

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1
«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»
по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. Р4135
Фамилия И.О.,
Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,
должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Обозначения и сокращения 4

Введение 6

1 Описание манипулятора 7

2 Математическая модель манипулятора 9

2.1 Кинематика манипулятора 9

2.1.1 Общие замечания 9

2.1.2 Прямая задача кинематики 11

2.1.3 Обратная задача кинематики 12

2.2 Динамика манипулятора 17

2.2.1 Общие замечания 17

2.2.2 Вывод уравнений движения 19

2.2.3 Учет динамики приводов 21

2.2.4 Альтернативная матричная форма записи 23

3 Идентификация параметров манипулятора 26

3.1 Предварительные действия 26

3.1.1 Введение в проблему 26

3.1.2 Исключение нулевых столбцов 26

3.1.3 Исключение линейно зависимых столбцов 27

3.1.4 Заключительные замечания 29

3.2 Описание метода 29

3.3 Результаты 30

4 Синтез систем управления 31

4.1 Предварительные замечания 31

4.2 Система управления для принятия определенной конфигурации . 32

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лит.	Лист	Листов
Разраб.	Антонов, Артемов				Разработка системы управления для манипулятора Kuka Youbot Пояснительная записка		2	54
Пров.	Котельников Ю.П.							
Н. контр.								
Утв.								

4.3 Система управления процессом следования по траектории	33
Заключение	35
Список использованных источников	36
Приложение А Матрицы однородного преобразования	37
Приложение Б Терминология относительных измерений	39
Приложение В Дополнительные пояснения к порядку расчета матрицы инерции	41
Приложение Г Получение и использование математической модели плоского двухзвенного манипулятора	42
Приложение Д Исключение из регрессора модели плоского двухзвенного манипулятора нулевых и линейно зависимых столбцов	52

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата					
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					Лист
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ				3

Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

n — количество звеньев робота, $n = 5$;

q_i — i -ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i -ом сочленении);

q — вектор-столбец обобщенных координат робота, $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$;

${}^i R_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$;

${}^i A_j$ — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i^*$;

$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_j y_j z_j$ в начало $Ox_k y_k z_k$, выраженный относительно $Ox_i y_i z_i^{**}$;

g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;

v_j^i — линейная скорость начала $Ox_j y_j z_j$ относительно используемой в решении ИСО,^{***} выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$;

a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_j y_j z_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;

* За пояснениями обратитесь к Приложению А

** За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0 y_0 z_0$.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	iR_j — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;	
					iA_j — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i^*$;	
					$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i^{**}$;	
					g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;	
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	v_j^i — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО, ^{***} выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;	
					a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;	
<div><div>* За пояснениями обратитесь к Приложению А</div><div>** За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.</div><div>*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0y_0z_0$.</div></div>						
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						4

ω_j^i — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega_{j,k}^i$ — угловая скорость вращения $Ox_ky_kz_k$ относительно $Ox_jy_jz_j$, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

z_j^i — орт $[0 \ 0 \ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

f_j^i — сила, действующая на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_j^i — момент силы, действующий на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_i — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты q_i ;

m_i — масса i -го звена;

\mathcal{I}_j^i — тензор инерции j -го звена относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;

s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно;

$x\{a\}$ — абсцисса вектора a ; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно;

$A^{\{i\}}$ — i -ая строка матрицы A ;

$A_{\{i\}}$ — i -ый столбец матрицы A .

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	m_i — масса i -го звена;					
					\mathcal{I}_j^i — тензор инерции j -го звена относительно $Ox_iy_iz_i$;					
					a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;					
					α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;					
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;					
					s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно;					
					$x\{a\}$ — абсцисса вектора a ; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно;					
					$A^{\{i\}}$ — i -ая строка матрицы A ;					
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	$A_{\{i\}}$ — i -ый столбец матрицы A .					
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										5

Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

- в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;
- раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;
- в разделе 4 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах апробации на реальном роботе и проч.

* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движения схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата																
<p>— в разделе 4 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах апробации на реальном роботе и проч.</p>																							
<p>_____</p> <p>* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движения схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.</p>																							
<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Изм</td><td>Лист</td><td>№ докум.</td><td>Подп.</td><td>Дата</td></tr></table>															Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ			Лист
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата																			
					6																		

1 Описание манипулятора

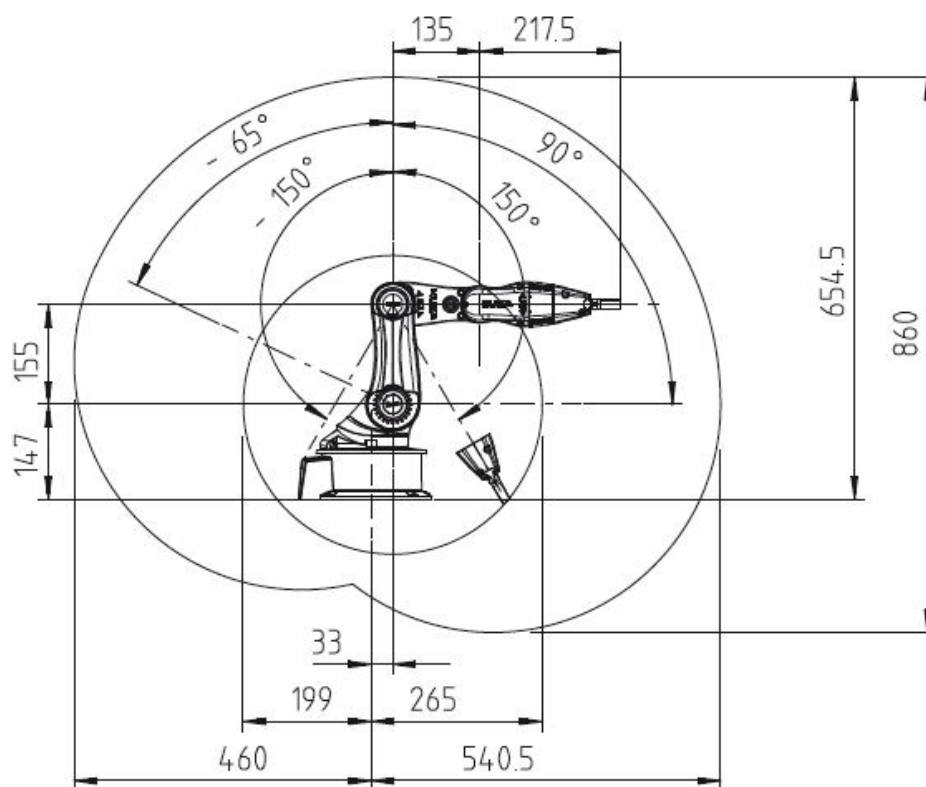
Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

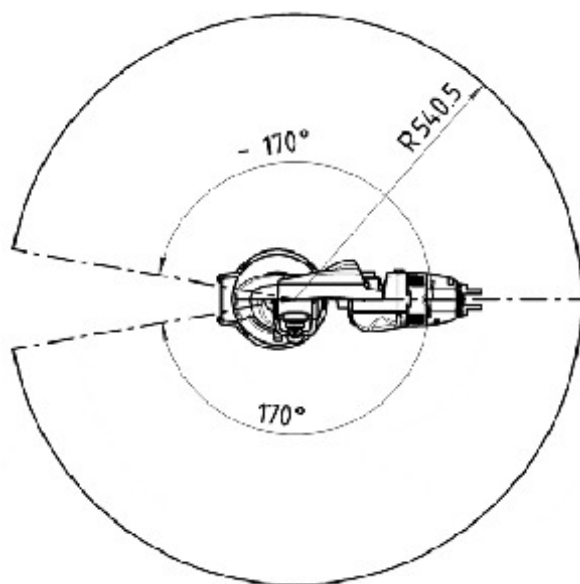
Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с ⁻¹
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата						
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										7

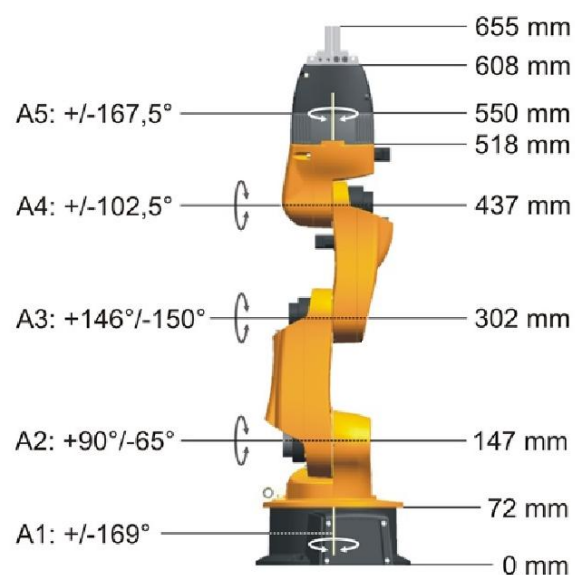
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата



а)



б)



в)

Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

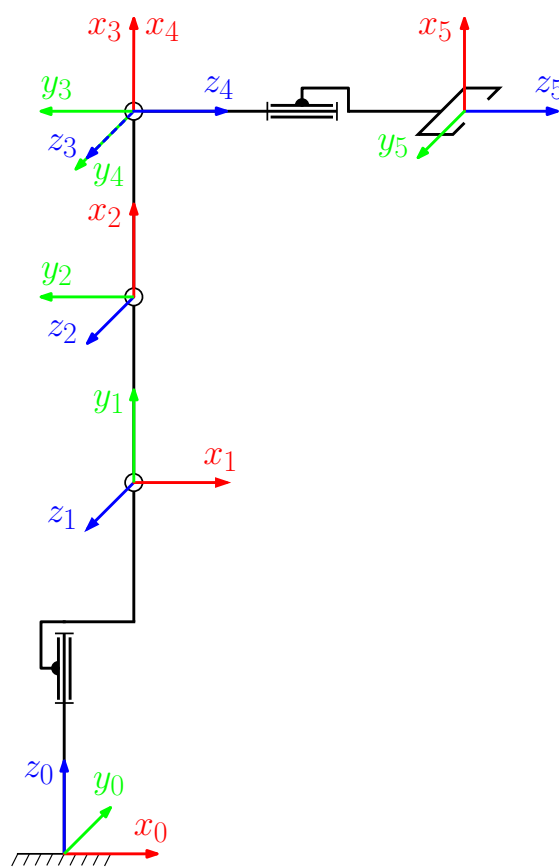
КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист
8

2.1.1 Общие замечания

[illegible]

a)



6)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а – кинематическая при $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T = [0, \pi/2, 0, 0, 0]^T$; б – расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		Лист
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ	9

а) «привязка» к каждому звену СК, чьи оси удовлетворяют следующим условиям:

- 1) ось z_{i-1} направлена вдоль оси i -ой КП;
- 2) ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и пересекает ее;
- 3) ось y_i дополняет оси z_i и x_i до правой декартовой СК.

б) определение параметров ДХ:

- 1) a_i — расстояния от z_{i-1} до z_i вдоль x_i ;
- 2) α_i — угла от z_{i-1} до z_i вокруг x_i ;
- 3) d_i — расстояния от x_{i-1} до x_i вдоль z_{i-1} ;
- 4) θ_i — угла от x_{i-1} до x_i вокруг z_{i-1} .

в) расчет матриц однородного преобразования в соответствии со следующими формулами:

$${}^{i-1}A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i} \quad (2.1)$$

где R_{z,θ_i} — матрица поворота вокруг оси z на угол θ_i , T_{z,d_i} — матрица смещения вдоль оси z на расстояние d , T_{x,a_i} — матрица смещения вдоль оси x на расстояние a_i , R_{x,α_i} — матрица поворота вокруг оси x на угол α_i , равные

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										10
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

ИТОГО

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Результаты выполнения для исследуемого манипулятора двух первых шагов представлены на рисунке 2.1б и в таблице 2.1, а третьего — в лице следующих выражений:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1 c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

2.1.2 Прямая задача кинематики

Информация о смещении и повороте СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ содержится в матрице 0A_5 . Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, остается лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$${}^0A_5 = \prod_{i=1}^5 {}^{i-1}A_i(q_i). \quad (2.6)$$

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$${}^0R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										11
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Копировал					Формат А4

Таблица 2.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

Звено, i	a_i , мм	α_i , рад	d_i , мм	θ_i , рад
1	33	$\pi/2$	147	$\pi \cdot \frac{169^\circ}{180^\circ} - q_1$
2	155	0	0	$\pi \cdot \frac{65^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi}{2} - q_2$
3	135	0	0	$-\pi \cdot \frac{146^\circ}{180^\circ} - q_3$
4	0	$\pi/2$	0	$\pi \cdot \frac{102.5^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi}{2} - q_4$
5	0	0	218	$\pi \cdot \frac{167.5^\circ}{180^\circ} - q_5$

Выполняя соответствующие вычисления получаем:

$${}^0A_5 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.147 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.155 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.135 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.218 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.655 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

что предложенный способ решения ПЗК в данном случае приводит к правильному ответу.

2.1.3 Обратная задача кинематики

Заданные смещение и поворот СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ можно описать с помощью матрицы 0A_5 . Используя ее и матрицы из (2.5), найти расчетные формулы для углов q_i ($i = \overline{1, 5}$) можно из следующих соображений.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

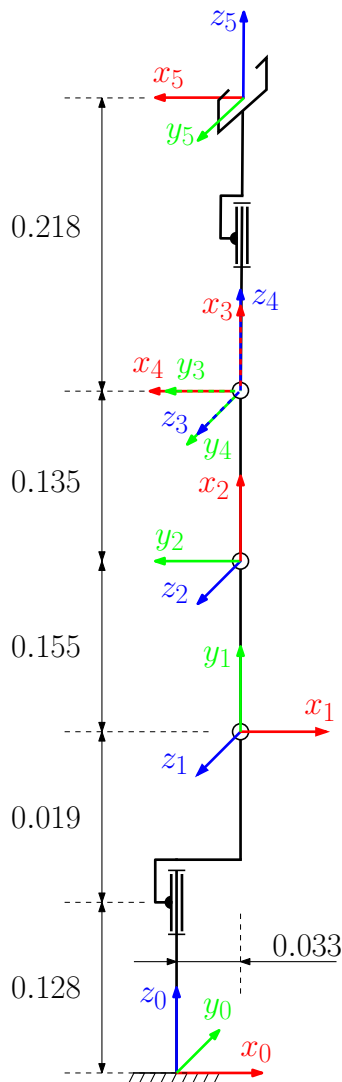


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T = [0, \pi/2, 0, \pi/2, 0]^T$.

Введем обозначения для элементов матрицы 0A_5 в соответствии с формулой:

$${}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Приравняв матрицу 0A_5 и правую часть выражения (2.6) и домножив с обеих сторон на ${}^0A_1^{-1}$, придем к выражению:

$${}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5, \quad (2.10)$$

где левая часть с учетом (2.5) равна

$${}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11}c_1 + r_{21}s_1 & r_{12}c_1 + r_{22}s_1 & r_{13}c_1 + r_{23}s_1 & p_xc_1 + p_ys_1 - a_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ r_{11}s_1 - r_{21}c_1 & r_{12}s_1 - r_{22}c_1 & r_{13}s_1 - r_{23}c_1 & p_xs_1 - p_yc_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

а правая —

$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5c_{234} & -s_5c_{234} & s_{234} & a_2c_2 + a_3c_{23} + d_5s_{234} \\ c_5s_{234} & -s_5s_{234} & -c_{234} & a_2s_2 + a_3s_{23} - d_5c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где в свою очередь

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \quad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \quad (2.13)$$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов θ_1 , θ_5 и θ_{234} дают

— равенство элементов (3, 4):

$$p_xs_1 - p_yc_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14)$$

— равенство элементов (3, 1) и (3, 2):

$$\begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \quad (2.15)$$

— равенство элементов (2, 3) и (1, 3):

$$\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	– равенство элементов (3, 4):					
					$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14)$					
					– равенство элементов (3, 1) и (3, 2):					
					$\begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \quad (2.15)$					
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	– равенство элементов (2, 3) и (1, 3):					
					$\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16)$					
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										14

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Формат А4

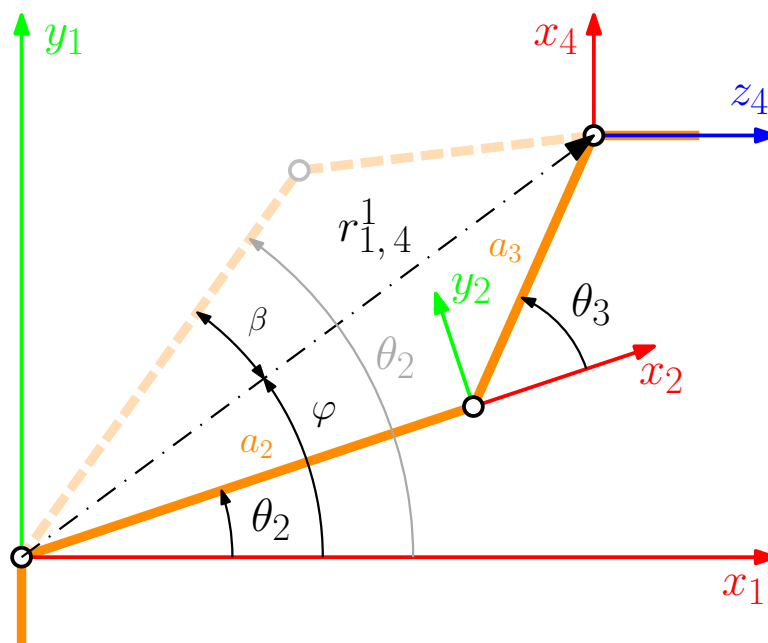


Рисунок 2.3 – Плоская часть манипулятора

где x_r и y_r – проекции вектора $r_{1,4}^1$ на оси абсцисс и ординат (их значения см. в (2.19)), для возможных значений угла θ_2 получаем следующие формулы:

$$\theta_2^I = \varphi(\theta_1^I) + \beta(\theta_3^I), \quad \theta_2^{II} = \varphi(\theta_1^I) - \beta(\theta_3^{II}), \quad (2.24)$$

$$\theta_2^{III} = \varphi(\theta_1^{II}) + \beta(\theta_3^{III}), \quad \theta_2^{IV} = \varphi(\theta_1^{II}) - \beta(\theta_3^{IV}). \quad (2.25)$$

Формулы для значений угла θ_4 после этого с учетом (2.13) приобретают простой вид:

$$\theta_4^{I,II} = \theta_{234}^I - \theta_2^{I,II} - \theta_3^{I,II}, \quad \theta_4^{III,IV} = \theta_{234}^{II} - \theta_2^{III,IV} - \theta_3^{III,IV}. \quad (2.26)$$

Таким образом, любое положение и ориентацию схвата относительно основания манипулятор может обеспечить 4-мя собственными конфигурациями, которым соответствуют следующие наборы значений для его обобщенных координат $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T$ (с учетом таблицы 2.1):

$$\theta^I = [\theta_1^I \ \theta_2^I \ \theta_3^I \ \theta_4^I \ \theta_5^I]^T, \quad \theta^{II} = [\theta_1^I \ \theta_2^{II} \ \theta_3^{II} \ \theta_4^{II} \ \theta_5^I]^T, \quad (2.27)$$

$$\theta^{III} = [\theta_1^{II} \ \theta_2^{III} \ \theta_3^{III} \ \theta_4^{III} \ \theta_5^{II}]^T, \quad \theta^{IV} = [\theta_1^{II} \ \theta_2^{IV} \ \theta_3^{IV} \ \theta_4^{IV} \ \theta_5^{II}]^T, \quad (2.28)$$

$$q^{I,II,III,IV} = \pi \cdot \left[\frac{169^\circ}{180^\circ} \ \frac{65^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} \ -\frac{146^\circ}{180^\circ} \ \frac{102.5^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} \ \frac{167.5^\circ}{180^\circ} \right]^T - \theta^{I,II,III,IV}. \quad (2.29)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\theta_2 = \varphi(\theta_1^I) + \beta(\theta_3^I),$	$\theta_2^{\text{II}} = \varphi(\theta_1^I) - \beta(\theta_3^{\text{II}}),$	(2.24)	
					$\theta_2^{\text{III}} = \varphi(\theta_1^{\text{II}}) + \beta(\theta_3^{\text{III}}),$	$\theta_2^{\text{IV}} = \varphi(\theta_1^{\text{II}}) - \beta(\theta_3^{\text{IV}}).$	(2.25)	
					Формулы для значений угла θ_4 после этого с учетом (2.13) приобретают простой вид:			
					$\theta_4^{\text{I,II}} = \theta_{234}^{\text{I}} - \theta_2^{\text{I,II}} - \theta_3^{\text{I,II}}, \quad \theta_4^{\text{III,IV}} = \theta_{234}^{\text{II}} - \theta_2^{\text{III,IV}} - \theta_3^{\text{III,IV}}.$			(2.26)
					Таким образом, любые положение и ориентацию схвата относительно основания манипулятор может обеспечить 4-мя собственными конфигурациями, которым соответствуют следующие наборы значений для его обобщенных координат $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T$ (с учетом таблицы 2.1):			
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\theta^{\text{I}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{I}} & \theta_2^{\text{I}} & \theta_3^{\text{I}} & \theta_4^{\text{I}} & \theta_5^{\text{I}} \end{bmatrix}^T, \quad \theta^{\text{II}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{I}} & \theta_2^{\text{II}} & \theta_3^{\text{II}} & \theta_4^{\text{II}} & \theta_5^{\text{I}} \end{bmatrix}^T$		(2.27)	
					$\theta^{\text{III}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{III}} & \theta_3^{\text{III}} & \theta_4^{\text{III}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T, \quad \theta^{\text{IV}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{IV}} & \theta_3^{\text{IV}} & \theta_4^{\text{IV}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T$		(2.28)	
					$q^{\text{I,II,III,IV}} = \pi \cdot \left[\frac{169^\circ}{180^\circ} \quad \frac{65^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} \quad -\frac{146^\circ}{180^\circ} \quad \frac{102.5^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} \quad \frac{167.5^\circ}{180^\circ} \right]^T - \theta^{\text{I,II,III,IV}}.$		(2.29)	
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ			Лист
								16
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата				

2.2 Динамика манипулятора

2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}^*$, где $i = \overline{1,5}$, показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$ сонаправлена с $Ox_iy_iz_i$.

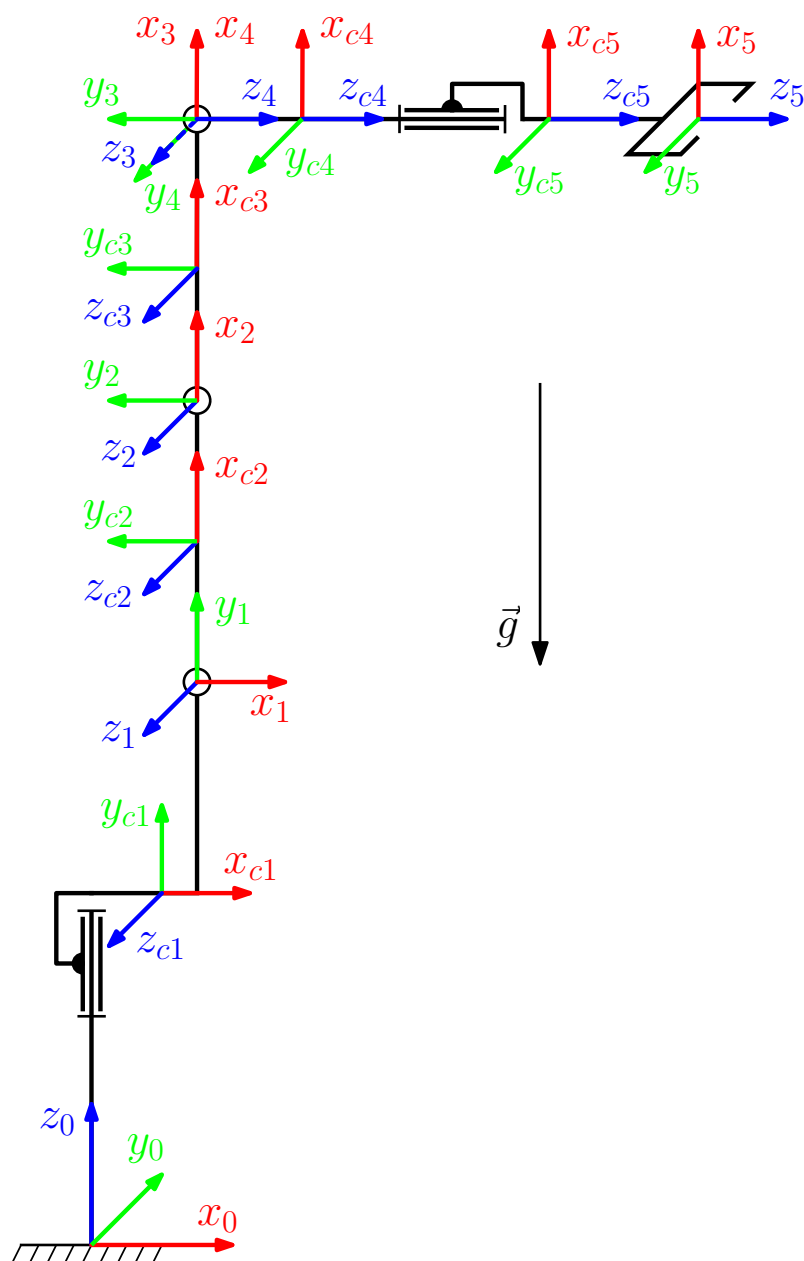


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора \vec{g} .

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Инв. № дубл.				Взам. инв. №				Подп. и дата					
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	<div></div>												Лист	
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ												17	

Для описания положения введенных СК воспользуемся следующими векторами:

$$r_{i,ci}^i = \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \\ z_{ci} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,5}, \quad (2.30)$$

где x_{ci} , y_{ci} и z_{ci} — некоторые постоянные величины.

Для компонент тензоров инерции $\mathcal{I}_i^i = const$ введем следующие обозначения:

$$\mathcal{I}_i^i = \begin{bmatrix} I_{i,xx} & I_{i,xy} & I_{i,xz} \\ I_{i,xy} & I_{i,yy} & I_{i,yz} \\ I_{i,xz} & I_{i,yz} & I_{i,zz} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Заметим, что

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

где $g = 9.82 \text{ м/с}^2$.

В заключении раздела приведем формулы для расчета величин, которые потребуются в дальнейшем (везде $i = \overline{1,5}$):

— для расчета $r_{0,i}^0$ и 0R_i (см. Приложение А):

$${}^0A_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1}A_i; \quad (2.33)$$

— для расчета $r_{0,i}^i$:

$$r_{0,i}^i = {}^0R_i^T \cdot r_{0,i}^0; \quad (2.34)$$

— для расчета z_i^0 :

$$z_i^0 = {}^0R_i \cdot z_i^i = {}^0R_i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (2.35)$$

— для расчета g_i , v_i^i и ω_i^i :

$$g_i = {}^0R_i^T \cdot g_0, \quad v_i^i = {}^0R_i^T \cdot v_i^0, \quad \omega_i^i = {}^0R_i^T \cdot \omega_i^0. \quad (2.36)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.		КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист	
Изм		Лист		№ докум.		Подп.		Дата						18		Формат А4

Функция Лагранжа

$$\begin{aligned}
 L &= K - U = \\
 &= \sum_{i=1}^5 \left(m_i \left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right) + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i + g_i) + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^5 \left(m_i \underbrace{\left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right)}_{L_{i,1}} + m_i x_{ci} \cdot \underbrace{x \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,2}} + \right. \\
 &\quad + m_i y_{ci} \cdot \underbrace{y \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,3}} + m_i z_{ci} \cdot \underbrace{z \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,4}} + I_{i,xx} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (x \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,5}} + \\
 &\quad + I_{i,yy} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (y \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,6}} + I_{i,zz} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (z \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,7}} + I_{i,xy} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot y \{\omega_i^i\}}_{L_{i,8}} + \\
 &\quad \left. + I_{i,xz} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,9}} + I_{i,yz} \cdot \underbrace{y \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,10}} \right). \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1, 5} \quad \Rightarrow \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,10}\}) = \tau_5 \end{cases} \quad (2.50)$$

где \mathcal{L}_j — оператор, работающий в соответствии с формулой:

$$\mathcal{L}_j : \quad \mathcal{L}_j \{f\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad (2.51)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
				20

где в свою очередь $f = f(\dot{q}(t), q(t))$. Если же заметить, что

$$\mathcal{L}_j\{L_{i,k}\} = 0 \quad \text{при } j > i, \quad i, j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 10}, \quad (2.52)$$

то выражения для них упрощаются до:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=2}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ m_5 \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,1}\} + m_5 x_{c5} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,2}\} + \dots + I_{5,yz} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,10}\} = \tau_5 \end{cases} \quad (2.53)$$

или в матричном виде

$$\tau = \xi \chi, \quad (2.54)$$

где $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_5]^T$ — вектор обобщенных моментов,

$\chi = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_5]^T \in \mathbb{R}^{50}$ — вектор параметров робота, где в свою очередь

$$\chi_i = \begin{bmatrix} m_i & m_i x_{ci} & m_i y_{ci} & m_i z_{ci} & I_{i,xx} & I_{i,yy} & I_{i,zz} & I_{i,xy} & I_{i,xz} & I_{i,yz} \end{bmatrix}^T; \quad (2.55)$$

ξ — так называемый регрессор, равный

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \dots & \xi_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \xi_{2,2} & \dots & \xi_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \xi_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

где в свою очередь $O_{1 \times 10}$ — вектор-строка, состоящая из 10 нулей, а $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ — вектор-строка, рассчитываемый по формуле

$$\xi_{j,i} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_j\{L_{i,1}\} & \mathcal{L}_j\{L_{i,2}\} & \dots & \mathcal{L}_j\{L_{i,10}\} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

2.2.3 Учет динамики приводов

Уравнения, описывающие динамику приводов, в матричном виде имеют вид

$$I_a \ddot{q} = \tau_e - \tau, \quad (2.58)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										21
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						Копировал
										Формат А4

Выражение для матрицы $D(q)$ может быть найдено из формулы для кинетической энергии с учетом того, что справедливо

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q}, \\ D(q) = D^T(q), \end{cases} \quad (2.71)$$

для матрицы $C(q, \dot{q})$ — из выражения для $D(q)$ в соответствии с формулами:

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial D_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} \right), \quad (2.72)$$

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i, \quad (2.73)$$

где D_{ij} , C_{ij} — элементы матриц $D(q)$ и $C(q, \dot{q})$ соответственно, стоящие на пересечении i -ой строки и j -го столбца; а для вектора $G(q)$ — по формуле

$$G(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial q_1} & \frac{\partial U}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial U}{\partial q_5} \end{bmatrix}^T \quad (2.74)$$

Выражение для кинетической энергии в форме, иллюстрируемой первым из уравнений (2.71), может быть получено из уравнения (2.47) с учетом формул (2.36), (2.38) и (2.43):

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i \cdot (-{}^0R_i^T J_{vi} \dot{q})^T \cdot (-{}^0R_i^T J_{vi} \dot{q}) + \frac{1}{2} (-{}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q})^T \cdot \mathcal{I}_i^i \cdot (-{}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q}) + \right. \\ &\quad \left. + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot \left((-{}^0R_i^T J_{vi} \dot{q}) \times (-{}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q}) \right) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i \dot{q}^T J_{vi}^T J_{vi} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i^i {}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q} + (m_i \underbrace{{}^0R_i r_{i,ci}^i}_{r_{i,ci}^0})^T \cdot \left((J_{vi} \dot{q}) \times (J_{\omega i} \dot{q}) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^5 \left(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i^i {}^0R_i^T J_{\omega i} + 2 \cdot x \{ m_i r_{i,ci}^0 \} \cdot J_{xi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \cdot y \{ m_i r_{i,ci}^0 \} \cdot J_{yi} + 2 \cdot z \{ m_i r_{i,ci}^0 \} \cdot J_{zi} \right) \right) \dot{q}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										24
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

при преобразованиях которого учтено то, что

$$\begin{aligned}
 (J_{vi}\dot{q}) \times (J_{\omega i}\dot{q}) &= \begin{bmatrix} J_{vi}^{\{1\}}\dot{q} \\ J_{vi}^{\{2\}}\dot{q} \\ J_{vi}^{\{3\}}\dot{q} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{\omega i}^{\{1\}}\dot{q} \\ J_{\omega i}^{\{2\}}\dot{q} \\ J_{\omega i}^{\{3\}}\dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_{vi}^{\{3\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{2\}}\dot{q} + J_{vi}^{\{2\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{3\}}\dot{q} \\ J_{vi}^{\{3\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{1\}}\dot{q} - J_{vi}^{\{1\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{3\}}\dot{q} \\ -J_{vi}^{\{2\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{1\}}\dot{q} + J_{vi}^{\{1\}}\dot{q}J_{\omega i}^{\{2\}}\dot{q} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{q}^T (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}}\dot{q} + \dot{q}^T (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}\dot{q} \\ \dot{q}^T (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}}\dot{q} - \dot{q}^T (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}\dot{q} \\ -\dot{q}^T (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}}\dot{q} + \dot{q}^T (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}}\dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T J_{xi}\dot{q} \\ \dot{q}^T J_{yi}\dot{q} \\ \dot{q}^T J_{zi}\dot{q} \end{bmatrix}, \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

где

$$J_{xi} = -(J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} + (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \quad (2.77)$$

$$J_{yi} = (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} - (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \quad (2.78)$$

$$J_{zi} = -(J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} + (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}}. \quad (2.79)$$

Стоит отметить тот факт, что выражение из (2.75), обозначим которое через $\mathcal{D}(q)$, равное

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(q) &= \sum_{i=1}^5 \left(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i {}^0R_i^T J_{\omega i} + 2 \cdot x \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_{xi} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot y \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_{yi} + 2 \cdot z \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_{zi} \right), \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

в общем случае не равно матрице $D(q)$. При этом получить последнюю из матрицы $\mathcal{D}(q)$ можно с помощью следующей формулы:

$$D_{ij} = \begin{cases} 0.5(\mathcal{D}_{ij} + \mathcal{D}_{ji}), & i \neq j; \\ \mathcal{D}_{ij}, & i = j; \end{cases} \quad (2.81)$$

где \mathcal{D}_{ij} — элемент матрицы $\mathcal{D}(q)$, стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца.*

* Для дополнительных пояснений попробуйте обратиться к Приложению В.

Инв. № подл.	Подп. и дата				КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
Взам. инв. №	Инв. № дубл.					25
Подп. и дата						
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		

$$\mathcal{D}(q) = \sum_{i=1}^5 \left(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i^{} {}^0R_i^T J_{\omega i} + 2 \cdot x \{ m_i r_{i,ci}^0 \} \cdot J_{xi} + \right. \\ \left. + 2 \cdot y \{ m_i r_{i,ci}^0 \} \cdot J_{yi} + 2 \cdot z \{ m_i r_{i,ci}^0 \} \cdot J_{zi} \right), \tag{2.80}$$

в общем случае не равно матрице $D(q)$. При этом получить последнюю из матрицы $\mathcal{D}(q)$ можно с помощью следующей формулы:

$$D_{ij} = \begin{cases} 0.5(\mathcal{D}_{ij} + \mathcal{D}_{ji}), & i \neq j; \\ \mathcal{D}_{ij}, & i = j; \end{cases} \tag{2.81}$$

где \mathcal{D}_{ij} — элемент матрицы $\mathcal{D}(q)$, стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца.*

* Для дополнительных пояснений попробуйте обратиться к Приложению В.

этого исходное уравнение приобретет следующий вид:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{13} & \xi_{15} & \xi_{16} & \xi_{17} & \xi_{18} \\ \xi_{21} & \xi_{23} & \xi_{25} & \xi_{26} & \xi_{27} & \xi_{28} \end{bmatrix}}_{\bar{\xi}_0} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{31} \\ \chi_{51} \\ \chi_{61} \\ \chi_{71} \\ \chi_{81} \end{bmatrix}}_{\bar{\chi}_0} = \begin{bmatrix} \tau_{e,1} \\ \tau_{e,2} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Стоит отметить, что с учетом сложности (громоздкости) выражений для ξ_{ij} можно не заметить равенство каких-либо из них нулю. Для исключения такой ситуации рекомендуется подставить в них несколько случайных значений для q , \dot{q} и \ddot{q} и посмотреть на получающиеся при этом результаты.

3.1.3 Исключение линейно зависимых столбцов

Второе действие, которое необходимо предпринять по отношению к полученной ранее модели робота — это исключить из регрессора $\bar{\xi}_0$ все линейно зависимые столбцы и соответствующим образом изменить вектор параметров.

К примеру, пусть относительно уравнения (3.2) справедливо то, что

$$\begin{bmatrix} \xi_{13} \\ \xi_{23} \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} \xi_{16} \\ \xi_{26} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} \xi_{15} \\ \xi_{25} \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} \xi_{17} \\ \xi_{27} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

где k_1 , k_2 , k_3 — некоторые константы, тогда его надо заменить, например, на такое уравнение:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \xi_{15} & \xi_{16} & \xi_{17} & \xi_{18} \\ \xi_{25} & \xi_{26} & \xi_{27} & \xi_{28} \end{bmatrix}}_{\check{\xi}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} k_2\chi_{11} + \chi_{51} \\ k_1\chi_{31} + \chi_{61} \\ k_3\chi_{11} + \chi_{71} \\ \chi_{81} \end{bmatrix}}_{\check{\chi}} = \begin{bmatrix} \tau_{e,1} \\ \tau_{e,2} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Для поиска линейно зависимых столбцов авторы использовали следующий алгоритм:

Инв. № подл.	Подп. и дата	Инв. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата	Инв. № подл.	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
												27

- а) подстановка N ($N \gg n$) случайных значений для q , \dot{q} и \ddot{q} в $\bar{\xi}_0$ и расчет соответствующих реализаций регрессора: $\bar{\xi}_0(1)$, $\bar{\xi}_0(2)$, \dots , $\bar{\xi}_0(N)$;
- б) формирование новой матрицы $\bar{\xi}_0^*$, равной

$$\bar{\xi}_0^* = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_0(1) \\ \bar{\xi}_0(2) \\ \vdots \\ \bar{\xi}_0(N) \end{bmatrix}; \quad (3.5)$$

- в) проверка каждого столбца $\bar{\xi}_0^*$ на зависимость от какого-либо другого ее столбца в виде:

$$\bar{\xi}_{0\{i\}}^* = k \cdot \bar{\xi}_{0\{j\}}^*, \quad i \neq j, \quad k = const \quad (3.6)$$

и его удаление по схеме, описанной в данном подразделе выше, в случае, если k , удовлетворяющий представленному равенству, существует;

- г) проверка каждого столбца $\bar{\xi}_0^*$, из которой уже исключены все зависимости, описанные в прошлом пункте, на зависимость от двух других ее столбцов в виде:

$$\bar{\xi}_{0\{i\}}^* = k_1 \cdot \bar{\xi}_{0\{j\}}^* + k_2 \cdot \bar{\xi}_{0\{k\}}^*, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k, \quad k_1, k_2 = const \quad (3.7)$$

и его удаление по схеме, описанной в данном подразделе выше, в случае, если k_1 и k_2 , удовлетворяющие представленному равенству, существуют;

- д) проверка каждого столбца $\bar{\xi}_0^*$ на зависимость от трех других ее столбцов и их удаление по методике, аналогичной представленной в двух прошлых пунктах;

- е) проверка каждого столбца $\bar{\xi}_0^*$, в которой, благодаря действиям, описанным в трех прошлых пунктах, нет ни одного квартета, составленного из линейно зависимых столбцов, на зависимость от всех других ее столбцов в виде:

$$\bar{\xi}_{0\{i\}}^* = \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} k_j \cdot \bar{\xi}_{0\{j\}}^*, \quad k_j = const; \quad (3.8)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата					Инв. № дубл.	Подп. и дата					Инв. № инв.	Подп. и дата					Инв. № подл.	
мости, описанные в прошлом пункте, на зависимость от двух других ее столбцов в виде:																			
$\bar{\xi}_{0\{i\}}^* = k_1 \cdot \bar{\xi}_{0\{j\}}^* + k_2 \cdot \bar{\xi}_{0\{k\}}^*, \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k, k_1, k_2 = const \quad (3.7)$																			
и его удаление по схеме, описанной в данном подразделе выше, в случае, если k_1 и k_2 , удовлетворяющие представленному равенству, существуют;																			
д) проверка каждого столбца $\bar{\xi}_0^*$ на зависимость от трех других ее столбцов и их удаление по методике, аналогичной представленной в двух прошлых пунктах;																			
е) проверка каждого столбца $\bar{\xi}_0^*$, в которой, благодаря действиям, описанным в трех прошлых пунктах, нет ни одного квартета, составленного из линейно зависимых столбцов, на зависимость от всех других ее столбцов в виде:																			
$\bar{\xi}_{0\{i\}}^* = \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} k_j \cdot \bar{\xi}_{0\{j\}}^*, \quad k_j = const; \quad (3.8)$																			

если данное уравнение имеет единственное решение относительно коэффициентов k_j , то соответствующий столбец $\bar{\xi}_{0\{i\}}^*$ просто исключается из $\bar{\xi}_0^*$ аналогично тому, как это делалось в трех прошлых пунктах; если же данное уравнение имеет бесконечное количество решений, тогда для данного столбца дополнительно выполняется поиск линейной зависимости от четырех, пяти и т.д. столбцов $\bar{\xi}_0^*$ и его исключение, как только такая зависимость будет найдена.

В заключение стоит сказать, что каждый из пп. в–е стоит повторять до тех пор, пока из регрессора не будут исключены все искомые в рамках данного пункта зависимости.

3.1.4 Заключительные замечания

Как можно догадаться, параметры χ_{11} , χ_{21} , χ_{31} , χ_{41} , χ_{51} , χ_{61} и χ_{71} , затронутые в результате описанных действий, проидентифицировать не получится. При этом, однако, будут найдены значения для следующих комбинаций, включающих некоторые из них: $k_2\chi_{11} + \chi_{51}$, $k_1\chi_{31} + \chi_{61}$ и $k_3\chi_{11} + \chi_{71}$. В таких условиях, для того чтобы рассчитывать матрицы, входящие в уравнение (2.70), или выполнять иные вычисления, необходимо в используемых при этом формулах полагать параметры χ_{11} , χ_{21} , χ_{31} и χ_{41} равными нулю, а в качестве значений для параметров χ_{51} , χ_{61} и χ_{71} брать полученные в результате идентификации значения для указанных выше комбинаций соответственно.

3.2 Описание метода

Для определения неизвестных значений параметров робота, составляющих вектор $\bar{\chi}$, воспользуемся методом наименьших квадратов. Алгоритм необходимых действий в таком случае будет следующим:

- а) с помощью поставляемого производителем робота ПО* дать манипулятору команды на последовательное достижение N произвольных

* У Youbot такое «стандартное» ПО осуществляет управление углами в сочленениях робота с помощью ПИД-регуляторов.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					29

конфигураций, по возможности охватывающих всю его рабочую область; во время его работы снять и записать следующие показания:

$q(t_1)$	$\dot{q}(t_1)$	$\ddot{q}(t_1)$	$\tau_e(t_1)$
$q(t_2)$	$\dot{q}(t_2)$	$\ddot{q}(t_2)$	$\tau_e(t_2)$
$q(t_3)$	$\dot{q}(t_3)$	$\ddot{q}(t_3)$	$\tau_e(t_3)$
\dots	\dots	\dots	\dots
$q(t_k)$	$\dot{q}(t_k)$	$\ddot{q}(t_k)$	$\tau_e(t_k)$

где $t_k > t_3 > t_2 > t_1$;

б) используя полученные данные, составить матрицы

$$\Xi = \begin{bmatrix} \bar{\xi}(\ddot{q}(t_1), \dot{q}(t_1), q(t_1)) \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_2), \dot{q}(t_2), q(t_2)) \\ \dots \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_k), \dot{q}(t_k), q(t_k)) \end{bmatrix}, \quad T_e = \begin{bmatrix} \tau_e(t_1) \\ \tau_e(t_2) \\ \dots \\ \tau_e(t_k) \end{bmatrix}; \quad (3.9)$$

в) рассчитать оценку $\hat{\chi}$ вектора $\bar{\chi}$ по формуле:

$$\hat{\chi} = (\Xi^T \cdot \Xi)^{-1} \cdot \Xi^T \cdot T_e; \quad (3.10)$$

г) дать роботу команды на достижение других N позиций и при этом получить те же самые данные;

д) используя найденную в п. в) оценку $\hat{\chi}$ и снятые в п. г) данные, рассчитать по формуле (2.68) значения для τ_e ; сравнить их с полученными в п. г) и сделать выводы об успешности идентификации.

3.3 Результаты

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										30

4 Синтез систем управления

4.1 Предварительные замечания

Каждый из приводов манипулятора робота Kuka Youbot имеет собственную систему управления, структура которой иллюстрируется схемой с рисунка 4.1. Из нее видно, что каждый из приводов робота может управляться заданием значения для угла q_{di} , или скорости \dot{q}_{di} , или момента силы $\tau_{ed,i}$, который должен быть на нем обеспечен. Это значение подается на вход соответствующего ПИД-регулятора, коэффициенты которого доступны настройке, и далее (уже в виде сигнала напряжения u) — на контролируемый двигатель.

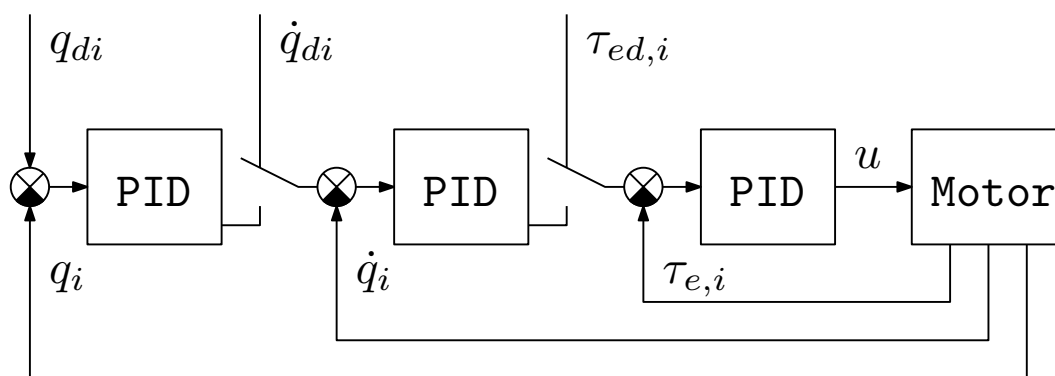


Рисунок 4.1 – Структура системы управления, контролирующей работу каждого из приводов робота.

Далее в тексте документа будут рассмотрены системы управления, в которых в качестве управляющего сигнала рассматривается вектор $\tau_e(t)$. При этом будет предполагаться, что задаваемые значения для моментов сил достигаются на двигателях мгновенно. Такое предположение будем считать возможным по той причине, что процессы в контуре момента в рассмотренной выше системе управления характеризуются малыми временами переходных процессов. В качестве иллюстрации к сказанному можно привести рисунок 4.2. На нем показан график переходной функции системы управления моментом силы, развиваемым приводом ???-го звена.

Из величин, описывающих состояние робота в данный момент времени, в используемом ПО доступны вектора $q(t)$, $\dot{q}(t)$ и $\tau_e(t)$.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	<div><div><div><div>q_i</div><div>q_i</div><div>$\tau_{e,i}$</div></div></div></div>					
<p>Рисунок 4.1 – Структура системы управления, контролирующей работу каждого из приводов робота.</p>										
<p>Далее в тексте документа будут рассмотрены системы управления, в которых в качестве управляющего сигнала рассматривается вектор $\tau_e(t)$. При этом будет предполагаться, что задаваемые значения для моментов сил достигаются на двигателях мгновенно. Такое предположение будем считать возможным по той причине, что процессы в контуре момента в рассмотренной выше системе управления характеризуются малыми временами переходных процессов. В качестве иллюстрации к сказанному можно привести рисунок 4.2. На нем показан график переходной функции системы управления моментом силы, развиваемым приводом ???-го звена.</p> <p>Из величин, описывающих состояние робота в данный момент времени, в используемом ПО доступны вектора $q(t)$, $\dot{q}(t)$ и $\tau_e(t)$.</p>										
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										31

pid_transition_function.pdf

Рисунок 4.2 – График переходной функции системы управления приводом ???-го звена.

4.2 Система управления для принятия определенной конфигурации

Для системы управления процессом принятия роботом желаемой конфигурации, описываемой вектором $q_d = [q_{d1} \ q_{d2} \ q_{d3} \ q_{d4} \ q_{d5}]^T = const$, выберем следующий закон управления:

$$\tau_e = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \quad (4.1)$$

где $K_p = \text{diag}\{k_{pi}\} = const$ и $K_d = \text{diag}\{k_{di}\} = const$, при этом $k_{pi} > 0$ и $k_{di} > 0$ для $\forall i = \overline{1, 5}$. С учетом его и уравнения (2.70) модель замкнутой системы примет вид:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q}. \quad (4.2)$$

Это выражение с использованием обозначений

$$e = q - q_d, \quad x = \begin{bmatrix} e \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

можно переписать следующим образом

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.4)$$

Изн. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Изн. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									32
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					

где

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(e)(K_p e + K_d \dot{q} + C(e, \dot{q})\dot{q}) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Заметим, что равновесным состоянием системы (4.4) является точка $x_0 = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, так как $f(x_0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$.

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(e) \dot{q} + \frac{1}{2} e^T K_p e. \quad (4.6)$$

Ее производная по времени*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) &= \dot{q}^T M(e) \ddot{q} + \dot{q}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M(e) \right) \dot{q} + \dot{e}^T K_p e = \\ &= \dot{q}^T \left(\tau_e - C(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q) - t_f(\dot{q}) \right) + \dot{q}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M(q) \right) \dot{q} + \dot{q}^T K_p e = \\ &= \dot{q}^T \left(\tau_e - G(q) - t_f(\dot{q}) + K_p e \right) + \dot{q}^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M(q) \right) - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} = \\ &= \dot{q}^T \left(K_p (q_d - q) - K_d \dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}) - G(q) - t_f(\dot{q}) + K_p (q - q_d) \right) = \\ &= -\dot{q}^T K_d \dot{q} < 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

при $x \neq x_0$ и равна нулю при $x = x_0$. Следовательно, по 2-ой теореме Ляпунова состояние системы $x = x_0$, при котором, к слову сказать, $q = q_d$ и $\dot{q} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, является асимптотически устойчивым.

4.3 Система управления процессом следования по траектории

Для системы управления процессом следования роботом по траектории, описываемой вектор-функцией $q_d(t) = [q_{d1}(t) \ q_{d2}(t) \ q_{d3}(t) \ q_{d4}(t) \ q_{d5}(t)]^T$, возьмем следующий закон управления:

$$\tau_e = M(q)(\ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \quad (4.8)$$

где $K_d = const$ и $K_p = const$.

* В представленных ниже выкладках учтен тот факт, что матрица $(0.5M(q))' - C(q, \dot{q})$ является кососимметричной.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						33	

С учетом его и уравнения (2.70) модель замкнутой системы опишется следующим выражением:

$$M(q)(\ddot{q}_d - \ddot{q} + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)) = 0, \quad (4.9)$$

которое после деления на $M(q)$ и применения обозначения

$$\varepsilon = q_d - q \quad (4.10)$$

может быть переписано в виде:

$$\ddot{\varepsilon} + K_d\dot{\varepsilon} + K_p\varepsilon = 0. \quad (4.11)$$

Согласно последнему уравнению, использование закона управления (4.8) дает возможность полностью определять поведение робота значениями матриц K_p и K_d .

В данной работе матрицы K_p и K_d были выбраны диагональными:

$$K_p = \text{diag}\{k_{pi}\}, \quad K_d = \text{diag}\{k_{di}\}, \quad (4.12)$$

потому что это позволяет «разбить» уравнение (4.11) на 5 независимых дифференциальных уравнений, а их компоненты — положительными:

$$k_{pi} > 0, \quad k_{di} > 0, \quad \forall i = \overline{1, 5}, \quad (4.13)$$

так как при этом система получается устойчивой (все 5 уравнений получаются имеющими корни только с отрицательной вещественной частью).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	<div style="text-align: center;"> <p>КСУИ.101.4135.001 ПЗ</p> </div>					Лист				
										34				
										Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Заключение

Текст заключения

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	<div>КСУИ.101.4135.001 ПЗ</div>					Лист
										35
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Копировал

Формат А4

Список использованных источников

- 1 KUKA YOUNBOT. — URL: <http://www.technomatix.ru/kuka-youbot> (дата обращения: 08.03.2017).
- 2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						36

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [1].

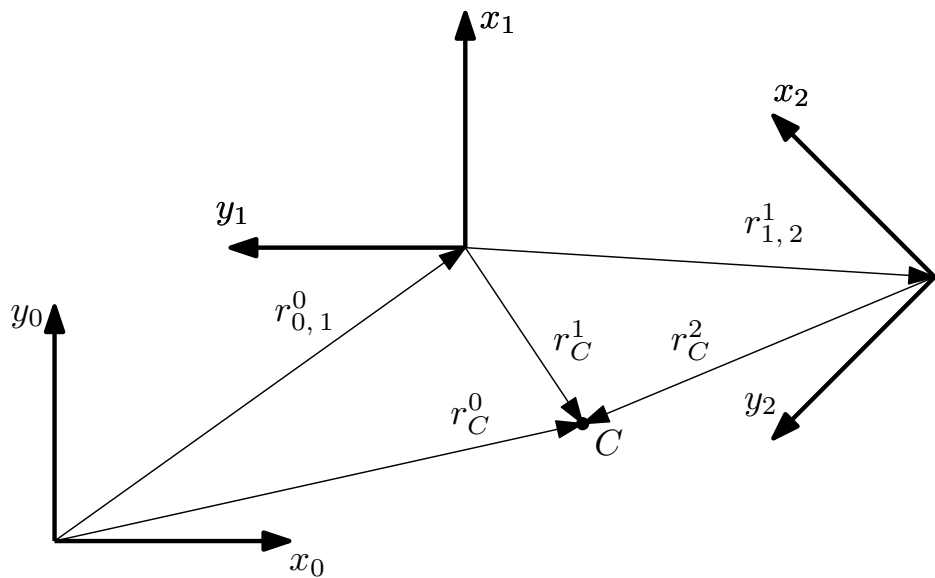


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата					
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ			Лист				
								38				

Приложение Б
(рекомендуемое)

Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором \vec{V} . В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

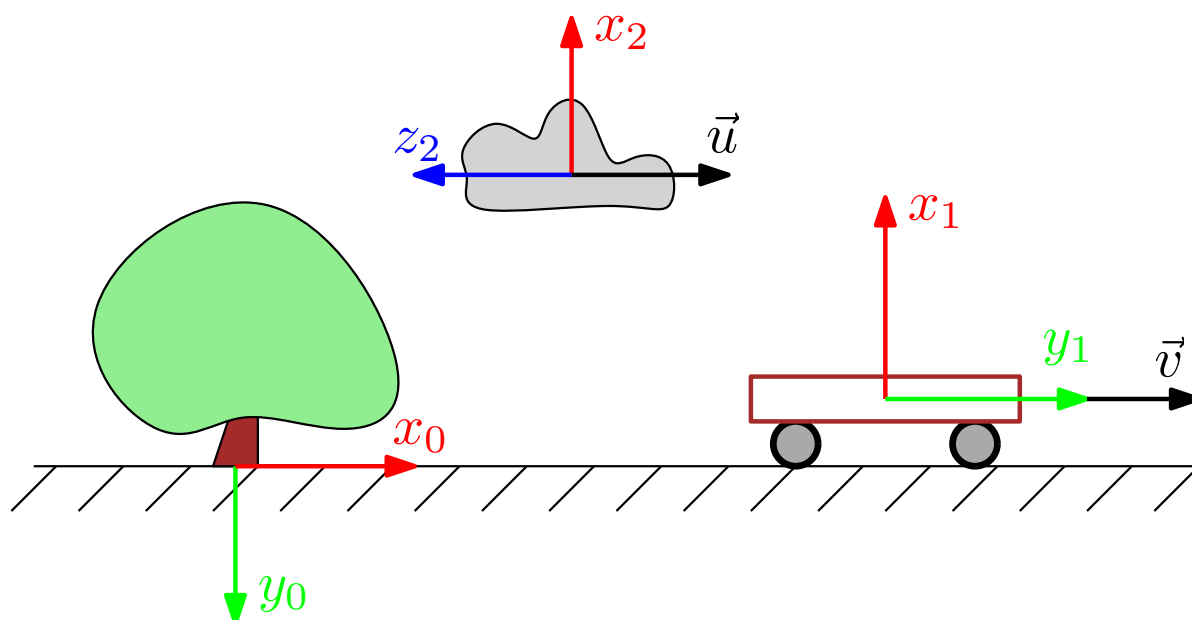


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

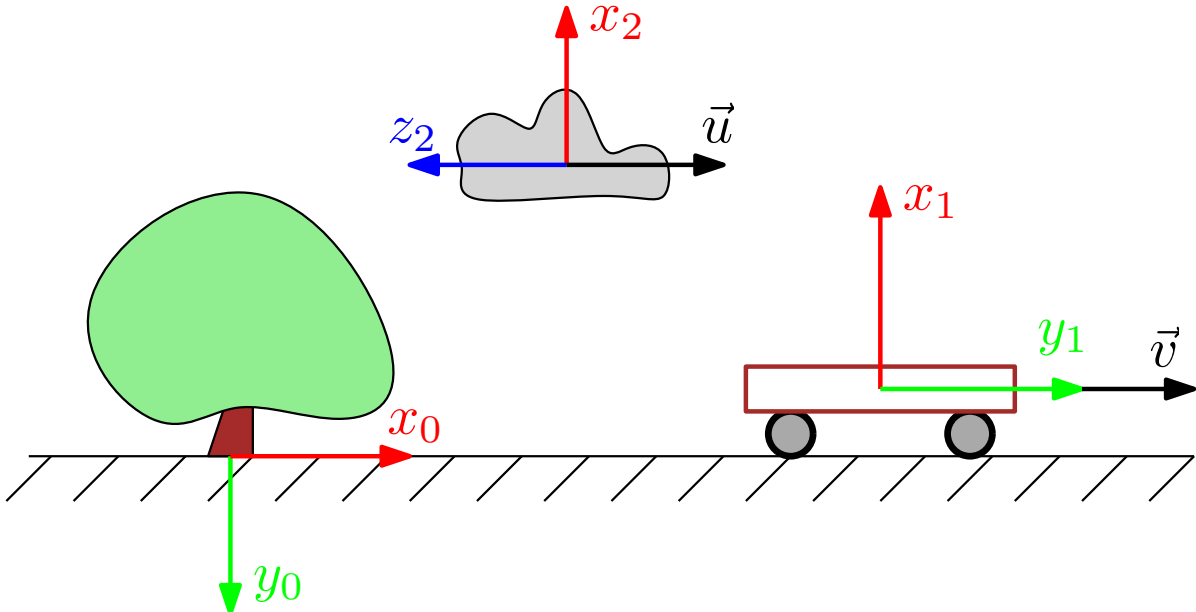
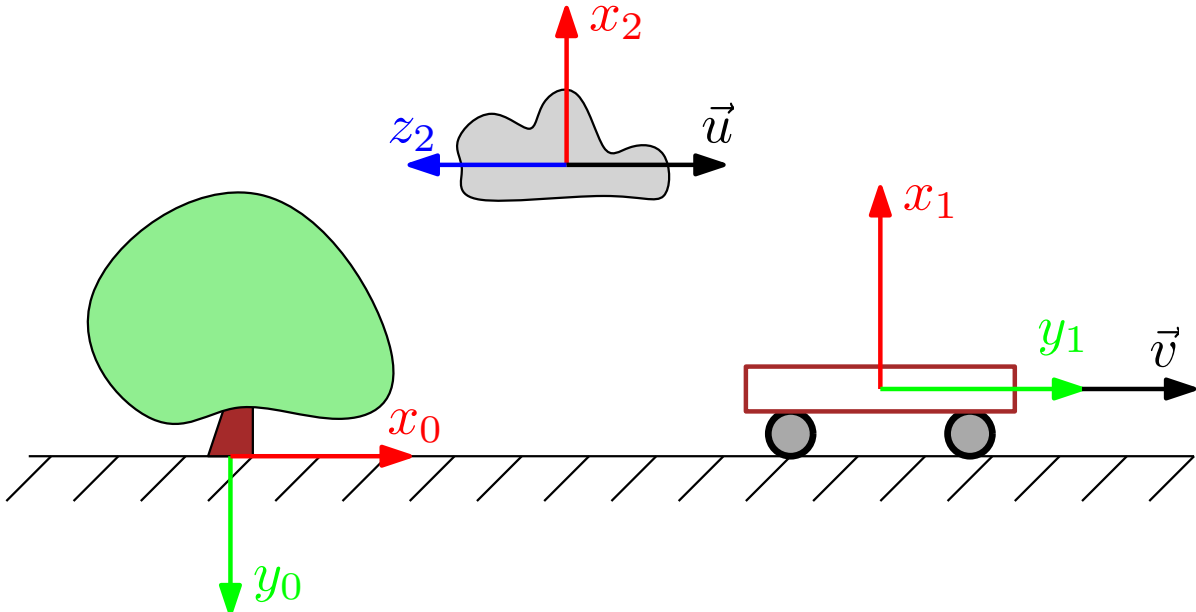
Инв. № подл.	Подп. и дата	№ докум.	Подп.	Дата	<div>КСУИ.101.4135.001 ПЗ</div>	Лист	39
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	<div>КСУИ.101.4135.001 ПЗ</div>	Лист	39
Инв. № дубл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	<div>Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.</div>		
Инв. № подл.	Подп. и дата	№ докум.	Подп.	Дата	<div>Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.</div>		

Таблица Б.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора V	Значение V^T
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Приложение В
(рекомендуемое)

Дополнительные пояснения к порядку расчета матрицы инерции

Рассмотрим следующие два математических выражения:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = b_{11}a_1^2 + b_{22}a_2^2 + b_{33}a_3^2 + \\ + (b_{12} + b_{21})a_1a_2 + (b_{13} + b_{31})a_1a_3 + (b_{23} + b_{32})a_2a_3, \quad (\text{В.1})$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = c_{11}a_1^2 + c_{22}a_2^2 + c_{33}a_3^2 + \\ + 2c_{12}a_1a_2 + 2c_{13}a_1a_3 + 2c_{23}a_2a_3. \quad (\text{В.2})$$

Легко видеть, что при выполнении равенств

$$c_{11} = b_{11}, \quad c_{22} = b_{22}, \quad c_{33} = b_{33}, \quad (\text{В.3})$$

$$c_{12} = 0.5(b_{12} + b_{21}), \quad c_{13} = 0.5(b_{13} + b_{31}), \quad c_{23} = 0.5(b_{23} + b_{32}) \quad (\text{В.4})$$

выражения (В.1) и (В.2) тоже будут равны.

Подобная ситуация наблюдается и в отношении матриц $\mathcal{D}(q)$ и $D(q)$.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$+ 2c_{12}a_1a_2 + 2c_{13}a_1a_3 + 2c_{23}a_2a_3. \quad (B.2)$				
					Легко видеть, что при выполнении равенств				
					$c_{11} = b_{11}, \quad c_{22} = b_{22}, \quad c_{33} = b_{33}, \quad (B.3)$				
					$c_{12} = 0.5(b_{12} + b_{21}), \quad c_{13} = 0.5(b_{13} + b_{31}), \quad c_{23} = 0.5(b_{23} + b_{32}) \quad (B.4)$				
выражения (B.1) и (B.2) тоже будут равны.									
Подобная ситуация наблюдается и в отношении матриц $\mathcal{D}(q)$ и $D(q)$.									

Получение и использование математической модели плоского двухзвенного манипулятора

Рисунок Г.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая;
б — демонстрирующая расположение барицентрических СК и СК КП.

Значения некоторых из динамических параметров звеньев:

$$r_{1,c1}^1 = \begin{bmatrix} -0.5a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 a_1^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 a_1^2}{3} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.1)$$

$$r_{2,c2}^2 = \begin{bmatrix} -0.5a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 a_2^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 a_2^2}{3} \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.2)$$

Параметры Денавита-Хартенберга, характеризующие взаимное расположение показанных на рисунке Г.1 СК, приведены в таблице Г.1, где δ_1 и δ_2 — некоторые константы. Вектор ускорения свободного падения, выраженный в неподвижной СК равен

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{Г.3})$$

Таблица Г.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

Звено, i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	$\delta_1 - q_1$
2	a_2	$\pi/2$	0	$\delta_2 - q_2$

Матрицы однородных преобразований и проч.*:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0R_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,1}^0 = \begin{bmatrix} a_1c_1 \\ a_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Г.4})$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & a_2c_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 & a_2s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_{0,1}^0 = \begin{bmatrix} a_2c_2 \\ a_2s_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Г.5})$$

$${}^0A_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & s_{12} & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & 0 & -c_{12} & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0R_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & s_{12} \\ s_{12} & 0 & -c_{12} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{Г.6})$$

Иллюстрирующий правильность их расчета пример показан на рисунке Г.2.

* В пределах данного приложения принято следующее дополнительное обозначение:

$$\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2.$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						Лист
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					43

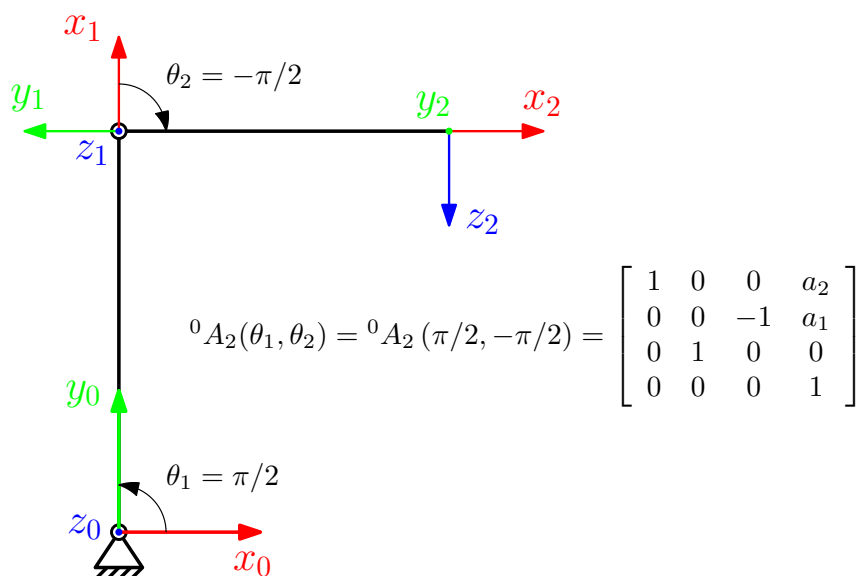


Рисунок Г.2 – Пример, проверяющий решение ПЗК для рассматриваемого манипулятора.

Некоторые подготовительные вычисления:

$$r_{0,1}^1 = {}^0R_1^T \cdot r_{0,1}^0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = {}^0R_1^T \cdot g_0 = \begin{bmatrix} -gs_1 \\ -gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_1^0 = {}^0R_1 \cdot z_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.7)$$

$$r_{0,2}^2 = {}^0R_2^T \cdot r_{0,2}^0 = \begin{bmatrix} a_2 + a_1c_2 \\ 0 \\ a_1s_2 \end{bmatrix}, \quad g_2 = {}^0R_2^T \cdot g_0 = \begin{bmatrix} -gs_{12} \\ 0 \\ gc_{12} \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.8)$$

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,1}^0 - r_{0,0}^0) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 & 0 \\ a_1c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.9)$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,1}^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2s_{12} - a_1s_1 & -a_2s_{12} \\ a_2c_{12} + a_1c_1 & a_2c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.10)$$

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.11)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Инв. № подл.
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ		
					Лист		
					44		

$$v_1^0 = -J_{v1}\dot{q} = \begin{bmatrix} a_1 s_1 \dot{q}_1 \\ -a_1 c_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.12)$$

$$v_1^1 = {}^0R_1^T \cdot v_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.13)$$

$$\omega_1^0 = -J_{\omega 1}\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.14)$$

$$\omega_1^1 = {}^0R_1^T \cdot \omega_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (\Gamma.15)$$

$$v_2^0 = -J_{v2}\dot{q} = \begin{bmatrix} a_2 s_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1 s_1 \dot{q}_1 \\ -a_2 c_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - a_1 c_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.16)$$

$$v_2^2 = {}^0R_2^T \cdot v_2^0 = \begin{bmatrix} -a_1 s_2 \dot{q}_1 \\ 0 \\ a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1 c_2 \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.17)$$

$$\omega_2^0 = -J_{\omega 2}\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.18)$$

$$\omega_2^2 = {}^0R_2^T \cdot \omega_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.19)$$

$$v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1 = \begin{bmatrix} a_1 \dot{q}_1^2 - g s_1 \\ -g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.20)$$

$$v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2 = \begin{bmatrix} a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)c_2 - g s_{12} \\ 0 \\ a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)s_2 + g c_{12} \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.21)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата				Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист							
												45						

$v_2^2 = {}^0R_2^T \cdot v_2^0 = \begin{bmatrix} -a_1 s_2 \dot{q}_1 \\ 0 \\ a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1 c_2 \dot{q}_1 \end{bmatrix},$	(Г.17)
$\omega_2^0 = -J_{\omega 2} \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix},$	(Г.18)
$\omega_2^2 = {}^0R_2^T \cdot \omega_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix},$	(Г.19)
$v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1 = \begin{bmatrix} a_1 \dot{q}_1^2 - g s_1 \\ -g c_1 \\ 0 \end{bmatrix},$	(Г.20)
$v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2 = \begin{bmatrix} a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)c_2 - g s_{12} \\ 0 \\ a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)s_2 + g c_{12} \end{bmatrix}.$	(Г.21)

Расчет составляющих функции Лагранжа:

$$L_{1,1} = \frac{1}{2}(v_1^1)^T v_1^1 + g_1^T r_{0,1}^1 = \frac{1}{2}a_1^2 \dot{q}_1^2 - a_1 g s_1, \quad (\Gamma.22)$$

$$L_{1,2} = x\{v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1\} = a_1 \dot{q}_1^2 - g s_1, \quad (\Gamma.23)$$

$$L_{1,3} = y\{v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1\} = -g c_1, \quad (\Gamma.24)$$

$$L_{1,4} = z\{v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1\} = 0, \quad (\Gamma.25)$$

$$L_{1,5} = \frac{1}{2} (x\{\omega_1^1\})^2 = 0, \quad (\Gamma.26)$$

$$L_{1,6} = \frac{1}{2} (y\{\omega_1^1\})^2 = 0, \quad (\Gamma.27)$$

$$L_{1,7} = \frac{1}{2} (z\{\omega_1^1\})^2 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2, \quad (\Gamma.28)$$

$$L_{1,8} = x\{\omega_1^1\} \cdot y\{\omega_1^1\} = 0, \quad (\Gamma.29)$$

$$L_{1,9} = x\{\omega_1^1\} \cdot z\{\omega_1^1\} = 0, \quad (\Gamma.30)$$

$$L_{1,10} = x\{\omega_1^1\} \cdot z\{\omega_1^1\} = 0, \quad (\Gamma.31)$$

$$L_{2,1} = \frac{1}{2}(v_2^2)^T v_2^2 + g_2^T r_{0,2}^2 = \frac{1}{2}(a_1 \dot{q}_1 s_2)^2 + \frac{1}{2}(a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1 \dot{q}_1 c_2)^2 - \quad (\Gamma.32)$$

$$- g s_{12}(a_2 + a_1 c_2) + a_1 g s_2 c_{12}, \quad (\Gamma.33)$$

$$L_{2,2} = x\{v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2\} = a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)c_2 - g s_{12}, \quad (\Gamma.34)$$

$$L_{2,3} = y\{v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2\} = 0, \quad (\Gamma.35)$$

$$L_{2,4} = z\{v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2\} = a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)s_2 + g c_{12}, \quad (\Gamma.36)$$

$$L_{2,5} = \frac{1}{2} (x\{\omega_2^2\})^2 = 0, \quad (\Gamma.37)$$

$$L_{2,6} = \frac{1}{2} (y\{\omega_2^2\})^2 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \quad (\Gamma.38)$$

$$L_{2,7} = \frac{1}{2} (z\{\omega_2^2\})^2 = 0, \quad (\Gamma.39)$$

$$L_{2,8} = x\{\omega_2^2\} \cdot y\{\omega_2^2\} = 0, \quad (\Gamma.40)$$

$$L_{2,9} = x\{\omega_2^2\} \cdot z\{\omega_2^2\} = 0, \quad (\Gamma.41)$$

$$L_{2,10} = x\{\omega_2^2\} \cdot z\{\omega_2^2\} = 0. \quad (\Gamma.42)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										46
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Расчет компонент регрессора:

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,1}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{1,1}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{1,1}}{\partial q_1} = a_1^2 \ddot{q}_1 - a_1 g c_1, \quad (\Gamma.43)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,2}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{1,2}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{1,2}}{\partial q_1} = 2a_1 \ddot{q}_1 - g c_1, \quad (\Gamma.44)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,3}\} = g s_1, \quad (\Gamma.45)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,4}\} = 0, \quad (\Gamma.46)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,5}\} = 0, \quad (\Gamma.47)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,6}\} = 0, \quad (\Gamma.48)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,7}\} = \ddot{q}_1, \quad (\Gamma.49)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,8}\} = 0, \quad (\Gamma.50)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,9}\} = 0, \quad (\Gamma.51)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,10}\} = 0, \quad (\Gamma.52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1\{L_{2,1}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{2,1}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{2,1}}{\partial q_1} = (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2) \ddot{q}_1 + (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) \ddot{q}_2 + \\ + 2a_1 a_2 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_1 + a_1 a_2 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_2 - a_2 g c_{12} - a_1 g c_1, \end{aligned} \quad (\Gamma.53)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1\{L_{2,2}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{2,2}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{2,2}}{\partial q_1} = 2(a_2 + a_1 c_2) \ddot{q}_1 + (2a_2 + a_1 c_2) \ddot{q}_2 + \\ + 2a_1 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_1 + a_1 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_2 - g c_{12}, \end{aligned} \quad (\Gamma.54)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,3}\} = 0, \quad (\Gamma.55)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,4}\} = 2a_1 s_2 \ddot{q}_1 + a_1 s_2 \ddot{q}_2 - 2a_1 \dot{q}_2 c_2 \dot{q}_1 - a_1 c_2 \dot{q}_2^2 - g s_{12}, \quad (\Gamma.56)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,5}\} = 0, \quad (\Gamma.57)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,6}\} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2, \quad (\Gamma.58)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,7}\} = 0, \quad (\Gamma.59)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,8}\} = 0, \quad (\Gamma.60)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,9}\} = 0, \quad (\Gamma.61)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,10}\} = 0, \quad (\Gamma.62)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										47
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,1}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{2,1}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L_{2,1}}{\partial q_2} = (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) \ddot{q}_1 + a_2^2 \ddot{q}_2 - a_1 a_2 \dot{q}_1 s_2 \dot{q}_1 - a_2 g c_{12}, \quad (\Gamma.63)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,2}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{2,2}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L_{2,2}}{\partial q_2} = (2a_2 + a_1 c_2) \ddot{q}_1 + 2a_2 \ddot{q}_2 - a_1 \dot{q}_1 s_2 \dot{q}_1 - g c_{12}, \quad (\Gamma.64)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,3}\} = 0, \quad (\Gamma.65)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,4}\} = a_1 s_2 \ddot{q}_1 + a_1 \dot{q}_1 c_2 \dot{q}_1 - g s_{12}, \quad (\Gamma.66)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,5}\} = 0, \quad (\Gamma.67)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,6}\} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2, \quad (\Gamma.68)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,7}\} = 0, \quad (\Gamma.69)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,8}\} = 0, \quad (\Gamma.70)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,9}\} = 0, \quad (\Gamma.71)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,10}\} = 0. \quad (\Gamma.72)$$

Уравнения движения робота с учетом (Г.43)–(Г.72):

$$\begin{cases} m_1 \mathcal{L}_1\{L_{1,1}\} + m_1 x_{c1} \mathcal{L}_1\{L_{1,2}\} + m_1 y_{c1} \mathcal{L}_1\{L_{1,3}\} + I_{1,zz} \mathcal{L}_1\{L_{1,7}\} + \\ + m_2 \mathcal{L}_1\{L_{2,1}\} + m_2 x_{c2} \mathcal{L}_1\{L_{2,2}\} + m_2 z_{c2} \mathcal{L}_1\{L_{2,4}\} + I_{2,yy} \mathcal{L}_1\{L_{2,6}\} = \tau_1 \\ m_2 \mathcal{L}_2\{L_{2,1}\} + m_2 x_{c2} \mathcal{L}_2\{L_{2,2}\} + m_2 z_{c2} \mathcal{L}_2\{L_{2,4}\} + I_{2,yy} \mathcal{L}_2\{L_{2,6}\} = \tau_2 \end{cases} \quad (\Gamma.73)$$

$$\begin{cases} \bar{d}_{11} \ddot{q}_1 + \bar{d}_{12} \ddot{q}_2 + \bar{c}_{11} \dot{q}_1 + \bar{c}_{12} \dot{q}_2 + \bar{g}_{11} = \tau_1 \\ \bar{d}_{21} \ddot{q}_1 + \bar{d}_{22} \ddot{q}_2 + \bar{c}_{21} \dot{q}_1 + \bar{c}_{22} \dot{q}_2 + \bar{g}_{21} = \tau_2 \end{cases} \quad (\Gamma.74)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{d}_{11} = m_1 a_1^2 + 2m_1 x_{c1} a_1 + I_{1,zz} + m_2 (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2) + \\ + 2m_2 x_{c2} (a_2 + a_1 c_2) + 2m_2 z_{c2} a_1 s_2 + I_{2,yy}, \end{aligned} \quad (\Gamma.75)$$

$$\bar{d}_{12} = m_2 (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) + m_2 x_{c2} (2a_2 + a_1 c_2) + m_2 z_{c2} a_1 s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.76)$$

$$\bar{d}_{21} = m_2 (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) + m_2 x_{c2} (2a_2 + a_1 c_2) + m_2 z_{c2} a_1 s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.77)$$

$$\bar{d}_{22} = m_2 a_2^2 + 2m_2 x_{c2} a_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.78)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\begin{cases} m_1\mathcal{L}_1\{L_{1,1}\} + m_1x_{c1}\mathcal{L}_1\{L_{1,2}\} + m_1y_{c1}\mathcal{L}_1\{L_{1,3}\} + I_{1,zz}\mathcal{L}_1\{L_{1,7}\} + \\ + m_2\mathcal{L}_1\{L_{2,1}\} + m_2x_{c2}\mathcal{L}_1\{L_{2,2}\} + m_2z_{c2}\mathcal{L}_1\{L_{2,4}\} + I_{2,yy}\mathcal{L}_1\{L_{2,6}\} = \tau_1 \\ m_2\mathcal{L}_2\{L_{2,1}\} + m_2x_{c2}\mathcal{L}_2\{L_{2,2}\} + m_2z_{c2}\mathcal{L}_2\{L_{2,4}\} + I_{2,yy}\mathcal{L}_2\{L_{2,6}\} = \tau_2 \end{cases} \quad (\Gamma.73)$					
					$\begin{cases} \bar{d}_{11}\ddot{q}_1 + \bar{d}_{12}\ddot{q}_2 + \bar{c}_{11}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{g}_{11} = \tau_1 \\ \bar{d}_{21}\ddot{q}_1 + \bar{d}_{22}\ddot{q}_2 + \bar{c}_{21}\dot{q}_1 + \bar{c}_{22}\dot{q}_2 + \bar{g}_{21} = \tau_2 \end{cases} \quad (\Gamma.74)$					
где										
$\begin{aligned} \bar{d}_{11} = m_1a_1^2 + 2m_1x_{c1}a_1 + I_{1,zz} + m_2(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2) + \\ + 2m_2x_{c2}(a_2 + a_1c_2) + 2m_2z_{c2}a_1s_2 + I_{2,yy}, \end{aligned} \quad (\Gamma.75)$										
$\bar{d}_{12} = m_2(a_2^2 + a_1a_2c_2) + m_2x_{c2}(2a_2 + a_1c_2) + m_2z_{c2}a_1s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.76)$										
$\bar{d}_{21} = m_2(a_2^2 + a_1a_2c_2) + m_2x_{c2}(2a_2 + a_1c_2) + m_2z_{c2}a_1s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.77)$										
$\bar{d}_{22} = m_2a_2^2 + 2m_2x_{c2}a_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.78)$										
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										48
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

$$\bar{c}_{11} = 2m_2a_1a_2\dot{q}_2s_2 + 2m_2x_{c2}a_1\dot{q}_2s_2 - 2m_2z_{c2}a_1\dot{q}_2c_2, \quad (\Gamma.79)$$

$$\bar{c}_{12} = m_2a_1a_2\dot{q}_2s_2 + m_2x_{c2}a_1\dot{q}_2s_2 - m_2z_{c2}a_1\dot{q}_2c_2, \quad (\Gamma.80)$$

$$\bar{c}_{21} = -m_2a_1a_2\dot{q}_1s_2 - m_2x_{c2}a_1\dot{q}_1s_2 + m_2z_{c2}a_1\dot{q}_1c_2, \quad (\Gamma.81)$$

$$\bar{c}_{22} = 0, \quad (\Gamma.82)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11} = & -m_1a_1gc_1 - m_1x_{c1}gc_1 + m_1y_{c1}gs_1 - m_2(a_2gc_{12} + a_1gc_1) - \\ & - m_2x_{c2}gc_{12} - m_2z_{c2}gs_{12}, \end{aligned} \quad (\Gamma.83)$$

$$\bar{g}_{21} = -m_2a_2gc_{12} - m_2x_{c2}gc_{12} - m_2z_{c2}gs_{12}. \quad (\Gamma.84)$$

Матрицы $D(q)$, $C(q, \dot{q})$ и $G(q)$, с помощью которых они могут быть представлены в матричном виде равны

$$D(q) = \begin{bmatrix} \bar{d}_{11} & \bar{d}_{12} \\ \bar{d}_{21} & \bar{d}_{22} \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} \end{bmatrix}, \quad G(q) = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} \\ \bar{g}_{21} \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.85)$$

Пользуясь случаем можно убедиться в том, что формулы из раздела 2.2.4 дают с дополнительным замечанием, о котором будет сказано ниже, такой же результат:

$$J_{x1} = -(J_{v1}^{\{3\}})^T J_{\omega 1}^{\{2\}} + (J_{v1}^{\{2\}})^T J_{\omega 1}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_1c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.86)$$

$$J_{y1} = (J_{v1}^{\{3\}})^T J_{\omega 1}^{\{1\}} - (J_{v1}^{\{1\}})^T J_{\omega 1}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_1s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.87)$$

$$J_{z1} = -(J_{v1}^{\{2\}})^T J_{\omega 1}^{\{1\}} + (J_{v1}^{\{1\}})^T J_{\omega 1}^{\{2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.88)$$

$$J_{x2} = -(J_{v2}^{\{3\}})^T J_{\omega 2}^{\{2\}} + (J_{v2}^{\{2\}})^T J_{\omega 2}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_2c_{12} + a_1c_1 & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ a_2c_{12} & a_2c_{12} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.89)$$

$$J_{y2} = (J_{v2}^{\{3\}})^T J_{\omega 2}^{\{1\}} - (J_{v2}^{\{1\}})^T J_{\omega 2}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_2s_{12} + a_1s_1 & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ a_2s_{12} & a_2s_{12} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.90)$$

$$J_{z2} = -(J_{v2}^{\{2\}})^T J_{\omega 2}^{\{1\}} + (J_{v2}^{\{1\}})^T J_{\omega 2}^{\{2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.91)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$J_{x1} = -\left(J_{v1}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega 1}^{\{2\}} + \left(J_{v1}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega 1}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$	(Г.86)
					$J_{y1} = \left(J_{v1}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega 1}^{\{1\}} - \left(J_{v1}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega 1}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_1 s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$	(Г.87)
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$J_{z1} = -\left(J_{v1}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega 1}^{\{1\}} + \left(J_{v1}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega 1}^{\{2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$	(Г.88)
					$J_{x2} = -\left(J_{v2}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega 2}^{\{2\}} + \left(J_{v2}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega 2}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_2 c_{12} + a_1 c_1 & a_2 c_{12} + a_1 c_1 \\ a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix},$	(Г.89)
					$J_{y2} = \left(J_{v2}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega 2}^{\{1\}} - \left(J_{v2}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega 2}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_2 s_{12} + a_1 s_1 & a_2 s_{12} + a_1 s_1 \\ a_2 s_{12} & a_2 s_{12} \end{bmatrix},$	(Г.90)
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$J_{z2} = -\left(J_{v2}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega 2}^{\{1\}} + \left(J_{v2}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega 2}^{\{2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$	(Г.91)

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						49

$$r_{1,c1}^0 = {}^0R_1 r_{1,c1}^1 = \begin{bmatrix} x_{c1}c_1 - y_{c1}s_1 \\ x_{c1}s_1 + y_{c1}c_1 \\ z_{c1} \end{bmatrix}, \quad r_{2,c2}^0 = {}^0R_2 r_{2,c2}^2 = \begin{bmatrix} x_{c2}c_{12} + z_{c2}s_{12} \\ x_{c2}s_{12} + z_{c2}c_{12} \\ y_{c2} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.92)$$

$$\mathcal{D}(q) = \sum_{i=1}^2 \left(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i {}^0R_i^T J_{\omega i} + 2 \cdot x \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_{xi} + \right. \quad (\Gamma.93)$$

$$\left. + 2 \cdot y \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_{yi} + 2 \cdot z \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_{zi} \right) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.94)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & 0.5(\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{21}) \\ 0.5(\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{21}) & \mathcal{D}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.95)$$

где

$$\mathcal{D}_{11} = \bar{d}_{11}, \quad (\Gamma.96)$$

$$\mathcal{D}_{12} = 2m_2 a_1 s_2 z_{c2} + (2m_2 a_2 + 2m_2 a_1 c_2) x_{c2} + m_2 a_1 a_2 c_2 + m_2 a_2^2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.97)$$

$$\mathcal{D}_{21} = 2m_2 a_2 x_{c2} + m_2 a_1 a_2 c_2 + m_2 a_2^2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.98)$$

$$\mathcal{D}_{22} = \bar{d}_{22}, \quad (\Gamma.99)$$

$$D_{11} = \mathcal{D}_{11}, \quad (\Gamma.100)$$

$$D_{12} = \bar{d}_{12} \quad (\Gamma.101)$$

$$D_{21} = D_{12}, \quad (\Gamma.102)$$

$$D_{22} = \mathcal{D}_{22}, \quad (\Gamma.103)$$

$$C_{111} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} \right) = 0, \quad (\Gamma.104)$$

$$C_{112} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} \right) = m_2 a_1 (c_2 z_{c2} - s_2 x_{c2} - a_2 s_2), \quad (\Gamma.105)$$

$$C_{121} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} \right) = m_2 a_1 (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2), \quad (\Gamma.106)$$

$$C_{122} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} \right) = 0, \quad (\Gamma.107)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										50
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

$$C_{211} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} \right) = m_2 a_1 (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2), \quad (\Gamma.108)$$

$$C_{212} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} \right) = 0, \quad (\Gamma.109)$$

$$C_{221} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} \right) = m_2 a_1 (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2), \quad (\Gamma.110)$$

$$C_{222} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} \right) = 0, \quad (\Gamma.111)$$

$$C_{11} = C_{111} \dot{q}_1 + C_{211} \dot{q}_2 = m_2 a_1 \dot{q}_2 (x_{c2} s_2 - z_{c2} c_2 + a_2 s_2), \quad (\Gamma.112)$$

$$C_{12} = C_{121} \dot{q}_1 + C_{221} \dot{q}_2 = m_2 a_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (x_{c2} s_2 - z_{c2} c_2 + a_2 s_2), \quad (\Gamma.113)$$

$$C_{21} = C_{112} \dot{q}_1 + C_{212} \dot{q}_2 = -m_2 a_1 \dot{q}_1 (x_{c2} s_2 - z_{c2} c_2 + a_2 s_2), \quad (\Gamma.114)$$

$$C_{22} = C_{122} \dot{q}_1 + C_{222} \dot{q}_2 = 0, \quad (\Gamma.115)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.116)$$

$$U = - \sum_{i=1}^2 (m_i g_i^T r_{0,i}^i + g_i^T (m_i r_{i,ci}^i)) = -m_2 g c_{12} z_{c2} + m_1 g c_{11} y_{c1} + \quad (\Gamma.117)$$

$$+ m_2 g s_{12} x_{c2} + m_1 g s_{11} x_{c1} + m_2 g a_2 s_{12} + m_2 a_1 g s_1 + m_1 a_1 g s_1, \quad (\Gamma.118)$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{\partial U}{\partial q_1} = \bar{g}_{11}, \\ G_{21} &= \frac{\partial U}{\partial q_2} = \bar{g}_{21}, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad G(q) = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.119)$$

Нетрудно видеть, что выражение, полученное таким образом для $C(q, \dot{q})$ не совпадает с ее версией из (Г.85). Это не является ошибкой, а происходит из-за того, что данная матрица может иметь несколько вариантов представления. В такой ситуации, главное, чтобы последние давали один и тот же результат при подстановке в выражение $C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}$. Это и будет являться критерием их равнозначности. Для версий матрицы $C(q, \dot{q})$ из (Г.85) и (Г.116) оно имеет следующее значение:

$$C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} m_2 a_1 (2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2) \\ m_2 a_1 \dot{q}_1^2 (c_2 z_{c2} - s_2 x_{c2} - a_2 s_2) \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.120)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист	
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						51	

Приложение Д
(рекомендуемое)

Исключение из регрессора модели плоского двухзвенного манипулятора нулевых и линейно зависимых столбцов

Регрессор модели плоского двухзвенного манипулятора равен:

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \ddot{q}_1 & \dot{q}_1 & \text{sign}(\dot{q}_1) & 1 & \xi_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ O_{1 \times 10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_{1,1} & \ddot{q}_2 & \dot{q}_2 & \text{sign}(\dot{q}_2) & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.1})$$

где

$$\xi_{1,1} = [\mathcal{L}_1\{L_{1,1}\} \quad \mathcal{L}_1\{L_{1,2}\} \quad \dots \quad \mathcal{L}_1\{L_{1,10}\}], \quad (\text{Д.2})$$

$$\xi_{1,2} = [\mathcal{L}_1\{L_{2,1}\} \quad \mathcal{L}_1\{L_{2,2}\} \quad \dots \quad \mathcal{L}_1\{L_{2,10}\}], \quad (\text{Д.3})$$

$$\xi_{2,2} = [\mathcal{L}_2\{L_{2,1}\} \quad \mathcal{L}_2\{L_{2,2}\} \quad \dots \quad \mathcal{L}_2\{L_{2,10}\}]. \quad (\text{Д.4})$$

После исключения нулевых столбцов, проводимого с учетом уравнений (Г.43)–(Г.72), регрессор $\bar{\xi}$ «потеряет» столбцы с номерами, составляющими множество $\{4, 5, 6, 8, 9, 10, 17, 19, 21, 22, 23, 24\}$.

С учетом того, что остальные столбцы $\bar{\xi}$ имеют вид:

$$\bar{\xi}_{\{1\}} = \begin{bmatrix} a_1^2 \ddot{q}_1 - a_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi}_{\{11\}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.5})$$

$$\bar{\xi}_{\{2\}} = \begin{bmatrix} 2a_1 \ddot{q}_1 - g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi}_{\{12\}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.6})$$

$$\bar{\xi}_{\{3\}} = \begin{bmatrix} g s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi}_{\{13\}} = \begin{bmatrix} \text{sign}(\ddot{q}_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.7})$$

$$\bar{\xi}_{\{7\}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi}_{\{14\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.8})$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										52
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Инов. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	
Инов. № подл.	
Изм	Лист
№ докум.	Подп.
Дата	

$$\bar{\xi}_{\{15\}} = \begin{bmatrix} (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2)\ddot{q}_1 + (a_2^2 + a_1a_2c_2)\ddot{q}_2 + 2a_1a_2\dot{q}_2s_2\dot{q}_1 + \\ + a_1a_2\dot{q}_2s_2\dot{q}_2 - a_2gc_{12} - a_1gc_1 \\ (a_2^2 + a_1a_2c_2)\ddot{q}_1 + a_2^2\ddot{q}_2 - a_1a_2\dot{q}_1s_2\dot{q}_1 - a_2gc_{12} \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.9})$$

$$\bar{\xi}_{\{16\}} = \begin{bmatrix} 2(a_2 + a_1c_2)\ddot{q}_1 + (2a_2 + a_1c_2)\ddot{q}_2 + 2a_1\dot{q}_2s_2\dot{q}_1 + a_1\dot{q}_2s_2\dot{q}_2 - gc_{12} \\ (2a_2 + a_1c_2)\ddot{q}_1 + 2a_2\ddot{q}_2 - a_1\dot{q}_1s_2\dot{q}_1 - gc_{12} \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.10})$$

$$\bar{\xi}_{\{18\}} = \begin{bmatrix} 2a_1s_2\ddot{q}_1 + a_1s_2\ddot{q}_2 - 2a_1\dot{q}_2c_2\dot{q}_1 - a_1c_2\dot{q}_2^2 - gs_{12} \\ a_1s_2\ddot{q}_1 + a_1\dot{q}_1c_2\dot{q}_1 - gs_{12} \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.11})$$

$$\bar{\xi}_{\{20\}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.12})$$

$$\bar{\xi}_{\{25\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.13})$$

$$\bar{\xi}_{\{26\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.14})$$

$$\bar{\xi}_{\{27\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sign}(\ddot{q}_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.15})$$

$$\bar{\xi}_{\{28\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{Д.16})$$

результаты выполнения алгоритма, описанного в подразделе 3.1.3, будут следующими:

- в качестве пары линейно зависимых столбцов будут найдены

$$\bar{\xi}_{\{7\}} = \bar{\xi}_{\{11\}}; \quad (\text{Д.17})$$

для дальнейшего повествования предположим, что в качестве реакции на этот факт были исключены столбец $\bar{\xi}_{\{7\}}$ и соответствующий ему параметр $I_{1,zz}$, а параметр $I_{a,1}$, соответствующий в свою очередь одиннадцатому столбцу, был заменен суммой $I_{a,1} + I_{1,zz}$;

- при поиске триплета линейно зависимых столбцов будет определено, что:

$$\bar{\xi}_{\{1\}} = a_1\bar{\xi}_{\{2\}} - a_1^2\bar{\xi}_{\{11\}}; \quad (\text{Д.18})$$

реакция — исключение столбца $\bar{\xi}_{\{1\}}$, параметра m_1 , и следующие замены:

$$m_1 x_{c1} \rightarrow m_1 x_{c1} + a_1 m_1, \quad (\text{Д.19})$$

$$I_{a,1} + I_{1,zz} \rightarrow I_{a,1} + I_{1,zz} - a_1^2 m_1; \quad (\text{Д.20})$$

- при поиске зависимостей типа «один столбец от трех других» никаких результатов найдено не будет;
- на последнем этапе алгоритм укажет на то, что

$$\bar{\xi}_{\{15\}} = a_2 \bar{\xi}_{\{16\}} - a_2^2 \bar{\xi}_{\{20\}} + a_1 \bar{\xi}_{\{2\}} - a_1^2 \bar{\xi}_{\{11\}}; \quad (\text{Д.21})$$

реакция — исключение столбца $\bar{\xi}_{\{15\}}$, параметра m_2 , и следующие замены:

$$m_2 x_{c2} \rightarrow m_2 x_{c2} + a_2 m_2, \quad (\text{Д.22})$$

$$I_{2,yy} \rightarrow I_{2,yy} - a_2^2 m_2, \quad (\text{Д.23})$$

$$m_1 x_{c1} + a_1 m_1 \rightarrow m_1 x_{c1} + a_1 m_1 + a_1 m_2, \quad (\text{Д.24})$$

$$I_{a,1} + I_{1,zz} - a_1^2 m_1 \rightarrow I_{a,1} + I_{1,zz} - a_1^2 m_1 - a_1^2 m_2. \quad (\text{Д.25})$$

Иных зависимостей между столбцами регрессора нет.

В заключение отметим, что при использовании результатов идентификации в каких-либо расчетах, значения, полученные для комбинаций, указанных в правой части выражений (Д.22)–(Д.25), следует приписать соответственно параметрам $m_2 x_{c2}$, $I_{2,yy}$, $m_1 x_{c1}$ и $I_{a,1}$, а параметры m_2 , m_1 и $I_{1,zz}$ принять равными нулю.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$m_1x_{c1} + a_1m_1 \rightarrow m_1x_{c1} + a_1m_1 + a_1m_2,$					(Д.24)
					$I_{a,1} + I_{1,zz} - a_1^2m_1 \rightarrow I_{a,1} + I_{1,zz} - a_1^2m_1 - a_1^2m_2.$					(Д.25)
					Иных зависимостей между столбцами регрессора нет.					
					В заключение отметим, что при использовании результатов идентификации в каких-либо расчетах, значения, полученные для комбинаций, указанных в правой части выражений (Д.22)–(Д.25), следует приписать соответственно параметрам m_2x_{c2} , $I_{2,yy}$, m_1x_{c1} и $I_{a,1}$, а параметры m_2 , m_1 и $I_{1,zz}$ принять равными нулю.					
					</					