

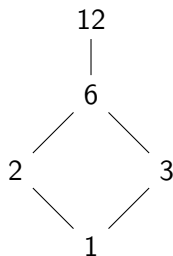
Cálculo de Congruencias

Calcular todas las congruencias del reticulado
($\{1,2,3,6,12\}$, mcm, mcd)

September 28, 2017

Cálculo de Congruencias

El reticulado $(\{1,2,3,6,12\}, \text{mcm}, \text{mcd})$ puede ser representado mediante el siguiente diagrama de Hasse.



A continuación listaremos algunos teoremas que valen para todas las congruencias del reticulado que luego probaremos

Theorem

$$6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$$

$$3\theta 1 \Rightarrow 2\theta 6$$

$$2\theta 6 \Rightarrow 3\theta 1$$

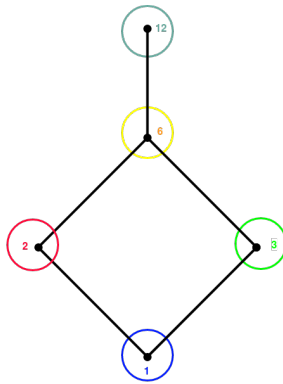
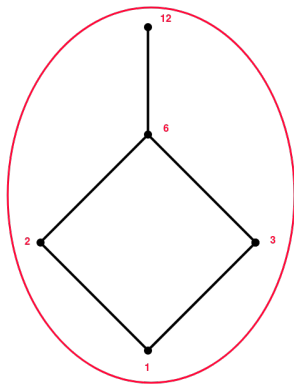
$$2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$$

$$1\theta 6 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$$

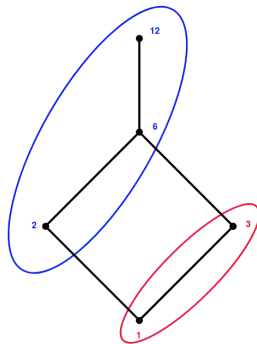
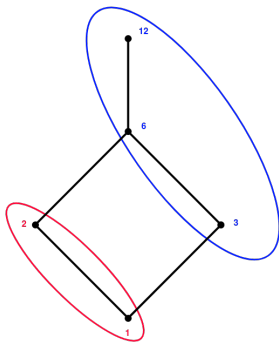
$$12\theta 6 \Rightarrow 6\theta 3 \wedge 6\theta 2$$

Congruencias Candidatas

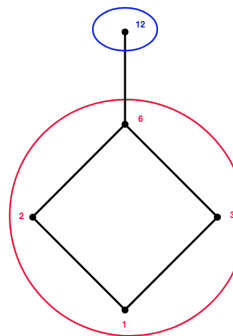
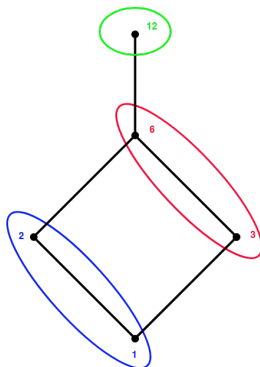
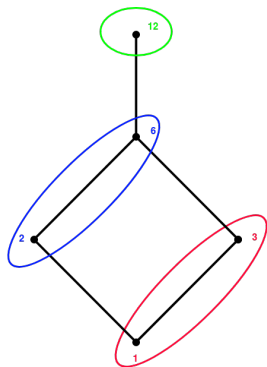
Por ser reticulado, sabemos que valen las congruencias triviales



Congruencias Candidatas



Congruencias Candidatas



Proof.

Veamos el caso de que $12/\theta = \{12\}$.

Si $6\theta 2 \Rightarrow 3\theta 1 \Rightarrow \theta \subseteq \theta_3$.

Si $6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1 \Rightarrow \theta \subseteq \theta_4$.

$1\theta 6 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3 \Rightarrow \theta \subseteq \theta_5$.



Proof.

Caso $12/\theta = \{12, 6\}$.

$12\theta 6 \Rightarrow 6\theta 3 \Rightarrow 12\theta 3 \Rightarrow 12/\theta = \{12, 6, 3\}$. Abs! Por lo tanto no hay θ tq $12/\theta = \{12, 6\}$. □

Proof.

Caso $12/\theta = \{12, 6, 3\}$.

$12\theta 6 \Rightarrow 6\theta 2 \vee 6\theta 3$ (1)

$6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$

Supongamos $6\theta 2 \Rightarrow 3\theta 1 \Rightarrow \theta = \nabla$

Por lo tanto 6 no est relacionado con 2.

Si en (1) solo vale $6\theta 3 \Rightarrow \theta \subseteq \theta_1$.



Proof.

Caso $12/\theta = \{12, 6, 2\}$.

$$12\theta 6 \Rightarrow 6\theta 2 \vee 6\theta 3 \quad (1)$$

Sabemos que vale $6\theta 2$, veamos $6\theta 3$. Supongamos que vale, entonces $2\theta 1 \Rightarrow 6\theta 1 \Rightarrow 6\theta 3 \Rightarrow \theta = \nabla$. Entonces 6 no est relacionado con 3.

Por lo tanto si $12\theta 6 \wedge 6\theta 2 \Rightarrow \wedge 1\theta 3 \Rightarrow \theta \subseteq \theta_2$.



Proof.

Caso $12/\theta = \{12, 6, 2, 3\}$.

Si $2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3 \Rightarrow \theta \subseteq \nabla$.



Con esto vemos que son todas las congruencias posibles. Veamos ahora que los lemas valen:

Proof.

a) $6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$

$$6\theta 3 \Rightarrow 6i2\theta 3i2 \Rightarrow 2\theta 1$$



Proof.

b) $3\theta 1 \Rightarrow 2\theta 6$

$$3\theta 1 \Rightarrow 3s2\theta 1s2 \Rightarrow 6\theta 2 \Rightarrow 2\theta 6$$



Proof.

$$c) 2\theta 6 \Rightarrow 3\theta 1$$

$$2\theta 6 \Rightarrow 2i3\theta 6i3 \Rightarrow 1\theta 3 \Rightarrow 3\theta 1$$



Proof.

$$d) 2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$$

$$2\theta 3 \Rightarrow 3\theta 3 \wedge 2\theta 3 \Rightarrow 3s2\theta 3s3 \wedge 3i2\theta 3i3$$

$$\Rightarrow 6\theta 3 \wedge 1\theta 3$$

Por (a) si $6\theta 3 \Rightarrow 2\theta 1$; Por (b) si $3\theta 1 \Rightarrow 2\theta 6$

Por lo tanto si $2\theta 3 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$



Proof.

$$e) 1\theta 6 \Rightarrow 1\theta 2 \wedge 1\theta 3 \wedge 6\theta 2 \wedge 6\theta 3$$

$$1\theta 6 \Rightarrow 1s2\theta 6s2 \Rightarrow 2\theta 6$$

$$1\theta 6 \Rightarrow 1s3\theta 6s3 \Rightarrow 3\theta 6$$