

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,  
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1  
«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»  
по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. Р4135  
Фамилия И.О.,  
Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,  
должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

# Содержание

Формат А4

Приложение А Матрицы однородного преобразования	34
Приложение Б Терминология относительных измерений	36

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										3
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Копировал

Формат А4

## Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

$n$  — количество звеньев робота,  $n = 5$ ;

$q_i$  —  $i$ -ая ( $i = \overline{1, n}$ ) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в  $i$ -ом сочленении);

$q$  — вектор-столбец обобщенных координат робота,  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$ ;

${}^iR_j$  — матрица поворота, характеризующая поворот СК  $Ox_jy_jz_j$  относительно СК  $Ox_iy_iz_i$ ;

${}^iA_j$  — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК  $Ox_iy_iz_i$  относительно СК  $Ox_iy_iz_i^*$ ;

$r_{j,k}^i$  — вектор из начала  $Ox_jy_jz_j$  в начало  $Ox_ky_kz_k$ , выраженный относительно  $Ox_iy_iz_i^{**}$ ;

$g_i$  — ускорение свободного падения, выраженное относительно  $Ox_i y_i z_i$ ;

$v_j^i$  — линейная скорость начала  $Ox_j y_j z_j$  относительно используемой в решении ИСО<sup>\*\*\*</sup> выраженной относительно  $Ox_i y_i z_i$ ;

$a_j^i$  — линейное ускорение начала  $Ox_jy_jz_j$  относительно ИСО, выраженное относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

\* За пояснениями обратитесь к Приложению А

<sup>\*\*</sup> За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

\*\*\* В качестве ИСО в документе используется  $Ox_0y_0z_0$ .

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Изм. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	<p><math>{}^i R_j</math> — матрица поворота, характеризующая поворот СК <math>Ox_j y_j z_j</math> относительно СК <math>Ox_i y_i z_i</math>;</p> <p><math>{}^i A_j</math> — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК <math>Ox_j y_j z_j</math> относительно СК <math>Ox_i y_i z_i^*</math>;</p> <p><math>r_{j,k}^i</math> — вектор из начала <math>Ox_j y_j z_j</math> в начало <math>Ox_k y_k z_k</math>, выраженный относительно <math>Ox_i y_i z_i^{**}</math>;</p> <p><math>g_i</math> — ускорение свободного падения, выраженное относительно <math>Ox_i y_i z_i</math>;</p> <p><math>v_j^i</math> — линейная скорость начала <math>Ox_j y_j z_j</math> относительно используемой в решении ИСО,<sup>***</sup> выраженная относительно <math>Ox_i y_i z_i</math>;</p> <p><math>a_j^i</math> — линейное ускорение начала <math>Ox_j y_j z_j</math> относительно ИСО, выраженное относительно <math>Ox_i y_i z_i</math>;</p>
										<p>* За пояснениями обратитесь к Приложению А</p> <p>** За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.</p> <p>*** В качестве ИСО в документе используется <math>Ox_0 y_0 z_0</math>.</p>
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										4

$\omega_j^i$  — угловая скорость вращения  $Ox_jy_jz_j$  относительно ИСО, выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$\omega_{j,k}^i$  — угловая скорость вращения  $Ox_ky_kz_k$  относительно  $Ox_jy_jz_j$ , выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$\dot{\omega}_j^i$  — угловое ускорение  $Ox_jy_jz_j$  относительно ИСО, выраженное относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$z_j^i$  — орт  $[0 \ 0 \ 1]^T$  системы координат  $Ox_jy_jz_j$ , выраженный относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$f_j^i$  — сила, действующая на  $j$ -ое звено (тело) механизма со стороны  $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженная относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$\tau_j^i$  — момент силы, действующий на  $j$ -ое звено (тело) механизма со стороны  $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженный относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$\tau_i$  — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты  $q_i$ ;

$m_i$  — масса  $i$ -го звена;

$\mathcal{I}_j^i$  — тензор инерции  $j$ -го звена относительно  $Ox_iy_iz_i$ ;

$a_i, d_i$  — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга,  $i = \overline{1, n}$ ;

$\alpha_i, \theta_i$  — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга,  $i = \overline{1, n}$ ;

$s_\gamma, c_\gamma$  — синус и косинус угла  $\gamma$  соответственно;

$s_i, c_i$  — синус и косинус угла  $\theta_i$  соответственно;

$x\{a\}$  — абсцисса вектора  $a$ ; аналогично  $y\{a\}$  и  $z\{a\}$  означают его ординату и аппликату соответственно;

$A^{\{i\}}$  —  $i$ -ая строка матрицы  $A$ .

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										5
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	

## Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории\*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

- в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;
- раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;
- в разделе 4 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах апробации на реальном роботе и проч.

\* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движения схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
Лист				
6				

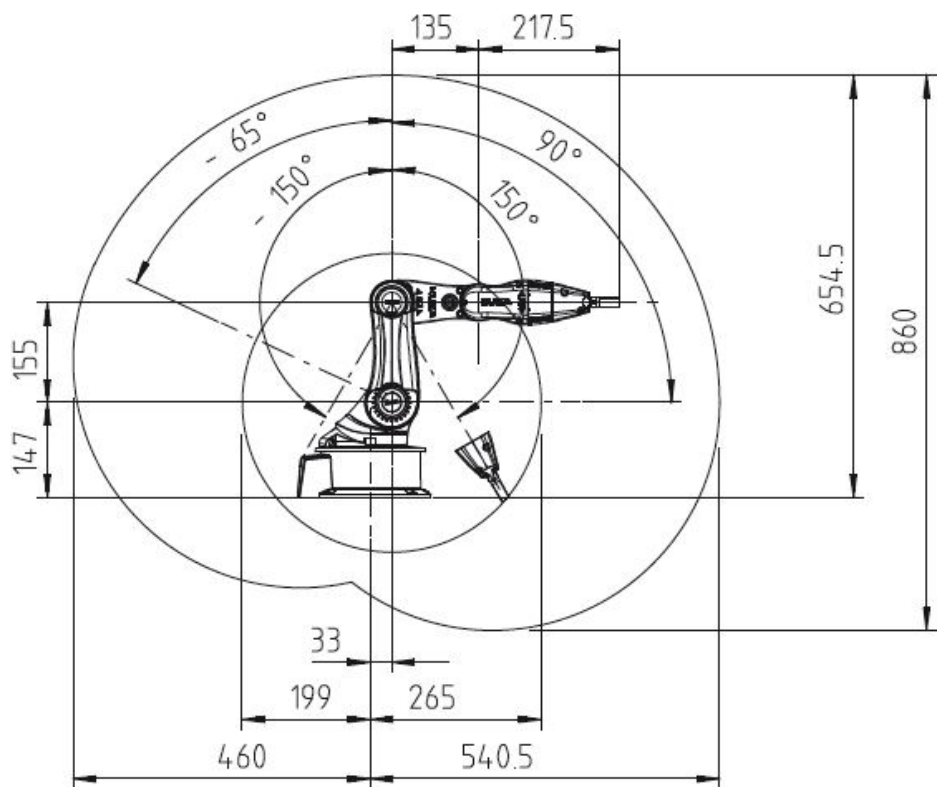
# 1 Описание манипулятора

Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

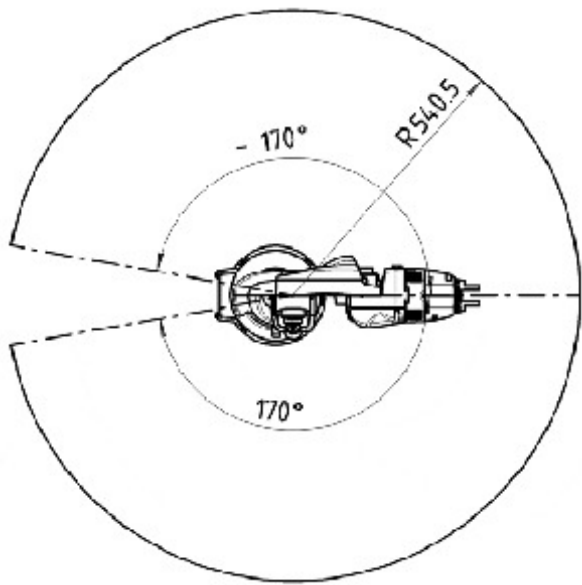
Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с <sup>-1</sup>
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В

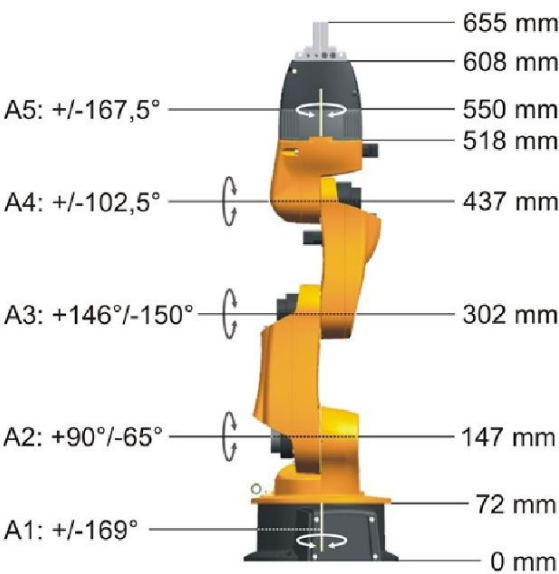
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата



а)



б)



в)

Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

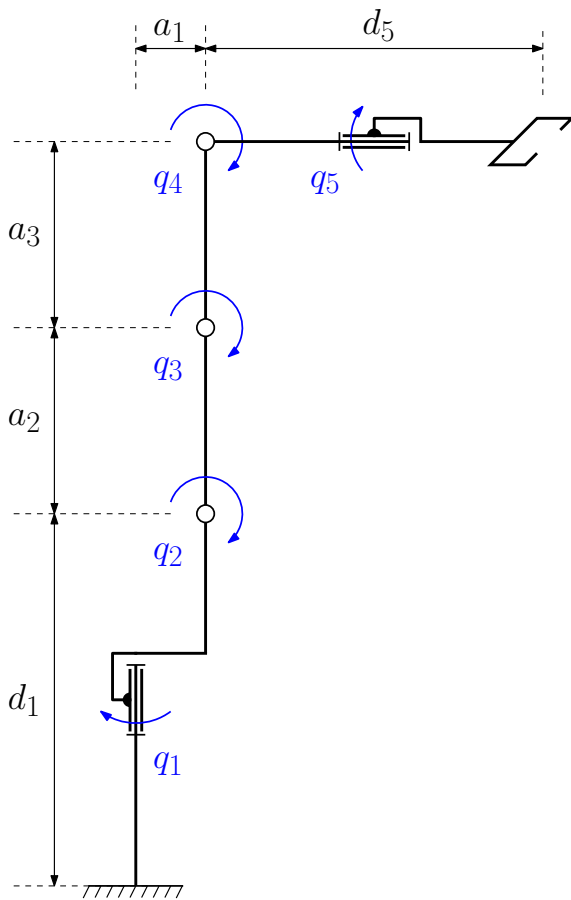


## 2 Математическая модель манипулятора

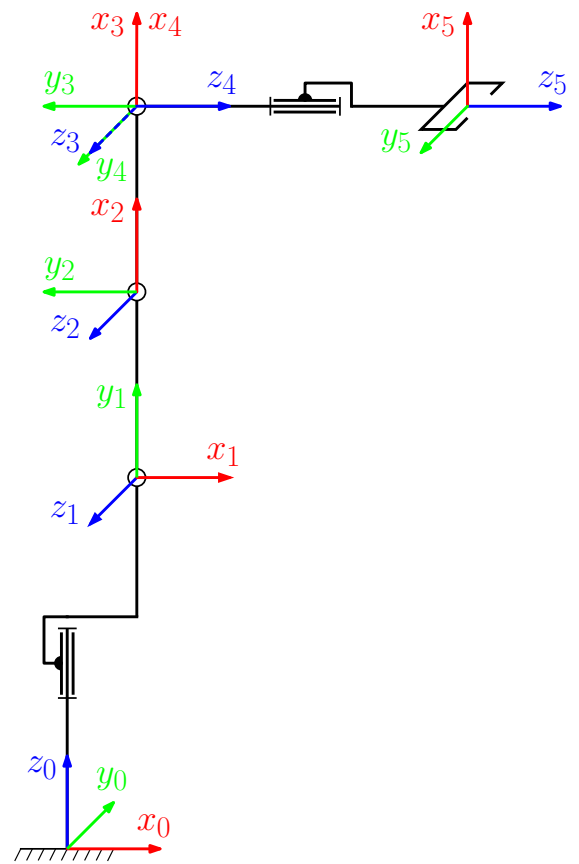
### 2.1 Кинематика манипулятора

#### 2.1.1 Общие замечания

Последовательная кинематическая цепь рассматриваемого манипулятора, включающая только вращательные КП V-класса (цилиндрические шарниры), изображена на рисунке 2.1а.



а)



б)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T = [0, \pi/2, 0, 0, 0]^T$ ; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

Инв. № подл.	Подп. и дата				Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ		Лист								
												9								

а)

б)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T = [0, \pi/2, 0, 0, 0]^T$ ; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

а) «привязка» к каждому звену СК, чьи оси удовлетворяют следующим условиям:

- 1) ось  $z_{i-1}$  направлена вдоль оси  $i$ -ой КП;
- 2) ось  $x_i$  перпендикулярна оси  $z_{i-1}$  и пересекает ее;
- 3) ось  $y_i$  дополняет оси  $z_i$  и  $x_i$  до правой декартовой СК.

б) определение параметров ДХ:

- 1)  $a_i$  — расстояния от  $z_{i-1}$  до  $z_i$  вдоль  $x_i$ ;
- 2)  $\alpha_i$  — угла от  $z_{i-1}$  до  $z_i$  вокруг  $x_i$ ;
- 3)  $d_i$  — расстояния от  $x_{i-1}$  до  $x_i$  вдоль  $z_{i-1}$ ;
- 4)  $\theta_i$  — угла от  $x_{i-1}$  до  $x_i$  вокруг  $z_{i-1}$ .

в) расчет матриц однородного преобразования в соответствии со следующими формулами:

$${}^{i-1}A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i} \quad (2.1)$$

где  $R_{z,\theta_i}$  — матрица поворота вокруг оси  $z$  на угол  $\theta_i$ ,  $T_{z,d_i}$  — матрица смещения вдоль оси  $z$  на расстояние  $d$ ,  $T_{x,a_i}$  — матрица смещения вдоль оси  $x$  на расстояние  $a_i$ ,  $R_{x,\alpha_i}$  — матрица поворота вокруг оси  $x$  на угол  $\alpha_i$ , равные

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$
$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$
$${}^0A_5 = \prod_{i=1}^5 {}^{i-1}A_i(q_i). \quad (2.6)$$
$${}^0R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Таблица 2.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

Звено, $i$	$a_i$ , мм	$\alpha_i$ , рад	$d_i$ , мм	$\theta_i$ , рад
1	33	$\pi/2$	147	$\pi \cdot \frac{169^\circ}{180^\circ} - q_1$
2	155	0	0	$\pi \cdot \frac{65^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi}{2} - q_2$
3	135	0	0	$-\pi \cdot \frac{146^\circ}{180^\circ} - q_3$
4	0	$\pi/2$	0	$\pi \cdot \frac{102.5^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi}{2} - q_4$
5	0	0	218	$\pi \cdot \frac{167.5^\circ}{180^\circ} - q_5$

Выполняя соответствующие вычисления получаем:

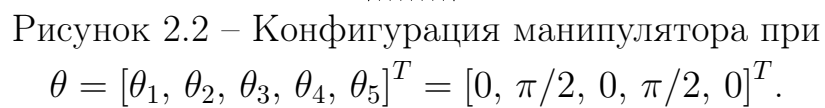
$${}^0A_5 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.147 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.155 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.135 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.218 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.655 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

что предложенный способ решения ПЗК в данном случае приводит к правильному ответу.

### 2.1.3 Обратная задача кинематики

Заданные смещение и поворот СК  $Ox_5y_5z_5$  относительно СК  $Ox_0y_0z_0$  можно описать с помощью матрицы  ${}^0A_5$ . Используя ее и матрицы из (2.5), найти расчетные формулы для углов  $q_i$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) можно из следующих соображений.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
				Лист
				12


$${}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$
$${}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5, \quad (2.10)$$

$${}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11}c_1 + r_{21}s_1 & r_{12}c_1 + r_{22}s_1 & r_{13}c_1 + r_{23}s_1 & p_xc_1 + p_ys_1 - a_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ r_{11}s_1 - r_{21}c_1 & r_{12}s_1 - r_{22}c_1 & r_{13}s_1 - r_{23}c_1 & p_xs_1 - p_yc_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$
$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 c_{234} & -s_5 c_{234} & s_{234} & a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_5 s_{234} \\ c_5 s_{234} & -s_5 s_{234} & -c_{234} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_5 c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов  $\theta_1$ ,  $\theta_5$  и  $\theta_{234}$  дают

$$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14)$$
$$\begin{aligned} & \begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \text{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \text{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \quad (2.15) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & \begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \text{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \text{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16) \end{aligned}$$



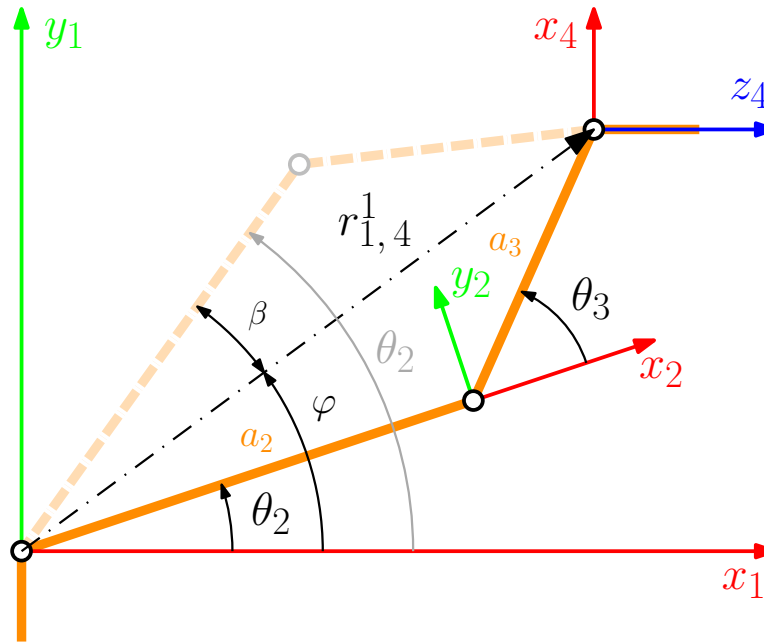


Рисунок 2.3 – Плоская часть манипулятора

где  $x_r$  и  $y_r$  — проекции вектора  $r_{1,4}^1$  на оси абсцисс и ординат (их значения см. в (2.19)), для возможных значений угла  $\theta_2$  получаем следующие формулы:

$$\theta_2^I = \varphi(\theta_1^I) + \beta(\theta_3^I), \quad \theta_2^{II} = \varphi(\theta_1^I) - \beta(\theta_3^{II}), \quad (2.24)$$

$$\theta_2^{III} = \varphi(\theta_1^{II}) + \beta(\theta_3^{III}), \quad \theta_2^{IV} = \varphi(\theta_1^{II}) - \beta(\theta_3^{IV}). \quad (2.25)$$

Формулы для значений угла  $\theta_4$  после этого с учетом (2.13) приобретают простой вид:

$$\theta_4^{I,II} = \theta_{234}^I - \theta_2^{I,II} - \theta_3^{I,II}, \quad \theta_4^{III,IV} = \theta_{234}^{II} - \theta_2^{III,IV} - \theta_3^{III,IV}. \quad (2.26)$$

Таким образом, любые положение и ориентацию схвата относительно основания манипулятор может обеспечить 4-мя собственными конфигурациями, которым соответствуют следующие наборы значений для его обобщенных координат  $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T$  (с учетом таблицы 2.1):

$$\theta^I = [\theta_1^I \ \theta_2^I \ \theta_3^I \ \theta_4^I \ \theta_5^I]^T, \quad \theta^{II} = [\theta_1^I \ \theta_2^{II} \ \theta_3^{II} \ \theta_4^{II} \ \theta_5^I]^T, \quad (2.27)$$

$$\theta^{III} = [\theta_1^{II} \ \theta_2^{III} \ \theta_3^{III} \ \theta_4^{III} \ \theta_5^{II}]^T, \quad \theta^{IV} = [\theta_1^{II} \ \theta_2^{IV} \ \theta_3^{IV} \ \theta_4^{IV} \ \theta_5^{II}]^T, \quad (2.28)$$

$$q^{I,II,III,IV} = \pi \cdot \left[ \frac{169^\circ}{180^\circ} \ \frac{65^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} \quad -\frac{146^\circ}{180^\circ} \ \frac{102.5^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} \ \frac{167.5^\circ}{180^\circ} \right]^T - \theta^{I,II,III,IV}. \quad (2.29)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\theta_2 = \varphi(\theta_1^I) + \beta(\theta_3^I),$	$\theta_2^{\text{II}} = \varphi(\theta_1^{\text{I}}) - \beta(\theta_3^{\text{II}}),$	(2.24)																								
					$\theta_2^{\text{III}} = \varphi(\theta_1^{\text{II}}) + \beta(\theta_3^{\text{III}}),$	$\theta_2^{\text{IV}} = \varphi(\theta_1^{\text{II}}) - \beta(\theta_3^{\text{IV}}).$	(2.25)																								
					Формулы для значений угла $\theta_4$ после этого с учетом (2.13) приобретают простой вид:																										
					$\theta_4^{\text{I,II}} = \theta_{234}^{\text{I}} - \theta_2^{\text{I,II}} - \theta_3^{\text{I,II}}, \quad \theta_4^{\text{III,IV}} = \theta_{234}^{\text{II}} - \theta_2^{\text{III,IV}} - \theta_3^{\text{III,IV}}.$			(2.26)																							
					Таким образом, любое положение и ориентацию схвата относительно основания манипулятор может обеспечить 4-мя собственными конфигурациями, которым соответствуют следующие наборы значений для его обобщенных координат $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T$ (с учетом таблицы 2.1):																										
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\theta^{\text{I}} = [\theta_1^{\text{I}} \ \theta_2^{\text{I}} \ \theta_3^{\text{I}} \ \theta_4^{\text{I}} \ \theta_5^{\text{I}}]^T, \quad \theta^{\text{II}} = [\theta_1^{\text{II}} \ \theta_2^{\text{II}} \ \theta_3^{\text{II}} \ \theta_4^{\text{II}} \ \theta_5^{\text{I}}]^T,$		(2.27)																								
					$\theta^{\text{III}} = [\theta_1^{\text{III}} \ \theta_2^{\text{III}} \ \theta_3^{\text{III}} \ \theta_4^{\text{III}} \ \theta_5^{\text{II}}]^T, \quad \theta^{\text{IV}} = [\theta_1^{\text{IV}} \ \theta_2^{\text{IV}} \ \theta_3^{\text{IV}} \ \theta_4^{\text{IV}} \ \theta_5^{\text{II}}]^T,$		(2.28)																								
					$q^{\text{I,II,III,IV}} = \pi \cdot \left[ \frac{169^\circ}{180^\circ} \ \frac{65^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} \quad -\frac{146^\circ}{180^\circ} \ \frac{102.5^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} \ \frac{167.5^\circ}{180^\circ} \right]^T - \theta^{\text{I,II,III,IV}}.$		(2.29)																								
Изм.					Лист					№ докум.					Подп.					Дата					КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист	
																														16	



## 2.2 Динамика манипулятора

### 2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК  $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}^*$ , где  $i = \overline{1,5}$ , показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК  $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$  сонаправлена с  $Ox_iy_iz_i$ .

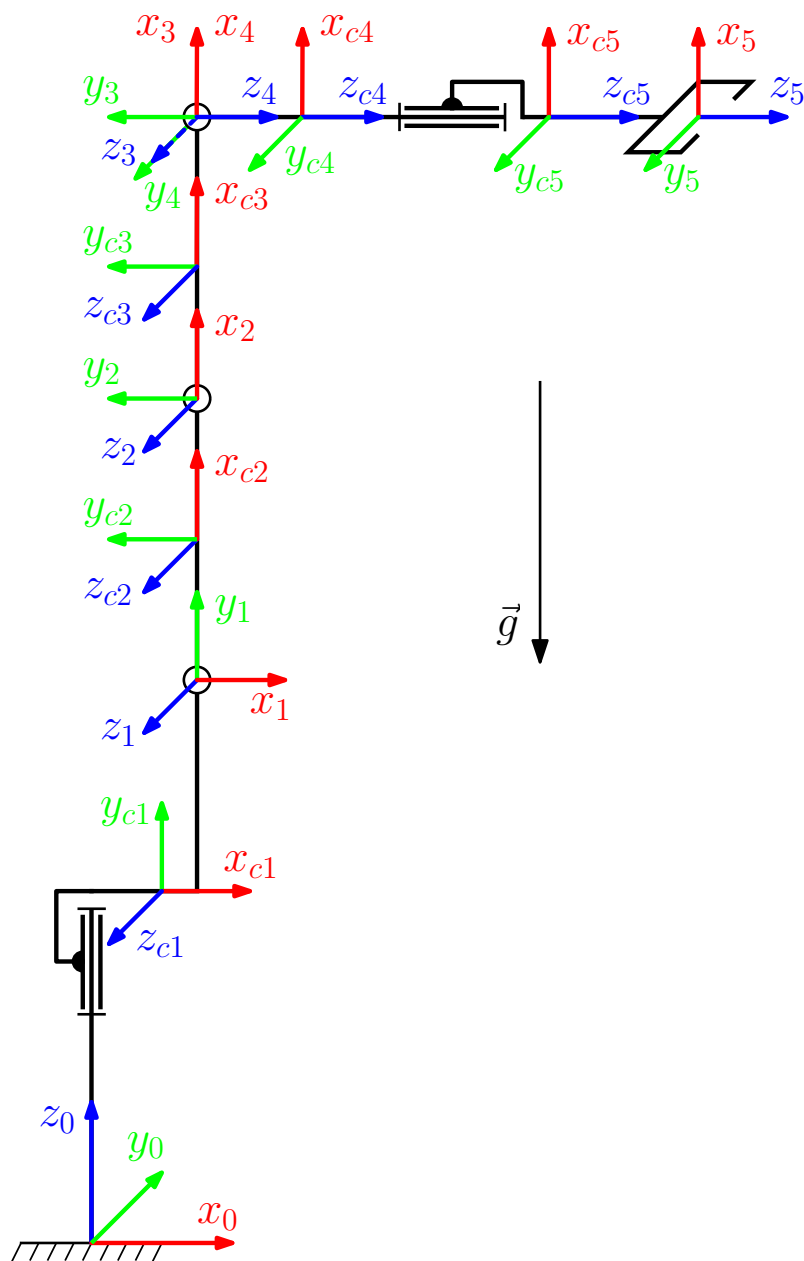


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора  $\vec{g}$ .

\* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Инв. № дубл.				Взам. инв. №				Подп. и дата						
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ														Лист
																			17

The diagram illustrates three coordinate systems relative to a vertical axis and a gravity vector  $\vec{g}$ . The base system  $(x_0, y_0, z_0)$  is at the bottom, with  $x_0$  horizontal,  $y_0$  at 45°, and  $z_0$  vertical. A middle system  $(x_{c1}, y_{c1}, z_{c1})$  is at a height, with  $x_{c1}$  horizontal,  $y_{c1}$  vertical, and  $z_{c1}$  at 45°. The top system  $(x_1, y_1, z_1)$  is at a higher point, with  $x_1$  horizontal,  $y_1$  vertical, and  $z_1$  at 45°. The gravity vector  $\vec{g}$  points downwards.

Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора  $\vec{g}$ .

\* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.



### 2.2.2 Вывод уравнений движения

Потенциальная энергия манипулятора

$$U = - \sum_{i=1}^5 (m_i g_i^T r_{0,ci}^i) = - \sum_{i=1}^5 (m_i g_i^T r_{0,i}^i + g_i^T (m_i r_{i,ci}^i)), \quad (2.37)$$

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$v_i^0 = -J_{vi}\dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.38)$$

связь между линейными скоростями начал соответствующих СК и вектором  $\dot{q}$ :

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,1}^0 - r_{0,0}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,1}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$J_{v3} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,1}^0) & z_2^0 \times (r_{0,3}^0 - r_{0,2}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}^T, \quad (2.42)$$

где  $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$  — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_i^0 = -J_{\omega i}\dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.43)$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором  $\dot{q}$ :

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Кинетическая энергия манипулятора

$$K = \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{2} m_i (v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i) \right). \quad (2.47)$$

Подп. и дата	
Инв. № дубл.	
Взам. инв. №	
Подп. и дата	
Инв. № подл.	

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_2^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_2^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

где  $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$  — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_i^0 = -J_{\omega i} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.43)$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором  $\dot{q}$ :

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$
$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$
$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Кинетическая энергия манипулятора

$$K = \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{2} m_i (v_i^i)^T v_i^i + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i) \right). \quad (2.47)$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						19

## Функция Лагранжа

$$\begin{aligned}
L &= K - U = \\
&= \sum_{i=1}^5 \left( m_i \left( \frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right) + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i + g_i) + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i \right) = \\
&= \sum_{i=1}^5 \left( m_i \underbrace{\left( \frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right)}_{L_{i,1}} + m_i x_{ci} \cdot \underbrace{x \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,2}} + \right. \\
&\quad + m_i y_{ci} \cdot \underbrace{y \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,3}} + m_i z_{ci} \cdot \underbrace{z \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,4}} + I_{i,xx} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (x \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,5}} + \\
&\quad + I_{i,yy} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (y \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,6}} + I_{i,zz} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (z \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,7}} + I_{i,xy} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot y \{\omega_i^i\}}_{L_{i,8}} + \\
&\quad \left. + I_{i,xz} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,9}} + I_{i,yz} \cdot \underbrace{y \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,10}} \right). \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1, 5} \quad \Rightarrow \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,10}\}) = \tau_5 \end{cases} \quad (2.50)$$

где  $\mathcal{L}_j$  — оператор, работающий в соответствии с формулой:

$$\mathcal{L}_j : \quad \mathcal{L}_j \{f\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad (2.51)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
				20

где в свою очередь  $f = f(\dot{q}(t), q(t))$ . Если же заметить, что

$$\mathcal{L}_j\{L_{i,k}\} = 0 \quad \text{при } j > i, \quad i, j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 10}, \quad (2.52)$$

то выражения для них упрощаются до:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=2}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ m_5 \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,1}\} + m_5 x_{c5} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,2}\} + \dots + I_{5,yz} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,10}\} = \tau_5 \end{cases} \quad (2.53)$$

или в матричном виде

$$\tau = \xi \chi, \quad (2.54)$$

где  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_5]^T$  — вектор обобщенных моментов,

$\chi = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_5]^T \in \mathbb{R}^{50}$  — вектор параметров робота, где в свою очередь

$$\chi_i = \begin{bmatrix} m_i & m_i x_{ci} & m_i y_{ci} & m_i y_{ci} & I_{i,xx} & I_{i,yy} & I_{i,zz} & I_{i,xy} & I_{i,xz} & I_{i,yz} \end{bmatrix}^T; \quad (2.55)$$

$\xi$  — так называемый регрессор, равный

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \dots & \xi_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \xi_{2,2} & \dots & \xi_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \xi_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

где в свою очередь  $O_{1 \times 10}$  — вектор-строка, состоящая из 10 нулей, а  $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\ddot{q}, \dot{q}, q)$  — вектор-строка, рассчитываемый по формуле

$$\xi_{j,i} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_j\{L_{i,1}\} & \mathcal{L}_j\{L_{i,2}\} & \dots & \mathcal{L}_j\{L_{i,10}\} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

### 2.2.3 Учет динамики приводов

Уравнения, описывающие динамику приводов, в матричном виде имеют вид

$$I_a \ddot{q} = \tau_e - \tau, \quad (2.58)$$

Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									21

где  $I_a$  — диагональная матрица приведенных к выходным валам моментов инерции приводов,  $\tau_e$  — вектор-столбец приведенных к выходным валам приводов моментов силы, развиваемых двигателями, имеющие вид:

$$I_a = \begin{bmatrix} I_{a,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{a,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_{a,5} \end{bmatrix}, \quad \tau_e = \begin{bmatrix} \tau_{e,1} \\ \tau_{e,2} \\ \vdots \\ \tau_{e,5} \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Объединяя уравнения (2.54) и (2.58), получим

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi \chi, \quad (2.60)$$

а, добавив в это выражение учет моментов трения, окончательно будем иметь

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi \chi + t_f. \quad (2.61)$$

В качестве модели трения возьмем поясняемую рисунком 2.5 и описываемую следующим уравнением

$$\tau_f(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \operatorname{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}, \quad (2.62)$$

где  $f_v$ ,  $f_c$  — диагональные матрицы коэффициентов вязкого и сухого трения соответственно,  $f_{\text{off}}$  — вектор-столбец сдвигов в моментах силы, имеющие вид

$$f_v = \begin{bmatrix} f_{v,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{v,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{v,5} \end{bmatrix}, \quad f_c = \begin{bmatrix} f_{c,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{c,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f_{c,5} \end{bmatrix}, \quad f_{\text{off}} = \begin{bmatrix} f_{\text{off},1} \\ f_{\text{off},2} \\ \vdots \\ f_{\text{off},5} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Подставляя (2.62) в (2.61), получим

$$\tau_e = I_a \ddot{q} + \xi \chi + f_v \dot{q} + f_c \operatorname{sign}(\dot{q}) + f_{\text{off}}. \quad (2.64)$$

Если ввести в рассмотрение новые матрицы  $\bar{\chi} = [\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_5]^T$  и

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{1,1} & \bar{\xi}_{1,2} & \cdots & \bar{\xi}_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \bar{\xi}_{2,2} & \cdots & \bar{\xi}_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \bar{\xi}_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										22
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						Формат А4

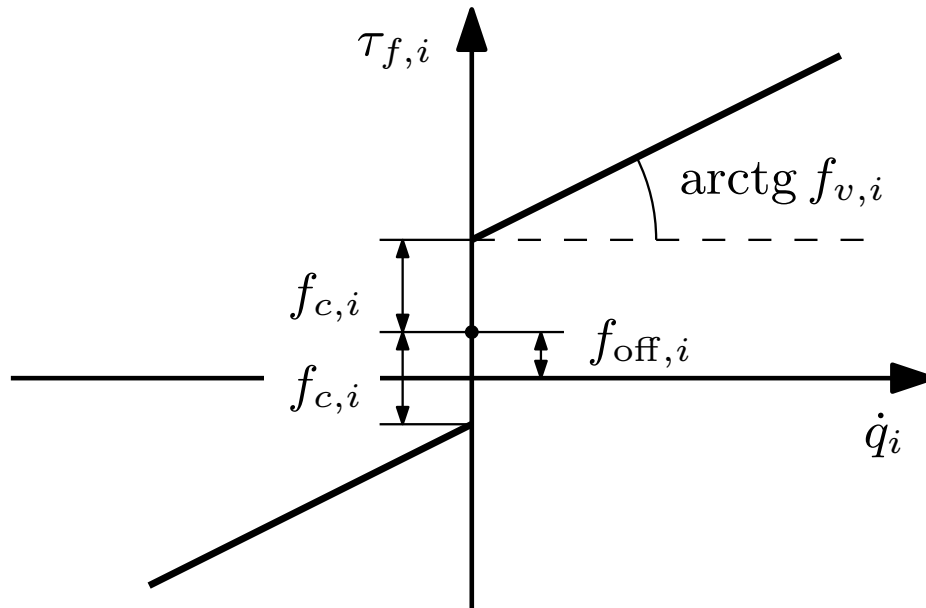


Рисунок 2.5 – График, поясняющий выбранную модель трения.

определяемые выражениями

$$\bar{\chi}_i = \begin{bmatrix} \chi_i & I_{a,i} & f_{v,i} & f_{c,i} & f_{\text{off},i} \end{bmatrix}^T, \quad (2.66)$$

$$\bar{\xi}_{j,i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & i \neq j \\ \begin{bmatrix} \xi_{j,i} & \ddot{q}_j & \dot{q}_j & \text{sign}(\dot{q}_j) & 1 \end{bmatrix}, & i = j \end{cases} \quad (2.67)$$

то данное выражение может быть записано в следующем матричном виде:

$$\tau_e = \bar{\xi} \bar{\chi}. \quad (2.68)$$

#### 2.2.4 Альтернативная матричная форма записи

Выражение (2.54) может быть переписано в форме

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q), \quad (2.69)$$

где  $D(q)$  — матрица инерции,  $C(q, \dot{q})$  — матрица центробежных и Кориолисовых сил,  $G(q)$  — вектор гравитации. С учетом этого факта и уравнения (2.61) можно получить, что

$$\tau_e = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \quad (2.70)$$

где  $M(q) = I_a + D(q)$ .

Инов. № дубл.	Подп. и дата	Инов. № дубл.	Подп. и дата	Инов. № подл.	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
											23





$$= \begin{bmatrix} -\dot{q}^T (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} + \dot{q}^T (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \\ \dot{q}^T (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} - \dot{q}^T (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \\ -\dot{q}^T (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} + \dot{q}^T (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T J_x \dot{q} \\ \dot{q}^T J_y \dot{q} \\ \dot{q}^T J_z \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

где

$$J_x = -(J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} + (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \quad (2.77)$$

$$J_y = (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} - (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \quad (2.78)$$

$$J_z = -(J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} + (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}}. \quad (2.79)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										25
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Копировал					Формат А4

### 3 Идентификация параметров манипулятора

#### 3.1 Описание метода

Для определения неизвестных значений параметров робота, составляющих вектор  $\bar{\chi}$ , воспользуемся методом наименьших квадратов. Алгоритм необходимых действий в таком случае будет следующим:

- а) с помощью поставляемого производителем робота ПО\* дать манипулятору команды на последовательное достижение  $N$  произвольных конфигураций, по возможности охватывающих всю его рабочую область; во время его работы снять и записать следующие показания:

$q(t_1)$	$\dot{q}(t_1)$	$\ddot{q}(t_1)$	$\tau_e(t_1)$
$q(t_2)$	$\dot{q}(t_2)$	$\ddot{q}(t_2)$	$\tau_e(t_2)$
$q(t_3)$	$\dot{q}(t_3)$	$\ddot{q}(t_3)$	$\tau_e(t_3)$
...	...	...	...
$q(t_k)$	$\dot{q}(t_k)$	$\ddot{q}(t_k)$	$\tau_e(t_k)$

где  $t_k > t_3 > t_2 > t_1$ ;

- б) используя полученные данные, составить матрицы

$$\Xi = \begin{bmatrix} \bar{\xi}(\ddot{q}(t_1), \dot{q}(t_1), q(t_1)) \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_2), \dot{q}(t_2), q(t_2)) \\ \dots \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_k), \dot{q}(t_k), q(t_k)) \end{bmatrix}, \quad T_e = \begin{bmatrix} \tau_e(t_1) \\ \tau_e(t_2) \\ \dots \\ \tau_e(t_k) \end{bmatrix}; \quad (3.1)$$

- в) рассчитать оценку  $\hat{\chi}$  вектора  $\bar{\chi}$  по формуле:

$$\hat{\chi} = (\Xi^T \cdot \Xi)^{-1} \cdot \Xi^T \cdot T_e; \quad (3.2)$$

\* У Youbot такое «стандартное» ПО осуществляет управление углами в сочленениях робота с помощью ПИД-регуляторов.

Изн. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Изн. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										26
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

- г) дать роботу команды на достижение других  $N$  позиций и при этом получить те же самые данные;
- д) используя найденную в п. в) оценку  $\hat{\chi}$  и снятые в п. г) данные, рассчитать по формуле (2.68) значения для  $\tau_e$ ; сравнить их с полученными в п. г) и сделать выводы об успешности идентификации.

3.2 Результаты

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										27
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						Формат А4
Копировал										

## 4 Синтез систем управления

### 4.1 Предварительные замечания

Каждый из приводов манипулятора робота Kuka Youbot имеет собственную систему управления, структура которой иллюстрируется схемой с рисунка 4.1. Из нее видно, что каждый из приводов робота может управляться заданием значения для угла  $q_{di}$ , или скорости  $\dot{q}_{di}$ , или момента силы  $\tau_{ed,i}$ , который должен быть на нем обеспечен. Это значение подается на вход соответствующего ПИД-регулятора, коэффициенты которого доступны настройке, и далее (уже в виде сигнала напряжения  $u$ ) — на контролируемый двигатель.

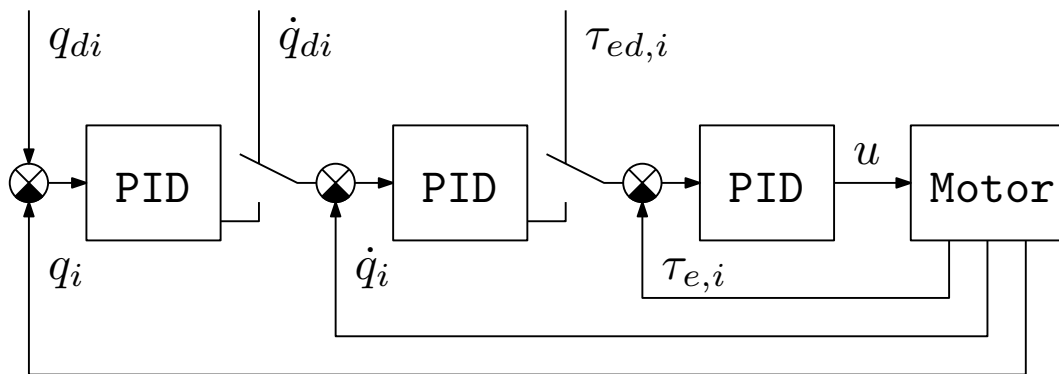


Рисунок 4.1 – Структура системы управления, контролирующей работу каждого из приводов робота.

Далее в тексте документа будут рассмотрены системы управления, в которых в качестве управляющего сигнала рассматривается вектор  $\tau_e(t)$ . При этом будет предполагаться, что задаваемые значения для моментов сил достигаются на двигателях мгновенно. Такое предположение будем считать возможным по той причине, что процессы в контуре момента в рассмотренной выше системе управления характеризуются малыми временами переходных процессов. В качестве иллюстрации к сказанному можно привести рисунок 4.2. На нем показан график переходной функции системы управления моментом силы, развиваемым приводом ???-го звена.

Из величин, описывающих состояние робота в данный момент времени, в используемом ПО доступны вектора  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$  и  $\tau_e(t)$ .

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
				Лист
				28

pid\_transition\_function.pdf

Рисунок 4.2 – График переходной функции системы управления приводом ???-го звена.

## 4.2 Система управления для принятия определенной конфигурации

Для системы управления процессом принятия роботом желаемой конфигурации, описываемой вектором  $q_d = [q_{d1} \ q_{d2} \ q_{d3} \ q_{d4} \ q_{d5}]^T = const$ , выберем следующий закон управления:

$$\tau_e = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \quad (4.1)$$

где  $K_p = \text{diag}\{k_{pi}\} = const$  и  $K_d = \text{diag}\{k_{di}\} = const$ , при этом  $k_{pi} > 0$  и  $k_{di} > 0$  для  $\forall i = \overline{1, 5}$ . С учетом его и уравнения (2.70) модель замкнутой системы примет вид:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q}. \quad (4.2)$$

Это выражение с использованием обозначений

$$e = q - q_d, \quad x = \begin{bmatrix} e \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

можно переписать следующим образом

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.4)$$

Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									29



С учетом его и уравнения (2.70) модель замкнутой системы опишется следующим выражением:

$$M(q)(\ddot{q}_d - \ddot{q} + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)) = 0, \quad (4.9)$$

которое после деления на  $M(q)$  и применения обозначения

$$\varepsilon = q_d - q \quad (4.10)$$

может быть переписано в виде:

$$\ddot{\varepsilon} + K_d\dot{\varepsilon} + K_p\varepsilon = 0. \quad (4.11)$$

Согласно последнему уравнению, использование закона управления (4.8) дает возможность полностью определять поведение робота значениями матриц  $K_p$  и  $K_d$ .

В данной работе матрицы  $K_p$  и  $K_d$  были выбраны диагональными:

$$K_p = \text{diag}\{k_{pi}\}, \quad K_d = \text{diag}\{k_{di}\}, \quad (4.12)$$

потому что это позволяет «разбить» уравнение (4.11) на 5 независимых дифференциальных уравнений, а их компоненты — положительными:

$$k_{pi} > 0, \quad k_{di} > 0, \quad \forall i = \overline{1, 5}, \quad (4.13)$$

так как при этом система получается устойчивой (все 5 уравнений получаются имеющими корни только с отрицательной вещественной частью).

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										31
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Заключение

Текст заключения

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						32



## Список использованных источников

- 1 KUKA YUBOT. — URL: <http://www.technomatix.ru/kuka-youbot> (дата обращения: 08.03.2017).
- 2 YouBot Detailed Specifications. — URL: [http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot\\_Detailed\\_Specifications](http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications) (дата обращения: 04.04.2017).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										33
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Приложение А  
(рекомендуемое)

**Матрицы однородного преобразования**

Матрицей однородного преобразования  ${}^i A_j$  называется матрица размера  $4 \times 4$ , служащая для описания смещения и поворота СК  $Ox_j y_j z_j$  относительно СК  $Ox_i y_i z_i$  и имеющая следующую структуру:

$${}^i A_j = \begin{bmatrix} {}^i R_j & r_{i,j}^i \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где  $O_{1 \times 3} = [0 \ 0 \ 0]$ .

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки  $C$  относительно  $Ox_0 y_0 z_0$  при известных векторах  $r_C^2$ ,  $r_{0,1}^0$  и  $r_{1,2}^1$  и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r_C^0 = {}^0 R_1 r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ r_C^1 = {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \end{cases} \Rightarrow r_C^0 = {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \quad (\text{A.2})$$

где  $r_C^0$ ,  $r_C^1$ ,  $r_C^2$  — радиус-векторы точки  $C$  в  $Ox_0 y_0 z_0$ ,  $Ox_1 y_1 z_1$  и  $Ox_2 y_2 z_2$  соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами  ${}^0 A_1$  и  ${}^1 A_2$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										34
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [1].

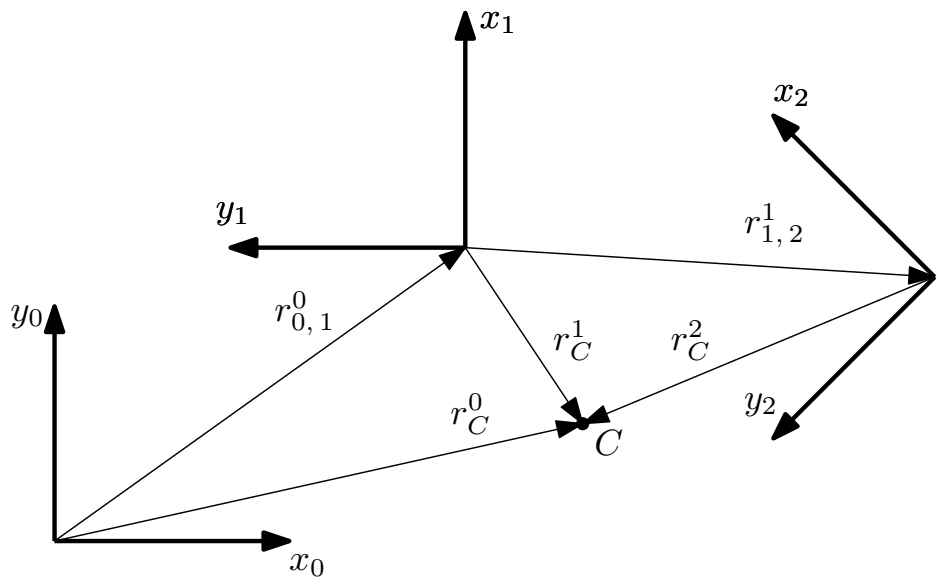


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Приложение Б  
(рекомендуемое)

Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью  $v = 1$  м/с, облако, движущееся со скоростью  $u = 3$  м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат  $Ox_0y_0z_0$ ,  $Ox_1y_1z_1$  и  $Ox_2y_2z_2$ . Опишем скорость движения облака вектором  $\vec{V}$ . В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

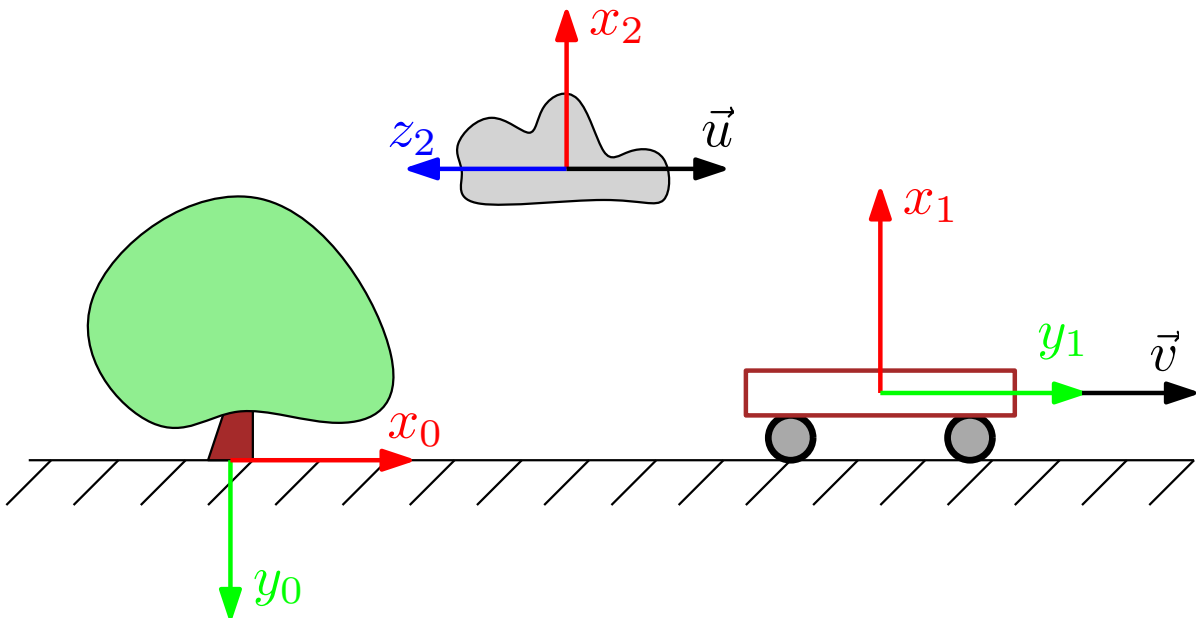


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Таблица Б.1 – Координаты вектора  $V$  в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора $V$	Значение $V^T$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$ , выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$ , выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$ , выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$ , выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$ , выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$ , выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата