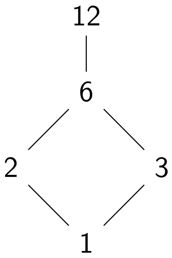
Cálculo de Congruencias

Calcular todas las congruencias del reticulado
$(\{1,2,3,6,12\}$, mcm, mcd$)$

November 13, 2017

Cálculo de Congruencias

El reticulado ({1,2,3,6,12}, mcm, mcd) puede ser representado mediante el siguiente diagrama de Hasse.



Asumiremos que se tiene la prueba del siguiente lemma (lemma de convexidad)

Lemma

Si $c \in L/\theta$, *entonces* c *es un subconjunto convexo de (L,s,i), es decir para cualesquiera* $x, y, z \in L$, *si se da que* $x, y \in c$, *y* $x \leq z \leq y$, *entonces* $z \in c$

A continuación listaremos algunos teoremas que valen para todas las congruencias del reticulado que luego probaremos

Theorem

$$6\theta 3 => 2\theta 1$$

$$3\theta 1 => 2\theta 6$$

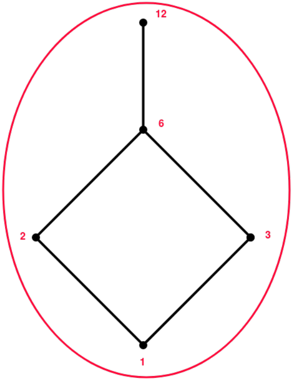
$$2\theta 6 => 3\theta 1$$

$$2\theta 3 => 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$$

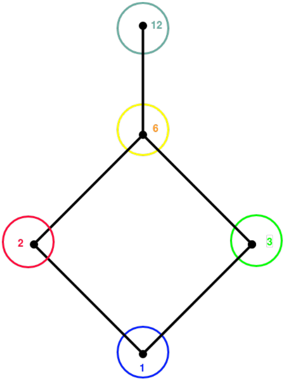
$$1\theta 6 => 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$$

$$12\theta 6 => 6\theta 3 \wedge 6\theta 2$$

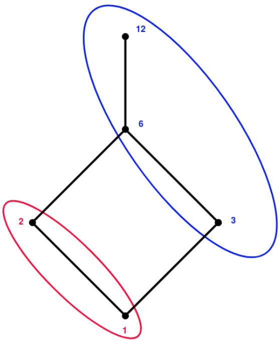
Por ser reticulado, sabemos que valen las congruencias triviales

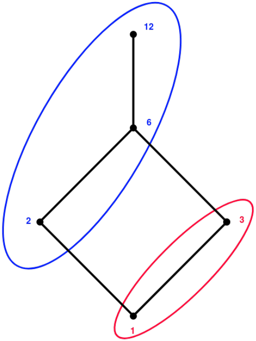


∇ Δ

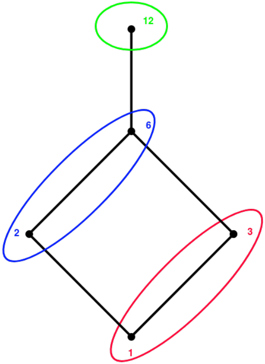


Congruencias Candidatas

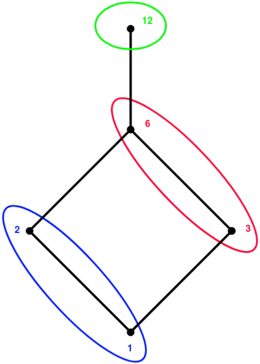
1. 

2. 

Congruencias Candidatas

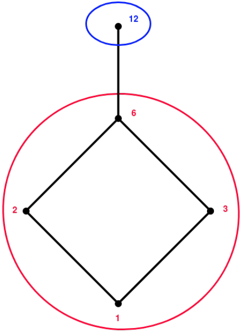


3.

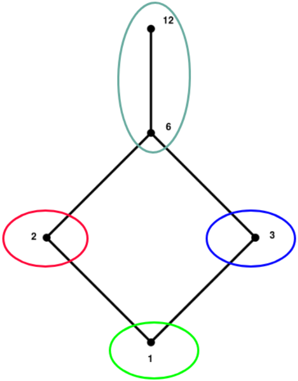


4.

Congruencias Candidatas



5.



6.

Congruencias. Caso $12/\theta = \{12\}$.

Sea θ una congruencia sobre ({1,2,3,6,12},mcm,mcd) .
Ahora supongamos que $12/\theta = \{12\}$.
Analizaremos por casos todas las posibles congruencias
Subcaso $(6, 1) \in \theta$

- Si $(6, 1) \in \theta$ entonces (por lema de convexidad) $\{6, 3, 2, 1\} \subseteq 6/\theta$, y ya que $12/\theta = \{12\}$, entonces $6/\theta = \{6, 3, 2, 1\}$ por lo tanto θ es la congruencia 5.

Congruencias. Caso $12/\theta = \{12\}$.

Subcaso (6,1) $\notin \theta$

- Veamos el caso que $(2,1) \in \theta$ entonces (por lemita) $(3,6) \in \theta$, por lo tanto θ es la congruencia 4.
- Veamos el caso que $(3,1) \in \theta$ entonces (por lemita) $(2,6) \in \theta$, por lo tanto θ es la congruencia 3.

Congruencias. Caso $12/\theta = \{12\}$.

Nos queda analizar el caso en que
$(2,3) \in \theta$, entonces (por lemita) $\{6,3,2,1\} \subseteq 2/\theta$, ya que $12/\theta = \{12\}$, entonces $\{6,3,2,1\} = 2/\theta$. Pero esto implica que $(6,1) \in \theta$. Absurdo! Por lo tanto este caso no puede darse. Si no se da ninguno de los casos listados recien, entonces $a/\theta = a$ para cada $a \in \{1,2,3,6,12\}$, por lo tanto θ es la congruencia $\triangle$ (la trivial).

Congruencias. Caso $12/\theta \neq \{12\}$

Ahora veremos las congruencias donde $12/\theta \neq \{12\}$
Subcaso $12/\theta = \{12, 6\}$

- Sabemos que $(2,1)$,$(3,1) \notin \theta$ (porque, por lemitas, eso implicara que $(3,6)$ o $(2,6) \in \theta$, lo cual no puede ser porque supusimos que $12/\theta = \{12, 6\}$). Entonces θ es la congruencia 6.

Congruencias. Caso $12/\theta \neq \{12\}$

- Si $3 \in 12/\theta$, por lema de convexitud, $6 \in 12/\theta$. Luego $(3,6) \in \theta$ implica (por lemita) $(2,1) \in \theta$.
  - Luego, si $2 \notin 12/\theta$, entonces θ es la congruencia 1.
  - Si $2 \in 12/\theta$ (por lemita), entonces θ es la congruencia $\bigtriangledown$ (la trivial total).
- Si $2 \in 12/\theta$, por lema de convexidad, $6 \in 12/\theta$. Luego $(2,6) \in \theta$ implica (por lemita) $(3,1) \in \theta$.
  - Luego, si $3 \notin 12/\theta$, entonces θ es la congruencia 2.
  - Si $3 \in 12/\theta$ (por lemita), θ es la congruencia $\bigtriangledown$ (la trivial total).

Congruencias Caso $12/\theta \neq \{12\}$

- Si $1 \in 12/\theta$, por lema de convexidad, $12/\theta = \{12, 6, 3, 2, 1\}$, por lo tanto θ es la congruencia $\bigtriangledown$ (trivial total).

Con esto ya cubrimos todas las posibles congruencias θ.

Prueba Lemitas

Veamos ahora los lemas que planteamos sobre este reticulado valen:

(a) $6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$
$6\theta 3 \Rightarrow 6i2\theta 3i2 \Rightarrow 2\theta 1$

(b) $3\theta 1 \Rightarrow 2\theta 6$
$3\theta 1 \Rightarrow 3s2\theta 1s2 \Rightarrow 6\theta 2 \Rightarrow 2\theta 6$

(c) $2\theta 6 \Rightarrow 3\theta 1$
$2\theta 6 \Rightarrow 2i3\theta 6i3 \Rightarrow 1\theta 3 \Rightarrow 3\theta 1$

Prueba Lemitas

(d) $2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 2$ y $1\theta 3$ y $6\theta 2$ y $6\theta 3$
$2\theta 3 \Rightarrow 3\theta 3$ y $2\theta 3 \Rightarrow 3s2\theta 3s3$ y $3i2\theta 3i3$
$\Rightarrow 6\theta 3$ y $1\theta 3$
Por (a) si $6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$;Por (b) si $3\theta 1 \Rightarrow 2\theta 6$
Por lo tanto si $2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 2$ y $1\theta 3$ y $6\theta 2$ y $6\theta 3$

(e) $1\theta 6 \Rightarrow 1\theta 2$ y $1\theta 3$ y $6\theta 2$ y $6\theta 3$
$1\theta 6 \Rightarrow 1s2\theta 6s2 \Rightarrow 2\theta 6$
$1\theta 6 \Rightarrow 1s3\theta 6s3 \Rightarrow 3\theta 6$
Por (a) si $6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$.
Si $6\theta 2$ y $6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 3$.

Conclusión

Con esto hemos probado cuales son todas las congruencias del reticulado ($\{1,2,3,6,12\}$,mcm,mcd).