

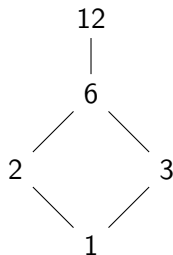
# Cálculo de Congruencias

Calcular todas las congruencias del reticulado  
( $\{1,2,3,6,12\}$ , mcm, mcd)

November 12, 2017

# Cálculo de Congruencias

El reticulado  $(\{1,2,3,6,12\}, \text{mcm}, \text{mcd})$  puede ser representado mediante el siguiente diagrama de Hasse.



Asumiremos que se tiene la prueba del siguiente lemma (lemma de convexidad)

### Lemma

*Si  $c \in L/\theta$ , entonces  $c$  es un subconjunto convexo de  $(L, s, i)$ , es decir para cualesquiera  $x, y, z \in L$ , si se da que  $x, y \in c$ , y  $x \leq z \leq y$ , entonces  $z \in c$*

A continuación listaremos algunos teoremas que valen para todas las congruencias del reticulado que luego probaremos

## Theorem

$$6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$$

$$3\theta 1 \Rightarrow 2\theta 6$$

$$2\theta 6 \Rightarrow 3\theta 1$$

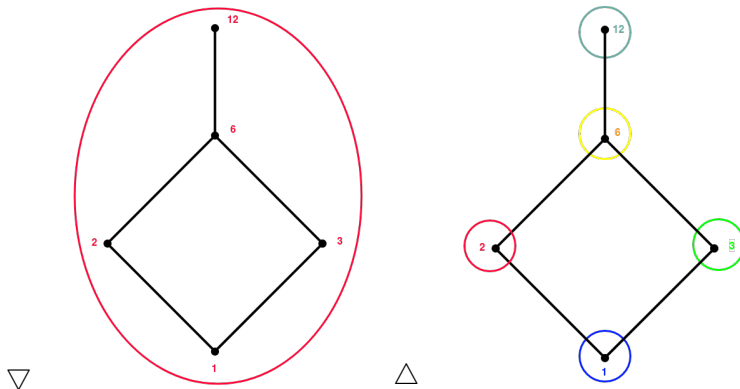
$$2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$$

$$1\theta 6 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$$

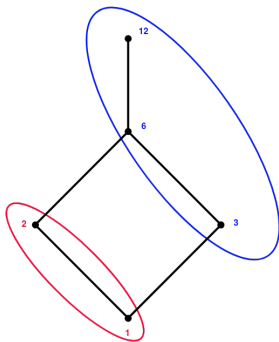
$$12\theta 6 \Rightarrow 6\theta 3 \wedge 6\theta 2$$

# Congruencias Candidatas

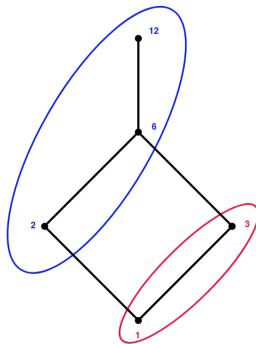
Por ser reticulado, sabemos que valen las congruencias triviales



# Congruencias Candidatas

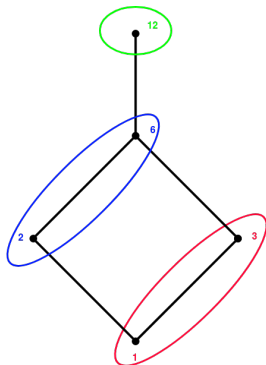


1.

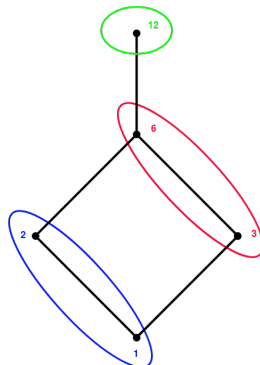


2.

# Congruencias Candidatas

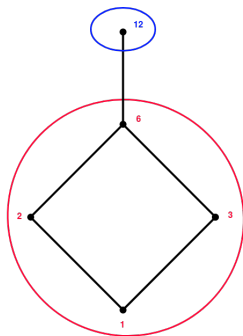


3.

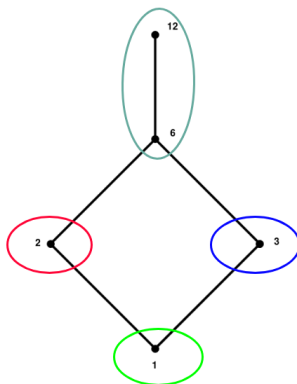


4.

# Congruencias Candidatas



5.



6.



# Congruencias. Caso $12/\theta = \{12\}$ .

Sea  $\theta$  una congruencia sobre  $(\{1,2,3,6,12\}, \text{mcm}, \text{mcd})$ .

Ahora supongamos que  $12/\theta = \{12\}$ .

Analizaremos por casos todas las posibles congruencias

**Subcaso**  $(6, 1) \in \theta$

- Si  $(6, 1) \in \theta$  entonces (por lema de convexidad)  $\{6, 3, 2, 1\} \subseteq 6/\theta$ , y ya que  $12/\theta = \{12\}$ , entonces  $6/\theta = \{6, 3, 2, 1\}$  por lo tanto  $\theta$  es la congruencia 5.

# Congruencias. Caso $12/\theta = \{12\}$ .

## Subcaso $(6,1) \notin \theta$

- Veamos el caso que  $(2,1) \in \theta$  entonces (por lemita)  $(3,6) \in \theta$ , por lo tanto  $\theta$  es la congruencia 4.
- Veamos el caso que  $(3,1) \in \theta$  entonces (por lemita)  $(2,6) \in \theta$ , por lo tanto  $\theta$  es la congruencia 3.

# Congruencias. Caso $12/\theta = \{12\}$ .

Nos queda analizar el caso en que

$(2, 3) \in \theta$ , entonces (por lemita)  $\{6, 3, 2, 1\} \subseteq 2/\theta$ , ya que  $12/\theta = \{12\}$ , entonces  $\{6, 3, 2, 1\} = 2/\theta$  por lo tanto  $\theta$  es la congruencia 5.

Si no se da ninguno de los casos listados recién, entonces  $a/\theta = a$  para cada  $a \in \{1, 2, 3, 6, 12\}$ , por lo tanto  $\theta$  es la congruencia  $\triangle$  (la trivial).

# Congruencias. Caso $12/\theta \neq \{12\}$

Ahora veremos las congruencias donde  $12/\theta \neq \{12\}$

**Subcaso**  $12/\theta = \{12, 6\}$

- Sabemos que  $(2, 1), (3, 1) \notin \theta$  (porque, por lemitas, eso implicara que  $(3, 6)$  o  $(2, 6) \in \theta$ , lo cual no puede ser porque supusimos que  $12/\theta = \{12, 6\}$ ). Entonces  $\theta$  es la congruencia 6.

# Congruencias. Caso $12/\theta \neq \{12\}$

- Si  $3 \in 12/\theta$ , por lema de convexitud,  $6 \in 12/\theta$ . Luego  $(3, 6) \in \theta$  implica (por lemita)  $(2, 1) \in \theta$ .
  - Luego, si  $2 \notin 12/\theta$ , entonces  $\theta$  es la congruencia 1.
  - Si  $2 \in 12/\theta$  (por lemita), entonces  $\theta$  es la congruencia  $\nabla$  (la trivial total).
- Si  $2 \in 12/\theta$ , por lema de convexidad,  $6 \in 12/\theta$ . Luego  $(2, 6) \in \theta$  implica (por lemita)  $(3, 1) \in \theta$ .
  - Luego, si  $3 \notin 12/\theta$ , entonces  $\theta$  es la congruencia 2.
  - Si  $3 \in 12/\theta$  (por lemita),  $\theta$  es la congruencia  $\nabla$  (la trivial total).

# Congruencias Caso $12/\theta \neq \{12\}$

- Si  $1 \in 12/\theta$ , por lema de convexidad,  $12/\theta = \{12, 6, 3, 2, 1\}$ , por lo tanto  $\theta$  es la congruencia  $\nabla$  (trivial total).

Con esto ya cubrimos todas las posibles congruencias  $\theta$ .

Veamos ahora los lemas que planteamos sobre este reticulado valen:

(a)  $6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$

$$6\theta 3 \Rightarrow 6i2\theta 3i2 \Rightarrow 2\theta 1$$

(b)  $3\theta 1 \Rightarrow 2\theta 6$

$$3\theta 1 \Rightarrow 3s2\theta 1s2 \Rightarrow 6\theta 2 \Rightarrow 2\theta 6$$

(c)  $2\theta 6 \Rightarrow 3\theta 1$

$$2\theta 6 \Rightarrow 2i3\theta 6i3 \Rightarrow 1\theta 3 \Rightarrow 3\theta 1$$

(d)  $2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$

$$2\theta 3 \Rightarrow 3\theta 3 \wedge 2\theta 3 \Rightarrow 3s2\theta 3s3 \wedge 3i2\theta 3i3 \\ \Rightarrow 6\theta 3 \wedge 1\theta 3$$

Por (a) si  $6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$ ; Por (b) si  $3\theta 1 \Rightarrow 2\theta 6$

Por lo tanto si  $2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$

(e)  $1\theta 6 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$

$$1\theta 6 \Rightarrow 1s2\theta 6s2 \Rightarrow 2\theta 6$$

$$1\theta 6 \Rightarrow 1s3\theta 6s3 \Rightarrow 3\theta 6$$

Por (a) si  $6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$ .

Si  $6\theta 2 \wedge 6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 3$ .



Con esto hemos probado cuales son todas las congruencias del reticulado  $(\{1,2,3,6,12\}, \text{mcm}, \text{mcd})$ .