum\limits_{i=2}^{5}\Big(m_i \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,2}\} + \ldots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,10}\}\Big) = \tau_2 \\ \ldots \\ m_5 \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,1}\} + m_5 x_{c5} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,2}\} + \ldots + I_{5,yz} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,10}\} = \tau_5 \end{cases} \tag{2.53}$$

или в матричном виде

$$\tau = \xi\chi, \tag{2.54}$$

где $\tau = [\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_5]^T$ — вектор обобщенных моментов,
$\chi = [\chi_1,\ \chi_2,\ \ldots,\ \chi_5]^T \in \mathbb{R}^{50}$ — вектор параметров робота, где в свою очередь

$$\chi_i = \Big[m_i \quad m_i x_{ci} \quad m_i y_{ci} \quad m_i z_{ci} \quad I_{i,xx} \quad I_{i,yy} \quad I_{i,zz} \quad I_{i,xy} \quad I_{i,xz} \quad I_{i,yz}\Big]^T; \tag{2.55}$$

ξ — так называемый регрессор, равный

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \cdots & \xi_{1,5} \\ O_{1\times10} & \xi_{2,2} & \cdots & \xi_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1\times10} & O_{1\times10} & O_{1\times10} & \xi_{5,5} \end{bmatrix}, \tag{2.56}$$

где в свою очередь $O_{1\times10}$ — вектор-строка, состоящая из 10 нулей, а $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ — вектор-строка, рассчитываемый по формуле

$$\xi_{j,i} = \Big[\mathcal{L}_j\{L_{i,1}\} \quad \mathcal{L}_j\{L_{i,2}\} \quad \ldots \quad \mathcal{L}_j\{L_{i,10}\}\Big]. \tag{2.57}$$

2.2.3 Учет динамики приводов

Уравнения, описывающие динамику приводов, в матричном виде имеют вид

$$I_a\ddot{q} = \tau_e - \tau, \tag{2.58}$$

где I_a — диагональная матрица приведенных к выходным валам моментов инерции приводов, τ_e — вектор-столбец приведенных к выходным валам приводов моментов силы, развиваемых двигателями, имеющие вид:

$$I_a = \begin{bmatrix} I_{a,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{a,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_{a,5} \end{bmatrix}, \qquad \tau_e = \begin{bmatrix} \tau_{e,1} \\ \tau_{e,2} \\ \vdots \\ \tau_{e,5} \end{bmatrix}. \tag{2.59}$$

Объединяя уравнения (2.54) и (2.58), получим

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi\chi, \tag{2.60}$$

а, добавив в это выражение учет моментов трения, окончательно будем иметь

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi\chi + t_f. \tag{2.61}$$

В качестве модели трения возьмем поясняемую рисунком 2.5 и описываемую следующим уравнением

$$\tau_f(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \operatorname{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}, \tag{2.62}$$

где f_v, f_c — диагональные матрицы коэффициентов вязкого и сухого трения соответственно, f_{off} — вектор-столбец сдвигов в моментах силы, имеющие вид

$$f_v = \begin{bmatrix} f_{v,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{v,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{v,5} \end{bmatrix}, \quad f_c = \begin{bmatrix} f_{c,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{c,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{c,5} \end{bmatrix}, \quad f_{\text{off}} = \begin{bmatrix} f_{\text{off},1} \\ f_{\text{off},2} \\ \vdots \\ f_{\text{off},5} \end{bmatrix}. \tag{2.63}$$

Подставляя (2.62) в (2.61), получим

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi\chi + f_v \dot{q} + f_c \operatorname{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}. \tag{2.64}$$

Если ввести в рассмотрение новые матрицы $\bar{\chi} = [\bar{\chi}_1,\ \bar{\chi}_2,\ \ldots,\ \bar{\chi}_5]^T$ и

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{1,1} & \bar{\xi}_{1,2} & \cdots & \bar{\xi}_{1,5} \\ O_{1\times10} & \bar{\xi}_{2,2} & \cdots & \bar{\xi}_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1\times10} & O_{1\times10} & O_{1\times10} & \bar{\xi}_{5,5} \end{bmatrix}, \tag{2.65}$$

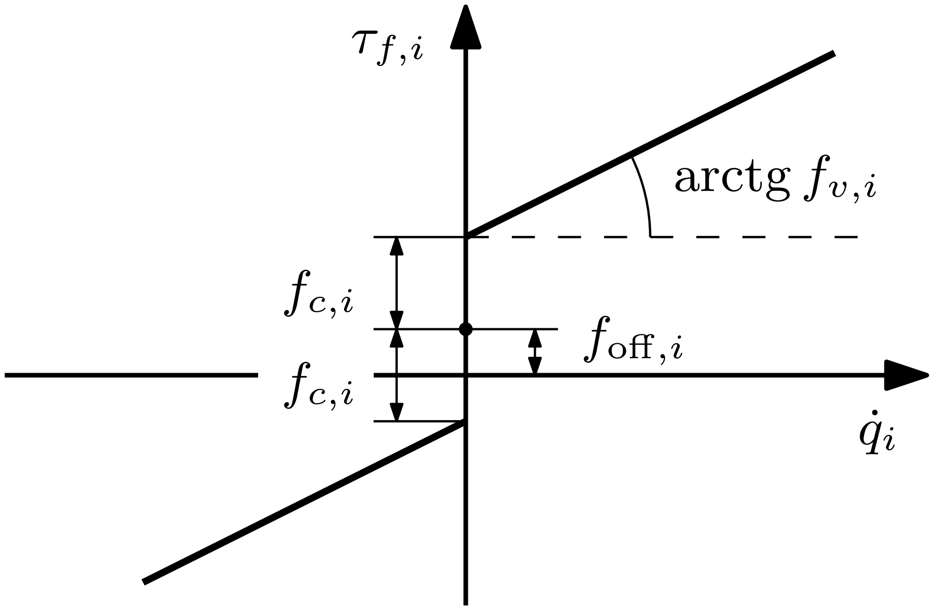


Рисунок 2.5 – График, поясняющий выбранную модель трения.

определяемые выражениями

$$\bar{\chi}_i = \begin{bmatrix} \chi_i & I_{a,i} & f_{v,i} & f_{c,i} & f_{\mathrm{off},i} \end{bmatrix}^T, \tag{2.66}$$

$$\bar{\xi}_{j,i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & i \neq j \\ \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & \ddot{q}_j & \dot{q}_j & \mathrm{sign}(\dot{q}_j) & 1 \end{bmatrix}, & i = j \end{cases} \tag{2.67}$$

то данное выражение может быть записано в следующем матричном виде:

$$\tau_e = \bar{\xi}\bar{\chi}. \tag{2.68}$$

2.2.4 Альтернативная матричная форма записи

Выражение (2.54) может быть переписано в форме

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q), \tag{2.69}$$

где $D(q)$ — матрица инерции, $C(q,\dot{q})$ — матрица центробежных и Кориолисовых сил, $G(q)$ — вектор гравитации. С учетом этого факта и уравнения (2.61) можно получить, что

$$\tau_e = M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \tag{2.70}$$

где $M(q) = I_a + D(q)$.

Выражение для матрицы $D(q)$ может быть найдено из формулы для кинетической энергии с учетом того, что справедливо

$$\begin{cases} K = \dfrac{1}{2}\,\dot{q}^T D(q)\dot{q}, \\ D(q) = D^T(q), \end{cases} \tag{2.71}$$

для матрицы $C(q,\dot{q})$ — из выражения для $D(q)$ в соответствии с формулами:

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial D_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k}\right), \tag{2.72}$$

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^{n} C_{ijk}\dot{q}_i, \tag{2.73}$$

где D_{ij}, C_{ij} — элементы матриц $D(q)$ и $C(q,\dot{q})$ соответственно, стоящие на пересечении i-ой строки и j-го столбца; а для вектора $G(q)$ — по формуле

$$G(q) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial q_1} & \dfrac{\partial U}{\partial q_2} & \dots & \dfrac{\partial U}{\partial q_5} \end{bmatrix}^T. \tag{2.74}$$

Выражение для кинетической энергии в форме, иллюстрируемой первым из уравнений (2.71), может быть получено из уравнения (2.47) с учетом формул (2.36), (2.38) и (2.43):

$$\begin{aligned} K = \sum_{i=1}^{5}\Bigg(&\frac{1}{2}m_i \cdot \left(-{}^0R_i^T J_{vi}\dot{q}\right)^T \cdot \left(-{}^0R_i^T J_{vi}\dot{q}\right) + \frac{1}{2}\left(-{}^0R_i^T J_{\omega i}\dot{q}\right)^T \cdot \mathcal{I}_i^i \cdot \left(-{}^0R_i^T J_{\omega i}\dot{q}\right) + \\ &+ (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot \Big(\left(-{}^0R_i^T J_{vi}\dot{q}\right) \times \left(-{}^0R_i^T J_{\omega i}\dot{q}\right)\Big)\Bigg) = \\ = \sum_{i=1}^{5}\Bigg(&\frac{1}{2}m_i\dot{q}^T J_{vi}^T J_{vi}\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T J_{\omega i}^T\, {}^0R_i\, \mathcal{I}_i^i\, {}^0R_i^T J_{\omega i}\dot{q} + (m_i \underbrace{{}^0R_i r_{i,ci}^i}_{r_{i,ci}^0})^T \cdot \Big((J_{vi}\dot{q}) \times (J_{\omega i}\dot{q})\Big)\Bigg) = \\ = \frac{1}{2}\dot{q}^T\Bigg(\sum_{i=1}^{5}\Big(&m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T\, {}^0R_i\, \mathcal{I}_i^i\, {}^0R_i^T J_{\omega i} + 2\cdot x\{m_i r_{i,ci}^0\}\cdot J_{xi} + \\ &+ 2\cdot y\{m_i r_{i,ci}^0\}\cdot J_{yi} + 2\cdot z\{m_i r_{i,ci}^0\}\cdot J_{zi}\Big)\Bigg)\dot{q}, \end{aligned} \tag{2.75}$$

при преобразованиях которого учтено то, что

$$(J_{vi}\dot{q}) \times (J_{\omega i}\dot{q}) = \begin{bmatrix} J_{vi}^{\{1\}}\dot{q} \\ J_{vi}^{\{2\}}\dot{q} \\ J_{vi}^{\{3\}}\dot{q} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{\omega i}^{\{1\}}\dot{q} \\ J_{\omega i}^{\{2\}}\dot{q} \\ J_{\omega i}^{\{3\}}\dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_{vi}^{\{3\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{2\}}\dot{q} + J_{vi}^{\{2\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{3\}}\dot{q} \\ J_{vi}^{\{3\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{1\}}\dot{q} - J_{vi}^{\{1\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{3\}}\dot{q} \\ -J_{vi}^{\{2\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{1\}}\dot{q} + J_{vi}^{\{1\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{2\}}\dot{q} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\dot{q}^T\big(J_{vi}^{\{3\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{2\}}\dot{q} + \dot{q}^T\big(J_{vi}^{\{2\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{3\}}\dot{q} \\ \dot{q}^T\big(J_{vi}^{\{3\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{1\}}\dot{q} - \dot{q}^T\big(J_{vi}^{\{1\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{3\}}\dot{q} \\ -\dot{q}^T\big(J_{vi}^{\{2\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{1\}}\dot{q} + \dot{q}^T\big(J_{vi}^{\{1\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{2\}}\dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T J_{xi}\dot{q} \\ \dot{q}^T J_{yi}\dot{q} \\ \dot{q}^T J_{zi}\dot{q} \end{bmatrix}, \tag{2.76}$$

где

$$J_{xi} = -\big(J_{vi}^{\{3\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{2\}} + \big(J_{vi}^{\{2\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \tag{2.77}$$

$$J_{yi} = \big(J_{vi}^{\{3\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{1\}} - \big(J_{vi}^{\{1\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \tag{2.78}$$

$$J_{zi} = -\big(J_{vi}^{\{2\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{1\}} + \big(J_{vi}^{\{1\}}\big)^T J_{\omega i}^{\{2\}}. \tag{2.79}$$

Стоит отметить тот факт, что выражение из (2.75), обозначим которое через $\mathcal{D}(q)$, равное

$$\mathcal{D}(q) = \sum_{i=1}^{5}\Big(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T\, {}^0R_i\, \mathcal{I}_i^i\, {}^0R_i^T J_{\omega i} + 2\cdot x\{m_i r_{i,ci}^0\}\cdot J_{xi} \; + \\ + 2\cdot y\{m_i r_{i,ci}^0\}\cdot J_{yi} + 2\cdot z\{m_i r_{i,ci}^0\}\cdot J_{zi}\Big), \tag{2.80}$$

в общем случае не равно матрице $D(q)$. При этом получить последнюю из матрицы $\mathcal{D}(q)$ можно с помощью следующей формулы:

$$D_{ij} = \begin{cases} 0.5(\mathcal{D}_{ij} + \mathcal{D}_{ji}), & i \neq j; \\ \mathcal{D}_{ij}, & i = j; \end{cases} \tag{2.81}$$

где $\mathcal{D}_{ij}$ — элемент матрицы $\mathcal{D}(q)$, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца.*

* Для дополнительных пояснений попробуйте обратиться к Приложению В.

3 Идентификация параметров манипулятора

3.1 Описание метода

Для определения неизвестных значений параметров робота, составляющих вектор $\bar{\chi}$, воспользуемся методом наименьших квадратов. Алгоритм необходимых действий в таком случае будет следующим:

а) с помощью поставляемого производителем робота ПО[*] дать манипулятору команды на последовательное достижение N произвольных конфигураций, по возможности охватывающих всю его рабочую область; во время его работы снять и записать следующие показания:

$$\begin{array}{cccc}
q(t_1) & \dot{q}(t_1) & \ddot{q}(t_1) & \tau_e(t_1) \\
q(t_2) & \dot{q}(t_2) & \ddot{q}(t_2) & \tau_e(t_2) \\
q(t_3) & \dot{q}(t_3) & \ddot{q}(t_3) & \tau_e(t_3) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q(t_k) & \dot{q}(t_k) & \ddot{q}(t_k) & \tau_e(t_k)
\end{array}$$

где $t_k > t_3 > t_2 > t_1$;

б) используя полученные данные, составить матрицы

$$\Xi = \begin{bmatrix} \bar{\xi}(\ddot{q}(t_1), \dot{q}(t_1), q(t_1)) \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_2), \dot{q}(t_2), q(t_2)) \\ \ldots \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_k), \dot{q}(t_k), q(t_k)) \end{bmatrix}, \qquad T_e = \begin{bmatrix} \tau_e(t_1) \\ \tau_e(t_2) \\ \ldots \\ \tau_e(t_k) \end{bmatrix}; \tag{3.1}$$

в) рассчитать оценку $\hat{\chi}$ вектора $\bar{\chi}$ по формуле:

$$\hat{\chi} = (\Xi^T \cdot \Xi)^{-1} \cdot \Xi^T \cdot T_e; \tag{3.2}$$

[*] У Youbot такое «стандартное» ПО осуществляет управление углами в сочленениях робота с помощью ПИД-регуляторов.

г) дать роботу команды на достижение других N позиций и при этом получить те же самые данные;

д) используя найденную в п. в) оценку $\hat{\chi}$ и снятые в п. г) данные, рассчитать по формуле (2.68) значения для τ_e; сравнить их с полученными в п. г) и сделать выводы об успешности идентификации.

3.2 Результаты

4 Синтез систем управления

4.1 Предварительные замечания

Каждый из приводов манипулятора робота Kuka Youbot имеет собственную систему управления, структура которой иллюстрируется схемой с рисунка 4.1. Из нее видно, что каждый из приводов робота может управляться заданием значения для угла q_{di}, или скорости $\dot{q}_{di}$, или момента силы $\tau_{ed,i}$, который должен быть на нем обеспечен. Это значение подается на вход соответствующего ПИД-регулятора, коэффициенты которого доступны настройке, и далее (уже в виде сигнала напряжения u) — на контролируемый двигатель.

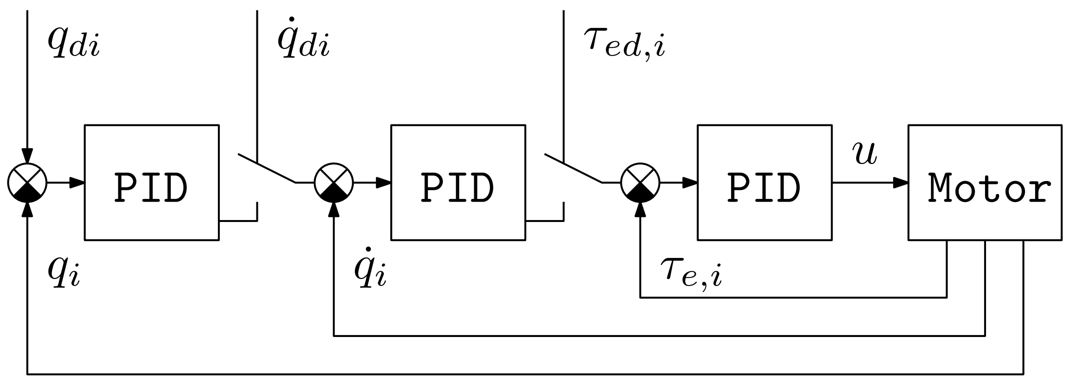


Рисунок 4.1 – Структура системы управления, контролирующей работу каждого из приводов робота.

Далее в тексте документа будут рассмотрены системы управления, в которых в качестве управляющего сигнала рассматривается вектор $\tau_e(t)$. При этом будет предполагаться, что задаваемые значения для моментов сил достигаются на двигателях мгновенно. Такое предположение будем считать возможным по той причине, что процессы в контуре момента в рассмотренной выше системе управления характеризуются малыми временами переходных процессов. В качестве иллюстрации к сказанному можно привести рисунок 4.2. На нем показан график переходной функции системы управления моментом силы, развиваемым приводом ???-го звена.

Из величин, описывающих состояние робота в данный момент времени, в используемом ПО доступны вектора $q(t)$, $\dot{q}(t)$ и $\tau_e(t)$.

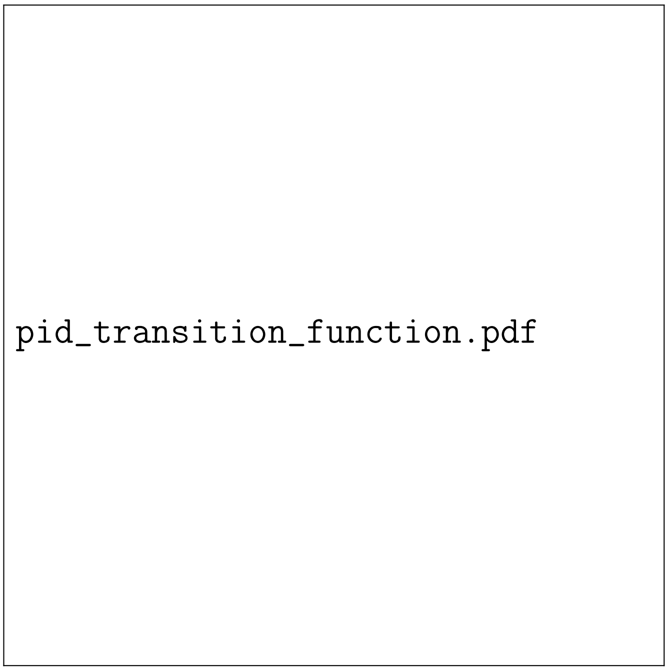


Рисунок 4.2 – График переходной функции системы управления приводом ???-го звена.

4.2 Система управления для принятия определенной конфигурации

Для системы управления процессом принятия роботом желаемой конфигурации, описываемой вектором $q_d = [q_{d1}\ q_{d2}\ q_{d3}\ q_{d4}\ q_{d5}]^T = const$, выберем следующий закон управления:

$$\tau_e = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \tag{4.1}$$

где $K_p = \mathrm{diag}\{k_{pi}\} = const$ и $K_d = \mathrm{diag}\{k_{di}\} = const$, при этом $k_{pi} > 0$ и $k_{di} > 0$ для $\forall i = \overline{1,5}$. С учетом его и уравнения (2.70) модель замкнутой системы примет вид:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q}. \tag{4.2}$$

Это выражение с использованием обозначений

$$e = q - q_d, \qquad x = \begin{bmatrix} e \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

можно переписать следующим образом

$$\dot{x} = f(x), \tag{4.4}$$

где

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(e)\Big(K_p e + K_d \dot{q} + C(e,\dot{q})\dot{q}\Big) \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Заметим, что равновесным состоянием системы (4.4) является точка $x_0 = [0\ 0\ \ldots\ 0]^T$, так как $f(x_0) = [0\ 0\ \ldots\ 0]^T$.

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}\,\dot{q}^T M(e)\dot{q} + \frac{1}{2}\,e^T K_p e. \tag{4.6}$$

Ее производная по времени*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x) &= \dot{q}^T M(e)\ddot{q} + \dot{q}^T \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}M(e)\Big)\dot{q} + \dot{e}^T K_p e = \\ &= \dot{q}^T\Big(\tau_e - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) - t_f(\dot{q})\Big) + \dot{q}^T \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}M(q)\Big)\dot{q} + \dot{q}^T K_p e = \\ &= \dot{q}^T\Big(\tau_e - G(q) - t_f(\dot{q}) + K_p e\Big) + \dot{q}^T\left(\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}M(q)\Big) - C(q,\dot{q})\right)\dot{q} = \\ &= \dot{q}^T\Big(K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}) - G(q) - t_f(\dot{q}) + K_p(q - q_d)\Big) = \\ &= -\dot{q}^T K_d \dot{q} < 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

при $x \neq x_0$ и равна нулю при $x = x_0$. Следовательно, по 2-ой теореме Ляпунова состояние системы $x = x_0$, при котором, к слову сказать, $q = q_d$ и $\dot{q} = [0\ 0\ \ldots\ 0]^T$, является асимптотически устойчивым.

4.3 Система управления процессом следования по траектории

Для системы управления процессом следования роботом по траектории, описываемой вектор-функцией $q_d(t) = [q_{d1}(t)\ q_{d2}(t)\ q_{d3}(t)\ q_{d4}(t)\ q_{d5}(t)]^T$, возьмем следующий закон управления:

$$\tau_e = M(q)\big(\ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)\big) + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \tag{4.8}$$

где $K_d = const$ и $K_p = const$.

* В представленных ниже выкладках учтен тот факт, что матрица $\big(0.5M(q)\big)^{\boldsymbol{\cdot}} - C(q,\dot{q})$ является кососимметричной.

С учетом его и уравнения (2.70) модель замкнутой системы опишется следующим выражением:

$$M(q)\big(\ddot{q}_d - \ddot{q} + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)\big) = 0, \tag{4.9}$$

которое после деления на $M(q)$ и применения обозначения

$$\varepsilon = q_d - q \tag{4.10}$$

может быть переписано в виде:

$$\ddot{\varepsilon} + K_d\dot{\varepsilon} + K_p\varepsilon = 0. \tag{4.11}$$

Согласно последнему уравнению, использование закона управления (4.8) дает возможность полностью определять поведение робота значениями матриц K_p и K_d.

В данной работе матрицы K_p и K_d были выбраны диагональными:

$$K_p = \operatorname{diag}\{k_{pi}\}, \qquad K_d = \operatorname{diag}\{k_{di}\}, \tag{4.12}$$

потому что это позволяет «разбить» уравнение (4.11) на 5 независимых дифференциальных уравнений, а их компоненты — положительными:

$$k_{pi} > 0,\ k_{di} > 0,\ \forall i = \overline{1,5}, \tag{4.13}$$

так как при этом система получается устойчивой (все 5 уравнений получаются имеющими корни только с отрицательной вещественной частью).

Заключение

Текст заключения

Список использованных источников

1 KUKA YOUBOT. — URL: http://www.technomatix.ru/kuka-youbot (дата обращения: 08.03.2017).

2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Приложение А

(рекомендуемое)

Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования ${}^iA_j$ называется матрица размера 4×4, служащая для описания смещения и поворота СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$ и имеющая следующую структуру:

$$ {}^iA_j = \begin{bmatrix} {}^iR_j & r^i_{i,j} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}, \tag{А.1} $$

где $O_{1\times 3} = [0\ 0\ 0]$.

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки C относительно $Ox_0y_0z_0$ при известных векторах r^2_C, $r^0_{0,1}$ и $r^1_{1,2}$ и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$ \begin{cases} r^0_C = {}^0R_1 r^1_C + r^0_{0,1} \\ r^1_C = {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \end{cases} \Rightarrow \quad r^0_C = {}^0R_1 {}^1R_2 r^2_C + {}^0R_1 r^1_{1,2} + r^0_{0,1} \tag{А.2} $$

где r^0_C, r^1_C, r^2_C — радиус-векторы точки C в $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$ соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами ${}^0A_1$ и ${}^1A_2$:

$$ \begin{cases} \begin{bmatrix} r^0_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} r^1_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 r^1_C + r^0_{0,1} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r^1_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r^1_{1,2} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2} \begin{bmatrix} r^2_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} r^0_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r^1_{1,2} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2}}_{{}^0A_2} \begin{bmatrix} r^2_C \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r^0_{0,1} \\ O_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} {}^1R_2 r^2_C + r^1_{1,2} \\ 1 \end{bmatrix} = $$

$$ = \begin{bmatrix} {}^0R_1 {}^1R_2 r^2_C + {}^0R_1 r^1_{1,2} + r^0_{0,1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{А.3} $$

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [].

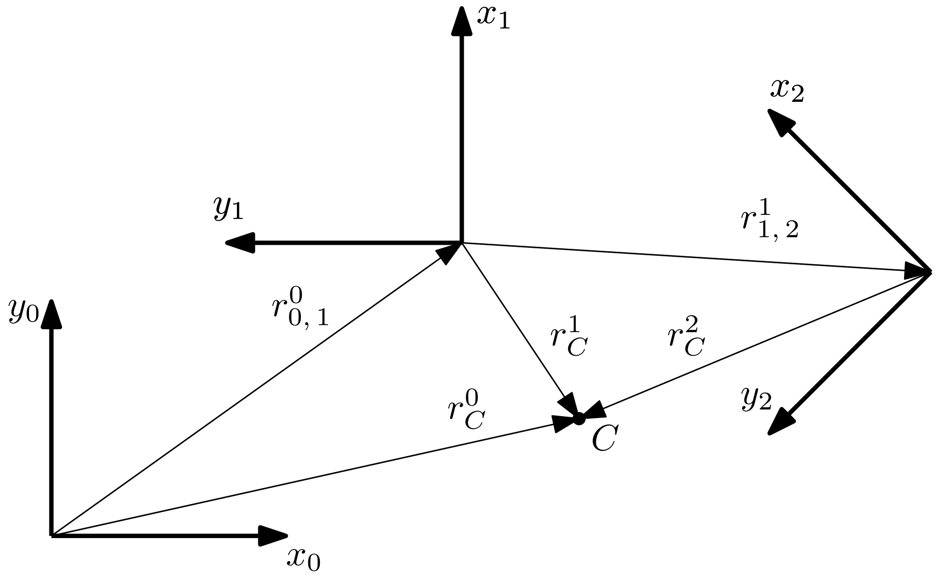


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Приложение Б
(рекомендуемое)

Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором V. В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

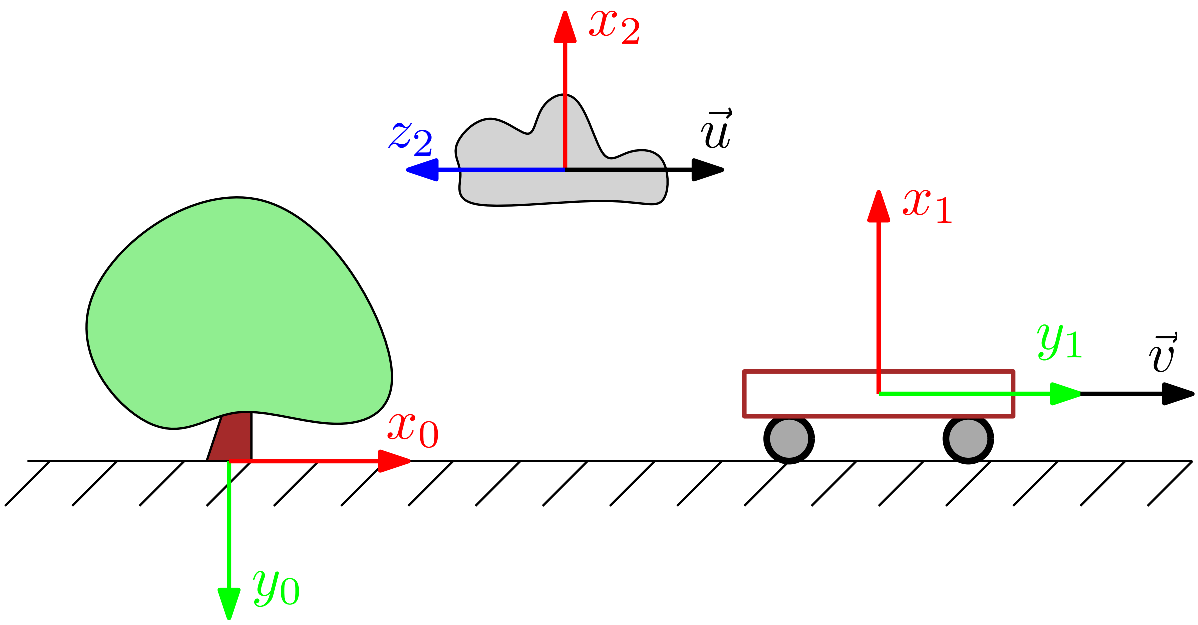


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Таблица Б.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора V	Значение V^T
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Приложение В
(рекомендуемое)
Дополнительные пояснения к порядку расчета матрицы инерции

Рассмотрим следующие два математических выражения:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = b_{11}a_1^2 + b_{22}a_2^2 + b_{33}a_3^2 + \\ + (b_{12} + b_{21})a_1a_2 + (b_{13} + b_{31})a_1a_3 + (b_{23} + b_{32})a_2a_3, \quad (\text{В.1})$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = c_{11}a_1^2 + c_{22}a_2^2 + c_{33}a_3^2 + \\ + 2c_{12}a_1a_2 + 2c_{13}a_1a_3 + 2c_{23}a_2a_3. \quad (\text{В.2})$$

Легко видеть, что при выполнении равенств

$$c_{11} = b_{11}, \quad c_{22} = b_{22}, \quad c_{33} = b_{33}, \quad (\text{В.3})$$

$$c_{12} = 0.5(b_{12} + b_{21}), \quad c_{13} = 0.5(b_{13} + b_{31}), \quad c_{23} = 0.5(b_{23} + b_{32}) \quad (\text{В.4})$$

выражения (В.1) и (В.2) тоже будут равны.

Подобная ситуация наблюдается и в отношении матриц $\mathcal{D}(q)$ и $D(q)$.

Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Копировал Формат A4

Приложение Г
(рекомендуемое)
Получение и использование математической модели плоского двухзвенного манипулятора

Для пояснения описанных в документе действий составим и подробно распишем математическую модель плоского двухзвенного манипулятора, показанного на рисунке Г.1.

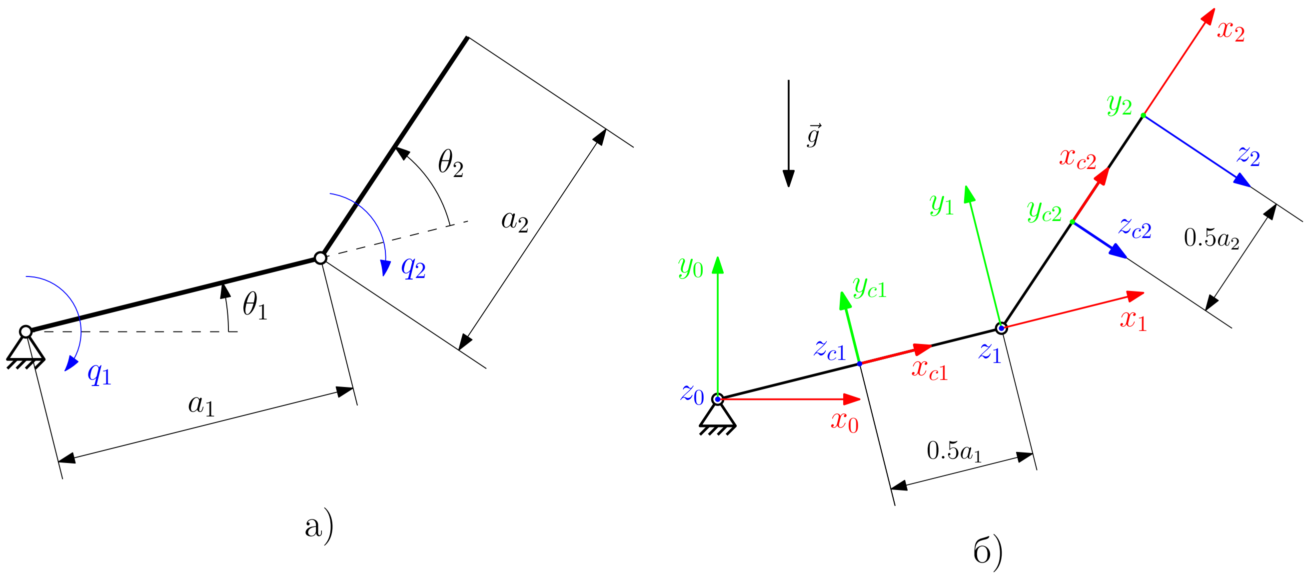


Рисунок Г.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая; б — демонстрирующая расположение барицентрических СК и СК КП.

Значения некоторых из динамических параметров звеньев:

$$r^1_{1,c1} = \begin{bmatrix} -0.5a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I}^1_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m_1 a_1^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m_1 a_1^2}{3} \end{bmatrix}, \tag{Г.1}$$

$$r^2_{2,c2} = \begin{bmatrix} -0.5a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I}^2_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m_2 a_2^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m_2 a_2^2}{3} \end{bmatrix}. \tag{Г.2}$$

Параметры Денавита-Хартенберга, характеризующие взаимное расположение показанных на рисунке Г.1 СК, приведены в таблице Г.1, где δ_1 и δ_2 — некоторые константы. Вектор ускорения свободного падения, выраженный в неподвижной СК равен

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{Г.3}$$

Таблица Г.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

Звено, i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	$\delta_1 - q_1$
2	a_2	$\pi/2$	0	$\delta_2 - q_2$

Матрицы однородных преобразований и проч.*:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0R_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r^0_{0,1} = \begin{bmatrix} a_1c_1 \\ a_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{Г.4}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & a_2c_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 & a_2s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r^0_{0,1} = \begin{bmatrix} a_2c_2 \\ a_2s_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{Г.5}$$

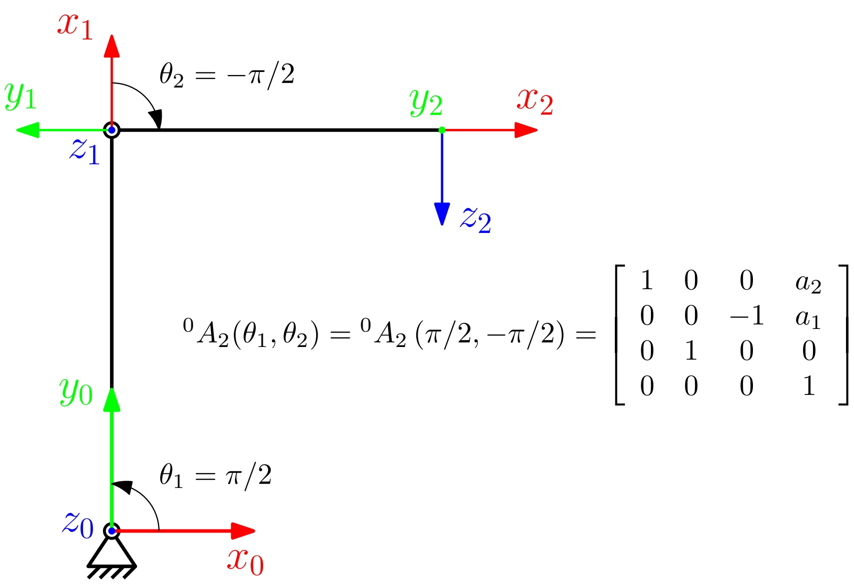
$${}^0A_2 = {}^0A_1{}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & s_{12} & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & 0 & -c_{12} & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0R_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & s_{12} \\ s_{12} & 0 & -c_{12} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{Г.6}$$

Иллюстрирующий правильность их расчета пример показан на рисунке Г.2.

---

* В пределах данного приложения принято следующее дополнительное обозначение:

$$\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2.$$



$$
{}^0A_2(\theta_1, \theta_2) = {}^0A_2\,(\pi/2, -\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Рисунок Г.2 – Пример, проверяющий решение ПЗК для рассматриваемого манипулятора.

Некоторые подготовительные вычисления:

$$
r^1_{0,1} = {}^0R_1^T \cdot r^0_{0,1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = {}^0R_1^T \cdot g_0 = \begin{bmatrix} -gs_1 \\ -gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z^0_1 = {}^0R_1 \cdot z^1_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{Г.7}
$$

$$
r^2_{0,2} = {}^0R_2^T \cdot r^0_{0,2} = \begin{bmatrix} a_2 + a_1c_2 \\ 0 \\ a_1s_2 \end{bmatrix}, \quad g_2 = {}^0R_2^T \cdot g_0 = \begin{bmatrix} -gs_{12} \\ 0 \\ gc_{12} \end{bmatrix}. \tag{Г.8}
$$

$$
J_{v1} = \begin{bmatrix} z^0_0 \times (r^0_{0,1} - r^0_{0,0}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 & 0 \\ a_1c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{Г.9}
$$

$$
J_{v2} = \begin{bmatrix} z^0_0 \times (r^0_{0,2} - r^0_{0,0}) & z^0_1 \times (r^0_{0,2} - r^0_{0,1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2s_{12} - a_1s_1 & -a_2s_{12} \\ a_2c_{12} + a_1c_1 & a_2c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{Г.10}
$$

$$
J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z^0_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z^0_0 & z^0_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{Г.11}
$$

$$v_1^0 = -J_{v1}\dot{q} = \begin{bmatrix} a_1 s_1 \dot{q}_1 \\ -a_1 c_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{Г.12}$$

$$v_1^1 = {}^0R_1^T \cdot v_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{Г.13}$$

$$\omega_1^0 = -J_{\omega 1}\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{q}_1 \end{bmatrix}, \tag{Г.14}$$

$$\omega_1^1 = {}^0R_1^T \cdot \omega_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{q}_1 \end{bmatrix} \tag{Г.15}$$

$$v_2^0 = -J_{v2}\dot{q} = \begin{bmatrix} a_2 s_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1 s_1 \dot{q}_1 \\ -a_2 c_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - a_1 c_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{Г.16}$$

$$v_2^2 = {}^0R_2^T \cdot v_2^0 = \begin{bmatrix} -a_1 s_2 \dot{q}_1 \\ 0 \\ a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1 c_2 \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \tag{Г.17}$$

$$\omega_2^0 = -J_{\omega 2}\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}, \tag{Г.18}$$

$$\omega_2^2 = {}^0R_2^T \cdot \omega_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{Г.19}$$

$$v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1 = \begin{bmatrix} a_1 \dot{q}_1^2 - g s_1 \\ -g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{Г.20}$$

$$v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2 = \begin{bmatrix} a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + a_1 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) c_2 - g s_{12} \\ 0 \\ a_1 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) s_2 + g c_{12} \end{bmatrix}. \tag{Г.21}$$

Расчет составляющих функции Лагранжа:

$$L_{1,1} = \frac{1}{2}(v_1^1)^T v_1^1 + g_1^T r_{0,1}^1 = \frac{1}{2}a_1^2\dot{q}_1^2 - a_1 g s_1, \tag{Г.22}$$

$$L_{1,2} = x\{v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1\} = a_1\dot{q}_1^2 - g s_1, \tag{Г.23}$$

$$L_{1,3} = y\{v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1\} = -g c_1, \tag{Г.24}$$

$$L_{1,4} = z\{v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1\} = 0, \tag{Г.25}$$

$$L_{1,5} = \frac{1}{2}\left(x\{\omega_1^1\}\right)^2 = 0, \tag{Г.26}$$

$$L_{1,6} = \frac{1}{2}\left(y\{\omega_1^1\}\right)^2 = 0, \tag{Г.27}$$

$$L_{1,7} = \frac{1}{2}\left(z\{\omega_1^1\}\right)^2 = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2, \tag{Г.28}$$

$$L_{1,8} = x\{\omega_1^1\} \cdot y\{\omega_1^1\} = 0, \tag{Г.29}$$

$$L_{1,9} = x\{\omega_1^1\} \cdot z\{\omega_1^1\} = 0, \tag{Г.30}$$

$$L_{1,10} = x\{\omega_1^1\} \cdot z\{\omega_1^1\} = 0, \tag{Г.31}$$

$$L_{2,1} = \frac{1}{2}(v_2^2)^T v_2^2 + g_2^T r_{0,2}^2 = \frac{1}{2}(a_1\dot{q}_1 s_2)^2 + \frac{1}{2}\big(a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1\dot{q}_1 c_2\big)^2 - \tag{Г.32}$$

$$- g s_{12}(a_2 + a_1 c_2) + a_1 g s_2 c_{12}, \tag{Г.33}$$

$$L_{2,2} = x\{v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2\} = a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + a_1\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)c_2 - g s_{12}, \tag{Г.34}$$

$$L_{2,3} = y\{v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2\} = 0, \tag{Г.35}$$

$$L_{2,4} = z\{v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2\} = a_1\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)s_2 + g c_{12}, \tag{Г.36}$$

$$L_{2,5} = \frac{1}{2}\left(x\{\omega_2^2\}\right)^2 = 0, \tag{Г.37}$$

$$L_{2,6} = \frac{1}{2}\left(y\{\omega_2^2\}\right)^2 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \tag{Г.38}$$

$$L_{2,7} = \frac{1}{2}\left(z\{\omega_2^2\}\right)^2 = 0, \tag{Г.39}$$

$$L_{2,8} = x\{\omega_2^2\} \cdot y\{\omega_2^2\} = 0, \tag{Г.40}$$

$$L_{2,9} = x\{\omega_2^2\} \cdot z\{\omega_2^2\} = 0, \tag{Г.41}$$

$$L_{2,10} = x\{\omega_2^2\} \cdot z\{\omega_2^2\} = 0. \tag{Г.42}$$

Расчет компонент регрессора:

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,1}\} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_{1,1}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{1,1}}{\partial q_1} = a_1^2\ddot{q}_1 - a_1 g c_1, \tag{Г.43}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,2}\} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_{1,2}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{1,2}}{\partial q_1} = 2a_1\ddot{q}_1 - g c_1, \tag{Г.44}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,3}\} = g s_1, \tag{Г.45}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,4}\} = 0, \tag{Г.46}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,5}\} = 0, \tag{Г.47}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,6}\} = 0, \tag{Г.48}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,7}\} = \ddot{q}_1, \tag{Г.49}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,8}\} = 0, \tag{Г.50}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,9}\} = 0, \tag{Г.51}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,10}\} = 0, \tag{Г.52}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1\{L_{2,1}\} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_{2,1}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{2,1}}{\partial q_1} &= (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2)\ddot{q}_1 + (a_2^2 + a_1a_2c_2)\ddot{q}_2 + \\ &+ 2a_1a_2\dot{q}_2s_2\dot{q}_1 + a_1a_2\dot{q}_2s_2\dot{q}_2 - a_2gc_{12} - a_1gc_1,\end{aligned} \tag{Г.53}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1\{L_{2,2}\} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_{2,2}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{2,2}}{\partial q_1} &= 2(a_2 + a_1c_2)\ddot{q}_1 + (2a_2 + a_1c_2)\ddot{q}_2 + \\ &+ 2a_1\dot{q}_2s_2\dot{q}_1 + a_1\dot{q}_2s_2\dot{q}_2 - gc_{12},\end{aligned} \tag{Г.54}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,3}\} = 0, \tag{Г.55}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,4}\} = 2a_1s_2\ddot{q}_1 + a_1s_2\ddot{q}_2 - 2a_1\dot{q}_2c_2\dot{q}_1 - a_1c_2\dot{q}_2^2 - gs_{12}, \tag{Г.56}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,5}\} = 0, \tag{Г.57}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,6}\} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2, \tag{Г.58}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,7}\} = 0, \tag{Г.59}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,8}\} = 0, \tag{Г.60}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,9}\} = 0, \tag{Г.61}$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,10}\} = 0, \tag{Г.62}$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,1}\} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_{2,1}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L_{2,1}}{\partial q_2} = (a_2^2 + a_1 a_2 c_2)\ddot{q}_1 + a_2^2\ddot{q}_2 - \\ - a_1 a_2 \dot{q}_1 s_2 \dot{q}_1 - a_2 g c_{12}, \quad (\Gamma.63)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,2}\} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_{2,2}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L_{2,2}}{\partial q_2} = (2a_2 + a_1 c_2)\ddot{q}_1 + 2a_2\ddot{q}_2 - a_1\dot{q}_1 s_2 \dot{q}_1 - g c_{12}, \quad (\Gamma.64)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,3}\} = 0, \quad (\Gamma.65)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,4}\} = a_1 s_2 \ddot{q}_1 + a_1\dot{q}_1 c_2 \dot{q}_1 - g s_{12}, \quad (\Gamma.66)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,5}\} = 0, \quad (\Gamma.67)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,6}\} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2, \quad (\Gamma.68)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,7}\} = 0, \quad (\Gamma.69)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,8}\} = 0, \quad (\Gamma.70)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,9}\} = 0, \quad (\Gamma.71)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,10}\} = 0. \quad (\Gamma.72)$$

Уравнения движения робота с учетом (Г.43)–(Г.72):

$$\begin{cases} m_1\mathcal{L}_1\{L_{1,1}\} + m_1 x_{c1}\mathcal{L}_1\{L_{1,2}\} + m_1 y_{c1}\mathcal{L}_1\{L_{1,3}\} + I_{1,zz}\mathcal{L}_1\{L_{1,7}\} + \\ \; + m_2\mathcal{L}_1\{L_{2,1}\} + m_2 x_{c2}\mathcal{L}_1\{L_{2,2}\} + m_2 z_{c2}\mathcal{L}_1\{L_{2,4}\} + I_{2,yy}\mathcal{L}_1\{L_{2,6}\} = \tau_1 \\ m_2\mathcal{L}_2\{L_{2,1}\} + m_2 x_{c2}\mathcal{L}_2\{L_{2,2}\} + m_2 z_{c2}\mathcal{L}_2\{L_{2,4}\} + I_{2,yy}\mathcal{L}_2\{L_{2,6}\} = \tau_2 \end{cases} \quad (\Gamma.73)$$

$$\begin{cases} \bar{d}_{11}\ddot{q}_1 + \bar{d}_{12}\ddot{q}_2 + \bar{c}_{11}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{g}_{11} = \tau_1 \\ \bar{d}_{21}\ddot{q}_1 + \bar{d}_{22}\ddot{q}_2 + \bar{c}_{21}\dot{q}_1 + \bar{c}_{22}\dot{q}_2 + \bar{g}_{21} = \tau_2 \end{cases} \quad (\Gamma.74)$$

где

$$\bar{d}_{11} = m_1 a_1^2 + 2m_1 x_{c_1} a_1 + I_{1,zz} + m_2(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2) + \\ + 2m_2 x_{c2}(a_2 + a_1 c_2) + 2m_2 z_{c2} a_1 s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.75)$$

$$\bar{d}_{12} = m_2(a_2^2 + a_1 a_2 c_2) + m_2 x_{c2}(2a_2 + a_1 c_2) + m_2 z_{c2} a_1 s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.76)$$

$$\bar{d}_{21} = m_2(a_2^2 + a_1 a_2 c_2) + m_2 x_{c2}(2a_2 + a_1 c_2) + m_2 z_{c2} a_1 s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.77)$$

$$\bar{d}_{22} = m_2 a_2^2 + 2m_2 x_{c2} a_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.78)$$

$$\bar{c}_{11} = 2m_2a_1a_2\dot{q}_2s_2 + 2m_2x_{c2}a_1\dot{q}_2s_2 - 2m_2z_{c2}a_1\dot{q}_2c_2, \tag{Г.79}$$

$$\bar{c}_{12} = m_2a_1a_2\dot{q}_2s_2 + m_2x_{c2}a_1\dot{q}_2s_2 - m_2z_{c2}a_1\dot{q}_2c_2, \tag{Г.80}$$

$$\bar{c}_{21} = -m_2a_1a_2\dot{q}_1s_2 - m_2x_{c2}a_1\dot{q}_1s_2 + m_2z_{c2}a_1\dot{q}_1c_2, \tag{Г.81}$$

$$\bar{c}_{22} = 0, \tag{Г.82}$$

$$\begin{aligned}\bar{g}_{11} = &-m_1a_1gc_1 - m_1x_{c1}gc_1 + m_1y_{c1}gs_1 - m_2(a_2gc_{12} + a_1gc_1) - \\ &- m_2x_{c2}gc_{12} - m_2z_{c2}gs_{12},\end{aligned} \tag{Г.83}$$

$$\bar{g}_{21} = -m_2a_2gc_{12} - m_2x_{c2}gc_{12} - m_2z_{c2}gs_{12}. \tag{Г.84}$$

Матрицы $D(q)$, $C(q,\,\dot{q})$ и $G(q)$, с помощью которых они могут быть представлены в матричном виде равны

$$D(q) = \begin{bmatrix}\bar{d}_{11} & \bar{d}_{12}\\ \bar{d}_{21} & \bar{d}_{22}\end{bmatrix}, \qquad C(q,\,\dot{q}) = \begin{bmatrix}\bar{c}_{11} & \bar{c}_{12}\\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22}\end{bmatrix}, \qquad G(q) = \begin{bmatrix}\bar{g}_{11}\\ \bar{g}_{21}\end{bmatrix}. \tag{Г.85}$$

Пользуясь случаем можно убедиться в том, что формулы из раздела 2.2.4 дают с дополнительным замечанием, о котором будет сказано ниже, такой же результат:

$$J_{x1} = -\left(J_{v1}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega1}^{\{2\}} + \left(J_{v1}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega1}^{\{3\}} = \begin{bmatrix}a_1c_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{Г.86}$$

$$J_{y1} = \quad \left(J_{v1}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega1}^{\{1\}} - \left(J_{v1}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega1}^{\{3\}} = \begin{bmatrix}a_1s_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{Г.87}$$

$$J_{z1} = -\left(J_{v1}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega1}^{\{1\}} + \left(J_{v1}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega1}^{\{2\}} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{Г.88}$$

$$J_{x2} = -\left(J_{v2}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega2}^{\{2\}} + \left(J_{v2}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega2}^{\{3\}} = \begin{bmatrix}a_2c_{12} + a_1c_1 & a_2c_{12} + a_1c_1\\ a_2c_{12} & a_2c_{12}\end{bmatrix}, \tag{Г.89}$$

$$J_{y2} = \quad \left(J_{v2}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega2}^{\{1\}} - \left(J_{v2}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega2}^{\{3\}} = \begin{bmatrix}a_2s_{12} + a_1s_1 & a_2s_{12} + a_1s_1\\ a_2s_{12} & a_2s_{12}\end{bmatrix}, \tag{Г.90}$$

$$J_{z2} = -\left(J_{v2}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega2}^{\{1\}} + \left(J_{v2}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega2}^{\{2\}} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{Г.91}$$

$$r^0_{1,\,c1} = {}^0R_1 r^1_{1,\,c1} = \begin{bmatrix} x_{c1}c_1 - y_{c1}s_1 \\ x_{c1}s_1 + y_{c1}c_1 \\ z_{c1} \end{bmatrix}, \quad r^0_{2,\,c2} = {}^0R_2 r^2_{2,\,c2} = \begin{bmatrix} x_{c2}c_{12} + z_{c2}s_{12} \\ x_{c2}s_{12} + z_{c2}c_{12} \\ y_{c2} \end{bmatrix}, \tag{Г.92}$$

$$\mathcal{D}(q) = \sum_{i=1}^{2}\Big(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T\,{}^0R_i\,\mathcal{I}_i^i\,{}^0R_i^T J_{\omega i} + 2\cdot x\{m_i r^0_{i,\,ci}\}\cdot J_{xi} + \tag{Г.93}$$

$$+\,2\cdot y\{m_i r^0_{i,\,ci}\}\cdot J_{yi} + 2\cdot z\{m_i r^0_{i,\,ci}\}\cdot J_{zi}\Big) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{bmatrix}, \tag{Г.94}$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & 0.5(\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{21}) \\ 0.5(\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{21}) & \mathcal{D}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \tag{Г.95}$$

где

$$\mathcal{D}_{11} = \bar{d}_{11}, \tag{Г.96}$$

$$\mathcal{D}_{12} = 2m_2a_1s_2z_{c2} + (2m_2a_2 + 2m_2a_1c_2)x_{c2} + m_2a_1a_2c_2 + m_2a_2^2 + I_{2,\,yy}, \tag{Г.97}$$

$$\mathcal{D}_{21} = 2m_2a_2x_{c2} + m_2a_1a_2c_2 + m_2a_2^2 + I_{2,\,yy}, \tag{Г.98}$$

$$\mathcal{D}_{22} = \bar{d}_{22}, \tag{Г.99}$$

$$D_{11} = \mathcal{D}_{11}, \tag{Г.100}$$

$$D_{12} = \bar{d}_{12} \tag{Г.101}$$

$$D_{21} = D_{12}, \tag{Г.102}$$

$$D_{22} = \mathcal{D}_{22}, \tag{Г.103}$$

$$C_{111} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{11}}{\partial q_1}\right) = 0, \tag{Г.104}$$

$$C_{112} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{11}}{\partial q_2}\right) = m_2a_1(c_2z_{c2} - s_2x_{c2} - a_2s_2), \tag{Г.105}$$

$$C_{121} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2}\right) = m_2a_1(s_2x_{c2} - c_2z_{c2} + a_2s_2), \tag{Г.106}$$

$$C_{122} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2}\right) = 0, \tag{Г.107}$$

$$C_{211} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{21}}{\partial q_1}\right) = m_2 a_1 (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2), \tag{Г.108}$$

$$C_{212} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{21}}{\partial q_2}\right) = 0, \tag{Г.109}$$

$$C_{221} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{22}}{\partial q_1}\right) = m_2 a_1 (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2), \tag{Г.110}$$

$$C_{222} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{22}}{\partial q_2}\right) = 0, \tag{Г.111}$$

$$C_{11} = C_{111}\dot{q}_1 + C_{211}\dot{q}_2 = m_2 a_1 \dot{q}_2 (x_{c2} s_2 - z_{c2} c_2 + a_2 s_2), \tag{Г.112}$$

$$C_{12} = C_{121}\dot{q}_1 + C_{221}\dot{q}_2 = m_2 a_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)(x_{c2} s_2 - z_{c2} c_2 + a_2 s_2), \tag{Г.113}$$

$$C_{21} = C_{112}\dot{q}_1 + C_{212}\dot{q}_2 = -m_2 a_1 \dot{q}_1 (x_{c2} s_2 - z_{c2} c_2 + a_2 s_2), \tag{Г.114}$$

$$C_{22} = C_{122}\dot{q}_1 + C_{222}\dot{q}_2 = 0, \tag{Г.115}$$

$$C(q,\, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \tag{Г.116}$$

$$U = -\sum_{i=1}^{2} \left(m_i g_i^T r_{0,\,i}^i + g_i^T (m_i r_{i,\,ci}^i)\right) = -m_2 g c_{12} z_{c2} + m_1 g c_1 y_{c1} + \tag{Г.117}$$

$$+ m_2 g s_{12} x_{c2} + m_1 g s_1 x_{c1} + m_2 g a_2 s_{12} + m_2 a_1 g s_1 + m_1 a_1 g s_1, \tag{Г.118}$$

$$\begin{matrix} G_{11} = \dfrac{\partial U}{\partial q_1} = \bar{g}_{11}, \\ G_{21} = \dfrac{\partial U}{\partial q_2} = \bar{g}_{21}, \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad G(q) = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix}. \tag{Г.119}$$

Нетрудно видеть, что выражение, полученное таким образом для $C(q,\, \dot{q})$ не совпадает с ее версией из (Г.85). Это не является ошибкой, а происходит из-за того, что данная матрица может иметь несколько вариантов представления. В такой ситуации, главное, чтобы последние давали один и тот же результат при подстановке в выражение $C(q,\, \dot{q}) \cdot \dot{q}$. Это и будет являться критерием их равнозначности. Для версий матрицы $C(q,\, \dot{q})$ из (Г.85) и (Г.116) оно имеет следующее значение:

$$C(q,\, \dot{q}) \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} m_2 a_1 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\left(s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2\right) \\ m_2 a_1 \dot{q}_1^2 (c_2 z_{c2} - s_2 x_{c2} - a_2 s_2) \end{bmatrix}. \tag{Г.120}$$