

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1
«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»
по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. Р4135
Фамилия И.О.,
Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,
должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Обозначения и сокращения	3
Введение	5
1 Описание манипулятора	6
2 Математическая модель манипулятора	8
2.1 Кинематика манипулятора	8
2.1.1 Общие замечания	8
2.1.2 Прямая задача кинематики	10
2.1.3 Обратная задача кинематики	12
2.2 Динамика манипулятора	16
2.2.1 Общие замечания	16
2.2.2 Получение уравнений движения методом Эйлера-Лагранжа	18
2.2.3 Получение уравнений движения методом Ньютона-Эйлера	19
2.2.4 Уравнение движения в матричном виде	22
3 Синтез систем управления	23
Заключение	24
Список использованных источников	25
Приложение А Матрицы однородного преобразования	26
Приложение Б Терминология относительных измерений	28

																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

n — количество звеньев робота, $n = 5$;

q_i — i -ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i -ом сочленении);

q — вектор-столбец обобщенных координат робота, $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$;

iR_j — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;

iA_j — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_iy_iz_i$ относительно СК $Ox_iy_iz_i^*$;

$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i^{**}$;

g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;

v_j^i — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО^{***} выраженной относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

* За пояснениями обратитесь к Приложению А

^{**} За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0y_0z_0$.

ω_j^i — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega_{j,k}^i$ — угловая скорость вращения $Ox_ky_kz_k$ относительно $Ox_jy_jz_j$, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

z_j^i — орт $[0 \ 0 \ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

f_j^i — сила, действующая на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_j^i — момент силы, действующий на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_i — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты q_i ;

m_i — масса i -го звена;

\mathcal{I}_j^i — тензор инерции j -го звена относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;

s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						4	

Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории*. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

- в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;
- раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;
- в разделе 3 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах апробации на реальном роботе и проч.

* Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движения схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
				Лист
				5

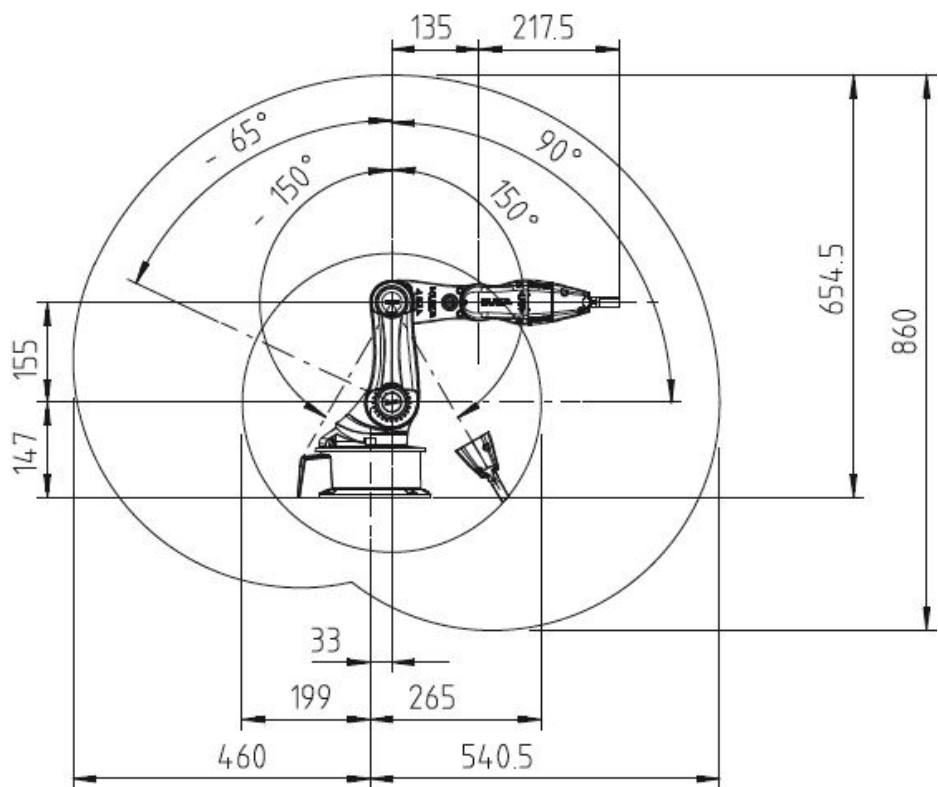
1 Описание манипулятора

Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

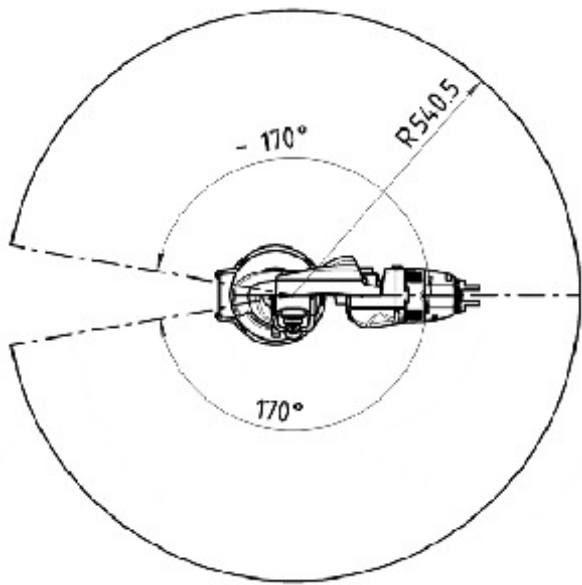
Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с ⁻¹
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В

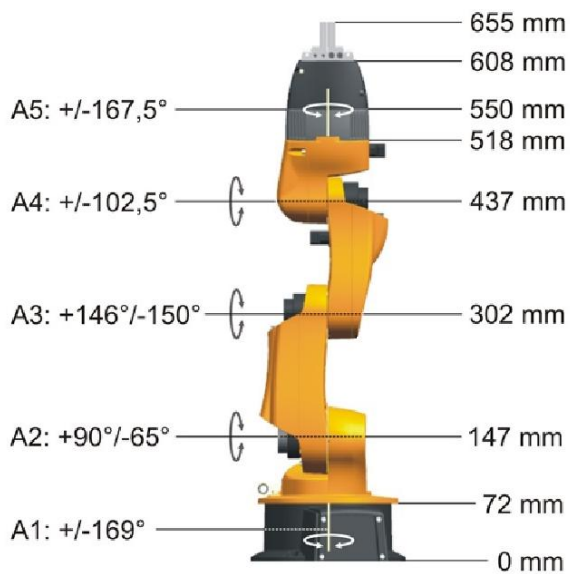
Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата



а)



б)



в)

Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

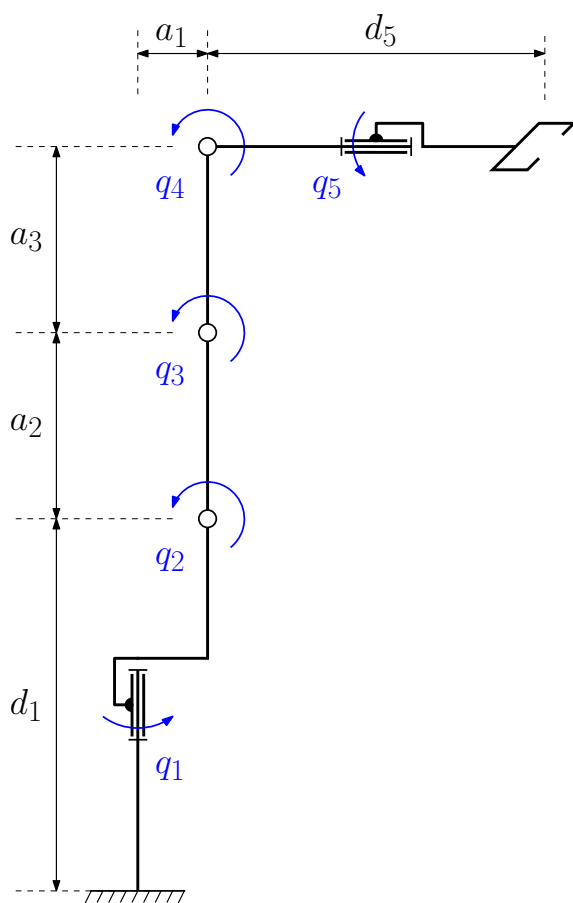
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

2 Математическая модель манипулятора

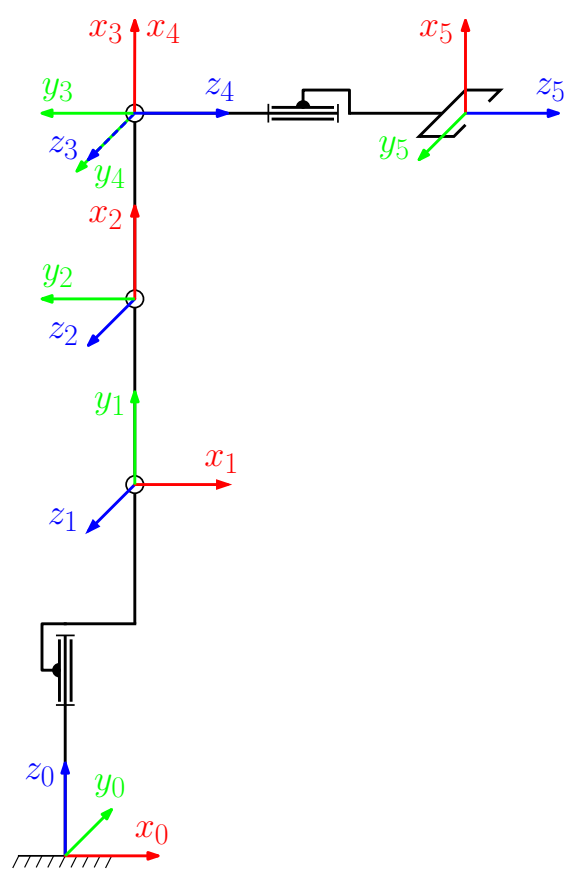
2.1 Кинематика манипулятора

2.1.1 Общие замечания

Последовательная кинематическая цепь рассматриваемого манипулятора, включающая только вращательные КП V-класса (цилиндрические шарниры), изображена на рисунке 2.1а.



а)



б)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая при $q_i = 0$, $i = \overline{1, 5}$; б — расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	
Инв. № подл.	

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$
$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Звено	a_i , мм	α_i , рад	d_i , мм	θ_i , рад
1	33	$\pi/2$	147	q_1
2	155	0	0	$q_2 + \pi/2$
3	135	0	0	q_3
4	0	$\pi/2$	0	q_4
5	0	0	218	q_5

Информация о смещении и повороте СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ содержится в матрице 0A_5 . Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, оста-

ется лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$${}^0A_5 = \prod_{i=1}^5 {}^{i-1}A_i(q_i).$$

(2.6)

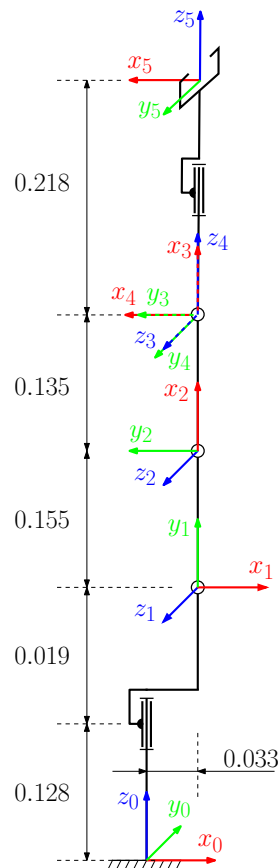


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T = [0, 0, 0, \pi/2, 0]^T$.

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$${}^0R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}.$$

(2.7)

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

а правая —

$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 c_{234} & -s_5 c_{234} & s_{234} & a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_5 s_{234} \\ c_5 s_{234} & -s_5 s_{234} & -c_{234} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_5 c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где в свою очередь

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \quad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \quad (2.13)$$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов θ_1 , θ_5 и θ_{234} дают

– равенство элементов (3, 4):

$$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14)$$

– равенство элементов (3, 1) и (3, 2):

$$\begin{cases} s_5 = r_{11} s_1 - r_{21} c_1 \\ c_5 = r_{12} s_1 - r_{22} c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \quad (2.15)$$

– равенство элементов (2, 3) и (1, 3):

$$\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13} c_1 + r_{23} s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \quad (2.16)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	<div>КСУИ.101.4135.001 ПЗ</div> <div>Лист 13</div>

– равенство элементов (3, 1) и (3, 2):

$$\begin{aligned} \begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \text{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \text{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} & (2.15) \end{aligned}$$

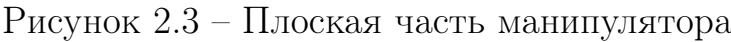
– равенство элементов (2, 3) и (1, 3):

$$\begin{aligned} \begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \text{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \text{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} & (2.16) \end{aligned}$$

$${}^1A_4 = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_x s_1 - p_y c_1 - d_5 (r_{13} s_1 - r_{23} c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$
$$p_x s_1 - p_y c_1 - d_5(r_{13}s_1 - r_{23}c_1) = 0. \quad (2.18)$$
$$r_{1,4}^1 = \begin{bmatrix} (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$
$$c_3(\theta_1) = \frac{(r_{1,4}^1)^T \cdot r_{1,4}^1 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \quad (2.20)$$
$$\theta_3^{l,II} = \mp \text{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^I)}, c_3(\theta_1^I)) \quad (2.21)$$

$$\theta_3^{\text{III,IV}} = \mp \text{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{\text{II}})}, c_3(\theta_1^{\text{II}})) \quad (2.22)$$

$$\varphi(\theta_1) = \text{atan2}(y_r, x_r), \quad \beta(\theta_3) = \text{atan2}(a_3 \sin |\theta_3|, a_2 + a_3 \cos |\theta_3|), \quad (2.23)$$


$$\theta_2^{\text{III}} = \varphi(\theta_1^{\text{II}}) + \beta(\theta_3^{\text{III}}), \quad \theta_2^{\text{IV}} = \varphi(\theta_1^{\text{II}}) - \beta(\theta_3^{\text{IV}}). \quad (2.25)$$
$$\theta_4^{I,II} = \theta_{234}^I - \theta_2^{I,II} - \theta_3^{I,II}, \quad \theta_4^{III,IV} = \theta_{234}^{II} - \theta_2^{III,IV} - \theta_3^{III,IV}. \quad (2.26)$$
$$q^{\text{III}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{III}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{III}} & \theta_4^{\text{III}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T, \quad q^{\text{IV}} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\text{II}} & \theta_2^{\text{IV}} - \frac{\pi}{2} & \theta_3^{\text{IV}} & \theta_4^{\text{IV}} & \theta_5^{\text{II}} \end{bmatrix}^T. \quad (2.28)$$

2.2 Динамика манипулятора

2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}^*$, где $i = \overline{1,5}$, показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$ сонаправлена с $Ox_iy_iz_i$.

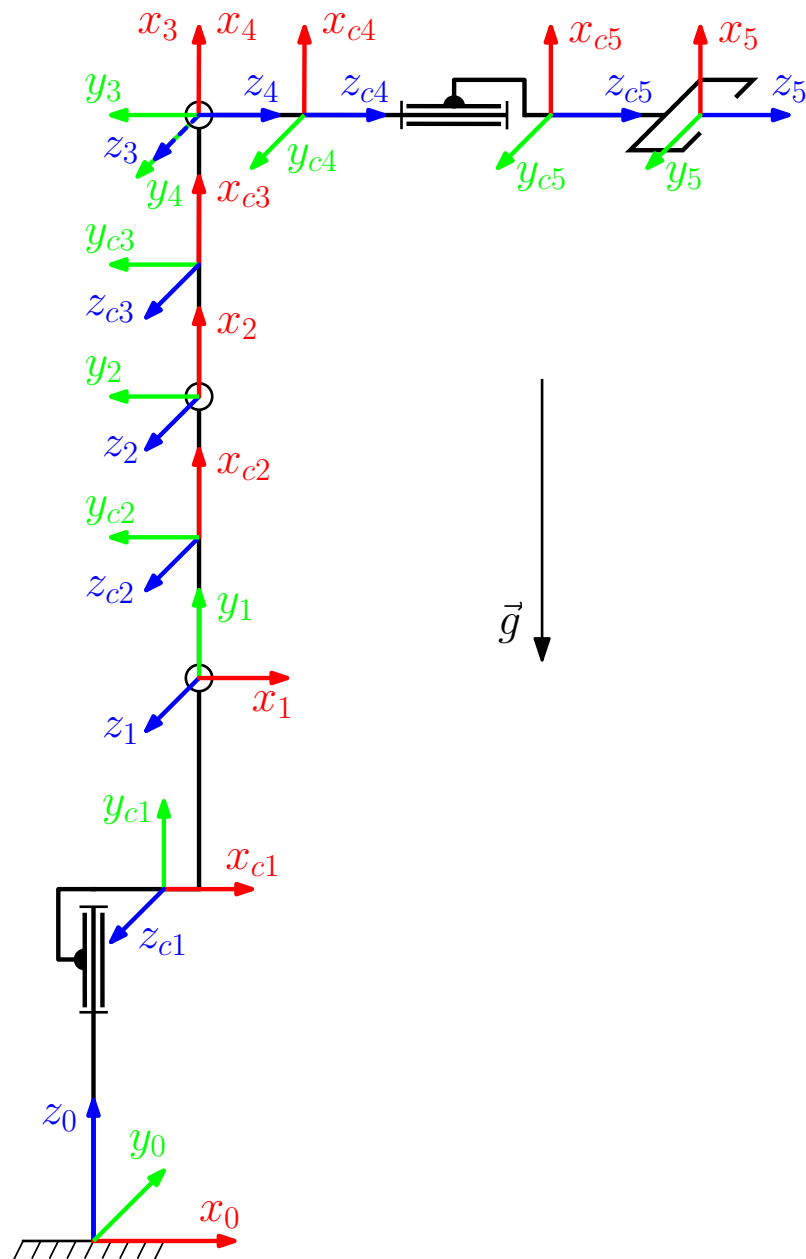


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора \vec{g} .

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
Копировал				
Формат А4				
Лист				
16				

2.2.2 Получение уравнений движения методом Эйлера-Лагранжа

Потенциальная энергия манипулятора

$$U = -g_0^T \cdot \sum_{i=1}^5 m_i r_{0,ci}^0 = \quad (2.37)$$

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$v_{ci}^0 = J_{vi} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.38)$$

связь между линейными скоростями центров масс звеньев и вектором \dot{q} :

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,c1}^0 - r_{0,0}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,c2}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,c2}^0 - r_{0,1}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$J_{v3} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,c3}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,c3}^0 - r_{0,1}^0) & z_2^0 \times (r_{0,c3}^0 - r_{0,2}^0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,0}^0) \\ z_1^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}^T, \quad (2.42)$$

где $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_{ci}^0 = J_{wi} \dot{q}, \quad i = \overline{1,5} \quad (2.43)$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором \dot{q} :

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Кинетическая энергия манипулятора:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^5 (m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{wi}^T {}^0 R_i \mathcal{I}_i^{ci} {}^0 R_i^T J_{wi}) \right) \dot{q} = \quad (2.47)$$

Подп. и дата	
Инв. № дубл.	
Взам. инв. №	
Подп. и дата	
Инв. № подл.	

$$J_{v4} = \begin{bmatrix} z_1^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,c4}^0 - r_{0,3}^0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{v5} = \begin{bmatrix} z_1^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,1}^0) \\ z_2^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,2}^0) \\ z_3^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,3}^0) \\ z_4^0 \times (r_{0,c5}^0 - r_{0,4}^0) \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

где $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ — нулевой вектор.

Якобианы, устанавливающие в соответствии с формулой

$$\omega_{ci}^0 = J_{\omega i} \dot{q}, \quad i = \overline{1, 5} \quad (2.43)$$

связь между угловыми скоростями звеньев и вектором \dot{q} :

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$
$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 4} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$
$$J_{\omega 5} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Кинетическая энергия манипулятора:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^5 (m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T R_i \mathcal{I}_i^{ci} {}^0R_i^T J_{\omega i}) \right) \dot{q} = \quad (2.47)$$

					КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						18
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		

Функция Лагранжа

$$L = K - U. \quad (2.48)$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1, 5} \quad \Rightarrow \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \tau_1 \\ = \tau_2 \\ = \tau_3 \\ = \tau_4 \\ = \tau_5 \end{array} \right. \quad (2.50)$$

2.2.3 Получение уравнений движения методом Ньютона-Эйлера

Для определения необходимых скоростей и ускорений с учетом «начальных условий»:

$$\omega_0^0 = 0, \quad \dot{\omega}_0^0 = 0, \quad a_0^0 = 0, \quad (2.51)$$

служат следующие рекурсивные формулы:

$$\omega_i^i = {}^{i-1}R_i^T (\omega_{i-1}^{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1}^{i-1}), \quad (2.52)$$

$$\dot{\omega}_i^i = {}^{i-1}R_i^T (\dot{\omega}_{i-1}^{i-1} + \ddot{q}_i z_{i-1}^{i-1} + \dot{q}_i \omega_{i-1}^{i-1} \times z_{i-1}^{i-1}), \quad (2.53)$$

$$a_i^i = {}^{i-1}R_i^T a_{i-1}^{i-1} + \dot{\omega}_i^i \times r_{i-1,i}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{i-1,i}^i), \quad (2.54)$$

$$a_{ci}^i = a_i^i + \dot{\omega}_i^i \times r_{i,ci}^i + \omega_i^i \times (\omega_i^i \times r_{i,ci}^i). \quad (2.55)$$

Применив их, получим:

$$\omega_1^1 = {}^0R_1^T (\omega_0^0 + \dot{q}_1 z_0^0) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

$$\dot{\omega}_1^1 = {}^0R_1^T (\dot{\omega}_0^0 + \ddot{q}_1 z_0^0 + \dot{q}_1 \omega_0^0 \times z_0^0) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$$a_1^1 = {}^0R_1^T a_0^0 + \dot{\omega}_1^1 \times r_{0,1}^1 + \omega_1^1 \times (\omega_1^1 \times r_{0,1}^1) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

$$a_{c1}^1 = a_1^1 + \dot{\omega}_1^1 \times r_{1,c1}^1 + \omega_1^1 \times (\omega_1^1 \times r_{1,c1}^1) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

$$\omega_2^2 = {}^1R_2^T (\omega_1^1 + \dot{q}_2 z_1^1) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

$$\dot{\omega}_2^2 = {}^1R_2^T (\dot{\omega}_1^1 + \ddot{q}_2 z_1^1 + \dot{q}_2 \omega_1^1 \times z_1^1) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

...

Для определения сил и моментов, с которыми звенья робота действуют друг на друга, с учетом «начальных условий»:

$$f_6^5 = 0, \quad \tau_6^5 = 0, \quad g_5 = {}^0R_5^T g_0, \quad (2.62)$$

используются следующие рекурсивные формулы:

$$f_i^i = f_{i+1}^i + m_i(a_{ci}^i - g_i), \quad (2.63)$$

$$\tau_i^i = \tau_{i+1}^i - f_i^i \times (r_{i-1,i}^i - r_{i,ci}^i) + f_{i+1}^i \times r_{i,ci}^i + \mathcal{I}_i^{ci} \dot{\omega}_i^i + \omega_i^i \times (\mathcal{I}_i^{ci} \omega_i^i). \quad (2.64)$$

$$g_{i-1} = {}^{i-1}R_i g_i, \quad f_i^{i-1} = {}^{i-1}R_i f_i^i, \quad \tau_i^{i-1} = {}^{i-1}R_i \tau_i^i. \quad (2.65)$$

Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									20

Воспользовавшись ими, получим:

$$g_5 = {}^0R_5^T g_0 = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

$$f_5^5 = f_6^5 + m_5(a_{c5}^5 - g_5) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

$$\tau_5^5 = \tau_6^5 - f_5^5 \times (r_{4,5}^5 - r_{5,c5}^5) + f_6^5 \times r_{5,c5}^5 + \mathcal{I}_5^{c5} \dot{\omega}_5^5 + \omega_5^5 \times (\mathcal{I}_5^{c5} \omega_5^5) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

$$g_4 = {}^4R_5 g_5 = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad f_5^4 = {}^4R_5 f_5^5 = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad \tau_5^4 = {}^4R_5 \tau_5^5 = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

$$f_4^4 = f_5^4 + m_4(a_{c4}^4 - g_4) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

...

Обобщенные моменты, а вместе с тем и уравнения движения манипулятора могут быть найдены по формуле:

$$\tau_i = (\tau_i^i)^T {}^{i-1}R_i^T z_{i-1}^{i-1}, \quad i = \overline{1, 5}. \quad (2.71)$$

С учетом их получаем, что

$$\begin{cases} \tau_1 = \\ \tau_2 = \\ \tau_3 = \\ \tau_4 = \\ \tau_5 = \end{cases} \quad (2.72)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										21
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

2.2.4 Уравнение движения в матричном виде

Уравнение движения системы в матричном виде, записанное на основании (2.50) или (2.72), примет вид

M(q)q̈ + C(q, q̇) + G(q) = τ, (2.73)

где M(q) — матрица инерции, C(q, q̇) — вектор центробежных и Кориолисовых сил, G(q) — вектор гравитации, τ — вектор обобщенных сил и моментов, равные

M(q) = [?], C(q, q̇) = [?], (2.74)

G(q) = [?], τ = [τ1, τ2, τ3, τ4, τ5, τ6]. (2.75)

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист				
										22				
										Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

3 Синтез систем управления

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Заключение

Текст заключения

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						24

Список использованных источников

- 1 KUKA YUBOT. — URL: <http://www.technomatix.ru/kuka-youbot> (дата обращения: 08.03.2017).
- 2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										25
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Приложение А
(рекомендуемое)

Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования ${}^i A_j$ называется матрица размера 4×4 , служащая для описания смещения и поворота СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$ и имеющая следующую структуру:

$${}^i A_j = \begin{bmatrix} {}^i R_j & r_{i,j}^i \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где $O_{1 \times 3} = [0 \ 0 \ 0]$.

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки C относительно $Ox_0 y_0 z_0$ при известных векторах r_C^2 , $r_{0,1}^0$ и $r_{1,2}^1$ и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r_C^0 = {}^0 R_1 r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ r_C^1 = {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \end{cases} \Rightarrow r_C^0 = {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \quad (\text{A.2})$$

где r_C^0 , r_C^1 , r_C^2 — радиус-векторы точки C в $Ox_0 y_0 z_0$, $Ox_1 y_1 z_1$ и $Ox_2 y_2 z_2$ соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами ${}^0 A_1$ и ${}^1 A_2$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1 R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1 A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0 A_1} \begin{bmatrix} {}^1 R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^0 R_1 {}^1 R_2 r_C^2 + {}^0 R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										26
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [1].

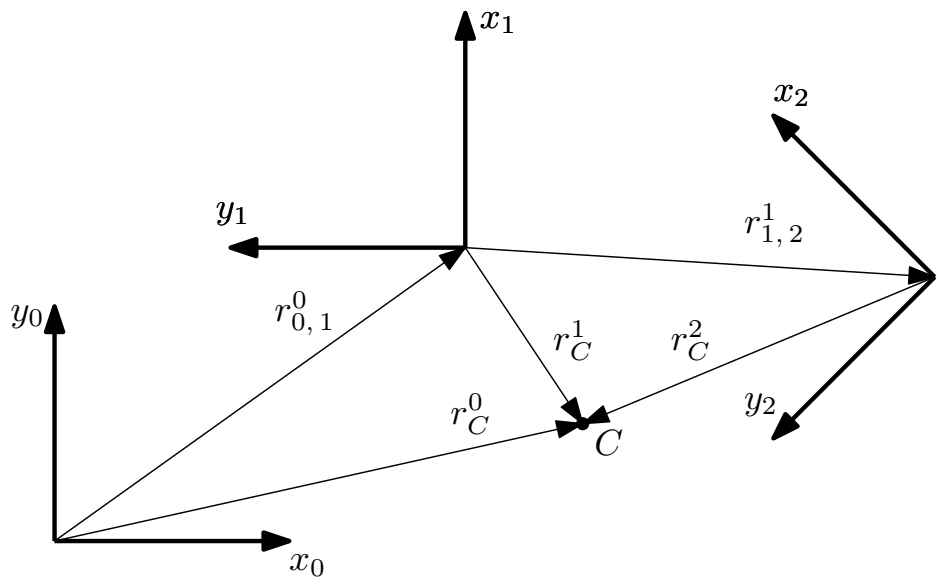


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ			Лист
								27

Приложение Б

(рекомендуемое)

Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором V . В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

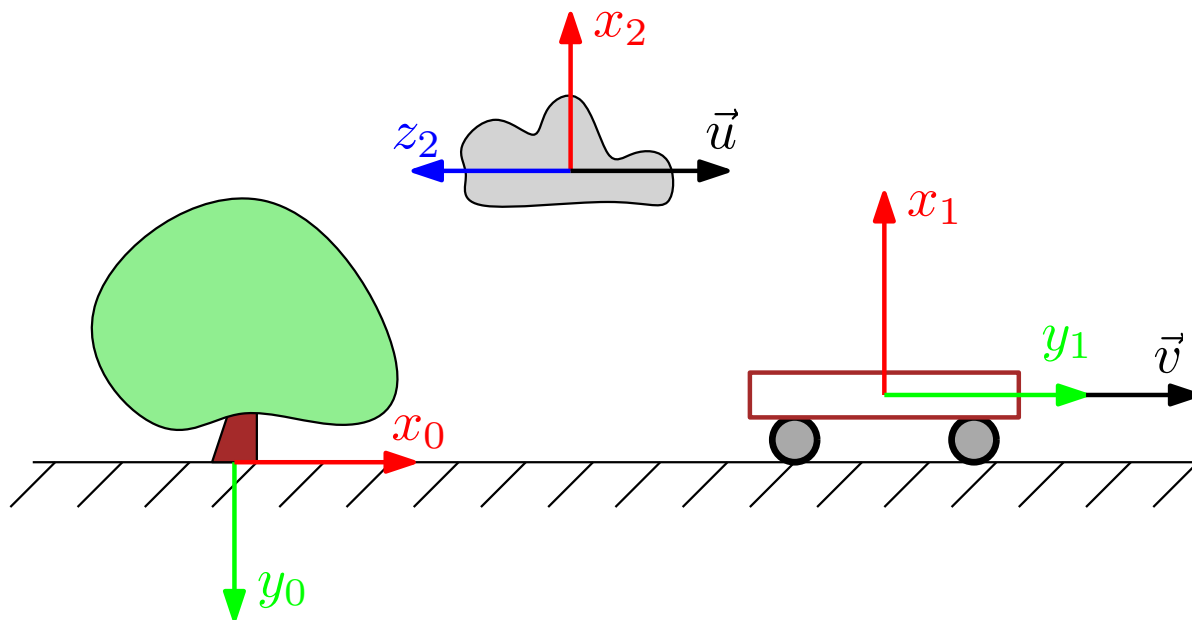


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

Таблица Б.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора V	Значение V^T
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата