

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по лабораторной работе №1
«НАЗВАНИЕ РАБОТЫ»
по дисциплине «Название дисциплины»

Выполнили: студенты гр. Р4135
Фамилия И.О.,
Фамилия И.О.

Преподаватель: Фамилия И.О.,
должность каф. СУиИ

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Обозначения и сокращения 4

Введение 6

1 Описание манипулятора 7

2 Математическая модель манипулятора 9

2.1 Кинематика манипулятора 9

2.1.1 Общие замечания 9

2.1.2 Прямая задача кинематики 11

2.1.3 Обратная задача кинематики 12

2.2 Динамика манипулятора 17

2.2.1 Общие замечания 17

2.2.2 Вывод уравнений движения 19

2.2.3 Учет динамики приводов 21

2.2.4 Альтернативная матричная форма записи 23

3 Идентификация параметров манипулятора 26

3.1 Описание метода 26

3.2 Результаты 27

4 Синтез систем управления 28

4.1 Предварительные замечания 28

4.2 Система управления для принятия определенной конфигурации . 29

4.3 Система управления процессом следования по траектории 30

Заключение 32

Список использованных источников 33

Инов. № подл.	Инов. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата	3 Идентификация параметров манипулятора26				
				3.1 Описание метода 26				
				3.2 Результаты 27				
Инов. № подл.	Инов. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата	4 Синтез систем управления28				
				4.1 Предварительные замечания 28				
				4.2 Система управления для принятия определенной конфигурации . 29				
Инов. № подл.	Инов. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата	4.3 Система управления процессом следования по траектории 30				
				Закключение32				
				Список использованных источников33				
Инов. № подл.	Инов. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
				ИзмЛист№ докум.Подп.Дата				
				Разраб.Антонов, Артемов				
Инов. № подл.	Инов. № дубл.	Взам. инв. №	Подп. и дата	Пров.Котельников Ю.П.				
				Н. контр.				
				Утв.				
				Разработка системы управления для манипулятора Kuka Youbot				
				Пояснительная записка				
				Лит.ЛистЛистов				
				248				
				Университет ИТМО				
				Кафедра СУиИ				
				гр. Р4135				

Приложение А Матрицы однородного преобразования	34
Приложение Б Терминология относительных измерений	36
Приложение В Дополнительные пояснения к порядку расчета матрицы инерции	38
Приложение Г Получение и использование математической модели плоского двухзвенного манипулятора	39

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										3
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Копировал

Формат А4

Обозначения и сокращения

Используемые далее по тексту общие обозначения:

СК — система координат;

КП — кинематическая пара;

ДХ — Денавита-Хартенберга (Denavit–Hartenberg), например, соглашение;

ИСО — инерциальная система отсчета;

ПЗК — прямая задача кинематики;

ОЗК — обратная задача кинематики;

n — количество звеньев робота, $n = 5$;

q_i — i -ая ($i = \overline{1, n}$) обобщенная координата манипулятора (угол, регистрируемый энкодером робота в i -ом сочленении);

q — вектор-столбец обобщенных координат робота, $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$;

${}^i R_j$ — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i$;

${}^i A_j$ — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_j y_j z_j$ относительно СК $Ox_i y_i z_i^*$;

$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_j y_j z_j$ в начало $Ox_k y_k z_k$, выраженный относительно $Ox_i y_i z_i^{**}$;

g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;

v_j^i — линейная скорость начала $Ox_j y_j z_j$ относительно используемой в решении ИСО,^{***} выраженная относительно $Ox_i y_i z_i$;

a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_j y_j z_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_i y_i z_i$;

* За пояснениями обратитесь к Приложению А

** За пояснениями к применяемой здесь и далее терминологии, касающейся относительных измерений, обратитесь к Приложению Б.

*** В качестве ИСО в документе используется $Ox_0 y_0 z_0$.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	iR_j — матрица поворота, характеризующая поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i$;				
					iA_j — матрица однородного преобразования, описывающая смещение и поворот СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК $Ox_iy_iz_i^*$;				
					$r_{j,k}^i$ — вектор из начала $Ox_jy_jz_j$ в начало $Ox_ky_kz_k$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i^{**}$;				
					g_i — ускорение свободного падения, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;				
					v_j^i — линейная скорость начала $Ox_jy_jz_j$ относительно используемой в решении ИСО, ^{***} выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;				
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	a_j^i — линейное ускорение начала $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;				
					<div><div></div><div><div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div></div></div><div><div></div><div></div><div></div></div><div><div></div><div></div><div></div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></div><div></div></div> <div><div></div><div></</div></div>				

ω_j^i — угловая скорость вращения $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\omega_{j,k}^i$ — угловая скорость вращения $Ox_ky_kz_k$ относительно $Ox_jy_jz_j$, выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

$\dot{\omega}_j^i$ — угловое ускорение $Ox_jy_jz_j$ относительно ИСО, выраженное относительно $Ox_iy_iz_i$;

z_j^i — орт $[0 \ 0 \ 1]^T$ системы координат $Ox_jy_jz_j$, выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

f_j^i — сила, действующая на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженная относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_j^i — момент силы, действующий на j -ое звено (тело) механизма со стороны $(j - 1)$ -го звена (тела), выраженный относительно $Ox_iy_iz_i$;

τ_i — обобщенный момент, ответственный за изменение обобщенной координаты q_i ;

m_i — масса i -го звена;

\mathcal{I}_j^i — тензор инерции j -го звена относительно $Ox_iy_iz_i$;

a_i, d_i — обозначения для длин, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

α_i, θ_i — обозначения для углов, входящих в число параметров Денавита-Хартенберга, $i = \overline{1, n}$;

s_γ, c_γ — синус и косинус угла γ соответственно;

s_i, c_i — синус и косинус угла θ_i соответственно;

$x\{a\}$ — абсцисса вектора a ; аналогично $y\{a\}$ и $z\{a\}$ означают его ординату и аппликату соответственно;

$A^{\{i\}}$ — i -ая строка матрицы A .

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						5	

Введение

В данном документе будет рассказано о процессе разработки системы управления для манипулятора робота Kuka Youbot [1], дающей ему возможность для совершения двух действий: занятия позиции, при которой его схват будет принимать заданные положение и ориентацию, а также перемещения схвата по заданной траектории^{*}. В целом содержание пояснительной записки можно описать примерно так:

- в разделе 1 будут приведены технические сведения о роботе, необходимые для решения поставленных задач;
- раздел 2 расскажет о процессе составления математической модели манипулятора, а именно о решении применительно к нему прямой и обратной задач кинематики и о составлении дифференциальных уравнений, описывающих протекающие в роботе электрические и механические процессы;
- в разделе 4 речь пойдет о синтезе соответствующих систем управления, о проверке их работоспособности с помощью моделирования, о результатах апробации на реальном роботе и проч.

^{*} Здесь и далее, когда речь будет идти о траектории движения схвата, под последней будет подразумеваться не просто кривая, описываемая при этом схватом в пространстве, но таковая, явно параметризованная временем.

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									6
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					

1 Описание манипулятора

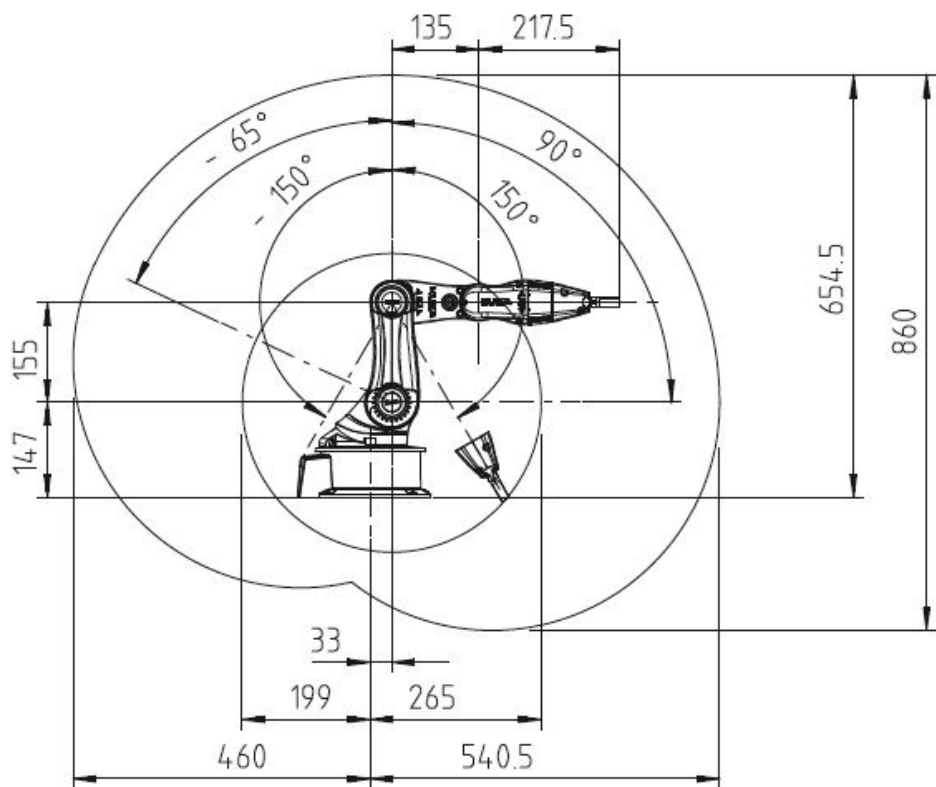
Рассматриваемый в данной работе манипулятор робота Kuka Youbot представляет собой пятизвенный манипулятор, снабженный двухпальцевым схватом. Описание его массогабаритных параметров дается таблицей 1.1 и рисунком 1.1. Неуказанные там параметры робота, требуемые для дальнейших расчетов, неизвестны и поэтому подлежат измерению или идентификации, речь о которых пойдет ниже по тексту.

Таблица 1.1 – Общая информация о манипуляторе робота Kuka Youbot.

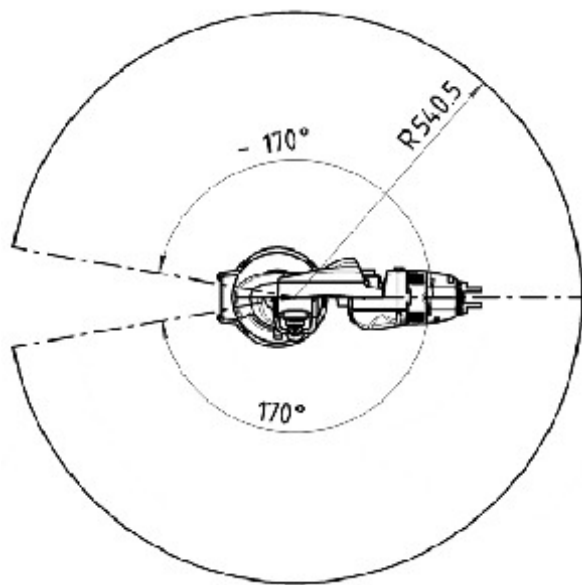
Параметр	Значение
Количество сочленений	5
Масса	5.3 кг
Допустимая нагрузка	0.5 кг
Точность повторного воспроизведения позиции	1 мм
Максимальная скорость в сочленении	90° с ⁻¹
Интерфейс	EtherCAT
Напряжение питание	24 В

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата						
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										7

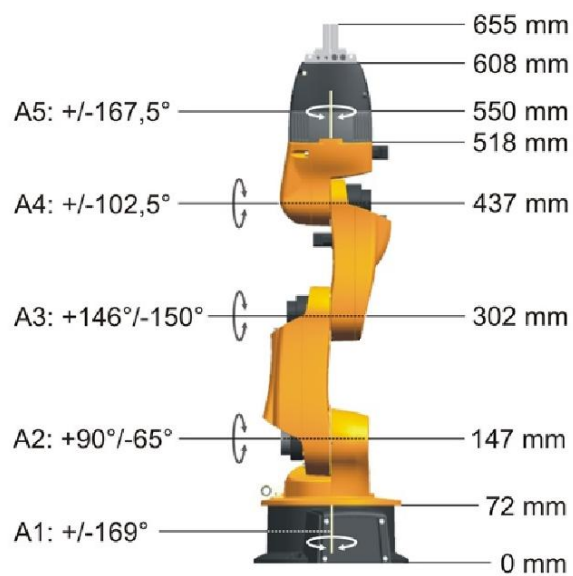
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата



а)



б)



в)

Рисунок 1.1 – Некоторые параметры манипулятора Kuka Youbot: а — размеры рабочей области (вид сбоку); б — размеры рабочей области (вид сверху); в — длины звеньев и предельные значения для углов вращения по каждому из сочленений [2].

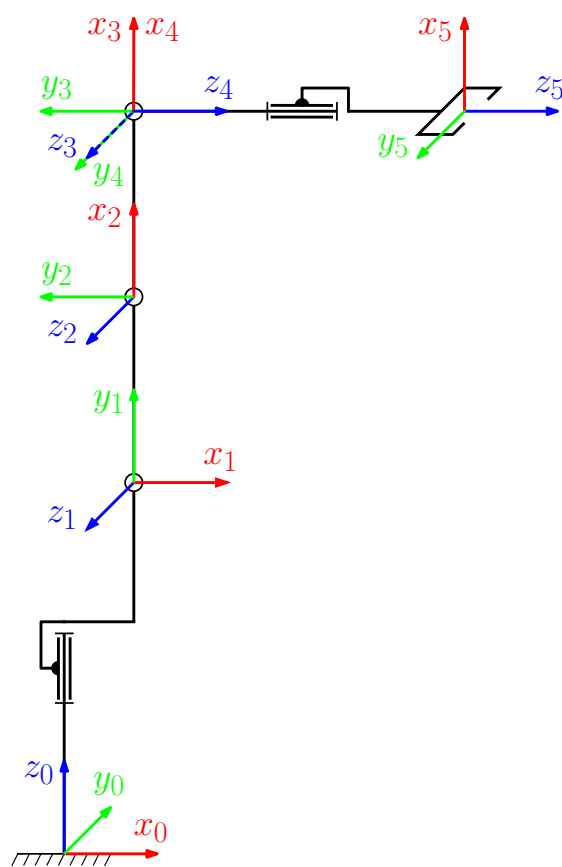
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

2.1.1 Общие замечания

The diagram illustrates a 5-DOF robot arm. It features a vertical base with a revolute joint q_1 at the bottom. A vertical link of length d_1 connects the base to a horizontal link. This horizontal link has a revolute joint q_2 and a prismatic joint d_2 (indicated by a double-headed arrow). The horizontal distance from the vertical axis to the next revolute joint q_3 is a_1 . The vertical distance between joints q_2 and q_3 is a_2 . A vertical link of length a_3 connects joint q_3 to joint q_4 . A horizontal link of length d_5 connects joint q_4 to joint q_5 , which is a revolute joint at the end of the arm. The joints are labeled q_1 through q_5 in blue, and the dimensions are labeled d_1 , a_1 , a_2 , a_3 , and d_5 in black.

a)



6)

Рисунок 2.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а – кинематическая при $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T = [0, \pi/2, 0, 0, 0]^T$; б – расположения СК КП.

Для описания положений звеньев манипулятора друг относительно друга воспользуемся методом Денавита–Хартенберга, состоящим из трех данных шагов:

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		Лист
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ	9

а) «привязка» к каждому звену СК, чьи оси удовлетворяют следующим условиям:

- 1) ось z_{i-1} направлена вдоль оси i -ой КП;
- 2) ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и пересекает ее;
- 3) ось y_i дополняет оси z_i и x_i до правой декартовой СК.

б) определение параметров ДХ:

- 1) a_i — расстояния от z_{i-1} до z_i вдоль x_i ;
- 2) α_i — угла от z_{i-1} до z_i вокруг x_i ;
- 3) d_i — расстояния от x_{i-1} до x_i вдоль z_{i-1} ;
- 4) θ_i — угла от x_{i-1} до x_i вокруг z_{i-1} .

в) расчет матриц однородного преобразования в соответствии со следующими формулами:

$${}^{i-1}A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i} \quad (2.1)$$

где R_{z,θ_i} — матрица поворота вокруг оси z на угол θ_i , T_{z,d_i} — матрица смещения вдоль оси z на расстояние d , T_{x,a_i} — матрица смещения вдоль оси x на расстояние a_i , R_{x,α_i} — матрица поворота вокруг оси x на угол α_i , равные

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{z,d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$T_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.3)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						
					КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										10
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

ИТОГО

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Результаты выполнения для исследуемого манипулятора двух первых шагов представлены на рисунке 2.1б и в таблице 2.1, а третьего — в лице следующих выражений:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1 c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

2.1.2 Прямая задача кинематики

Информация о смещении и повороте СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ содержится в матрице 0A_5 . Следовательно, для того чтобы решить ПЗК, остается лишь найти эту матрицу в соответствии с формулой:

$${}^0A_5 = \prod_{i=1}^5 {}^{i-1}A_i(q_i). \quad (2.6)$$

Для проверки рассмотрим конфигурацию манипулятора, изображенную на рисунке 2.2. В результате решения для нее ПЗК должны получиться следующие матрица поворота и вектор смещения :

$${}^0R_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,5}^0 = \begin{bmatrix} 0.033 \\ 0 \\ 0.655 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										11
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Таблица 2.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

Звено, i	a_i , мм	α_i , рад	d_i , мм	θ_i , рад
1	33	$\pi/2$	147	$\pi \cdot \frac{169^\circ}{180^\circ} - q_1$
2	155	0	0	$\pi \cdot \frac{65^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi}{2} - q_2$
3	135	0	0	$-\pi \cdot \frac{146^\circ}{180^\circ} - q_3$
4	0	$\pi/2$	0	$\pi \cdot \frac{102.5^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi}{2} - q_4$
5	0	0	218	$\pi \cdot \frac{167.5^\circ}{180^\circ} - q_5$

Выполняя соответствующие вычисления получаем:

$${}^0A_5 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.147 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.155 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.135 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.218 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0.033 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.655 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

что предложенный способ решения ПЗК в данном случае приводит к правильному ответу.

2.1.3 Обратная задача кинематики

Заданные смещение и поворот СК $Ox_5y_5z_5$ относительно СК $Ox_0y_0z_0$ можно описать с помощью матрицы 0A_5 . Используя ее и матрицы из (2.5), найти расчетные формулы для углов q_i ($i = \overline{1,5}$) можно из следующих соображений.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						Лист 12
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					

Копировал

Формат А4

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

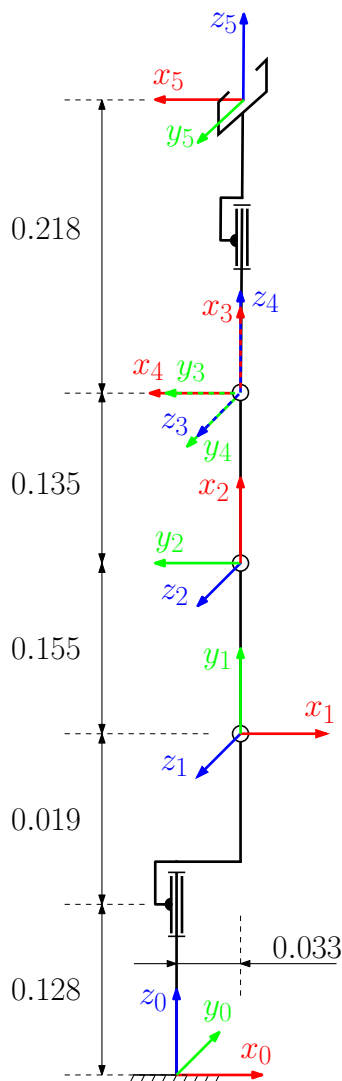


Рисунок 2.2 – Конфигурация манипулятора при $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T = [0, \pi/2, 0, \pi/2, 0]^T$.

Введем обозначения для элементов матрицы 0A_5 в соответствии с формулой:

$${}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Приравняв матрицу 0A_5 и правую часть выражения (2.6) и домножив с обеих сторон на ${}^0A_1^{-1}$, придем к выражению:

$${}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5, \quad (2.10)$$

где левая часть с учетом (2.5) равна

$${}^0A_1^{-1} \cdot {}^0A_5 = \begin{bmatrix} r_{11}c_1 + r_{21}s_1 & r_{12}c_1 + r_{22}s_1 & r_{13}c_1 + r_{23}s_1 & p_xc_1 + p_ys_1 - a_1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ r_{11}s_1 - r_{21}c_1 & r_{12}s_1 - r_{22}c_1 & r_{13}s_1 - r_{23}c_1 & p_xs_1 - p_yc_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

а правая —

$${}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 c_{234} & -s_5 c_{234} & s_{234} & a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_5 s_{234} \\ c_5 s_{234} & -s_5 s_{234} & -c_{234} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_5 c_{234} \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где в свою очередь

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3, \quad \theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4. \quad (2.13)$$

Теперь, сопоставляя элементы матриц с одинаковыми индексами из выражений (2.11) и (2.12), получим, что расчетные формулы для двух наборов значений углов θ_1 , θ_5 и θ_{234} дают

- равенство элементов $(3, 4)$:

$$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases} \quad (2.14)$$

- равенство элементов $(3, 1)$ и $(3, 2)$:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \text{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \text{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases} \quad (2.15) \end{aligned}$$

- равенство элементов $(2, 3)$ и $(1, 3)$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \text{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \text{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	– равенство элементов (3, 4):					
					$p_x s_1 - p_y c_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1^I = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_1^{II} = \operatorname{atan2}(-p_y, -p_x) \end{cases}$	(2.14)				
					– равенство элементов (3, 1) и (3, 2):					
					$\begin{cases} s_5 = r_{11}s_1 - r_{21}c_1 \\ c_5 = r_{12}s_1 - r_{22}c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_5^I = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^I - r_{21} \cos \theta_1^I, r_{12} \sin \theta_1^I - r_{22} \cos \theta_1^I) \\ \theta_5^{II} = \operatorname{atan2}(r_{11} \sin \theta_1^{II} - r_{21} \cos \theta_1^{II}, r_{12} \sin \theta_1^{II} - r_{22} \cos \theta_1^{II}) \end{cases}$	(2.15)				
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	– равенство элементов (2, 3) и (1, 3):					
					$\begin{cases} c_{234} = -r_{33} \\ s_{234} = r_{13}c_1 + r_{23}s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{234}^I = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^I + r_{23} \sin \theta_1^I, -r_{33}) \\ \theta_{234}^{II} = \operatorname{atan2}(r_{13} \cos \theta_1^{II} + r_{23} \sin \theta_1^{II}, -r_{33}) \end{cases}$	(2.16)				
Изм.					КСУИ.101.4135.001 ПЗ					
Лист					14					

Далее домножим выражение (2.11) на ${}^4A_5^{-1}$ справа — получим матрицу 1A_4 :

$${}^1A_4 = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_x s_1 - p_y c_1 - d_5 (r_{13} s_1 - r_{23} c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

в которой символами \cdots обозначены элементы, не представляющие интереса в дальнейших расчетах. Заметим, что с учетом (2.14) и равенства элементов (3, 3) в (2.11) и (2.12) справедливо

$$p_x s_1 - p_y c_1 - d_5 (r_{13} s_1 - r_{23} c_1) = 0. \quad (2.18)$$

С учетом этого и (2.17), имеем что

$$r_{1,4}^1 = \begin{bmatrix} (p_y - d_5 r_{23})s_1 + (p_x - d_5 r_{13})c_1 - a_1 \\ p_z - d_1 - d_5 r_{33} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Далее заметим, что одно и то же положение 4-го звена может достигаться при двух разных способах расположения звеньев 2 и 3 (см. рисунок 2.3). Следовательно, углы θ_2 , θ_3 и θ_4 при одних и тех же значениях углов θ_1 и θ_5 имеют по два возможных значения. Ниже выводятся формулы для последних.

Выпишем, пользуясь теоремой косинусов, выражение для $\cos \theta_3$ (его зависимость от θ_1 обуславливается зависимостью от этого угла вектора $r_{1,4}^1$):

$$c_3(\theta_1) = \frac{(r_{1,4}^1)^T \cdot r_{1,4}^1 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} \quad (2.20)$$

С учетом этого для θ_3 можно получить следующие формулы

$$\theta_3^{I,II} = \mp \operatorname{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^I)}, c_3(\theta_1^I)) \quad (2.21)$$

$$\theta_3^{III,IV} = \mp \operatorname{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{II})}, c_3(\theta_1^{II})) \quad (2.22)$$

Как видно из рисунка 2.3, $\theta_2 = \varphi + \beta$ при $\theta_3^{I,III} < 0$ и $\theta_2 = \varphi - \beta$ при $\theta_3^{II,IV} > 0$. Следовательно, принимая во внимание то, что

$$\varphi(\theta_1) = \operatorname{atan2}(y_r, x_r), \quad \beta(\theta_3) = \operatorname{atan2}(a_3 \sin |\theta_3|, a_2 + a_3 \cos |\theta_3|), \quad (2.23)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	<p>Далее заметим, что одно и то же положение 4-го звена может достигаться при двух разных способах расположения звеньев 2 и 3 (см. рисунок 2.3). Следовательно, углы θ_2, θ_3 и θ_4 при одних и тех же значениях углов θ_1 и θ_5 имеют по два возможных значения. Ниже выводятся формулы для последних.</p> <p>Выпишем, пользуясь теоремой косинусов, выражение для $\cos \theta_3$ (его зависимость от θ_1 обуславливается зависимостью от этого угла вектора $r_{1,4}^1$):</p> $c_3(\theta_1) = \frac{(r_{1,4}^1)^T \cdot r_{1,4}^1 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \tag{2.20}$ <p>С учетом этого для θ_3 можно получить следующие формулы</p> $\theta_3^{I,II} = \mp \operatorname{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^I)}, c_3(\theta_1^I)) \tag{2.21}$ $\theta_3^{III,IV} = \mp \operatorname{atan2}(\sqrt{1 - c_3^2(\theta_1^{II})}, c_3(\theta_1^{II})) \tag{2.22}$ <p>Как видно из рисунка 2.3, $\theta_2 = \varphi + \beta$ при $\theta_3^{I,III} < 0$ и $\theta_2 = \varphi - \beta$ при $\theta_3^{II,IV} > 0$. Следовательно, принимая во внимание то, что</p> $\varphi(\theta_1) = \operatorname{atan2}(y_r, x_r), \quad \beta(\theta_3) = \operatorname{atan2}(a_3 \sin \theta_3 , a_2 + a_3 \cos \theta_3), \tag{2.23}$	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						15

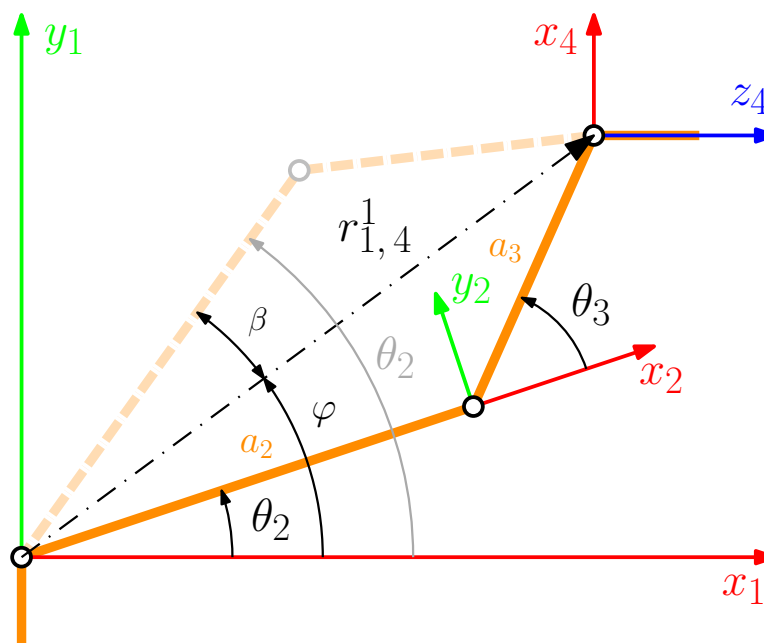


Рисунок 2.3 – Плоская часть манипулятора

где x_r и y_r — проекции вектора $r_{1,4}^1$ на оси абсцисс и ординат (их значения см. в (2.19)), для возможных значений угла θ_2 получаем следующие формулы:

$$\theta_2^I = \varphi(\theta_1^I) + \beta(\theta_3^I), \quad \theta_2^{II} = \varphi(\theta_1^I) - \beta(\theta_3^{II}), \quad (2.24)$$

$$\theta_2^{\text{III}} = \varphi(\theta_1^{\text{II}}) + \beta(\theta_3^{\text{III}}), \quad \theta_2^{\text{IV}} = \varphi(\theta_1^{\text{II}}) - \beta(\theta_3^{\text{IV}}). \quad (2.25)$$

Формулы для значений угла θ_4 после этого с учетом (2.13) приобретают простой вид:

$$\theta_4^{I,II} = \theta_{234}^I - \theta_2^{I,II} - \theta_3^{I,II}, \quad \theta_4^{III,IV} = \theta_{234}^{II} - \theta_2^{III,IV} - \theta_3^{III,IV}. \quad (2.26)$$

Таким образом, любые положение и ориентацию схвата относительно основания манипулятор может обеспечить 4-мя собственными конфигурациями, которым соответствуют следующие наборы значений для его обобщенных координат $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T$ (с учетом таблицы 2.1):

$$\theta^{\text{I}} = [\theta_1^{\text{I}} \quad \theta_2^{\text{I}} \quad \theta_3^{\text{I}} \quad \theta_4^{\text{I}} \quad \theta_5^{\text{I}}]^T, \quad \theta^{\text{II}} = [\theta_1^{\text{II}} \quad \theta_2^{\text{II}} \quad \theta_3^{\text{II}} \quad \theta_4^{\text{II}} \quad \theta_5^{\text{II}}]^T, \quad (2.27)$$

$$\theta^{\text{III}} = [\theta_1^{\text{II}} \quad \theta_2^{\text{III}} \quad \theta_3^{\text{III}} \quad \theta_4^{\text{III}} \quad \theta_5^{\text{II}}]^T, \quad \theta^{\text{IV}} = [\theta_1^{\text{II}} \quad \theta_2^{\text{IV}} \quad \theta_3^{\text{IV}} \quad \theta_4^{\text{IV}} \quad \theta_5^{\text{II}}]^T, \quad (2.28)$$

$$q^{I,II,III,IV} = \pi \cdot \left[\frac{169^\circ}{180^\circ} \frac{65^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} - \frac{146^\circ}{180^\circ} \frac{102.5^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2} \frac{167.5^\circ}{180^\circ} \right]^T - \theta^{I,II,III,IV}. \quad (2.29)$$

2.2 Динамика манипулятора

2.2.1 Общие замечания

Введем в рассмотрение барицентрические СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}^*$, где $i = \overline{1,5}$, показанные на рисунке 2.4. Заметим, что каждая СК $Ox_{ci}y_{ci}z_{ci}$ сонаправлена с $Ox_iy_iz_i$.

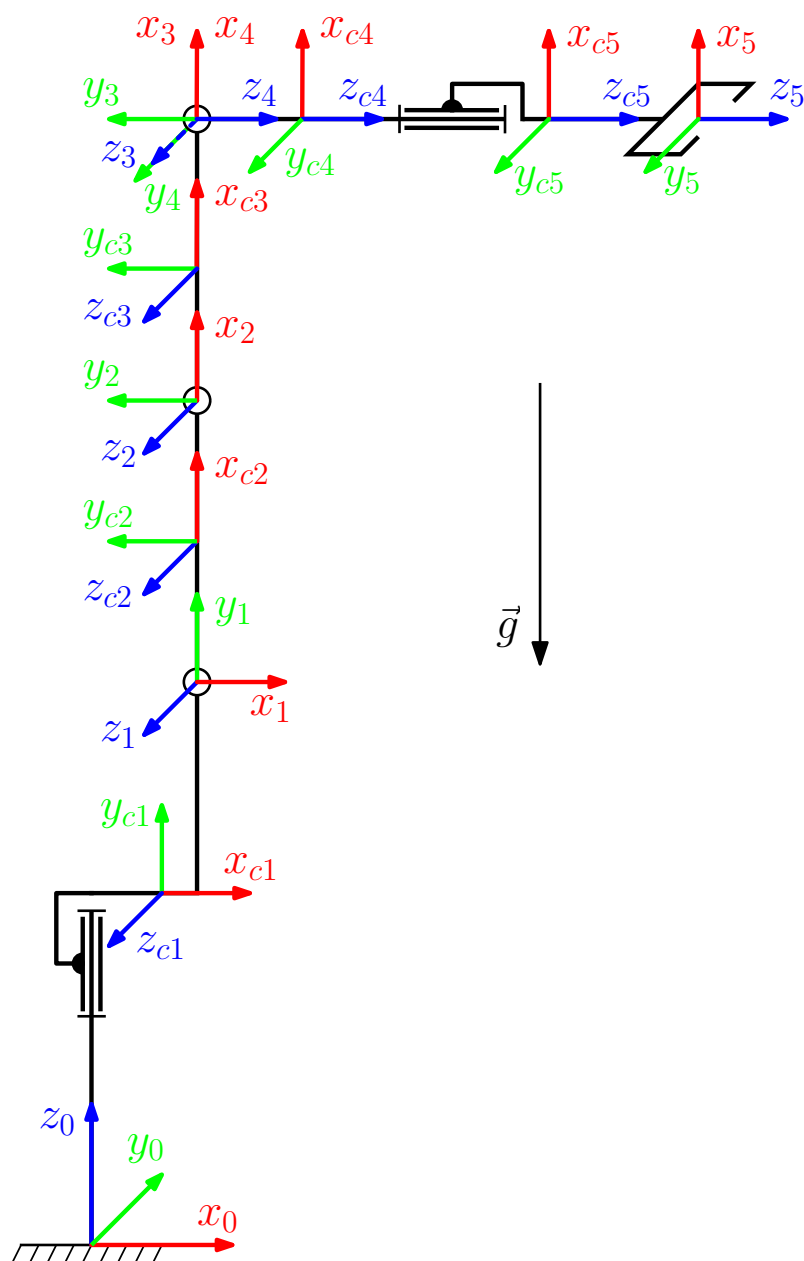


Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора \vec{g} .

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Инв. № подл.	Подп. и дата					Инв. № дубл.					Взам. инв. №					Подп. и дата						
Изм.	Лист	№ докум.		Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ															Лист	
																					17	

The diagram illustrates three coordinate systems and a gravity vector. At the bottom, a fixed coordinate system (x_0, y_0, z_0) is shown with x_0 in red, y_0 in green, and z_0 in blue. A vertical rod is attached to the origin of this system. A second coordinate system (x_{c1}, y_{c1}, z_{c1}) is centered on the rod, with x_{c1} in red, y_{c1} in green, and z_{c1} in blue. A third coordinate system (x_1, y_1, z_1) is centered on a mass at the top of the rod, with x_1 in red, y_1 in green, and z_1 in blue. A gravity vector \vec{g} is shown pointing downwards from the top mass.

Рисунок 2.4 – Положение барицентрических СК и направление вектора \vec{g} .

* Системы координат, чьи начала совпадают с центрами масс соответствующих звеньев.

Для описания положения введенных СК воспользуемся следующими векторами:

$$r_{i,ci}^i = \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \\ z_{ci} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,5}, \quad (2.30)$$

где x_{ci} , y_{ci} и z_{ci} — некоторые постоянные величины.

Для компонент тензоров инерции $\mathcal{I}_i^i = const$ введем следующие обозначения:

$$\mathcal{I}_i^i = \begin{bmatrix} I_{i,xx} & I_{i,xy} & I_{i,xz} \\ I_{i,xy} & I_{i,yy} & I_{i,yz} \\ I_{i,xz} & I_{i,yz} & I_{i,zz} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Заметим, что

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

где $g = 9.82 \text{ м/с}^2$.

В заключении раздела приведем формулы для расчета величин, которые потребуются в дальнейшем (везде $i = \overline{1,5}$):

— для расчета $r_{0,i}^0$ и 0R_i (см. Приложение А):

$${}^0A_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1}A_i; \quad (2.33)$$

— для расчета $r_{0,i}^i$:

$$r_{0,i}^i = {}^0R_i^T \cdot r_{0,i}^0; \quad (2.34)$$

— для расчета z_i^0 :

$$z_i^0 = {}^0R_i \cdot z_i^i = {}^0R_i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (2.35)$$

— для расчета g_i , v_i^i и ω_i^i :

$$g_i = {}^0R_i^T \cdot g_0, \quad v_i^i = {}^0R_i^T \cdot v_i^0, \quad \omega_i^i = {}^0R_i^T \cdot \omega_i^0. \quad (2.36)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата		Инв. № дубл.		Взам. инв. №		Подп. и дата		Инв. № подл.		КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист	
Изм		Лист		№ докум.		Подп.		Дата						18		Формат А4

Функция Лагранжа

$$\begin{aligned}
 L &= K - U = \\
 &= \sum_{i=1}^5 \left(m_i \left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right) + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot (v_i^i \times \omega_i^i + g_i) + \frac{1}{2} (\omega_i^i)^T \mathcal{I}_i^i \omega_i^i \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^5 \left(m_i \underbrace{\left(\frac{1}{2} (v_i^i)^T v_i^i + g_i^T r_{0,i}^i \right)}_{L_{i,1}} + m_i x_{ci} \cdot \underbrace{x \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,2}} + \right. \\
 &\quad + m_i y_{ci} \cdot \underbrace{y \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,3}} + m_i z_{ci} \cdot \underbrace{z \{v_i^i \times \omega_i^i + g_i\}}_{L_{i,4}} + I_{i,xx} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (x \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,5}} + \\
 &\quad + I_{i,yy} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (y \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,6}} + I_{i,zz} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (z \{\omega_i^i\})^2}_{L_{i,7}} + I_{i,xy} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot y \{\omega_i^i\}}_{L_{i,8}} + \\
 &\quad \left. + I_{i,xz} \cdot \underbrace{x \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,9}} + I_{i,yz} \cdot \underbrace{y \{\omega_i^i\} \cdot z \{\omega_i^i\}}_{L_{i,10}} \right). \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

Уравнения движения робота:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \overline{1, 5} \quad \Rightarrow \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1 \{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2 \{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_5 \{L_{i,10}\}) = \tau_5 \end{cases} \quad (2.50)$$

где \mathcal{L}_j — оператор, работающий в соответствии с формулой:

$$\mathcal{L}_j : \quad \mathcal{L}_j \{f\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}, \quad (2.51)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
				20

где в свою очередь $f = f(\dot{q}(t), q(t))$. Если же заметить, что

$$\mathcal{L}_j\{L_{i,k}\} = 0 \quad \text{при } j > i, \quad i, j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 10}, \quad (2.52)$$

то выражения для них упрощаются до:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_1\{L_{i,10}\}) = \tau_1 \\ \sum_{i=2}^5 (m_i \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,1}\} + m_i x_{ci} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,2}\} + \dots + I_{i,yz} \cdot \mathcal{L}_2\{L_{i,10}\}) = \tau_2 \\ \dots \\ m_5 \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,1}\} + m_5 x_{c5} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,2}\} + \dots + I_{5,yz} \cdot \mathcal{L}_5\{L_{5,10}\} = \tau_5 \end{cases} \quad (2.53)$$

или в матричном виде

$$\tau = \xi \chi, \quad (2.54)$$

где $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_5]^T$ — вектор обобщенных моментов,

$\chi = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_5]^T \in \mathbb{R}^{50}$ — вектор параметров робота, где в свою очередь

$$\chi_i = \begin{bmatrix} m_i & m_i x_{ci} & m_i y_{ci} & m_i y_{ci} & I_{i,xx} & I_{i,yy} & I_{i,zz} & I_{i,xy} & I_{i,xz} & I_{i,yz} \end{bmatrix}^T; \quad (2.55)$$

ξ — так называемый регрессор, равный

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \dots & \xi_{1,5} \\ O_{1 \times 10} & \xi_{2,2} & \dots & \xi_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & O_{1 \times 10} & \xi_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

где в свою очередь $O_{1 \times 10}$ — вектор-строка, состоящая из 10 нулей, а $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ — вектор-строка, рассчитываемый по формуле

$$\xi_{j,i} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_j\{L_{i,1}\} & \mathcal{L}_j\{L_{i,2}\} & \dots & \mathcal{L}_j\{L_{i,10}\} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

2.2.3 Учет динамики приводов

Уравнения, описывающие динамику приводов, в матричном виде имеют вид

$$I_a \ddot{q} = \tau_e - \tau, \quad (2.58)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										21
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						Копировал
										Формат А4

Выражение для матрицы $D(q)$ может быть найдено из формулы для кинетической энергии с учетом того, что справедливо

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q}, \\ D(q) = D^T(q), \end{cases} \quad (2.71)$$

для матрицы $C(q, \dot{q})$ — из выражения для $D(q)$ в соответствии с формулами:

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial D_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} \right), \quad (2.72)$$

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i, \quad (2.73)$$

где D_{ij} , C_{ij} — элементы матриц $D(q)$ и $C(q, \dot{q})$ соответственно, стоящие на пересечении i -ой строки и j -го столбца; а для вектора $G(q)$ — по формуле

$$G(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial q_1} & \frac{\partial U}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial U}{\partial q_5} \end{bmatrix}^T. \quad (2.74)$$

Выражение для кинетической энергии в форме, иллюстрируемой первым из уравнений (2.71), может быть получено из уравнения (2.47) с учетом формул (2.36), (2.38) и (2.43):

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i \cdot (-{}^0R_i^T J_{vi} \dot{q})^T \cdot (-{}^0R_i^T J_{vi} \dot{q}) + \frac{1}{2} (-{}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q})^T \cdot \mathcal{I}_i^i \cdot (-{}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q}) + \right. \\
&\quad \left. + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot \left((-{}^0R_i^T J_{vi} \dot{q}) \times (-{}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q}) \right) \right) = \\
&= \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i \dot{q}^T J_{vi}^T J_{vi} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i {}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q} + (m_i \underbrace{{}^0R_i r_{i,ci}^i}_{r_{i,ci}^0})^T \cdot \left((J_{vi} \dot{q}) \times (J_{\omega i} \dot{q}) \right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^5 \left(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i {}^0R_i^T J_{\omega i} + 2 \cdot x \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_x + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \cdot y \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_y + 2 \cdot z \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_z \right) \right) \dot{q}, \tag{2.75}
\end{aligned}$$

Изм.

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

Выражение для кинетической энергии в форме, иллюстрируемой первым из уравнений (2.71), может быть получено из уравнения (2.47) с учетом формул (2.36), (2.38) и (2.43):

$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i \cdot (-{}^0R_i^T J_{vi} \dot{q})^T \cdot (-{}^0R_i^T J_{vi} \dot{q}) + \frac{1}{2} (-{}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q})^T \cdot \mathcal{I}_i^i \cdot (-{}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q}) + \right. \\
 &\quad \left. + (m_i r_{i,ci}^i)^T \cdot \left((-{}^0R_i^T J_{vi} \dot{q}) \times (-{}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q}) \right) \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} m_i \dot{q}^T J_{vi}^T J_{vi} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i^i {}^0R_i^T J_{\omega i} \dot{q} + (m_i \underbrace{{}^0R_i r_{i,ci}^i}_{r_{i,ci}^0})^T \cdot \left((J_{vi} \dot{q}) \times (J_{\omega i} \dot{q}) \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=1}^5 \left(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i^i {}^0R_i^T J_{\omega i} + 2 \cdot x \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_x + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2 \cdot y \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_y + 2 \cdot z \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_z \right) \right) \dot{q}, \tag{2.75}
 \end{aligned}$$

Изм.

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

24

при преобразованиях которого учтено то, что

$$\begin{aligned}
 (J_{vi}\dot{q}) \times (J_{\omega i}\dot{q}) &= \begin{bmatrix} J_{vi}^{\{1\}} \dot{q} \\ J_{vi}^{\{2\}} \dot{q} \\ J_{vi}^{\{3\}} \dot{q} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} \\ J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} \\ J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_{vi}^{\{3\}} \dot{q} J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} + J_{vi}^{\{2\}} \dot{q} J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \\ J_{vi}^{\{3\}} \dot{q} J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} - J_{vi}^{\{1\}} \dot{q} J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \\ -J_{vi}^{\{2\}} \dot{q} J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} + J_{vi}^{\{1\}} \dot{q} J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{q}^T (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} + \dot{q}^T (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \\ \dot{q}^T (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} - \dot{q}^T (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}} \dot{q} \\ -\dot{q}^T (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} \dot{q} + \dot{q}^T (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T J_{xi} \dot{q} \\ \dot{q}^T J_{yi} \dot{q} \\ \dot{q}^T J_{zi} \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

где

$$J_{xi} = -(J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}} + (J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \quad (2.77)$$

$$J_{yi} = (J_{vi}^{\{3\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} - (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{3\}}, \quad (2.78)$$

$$J_{zi} = -(J_{vi}^{\{2\}})^T J_{\omega i}^{\{1\}} + (J_{vi}^{\{1\}})^T J_{\omega i}^{\{2\}}. \quad (2.79)$$

Стоит отметить тот факт, что выражение из (2.75), обозначим которое через $\mathcal{D}(q)$, равное

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(q) &= \sum_{i=1}^5 \left(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i {}^0R_i^T J_{\omega i} + 2 \cdot x \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_x + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot y \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_y + 2 \cdot z \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_z \right), \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

в общем случае не равно матрице $D(q)$. При этом получить последнюю из матрицы $\mathcal{D}(q)$ можно с помощью следующей формулы:

$$D_{ij} = \begin{cases} 0.5(\mathcal{D}_{ij} + \mathcal{D}_{ji}), & i \neq j; \\ \mathcal{D}_{ij}, & i = j; \end{cases} \quad (2.81)$$

где \mathcal{D}_{ij} — элемент матрицы $\mathcal{D}(q)$, стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца.*

* Для дополнительных пояснений попробуйте обратиться к Приложению В.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
<div>$\mathcal{D}(q) = \sum_{i=1}^5 \left(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T {}^0 R_i \mathcal{I}_i^i {}^0 R_i^T J_{\omega i} + 2 \cdot x \{ m_i r_{i,ci}^0 \} \cdot J_x + \right. \\ \left. + 2 \cdot y \{ m_i r_{i,ci}^0 \} \cdot J_y + 2 \cdot z \{ m_i r_{i,ci}^0 \} \cdot J_z \right), \tag{2.80}$</div>				
<div>в общем случае не равно матрице $D(q)$. При этом получить последнюю из матрицы $\mathcal{D}(q)$ можно с помощью следующей формулы:</div> <div>$D_{ij} = \begin{cases} 0.5(\mathcal{D}_{ij} + \mathcal{D}_{ji}), & i \neq j; \\ \mathcal{D}_{ij}, & i = j; \end{cases} \tag{2.81}$</div> <div>где \mathcal{D}_{ij} — элемент матрицы $\mathcal{D}(q)$, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца.*</div>				
<div><hr/><div>* Для дополнительных пояснений попробуйте обратиться к Приложению В.</div></div>				
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

25

3 Идентификация параметров манипулятора

3.1 Описание метода

Для определения неизвестных значений параметров робота, составляющих вектор $\bar{\chi}$, воспользуемся методом наименьших квадратов. Алгоритм необходимых действий в таком случае будет следующим:

- а) с помощью поставляемого производителем робота ПО* дать манипулятору команды на последовательное достижение N произвольных конфигураций, по возможности охватывающих всю его рабочую область; во время его работы снять и записать следующие показания:

$q(t_1)$	$\dot{q}(t_1)$	$\ddot{q}(t_1)$	$\tau_e(t_1)$
$q(t_2)$	$\dot{q}(t_2)$	$\ddot{q}(t_2)$	$\tau_e(t_2)$
$q(t_3)$	$\dot{q}(t_3)$	$\ddot{q}(t_3)$	$\tau_e(t_3)$
\dots	\dots	\dots	\dots
$q(t_k)$	$\dot{q}(t_k)$	$\ddot{q}(t_k)$	$\tau_e(t_k)$

где $t_k > t_3 > t_2 > t_1$;

- б) используя полученные данные, составить матрицы

$$\Xi = \begin{bmatrix} \bar{\xi}(\ddot{q}(t_1), \dot{q}(t_1), q(t_1)) \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_2), \dot{q}(t_2), q(t_2)) \\ \dots \\ \bar{\xi}(\ddot{q}(t_k), \dot{q}(t_k), q(t_k)) \end{bmatrix}, \quad T_e = \begin{bmatrix} \tau_e(t_1) \\ \tau_e(t_2) \\ \dots \\ \tau_e(t_k) \end{bmatrix}; \quad (3.1)$$

- в) рассчитать оценку $\hat{\chi}$ вектора $\bar{\chi}$ по формуле:

$$\hat{\chi} = (\Xi^T \cdot \Xi)^{-1} \cdot \Xi^T \cdot T_e; \quad (3.2)$$

* У Youbot такое «стандартное» ПО осуществляет управление углами в сочленениях робота с помощью ПИД-регуляторов.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					26

- г) дать роботу команды на достижение других N позиций и при этом получить те же самые данные;
- д) используя найденную в п. в) оценку $\hat{\chi}$ и снятые в п. г) данные, рассчитать по формуле (2.68) значения для τ_e ; сравнить их с полученными в п. г) и сделать выводы об успешности идентификации.

3.2 Результаты

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										27
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

4 Синтез систем управления

4.1 Предварительные замечания

Каждый из приводов манипулятора робота Kuka Youbot имеет собственную систему управления, структура которой иллюстрируется схемой с рисунка 4.1. Из нее видно, что каждый из приводов робота может управляться заданием значения для угла q_{di} , или скорости \dot{q}_{di} , или момента силы $\tau_{ed,i}$, который должен быть на нем обеспечен. Это значение подается на вход соответствующего ПИД-регулятора, коэффициенты которого доступны настройке, и далее (уже в виде сигнала напряжения u) — на контролируемый двигатель.

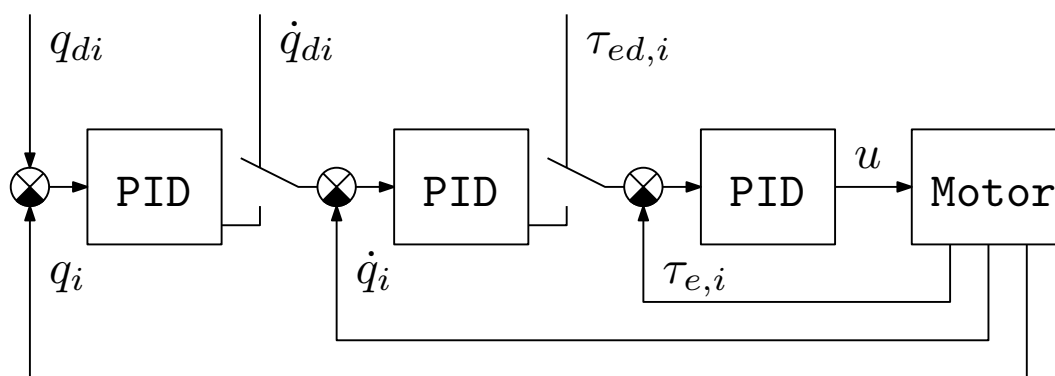


Рисунок 4.1 – Структура системы управления, контролирующей работу каждого из приводов робота.

Далее в тексте документа будут рассмотрены системы управления, в которых в качестве управляющего сигнала рассматривается вектор $\tau_e(t)$. При этом будет предполагаться, что задаваемые значения для моментов сил достигаются на двигателях мгновенно. Такое предположение будем считать возможным по той причине, что процессы в контуре момента в рассмотренной выше системе управления характеризуются малыми временами переходных процессов. В качестве иллюстрации к сказанному можно привести рисунок 4.2. На нем показан график переходной функции системы управления моментом силы, развиваемым приводом ???-го звена.

Из величин, описывающих состояние робота в данный момент времени, в используемом ПО доступны вектора $q(t)$, $\dot{q}(t)$ и $\tau_e(t)$.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										28
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

pid_transition_function.pdf

Рисунок 4.2 – График переходной функции системы управления приводом ???-го звена.

4.2 Система управления для принятия определенной конфигурации

Для системы управления процессом принятия роботом желаемой конфигурации, описываемой вектором $q_d = [q_{d1} \ q_{d2} \ q_{d3} \ q_{d4} \ q_{d5}]^T = const$, выберем следующий закон управления:

$$\tau_e = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \quad (4.1)$$

где $K_p = \text{diag}\{k_{pi}\} = const$ и $K_d = \text{diag}\{k_{di}\} = const$, при этом $k_{pi} > 0$ и $k_{di} > 0$ для $\forall i = \overline{1, 5}$. С учетом его и уравнения (2.70) модель замкнутой системы примет вид:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q}. \quad (4.2)$$

Это выражение с использованием обозначений

$$e = q - q_d, \quad x = \begin{bmatrix} e \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

можно переписать следующим образом

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.4)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				Лист
									29
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					

где

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(e)(K_p e + K_d \dot{q} + C(e, \dot{q})\dot{q}) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Заметим, что равновесным состоянием системы (4.4) является точка $x_0 = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, так как $f(x_0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$.

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(e) \dot{q} + \frac{1}{2} e^T K_p e. \quad (4.6)$$

Ее производная по времени*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) &= \dot{q}^T M(e) \ddot{q} + \dot{q}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M(e) \right) \dot{q} + \dot{e}^T K_p e = \\ &= \dot{q}^T \left(\tau_e - C(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q) - t_f(\dot{q}) \right) + \dot{q}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M(q) \right) \dot{q} + \dot{q}^T K_p e = \\ &= \dot{q}^T \left(\tau_e - G(q) - t_f(\dot{q}) + K_p e \right) + \dot{q}^T \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M(q) \right) - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} = \\ &= \dot{q}^T \left(K_p (q_d - q) - K_d \dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}) - G(q) - t_f(\dot{q}) + K_p (q - q_d) \right) = \\ &= -\dot{q}^T K_d \dot{q} < 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

при $x \neq x_0$ и равна нулю при $x = x_0$. Следовательно, по 2-ой теореме Ляпунова состояние системы $x = x_0$, при котором, к слову сказать, $q = q_d$ и $\dot{q} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, является асимптотически устойчивым.

4.3 Система управления процессом следования по траектории

Для системы управления процессом следования роботом по траектории, описываемой вектор-функцией $q_d(t) = [q_{d1}(t) \ q_{d2}(t) \ q_{d3}(t) \ q_{d4}(t) \ q_{d5}(t)]^T$, возьмем следующий закон управления:

$$\tau_e = M(q)(\ddot{q}_d + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)) + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + t_f(\dot{q}), \quad (4.8)$$

где $K_d = const$ и $K_p = const$.

* В представленных ниже выкладках учтен тот факт, что матрица $(0.5M(q))' - C(q, \dot{q})$ является кососимметричной.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист	
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						30	

С учетом его и уравнения (2.70) модель замкнутой системы опишется следующим выражением:

$$M(q)(\ddot{q}_d - \ddot{q} + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q)) = 0, \quad (4.9)$$

которое после деления на $M(q)$ и применения обозначения

$$\varepsilon = q_d - q \quad (4.10)$$

может быть переписано в виде:

$$\ddot{\varepsilon} + K_d\dot{\varepsilon} + K_p\varepsilon = 0. \quad (4.11)$$

Согласно последнему уравнению, использование закона управления (4.8) дает возможность полностью определять поведение робота значениями матриц K_p и K_d .

В данной работе матрицы K_p и K_d были выбраны диагональными:

$$K_p = \text{diag}\{k_{pi}\}, \quad K_d = \text{diag}\{k_{di}\}, \quad (4.12)$$

потому что это позволяет «разбить» уравнение (4.11) на 5 независимых дифференциальных уравнений, а их компоненты — положительными:

$$k_{pi} > 0, \quad k_{di} > 0, \quad \forall i = \overline{1, 5}, \quad (4.13)$$

так как при этом система получается устойчивой (все 5 уравнений получаются имеющими корни только с отрицательной вещественной частью).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	<div style="text-align: center; font-size: 1.2em; font-weight: bold;">КСУИ.101.4135.001 ПЗ</div>					Лист				
										31				
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата										

Заключение

Текст заключения

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										32
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Список использованных источников

- 1 KUKA YOUNBOT. — URL: <http://www.technomatix.ru/kuka-youbot> (дата обращения: 08.03.2017).
- 2 YouBot Detailed Specifications. — URL: http://www.youbot-store.com/wiki/index.php/YouBot_Detailed_Specifications (дата обращения: 04.04.2017).

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						33

Приложение А
(рекомендуемое)

Матрицы однородного преобразования

Матрицей однородного преобразования iA_j называется матрица размера 4×4 , служащая для описания смещения и поворота СК $Ox_jy_jz_j$ относительно СК Ox_iy_izi и имеющая следующую структуру:

$${}^iA_j = \begin{bmatrix} {}^iR_j & r_{i,j}^i \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (A.1)$$

где $O_{1 \times 3} = [0 \ 0 \ 0]$.

Принципы ее использования поясняет следующий пример.

Рассмотрим рисунок А.1. Чтобы найти координаты точки C относительно $Ox_0y_0z_0$ при известных векторах r_C^2 , $r_{0,1}^0$ и $r_{1,2}^1$ и поворотах всех СК друг относительно друга, могут быть использованы следующие выражения:

$$\begin{cases} r_C^0 = {}^0R_1 r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ r_C^1 = {}^1R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \end{cases} \Rightarrow r_C^0 = {}^0R_1 {}^1R_2 r_C^2 + {}^0R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \quad (A.2)$$

где r_C^0 , r_C^1 , r_C^2 — радиус-векторы точки C в $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$ соответственно. В это же время можно воспользоваться и матрицами 0A_1 и 1A_2 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} {}^1R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {}^0R_1 {}^1R_2 r_C^2 + {}^0R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (A.3) \end{aligned}$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\begin{cases} \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1 r_C^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_C^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow$					
					$\Rightarrow \begin{bmatrix} r_C^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^1R_2 & r_{1,2}^1 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1A_2}}_{{}^0A_2} \begin{bmatrix} r_C^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0R_1 & r_{0,1}^0 \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^0A_1} \begin{bmatrix} {}^1R_2 r_C^2 + r_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} =$					
					$= \begin{bmatrix} {}^0R_1 {}^1R_2 r_C^2 + {}^0R_1 r_{1,2}^1 + r_{0,1}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (A.3)$					
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										34

Дополнительная информация о матрицах однородного преобразования доступна, например, в [1].

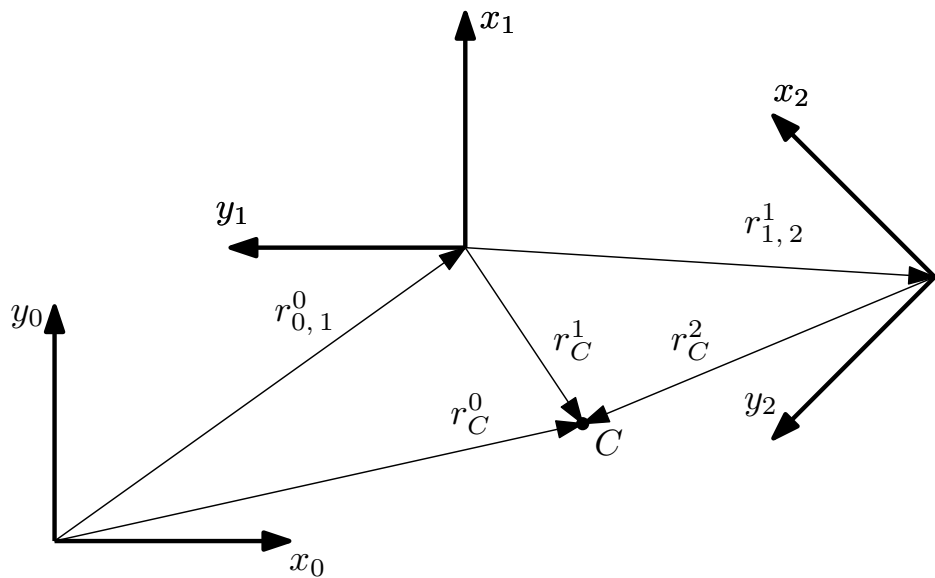


Рисунок А.1 – Системы координат из пояснительного примера.

Инв. № подл.	Подп. и дата				Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
</							

Приложение Б
(рекомендуемое)

Терминология относительных измерений

Относительно координат некоторых векторов, являющихся в большинстве своем некоторыми кинематическими величинами, в тексте документа можно встретить указания на то, что они получены (или отсчитаны) «...относительно такой-то системы координат...» и при этом «...выражены относительно такой-то системы координат...». Это приложение разъясняет смысл данных фраз нижеследующим простым примером.

Рассмотрим рисунок Б.1. На нем изображены стоящий неподвижно куст, тележка, катящаяся со скоростью $v = 1$ м/с, облако, движущееся со скоростью $u = 3$ м/с, и жестко связанные с ними правосторонние системы координат $Ox_0y_0z_0$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$. Опишем скорость движения облака вектором \vec{V} . В зависимости от своего физического смысла он будет иметь разные координаты. Наглядно это демонстрирует таблица Б.1.

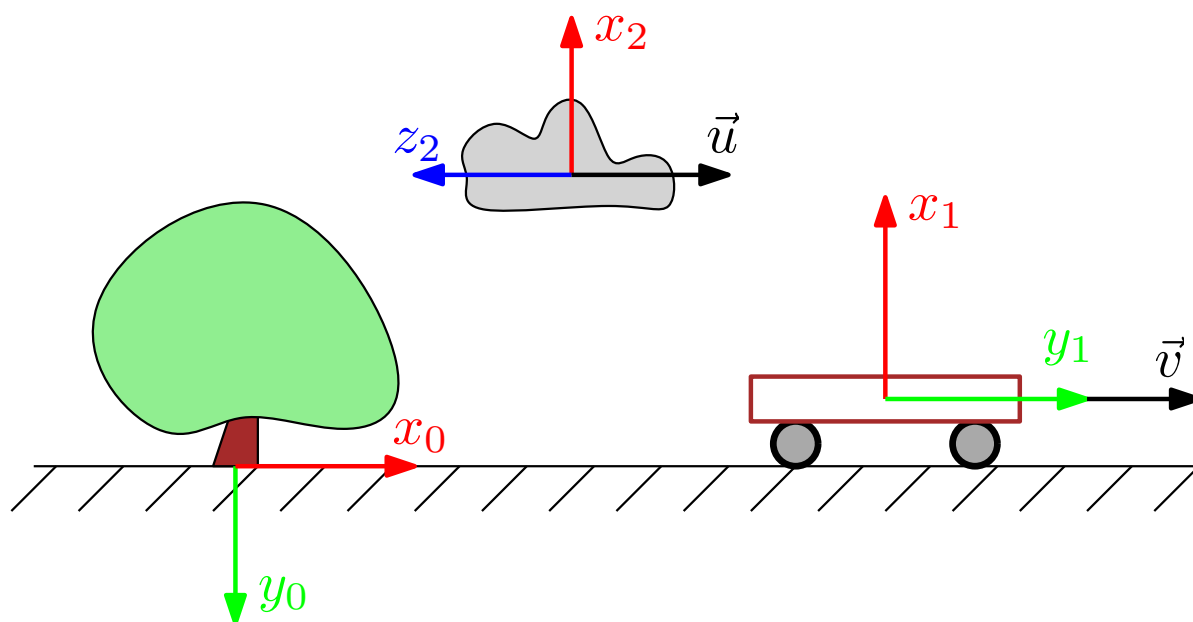


Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.

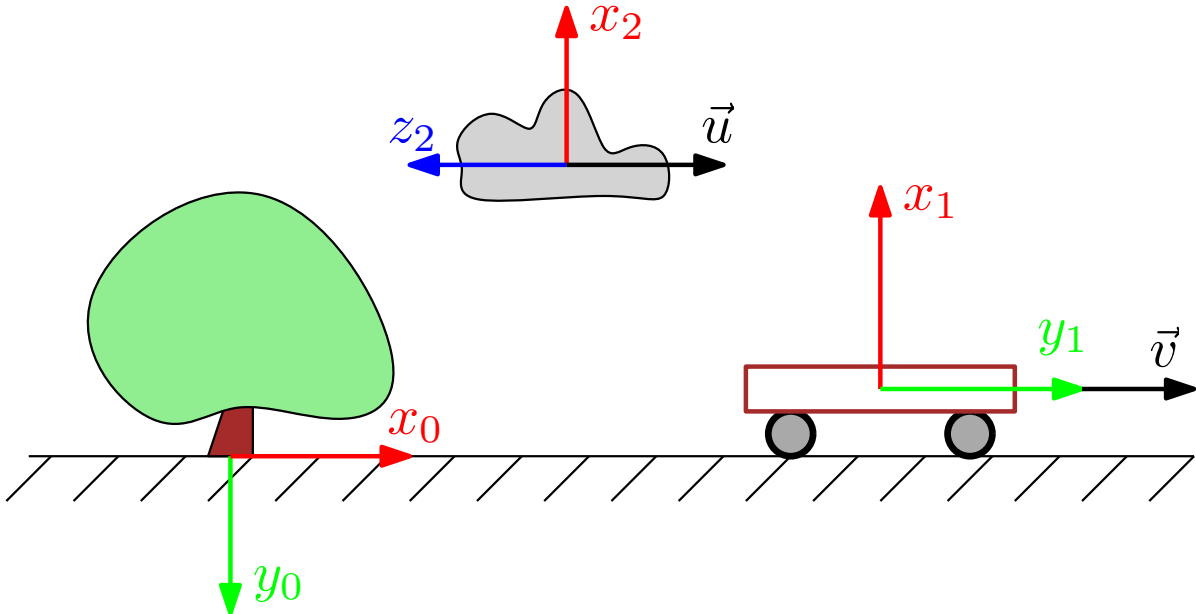
Инв. № подл.	Подп. и дата	№ докум.	Подп.	Дата	<div>КСУИ.101.4135.001 ПЗ</div>	Лист	36
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	<div>КСУИ.101.4135.001 ПЗ</div>	Лист	36
Инв. № дубл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	<div>Рисунок Б.1 – Воображаемая ситуация из пояснительного примера.</div>  <p>The diagram illustrates a mobile coordinate system. A green tree is on the left. A red cart with two wheels is on the right, moving to the right as indicated by a black arrow labeled \vec{v}. A red coordinate system (x_0, y_0) is fixed to the ground, with x_0 pointing right and y_0 pointing down. A green coordinate system (y_1) is fixed to the cart, with y_1 pointing right. A grey cloud is above the cart, with a blue coordinate system (z_2) and a red coordinate system (x_2) centered on it. The z_2 axis points left, and the x_2 axis points up. A black arrow labeled \vec{u} points right from the center of the cloud.</p>		

Таблица Б.1 – Координаты вектора V в зависимости от его физического смысла.

Смысл вектора V	Значение V^T
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_0y_0z_0$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_0y_0z_0$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_1y_1z_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
Скорость $Ox_2y_2z_2$ относительно $Ox_1y_1z_1$, выраженная относительно $Ox_2y_2z_2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата

Приложение В
(рекомендуемое)

Дополнительные пояснения к порядку расчета матрицы инерции

Рассмотрим следующие два математических выражения:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = b_{11}a_1^2 + b_{22}a_2^2 + b_{33}a_3^2 + \\ + (b_{12} + b_{21})a_1a_2 + (b_{13} + b_{31})a_1a_3 + (b_{23} + b_{32})a_2a_3, \quad (\text{В.1})$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = c_{11}a_1^2 + c_{22}a_2^2 + c_{33}a_3^2 + \\ + 2c_{12}a_1a_2 + 2c_{13}a_1a_3 + 2c_{23}a_2a_3. \quad (\text{В.2})$$

Легко видеть, что при выполнении равенств

$$c_{11} = b_{11}, \quad c_{22} = b_{22}, \quad c_{33} = b_{33}, \quad (\text{В.3})$$

$$c_{12} = 0.5(b_{12} + b_{21}), \quad c_{13} = 0.5(b_{13} + b_{31}), \quad c_{23} = 0.5(b_{23} + b_{32}) \quad (\text{В.4})$$

выражения (В.1) и (В.2) тоже будут равны.

Подобная ситуация наблюдается и в отношении матриц $\mathcal{D}(q)$ и $D(q)$.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$+ 2c_{12}a_1a_2 + 2c_{13}a_1a_3 + 2c_{23}a_2a_3. \quad (B.2)$				
					Легко видеть, что при выполнении равенств				
					$c_{11} = b_{11}, \quad c_{22} = b_{22}, \quad c_{33} = b_{33}, \quad (B.3)$				
					$c_{12} = 0.5(b_{12} + b_{21}), \quad c_{13} = 0.5(b_{13} + b_{31}), \quad c_{23} = 0.5(b_{23} + b_{32}) \quad (B.4)$				
выражения (B.1) и (B.2) тоже будут равны.									
Подобная ситуация наблюдается и в отношении матриц $\mathcal{D}(q)$ и $D(q)$.									

Получение и использование математической модели плоского двухзвенного манипулятора

Рисунок Г.1 – Схемы рассматриваемого манипулятора: а — кинематическая;
б — демонстрирующая расположение барицентрических СК и СК КП.

Значения некоторых из динамических параметров звеньев:

$$r_{1,c1}^1 = \begin{bmatrix} -0.5a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I}_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 a_1^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 a_1^2}{3} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.1)$$

$$r_{2,c2}^2 = \begin{bmatrix} -0.5a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{I}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 a_2^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 a_2^2}{3} \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.2)$$

Параметры Денавита-Хартенберга, характеризующие взаимное расположение показанных на рисунке Г.1 СК, приведены в таблице Г.1, где δ_1 и δ_2 — некоторые константы. Вектор ускорения свободного падения, выраженный в неподвижной СК равен

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{Г.3})$$

Таблица Г.1 – Параметры Денавита-Хартенберга

Звено, i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	$\delta_1 - q_1$
2	a_2	$\pi/2$	0	$\delta_2 - q_2$

Матрицы однородных преобразований и проч.*:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0R_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{0,1}^0 = \begin{bmatrix} a_1c_1 \\ a_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Г.4})$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & a_2c_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 & a_2s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_{0,1}^0 = \begin{bmatrix} a_2c_2 \\ a_2s_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{Г.5})$$

$${}^0A_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & s_{12} & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & 0 & -c_{12} & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0R_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & s_{12} \\ s_{12} & 0 & -c_{12} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{Г.6})$$

Иллюстрирующий правильность их расчета пример показан на рисунке Г.2.

* В пределах данного приложения принято следующее дополнительное обозначение:

$$\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2.$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата						Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					40

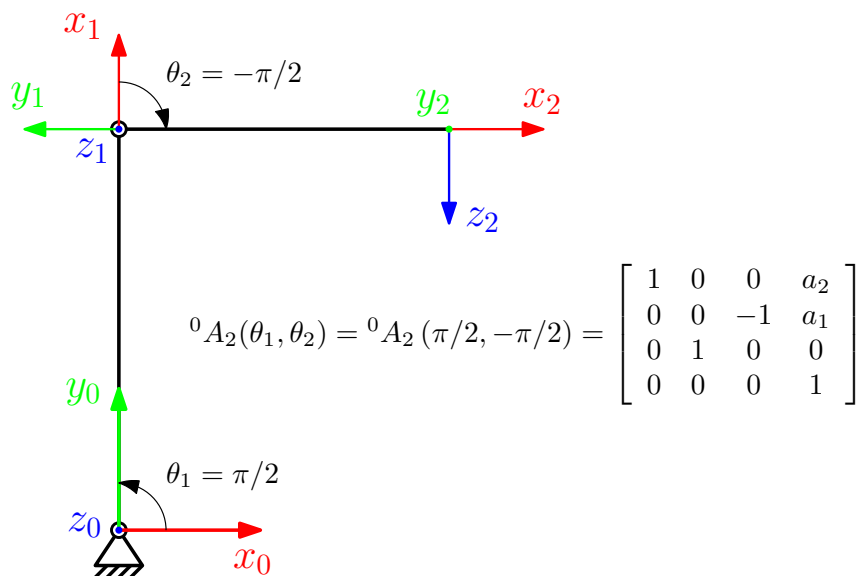


Рисунок Г.2 – Пример, проверяющий решение ПЗК для рассматриваемого манипулятора.

Некоторые подготовительные вычисления:

$$r_{0,1}^1 = {}^0R_1^T \cdot r_{0,1}^0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = {}^0R_1^T \cdot g_0 = \begin{bmatrix} -gs_1 \\ -gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_1^0 = {}^0R_1 \cdot z_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.7)$$

$$r_{0,2}^2 = {}^0R_2^T \cdot r_{0,2}^0 = \begin{bmatrix} a_2 + a_1c_2 \\ 0 \\ a_1s_2 \end{bmatrix}, \quad g_2 = {}^0R_2^T \cdot g_0 = \begin{bmatrix} -gs_{12} \\ 0 \\ gc_{12} \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.8)$$

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,1}^0 - r_{0,0}^0) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 & 0 \\ a_1c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.9)$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,0}^0) & z_1^0 \times (r_{0,2}^0 - r_{0,1}^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2s_{12} - a_1s_1 & -a_2s_{12} \\ a_2c_{12} + a_1c_1 & a_2c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.10)$$

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} z_0^0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} z_0^0 & z_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.11)$$

Инов. № подл.	Подп. и дата	Инов. № дубл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инов. № дубл.	Подп. и дата	Инов. № подл.
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ		
					Лист		
					41		

$$v_1^0 = -J_{v1}\dot{q} = \begin{bmatrix} a_1 s_1 \dot{q}_1 \\ -a_1 c_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.12)$$

$$v_1^1 = {}^0R_1^T \cdot v_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.13)$$

$$\omega_1^0 = -J_{\omega 1}\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.14)$$

$$\omega_1^1 = {}^0R_1^T \cdot \omega_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (\Gamma.15)$$

$$v_2^0 = -J_{v2}\dot{q} = \begin{bmatrix} a_2 s_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1 s_1 \dot{q}_1 \\ -a_2 c_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - a_1 c_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.16)$$

$$v_2^2 = {}^0R_2^T \cdot v_2^0 = \begin{bmatrix} -a_1 s_2 \dot{q}_1 \\ 0 \\ a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1 c_2 \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.17)$$

$$\omega_2^0 = -J_{\omega 2}\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.18)$$

$$\omega_2^2 = {}^0R_2^T \cdot \omega_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.19)$$

$$v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1 = \begin{bmatrix} a_1 \dot{q}_1^2 - g s_1 \\ -g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.20)$$

$$v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2 = \begin{bmatrix} a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)c_2 - g s_{12} \\ 0 \\ a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)s_2 + g c_{12} \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.21)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата				Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
	Взам. инв. №										42
	Инв. № дубл.										

$v_2^2 = {}^0R_2^T \cdot v_2^0 = \begin{bmatrix} -a_1 s_2 \dot{q}_1 \\ 0 \\ a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1 c_2 \dot{q}_1 \end{bmatrix},$	(Г.17)
$\omega_2^0 = -J_{\omega 2} \dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix},$	(Г.18)
$\omega_2^2 = {}^0R_2^T \cdot \omega_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix},$	(Г.19)
$v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1 = \begin{bmatrix} a_1 \dot{q}_1^2 - g s_1 \\ -g c_1 \\ 0 \end{bmatrix},$	(Г.20)
$v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2 = \begin{bmatrix} a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) c_2 - g s_{12} \\ 0 \\ a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) s_2 + g c_{12} \end{bmatrix}.$	(Г.21)

Расчет составляющих функции Лагранжа:

$$L_{1,1} = \frac{1}{2}(v_1^1)^T v_1^1 + g_1^T r_{0,1}^1 = \frac{1}{2}a_1^2 \dot{q}_1^2 - a_1 g s_1, \quad (\Gamma.22)$$

$$L_{1,2} = x\{v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1\} = a_1 \dot{q}_1^2 - g s_1, \quad (\Gamma.23)$$

$$L_{1,3} = y\{v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1\} = -g c_1, \quad (\Gamma.24)$$

$$L_{1,4} = z\{v_1^1 \times \omega_1^1 + g_1\} = 0, \quad (\Gamma.25)$$

$$L_{1,5} = \frac{1}{2} (x\{\omega_1^1\})^2 = 0, \quad (\Gamma.26)$$

$$L_{1,6} = \frac{1}{2} (y\{\omega_1^1\})^2 = 0, \quad (\Gamma.27)$$

$$L_{1,7} = \frac{1}{2} (z\{\omega_1^1\})^2 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2, \quad (\Gamma.28)$$

$$L_{1,8} = x\{\omega_1^1\} \cdot y\{\omega_1^1\} = 0, \quad (\Gamma.29)$$

$$L_{1,9} = x\{\omega_1^1\} \cdot z\{\omega_1^1\} = 0, \quad (\Gamma.30)$$

$$L_{1,10} = x\{\omega_1^1\} \cdot z\{\omega_1^1\} = 0, \quad (\Gamma.31)$$

$$L_{2,1} = \frac{1}{2}(v_2^2)^T v_2^2 + g_2^T r_{0,2}^2 = \frac{1}{2}(a_1 \dot{q}_1 s_2)^2 + \frac{1}{2}(a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + a_1 \dot{q}_1 c_2)^2 - \quad (\Gamma.32)$$

$$- g s_{12}(a_2 + a_1 c_2) + a_1 g s_2 c_{12}, \quad (\Gamma.33)$$

$$L_{2,2} = x\{v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2\} = a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)c_2 - g s_{12}, \quad (\Gamma.34)$$

$$L_{2,3} = y\{v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2\} = 0, \quad (\Gamma.35)$$

$$L_{2,4} = z\{v_2^2 \times \omega_2^2 + g_2\} = a_1 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)s_2 + g c_{12}, \quad (\Gamma.36)$$

$$L_{2,5} = \frac{1}{2} (x\{\omega_2^2\})^2 = 0, \quad (\Gamma.37)$$

$$L_{2,6} = \frac{1}{2} (y\{\omega_2^2\})^2 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \quad (\Gamma.38)$$

$$L_{2,7} = \frac{1}{2} (z\{\omega_2^2\})^2 = 0, \quad (\Gamma.39)$$

$$L_{2,8} = x\{\omega_2^2\} \cdot y\{\omega_2^2\} = 0, \quad (\Gamma.40)$$

$$L_{2,9} = x\{\omega_2^2\} \cdot z\{\omega_2^2\} = 0, \quad (\Gamma.41)$$

$$L_{2,10} = x\{\omega_2^2\} \cdot z\{\omega_2^2\} = 0. \quad (\Gamma.42)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										43
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

Расчет компонент регрессора:

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,1}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{1,1}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{1,1}}{\partial q_1} = a_1^2 \ddot{q}_1 - a_1 g c_1, \quad (\Gamma.43)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,2}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{1,2}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{1,2}}{\partial q_1} = 2a_1 \ddot{q}_1 - g c_1, \quad (\Gamma.44)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,3}\} = g s_1, \quad (\Gamma.45)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,4}\} = 0, \quad (\Gamma.46)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,5}\} = 0, \quad (\Gamma.47)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,6}\} = 0, \quad (\Gamma.48)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,7}\} = \ddot{q}_1, \quad (\Gamma.49)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,8}\} = 0, \quad (\Gamma.50)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,9}\} = 0, \quad (\Gamma.51)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{1,10}\} = 0, \quad (\Gamma.52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1\{L_{2,1}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{2,1}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{2,1}}{\partial q_1} = (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2) \ddot{q}_1 + (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) \ddot{q}_2 + \\ + 2a_1 a_2 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_1 + a_1 a_2 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_2 - a_2 g c_{12} - a_1 g c_1, \end{aligned} \quad (\Gamma.53)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1\{L_{2,2}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{2,2}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{2,2}}{\partial q_1} = 2(a_2 + a_1 c_2) \ddot{q}_1 + (2a_2 + a_1 c_2) \ddot{q}_2 + \\ + 2a_1 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_1 + a_1 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_2 - g c_{12}, \end{aligned} \quad (\Gamma.54)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,3}\} = 0, \quad (\Gamma.55)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,4}\} = 2a_1 s_2 \ddot{q}_1 + a_1 s_2 \ddot{q}_2 - 2a_1 \dot{q}_2 c_2 \dot{q}_1 - a_1 c_2 \dot{q}_2^2 - g s_{12}, \quad (\Gamma.56)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,5}\} = 0, \quad (\Gamma.57)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,6}\} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2, \quad (\Gamma.58)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,7}\} = 0, \quad (\Gamma.59)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,8}\} = 0, \quad (\Gamma.60)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,9}\} = 0, \quad (\Gamma.61)$$

$$\mathcal{L}_1\{L_{2,10}\} = 0, \quad (\Gamma.62)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\mathcal{L}_1\{L_{2,1}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} - \frac{\partial L_{2,2}}{\partial q_1} = 2(a_2 + a_1 c_2) \ddot{q}_1 + (2a_2 + a_1 c_2) \ddot{q}_2 +$
					$+ 2a_1 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_1 + a_1 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_2 - g c_{12},$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\mathcal{L}_1\{L_{2,2}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{2,2}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_{2,2}}{\partial q_1} = 2(a_2 + a_1 c_2) \ddot{q}_1 + (2a_2 + a_1 c_2) \ddot{q}_2 +$
					$+ 2a_1 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_1 + a_1 \dot{q}_2 s_2 \dot{q}_2 - g c_{12},$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\mathcal{L}_1\{L_{2,3}\} = 0,$
					$\mathcal{L}_1\{L_{2,4}\} = 2a_1 s_2 \ddot{q}_1 + a_1 s_2 \ddot{q}_2 - 2a_1 \dot{q}_2 c_2 \dot{q}_1 - a_1 c_2 \dot{q}_2^2 - g s_{12},$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\mathcal{L}_1\{L_{2,5}\} = 0,$
					$\mathcal{L}_1\{L_{2,6}\} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2,$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\mathcal{L}_1\{L_{2,7}\} = 0,$
					$\mathcal{L}_1\{L_{2,8}\} = 0,$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\mathcal{L}_1\{L_{2,9}\} = 0,$
					$\mathcal{L}_1\{L_{2,10}\} = 0,$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$КСУИ.101.4135.001 ПЗ$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,1}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{2,1}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L_{2,1}}{\partial q_2} = (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) \ddot{q}_1 + a_2^2 \ddot{q}_2 - a_1 a_2 \dot{q}_1 s_2 \dot{q}_1 - a_2 g c_{12}, \quad (\Gamma.63)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,2}\} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{2,2}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L_{2,2}}{\partial q_2} = (2a_2 + a_1 c_2) \ddot{q}_1 + 2a_2 \ddot{q}_2 - a_1 \dot{q}_1 s_2 \dot{q}_1 - g c_{12}, \quad (\Gamma.64)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,3}\} = 0, \quad (\Gamma.65)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,4}\} = a_1 s_2 \ddot{q}_1 + a_1 \dot{q}_1 c_2 \dot{q}_1 - g s_{12}, \quad (\Gamma.66)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,5}\} = 0, \quad (\Gamma.67)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,6}\} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2, \quad (\Gamma.68)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,7}\} = 0, \quad (\Gamma.69)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,8}\} = 0, \quad (\Gamma.70)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,9}\} = 0, \quad (\Gamma.71)$$

$$\mathcal{L}_2\{L_{2,10}\} = 0. \quad (\Gamma.72)$$

Уравнения движения робота с учетом (Г.43)–(Г.72):

$$\begin{cases} m_1 \mathcal{L}_1\{L_{1,1}\} + m_1 x_{c1} \mathcal{L}_1\{L_{1,2}\} + m_1 y_{c1} \mathcal{L}_1\{L_{1,3}\} + I_{1,zz} \mathcal{L}_1\{L_{1,7}\} + \\ + m_2 \mathcal{L}_1\{L_{2,1}\} + m_2 x_{c2} \mathcal{L}_1\{L_{2,2}\} + m_2 z_{c2} \mathcal{L}_1\{L_{2,4}\} + I_{2,yy} \mathcal{L}_1\{L_{2,6}\} = \tau_1 \\ m_2 \mathcal{L}_2\{L_{2,1}\} + m_2 x_{c2} \mathcal{L}_2\{L_{2,2}\} + m_2 z_{c2} \mathcal{L}_2\{L_{2,4}\} + I_{2,yy} \mathcal{L}_2\{L_{2,6}\} = \tau_2 \end{cases} \quad (\Gamma.73)$$

$$\begin{cases} \bar{d}_{11} \ddot{q}_1 + \bar{d}_{12} \ddot{q}_2 + \bar{c}_{11} \dot{q}_1 + \bar{c}_{12} \dot{q}_2 + \bar{g}_{11} = \tau_1 \\ \bar{d}_{21} \ddot{q}_1 + \bar{d}_{22} \ddot{q}_2 + \bar{c}_{21} \dot{q}_1 + \bar{c}_{22} \dot{q}_2 + \bar{g}_{21} = \tau_2 \end{cases} \quad (\Gamma.74)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{d}_{11} = m_1 a_1^2 + 2m_1 x_{c1} a_1 + I_{1,zz} + m_2 (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2) + \\ + 2m_2 x_{c2} (a_2 + a_1 c_2) + 2m_2 z_{c2} a_1 s_2 + I_{2,yy}, \end{aligned} \quad (\Gamma.75)$$

$$\bar{d}_{12} = m_2 (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) + m_2 x_{c2} (2a_2 + a_1 c_2) + m_2 z_{c2} a_1 s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.76)$$

$$\bar{d}_{21} = m_2 (a_2^2 + a_1 a_2 c_2) + m_2 x_{c2} (2a_2 + a_1 c_2) + m_2 z_{c2} a_1 s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.77)$$

$$\bar{d}_{22} = m_2 a_2^2 + 2m_2 x_{c2} a_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.78)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\begin{cases} m_1\mathcal{L}_1\{L_{1,1}\} + m_1x_{c1}\mathcal{L}_1\{L_{1,2}\} + m_1y_{c1}\mathcal{L}_1\{L_{1,3}\} + I_{1,zz}\mathcal{L}_1\{L_{1,7}\} + \\ + m_2\mathcal{L}_1\{L_{2,1}\} + m_2x_{c2}\mathcal{L}_1\{L_{2,2}\} + m_2z_{c2}\mathcal{L}_1\{L_{2,4}\} + I_{2,yy}\mathcal{L}_1\{L_{2,6}\} = \tau_1 \\ m_2\mathcal{L}_2\{L_{2,1}\} + m_2x_{c2}\mathcal{L}_2\{L_{2,2}\} + m_2z_{c2}\mathcal{L}_2\{L_{2,4}\} + I_{2,yy}\mathcal{L}_2\{L_{2,6}\} = \tau_2 \end{cases} \quad (\Gamma.73)$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\begin{cases} \bar{d}_{11}\ddot{q}_1 + \bar{d}_{12}\ddot{q}_2 + \bar{c}_{11}\dot{q}_1 + \bar{c}_{12}\dot{q}_2 + \bar{g}_{11} = \tau_1 \\ \bar{d}_{21}\ddot{q}_1 + \bar{d}_{22}\ddot{q}_2 + \bar{c}_{21}\dot{q}_1 + \bar{c}_{22}\dot{q}_2 + \bar{g}_{21} = \tau_2 \end{cases} \quad (\Gamma.74)$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	где
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\begin{aligned} \bar{d}_{11} &= m_1a_1^2 + 2m_1x_{c1}a_1 + I_{1,zz} + m_2(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2) + \\ &+ 2m_2x_{c2}(a_2 + a_1c_2) + 2m_2z_{c2}a_1s_2 + I_{2,yy}, \end{aligned} \quad (\Gamma.75)$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\bar{d}_{12} = m_2(a_2^2 + a_1a_2c_2) + m_2x_{c2}(2a_2 + a_1c_2) + m_2z_{c2}a_1s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.76)$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\bar{d}_{21} = m_2(a_2^2 + a_1a_2c_2) + m_2x_{c2}(2a_2 + a_1c_2) + m_2z_{c2}a_1s_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.77)$
Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	$\bar{d}_{22} = m_2a_2^2 + 2m_2x_{c2}a_2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.78)$

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ	Лист
						45

$$\bar{c}_{11} = 2m_2 a_1 a_2 \dot{q}_2 s_2 + 2m_2 x_{c2} a_1 \dot{q}_2 s_2 - 2m_2 z_{c2} a_1 \dot{q}_2 c_2, \quad (\Gamma.79)$$

$$\bar{c}_{12} = m_2 a_1 a_2 \dot{q}_2 s_2 + m_2 x_{c2} a_1 \dot{q}_2 s_2 - m_2 z_{c2} a_1 \dot{q}_2 c_2, \quad (\Gamma.80)$$

$$\bar{c}_{21} = -m_2 a_1 a_2 \dot{q}_1 s_2 - m_2 x_{c2} a_1 \dot{q}_1 s_2 + m_2 z_{c2} a_1 \dot{q}_1 c_2, \quad (\Gamma.81)$$

$$\bar{c}_{22} = 0, \quad (\Gamma.82)$$

$$\begin{aligned}\bar{g}_{11} = & -m_1 a_1 g c_1 - m_1 x_{c1} g c_1 + m_1 y_{c1} g s_1 - m_2 (a_2 g c_{12} + a_1 g c_1) - \\ & - m_2 x_{c2} g c_{12} - m_2 z_{c2} g s_{12},\end{aligned}\tag{G.83}$$

$$\bar{g}_{21} = -m_2 a_2 g c_{12} - m_2 x_{c2} g c_{12} - m_2 z_{c2} g s_{12}. \quad (\Gamma.84)$$

Матрицы $D(q)$, $C(q, \dot{q})$ и $G(q)$, с помощью которых они могут быть представлены в матричном виде равны

$$D(q) = \begin{bmatrix} \bar{d}_{11} & \bar{d}_{12} \\ \bar{d}_{21} & \bar{d}_{22} \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} \end{bmatrix}, \quad G(q) = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} \\ \bar{g}_{21} \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.85)$$

Пользуясь случаем можно убедиться в том, что формулы из раздела 2.2.4 дают с дополнительным замечанием, о котором будет сказано ниже, такой же результат:

$$J_{x1} = -\left(J_{v1}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega 1}^{\{2\}} + \left(J_{v1}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega 1}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.86)$$

$$J_{y1} = (J_{v1}^{\{3\}})^T J_{\omega 1}^{\{1\}} - (J_{v1}^{\{1\}})^T J_{\omega 1}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_1 s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.87)$$

$$J_{z1} = -\left(J_{v1}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega 1}^{\{1\}} + \left(J_{v1}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega 1}^{\{2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.88)$$

$$J_{x_2} = -\left(J_{v_2}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega_2}^{\{2\}} + \left(J_{v_2}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega_2}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_2 c_{12} + a_1 c_1 & a_2 c_{12} + a_1 c_1 \\ a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.89)$$

$$J_{y2} = \left(J_{v2}^{\{3\}}\right)^T J_{\omega2}^{\{1\}} - \left(J_{v2}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega2}^{\{3\}} = \begin{bmatrix} a_2 s_{12} + a_1 s_1 & a_2 s_{12} + a_1 s_1 \\ a_2 s_{12} & a_2 s_{12} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.90)$$

$$J_{z2} = -\left(J_{v2}^{\{2\}}\right)^T J_{\omega2}^{\{1\}} + \left(J_{v2}^{\{1\}}\right)^T J_{\omega2}^{\{2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.91)$$

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

Изм

Лист

№ докум.

Подп.

Дата

КСУИ.101.4135.001 ПЗ

Лист

46

$$r_{1,c1}^0 = {}^0R_1 r_{1,c1}^1 = \begin{bmatrix} x_{c1}c_1 - y_{c1}s_1 \\ x_{c1}s_1 + y_{c1}c_1 \\ z_{c1} \end{bmatrix}, \quad r_{2,c2}^0 = {}^0R_2 r_{2,c2}^2 = \begin{bmatrix} x_{c2}c_{12} + z_{c2}s_{12} \\ x_{c2}s_{12} + z_{c2}c_{12} \\ y_{c2} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.92)$$

$$\mathcal{D}(q) = \sum_{i=1}^2 \left(m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{\omega i}^T {}^0R_i \mathcal{I}_i {}^0R_i^T J_{\omega i} + 2 \cdot x \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_{xi} + \right. \quad (\Gamma.93)$$

$$\left. + 2 \cdot y \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_{yi} + 2 \cdot z \{m_i r_{i,ci}^0\} \cdot J_{zi} \right) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.94)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & 0.5(\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{21}) \\ 0.5(\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{21}) & \mathcal{D}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.95)$$

где

$$\mathcal{D}_{11} = \bar{d}_{11}, \quad (\Gamma.96)$$

$$\mathcal{D}_{12} = 2m_2 a_1 s_2 z_{c2} + (2m_2 a_2 + 2m_2 a_1 c_2) x_{c2} + m_2 a_1 a_2 c_2 + m_2 a_2^2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.97)$$

$$\mathcal{D}_{21} = 2m_2 a_2 x_{c2} + m_2 a_1 a_2 c_2 + m_2 a_2^2 + I_{2,yy}, \quad (\Gamma.98)$$

$$\mathcal{D}_{22} = \bar{d}_{22}, \quad (\Gamma.99)$$

$$D_{11} = \mathcal{D}_{11}, \quad (\Gamma.100)$$

$$D_{12} = \bar{d}_{12} \quad (\Gamma.101)$$

$$D_{21} = D_{12}, \quad (\Gamma.102)$$

$$D_{22} = \mathcal{D}_{22}, \quad (\Gamma.103)$$

$$C_{111} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} \right) = 0, \quad (\Gamma.104)$$

$$C_{112} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} \right) = m_2 a_1 (c_2 z_{c2} - s_2 x_{c2} - a_2 s_2), \quad (\Gamma.105)$$

$$C_{121} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} \right) = m_2 a_1 (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2), \quad (\Gamma.106)$$

$$C_{122} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} \right) = 0, \quad (\Gamma.107)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	КСУИ.101.4135.001 ПЗ					Лист
										47
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

$$C_{211} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} \right) = m_2 a_1 (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2), \quad (\Gamma.108)$$

$$C_{212} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} \right) = 0, \quad (\Gamma.109)$$

$$C_{221} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} \right) = m_2 a_1 (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2), \quad (\Gamma.110)$$

$$C_{222} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} \right) = 0, \quad (\Gamma.111)$$

$$C_{11} = C_{111}\dot{q}_1 + C_{211}\dot{q}_2 = m_2 a_1 \dot{q}_2 (x_{c2} s_2 - z_{c2} c_2 + a_2 s_2), \quad (\Gamma.112)$$

$$C_{12} = C_{121}\dot{q}_1 + C_{221}\dot{q}_2 = m_2 a_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) (x_{c2} s_2 - z_{c2} c_2 + a_2 s_2), \quad (\Gamma.113)$$

$$C_{21} = C_{112}\dot{q}_1 + C_{212}\dot{q}_2 = -m_2 a_1 \dot{q}_1 (x_{c2} s_2 - z_{c2} c_2 + a_2 s_2), \quad (\Gamma.114)$$

$$C_{22} = C_{122}\dot{q}_1 + C_{222}\dot{q}_2 = 0, \quad (\Gamma.115)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma.116)$$

$$U = - \sum_{i=1}^2 (m_i g_i^T r_{0,i}^i + g_i^T (m_i r_{i,ci}^i)) = -m_2 g c_{12} z_{c2} + m_1 g c_{1y} y_{c1} + \quad (\Gamma.117)$$

$$+ m_2 g s_{12} x_{c2} + m_1 g s_{1x} x_{c1} + m_2 g a_2 s_{12} + m_2 a_1 g s_1 + m_1 a_1 g s_1, \quad (\Gamma.118)$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{\partial U}{\partial q_1} = \bar{g}_{11}, \\ G_{21} &= \frac{\partial U}{\partial q_2} = \bar{g}_{21}, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad G(q) = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.119)$$

Нетрудно видеть, что выражение, полученное таким образом для $C(q, \dot{q})$ не совпадает с ее версией из (Г.85). Это не является ошибкой, а происходит из-за того, что данная матрица может иметь несколько вариантов представления. В такой ситуации, главное, чтобы последние давали один и тот же результат при подстановке в выражение $C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}$. Это и будет являться критерием их равнозначности. Для версий матрицы $C(q, \dot{q})$ из (Г.85) и (Г.116) оно имеет следующее значение:

$$C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} m_2 a_1 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2) \\ m_2 a_1 \dot{q}_1^2 (c_2 z_{c2} - s_2 x_{c2} - a_2 s_2) \end{bmatrix}. \quad (\Gamma.120)$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	$U = - \sum_{i=1}^2 \left(m_i g_i^T r_{0,i}^i + g_i^T (m_i r_{i,ci}^i) \right) = -m_2 g c_{12} z_{c2} + m_1 g c_{1y} y_{c1} + \tag{Г.117}$				
	Инв. № дубл.	$+ m_2 g s_{12} x_{c2} + m_1 g s_{1x} x_{c1} + m_2 g a_2 s_{12} + m_2 a_1 g s_1 + m_1 a_1 g s_1, \tag{Г.118}$				
	Взам. инв. №	$G_{11} = \frac{\partial U}{\partial q_1} = \bar{g}_{11}, \tag{Г.119}$				
	Подп. и дата	$G_{21} = \frac{\partial U}{\partial q_2} = \bar{g}_{21}, \quad \Rightarrow \quad G(q) = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix}.$				
<p>Нетрудно видеть, что выражение, полученное таким образом для $C(q, \dot{q})$ не совпадает с ее версией из (Г.85). Это не является ошибкой, а происходит из-за того, что данная матрица может иметь несколько вариантов представления. В такой ситуации, главное, чтобы последние давали один и тот же результат при подстановке в выражение $C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}$. Это и будет являться критерием их равнозначности. Для версий матрицы $C(q, \dot{q})$ из (Г.85) и (Г.116) оно имеет следующее значение:</p>						
Инв. № подл.	Подп. и дата	$C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} = \begin{bmatrix} m_2 a_1 (2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) (s_2 x_{c2} - c_2 z_{c2} + a_2 s_2) \\ m_2 a_1 \dot{q}_1^2 (c_2 z_{c2} - s_2 x_{c2} - a_2 s_2) \end{bmatrix}. \tag{Г.120}$				
	Инв. № дубл.	КСУИ.101.4135.001 ПЗ				
	Взам. инв. №					
	Подп. и дата					
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист 48	