Marceli Grad s188724
Informatyka Grupa: 2

07.05.2023

# Metody Numeryczne – Projekt 2

## Układy równań liniowych

### Wstęp

Rozwiązywanie układów równań liniowych jest jednym z podstawowych zagadnień algebry liniowej, a jednym z najczęściej stosowanych sposobów na rozwiązanie takiego układu jest wykorzystanie metod numerycznych. W tym sprawozdaniu omówimy trzy główne metody rozwiązywania układów równań liniowych: dwie iteracyjne metody – Jacobiego i Gaussa-Seidla oraz bezpośrednią metodę faktoryzacji LU.

Metody iteracyjne opierają się na iteracyjnym ulepszaniu przybliżeń rozwiązania, aż do uzyskania dostatecznie dokładnego wyniku. W przypadku metody Jacobiego, korzysta się z wzoru iteracyjnego, który polega na wyznaczeniu nowego przybliżenia dla każdej niewiadomej w oparciu o poprzednie przybliżenia pozostałych niewiadomych. Jest to jedna z podstawowych metod iteracyjnych, prosta w implementacji, ale może być wolna w działaniu i wymagać dużo iteracji, aby uzyskać dokładne rozwiązanie.

Z kolei metoda Gaussa-Seidla korzysta z bardziej zaawansowanego wzoru iteracyjnego, który wykorzystuje już wyznaczone nowe przybliżenia dla niektórych zmiennych, zamiast używać tylko i wyłącznie poprzednich przybliżeń. Dzięki temu metoda jest zbieżna dla szerszej klasy macierzy i zazwyczaj wymaga mniejszej ilości iteracji.

Bezpośrednia metoda faktoryzacji LU polega na rozłożeniu macierzy współczynników układu równań na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych. Następnie rozwiązywane są dwa układy równań z macierzami trójkątnymi, co prowadzi do uzyskania rozwiązania pierwotnego układu równań. Ta metoda jest dokładna dla wielu rodzajów macierzy, ale może być kosztowna obliczeniowo.

Wybór metody rozwiązywania układu równań liniowych zależy od wielu czynników, takich jak rozmiar macierzy, wymagana dokładność rozwiązania, struktura macierzy itp. W ogólnym przypadku, metody iteracyjne są bardziej elastyczne i lepiej radzą sobie z macierzami o specyficznej strukturze, podczas gdy metoda faktoryzacji LU jest szybsza i bardziej dokładna dla ogólnych macierzy.

### Analiza zadania

Celem projektu jest implementacja metod iteracyjnych (Jacobiego i Gaussa-Seidla) i bezpośrednich (faktoryzacja LU) rozwiązywania układów równań liniowych. Testy poszczególnych metod będą przeprowadzane na układach równań, które powstają w wyniku dyskretyzacji równań różniczkowych. Zadania zostały wykonane w języku Python z wykorzystaniem bibliotek: math, time, numpy, matplotlib.

# Przebieg zadania

## - Zadanie A

Dla numeru indeksu 188724 otrzymujemy wartości:

> a1 = 12, a2 = a3 = -1
> N = 924
> b[n] = sin(n · (8 + 1)

```
[0.4121184852417566, -0.7509872467716762, 0.9563
[[12. -1. -1. ...  0.  0.  0.]
 [-1. 12. -1. ...  0.  0.  0.]
 [-1. -1. 12. ...  0.  0.  0.]
 ...
 [ 0.  0.  0. ... 12. -1. -1.]
 [ 0.  0.  0. ... -1. 12. -1.]
 [ 0.  0.  0. ... -1. -1. 12.]]
```

## - Zadanie B

Wyniki zastosowania metod Jacobiego oraz Gaussa-Seidla dla układu równań z podpunktu A przedstawiają się następująco:

```
Jacobi method:
Time: 8.92130160331726 Number of iterations: 14

Gauss-Seidel method:
Time: 5.947283506393433 Number of iterations: 9
```

Obliczenia były prowadzone dopóki norma z wektora residuum nie spadła poniżej $10^{-9}$. Metoda Gaussa-Seidla wykonuje obliczenia około 1,5 raza szybciej niż metoda Jacobiego oraz wymaga mniejszej ilości iteracji, aby osiągnąć zadowalająca dokładność.

## - Zadanie C

Tworzymy układ równań dla którego:

a1 = 3, a2 = a3 = -1
N = 924
wektor b – bez zmian

Rezultat zastosowanych zmian:

```
Jacobi method:
Time: 63.091941356658936 Number of iterations: 100

Gauss-Seidel method:
Time: 58.076372385025024 Number of iterations: 100
```

Obliczenia dla układu równań ze zmienioną wartością a1 nigdy się nie kończą i zawsze dochodzą do maksymalnej ilości iteracji, stąd można wywnioskować że dla powyższych wartości metody iteracyjne nie zbiegają się.

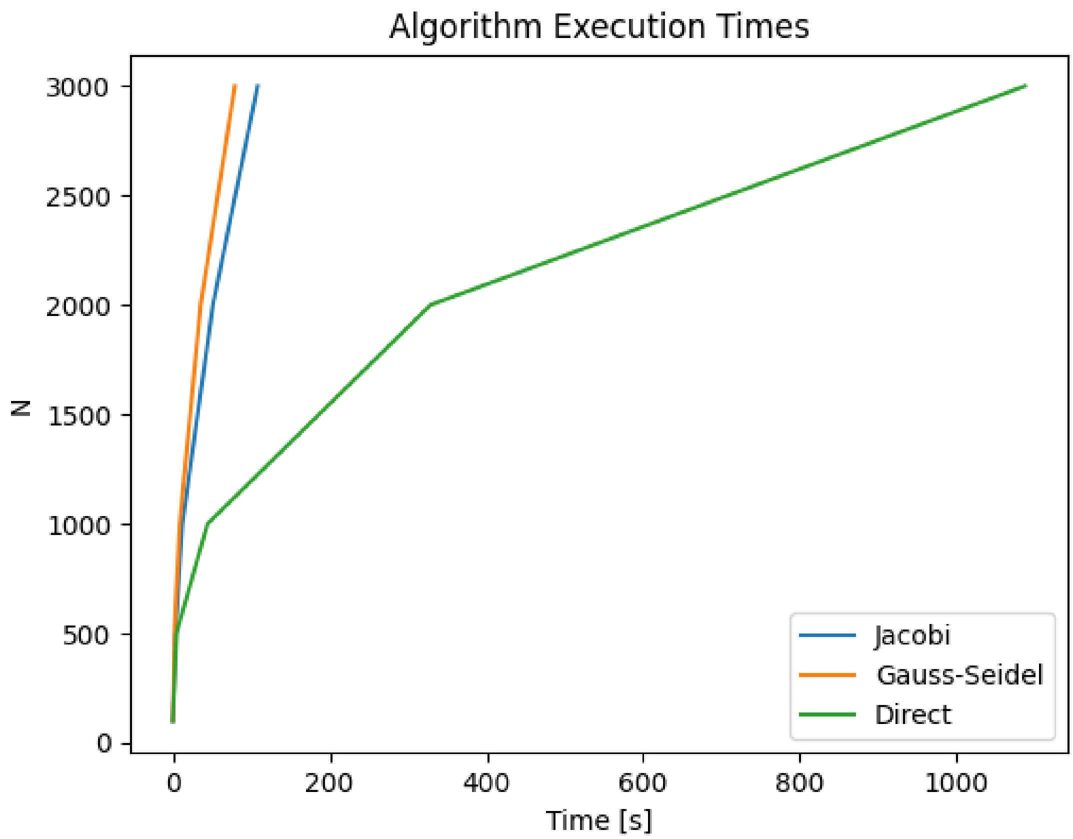
## - Zadanie D

Stosując bezpośrednią metodę rozwiązywania układów równań liniowych – metodę faktoryzacji LU dla wartości z podpunktu C otrzymujemy następującą normę residuum:

```
Direct method:
Residual norm: 2.7702009947815243
```

## - Zadanie E

Poniżej znajduje się wykres czasu trwania poszczególnych algorytmów w zależności od liczby niewiadomych N = [100, 500, 1000, 2000, 3000] dla przypadku z punktu A.




Dla każdego z trzech zaprezentowanych algorytmów czas trwania obliczeń rośnie wraz ze wzrostem liczby niewiadomych N, czyli zwiększeniem rozmiaru macierzy A. Metoda Gaussa-Seidla na ogół znajduje rozwiązanie szybciej niż metoda Jacobiego, jednak dla N mniejszego niż 1200 są to różnice nieznaczne. Znaczną różnice można natomiast zauważyć w przypadku metody faktoryzacji LU, która jest znacznie wolniejsza od metod iteracyjnych.

# Wnioski

Podsumowując, iteracyjne metody rozwiązywania układów równań liniowych są proste w implementacji, elastyczne oraz dobrze radzą sobie z macierzami o specyficznej strukturze, a rozwiązanie o zadowalającej dokładności znajdują relatywnie szybko. Niestety jak pokazał przypadek C, metody iteracyjne dla pewnych wartości mogą się nie zbiegać. W takich przypadkach trzeba użyć innej metody, np. metody faktoryzacji LU, która pomimo długiego czasu działania oraz kosztowności obliczeniowej znajduje dokładne rozwiązanie.