

**ANDRÉ GARNIER COUTINHO**

**CONTRIBUIÇÕES À MODELAGEM DINÂMICA E  
AO CONTROLE DE MANIPULADORES  
PARALELOS**

São Paulo  
2019

**ANDRÉ GARNIER COUTINHO**

**CONTRIBUIÇÕES À MODELAGEM DINÂMICA E  
AO CONTROLE DE MANIPULADORES  
PARALELOS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do Título de Doutor em Ciências.

São Paulo  
2019

**ANDRÉ GARNIER COUTINHO**

**CONTRIBUIÇÕES À MODELAGEM DINÂMICA E  
AO CONTROLE DE MANIPULADORES  
PARALELOS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração:

Engenharia Mecânica de Projeto e Fabricação

Orientador:

Prof. Dr. Tarcisio A. H. Coelho

São Paulo  
2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

#### Catalogação-na-publicação

Garnier Coutinho, André

Contribuições à modelagem dinâmica e ao controle de manipuladores paralelos / A. Garnier Coutinho -- São Paulo, 2019.

156 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.  
Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Arquitetura paralela 2.Robótica 3.Dinâmica (Modelagem) 4.Teoria de sistemas de controle I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.  
Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que sempre me apoiaram e ajudaram a perseguir o meu sonho de me tornar Doutor em Engenharia Mecânica pela Escola Politécnica da USP. Não tenho palavras para descrever o que significa para mim poder estar contribuindoativamente na exploração das fronteiras do conhecimento.

Dentre as várias pessoas que sempre estiveram ao meu lado nesta jornada, gostaria de destacar o meu orientador e amigo Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho, o qual sempre esteve ao meu lado desde o início da jornada no meio acadêmico, sempre sendo super solícito, me apoiando, e me orientando da melhor maneira possível; meu grande amigo Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino, o qual me introduziu e ensinou o que há de mais sofisticado e eficiente na parte de modelagem de sistemas multicorpos, um conhecimento fundamental para o desenvolvimento desta tese, também sempre sendo extremamente solícito e me ajudando sempre que podia; aos grandes amigos Eng<sup>a</sup>. Juliana Martins de Oliveira Fuess e Eng. Victor Pacheco Bartholomeu, os quais participaramativamente e possibilitaram o desenvolvimento do protótipo de manipulador paralelo que possibilitou adicionar um caráter experimental na tese desenvolvida; à minha namorada Adriana Marques Cavalcanti, a qual está há mais de 12 anos ao meu lado, sempre me apoiando em todos os momentos e me inspirando a ser cada vez mais uma pessoa melhor; e aos meus pais Antonio Valdec Martins Coutinho e Taís Borges Garnier, e avó Maria Luiza Borges Garnier, os quais sempre se preocuparam muito comigo, sempre me apoiando e ajudando de todas as maneiras.

Por último, mas não menos importante, além dessas pessoas incríveis que tive a oportunidade de conhecer em minha vida, gostaria de destacar meu agradecimento a outras três pessoas maravilhosas que conheci há pouco tempo, que mudaram minha vida, e que tornaram possível a conclusão desta tese de doutorado: minha psicóloga Dra. Ana Maria Canzonieri, minha psiquiatra Dra. Letícia Pacheco Lessa, e minha professora de yoga Alessandra Dotto.

Muito obrigado a todos, sem vocês nada disso seria possível.

“ ‘Nesta direção’, disse o Gato, girando a pata direita, ‘mora um Chapeleiro. E nesta direção’, apontando com a pata esquerda, ‘mora uma Lebre de Março. Visite quem você quiser, são ambos loucos.’

‘Mas eu não ando com loucos’, observou Alice.

‘Oh, você não tem como evitar’, disse o Gato, ‘somos todos loucos por aqui. Eu sou louco. Você é louca’.

‘Como é que você sabe que eu sou louca?’, disse Alice.

‘Você deve ser’, disse o Gato, ‘Senão não teria vindo para cá.’ ”

-- Lewis Carroll

# RESUMO

Os mecanismos paralelos são conhecidos por suas características promissoras, como alta rigidez estrutural, alta precisão de posicionamento, baixa inércia, e alta capacidade de carga. Estas características os tornam muito atraentes para realizar tarefas em que são necessárias grandes velocidades e acelerações, como *pick-and-place*, ou grande rigidez e precisão, como usinagem e posicionamento de telescópios.

No entanto, dada a sua maior complexidade mecânica, os modelos dinâmicos se tornam muito mais complexos e de difícil obtenção, o que pode dificultar muito a tarefa do controle, e consequentemente levar a uma não exploração de todo o potencial que estes mecanismos tem a oferecer.

Dado o alto grau de acoplamento e de não linearidades deste tipo de sistema, a utilização de técnicas de controle não baseadas em modelo pode deixar muito a desejar. Por outro lado, dada a grande complexidade dos modelos, a utilização de técnicas de controles baseadas em modelo pode ser de difícil implementação e de alto custo computacional.

Com o intuito de explorar ao máximo o potencial deste tipo de arquitetura, nesta Tese são feitos o desenvolvimento de algoritmos de modelagem cinemática e dinâmica, os quais facilitam muito o processo de modelagem e de implementação em tempo real, projetos de controladores robustos baseados em modelo, de modo a diminuir a sensibilidade a incertezas do modelo, e a validação experimental dos controladores propostos em um mecanismo do tipo pentágono articulado, comparando-os com outras técnicas de controle frequentemente utilizadas na literatura.

**Palavras-Chave** – Mecanismos paralelos, Robótica, Modelagem dinâmica , Controle, Controle não linear.

# ABSTRACT

Parallel mechanisms are known for their promising features, such as high structural stiffness, high precision in positioning, low inertia, and high load carrying capacity. These features make them very attractive to perform tasks in which high speeds and accelerations, such as pick-and-place, or high stiffness and precision, such as milling and telescope positioning, are needed.

However, given their greater mechanical complexity, the dynamic models become much more complex and hard to obtain, making the control task more difficult, and consequently leading to a non-exploration of all the potential these mechanisms have to offer.

Given the high degree of dynamic coupling and non-linearities of this kind of system, the use of control techniques that are not model-based may not be the best solution. On the other hand, due to the great complexity of the dynamic models, the use of model-based control techniques may be difficult to implement and may have a high computational cost.

Aiming to fully explore the potential of this kind of architecture, in this thesis are developed kinematic and dynamic modelling algorithms, which greatly facilitate the modelling and real-time implementation process, robust model-based controller designs, in order to reduce the uncertainty sensitivity of the model, and validation of the proposed controllers in an articulated pentagon type mechanism, comparing them with other control techniques frequently used in the literature.

**Keywords** – Parallel mechanisms, Robotics, Dynamic modelling, Control, Non-linear control

## LISTA DE FIGURAS

1	Robô industrial Adept Quattro - Retirada de PhysOrg.com . . . . .	23
2	Malha de Controle Proporcional-Integral-Derivativo . . . . .	35
3	Malha de Controle por Torque Computado (Adaptado de [28]) . . . . .	36
4	Malha de Controle por Torque Computado com pré-alimentação (Adaptado de [28]) . . . . .	36
5	Malha de Controle Preditivo Baseado em Modelo . . . . .	37
6	Malha de Controle Adaptativo (Adaptado de [28]) . . . . .	38
7	Malha Controle por Modos Deslizantes . . . . .	40
8	Protótipo do mecanismo 5R . . . . .	44
9	Pentágono articulado (5R) . . . . .	104
10	Mecanismo <u>RR</u> . . . . .	105
11	Espaço de trabalho do mecanismo 5R . . . . .	108
12	$\tau_1$ : sem incerteza . . . . .	110
13	$\tau_2$ : sem incerteza . . . . .	110
14	$\tau_1$ : 20% de incerteza . . . . .	110
15	$\tau_2$ : 20% de incerteza . . . . .	110
16	$\tau_1$ : 40% de incerteza . . . . .	110
17	$\tau_2$ : 40% de incerteza . . . . .	110
18	$e_x$ : sem incerteza . . . . .	111
19	$e_y$ : sem incerteza . . . . .	111
20	$e_x$ : 20% de incerteza . . . . .	111
21	$e_y$ : 20% de incerteza . . . . .	111
22	$e_x$ : 40% de incerteza . . . . .	111
23	$e_y$ : 40% de incerteza . . . . .	111

24	Bancada experimental . . . . .	114
25	Arquitetura de controle: espaço das juntas . . . . .	115
26	Arquitetura de controle: espaço das juntas . . . . .	115
27	Trajetória realizada . . . . .	122
28	Erro de controle $e_x$ . . . . .	122
29	Erro de controle $e_y$ . . . . .	122
30	Esforço de controle $\tau_1$ . . . . .	122
31	Esforço de controle $\tau_2$ . . . . .	122
32	Trajetória realizada . . . . .	123
33	Erro de controle $e_x$ . . . . .	123
34	Erro de controle $e_y$ . . . . .	123
35	Esforço de controle $\tau_1$ . . . . .	123
36	Esforço de controle $\tau_2$ . . . . .	123
37	Trajetória realizada . . . . .	124
38	Erro de controle $e_x$ . . . . .	124
39	Erro de controle $e_y$ . . . . .	124
40	Esforço de controle $\tau_1$ . . . . .	124
41	Esforço de controle $\tau_2$ . . . . .	124
42	Trajetória realizada . . . . .	125
43	Erro de controle $e_x$ . . . . .	125
44	Erro de controle $e_y$ . . . . .	125
45	Esforço de controle $\tau_1$ . . . . .	125
46	Esforço de controle $\tau_2$ . . . . .	125
47	Trajetória realizada . . . . .	126
48	Erro de controle $e_x$ . . . . .	126
49	Erro de controle $e_y$ . . . . .	126

50	Esforço de controle $\tau_1$	126
51	Esforço de controle $\tau_2$	126
52	Trajetória realizada	127
53	Erro de controle $e_x$	127
54	Erro de controle $e_y$	127
55	Esforço de controle $\tau_1$	127
56	Esforço de controle $\tau_2$	127
57	Trajetória realizada	128
58	Erro de controle $e_x$	128
59	Erro de controle $e_y$	128
60	Esforço de controle $\tau_1$	128
61	Esforço de controle $\tau_2$	128
62	Trajetória realizada	129
63	Erro de controle $e_x$	129
64	Erro de controle $e_y$	129
65	Esforço de controle $\tau_1$	129
66	Esforço de controle $\tau_2$	129
67	Trajetória realizada	130
68	Erro de controle $e_x$	130
69	Erro de controle $e_y$	130
70	Esforço de controle $\tau_1$	130
71	Esforço de controle $\tau_2$	130
72	Trajetória realizada	131
73	Erro de controle $e_x$	131
74	Erro de controle $e_y$	131
75	Esforço de controle $\tau_1$	131

76	Esforço de controle $\tau_2$	131
77	Trajetória realizada	132
78	Erro de controle $e_x$	132
79	Erro de controle $e_y$	132
80	Esforço de controle $\tau_1$	132
81	Esforço de controle $\tau_2$	132
82	Trajetória realizada	133
83	Erro de controle $e_x$	133
84	Erro de controle $e_y$	133
85	Esforço de controle $\tau_1$	133
86	Esforço de controle $\tau_2$	133
87	Trajetória realizada	134
88	Erro de controle $e_x$	134
89	Erro de controle $e_y$	134
90	Esforço de controle $\tau_1$	134
91	Esforço de controle $\tau_2$	134
92	Trajetória realizada	135
93	Erro de controle $e_x$	135
94	Erro de controle $e_y$	135
95	Esforço de controle $\tau_1$	135
96	Esforço de controle $\tau_2$	135
97	Trajetória realizada	136
98	Erro de controle $e_x$	136
99	Erro de controle $e_y$	136
100	Esforço de controle $\tau_1$	136
101	Esforço de controle $\tau_2$	136

102	Trajetória realizada . . . . .	137
103	Erro de controle $e_x$ . . . . .	137
104	Erro de controle $e_y$ . . . . .	137
105	Esforço de controle $\tau_1$ . . . . .	137
106	Esforço de controle $\tau_2$ . . . . .	137
107	Círculo elétrico equivalente e modelo mecânico do motor . . . . .	169
108	Curva de velocidade do motor 1 . . . . .	175
109	Curva de velocidade do motor 2 . . . . .	176

## LISTA DE TABELAS

2	Parâmetros de Denavit-Hartemberg do mecanismo <u>RR</u> . . . . .	105
3	Parâmetros do mecanismo . . . . .	108
4	Parâmetros da cadeia serial 1 . . . . .	118
5	Parâmetros da cadeia 2 . . . . .	118
6	Parâmetros dos controladores: espaço das juntas - trajetória circular . . . . .	120
7	Parâmetros dos controladores: espaço das juntas - trajetória triangular . . . . .	120
8	Parâmetros dos controladores: espaço da tarefa . . . . .	120
9	Valores eficazes de erro e esforço de controle (em regime permanente) - Trajetória circular . . . . .	138
10	Valores eficazes de erro e esforço de controle - Trajetória triangular . . . . .	138
11	Aumento/diminuição dos valores eficazes de erro e esforço de controle uti- lizando a associação com o MD - Trajetória circular . . . . .	139
12	Aumento/diminuição dos valores eficazes de erro e esforço de controle uti- lizando a associação com o MD - Trajetória triangular . . . . .	139
13	Erro estacionário de posição - Trajetória circular . . . . .	139
14	Erro estacionário de posição - Trajetória triangular . . . . .	140
15	Medições para obtenção de $k_e$ do motor 1 . . . . .	177
16	Parâmetros do Motor 1 . . . . .	179
17	Medições para obtenção de $k_e$ do motor 2 . . . . .	179
18	Parâmetros do Motor 2 . . . . .	179

# LISTA DE SÍMBOLOS E CONVENÇÕES

$a, b, \dots$	Escalares, componentes de matrizes-coluna, componentes de matrizes ou índices
$\underline{a}, \underline{b}, \dots$	Matrizes diagonais
$A, B, \dots$	Escalares, componentes de matrizes-coluna ou componentes de matrizes
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Matrizes-coluna
$\mathbf{\check{a}}, \mathbf{\check{b}}, \dots$	Quaternions
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$	Matrizes
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Vetores físicos
$\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \dots$	Versores físicos
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Tensores físicos de segunda ordem ou transformações lineares
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Pontos no espaço
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Sistemas de coordenadas
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Corpos rígidos ou referenciais
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Sistema ou subsistema mecânico
$\mathbf{a}[i]$	i-ésimo elemento da matriz-coluna $\mathbf{a}$
$\mathbf{A}[i, j]$	elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbb{A}$	
$\mathbb{A}[i, :]$	i-ésima linha da matriz $\mathbb{A}$
$\mathbb{A}[:, j]$	j-ésima coluna da matriz $\mathbb{A}$
$\mathcal{N}$	Referencial inercial
$\mathbf{c}_{\mathcal{B}}$	Centro de massa do corpo rígido $\mathcal{B}$
$\mathbf{o}_{\mathcal{B}}$	Origem dos sistema de coordenadas $\mathcal{B}$
$\{\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}}, \hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}}, \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}\}$	Base ortonormal do sistema de coordenadas $\mathcal{B}$
$[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}}$	Matriz-coluna formada pelas coordenadas do ponto $\mathbf{p}$ no sistema de coordenadas $\mathcal{B}$
$[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}}^H$	Matriz-coluna formada pelas coordenadas do ponto $\mathbf{p}$ no sistema de coordenadas $\mathcal{B}$ em coordenadas homogêneas, ou seja: $[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}}^H = \begin{bmatrix} [\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} \\ 1 \end{bmatrix}$

$[u]_B$	Matriz-coluna formada pelas componentes do vetor $u$ na base do sistema de coordenadas B
$[1]_{A B}$	Matriz de mudança de base, i.e. $[u]_A = [1]_{A B} \cdot [u]_B$
$[1]_{A B}^H$	Matriz de transformação homogênea, i.e. $[p]_A^H = [1]_{A B}^H \cdot [p]_B^H$
$\gamma$	Vetor aceleração gravitacional
$r_{a b}$	Vetor que liga o ponto a ao ponto b, orientado no sentido de a até b
$v_p^A$	Vetor velocidade do ponto p em relação ao ref. A
$a_p^A$	Vetor velocidade do ponto p em relação ao ref. A
$\omega_B^A$	Vetor velocidade angular do corpo rígido (ou referencial) B em relação ao referencial A
$\alpha_B^A$	Vetor aceleração angular do corpo rígido (ou referencial) B em relação ao referencial A
$f_B$	Vetor força não reativa aplicada no centro de massa do corpo rígido B
$\tau_B$	Vetor torque não reativo aplicada no corpo rígido B
$I_B$	Tensor de inércia do corpo rígido B em relação a seu centro de massa
q	Coordenadas generalizadas
$\pi$	Quasi-coordenadas
p	Quasi-velocidades
$\dot{p}$	Quasi-acelerações
u	Esforços ativos generalizados (provenientes de atuadores)
M	Matriz de inércia generalizada
$\nu$	Matriz-coluna de esforços inerciais giroscópicos e de atrito generalizados
g	Matriz-coluna de esforços gravitacionais generalizados
$\delta W$	Trabalho virtual
m	Massa
J	Momento de inércia
b	Coeficiente de atrito viscoso
$\mu$	Coeficiente de atrito seco
i	Corrente elétrica ou índice genérico
u	Tensão elétrica

$\omega$	Velocidade angular
$k_e$	Constante de força contra-eletromotriz
$R$	Resistência elétrica
$L$	Indutância
$t$	Tempo
$\mathbf{c}(\cdot)$	Notação compacta para $\cos(\cdot)$
$\mathbf{s}(\cdot)$	Notação compacta para $\sin(\cdot)$
$d$	Operador diferencial
$\delta$	Operador variação
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \partial_x(\cdot)$	Derivada parcial em relação ao escalar $x$
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} = \partial_{\mathbf{x}}(\cdot)$	Gradiente ou jacobiano em relação à matriz-coluna $\mathbf{x}$
$\frac{d(\square)}{dt} = (\dot{\square})$	Operador derivada temporal
$\frac{d^{[A]}(\square)}{dt} = (\dot{\square}^{[A]})$	Operador derivada temporal em relação ao referencial $A$ (se aplica apenas a vetores físicos)
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz-coluna cujos elementos são a diagonal de uma matriz quadrada
$\wedge$	Operador produto vetorial
$\mathbb{S}(\cdot)$	Matriz de produto vetorial entre matrizes-colunas de ordem 3, ou seja, $[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}]_A = \mathbb{S}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbb{S}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$ , sendo $\mathbf{a} = [\mathbf{a}]_A$ e $\mathbf{b} = [\mathbf{b}]_A$
$\emptyset$	Matriz-coluna nula ou matriz nula
$\mathbb{1}$	Matriz identidade
$\mathbf{0}$	Vetor nulo
$\mathbf{1}$	Operador linear identidade
$\otimes$	Operador produto de quaternions
$[\cdot]^T$	Matriz transposta
$[\cdot]^{-1}$	Matriz inversa
$[\cdot]^\dagger$	Matriz pseudo-inversa
$ \cdot $	Módulo aplicado em cada componente de uma matriz ou matriz-coluna

# SUMÁRIO

<b>Parte I: INTRODUÇÃO</b>	<b>22</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>23</b>
1.1 Objetivos . . . . .	24
1.2 Sobre a organização do texto . . . . .	25
<b>2 Revisão da literatura</b>	<b>26</b>
2.1 Modelagem dinâmica . . . . .	26
2.1.1 Formalismo de Newton-Euler . . . . .	29
2.1.2 Formalismo de Lagrange . . . . .	30
2.1.3 Princípio dos Trabalhos Virtuais e das Potências Virtuais . . . . .	31
2.1.4 Método de Kane . . . . .	32
2.1.5 Formalismo de Boltzmann-Hamel . . . . .	33
2.1.6 Formulação do Complemento Ortogonal Natural . . . . .	33
2.2 Controle . . . . .	34
2.2.1 Controle Proporcional-Integral-Derivativo (PID) . . . . .	34
2.2.2 Controle por Torque Computado (TC) . . . . .	35
2.2.3 Controle por Torque Computado com pré-alimentação (TCp) . . . . .	35
2.2.4 Controle por Torque Computado Estendido (TCe) . . . . .	36
2.2.5 Controle Preditivo Baseado em Modelo (PM) . . . . .	37
2.2.6 Controle Adaptativo . . . . .	38
2.2.7 Controle por Modos Deslizantes (MD) . . . . .	39
2.3 Conclusões . . . . .	40
<b>3 Metodologia da Pesquisa</b>	<b>42</b>

3.1	Primeira fase . . . . .	42
3.2	Segunda fase . . . . .	42
3.3	Terceira fase . . . . .	42
3.4	Quarta fase . . . . .	43
3.5	Quinta fase . . . . .	43
3.6	Sexta fase . . . . .	43
	<b>Parte II: MODELAGEM</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>Modelagem de manipuladores seriais</b>	<b>46</b>
4.1	Cinemática . . . . .	48
4.1.1	Cinemática de posição . . . . .	48
4.1.2	Cinemática de velocidades angulares . . . . .	51
4.1.3	Cinemática de velocidades lineares . . . . .	53
4.1.4	Cinemática de acelerações angulares . . . . .	56
4.1.5	Cinemática de acelerações lineares . . . . .	58
4.2	Dinâmica dos elos e juntas . . . . .	60
4.2.1	Modelo dos subsistemas . . . . .	61
4.2.2	Sistemas de esforços ativos generalizados . . . . .	62
4.2.3	Vínculos cinemáticos entre subsistemas . . . . .	62
4.2.4	Acoplamento de subsistemas . . . . .	63
4.3	Dinâmica dos atuadores . . . . .	65
4.3.1	Cinemática . . . . .	66
4.3.1.1	Cinemática de velocidades angulares . . . . .	66
4.3.1.2	Cinemática de acelerações angulares . . . . .	68
4.3.2	Dinâmica Mecânica . . . . .	69
4.3.2.1	Modelo dos subsistemas rotores . . . . .	70
4.3.2.2	Modelo do subsistema serial . . . . .	71

4.3.2.3	Sistemas de forças ativas generalizadas . . . . .	71
4.3.2.4	Vínculos entre subsistemas . . . . .	72
4.3.2.5	Acoplamento de subsistemas . . . . .	72
4.4	Modelo completo . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Modelagem de manipuladores paralelos</b>	<b>75</b>
5.1	Modelo dos subsistemas . . . . .	77
5.2	Vínculos cinemáticos entre subsistemas . . . . .	78
5.2.1	Vínculos de posição . . . . .	78
5.2.2	Vínculos de orientação . . . . .	80
5.2.3	Vínculos de coordenadas generalizadas . . . . .	83
5.2.4	Derivada temporal dos vínculos de posição . . . . .	83
5.2.5	Derivada temporal dos vínculos de orientação . . . . .	84
5.2.6	Vínculos de quasi-velocidades . . . . .	85
5.2.7	Vínculos de quasi-acelerações . . . . .	85
5.3	Acoplamento de subsistemas . . . . .	86
5.4	Simulação dinâmica direta . . . . .	88
5.5	Simulação dinâmica inversa . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Projeto dos controladores</b>	<b>92</b>
6.1	Linearização por Realimentação (LR) . . . . .	92
6.2	Controle por Torque Computado (TC) . . . . .	93
6.3	Controle por Modos Deslizantes (MD) . . . . .	94
6.3.1	Dedução das leis de controle . . . . .	94
6.3.2	Camada Limite . . . . .	101
6.3.3	Ganho adaptativo . . . . .	101

<b>7 Resultados e Discussão</b>	<b>104</b>
<b>7.1 Modelagem e Simulação . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>7.1.1 Modelo do efetuador . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>7.1.2 Parâmetros de Denavit-Hartemberg das cadeias seriais . . . . .</b>	<b>105</b>
<b>7.1.3 Arquitetura do mecanismo paralelo . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>7.1.4 Coordenadas dependentes e independentes . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>7.1.5 Simulação dinâmica direta . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>7.1.5.1 Parâmetros do modelo . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>7.1.5.2 Espaço de trabalho . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>7.1.5.3 Condições iniciais . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>7.1.5.4 Trajetória de referência . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>7.1.5.5 Parâmetros do controlador . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>7.1.5.6 Simulações . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>7.2 Ensaios Experimentais . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>7.2.1 Bancada experimental . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>7.2.2 Sistema de controle . . . . .</b>	<b>114</b>
<b>7.2.3 Derivadores numéricos . . . . .</b>	<b>115</b>
<b>7.2.4 Observador de corrente . . . . .</b>	<b>116</b>
<b>7.2.5 Compensadores de não-linearidades . . . . .</b>	<b>116</b>
<b>7.2.6 Estratégias de controle . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>7.2.7 Parâmetros do sistema . . . . .</b>	<b>118</b>
<b>7.2.8 Trajetórias de referência . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>7.2.9 Condições iniciais . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>7.2.10 Parâmetros dos controladores . . . . .</b>	<b>120</b>
<b>7.2.11 Resultados experimentais . . . . .</b>	<b>121</b>
<b>7.2.11.1 PDq - Trajetória circular . . . . .</b>	<b>122</b>

7.2.11.2	PDMDq - Trajetória circular . . . . .	123
7.2.11.3	TCq - Trajetória circular . . . . .	124
7.2.11.4	TCMDq - Trajetória circular . . . . .	125
7.2.11.5	PDx - Trajetória circular . . . . .	126
7.2.11.6	PDMDx - Trajetória circular . . . . .	127
7.2.11.7	TCx - Trajetória circular . . . . .	128
7.2.11.8	TCMDx - Trajetória circular . . . . .	129
7.2.11.9	PDq - Trajetória triangular . . . . .	130
7.2.11.10	PDMDq - Trajetória triangular . . . . .	131
7.2.11.11	TCq - Trajetória triangular . . . . .	132
7.2.11.12	TCMDq - Trajetória triangular . . . . .	133
7.2.11.13	PDx - Trajetória triangular . . . . .	134
7.2.11.14	PDMDx - Trajetória triangular . . . . .	135
7.2.11.15	TCx - Trajetória triangular . . . . .	136
7.2.11.16	TCMDx - Trajetória triangular . . . . .	137
7.2.11.17	Tabelas comparativas . . . . .	138
7.2.12	Discussão dos resultados . . . . .	140
<b>8</b>	<b>Conclusões e temas para pesquisa futura</b>	<b>144</b>
8.1	Conclusões . . . . .	144
8.2	Principais contribuições . . . . .	145
8.3	Sugestão de temas para pesquisa futura . . . . .	147
<b>Referências</b>		<b>148</b>
<b>Apêndice A – Cinemática de corpos rígidos</b>		<b>156</b>
A.1	Conceitos básicos . . . . .	156
A.1.1	Produto vetorial . . . . .	156

A.1.2	Derivada temporal de versores . . . . .	157
A.1.3	Derivada temporal de vetores . . . . .	157
A.1.4	Derivada temporal de matrizes de rotação . . . . .	158
A.1.5	Definição de vetor velocidade . . . . .	158
A.1.6	Definição de vetor aceleração . . . . .	159
A.1.7	Definição de vetor aceleração angular . . . . .	159
A.2	Equações de campos de velocidades e acelerações . . . . .	159
A.2.1	Equação do campo de velocidades . . . . .	159
A.2.2	Equação do campo de acelerações . . . . .	159
A.3	Composição de movimentos . . . . .	160
A.3.1	Composição de velocidades lineares . . . . .	160
A.3.2	Composição de acelerações lineares . . . . .	161
A.3.3	Composição de velocidades angulares . . . . .	161
A.3.4	Composição de acelerações angulares . . . . .	163
<b>Apêndice B – Cinemática de Orientação via Quaternions</b>		<b>164</b>
B.1	Motivação . . . . .	164
B.2	Definições, propriedades e fórmulas de conversão . . . . .	165
B.2.1	Quaternion unitário . . . . .	165
B.2.2	Produto de quaternions . . . . .	165
B.2.3	Quaternion inverso/conjugado . . . . .	166
B.2.4	Rotações elementares . . . . .	166
B.2.5	Conversão Matriz de Rotação → Quaternion . . . . .	166
B.2.6	Conversão Quaternion → Matriz de Rotação . . . . .	168
B.2.7	Conversão Derivada de Quaternion ↔ Velocidade Angular . . . . .	168
<b>Apêndice C – Funções de transferência de motores DC</b>		<b>169</b>
C.1	Funções de transferência de corrente . . . . .	170

C.2	Funções de transferência de velocidade . . . . .	171
C.3	Funções de transferência de posição . . . . .	171
<b>Apêndice D – Controlador de Corrente</b>		<b>172</b>
<b>Apêndice E – Curvas e identificação dos parâmetros dos motores</b>		<b>175</b>

# PARTE I

## INTRODUÇÃO

# 1 INTRODUÇÃO

*“A única forma de chegar ao impossível é acreditar que é possível”*

-- Lewis Carroll

Os mecanismos de arquitetura paralela são amplamente utilizados em simuladores de voo, simuladores automobilisticos, e tarefas de *pick-and-place*. Além disso, também são empregados em sistemas de posicionamento, sistemas de medição, máquinas de usinagem, entre outras tarefas.

Este tipo de arquitetura há mais de duas décadas já atrai pesquisadores e instituições com o intuito de investigar seu grande potencial em vários quesitos, como capacidade de carga, precisão de posicionamento, rigidez estrutural, consumo energético, baixa inércia, e de atingir altas velocidades e acelerações [22, 49, 62, 70, 99]. Grande parte deste potencial se deve à possibilidade de instalação de todos os motores na base imóvel do mecanismo, o que diminui significativamente sua a inércia.

Atualmente, este grande potencial já consegue ser muito bem explorado em tarefas de *pick-and-place* [18] e usinagem [70], entre outras. Porém, essas características promissoras muitas vezes vem ao custo de algumas inconveniências associadas a este tipo de arquitetura, como o grande número de componentes mecânicos, um espaço de trabalho mais limitado, e um modelo dinâmico muito mais complexo e de difícil obtenção [6, 62]. Boa parte destas desvantagens, porém, podem ser contornadas através da escolha cuidadosa das juntas utilizadas, dos parâmetros cinemáticos, da topologia e do design mecânico [12, 15, 46, 110], como é feito no robô Adept Quattro (figura1).



Figura 1: Robô industrial Adept Quattro - Retirada de PhysOrg.com

Levando-se em conta esta dificuldade de obtenção e a complexidade inerente do mo-

do dinâmico, o controle de mecanismos de arquitetura paralela é uma tarefa desafiadora. A utilização de estratégias de controle não baseadas em modelo pode deixar muito a desejar na exploração do potencial que estes mecanismos oferecem, principalmente em tarefas de seguimento de trajetória [23], e a utilização de modelos dinâmicos simplificados pode limitar significativamente o desempenho do projeto de controladores baseados em modelo, principalmente quando se trabalha com altas velocidades e acelerações. Além disso, mesmo na hipótese do modelo dinâmico completo estar disponível, o emprego de técnicas de controle não linear pode acarretar um custo computacional muito elevado [28, 84, 115, 117]. Este paradigma, aliado à escassez de trabalhos publicados com comprovação experimental de técnicas de controle aplicáveis a mecanismos paralelos [6], resulta na exploração insatisfatória dos potenciais promissores de tais máquinas, como resposta dinâmica rápida e alta precisão [2].

Com o intuito de atacar os problemas da dificuldade de obter modelos dinâmicos completos e diminuir o custo computacional de suas implementações em leis de controle baseadas em modelos, esta tese propõe um algoritmo genérico de modelagem dinâmica de mecanismos paralelos translacionais, o qual pode ser utilizado para calcular previamente termos do modelo dinâmico em um número finito de pontos do espaço de trabalho, sendo necessário apenas o cálculo de interpolações em tempo real. Além disso, em virtude de existirem poucos trabalhos publicados apresentando comprovação experimental de técnicas de controle aplicáveis a mecanismos paralelos, nesta tese, são obtidos e apresentados resultados experimentais da implementação de 8 diferentes estratégias de controle, tanto baseadas como não baseadas em modelo, incluindo estratégias de controle não linear robusto. Desta maneira, o trabalho desenvolvido nesta tese visa contribuir para uma melhor exploração do grandes potenciais dos mecanismos com este tipo de arquitetura.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral desta Tese é contribuir para o aumento do desempenho de manipuladores paralelos. Quanto aos objetivos específicos, propõe-se que este aprimoramento seja realizado mediante o emprego de técnicas de controle baseadas em modelo do manipulador. Neste sentido, almeja-se fornecer recomendações quanto à modelagem dinâmica, à técnica de controle mais adequada, bem como a sua implementação.

## 1.2 Sobre a organização do texto

O capítulo 2 apresenta a revisão da Literatura sobre o assunto, sendo que a metodologia da pesquisa é descrita no capítulo 3. A seguir, os capítulos 4 e 5 abordam a modelagem dinâmica de manipuladores seriais e paralelos, respectivamente. Com relação ao projeto dos controladores, este assunto é elaborado no capítulo 6. No capítulo 7 são apresentados os resultados mais relevantes desta Tese, além da pertinente discussão. Por fim, no capítulo 8, apresentam-se as principais conclusões da Tese e os temas sugeridos para pesquisa futura.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Considerando o tema de pesquisa desta Tese, esta revisão se concentrará em tópicos relacionados à modelagem dinâmica e ao controle.

### 2.1 Modelagem dinâmica

Quando se trata de modelagem dinâmica, os mecanismos seriais possuem características topológicas e cinemáticas que podem ser exploradas para facilitar a geração dos modelos cinemáticos e dinâmicos. Suas estruturas mecânicas correspondem a mecanismos de cadeia aberta, apenas com juntas ativas de um grau de liberdade, rotativas ou prismáticas. Além disso, o número de coordenadas generalizadas coincide com o número de atuadores e com a mobilidade do mecanismo [28].

De fato, o modelo cinemático pode ser obtido, recursivamente ao longo da cadeia cinemática, pelo emprego de métodos vetoriais ou matriciais, partindo-se da base e se dirigindo ao efetuador [80]. Tradicionalmente, empregam-se os vetores  $q$  e  $\dot{q}$  para descrever as coordenadas associadas aos atuadores e ao efetuador, respectivamente [13, 17]. Enquanto que o problema direto é de resolução relativamente simples, o problema inverso demanda a realização de um processo mais elaborado. Matematicamente, este corresponde à resolução de um sistema não-linear de equações algébricas. Para algumas topologias que utilizam mecanismos esféricos nos punhos, é possível alcançar o desacoplamento das equações de posição e orientação do efetuador [103].

Com relação à dinâmica, a geração das equações também pode ser realizada de modo recursivo, partindo-se do efetuador e se dirigindo à base, sendo que a solução do problema inverso é obtida mediante a resolução de um sistema linear de equações algébricas. Por outro lado, a solução do problema dinâmico direto é alcançada pela integração de um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) [36].

Já quando se trata de mecanismos paralelos, dependendo da complexidade da estru-

tura, podem existir juntas de 1, 2 ou até 3 graus de liberdade, ativas ou passivas. Além disso, o número de elos geralmente é muito superior. Ao se elaborar o modelo cinemático, é possível notar que haverá um grande número de variáveis, dentre as quais algumas serão consideradas independentes e outras, dependentes [63].

No início do processo de modelagem, é comum se realizar um corte nas juntas que conectam o efetuador às cadeias cinemáticas. Deste modo, ocorrerá a decomposição do mecanismo original de cadeia fechada no elo do efetuador e nas demais cadeias. Assim, admite-se que estas cadeias possam ser tratadas como abertas. Consequentemente, as equações cinemáticas, geradas em cada cadeia, expressarão o acoplamento entre as variáveis dependentes e independentes do mecanismo. Além disso, para os manipuladores paralelos, a literatura destaca que o problema inverso da cinemática de posição é menos complexo que o direto [63].

Saha e Schielen [76] mencionam que a dinâmica inversa, uma vez definida a trajetória do efetuador, determina os esforços dos atuadores necessários para o controle, enquanto que a direta é utilizada em simulações do manipulador com o controlador.

Com relação à dinâmica, Pekal e Fraczek [72] esclarecem que a solução do problema direto pode ser obtida mediante a resolução de um sistema de equações algébrico-diferenciais (EADs), representado por pelo sistema de equações (2.1).

$$\begin{cases} M\ddot{q} + A^T \lambda = n \\ \bar{q}(t, q) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Sendo

$$A(t, q) = \frac{\partial \bar{q}}{\partial q} \quad (2.2)$$

Uma alternativa é resolver o sistema representado pela equação (2.3),

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}}_{Y} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ -b \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo

$$b = \frac{\partial(Aq)}{\partial q} \dot{q} + 2 \frac{\partial A}{\partial t} \dot{q} + \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

cuja solução é equivalente à solução de (2.1) desde que as condições iniciais respeitem

as equações vinculares  $\bar{q}(t, \dot{q}) = 0$ .

Para melhorar a precisão associada às restrições de posição e velocidade, recomenda-se substituir  $b$  por  $b'$ , expresso na equação (2.5), que é conhecido como método de Baumgarte para a estabilização das restrições [8, 36, 65], sendo  $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 1/t_c$ , com  $0.01 \lesssim t_c \lesssim 0.1$  [36].

$$b' = b + 2\hat{\alpha}\dot{q} + \hat{\beta}^2\ddot{q} \quad (2.5)$$

Um outro modo de aprimorar a precisão é alcançado pela separação das coordenadas  $q$  em dois grupos: independentes  $q^\#$  e dependentes  $q^\circ$ . Assim, multiplica-se a primeira equação de (2.1) pelo complemento ortogonal [52] de  $A^T$ . Pekal e Fraczek [71] discutem várias alternativas de obtenção do complemento ortogonal, dentre elas, destacam-se a decomposição QR, a decomposição em matrizes de autovalores e autovetores e a decomposição em valores singulares (DVS). Com esta ação, eliminam-se os multiplicadores de Lagrange e o número de equações se reduz à mobilidade do mecanismo. Em seguida, utiliza-se de relações cinemáticas para escrever as acelerações  $\ddot{q}$  em função de  $\dot{q}^\#$ . Por consequência, somente as acelerações e velocidades independentes serão integradas no sistema de equações diferenciais. Além disso, em cada passo de integração, as variáveis dependentes  $q^\circ$  e  $\dot{q}^\circ$  serão calculadas a partir das independentes, estabilizando as restrições de posição e velocidade.

Segundo Mariti *et al.* [61], expressar o modelo dinâmico por meio de coordenadas redundantes, independentemente do formalismo escolhido, possui como propósito a realização de simulações de sistemas multicorpos, sendo que um exemplo é o software comercial MSC-Adams. No entanto, se a finalidade for o controle de manipuladores, significando que o modelo é parte integrante de implementações que demandem cálculos em tempo real, a expressão das equações dinâmicas nas coordenadas independentes é necessária.

Além disso, é largamente difundido que a escolha das variáveis cinemáticas independentes recaia sobre as componentes do vetor  $q^*$ , associadas aos deslocamentos impostos pelos atuadores, e suas derivadas temporais. No entanto, alguns autores [50, 57] mencionam as vantagens de se escolher as componentes do vetor  $x$ , afirmando que a expressão do modelo dinâmico nestas variáveis é menos complexa.

Na literatura, são conhecidas várias formulações para realizar a modelagem dinâmica de sistemas multicorpos, como os formalismos de Newton-Euler, Lagrange, Gibbs-Appel, Maggi, Boltzmann-Hamel, os métodos de Kane e Udwadia-Kalaba, e os Princípios dos Trabalhos Virtuais e Potências Virtuais [69]. Porém, na literatura de modelagem de mecanismos paralelos, podemos destacar as seguintes formulações como as mais comumente

utilizadas:

- Formalismo de Newton-Euler
- Formalismo de Lagrange
- Princípio dos Trabalhos Virtuais e das Potências Virtuais
- Formalismo de Boltzmann-Hamel
- Método de Kane
- Formulação do Complemento Ortogonal Natural

### 2.1.1 Formalismo de Newton-Euler

A utilização do formalismo de Newton-Euler é bastante popular para a realização de simulações dinâmicas de mecanismos seriais, tendo em vista que foram desenvolvidos algoritmos recursivos super eficientes para a aplicação deste formalismo neste tipo de arquitetura, como pode ser visto em Featherstone *et al.* [36]. Porém, para se beneficiar deste tipo de estratégia em mecanismos paralelos, é necessária a utilização de algoritmos de fechamento de malha, os quais aumentam consideravelmente o custo computacional das simulações. Provavelmente por esta razão, aliada à questão da complexidade de implementação dos algoritmos, não foram encontrados na literatura artigos aplicando esta estratégia na modelagem de mecanismos paralelos.

Apesar da desvantagem de ter que trabalhar com forças reativas no equacionamento, não é raro encontrar na literatura trabalhos que o utilizem. Dentre estes, podemos citar os trabalhos de Arian *et al.* [4], Dasgupta *et al.* [29], Li *et al.* [55], Shiau *et al.* [78] e Zhang *et al.* [111].

Em [4], [55] e [29], são feitas a simulações dinâmicas inversas de mecanismos paralelos, de 3 graus de liberdade, nos dois primeiros trabalhos, e de 6 graus de liberdade, no último, utilizando o formalismo de Newton-Euler. Em [4] e [55] as simulações são comparadas com *softwares* comerciais. Em [4], também é feita a modelagem utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, e são comparados o número de operações e o tempo médio gasto por operação em cada formulação. Como era de se esperar, a formulação do Princípio dos Trabalhos Virtuais se mostrou muito mais eficiente em ambos os quesitos, tendo em vista que não são realizados os cálculos dos esforços reativos. Em [29] foi feita uma eliminação

de boa parte dos esforços vinculares utilizando manipulações algébricas, o que possibilitou reduzir bastante o custo computacional da simulação.

Em [78] e [111], os mecanismos paralelos 3-PRS e 3-RRR, respectivamente, são modelados também utilizando o formalismo de Newton-Euler. Em ambos os trabalhos é considerado o efeito de folgas, e em [78] também o de atritos. A partir dos modelos obtidos, em ambos são feitas simulações dinâmicas diretas. Em [111] é utilizado o método de estabilização de Baumgarte [8] para estabilizar a integração numérica. Em [78], além das simulações, é feita a linearização do modelo dinâmico para determinar as frequências naturais do mecanismo em função da posição do efetuador.

### 2.1.2 Formalismo de Lagrange

Formulações baseadas na mecânica analítica em geral são muito mais atrativas para realizar a modelagem de mecanismos paralelos, tendo em vista que os esforços vinculares não mais aparecem no equacionamento. Isso justifica a popularidade das escolhas pelo formalismo de Lagrange e pelos Princípios dos Trabalhos Virtuais e das Potências Virtuais para realizar esta tarefa.

Dentre os trabalhos que utilizam o formalismo de Lagrange, podemos citar os trabalhos de Li *et al.* [58], Singh *et al.* [81–83] e Yao *et al.* [107].

Em [81], [82] e [83], são modelados 3 mecanismos paralelos planos de 3 graus de liberdade utilizando o formalismo de Lagrange. Em todos, são realizadas simulações dinâmicas diretas comparando o desempenho de diversas leis de controle. Apenas em [82] é realizada uma dedução completa do modelo dinâmico mostrando a expressão deduzida do modelo. Curiosamente, são adotadas as coordenadas do efetuador como coordenadas generalizadas, e a dedução se mostra relativamente simples para essa arquitetura escolhida, com essa escolha de variáveis.

Já em [58], um mecanismo paralelo espacial de 3 graus de liberdade é modelado, utilizando o formalismo de Lagrange com multiplicadores e o Princípio dos Trabalhos Virtuais, sendo que no último são utilizadas hipóteses simplificadoras. São realizadas simulações dinâmicas inversas e são comparados os resultados utilizando o modelo completo com os resultados utilizando o modelo simplificado.

Em [107], é feita a simulação dinâmica inversa de um mecanismo ainda mais complexo, de 5 graus de liberdade com atuação redundante, também utilizando o formalismo de Lagrange e métodos de otimização para determinar os esforços. Este trabalho, porém,

também mostra muito pouco da dedução. Assim, dados a complexidade do mecanismo e o fato de que não é comentado em lugar nenhum o uso de coordenadas redundantes, imagina-se que o modelo utilizado seja um modelo simplificado.

Além disso, foram encontrados trabalhos que utilizam o Princípio dos Trabalhos Virtuais aliado ao formalismo de Lagrange, os quais entitulam essa combinação de “formulação de Lagrange-D’Alembert”, dentre os quais podemos citar o de Cheng *et al.* [21] e Yen *et al.* [108].

No trabalho de Cheng *et al.* [21] a “formulação de Lagrange-D’Alembert” é utilizada para deduzir uma formulação de acoplamento de subsistemas. A formulação é utilizada para obter o modelo dinâmico de um mecanismo paralelo de 2 graus de liberdade com atuação redundante. São utilizados os modelos já conhecidos para as cadeias seriais, e é feito o acoplamento dos subsistemas a partir de jacobianos dos vínculos cinemáticos.

Em [108], também é utilizada uma estratégia de acoplamento de subsistemas, também deduzida deduzida a partir da “formulação de Lagrange-D’Alembert”, para obter o modelo dinâmico de um mecanismo paralelo de 3 graus de liberdade. No entanto, neste trabalho, a estratégia não é apresentada de uma maneira mais geral, podendo dar a impressão ao leitor de que isso só foi possível devido à topologia particular do mecanismo em questão. São realizadas simulações dinâmicas diretas do controle de posição do mecanismo, utilizando as técnicas de controle PID e Controle por Torque Computado, as quais são comparadas com resultados experimentais utilizando as mesmas estratégias de controle.

### 2.1.3 Princípio dos Trabalhos Virtuais e das Potências Virtuais

Levando-se em conta a revisão feita, não foi percebida uma grande diferença de popularidade entre a utilização dos formalismos de Newton-Euler e Lagrange nos artigos que tratam da modelagem dinâmica de mecanismos paralelos. Porém, uma abordagem que se mostrou extremamente popular foi a utilização das formulações do Princípio dos Trabalhos Virtuais ou do Princípio das Potências Virtuais. Dentre os trabalhos que utilizam estes princípios, podemos citar os trabalhos de Arian *et al.* [4] (já comentado), Codourey *et al.* [24, 25], Gallardo-Alvarado *et al.* [39], Geike *et al.* [40], Li *et al.* [54, 57], Staicu *et al.* [89–95], Wu et. al [105], Zhao *et al.* [112, 113] e Zhu *et al.* [114].

No trabalhos de Codourey *et al.* [24, 25] e no de Li *et al.* [57], são modelados mecanismos paralelos de 3 graus de liberdade, do tipo DELTA nos dois primeiros, e do tipo 3-PRS no terceiro, utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais. São desprezadas as inéncias

distribuídas dos elos ligados à plataforma, e suas massas são distribuídas entre as duas pontas em que cada elo é ligado, de modo a simplificar o processo de modelagem.

Já em [39], é modelado um robô paralelo de 4 graus de liberdade utilizando a teoria das helicóides e o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Em [40], é proposta uma metodologia de modelagem interessante, na qual já se dividem as coordenadas generalizadas em um conjunto de variáveis dependentes e outro de variáveis independentes, utilizando a relação entre seus deslocamentos virtuais para obter as equações de movimento. A metodologia é utilizada para realizar a simulação dinâmica inversa de dois mecanismos paralelos, um de 3 graus de liberdade e outro de 6. Além disso, é discutida qual é a forma mais eficiente de implementação da metodologia desenvolvida.

Nos trabalhos de Staicu *et al.* [89–95] e no de Li *et al.* [54] são modelados mecanismos paralelos de 3 graus de liberdade utilizando uma metodologia de modelagem recursiva matricial baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais ou no Princípio das Potências Virtuais, e são realizadas simulações dinâmicas inversas. Esses trabalhos apresentam longos equacionamentos para não precisar recorrer a simplificações; porém, em todos os trabalhos, perto do final da dedução do modelo dinâmico, cita-se que será usada a *equação fundamental da dinâmica de robôs paralelos*, a qual está publicada em [88]. Este artigo, porém, está escrito em francês e é muito difícil de ser encontrado.

Por fim, nos trabalhos de Zhao *et al.* [112, 113] e de Zhu *et al.* [114], são modelados, utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais e o conceito de jacobianos dos elos, mecanismos paralelos de 6 graus de liberdade nos dois primeiros, e de 3 graus de liberdade no terceiro, sendo que em [113] o mecanismo possui atuação redundante. Em todos são realizadas simulações dinâmicas inversas.

#### 2.1.4 Método de Kane

Uma formulação que é bastante popular na literatura de mecanismos seriais, porém não muito popular na literatura de mecanismos paralelos, é o Método de Kane [48]. Dentre os poucos trabalhos que utilizam esta formulação para realizar a modelagem dinâmica de mecanismos paralelos, podemos citar os trabalhos de Ben-Horina *et al.* [10] e Shukla *et al.* [79].

Em [10], é realizada a modelagem dinâmica, utilizando o método de Kane, de um robô paralelo de 6 graus de liberdade, cuja atuação é feita por 3 atuadores planos, os quais

apresentam 2 graus de liberdade cada. A modelagem é feita com o auxílio do *software* AUTOLEV. São realizadas simulações dinâmicas inversas do mecanismo proposto, e de mais dois mecanismos de 6 graus de liberdade, para efeito de comparação.

Em [79], também é realizada a modelagem dinâmica de um mecanismo paralelo de 6 graus de liberdade, uma plataforma de Gough–Stewart, utilizando o método de Kane. São realizadas simulações dinâmicas diretas do controle do mecanismo, considerando a dinâmica dos atuadores, utilizando malhas de controle do tipo PID em cascata e compensadores de atraso.

### 2.1.5 Formalismo de Boltzmann-Hamel

O Formalismo de Boltzmann-Hamel [45] também não se mostrou muito popular na literatura de modelagem dinâmica de mecanismos paralelos. Dentre os trabalhos encontrados, podemos citar os trabalhos de Abdellatif *et al.* [1] e o de Altuzarra *et al.* [7].

Tanto em [1] quanto em [7], são utilizadas as equações de Boltzmann-Hamel para a deduzir formulações que permitem a obtenção do modelo dinâmico explícito de mecanismos paralelos através dos modelos das cadeias seriais, do efetuador, e jacobianos dos vínculos cinemáticos. Em [7], é utilizada a formulação proposta para obter o modelo dinâmico do mecanismo 3-PRS. Em [1] são apresentadas simulações dinâmicas inversa e direta, sendo esta última com leis de controle baseadas no modelo, de um mecanismo paralelo de 6 graus de liberdade.

### 2.1.6 Formulação do Complemento Ortogonal Natural

A formulação do Complemento Ortogonal Natural foi proposta por Angeles *et al.* em [3]. Sua principal idéia é projetar as equações dinâmicas de cada corpo rígido do sistema em um espaço ortogonal às reações vinculares. Este procedimento é realizado através da obtenção de um complemento ortogonal ao jacobiano das equações de vínculo obtido através de relações cinemáticas dos *twists* de cada corpo com um conjunto de quasi-velocidades independentes. Formulações similares são bastante exploradas por Orsino *et al.* em [68], e generalizadas em [69]. Dentre os trabalhos que utilizam esta formulação, podemos citar os trabalhos de Akbarzadeh *et al.* [5], Khan *et al.* [51] e Xi *et al.* [106].

Em [5], é descrita uma metodologia genérica de modelagem dinâmica multi-corpos utilizando a formulação do Complemento Ortogonal Natural. Basicamente são obtidos os modelos dinâmicos desacoplados de cada corpo rígido, utilizando a formulação de Newton-

Euler, e é feito o acomplamento das equações dinâmicas através do uso do Complemento Ortogonal Natural. A metodologia proposta é aplicada em um mecanismo paralelo esférico do tipo SST e são realizadas simulações dinâmicas inversa e direta do mecanismo.

Em [106], é realizada a modelagem dinâmica de um mecanismo paralelos de 6 graus de liberdade, do tipo hexapod, utilizando a formulação do Complemento Ortogonal Natural. São realizadas simulações dinâmicas inversas do mecanismos em altas e baixas velocidades.

Por fim, em [51], é proposta uma metodologia recursiva de modelagem baseada na formulação do Complemento Ortogonal Natural. A metodologia proposta é utilizada para a obtenção do modelo dinâmico de um mecanismo paralelo plano do tipo 3-RRR, realizando primeiro a modelagem dinâmica das cadeias seriais, e acoplando-as utilizando o Complemento Ortogonal Natural. Também é realizada a simulação dinâmica inversa do mecanismo, utilizando o modelo obtido.

## 2.2 Controle

Existem diversas técnicas propostas pela literatura para realizar o controle de mecanismos paralelos. Dentre elas, podemos destacar:

- Controle Proporcional-Integral-Derivativo (PID)
- Controle por Torque Computado (TC)
- Controle por Torque Computado com pré-alimentação (TCp)
- Controle por Torque Computado Estendido (TCe)
- Controle Preditivo Baseado em Modelo (PM)
- Controle Adaptativo
- Controle por Modos Deslizantes (MD)

### 2.2.1 Controle Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

A técnica mais simples consiste na utilização de malhas do tipo PID, controlando cada junta ativa de maneira independente, considerando a dinâmica do mecanismo como distúrbios de controle. Essa técnica é caracterizada por sua facilidade de projeto e implementação, tanto em hardware quanto em software, além de exibir um desempenho

satisfatório para movimento lento. Porém, essa técnica não se mostra adequada para a realização de trajetórias em altas velocidades e/ou acelerações [42, 115]. Uma malha típica de PID pode ser vista na figura 2.

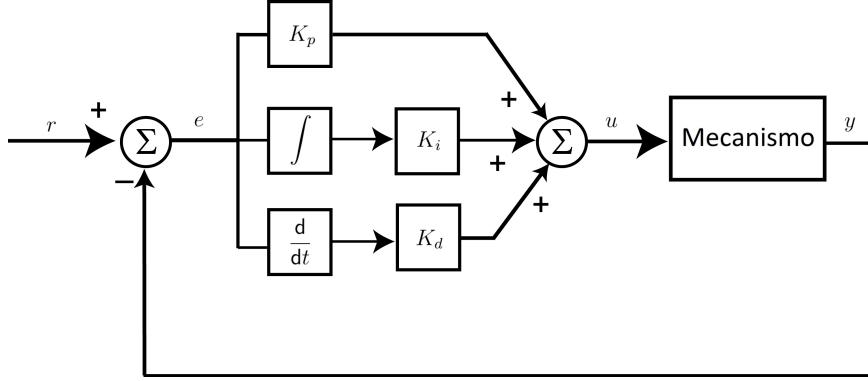


Figura 2: Malha de Controle Proporcional-Integral-Derivativo

### 2.2.2 Controle por Torque Computado (TC)

Uma das técnicas de controle mais exploradas na literatura é o Controle por Torque Computado (TC). Basicamente, é um caso particular da técnica de controle não linear conhecida como Linearização pela Realimentação [84], aplicada a sistemas mecânicos. A técnica consiste na utilização de duas malhas de controle, uma malha que realiza o desacoplamento do sistema e a compensação das não linearidades, e outra malha composta por PIDs independentes [28], como pode ser visto na figura 3. Como resultado, alcança-se um desempenho superior àquele obtido utilizando simples PIDs, permitindo inclusive a realização de trajetórias precisas em altas velocidades e/ou acelerações. No entanto, seu desempenho poderá ser limitado pela qualidade/fidelidade do modelo dinâmico utilizado para a compensação das não linearidades [85]. Sua implementação também é mais complexa, visto que é necessário calcular o modelo dinâmico inverso em tempo real, o que também aumenta consideravelmente seu custo computacional. Além disso, a técnica é sensível a incertezas estruturadas (paramétricas) e não estruturadas (dinâmicas não modeladas). Como exemplos de utilização do TC, podem ser citados os trabalhos de Cheng et al. [22], Li e Wu [57], Li e Fu [56], Shang et al. [77] e Yen et al. [108].

### 2.2.3 Controle por Torque Computado com pré-alimentação (TCp)

Visando a redução do custo computacional associado ao cálculo do modelo dinâmico em tempo real, alguns autores propõe a utilização do TC com pré-alimentação (TCp) [49, 80, 87]. Essa técnica é similar ao TC, com a diferença de que a compensação das não

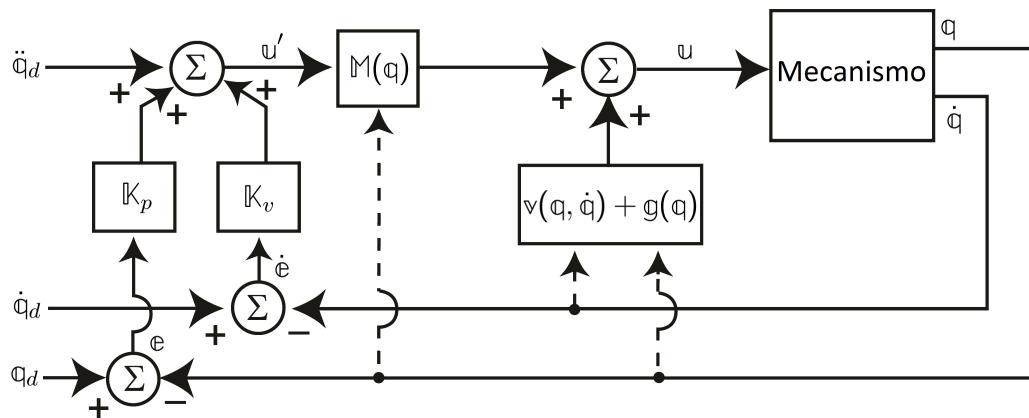


Figura 3: Malha de Controle por Torque Computado (Adaptado de [28])

linearidades é feita por pré-alimentação e não mais por realimentação, como pode ser visto na figura 4. Consequentemente, realiza-se o cálculo do modelo dinâmico previamente, diminuindo-se o custo computacional.

De fato, Codourey [24] obteve uma redução de 600% no erro de posição utilizando o TCp em um ensaio experimental com o robô DELTA, ao substituir os PDs originais. Na simulação do controle de um mecanismo 6-UPS, Wang *et al.* [104] utilizaram em cascata controladores lineares de posição, velocidade e corrente em cada junta ativa, além de uma compensação dinâmica por pré-alimentação dos distúrbios de torque.

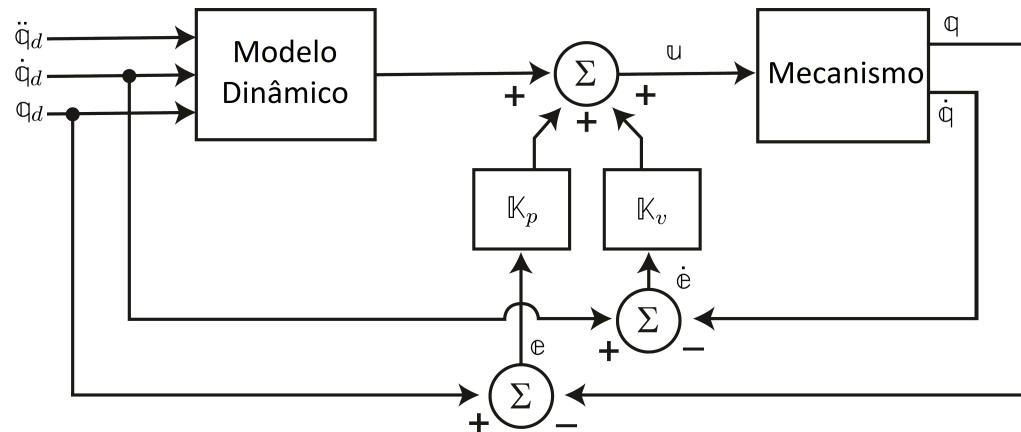


Figura 4: Malha de Controle por Torque Computado com pré-alimentação (Adaptado de [28])

#### 2.2.4 Controle por Torque Computado Estendido (TCe)

Com o intuito de melhorar a robustez do TC associada a incertezas paramétricas, Zubizarreta *et al.* [115–118] propuseram o Controle por Torque Computado Estendido (TCe), que utiliza informação redundante obtida pelo sensoriamento de juntas passivas.

Em [115], os controladores propostos demonstraram maior robustez, principalmente em relação a parâmetros cinemáticos, durante as simulações realizadas com o mecanismo 3-RRR.

### 2.2.5 Controle Preditivo Baseado em Modelo (PM)

Outra técnica alternativa, aplicada a mecanismos paralelos, é o Controle Preditivo Baseado em Modelo (PM). Para a sua implementação, o PM necessita minimizar uma função objetivo, dependente das saídas e do esforço de controle, ambos calculados em tempo futuro [14], como pode ser visto na figura 5. Assim, dependendo do modelo utilizado, o processo de otimização pode agregar um custo computacional que inviabilize o controle, comprometendo a motivação inicial de aprimorar o desempenho do sistema. Como exemplos de utilização do PM, podem ser citados os trabalhos de Vivas *et al.* [102] e Duchaine *et al.* [33].

Com o propósito de controlar o mecanismo H4, Vivas *et al.* [102] utilizaram uma malha de PM linear e outra malha para compensação das não linearidades. Após a comparação do desempenho do controlador proposto com o TC, os autores observaram maior robustez do PM a incertezas paramétricas.

Duchaine *et al.* [33], por sua vez, propuseram um controlador preditivo baseado no modelo não linear de um mecanismo paralelo de 6 graus de liberdade. Visando a obtenção de uma solução analítica para o problema de otimização, foram adotadas diversas hipóteses simplificadoras no modelo dinâmico do mecanismo. Com o intuito de comparar o controlador proposto com um PID, foram feitos alguns experimentos, onde se observou que o PM apresentou erro nulo de posição no final da trajetória, enquanto que o PID demorou um tempo considerável para alcançar erro nulo. Foi verificada a equivalência entre o custo computacional dos 2 controladores.

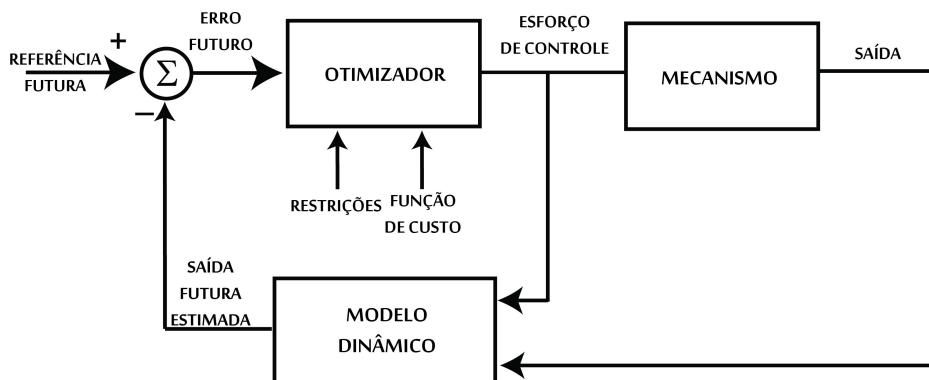


Figura 5: Malha de Controle Preditivo Baseado em Modelo

## 2.2.6 Controle Adaptativo

O controle adaptativo, também encontrado na literatura, caracteriza-se pela utilização de leis de adaptação para realizar a estimativa em tempo real de parâmetros do sistema ou de termos de compensação dinâmica, como pode ser visto na figura 6. Sendo assim, as técnicas de controle adaptativo possibilitam que o sistema se torne praticamente insensível a incertezas paramétricas. Para o caso em que se realiza a estimativa em tempo real dos parâmetros do sistema, pode-se dizer que o custo computacional é superior ao do TC, visto que é necessário integrar as leis de adaptação em tempo real. Além disso, é necessário obter o modelo dinâmico linear em relação aos parâmetros do sistema [86], o que pode ser uma tarefa difícil, inviabilizando, em alguns casos, a aplicação da técnica. Em [25] é proposto um algoritmo de obtenção do modelo dinâmico simplificado de mecanismos paralelos nesse formato.

Em [86] é proposta uma lei de controle que combina o controle adaptativo com a técnica de controle robusto conhecida por Controle por Modos Deslizantes. Chemori *et al.* [19] utilizaram essa técnica com o intuito de diminuir os erros de posição em regime permanente no controle de um mecanismo paralelo do tipo PAR2. Por outro lado, Honegger *et al.* [42] empregaram o controle adaptativo com estimativa em tempo real dos parâmetros do sistemas, realizando a compensação dinâmica por pré-alimentação, em um mecanismo paralelo do tipo Hexaglide.

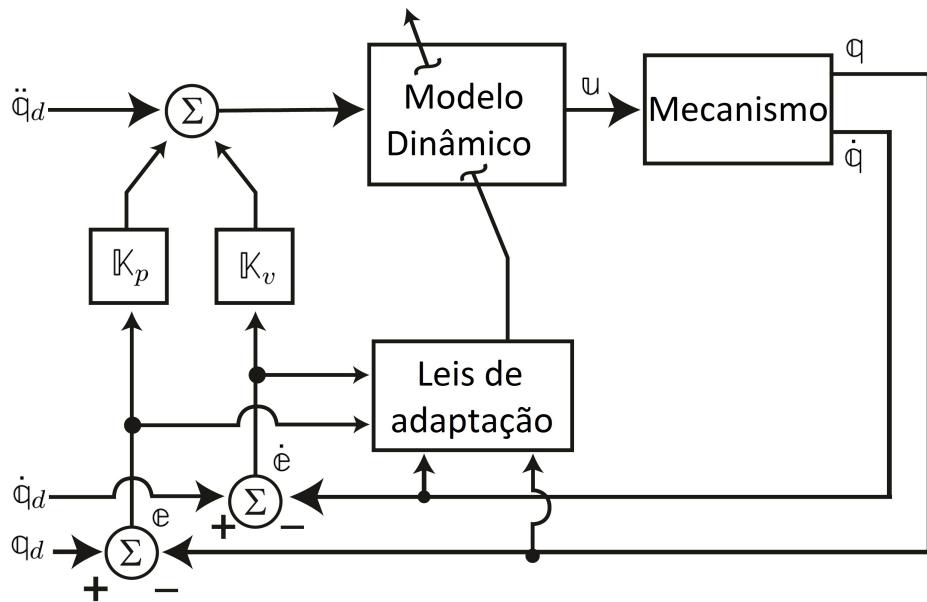


Figura 6: Malha de Controle Adaptativo (Adaptado de [28])

### 2.2.7 Controle por Modos Deslizantes (MD)

Outra técnica promissora para aplicação em mecanismos paralelos é o Controle por Modos Deslizantes (MD). A técnica consiste no projeto de leis de controle que levem o sistema para superfícies de escorregamento no espaço de fase, de modo que assim que o sistema atinja e é mantido nas superfícies de escorregamento, o erro de controle decaia exponencialmente para zero [84]. Para garantir que o sistema atinja em tempo finito e se mantenha nas superfícies de escorregamento, são utilizados termos descontínuos na lei de controle, o que pode causar problemas de oscilações bruscas em alta frequência nos esforços de controle (*chattering*). Em [41] e [101] são propostas técnicas para evitar esse tipo de problema. A grande vantagem da utilização deste tipo de lei de controle é sua grande robustez a incertezas estruturadas e não estruturadas, sendo possível realizar o projeto do controlador de modo a suprimir um dado nível de incertezas paramétricas. Em [85] é proposta uma metodologia de projeto de Controle por Modos Deslizantes para manipuladores robóticos seriais. A figura 7 mostra um diagrama de blocos típico de MD aplicado a sistemas mecânicos.

Na literatura são encontradas diversos artigos utilizando a técnica de MD aliada à lógica *fuzzy* e/ou redes neurais para o controle de manipuladores robóticos [9, 35, 43, 75]. Begon *et al.* [9] propuseram uma lei de controle baseada na teoria de MD e na utilização de lógica *fuzzy* para controlar de maneira independente os atuadores de um mecanismo paralelo do tipo Hexa. A técnica proposta teve o intuito de obter a robustez característica do MD sem necessitar de uma lei de controle com termos descontínuos, evitando o *chattering*.

Em [109], Zeinali *et al.* desenvolveram uma lei de controle baseada nas teorias de MD e Controle Adaptativo. O controlador desenvolvido realiza a compensação dinâmica em tempo real do erro de modelagem através de uma lei de adaptação. Além disso, substitui o termo descontínuo da lei de controle por um termo do tipo PID, com o intuito de evitar o *chattering*. A estabilidade e robustez da lei de controle proposta foram provadas utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov [84]. A robustez da lei de controle foi verificada através de simulações do controlador proposto aplicado a um mecanismo serial do tipo RR, nas quais o controlador conseguiu manter erros de posição muito pequenos em regime permanente, mesmo sendo baseado em um modelo muito pobre e na presença de distúrbios de torque. A técnica apresentada se mostra promissora, porém, como no artigo foi feita apenas a simulação da lei de controle em um mecanismo serial bidimensional, ainda não se pode afirmar nada sobre seu desempenho em mecanismos paralelos tridimensionais.

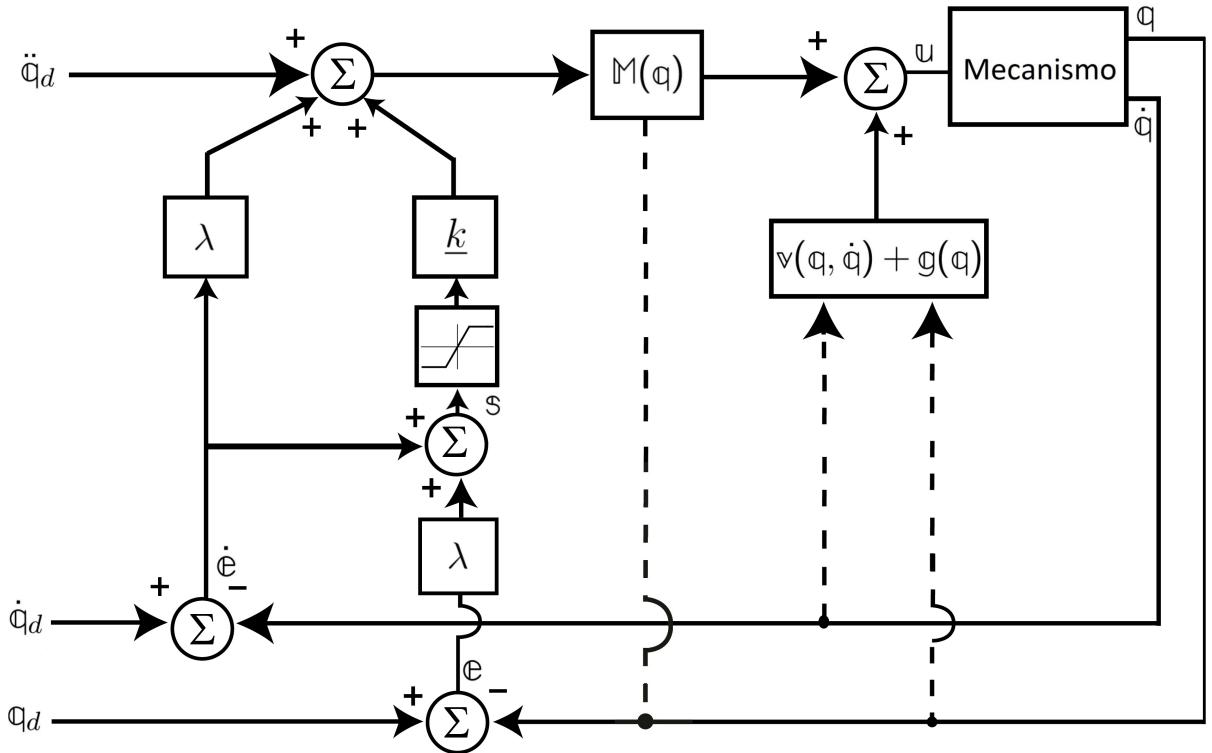


Figura 7: Malha Controle por Modos Deslizantes

## 2.3 Conclusões

Após a realização das revisões da literatura relativas à modelagem dinâmica e ao controle de mecanismos paralelos, é possível perceber alguns fatos que valem a pena ser comentados.

Primeiramente, em relação à modelagem dinâmica, em boa parte dos trabalhos, a modelagem é realizada de uma maneira um tanto quanto ineficiente, tanto no sentido do trabalho necessário para realizar a dedução, quanto na parte da implementação, como é o caso dos artigos citados que utilizam o formalismo de Newton-Euler.

Por outro lado, há artigos que propõe formulações que se mostram muito eficientes no processo de modelagem, as quais se utilizam de artifícios de modularidade e/ou recursividade, como os trabalhos citados baseados na formulação do Complemento Ortonormal Natural. No entanto, praticamente todas essas formulações necessitam do cálculo de derivadas de jacobianos de maneira simbólica, o que dificulta muito o processo de automatização desses métodos. Além disso, conforme a complexidade dos mecanismos aumenta, essas derivadas tendem a gerar expressões maiores e mais complexas.

Também não foram encontrados trabalhos que propõe um conjunto de parâmetros que definam a arquitetura de pelo menos uma classe de mecanismos paralelos, análogos

aos parâmetros de Denavit-Hartemberg para os mecanismos seriais [30].

Com relação à revisão das técnicas de controle aplicadas a mecanismos paralelos, foi possível perceber que, apesar de até que uma boa parte apresentar resultados experimentais [9, 19, 22, 24, 33, 42, 77, 102, 108], são poucos os que realmente apresentam uma análise um pouco mais elaborada. Além disso, há menos trabalhos experimentais que mostram a eficácia de técnicas que podem superar ou bater de frente com o Controle por Torque Computado. Também não foram encontrados trabalhos que tratam da questão da implementação de técnicas de controle baseado em modelo e da questão de como reduzir seu custo computacional.

Sendo assim, com relação à modelagem dinâmica, esta Tese visa contribuir através do desenvolvimento de um algoritmo genérico para a modelagem dinâmica de mecanismos paralelos translacionais que: utiliza estratégias modulares; não necessita do cálculo simbólico de derivadas; e propõe uma maneira de descrever a topologia deste tipo de mecanismo utilizando um conjunto de parâmetros.

Em relação ao controle, esta tese visa construir através da proposição de novas leis de controle híbridas, as quais adicionam termos de controle robusto a técnicas de controle já bastante populares na literatura, e da comprovação experimental da eficácia das técnicas propostas no controle de mecanismos paralelos.

### 3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Fundamentalmente, a metodologia desta pesquisa compreende a execução de seis fases, abrangendo desde o desenvolvimento de algoritmos para as modelagens cinemática e dinâmica ao projeto de controladores e sua validação experimental.

#### 3.1 Primeira fase

Desenvolver um algoritmo genérico, capaz de gerar os modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos translacionais que operem em espaço plano ou tridimensional. Esta geração parte da definição da topologia do mecanismo paralelo, suas cadeias cinemáticas, descrevendo a localização relativa de seus elos e juntas.

Dentre os efeitos de modelagem considerados, destacam-se os decorrentes da inércia efetiva e acoplada, das forças de Coriolis e centrífugas, da força gravitacional, bem como dos esforços dos atuadores. Pretende-se que a geração dos modelos seja realizada de forma implícita. Para tanto, será desenvolvida uma metodologia baseada no método Recursivo Modular de Modelagem (RMM) proposto por Orsino [69] que, por meio da definição de níveis hierárquicos da estrutura de um sistema mecânico e a descrição da dependência das variáveis cinemáticas envolvidas, permite o acoplamento de subsistemas multicorpos.

#### 3.2 Segunda fase

Efetuar as modelagens cinemática e dinâmica do mecanismo articulado plano 5R [68], utilizando o algoritmo desenvolvido na fase anterior.

#### 3.3 Terceira fase

Nesta fase, diferentes técnicas de controle serão avaliadas sob a perspectiva de sua utilização em manipuladores paralelos. Assim, em princípio, esta pesquisa foca na síntese

de um controlador não-linear robusto e de alto desempenho. Para tanto, serão consideradas as incertezas paramétricas e a possibilidade de atuação redundante [22], além de estratégias para a determinação de leis de controle com custo computacional consideravelmente menor do que as tradicionais, que empreguem o Controle por Torque Computado [28, 115].

### **3.4 Quarta fase**

Avaliar o emprego de diferentes técnicas de controle de trajetória aplicadas especificamente para o manipulador 5R, empregando a metodologia da terceira fase.

### **3.5 Quinta fase**

Realizar diversas simulações que permitam observar a consistência dos resultados, no tocante às análises cinemáticas direta e inversa, bem como das análises dinâmicas direta e inversa. Além disso, serão determinadas as respostas dinâmicas do manipulador sujeito às distintas leis de controle sintetizadas.

### **3.6 Sexta fase**

De modo a avaliar o desempenho previsto pelo uso de diferentes controladores para o manipulador paralelo 5R (figura 8), será realizada a validação experimental em uma das bancadas de ensaio do LaMMAr. Para tanto, serão escolhidas duas trajetórias: uma que considere o comportamento em regime permanente e outra em regime transitório.

Neste sentido, almeja-se observar se haverá alguma diferença de desempenho se o controle for executado no espaço das juntas ou no da tarefa. Além disso, pretende-se considerar os efeitos da implementação de técnicas de controle puras ou combinadas. Para auxiliar na comparação entre as técnicas de controle, serão definidas duas métricas: uma que considere o erro de posicionamento do efetuador e outra a magnitude dos torques dos atuadores.

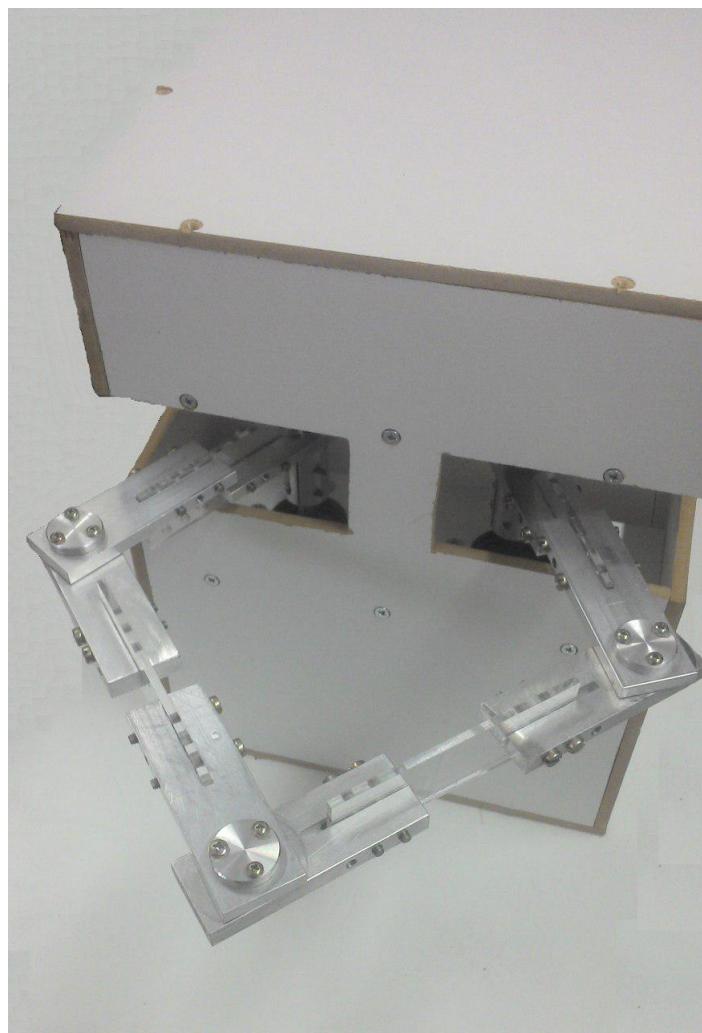


Figura 8: Protótipo do mecanismo 5R

## **PARTE II**

### **MODELAGEM**

## 4 MODELAGEM DE MANIPULADORES SERIAIS

*“Não é que eu goste de complicar as coisas, elas é que gostam de ser complicadas comigo”*

-- Lewis Carroll

Este capítulo tem o intuito de apresentar um algoritmo genérico para a obtenção do modelo cinemático e dinâmico de mecanismos seriais. O algoritmo apresentado é implementável em linguagens de programação comumente usadas atualmente, como C++, Java e Python, sem necessitar de recursos de manipulação simbólica.

Para a obtenção do modelo, são necessários apenas os parâmetros de Denavit-Hartenberg [13, 28, 30, 60] do mecanismo e as posições dos centros de massa dos ligamentos em relação aos sistemas de coordenadas fixos aos ligamentos.

Seja  $\mathcal{B}$  um sistema mecânico serial de  $\nu$  graus de liberdade. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- $\mathcal{N}$  ou  $\mathcal{B}_0$ : referencial inercial.
- $\mathbb{N}$  ou  $\mathcal{B}_0$ : sistema de coordenadas da base do mecanismo, fixo a  $\mathcal{N}$ .
- $\mathcal{B}_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : i-ésimo ligamento.
- $\mathbb{B}_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : sistema de coordenadas solidário a  $\mathcal{B}_i$ .
- $c_{\mathcal{B}_i}$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : centro de massa do ligamento  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbf{x}$ : ponto no espaço fixo ao efetuador.
- $\mathbf{X}$ : sistema de coordenadas fixo ao efetuador, com origem em  $\mathbf{x}$  e a mesma base de  $\mathcal{B}_\nu$ .
- $m_i$ : massa do ligamento  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbb{I}_i$ : tensor de inércia  $\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i}$  escrito na base  $\mathbb{N}$ , ou seja,  $[\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathbb{N}|\mathbb{N}}$ .
- $\mathbb{I}'_i$ : tensor de inércia  $\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i}$  escrito na base  $\mathcal{B}_i$ , ou seja,  $[\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathcal{B}_i|\mathcal{B}_i}$ .

- $q_i, i = 1, \dots, \nu$ : deslocamento relativo (angular ou linear) da  $i$ -ésima junta.
- $\mathbf{q}$ : matriz-coluna de  $\nu$  coordenadas generalizadas independentes. É dada por  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_\nu \end{bmatrix}^\top$ .
- $\mathbf{\ddot{x}}$ : vetor aceleração gravitacional escrito na base  $\mathbb{N}$ , ou seja,  $[\mathbf{\gamma}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\bar{\mathbf{f}}_i$ : matriz-coluna de esforços não-reativos generalizados aplicados ao subsistema  $\mathcal{B}_i$ . É dada por  $\bar{\mathbf{f}}_i = \begin{bmatrix} [\mathbf{f}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathbb{N}}^\top & [\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathbb{N}}^\top \end{bmatrix}^\top$ .
- $\mathbb{R}_i, i = 1, \dots, \nu$ : matriz de rotação  $[\mathbf{1}]_{\mathbb{N}|\mathcal{B}_i}$ .
- $\mathbb{R}'_i, i = 1, \dots, \nu$ : matriz de rotação  $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1}|\mathcal{B}_i}$ .
- $\mathbb{X}$ : matriz de rotação  $[\mathbf{1}]_{\mathbb{N}|\mathbf{x}}$ .
- $\check{\mathbf{r}}_i, i = 1, \dots, \nu$ : representação via quaternion unitário da matriz de rotação  $[\mathbf{1}]_{\mathbb{N}|\mathcal{B}_i}$ .
- $\check{\mathbf{r}}'_i, i = 1, \dots, \nu$ : representação via quaternion unitário da matriz de rotação  $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1}|\mathcal{B}_i}$ .
- $\check{\mathbf{x}}, i = 1, \dots, \nu$ : representação via quaternion unitário da matriz de rotação  $[\mathbf{1}]_{\mathbb{N}|\mathbf{x}}$ .
- $\mathbf{o}_i, i = 0, \dots, \nu$ : origem  $\mathbf{o}_{\mathcal{B}_i}$  no sistema de coordenadas  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\mathbf{o}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\mathbf{o}'_i, i = 1, \dots, \nu$ : origem  $\mathbf{o}_{\mathcal{B}_i}$  no sistema de coordenadas  $\mathcal{B}_{i-1}$ , ou seja  $[\mathbf{o}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathcal{B}_{i-1}}$ .
- $\mathbf{x}, i = 1, \dots, \nu$ : ponto  $\mathbf{x}$  no sistema de coordenadas  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\mathbf{x}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\mathbf{c}_{\mathbb{M}i}, i = 1, \dots, \nu$ : centro de massa  $\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}$  no sistema de coordenadas  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\mathbf{c}'_{\mathbb{M}i}, i = 1, \dots, \nu$ : centro de massa  $\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}$  no sistema de coordenadas  $\mathcal{B}_i$ , ou seja  $[\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathcal{B}_i}$ .
- $\mathbb{k}_i, i = 0, \dots, \nu$ : componentes do versor  $\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_i}$  no sistema de coordenadas  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\omega_i, i = 1, \dots, \nu$ : componentes de velocidade angular do ligamento  $\mathcal{B}_i$  em relação ao referencial  $\mathcal{N}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\omega'_i, i = 1, \dots, \nu$ : componentes de velocidade angular do ligamento  $\mathcal{B}_i$  em relação ao referencial  $\mathcal{B}_{i-1}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\omega$ : componentes de velocidade angular do efetuador em relação ao referencial  $\mathcal{N}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, \nu$ : componentes de velocidade do centro de massa do ligamento  $\mathcal{B}_i$  em relação ao referencial  $\mathcal{N}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\mathbf{v}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}}$ .

- $v'_i, i = 1, \dots, \nu$ : componentes de velocidade do centro de massa do ligamento  $\mathcal{B}_i$  em relação ao referencial  $\mathcal{B}_{i-1}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\mathbf{v}_{c_{\mathcal{B}_i}}^{\mathcal{B}_{i-1}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $v$ : componentes de velocidade do efetuador em relação ao referencial  $\mathcal{N}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\mathbf{v}_x^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\alpha_i, i = 1, \dots, \nu$ : componentes de aceleração angular do ligamento  $\mathcal{B}_i$  em relação ao referencial  $\mathcal{N}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\alpha'_i, i = 1, \dots, \nu$ : componentes de aceleração angular do ligamento  $\mathcal{B}_i$  em relação ao referencial  $\mathcal{B}_{i-1}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\alpha$ : componentes de aceleração angular do efetuador em relação ao referencial  $\mathcal{N}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $a_i, i = 1, \dots, \nu$ : componentes de aceleração do centro de massa do ligamento  $\mathcal{B}_i$  em relação ao referencial  $\mathcal{N}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_i}}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $a'_i, i = 1, \dots, \nu$ : componentes de aceleração do centro de massa do ligamento  $\mathcal{B}_i$  em relação ao referencial  $\mathcal{B}_{i-1}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_i}}^{\mathcal{B}_{i-1}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $a$ : componentes de aceleração do efetuador em relação ao referencial  $\mathcal{N}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\mathbf{a}_x^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $u$ : matriz-coluna dos esforços ativos generalizados aplicados pelos atuadores das juntas.

## 4.1 Cinemática

### 4.1.1 Cinemática de posição

Dados os parâmetros de Denavit-Hartemberg  $a_i, \alpha_i, d_i$  e  $\theta_i$ , com  $1 \leq i \leq \nu$ , é possível obter as matrizes de transformação homogênea  $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1} \mid \mathcal{B}_i}^H$  a partir da seguinte expressão [13]:

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1} \mid \mathcal{B}_i}^H = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, \nu \quad (4.1)$$

Logo:

$$\mathbb{R}'_i(q_i) = [\mathbf{1}]_{\mathbb{B}_{i-1} \mid \mathbb{B}_i} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, \nu \quad (4.2)$$

$$\mathbb{o}'_i(q_i) = [\mathbf{o}_{\mathbb{B}_i}]_{\mathbb{B}_{i-1}} = [a_i c\theta_i \quad a_i s\theta_i \quad d_i]^T, i = 1, \dots, \nu \quad (4.3)$$

A cinemática de posição do efetuador poderia ser feita a partir da composição (produtos) de matrizes de transformação homogênea. Este tipo de estratégia é bastante conveniente quando se trata da realização de cálculos simbólicos. Entretanto, não é muito adequada para implementações numéricas, devido ao acúmulo de erros numéricos gerado pela multiplicação de matrizes de rotação.

Uma representação de rotação por quaternion unitário equivalente à matriz  $\mathbb{R}'_i(q_i)$  é dada por:

$$\check{\mathbb{r}}'_i(q_i) = \begin{bmatrix} \sin(s\alpha_i)\sqrt{(1+c\theta_i)(1-c\alpha_i)}/2 \\ \sin(s\theta_i s\alpha_i)\sqrt{(1-c\theta_i)(1-c\alpha_i)}/2 \\ \sin(s\theta_i)\sqrt{(1-c\theta_i)(1+c\alpha_i)}/2 \\ \sqrt{(1+c\theta_i)(1+c\alpha_i)}/2 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, \nu \quad (4.4)$$

Para solucionar este paradigma, as composições de rotações e translações serão feitas separadamente, sendo que a composição de rotações será feita através da multiplicação de quaternions unitários.

Tendo obtido  $[\mathbf{1}]_{\mathbb{B}_{i-1} \mid \mathbb{B}_i}$ , seria possível obter as matrizes de rotação que relacionam os sistemas de coordenadas solidários aos ligamentos ( $\mathbb{B}_i$ ) ao sistema de coordenadas da base ( $\mathbb{N}$ ) pela seguinte expressão recursiva:

$$[\mathbf{1}]_{\mathbb{N} \mid \mathbb{B}_i} = \begin{cases} [\mathbf{1}]_{\mathbb{B}_0 \mid \mathbb{B}_1}, & \text{se } i = 1 \\ [\mathbf{1}]_{\mathbb{N} \mid \mathbb{B}_{i-1}} \cdot [\mathbf{1}]_{\mathbb{B}_{i-1} \mid \mathbb{B}_i}, & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.5)$$

Ou seja

$$\mathbb{R}_i(\mathbf{q}) = \begin{cases} \mathbb{R}'_1(q_1), & \text{se } i = 1 \\ \mathbb{R}_{i-1}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{R}'_i(q_i), & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.6)$$

A composição de rotações utilizando quaternions unitários é obtida através de uma

expressão análoga:

$$\check{r}_i(q) = \begin{cases} \check{r}'_1(q_1), & \text{se } i = 1 \\ \check{r}_{i-1}(q) \otimes \check{r}'_i(q_i), & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.7)$$

Para evitar o acúmulo de erros numéricos, basta renormalizar cada quaternion obtido através do produto de dois outros.

As expressões das matrizes de rotação  $\mathbb{R}_i(q)$  podem ser obtidas através da fórmula de conversão de quaternions unitários para matrizes de rotação apresentada no apêndice B.

$$\mathbb{R} = \underline{\mathbb{R}}(\check{q}) = \begin{bmatrix} 1 - 2q_j^2 - 2q_k^2 & 2(q_i q_j - q_k q_r) & 2(q_i q_k + q_j q_r) \\ 2(q_i q_j + q_k q_r) & 1 - 2q_i^2 - 2q_k^2 & 2(q_j q_k - q_i q_r) \\ 2(q_i q_k - q_j q_r) & 2(q_i q_r + q_j q_k) & 1 - 2q_i^2 - 2q_j^2 \end{bmatrix} \quad (B.17)$$

$$\mathbb{R}_i(q) = \underline{\mathbb{R}}(\check{r}_i(q)), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.8)$$

A composição de translações pode ser feita da seguinte maneira:

$$[\mathbf{o}_{\mathbf{B}_i}]_{\mathbf{N}} = \begin{cases} [\mathbf{o}_{\mathbf{B}_1}]_{\mathbf{B}_0}, & \text{se } i = 1 \\ [\mathbf{o}_{\mathbf{B}_{i-1}}]_{\mathbf{N}} + [\mathbf{1}]_{\mathbf{N} \mid \mathbf{B}_{i-1}} \cdot [\mathbf{o}_{\mathbf{B}_i}]_{\mathbf{B}_{i-1}}, & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.9)$$

Tendo em vista que  $\mathbf{o}_0 = [\mathbf{o}_{\mathbf{B}_0}]_{\mathbf{B}_0} = \emptyset$ , temos que:

$$\mathbf{o}_i(q) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } i = 0 \\ \mathbf{o}'_1(q_1), & \text{se } i = 1 \quad i = 0, \dots, \nu \\ \mathbf{o}_{i-1}(q) + \mathbb{R}_{i-1}(q) \cdot \mathbf{o}'_i(q_i), & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad (4.10)$$

Sendo assim, a posição do efetuador no sistema  $\mathbf{N}$  e as representações por quaternion e matriz de rotação da orientação do efetuador são dadas por:

$$\mathbf{x}(q) = \mathbf{o}_\nu(q) \quad (4.11)$$

$$\check{\mathbf{x}}(q) = \check{r}_\nu(q) \quad (4.12)$$

$$\mathbb{X}(q) = \mathbb{R}_\nu(q) \quad (4.13)$$

Tendo obtidos as matrizes de rotação  $[\mathbf{1}]_{\mathbf{N} \mid \mathbf{B}_i}$  e as coordenadas das origens  $\mathbf{o}_{\mathbf{B}_i}$  no

sistema N, temos que as coordenadas dos centros de massa dos ligamentos são dadas por:

$$[\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}]_N = [\mathbf{o}_{\mathcal{B}_i}]_N + [\mathbf{1}]_{N|\mathcal{B}_i} \cdot [\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathcal{B}_i} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.14)$$

Ou seja

$$\mathbf{c}_{\mathcal{M}i}(\mathbf{q}) = \mathbf{o}_i(\mathbf{q}) + \mathbb{R}_i(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{c}'_{\mathcal{M}i}(\mathbf{q}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.15)$$

Além disso, sabe-se que as matrizes de rotação  $[\mathbf{1}]_{N|\mathcal{B}_i}$  apresentam o seguinte formato:

$$[\mathbf{1}]_{N|\mathcal{B}_i} = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}_i}]_N & [\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}_i}]_N & [\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_i}]_N \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Tendo em vista que as coordenadas dos versores  $\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_i}$  no sistema N serão utilizadas no cálculo dos jacobianos de velocidades e velocidades angulares, e que  $[\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_0}]_N = [0 \ 0 \ 1]^\top$ , estas podem ser obtidas simplesmente por:

$$\mathbf{k}_i(\mathbf{q}) = \begin{cases} [0 \ 0 \ 1]^\top, & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{R}_i(\mathbf{q})[:, 3], & \text{se } i > 0 \end{cases} \quad i = 0, \dots, \nu \quad (4.17)$$

As matrizes de rotação obtidas também podem ser utilizadas para passar o tensor de inércia do centro de massa de cada ligamento para o sistema N:

$$[\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i}]_{N|N} = [\mathbf{1}]_{N|\mathcal{B}_i} \cdot [\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathcal{B}_i|\mathcal{B}_i} \cdot [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_i|N}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.18)$$

Ou seja:

$$\mathbb{I}_i(\mathbf{q}) = \mathbb{R}_i(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{I}'_i \cdot \mathbb{R}_i(\mathbf{q})^\top, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.19)$$

#### 4.1.2 Cinemática de velocidades angulares

Sabe-se que a velocidade angular de cada ligamento  $\mathcal{B}_i$  em relação ao referencial anterior  $\mathcal{B}_{i-1}$  é dada por:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \dot{q}_i \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_{i-1}}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.20)$$

Sendo assim, definindo:

$$\ddot{\omega}_i(q) = \begin{cases} 0, & \text{i-ésima junta prismática} \\ k_{i-1}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.21)$$

Aplicando (4.20) no sistema  $N$  e utilizando a definição (4.21), temos que:

$$\omega'_i(q, \dot{q}_i) = \ddot{\omega}_i(q) \dot{q}_i, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.22)$$

Para obter a velocidade angular de cada ligamento em relação ao referencial  $N$ , parte-se do ligamento  $B_1$ . Tendo em vista que  $B_0$  e  $N$  são o mesmo referencial, temos que:

$$[\boldsymbol{\omega}_{B_1}^N]_N = [\boldsymbol{\omega}_{B_1}^{B_0}]_N \quad (4.23)$$

Ou seja

$$\omega_1(q, \dot{q}) = \omega'_1(q, \dot{q}_1) = \ddot{\omega}_1(q) \dot{q}_1 \quad (4.24)$$

Além disso, tendo em vista que  $\dot{q}_i$  pode ser escrito como

$$\dot{q}_i = \partial_{q_i} q^T \dot{q} \quad (4.25)$$

Sendo

$$\partial_{q_j} q[i] = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.26)$$

$\omega_1$  pode ser escrito como:

$$\omega_1(q, \dot{q}) = J_{\omega 1}(q) \dot{q} \quad (4.27)$$

Sendo

$$J_{\omega 1}(q) = \ddot{\omega}_1 \partial_{q_1} q^T \quad (4.28)$$

Para obter a velocidade angular dos outros ligamentos, utiliza-se o princípio de composição de movimento para velocidades angulares (equação (A.44)):

$$\boldsymbol{\omega}_{B_i}^N = \boldsymbol{\omega}_{B_{i-1}}^N + \boldsymbol{\omega}_{B_i}^{B_{i-1}} \quad (4.29)$$

Aplicando (4.29) no sistema  $\mathbb{N}$ , temos que:

$$\omega_i(q, \dot{q}) = \omega_{i-1} + \omega'_i \quad (4.30)$$

Portanto:

$$\omega_i(q, \dot{q}) = \begin{cases} \omega'_1 & \text{se } i = 1 \\ \omega_{i-1} + \omega'_i & \text{se } i > 1 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.31)$$

Além disso, supondo que

$$\omega_i(q, \dot{q}) = J_{\omega_i}(q) \dot{q} \quad (4.32)$$

Substituindo (4.32) e (4.22) em (4.30), temos que:

$$\omega_i(q, \dot{q}) = J_{\omega_{i-1}} \dot{q} + J_{\omega_i} \partial_{q_i} q^T \dot{q} = \left( J_{\omega_{i-1}} + J_{\omega_i} \partial_{q_i} q^T \right) \dot{q} \quad (4.33)$$

Portanto, pelo princípio da indução finita

$$\omega_i(q, \dot{q}) = J_{\omega_i}(q) \dot{q}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.34)$$

Sendo:

$$J_{\omega_i}(q) = \begin{cases} J_{\omega_1} \partial_{q_1} q^T & \text{se } i = 1 \\ J_{\omega_{i-1}} + J_{\omega_i} \partial_{q_i} q^T & \text{se } i > 1 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.35)$$

Com relação à velocidade angular do efetuador, tendo em vista que o efetuador é solidário a  $\mathcal{B}_\nu$ , temos que:

$$\omega(q, \dot{q}) = \omega_\nu(q, \dot{q}) = J_\omega(q) \dot{q} \quad (4.36)$$

Sendo:

$$J_\omega(q) = J_{\omega_\nu}(q) \quad (4.37)$$

#### 4.1.3 Cinemática de velocidades lineares

Sabe-se que a velocidade do centro de massa de cada ligamento  $c_{\mathcal{B}_i}$  em relação ao referencial anterior  $\mathcal{B}_{i-1}$  é dada por:

$$v_{c_{\mathcal{B}_i}}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \dot{q}_i \hat{k}_{\mathcal{B}_{i-1}}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \dot{q}_i \hat{k}_{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge r_{o_{i-1}|c_{\mathcal{B}_i}}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.38)$$

Sendo assim, definindo:

$$\ddot{\mathbf{j}}_{v,i}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \mathbf{k}_{i-1}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \mathbb{S}(\mathbf{k}_{i-1}) \cdot (\mathbf{c}_{\mathbb{M}i} - \mathbf{c}_{\mathbb{M}i-1}), & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.39)$$

Aplicando (4.38) no sistema  $\mathbb{N}$  e utilizando a definição (4.39), temos que:

$$\mathbf{v}'_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_i) = \ddot{\mathbf{j}}_{v,i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_i, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.40)$$

Para obter a velocidade do centro de massa de cada ligamento em relação ao referencial  $\mathbb{N}$ , parte-se do ligamento  $\mathcal{B}_1$ . Tendo em vista que  $\mathcal{B}_0$  e  $\mathbb{N}$  são o mesmo referencial, temos que:

$$[\mathbf{v}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}}^{\mathbb{N}}]_{\mathbb{N}} = [\mathbf{v}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_1}}^{\mathcal{B}_0}]_{\mathbb{N}} \quad (4.41)$$

Ou seja

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{v}'_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1) = \ddot{\mathbf{j}}_{v,1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_1 \quad (4.42)$$

$\mathbf{v}_1$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{v,1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.43)$$

Sendo

$$\mathbb{J}_{v,1}(\mathbf{q}) = \ddot{\mathbf{j}}_{v,1}(\mathbf{q}) \partial_{q_1} \mathbf{q}^T \quad (4.44)$$

Para obter a velocidade dos centros de massa dos outros ligamentos, utiliza-se o princípio de composição de movimento para velocidades lineares (equação (A.29)):

$$\mathbf{v}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}}^{\mathbb{N}} = \mathbf{v}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i} | \mathcal{B}_{i-1}}^{\mathbb{N}} + \mathbf{v}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}}^{\mathcal{B}_{i-1}} \quad (4.45)$$

$\mathbf{v}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i} | \mathcal{B}_{i-1}}^{\mathbb{N}}$  pode ser relacionado com a velocidade do centro de massa do ligamento anterior através a equação do campo de velocidades (A.20):

$$\mathbf{v}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i} | \mathcal{B}_{i-1}}^{\mathbb{N}} = \mathbf{v}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_{i-1}}}^{\mathbb{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathbb{N}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_{i-1}} | \mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}} \quad (4.46)$$

Substituindo (4.46) em (4.45) e aplicando no sistema  $\mathbb{N}$ , temos que:

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{v}'_i + \mathbb{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \cdot (\mathbf{c}_{\mathbb{M}i} - \mathbf{c}_{\mathbb{M}i-1}) \quad (4.47)$$

Portanto:

$$v_i(q, \dot{q}) = \begin{cases} v'_1 & \text{se } i = 1 \\ v_{i-1} + v'_i + S(\omega_{i-1}) \cdot (c_M i - c_{M,i-1}) & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.48)$$

Além disso, supondo que

$$v_i(q, \dot{q}) = J_{v,i}(q) \dot{q} \quad (4.49)$$

Substituindo (4.49) e (4.40) em (4.47), temos que:

$$\begin{aligned} v_i(q, \dot{q}) &= J_{v,i-1} \dot{q} + j_{v,i} \partial_{q_i} q^T \dot{q} + S(J_{\omega,i-1} \dot{q}) \cdot (c_M i - c_{M,i-1}) \\ &= (J_{v,i-1} + j_{v,i} \partial_{q_i} q^T - S(c_M i - c_{M,i-1}) \cdot J_{\omega,i-1}) \dot{q} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Portanto, pelo princípio da indução finita

$$v_i(q, \dot{q}) = J_{v,i}(q) \dot{q}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.51)$$

Sendo:

$$J_{v,i}(q) = \begin{cases} j_{v,1} \partial_{q_1} q^T & \text{se } i = 1 \\ J_{v,i-1} - S(c_M i - c_{M,i-1}) \cdot J_{\omega,i-1} + j_{v,i} \partial_{q_i} q^T & \text{se } i > 1 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.52)$$

Com relação à velocidade do efetuador, tendo em vista que o efetuador é solidário a  $B_\nu$ , aplicando a equação do campo de velocidades (A.20), temos que:

$$v(q, \dot{q}) = v_\nu + S(\omega_\nu) \cdot (x - c_{M,\nu}) = J_v(q) \dot{q} \quad (4.53)$$

Sendo:

$$J_v(q) = J_{v,\nu} - S(x - c_{M,\nu}) \cdot J_{\omega,\nu} \quad (4.54)$$

#### 4.1.4 Cinemática de acelerações angulares

Sabe-se que a aceleração angular de cada ligamento  $\mathcal{B}_i$  em relação ao referencial anterior  $\mathcal{B}_{i-1}$  é dada por:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \ddot{q}_i \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_{i-1}}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.55)$$

Sendo assim, aplicando (4.55) no sistema  $\mathbb{N}$  e utilizando a definição (4.21), temos que:

$$\alpha'_i(q, \ddot{q}) = \mathbb{J}_{\omega_i}(q) \ddot{q}_i, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.56)$$

Para obter a aceleração angular de cada ligamento em relação ao referencial  $\mathcal{N}$ , parte-se do ligamento  $\mathcal{B}_1$ . Tendo em vista que  $\mathcal{B}_0$  e  $\mathcal{N}$  são o mesmo referencial, temos que:

$$[\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}} = [\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_0}]_{\mathbb{N}} \quad (4.57)$$

Ou seja

$$\alpha_1(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \alpha'_1(q, \ddot{q}_1) = \mathbb{J}_{\omega_1} \partial_{q_1} q^T \ddot{q} \quad (4.58)$$

Sendo assim,  $\alpha_1$  pode ser escrito de forma genérica como:

$$\alpha_1(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \mathbb{J}_{\omega_1}(q) \ddot{q} + \underline{\alpha}_1(q, \dot{q}) \quad (4.59)$$

Sendo

$$\underline{\alpha}_1(q, \dot{q}) = 0 \quad (4.60)$$

Para obter a aceleração angular dos outros ligamentos, utiliza-se o princípio de composição de movimento para acelerações angulares (equação (A.44)):

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \quad (4.61)$$

Aplicando (4.61) no sistema  $\mathbb{N}$ , temos que:

$$\alpha_i(q, \dot{q}) = \alpha_{i-1} + \alpha'_i + \mathbb{S}(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_i \quad (4.62)$$

Portanto:

$$\alpha_i(q, \dot{q}) = \begin{cases} \alpha'_1 & \text{se } i = 1 \\ \alpha_{i-1} + \alpha'_i + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_i & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.63)$$

Além disso, supondo que

$$\alpha_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = J_{\omega_i}(q) \ddot{q} + \alpha_i(q, \dot{q}) \quad (4.64)$$

Substituindo (4.64) e (4.56) em (4.62), temos que:

$$\begin{aligned} \alpha_i(q, \dot{q}) &= J_{\omega_{i-1}} \ddot{q} + \alpha_{i-1} + \dot{J}_{\omega_i} \partial_{q_i} q^T \ddot{q} + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_i \\ &= \left( J_{\omega_{i-1}} + \dot{J}_{\omega_i} \partial_{q_i} q^T \right) \ddot{q} + \alpha_{i-1} + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_i \\ &= J_{\omega_i} \ddot{q} + \alpha_{i-1} + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_i \end{aligned} \quad (4.65)$$

Portanto, pelo princípio da indução finita

$$\alpha_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = J_{\omega_i}(q) \ddot{q} + \alpha_i(q, \dot{q}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.66)$$

Sendo:

$$\alpha_i(q, \dot{q}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1 \\ \alpha_{i-1} + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_i & \text{se } i > 1 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.67)$$

Com relação à aceleração angular do efetuador, tendo em vista que o efetuador é solidário a  $\mathcal{B}_\nu$ , temos que:

$$\alpha(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \alpha_\nu(q, \dot{q}, \ddot{q}) = J_\omega(q) \ddot{q} + \alpha(q, \dot{q}) \quad (4.68)$$

Sendo:

$$\alpha(q, \dot{q}) = \alpha_\nu(q, \dot{q}) \quad (4.69)$$

#### 4.1.5 Cinemática de acelerações lineares

Sabe-se que a aceleração do centro de massa de cada ligamento  $c_{\mathcal{B}_i}$  em relação ao referencial anterior  $\mathcal{B}_{i-1}$  é dada por:

$$\mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_i}}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \ddot{q}_i \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_{i-1}}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \ddot{q}_i \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge \mathbf{r}_{o_{i-1}|c_{\mathcal{B}_i}} + \dot{q}_i^2 \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge \mathbf{r}_{o_{i-1}|c_{\mathcal{B}_i}}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.70)$$

Aplicando (4.70) no sistema  $\mathcal{N}$  e utilizando as definições (4.21), (4.22), (4.39) e (4.40), temos que:

$$\mathbf{a}'_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{v_i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{S}(\omega'_i) \cdot \mathbf{v}'_i, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.71)$$

Para obter a aceleração do centro de massa de cada ligamento em relação ao referencial  $\mathcal{N}$ , parte-se do ligamento  $\mathcal{B}_1$ . Tendo em vista que  $\mathcal{B}_0$  e  $\mathcal{N}$  são o mesmo referencial, temos que:

$$[\mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_1}}^{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}} = [\mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_1}}^{\mathcal{B}_0}]_{\mathcal{N}} \quad (4.72)$$

Ou seja

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{a}'_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1, \ddot{\mathbf{q}}_1) = \mathbb{J}_{v_1} \partial_{q_1} \mathbf{q}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{S}(\omega'_1) \cdot \mathbf{v}'_1 \quad (4.73)$$

Sendo assim,  $\mathbf{a}_1$  pode ser escrito de forma genérica como:

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{v_1}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.74)$$

Sendo

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{S}(\omega'_1) \cdot \mathbf{v}'_1 \quad (4.75)$$

Para obter a aceleração do centro de massa dos outros ligamentos, utiliza-se o princípio de composição de movimento para acelerações lineares (equação (A.33)):

$$\mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_i}}^{\mathcal{N}} = \mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_i} | \mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} + \mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_i}}^{\mathcal{B}_{i-1}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} \wedge \boldsymbol{\nu}_{c_{\mathcal{B}_i}}^{\mathcal{B}_{i-1}} \quad (4.76)$$

$\mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_i} | \mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}}$  pode ser relacionado com a aceleração do centro de massa do ligamento anterior através a equação do campo de acelerações (A.22):

$$\mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_i} | \mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} = \mathbf{a}_{c_{\mathcal{B}_{i-1}}}^{\mathcal{N}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} \wedge \mathbf{r}_{c_{\mathcal{B}_{i-1}} | c_{\mathcal{B}_i}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} \wedge \mathbf{r}_{c_{\mathcal{B}_{i-1}} | c_{\mathcal{B}_i}} \quad (4.77)$$

Substituindo (4.77) em (4.76) e aplicando no sistema N, temos que:

$$\alpha_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \alpha_{i-1} + \alpha'_i + 2S(\omega'_{i-1}) \cdot v'_i + (S(\alpha_{i-1}) + S^2(\omega_{i-1})) \cdot (c_M i - c_{M,i-1}) \quad (4.78)$$

Portanto:

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha'_1 & \text{se } i = 1 \\ \alpha_{i-1} + \alpha'_i + 2S(\omega'_{i-1}) \cdot v'_i + (S(\alpha_{i-1}) + S^2(\omega_{i-1})) \cdot (c_M i - c_{M,i-1}) & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu$$

(4.79)

Além disso, supondo que

$$\alpha_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = J_{v,i}(q) \ddot{q} + g_i(q, \dot{q}) \quad (4.80)$$

Substituindo (4.66), (4.80) e (4.71) em (4.78), temos que:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= J_{v,i-1} \ddot{q} + g_{i-1} + j_{v,i} \partial_{q_i} q^\top \ddot{q} + S(\omega'_i) \cdot v'_i + 2S(\omega'_{i-1}) \cdot v'_i \\ &\quad + (S(J_{\omega,i-1} \ddot{q} + g_{i-1}) + S^2(\omega_{i-1})) \cdot (c_M i - c_{M,i-1}) \\ &= (J_{v,i-1} - S(c_M i - c_{M,i-1}) \cdot J_{\omega,i-1} + j_{v,i} \partial_{q_i} q^\top) \ddot{q} + g_{i-1} + (S(\omega'_i) + 2S(\omega'_{i-1})) \cdot v'_i \\ &\quad + (S(g_{i-1}) + S^2(\omega_{i-1})) \cdot (c_M i - c_{M,i-1}) \\ &= J_{v,i} \ddot{q} + g_{i-1} + (S(\omega'_i) + 2S(\omega'_{i-1})) \cdot v'_i + (S(g_{i-1}) + S^2(\omega_{i-1})) \cdot (c_M i - c_{M,i-1}) \end{aligned} \quad (4.81)$$

Portanto, pelo princípio da indução finita

$$\alpha_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = J_{v,i}(q) \ddot{q} + g_i(q, \dot{q}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.82)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{g}}_i = & \begin{cases} \mathbb{S}(\omega'_i) \cdot \mathbf{v}'_i & \text{se } i = 1 \\ \underline{\underline{g}}_{i-1} + (\mathbb{S}(\omega'_i) + 2\mathbb{S}(\omega'_{i-1})) \cdot \mathbf{v}'_i + (\mathbb{S}(\underline{\underline{g}}_{i-1}) + \mathbb{S}^2(\omega_{i-1})) \cdot (\mathbf{c}_{M_i} - \mathbf{c}_{M_{i-1}}) & \text{se } i > 1 \end{cases} \\ & i = 1, \dots, \nu \end{aligned} \quad (4.83)$$

Com relação à aceleração do efetuador, tendo em vista que o efetuador é solidário a  $\mathcal{B}_\nu$ , temos que:

$$\underline{\underline{a}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \underline{\underline{a}}_\nu + (\mathbb{S}(\underline{\underline{a}}_\nu) + \mathbb{S}^2(\omega_\nu)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}_{M_\nu}) = \mathbb{J}_v(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\underline{g}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.84)$$

Sendo:

$$\underline{\underline{g}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \underline{\underline{g}}_\nu + (\mathbb{S}(\underline{\underline{g}}_\nu) + \mathbb{S}^2(\omega_\nu)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}_{M_\nu}) \quad (4.85)$$

## 4.2 Dinâmica dos elos e juntas

O modelo dinâmico de  $\mathcal{B}$  é obtido utilizando um procedimento de acoplamento de subsistemas baseado no método Recursivo Modular de Modelagem (RMM) [69], e é dado por:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbb{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (4.86)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v,i}^\top \mathbb{J}_{v,i} + \mathbb{J}_{\omega,i}^\top \mathbb{I}_i \mathbb{J}_{\omega,i} \quad (4.87)$$

$$\mathbb{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v,i}^\top \underline{\underline{g}}_i + \mathbb{J}_{\omega,i}^\top (\mathbb{I}_i \underline{\underline{g}}_i + \mathbb{S}(\omega_i) \cdot \mathbb{I}_i \omega_i) \quad (4.88)$$

$$\mathbb{g}(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v,i}^\top \ddot{\mathbf{q}} \quad (4.89)$$

Segue abaixo, a dedução.

### 4.2.1 Modelo dos subsistemas

O modelo dinâmico de cada ligamento pode ser obtido por Newton-Euler, pois são considerados como corpos rígidos livres no espaço sujeitos apenas à força peso. Sendo assim, através das equações de Newton-Euler, obtemos os esforços não-reativos (ativos e inerciais) aplicados em cada ligamento:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\mathcal{B}_i} = -m_i \mathbf{a}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}}^N + m_i \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{B}_i} = -\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_i}^N - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^N \wedge (\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^N) \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.90)$$

Aplicando as equações vetoriais no sistema N, temos:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{f}_{\mathcal{B}_i}]_N \\ [\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{B}_i}]_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & 0 \\ 0 & [\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i}]_{N|N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{a}_{\mathbf{c}_{\mathcal{B}_i}}^N]_N \\ [\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_i}^N]_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{S}([\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^N]_N) \cdot [\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i}]_{N|N} \cdot [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^N]_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -m_i [\boldsymbol{\gamma}]_N \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Ou seja:

$$\bar{\mathbb{F}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = - \left\{ \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{Q}_i \\ \mathbb{Q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \cdot \mathbb{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i \mathbb{0} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.92)$$

Como os subsistemas estão desacoplados, não há forças reativas, portanto o modelo dinâmico de cada subsistema pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbb{F}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = 0 \quad (4.93)$$

Além disso, definindo as quasi-velocidades:

$$\mathbb{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{V}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

E as quasi-coordenadas [44]:

$$d\mathbb{W}_i = \mathbb{P}_i dt \quad (4.95)$$

Temos que o trabalho virtual associado a cada subsistema é dado por:

$$\delta W_i = \delta \mathbb{W}_i^\top \cdot \bar{\mathbb{F}}_i \quad (4.96)$$

### 4.2.2 Sistemas de esforços ativos generalizados

Considere também um subsistema constituído pelos esforços que os atuadores aplicam nas juntas do mecanismo. Primeiramente, definimos a matriz-coluna de quasi-velocidades relativas a esse subsistema:

$$\mathbf{p}^\# = \dot{\mathbf{q}} \quad (4.97)$$

Tendo em vista que  $\mathbf{u}$  é a matriz-coluna de esforços generalizados aplicadas pelos atuadores na direção de  $\delta\mathbf{q}$ , o trabalho virtual associado a este subsistema é dado por:

$$\delta W^\# = \delta\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{u} \quad (4.98)$$

### 4.2.3 Vínculos cinemáticos entre subsistemas

Através das equações (4.34), (4.51) e (4.97), é possível relacionar as quasi-velocidades de cada subsistema com as quasi-velocidades  $\mathbf{p}^\#$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{p}_i = \mathbb{J}_i(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{p}^\#, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.99)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v_i}(\mathbf{q}) \\ \mathbb{J}_{\omega_i}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.100)$$

Definindo  $\mathbf{p}^\circ$  como a matriz-coluna que contém as quasi-velocidades de todos os ligamentos:

$$\mathbf{p}^\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T & \dots & \mathbf{p}_\nu^T \end{bmatrix}^T \quad (4.101)$$

$\mathbf{p}^\circ$  pode ser expresso em função apenas das quasi-velocidades  $\mathbf{p}^\#$  da seguinte forma:

$$\mathbf{p}^\circ = \mathbb{J}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{p}^\# \quad (4.102)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_1(\mathbf{q})^T & \dots & \mathbb{J}_\nu(\mathbf{q})^T \end{bmatrix}^T \quad (4.103)$$

Sendo assim, a partir de (4.102), os vínculos de quasi-velocidades entre subsistemas

podem ser expressos como:

$$\bar{P}(q, p) = A(q) \cdot p = 0 \quad (4.104)$$

Sendo:

$$A(q) = \begin{bmatrix} J(q) & -1 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

$$p = \begin{bmatrix} p^{\#T} & p^{\circ T} \end{bmatrix}^T \quad (4.106)$$

#### 4.2.4 Acoplamento de subsistemas

Seja  $f$  a matriz-coluna contendo todos os sistemas de esforços não-reativos generalizados:

$$f = \begin{bmatrix} u^T & f^{\circ T} \end{bmatrix}^T \quad (4.107)$$

Sendo:

$$f^{\circ} = \begin{bmatrix} f_1^T & \dots & f_{\nu}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.108)$$

Seja  $\pi$  um conjunto de de quasi-coordenadas tal que:

$$d\pi = p dt \quad (4.109)$$

Ou seja:

$$d\pi = \begin{bmatrix} d\pi^{\#T} & d\pi^{\circ T} \end{bmatrix}^T \quad (4.110)$$

Sendo:

$$d\pi^{\#} = dq \quad (4.111)$$

$$d\pi^{\circ} = \begin{bmatrix} d\pi_1^T & \dots & d\pi_{\nu}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.112)$$

Pelo princípio de D'Alembert, temos que

$$\delta W^{\#} + \sum_{i=1}^{\nu} \delta W_i = 0 \quad (4.113)$$

Através de (4.113), (4.98), (4.96), (4.107) e (4.109), temos que:

$$\delta_{\pi}^T \cdot f = 0 \quad (4.114)$$

Além disso, a partir da definição de  $\pi$  (4.109) e dos vínculos de quasi-velocidades (4.104), temos que as variações das quasi-coordenadas  $\pi$  devem respeitar a seguinte relação:

$$A(q) \cdot \delta_{\pi} = 0 \quad (4.115)$$

Subdividindo  $\delta_{\pi}$  em  $\delta_{\pi}^{\#}$  e  $\delta_{\pi}^{\circ}$  e considerando  $\delta_{\pi}^{\#}$  como variáveis livres, temos:

$$\begin{bmatrix} J(q) & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{\pi}^{\#} \\ \delta_{\pi}^{\circ} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.116)$$

$$\Rightarrow \delta_{\pi}^{\circ} = J(q) \cdot \delta_{\pi}^{\#} \quad (4.117)$$

$$\therefore \delta_{\pi} = C(q) \cdot \delta_{\pi}^{\#} \quad (4.118)$$

Sendo:

$$C(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ J(q) \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

Repare que trocando  $\delta_{\pi}$  por  $p$  em (4.115), obtemos os vínculos de quasi-velocidades do sistema (4.104). Sendo assim, à partir das expressões (4.118) e (4.119), temos que  $C$  respeita a seguinte relação:

$$p = C(q) \cdot p^{\#} \quad (4.120)$$

Sendo assim, substituindo (4.118) em (4.114), temos:

$$\delta_{\pi}^{\#T} \cdot C^T f = 0 \quad (4.121)$$

Tendo em vista que as quasi-coordenadas  $\pi^{\#}$  são independentes, as variações  $\delta_{\pi}^{\#}$  são arbitrárias. Sendo assim, as equações dinâmicas do sistema são dadas por:

$$C^T f = 0 \quad (4.122)$$

Substituindo (4.119) e (4.107) em (4.122), temos:

$$u + J^T f^{\circ} = 0 \quad (4.123)$$

Substituindo (4.103), (4.100), (4.92) e (4.108) em (4.123), temos:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v_i} \\ \mathbb{J}_{\omega_i} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{Q}_i \\ \mathbb{Q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{S}(\omega_i) \cdot \mathbb{I}_i \cdot \omega_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i \mathfrak{D} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = u \quad (4.124)$$

Substituindo (4.66) e (4.82) em (4.124), temos:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v_i} \\ \mathbb{J}_{\omega_i} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} m_i (\mathbb{J}_{v_i} \ddot{q} + \mathbb{Q}_i) \\ \mathbb{I}_i (\mathbb{J}_{\omega_i} \dot{q} + \mathbb{Q}_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{S}(\omega_i) \cdot \mathbb{I}_i \cdot \omega_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i \mathfrak{D} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = u \quad (4.125)$$

Sendo assim, obtemos o modelo dinâmico mostrado anteriormente:

$$\mathbb{M}(q)\ddot{q} + \nu(q, \dot{q}) + g(q) = u \quad (4.86)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}(q) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v_i}^T \mathbb{J}_{v_i} + \mathbb{J}_{\omega_i}^T \mathbb{I}_i \mathbb{J}_{\omega_i} \quad (4.87)$$

$$\nu(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v_i}^T \mathbb{Q}_i + \mathbb{J}_{\omega_i}^T (\mathbb{I}_i \mathbb{Q}_i + \mathbb{S}(\omega_i) \cdot \mathbb{I}_i \omega_i) \quad (4.88)$$

$$g(q) = - \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v_i}^T \mathfrak{D} \quad (4.89)$$

### 4.3 Dinâmica dos atuadores

Esta subseção tem o intuito de complementar algoritmo de modelagem de mecanismos seriais já apresentado através inclusão da dinâmica dos atuadores.

Seja  $\mathcal{B}'$  um sistema mecânico serial de  $\nu$  graus de liberdade, constituído por um mecanismo serial  $\mathcal{B}$  e  $\nu$  atuadores, possivelmente acoplados a redutores de velocidades. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- $\mathcal{R}_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : rotor do  $i$ -ésimo atuador.
- $\mathbb{R}_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : sistema de coordenadas solidário a  $\mathcal{R}_i$ , com eixo  $z$  paralelo ao eixo  $z$  de  $\mathcal{R}_i$ .
- $J_{r_i}$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : momento de inércia do rotor  $\mathcal{R}_i$ .
- $\mathbb{I}_{r_i}$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : tensor de inércia  $\mathbf{I}_{\mathcal{R}_i}$  escrito na base de  $\mathbb{N}$ , ou seja,  $[\mathbf{I}_{\mathcal{R}_i}]_{\mathbb{N}|\mathbb{N}}$ .

- $\mathbb{I}'_{r_i}$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : tensor de inércia  $\mathbf{I}_{\mathcal{R}_i}$  escrito na base de  $\mathbf{B}_i$ , ou seja,  $[\mathbf{I}_{\mathcal{R}_i}]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_i}$ .
- $\bar{\mathbb{F}}_{r_i}$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : matriz-coluna de esforços não-reativos generalizados aplicados no rotor  $\mathcal{R}_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ . É dada por  $\bar{\mathbb{F}}_{r_i} = [\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R}_i}]_{\mathbb{N}}$ .
- $q_{r_i}$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : deslocamento angular realizado pelo i-ésimo rotor.
- $\mathbb{q}_r$ : matriz-coluna dos deslocamentos angulares realizados pelos rotores, ou seja  $\mathbb{q}_r = [q_{r1} \ \dots \ q_{r\nu}]^T$ .
- $\omega_{r_i}$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : componentes de velocidade angular do rotor  $\mathcal{R}_i$  em relação a  $\mathbb{N}$  no sistema  $\mathbb{N}$ , ou seja  $[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathbb{N}}]_{\mathbb{N}}$ .
- $\zeta$ : matriz-coluna dos esforços de atrito generalizados aplicados nos rotores, em sentido oposto aos seus deslocamentos.
- $\dot{\mathbb{i}}$ : matriz-coluna de correntes elétricas que fluem pelas armaduras dos atuadores.
- $\mathbb{v}$ : matriz-coluna de tensões elétricas aplicadas nos terminais dos atuadores.
- $r_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ : relação de transmissão do i-ésimo redutor.
- $\underline{r}$ : matriz diagonal de relações de transmissão dos redutores.
- $\underline{b}$ : matriz diagonal de coeficientes de atrito viscoso.
- $\underline{\mu}$ : matriz diagonal de coeficientes de atrito seco.
- $\underline{k_t}$ : matriz diagonal de constantes de torque dos atuadores.
- $\underline{k_e}$ : matriz diagonal de constantes de força contra-eletromotriz dos atuadores.
- $\underline{R}$ : matriz diagonal de resistências elétricas dos atuadores.
- $\underline{L}$ : matriz diagonal de indutâncias dos atuadores.

### 4.3.1 Cinemática

#### 4.3.1.1 Cinemática de velocidades angulares

Devido aos redutores de velocidade e aos fusos de esferas, o deslocamento relativo  $q_{r_i}$  gerado pelo i-ésimo rotor é convertido em um deslocamento  $q_i$  através da seguinte relação:

$$\mathbb{q}_r = \underline{r} \mathbb{q} \quad (4.126)$$

Sabe-se que a velocidade angular de cada rotor  $\mathcal{R}_i$  em relação ao referencial anterior  $\mathcal{B}_{i-1}$  é dada por:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \dot{q}_i \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_{i-1}} = r_i \dot{q}_i \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.127)$$

Aplicando (4.127) no sistema  $\mathbb{N}$ , temos que:

$$\omega'_{r_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = r_i \dot{q}_i \mathbf{k}_{i-1}(\mathbf{q}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.128)$$

Para obter a velocidade angular de cada rotor em relação ao referencial  $\mathcal{N}$ , parte-se do rotor  $\mathcal{R}_1$ . Tendo em vista que  $\mathcal{B}_0$  e  $\mathcal{N}$  são o mesmo referencial, temos que:

$$[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_1}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}} = [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_1}^{\mathcal{B}_0}]_{\mathbb{N}} \quad (4.129)$$

Ou seja

$$\omega_{r1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \omega'_{r1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = r_1 \dot{q}_1 \mathbf{k}_{i-1}(\mathbf{q}) \quad (4.130)$$

$\omega_{r1}$  pode ser escrito como:

$$\omega_{r1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{\omega_{r1}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.131)$$

Sendo

$$\mathbb{J}_{\omega_{r1}}(\mathbf{q}) = r_1 \mathbf{k}_{i-1} \partial_{q_1} \mathbf{q}^T \quad (4.132)$$

Para obter a velocidade angular dos outros rotores, utiliza-se o princípio de composição de movimento para velocidades angulares (equação (A.44)):

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \quad (4.133)$$

Aplicando (4.133) no sistema  $\mathbb{N}$ , temos que:

$$\omega_{r_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \omega_{i-1} + \omega'_{r_i} \quad (4.134)$$

Portanto:

$$\omega_{r_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{cases} \omega'_{r1} & \text{se } i = 1 \\ \omega_{i-1} + \omega'_{r_i} & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.135)$$

Além disso, substituindo (4.34) e (4.128) em (4.134), temos que:

$$\omega_{r_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{\omega_{i-1}} \dot{\mathbf{q}} + r_i \mathbf{k}_{i-1} \partial_{q_i} \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}} = \left( \mathbb{J}_{\omega_{i-1}} + r_i \mathbf{k}_{i-1} \partial_{q_i} \mathbf{q}^T \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.136)$$

Portanto:

$$\omega_{r,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{\omega_{r,i}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.137)$$

Sendo

$$\mathbb{J}_{\omega_{r,i}}(\mathbf{q}) = \begin{cases} r_1 \mathbb{k}_0 \partial_{q_1} \mathbf{q}^\top & \text{se } i = 1 \\ \mathbb{J}_{\omega_{i-1}} + r_i \mathbb{k}_{i-1} \partial_{q_i} \mathbf{q}^\top & \text{se } i > 1 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.138)$$

#### 4.3.1.2 Cinemática de acelerações angulares

Sabe-se que a aceleração angular de cada rotor  $\mathcal{R}_i$  em relação ao referencial anterior  $\mathcal{B}_{i-1}$  é dada por:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \ddot{q}_{r,i} \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_{i-1}} = r_i \ddot{q}_i \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.139)$$

Aplicando (4.139) no sistema  $\mathcal{N}$ , temos que:

$$\boldsymbol{\alpha}'_{r,i}(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}_i) = r_i \ddot{q}_i \mathbb{k}_{i-1}(\mathbf{q}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.140)$$

Para obter a aceleração angular de cada rotor em relação ao referencial  $\mathcal{N}$ , parte-se do rotor  $\mathcal{R}_1$ . Tendo em vista que  $\mathcal{B}_0$  e  $\mathcal{N}$  são o mesmo referencial, temos que:

$$[\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}_1}^{\mathcal{N}}]_{\mathcal{N}} = [\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}_1}^{\mathcal{B}_0}]_{\mathcal{N}} \quad (4.141)$$

Ou seja

$$\alpha_{r,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \alpha'_{r,1}(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}_1) = r_1 \ddot{q}_1 \mathbb{k}_{i-1}(\mathbf{q}) \quad (4.142)$$

$\alpha_{r,1}$  pode ser escrito como:

$$\alpha_{r,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{\omega_{r,1}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\alpha}_{r,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.143)$$

Sendo

$$\underline{\alpha}_{r,1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad (4.144)$$

Para obter a aceleração angular dos outros rotores, utiliza-se o princípio de composição de movimento para acelerações angulares (equação (A.47)):

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \quad (4.145)$$

Aplicando (4.133) no sistema N, temos que:

$$\omega_{r,i}(\dot{q}, \ddot{q}) = \alpha_{i-1} + \alpha'_{r,i} + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_{r,i} \quad (4.146)$$

Portanto:

$$\alpha_{r,i}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{cases} \alpha'_{r,1} & \text{se } i = 1 \\ \alpha_{i-1} + \alpha'_{r,i} + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_{r,i} & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.147)$$

Além disso, substituindo (4.66) e (4.140) em (4.146), temos que:

$$\begin{aligned} \alpha_{r,i}(q, \dot{q}, \ddot{q}) &= J_{\omega,i-1} \dot{q} + \underline{\alpha}_{i-1} + r_i k_{i-1} \partial_{q_i} q^T \ddot{q} + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_{r,i} \\ &= (J_{\omega,i-1} + r_i k_{i-1} \partial_{q_i} q^T) \ddot{q} + \underline{\alpha}_{i-1} + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_{r,i} \\ &= J_{\omega_r,i} \cdot \ddot{q} + \underline{\alpha}_{i-1} + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_{r,i} \end{aligned} \quad (4.148)$$

Portanto:

$$\alpha_{r,i}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = J_{\omega_r,i}(q) \ddot{q} + \underline{\alpha}_{r,i}(q, \dot{q}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.149)$$

Sendo

$$\underline{\alpha}_{r,i}(q, \dot{q}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1 \\ \underline{\alpha}_{i-1} + S(\omega_{i-1}) \cdot \omega'_{r,i} & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.150)$$

### 4.3.2 Dinâmica Mecânica

O modelo dinâmico de  $\mathcal{B}'$  é obtido utilizando um procedimento de acoplamento de subsistemas baseado no método Recursivo Modular de Modelagem (RMM) [69], e é dado por:

$$M^*(q) \ddot{q} + v^*(q, \dot{q}) + g^*(q) = u^* \quad (4.151)$$

Sendo:

$$M^*(q) = M(q) + \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_r,i}^T I_{r,i} J_{\omega_r,i} \quad (4.152)$$

$$v^*(q, \dot{q}) = v(q, \dot{q}) + \underline{r} \zeta(r \dot{q}) + \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_r,i}^T (I_{r,i} \underline{\alpha}_{r,i} + S(\omega_{r,i}) \cdot I_{r,i} \omega_{r,i}) \quad (4.153)$$

$$g^*(q) = g(q) \quad (4.154)$$

$$\mathbf{u}^* = \underline{r} \underline{k}_t \hat{\mathbf{i}} \quad (4.155)$$

Segue abaixo, a dedução.

#### 4.3.2.1 Modelo dos subsistemas rotores

O modelo dinâmico de cada rotor pode ser obtido por Newton-Euler, pois são considerados como corpos rígidos com inércia puramente rotativa, livres no espaço. Os efeitos da massas do rotor, do estator e do redutor podem facilmente incluídos no modelo simplesmente atualizando os valores dos parâmetros de inércia dos ligamentos. Sendo assim, através da segunda lei do movimento de Euler (balanço de momentos), obtemos os esforços iniciais aplicados em cada rotor:

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R}_i} = -\mathbf{I}_{\mathcal{R}_i} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}_i}^N - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^N \wedge (\mathbf{I}_{\mathcal{R}_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^N), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.156)$$

Aplicando as equações vetoriais no sistema N, temos:

$$[\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{R}_i}]_N = -[\mathbf{I}_{\mathcal{R}_i}]_{N|N} \cdot [\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}_i}^N]_N - \mathbb{S}([\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^N]_N) \cdot [\mathbf{I}_{\mathcal{R}_i}]_{N|N} \cdot [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^N]_N, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.157)$$

Ou seja:

$$\bar{\mathbb{F}}_{r_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = -\mathbb{I}_{r_i} \cdot \mathbb{a}_{r_i} - \mathbb{S}(\boldsymbol{\omega}_{r_i}) \cdot \mathbb{I}_{r_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_{r_i} \quad (4.158)$$

Tendo em vista que os rotores possuem simetria radial em relação a seus eixos de rotação, e são supostamente平衡ados, suas rotações próprias não afetam seus tensores de inércia

$$\mathbb{I}'_{r_i} = [\mathbf{I}_{\mathcal{R}_i}]_{\mathbf{R}_i|\mathbf{R}_i} = [\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathbf{B}_i|\mathbf{B}_i} \quad (4.159)$$

Sendo assim

$$[\mathbf{I}_{\mathcal{R}_i}]_{N|N} = [\mathbf{1}]_{N|\mathbf{B}_i} [\mathbf{I}_{\mathcal{B}_i}]_{\mathbf{B}_i|\mathbf{B}_i} [\mathbf{1}]_{\mathbf{B}_i|N} \quad (4.160)$$

Ou seja

$$\mathbb{I}_{r_i}(\mathbf{q}) = \mathbb{R}_i(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{I}'_{r_i} \cdot \mathbb{R}_i(\mathbf{q})^T, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.161)$$

Como os subsistemas estão desacoplados, não há esforços reativos, portanto o modelo dinâmico de cada subsistema rotor pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbb{F}}_{r_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \emptyset \quad (4.162)$$

Além disso, definindo as quasi-coordenadas:

$$d\pi_{ri} = \omega_{ri} dt \quad (4.163)$$

Temos que o trabalho virtual associado a cada subsistema é dado por:

$$\delta W_{ri} = \delta \pi_{ri}^T \cdot \bar{\mathbb{F}}_{ri} \quad (4.164)$$

#### 4.3.2.2 Modelo do subsistema serial

O modelo do subsistema serial utilizado é o mesmo que foi deduzido anteriormente considerando  $u = 0$ . O efeito das forças ativas aplicadas pelos atuadores será contabilizado na próxima subseção. Sendo assim, os esforços generalizados não-reativos do subsistema serial são dados por:

$$\bar{\mathbb{F}}_s(q, \dot{q}, \ddot{q}) = -M(q) \ddot{q} - v(q, \dot{q}) - g(q) \quad (4.165)$$

Além disso, o trabalho virtual associado a este subsistema é dado por:

$$\delta W_s = \delta q^T \cdot \bar{\mathbb{F}}_s \quad (4.166)$$

#### 4.3.2.3 Sistemas de forças ativas generalizadas

Considere também um subsistema constituído pelos esforços que os atuadores aplicam em seus rotores. Os torques gerados pelos atuadores são proporcionais à corrente elétrica que flui pelas suas armaduras e são aplicados na direção dos deslocamentos virtuais relativos dos rotores. Além disso, é possível que hajam esforços de atrito devido ao atrito gerado nos mancais e nas engrenagens do redutor, aplicados na direção oposta aos deslocamentos virtuais relativos dos rotores. Sendo assim, o trabalho virtual associado a este subsistema é dado por:

$$\delta W_\tau = \delta q_r^T \cdot (k_t \dot{i} - \zeta) \quad (4.167)$$

Sendo

$$\zeta(\dot{q}_r) = b \dot{q}_r + \mu \operatorname{sign}(\dot{q}_r) \quad (4.168)$$

Considerando modelo de atrito viscoso e atrito seco de Coulomb.

#### 4.3.2.4 Vínculos entre subsistemas

Tendo em vista que o sistema mecânico  $\mathcal{B}'$  tem  $\nu$  graus de liberdade, e que  $\mathbf{q}$  é uma matriz-culuna de  $\nu$  coordenadas generalizadas independentes, podemos relacionar os deslocamentos virtuais  $\delta q_r$  e  $\delta \pi_{r,i}$  com os deslocamentos virtuais  $\delta q$ , ou seja, obter os vínculos cinemáticos entre os subsistemas.

Para relacionar  $\delta q_r$  com  $\delta q$  basta aplicar o operador variação em (4.126):

$$\delta q_r = \underline{r} \delta q \quad (4.169)$$

Para relacionar  $\delta \pi_{r,i}$  com  $\delta q$ , aplica-se a relação (4.137) em (4.163):

$$d\pi_{r,i} = J_{\omega_r i}(\mathbf{q}) dq \quad (4.170)$$

Portanto:

$$\delta \pi_{r,i} = J_{\omega_r i}(\mathbf{q}) \delta q \quad (4.171)$$

#### 4.3.2.5 Acoplamento de subsistemas

Tendo em vista que um procedimento mais detalhado para acoplamento de subsistemas já foi apresentado, nesta subseção ele será realizado de forma mais sucinta.

Pelo princípio de d'Alembert, temos que

$$\delta W_r + \delta W_s + \sum_{i=1}^{\nu} \delta W_{r,i} = 0 \quad (4.172)$$

Ou seja:

$$\delta q_r^T \cdot \left( k_t \mathbf{i} - \zeta + \delta q^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_s + \sum_{i=1}^{\nu} \delta \pi_{r,i}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{r,i} \right) = 0 \quad (4.173)$$

Sabe-se que os deslocamentos virtuais  $\delta q$ ,  $\delta q_r$  e  $\delta \pi_{r,i}$ , com  $i = 1, \dots, \nu$ , não são independentes entre si. Porém, é possível relacionar  $\delta q_r$  e  $\delta \pi_{r,i}$  com os deslocamentos virtuais  $\delta q$  através das equações (4.169) e (4.171). Sendo assim:

$$(\underline{r} \delta q)^T \cdot \left( k_t \mathbf{i} - \zeta + \delta q^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_s + \sum_{i=1}^{\nu} (J_{\omega_r i} \delta q)^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{r,i} \right) = 0 \quad (4.174)$$

Ou seja:

$$\delta q^T \cdot \left( \underline{r} k_t \dot{\underline{q}} - \zeta + \bar{F}_s + \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_r i}^T \bar{F}_{r i} \right) = 0 \quad (4.175)$$

Tendo em vista que as coordenadas  $q$  são independentes, as variações  $\delta q$  são arbitrárias. Sendo assim, as equações dinâmicas do sistema são dadas por:

$$\underline{r} k_t \dot{\underline{q}} - \underline{r} \zeta + \bar{F}_s + \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_r i}^T \bar{F}_{r i} = 0 \quad (4.176)$$

Substituindo (4.158) e (4.165) em (4.176), temos:

$$\underline{r} k_t \dot{\underline{q}} - \underline{r} \zeta - M \ddot{q} - v - g - \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_r i}^T (\underline{l}_{r i} \cdot \underline{\omega}_{r i} + S(\omega_{r i}) \cdot \underline{l}_{r i} \cdot \omega_{r i}) = 0 \quad (4.177)$$

Substituindo (4.149) em (4.177):

$$\underline{r} k_t \dot{\underline{q}} - \underline{r} \zeta - M \ddot{q} - v - g - \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_r i}^T (\underline{l}_{r i} \cdot (J_{\omega_r i} \cdot \ddot{q} + \underline{\omega}_{r i}) + S(\omega_{r i}) \cdot \underline{l}_{r i} \cdot \omega_{r i}) = 0 \quad (4.178)$$

Sendo assim, obtemos o modelo dinâmico mostrado anteriormente:

$$M^*(q) \ddot{q} + v^*(q, \dot{q}) + g^*(q) = u^* \quad (4.151)$$

Sendo:

$$M^*(q) = M(q) + \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_r i}^T \underline{l}_{r i} J_{\omega_r i} \quad (4.152)$$

$$v^*(q, \dot{q}) = v(q, \dot{q}) + \underline{r} \zeta (\underline{r} \dot{q}) + \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_r i}^T (\underline{l}_{r i} \underline{\omega}_{r i} + S(\omega_{r i}) \cdot \underline{l}_{r i} \omega_{r i}) \quad (4.153)$$

$$g^*(q) = g(q) \quad (4.154)$$

$$u^* = \underline{r} k_t \dot{\underline{q}} \quad (4.155)$$

## 4.4 Modelo completo

O modelo do sistema elétrico equivalente de um motor de corrente contínua é dado por uma fonte de tensão variável ligada em série a um indutor, um resistor, e uma força contra-eletromotriz diretamente proporcional à velocidade angular do rotor em relação ao estator, ou seja:

$$L \frac{di}{dt} + R i + k_e \omega = u \quad (4.179)$$

Tendo em vista que todas as juntas de um mecanismo serial são atuadas, a equação matricial da dinâmica elétrica do sistema é dada por:

$$\underline{L} \frac{d\ddot{\mathbf{i}}}{dt} + \underline{R} \dot{\mathbf{i}} + \underline{k}_e \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{v} \quad (4.180)$$

Sendo assim, juntando as equações (4.151) e (4.180), obtemos a dinâmica do sistema como um todo:

$$\begin{cases} \mathbb{M}^*(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{v}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbb{g}^*(\mathbf{q}) = \underline{r} \underline{k}_t \dot{\mathbf{i}} \\ \underline{L} \frac{d\ddot{\mathbf{i}}}{dt} + \underline{R} \dot{\mathbf{i}} + \underline{r} \underline{k}_e \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \end{cases} \quad (4.181)$$

## 5 MODELAGEM DE MANIPULADORES PARALELOS

Esta subseção tem o intuito de apresentar um algoritmo genérico para a obtenção do modelo dinâmico de mecanismos paralelos cujo efetuador realiza apenas movimentos de translação. O algoritmo apresentado é implementável em linguagens de programação comumente usadas atualmente, como C++, Java e Python, sem necessitar de recursos de manipulação simbólica.

Para a obtenção do modelo do mecanismo paralelos, são necessários apenas os modelos de mecanismos seriais deduzidos utilizando o algoritmo apresentado anteriormente, do modelo do efetuador, e de 7 matrizes constantes que são utilizadas para descrever a arquitetura do mecanismo paralelo.

Para realizar a modelagem de mecanismos paralelos a partir de subsistemas seriais já deduzidos, é necessário introduzir mais alguns conceitos:

Sejam  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$   $n + 1$  subsistemas mecânicos e  $\mathcal{M}$  um sistema mecânico de  $\nu^{\#}$  graus de liberdade gerado pelo acoplamento dos subsistemas citados. Definimos:

- $\mathcal{B}_0$ : Subsistema plataforma/efetuador do manipulador paralelo.
- $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, n$ :  $i$ -ésimo subsistema serial.
- $X_0$ : Corpo rígido plataforma/efetuador do manipulador paralelo.
- $X_i, i = 1, \dots, n$ : Corpo rígido efetuador do subsistema serial  $\mathcal{B}_i$ .
- $N_i, i = 0, \dots, n$ : sistema de coordenadas da base fixa do subsistema  $\mathcal{B}_i$ , solidário a  $\mathcal{N}$ .
- $x_0$ : ponto no espaço fixo ao centro de massa de  $X_0$ .
- $x_i, i = 1, \dots, n$ : ponto no espaço fixo a  $X_i$ .

- $\mathbf{X}_i, i = 0, \dots, n$ : sistema de coordenadas solidário a  $\mathcal{X}_i$  com origem em  $\mathbf{x}_i$ .
- $m$ : massa da plataforma/efetuador  $\mathcal{X}_0$ .
- $\mathbf{\ddot{g}}$ : Vetor aceleração gravitacional escrito na base  $\mathbf{N}_0$ , ou seja,  $[\mathbf{\gamma}]_{\mathbf{N}_0}$ .
- $\mathbf{q}_0$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas do subsistema  $\mathcal{B}_0$ . São as coordenadas do centro de massa da plataforma/efetuador  $\mathcal{X}_0$  no sistema  $\mathbf{N}_0$ , ou seja  $[\mathbf{x}_0]_{\mathbf{N}_0}$ .
- $\mathbf{q}_i, i = 1, \dots, n$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas do subsistema  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbf{q}_\emptyset$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas dos subsistemas seriais. Definida como  $\mathbf{q}_\emptyset = [\mathbf{q}_1^\top \dots \mathbf{q}_n^\top]^\top$ .
- $\mathbf{q}$ : matriz-coluna contendo todas as coordenadas generalizadas do sistema  $\mathcal{M}$ . Definida como  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_\emptyset^\top]^\top$ .
- $\mathbf{q}^\#$ : matriz-coluna de  $\nu^\#$  coordenadas generalizadas independentes.
- $\mathbf{q}^\circ$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas redundantes (contém as componentes de  $\mathbf{q}$  não pertencentes a  $\mathbf{q}^\#$ )
- $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{q})$ : matriz-coluna dos vínculos de posição entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por  $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ .
- $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{q})$ : matriz-coluna dos vínculos de orientação entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por  $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ .
- $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$ : matriz-coluna dos vínculos de coordenadas generalizadas entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ .
- $\mathbf{x}_i(\mathbf{q}_i), i = 1, \dots, n$ :  $[\mathbf{x}_i]_{\mathbf{N}_i}$  escrito em função das coordenadas  $\mathbf{q}_i$ .
- $\mathbb{J}_{v\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i), i = 1, \dots, n$ : jacobiano de velocidades  $\mathbb{J}_v$  do subsistema  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbb{J}_{\omega\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i), i = 1, \dots, n$ : jacobiano de velocidades angulares  $\mathbb{J}_\omega$  do subsistema  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathfrak{Q}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i), i = 1, \dots, n$ : matriz-coluna  $\mathfrak{Q}$  do subsistema  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathfrak{V}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i), i = 1, \dots, n$ : matriz-coluna  $\mathfrak{V}$  do subsistema  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathfrak{V}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i), i = 1, \dots, n$ :  $[\mathbf{v}_{\mathbf{x}_i}^N]_{\mathbf{N}_i} = \mathbb{J}_{v\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i) \cdot \dot{\mathbf{q}}_i$ , ou seja matriz-coluna de componentes velocidade do efetuador  $\mathcal{X}_i$ .

- $\omega_{\mathcal{B}_i}(q_i, \dot{q}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ :  $[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^N]_{N_i} = J_{\omega_{\mathcal{B}_i}}(q_i) \cdot \dot{q}_i$ , ou seja matriz-coluna de componentes velocidade angular do efetuador  $X_i$ .
- $M_{\mathcal{B}_i}(q_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ : matriz de inércia generalizada do subsistema  $\mathcal{B}_i$ .
- $v_{\mathcal{B}_i}(q_i, \dot{q}_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ : matriz-coluna dos esforços de inércia giroscópica e atrito generalizados do subsistema  $\mathcal{B}_i$ .
- $g_{\mathcal{B}_i}(q_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ : matriz-coluna dos esforços gravitacionais generalizados do subsistema  $\mathcal{B}_i$ .
- $u_{\mathcal{B}_i}$ ,  $i = 0, \dots, n$ : matriz-coluna dos esforços ativos externos generalizados aplicados ao subsistema  $\mathcal{B}_i$ .
- $\check{x}_0$ : representação via quaternion unitário da matriz de rotação  $[1]_{N_0 \mid X_0}$  (orientação do efetuador/plataforma do mecanismo paralelos).
- $\check{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ : representação via quaternion unitário da matriz de rotação  $[1]_{N_i \mid X_i}$  (orientação do efetuador da cadeia serial  $\mathcal{B}_i$ ).
- $\check{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ : representação via quaternion unitário da matriz de rotação  $[1]_{N_0 \mid N_i}$ .
- $\check{x}'_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ : representação via quaternion unitário da matriz de rotação  $[1]_{X_i \mid X_0}$ .

## 5.1 Modelo dos subsistemas

O modelo dinâmico de cada subsistema desacoplado pode ser escrito como:

$$\bar{F}_{\mathcal{B}_i}(u_i, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) = u_{\mathcal{B}_i} - (M_{\mathcal{B}_i}(q_i) \ddot{q}_i + v_{\mathcal{B}_i}(q_i, \dot{q}_i) + g_{\mathcal{B}_i}(q_i)) = 0, i = 0, \dots, n \quad (5.1)$$

Sendo que para  $i = 0$  temos o modelo do efetuador/plataforma e para  $i > 0$  temos os modelos dos mecanismos seriais obtidos anteriormente.

O trabalho virtual dos esforços não-reativos (ativos e inerciais) associado a cada subsistema é dado por:

$$\delta W_i = \delta q_i^T \cdot \bar{F}_{\mathcal{B}_i}, i = 0, \dots, n \quad (5.2)$$

Para os subsistemas seriais, as matrizes  $M_{\mathcal{B}_i}$ ,  $v_{\mathcal{B}_i}$  e  $g_{\mathcal{B}_i}$  são obtidas utilizando o algoritmo de modelagem de mecanismos seriais apresentado anteriormente. Para o efetuador,

iremos utilizar o modelo de um corpo rígido livre no espaço, que realiza apenas translação. Sendo assim, aplicando Teorema do Movimento do Baricentro no efetuador, obtemos os esforços não-reativos nele aplicados:

$$\mathbf{f}_{x_0} = -m\mathbf{a}_{x_0}^N + m\boldsymbol{\gamma} \quad (5.3)$$

Aplicando as equações vetoriais no sistema N, temos:

$$[\mathbf{f}_{B_0}]_{N_0} = -m [\mathbf{a}_{x_0}^N]_{N_0} + m [\boldsymbol{\gamma}]_{N_0} \quad (5.4)$$

Ou seja

$$\bar{\mathbb{F}}_{B_0}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = -m\ddot{q}_0 + m\ddot{\gamma} \quad (5.5)$$

Portanto:

$$\mathbb{M}_{B_0} = m\mathbb{1} \quad (5.6)$$

$$\mathbb{v}_{B_0} = \emptyset \quad (5.7)$$

$$\mathbb{g}_{B_0} = -m\ddot{\gamma} \quad (5.8)$$

## 5.2 Vínculos cinemáticos entre subsistemas

### 5.2.1 Vínculos de posição

Seja  $x_i$  um ponto pertencente à plataforma/efetuador  $X_0$  e também ao efetuador  $X_i$ . Sendo assim, é possível relacionar a posição do ponto  $x_i$  em relação a  $o_{N_0}$ , seguindo tanto pela da plataforma/efetuador  $B_0$ , quanto pela cadeia serial  $\mathcal{B}_i$ :

$$\mathbf{r}_{o_{N_0}|x_i} = \mathbf{r}_{o_{N_0}|x_0} + \mathbf{r}_{x_0|x_i} = \mathbf{r}_{o_{N_0}|o_{N_i}} + \mathbf{r}_{o_{N_i}|x_i} \quad (5.9)$$

Aplicando a equação vetorial no sistema  $N_0$ :

$$[x_i]_{N_0} = [x_0]_{N_0} + [\mathbf{1}]_{N_0|x_0} [x_i]_{x_0} = [o_{N_i}]_{N_0} + [\mathbf{1}]_{N_0|N_i} [x_i]_{N_i} \quad (5.10)$$

Sabe-se que  $[x_0]_{N_0} = q_0$  e  $[x_i]_{N_i} = \alpha_i(q_i)$ . Tendo em vista que  $[x_i]_{x_0}$ ,  $[\mathbf{1}]_{N_0|N_i}$ ,  $[o_{N_i}]_{N_0}$  e  $[\mathbf{1}]_{N_0|x_0}$  são constantes, definindo:

$$\mathbf{d}_i = [\mathbf{o}_{N_i}]_{N_0} - [\mathbf{1}]_{N_0 \times N_0} [\mathbf{x}_i]_{X_0}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.11)$$

$$\mathbb{E}_i = [\mathbf{1}]_{N_0 \times N_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.12)$$

Temos:

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{d}_i + \mathbb{E}_i \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{q}_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.13)$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbb{E}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\mathbf{q}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Além disso, em alguns casos é necessário incluir vínculos afins entre as coordenadas generalizadas, ou seja:

$$\mathbb{D}_\oplus \cdot \mathbf{q}_0 = \mathbf{d}_\oplus + \mathbb{F}_\oplus \cdot \mathbf{q}_\emptyset \quad (5.15)$$

Juntando a equação (5.15) à equação (5.14), temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \\ \mathbb{D}_\oplus \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n \\ \mathbf{d}_\oplus \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbb{E}_n \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\mathbf{q}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbb{F}_\oplus \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_\emptyset \quad (5.16)$$

Sendo assim, os vínculos de posição entre subsistemas podem ser descritos de maneira genérica por:

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{q}) = \mathbb{D} \cdot \mathbf{q}_0 - \mathbf{d} - \mathbb{E} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{q}_\emptyset) - \mathbb{F} \cdot \mathbf{q}_\emptyset = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Sendo:

$$\mathbb{D} = \left[ \mathbf{1} \quad \dots \quad \mathbf{1} \quad \mathbb{D}_\oplus^T \right]^T \quad (5.18)$$

$$\mathbf{d} = \left[ \mathbf{d}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{d}_n^T \quad \mathbf{d}_\oplus^T \right]^T \quad (5.19)$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{E}_n \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\mathbb{F} = \left[ \mathbb{0}^T \quad \dots \quad \mathbb{0}^T \quad \mathbb{F}_{\oplus}^T \right]^T \quad (5.21)$$

$$\mathbb{x}(\mathbf{q}_\emptyset) = \left[ \mathbb{x}_1(\mathbf{q}_1)^T \quad \dots \quad \mathbb{x}_n(\mathbf{q}_n)^T \right]^T \quad (5.22)$$

### 5.2.2 Vínculos de orientação

Supondo que os efetuadores  $\mathcal{X}_i$  de cada cadeia serial estejam ligados rigidamente à plataforma/efetuador  $\mathcal{X}_0$ , temos que as matrizes de rotação  $[\mathbf{1}]_{\mathcal{X}_i \mid \mathcal{X}_0}$  são constantes e conhecidas. Além disso, tendo em vista que o efetuador/plataforma do mecanismo paralelo só translada, a matriz de rotação  $[\mathbf{1}]_{\mathcal{N}_0 \mid \mathcal{X}_0}$  também é constante e conhecida. Sendo assim, é possível obter a seguinte relação:

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{N}_0 \mid \mathcal{X}_0} = [\mathbf{1}]_{\mathcal{N}_0 \mid \mathcal{N}_i} \cdot [\mathbf{1}]_{\mathcal{N}_i \mid \mathcal{X}_i} \cdot [\mathbf{1}]_{\mathcal{X}_i \mid \mathcal{X}_0} \quad (5.23)$$

Passando para a representação por quaternions unitários, temos:

$$\check{\mathbf{x}}_0 = \pm \check{\mathbf{n}}_i \otimes \check{\mathbf{x}}_i \otimes \check{\mathbf{x}}'_i \quad (5.24)$$

O sinal  $\pm$  vem do fato de que dois quaternions com sinais opostos representam a mesma rotação.

Utilizando as definições de produto de quaternions apresentadas no apêndice B (equações (B.3), (B.4) e (B.5)), temos:

$$\check{\mathbf{x}}_0 = \pm \check{\mathbf{Q}}_i \cdot \check{\mathbf{x}}_i \quad (5.25)$$

Sendo

$$\check{\mathbf{Q}}_i = \check{\mathbf{Q}}_I(\check{\mathbf{n}}_i) \cdot \check{\mathbf{Q}}_{II}(\check{\mathbf{x}}'_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.26)$$

A equação (5.25) poderia ser utilizada como equação vincular de orientação (escolhendo o sinal de + ou de -). Porém, tendo em vista que é uma equação que relaciona matrizes-coluna de ordem 4, haveria 4 equações escalares para restringir 3 graus de li-

berdade, ou seja, um número maior de equações do que o necessário. Deste modo, será apresentada uma maneira alternativa de representar os vínculos de orientação sem utilizar mais equações do que o necessário.

Considere o seguinte problema de otimização com restrição:

$$\begin{aligned} \underset{\check{q}}{\text{Min/Max}} \quad & (\check{q} - \check{p})^T (\check{q} - \check{p}) \\ \text{tal que} \quad & \check{q}^T \check{q} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Para o caso de  $\check{p}$  também ser um quaternion unitário, as únicas soluções do problema são claramente  $\check{q} = \check{p}$  (minimização) e  $\check{q} = -\check{p}$  (maximização). Porém, vamos resolver o problema sem utilizar esta suposição.

O problema pode ser convertido num problema de otimização sem restrições através do uso de multiplicadores de Lagrange:

$$\underset{\check{q}, \lambda}{\text{Min}} \quad \mathcal{L}(\check{q}, \lambda) = (\check{q} - \check{p})^T (\check{q} - \check{p}) + \lambda(\check{q}^T \check{q} - 1) \quad (5.28)$$

Aplicando o operador variação na função Lagrangeana, temos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= 2 \delta \check{q}^T (\check{q} - \check{p}) + 2\lambda \delta \check{q}^T \check{q} + \delta \lambda(\check{q}^T \check{q} - 1) \\ &= 2 \delta \check{q}^T ((1 + 2\lambda)\check{q} - \check{p}) + \delta \lambda(\check{q}^T \check{p} - 1) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Como pode ser visto no apêndice B (subseção B.2.7), é possível relacionar derivadas temporais de quaternions unitários com velocidades angulares:

$$\dot{\check{q}} = \check{C}(\check{q}) \cdot \omega \quad (B.19)$$

Definindo:

$$d\pi = \omega dt \quad (5.30)$$

Temos que:

$$\delta \check{q} = \check{C}(\check{q}) \cdot \delta \pi \quad (5.31)$$

Substituindo a equação (5.31) em (5.29), temos que:

$$\delta \mathcal{L} = 2 \delta \pi^T \check{C}(\check{q})^T ((1 + 2\lambda)\check{q} - \check{p}) + \delta \lambda(\check{q}^T \check{q} - 1) \quad (5.32)$$

Tendo em vista que

$$\check{C}^T(\check{q}) \cdot \check{p} = 0 \quad (B.21)$$

Temos:

$$\delta \mathcal{L} = -2 \delta \pi^T \check{C}^T(\check{q}) \cdot \check{p} + \delta \lambda (\check{q}^T \check{q} - 1) \quad (5.33)$$

Sendo assim, impondo a estacionariadade da função Lagrangeana ( $\delta \mathcal{L} = 0$ ), temos:

$$\begin{cases} \check{C}^T(\check{q}) \cdot \check{p} = 0 \\ \check{q}^T \check{q} = 1 \end{cases} \quad (5.34)$$

Como já foi comentado anteriormente, para o caso de  $\check{p}$  também ser unitário, as únicas soluções do problema são  $\check{q} = \pm \check{p}$ . Sendo assim, temos que, para  $\check{q}$  e  $\check{p}$  unitários:

$$\check{C}^T(\check{q}) \cdot \check{p} = 0 \Rightarrow \check{q} = \pm \check{p} \quad (5.35)$$

Além disso, tendo em vista a equação (B.21), temos que:

$$\check{q} = \pm \check{p} \Rightarrow \check{C}^T(\check{q}) \cdot \check{p} = 0 \quad (5.36)$$

Portanto:

$$\check{C}^T(\check{q}) \cdot \check{p} = 0 \Leftrightarrow \check{q} = \pm \check{p} \quad (5.37)$$

Sendo assim, a equação (5.25) pode ser reescrita como:

$$\check{C}^T(\check{x}_0) \cdot \check{Q}_i \cdot \check{x}_i = 0 \quad (5.38)$$

Aplicando para cada uma das cadeias, as equações vinculares de orientação são dadas por:

$$\bar{\check{x}}(q) = \begin{bmatrix} \check{C}^T(\check{x}_0) \cdot \check{Q}_1 \cdot \check{x}_1(q_1) \\ \check{C}^T(\check{x}_0) \cdot \check{Q}_2 \cdot \check{x}_2(q_2) \\ \vdots \\ \check{C}^T(\check{x}_0) \cdot \check{Q}_n \cdot \check{x}_n(q_n) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.39)$$

### 5.2.3 Vínculos de coordenadas generalizadas

Os vínculos de coordenadas generalizadas são dados pela união dos vínculos de posição e dos vínculos de orientação (se estes existirem) , ou seja:

$$\bar{q}(q) = \begin{bmatrix} \bar{x}(q) \\ \bar{\dot{x}}(q) \end{bmatrix} = \emptyset \quad (5.40)$$

No caso de não haver vínculos de orientação entre os efetuadores das cadeias seriais e o efetuador do mecanismo paralelo (efetuador pontual, ou cadeias seriais ligadas ao efetuador através de juntas esféricas, no caso de mecanismos espaciais, ou juntas de rotação, no caso de mecanismos planos), os vínculos de coordenadas generalizadas são os vínculos de posição, ou seja:

$$\bar{q}(q) = \bar{x}(q) = \emptyset \quad (5.41)$$

### 5.2.4 Derivada temporal dos vínculos de posição

Derivando no tempo a equação (5.17), temos:

$$\dot{\bar{x}}(q, \dot{q}) = \mathbb{D} \cdot \dot{q}_0 - \mathbb{E} \cdot \dot{x}(q_0, \dot{q}_0) - \mathbb{F} \cdot \dot{q}_0 = \emptyset \quad (5.42)$$

A derivada  $\dot{x}$  pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\dot{x}(q_0, \dot{q}_0) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(q_1) \\ \vdots \\ x_n(q_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v\mathcal{B}_1}(q_1) \cdot \dot{q}_1 \\ \vdots \\ J_{v\mathcal{B}_n}(q_n) \cdot \dot{q}_n \end{bmatrix} = J_v^*(q_0) \cdot \dot{q}_0 \quad (5.43)$$

Sendo:

$$J_v^*(q_0) = \begin{bmatrix} J_{v\mathcal{B}_1}(q_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{v\mathcal{B}_n}(q_n) \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Assim, substituindo (5.43) em (5.42), obtemos:

$$\dot{\bar{x}}(q, \dot{q}) = \mathbb{D} \cdot \dot{q}_0 - (\mathbb{E} \cdot J_v^*(q_0) + \mathbb{F}) \cdot \dot{q}_0 = \emptyset \quad (5.45)$$

### 5.2.5 Derivada temporal dos vínculos de orientação

Derivando (5.39) no tempo, temos:

$$\dot{\tilde{x}}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \tilde{C}^T(\tilde{x}_0) \cdot \tilde{Q}_1 \cdot \tilde{C}(\tilde{x}_1(q_1)) \cdot \omega_{\mathcal{B}_1}(q_1, \dot{q}_1) \\ \vdots \\ \tilde{C}^T(\tilde{x}_0) \cdot \tilde{Q}_n \cdot \tilde{C}(\tilde{x}_n(q_n)) \cdot \omega_{\mathcal{B}_n}(q_n, \dot{q}_n) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.46)$$

Tendo em vista que

$$\omega_{\mathcal{B}_i}(q_i, \dot{q}_i) = J_{\omega_{\mathcal{B}_i}}(q_i) \cdot \dot{q}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.47)$$

E definindo

$$G_i(q_i) = \tilde{C}^T(\tilde{x}_0) \cdot \tilde{Q}_i \cdot \tilde{C}(\tilde{x}_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.48)$$

Temos:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} G_1(q_1) \cdot J_{\omega_{\mathcal{B}_1}}(q_1) \cdot \dot{q}_1 \\ \vdots \\ G_n(q_n) \cdot J_{\omega_{\mathcal{B}_n}}(q_n) \cdot \dot{q}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_1(q_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & G_n(q_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{\omega_{\mathcal{B}_1}}(q_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{\omega_{\mathcal{B}_n}}(q_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

Sendo assim, a derivada temporal dos vínculos de orientação pode ser descrita de maneira genérica por:

$$\dot{\tilde{x}}(q, \dot{q}) = G(q_\emptyset) \cdot J_{\omega}^*(q_\emptyset) \cdot \dot{q}_\emptyset = 0 \quad (5.50)$$

Sendo:

$$G(q_\emptyset) = \begin{bmatrix} G_1(q_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & G_n(q_n) \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$J_{\omega}^*(q_\emptyset) = \begin{bmatrix} J_{\omega_{\mathcal{B}_1}}(q_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{\omega_{\mathcal{B}_n}}(q_n) \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

### 5.2.6 Vínculos de quasi-velocidades

Os vínculos de quasi-velocidades são dados pela derivada temporal dos vínculos de velocidades de coordenadas generalizadas. No caso de existirem vínculos de orientação, temos:

$$\dot{\bar{q}}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}(q, \dot{q}) \\ \dot{\bar{x}}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \cdot \dot{q}_0 - \mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v^* \cdot \dot{q}_\theta - \mathbb{F} \cdot \dot{q}_\theta \\ \mathbb{G} \cdot \mathbb{J}_\omega^* \cdot \dot{q}_\theta \end{bmatrix} = \emptyset \quad (5.53)$$

Repare que (5.53) pode ser reescrita como:

$$\dot{\bar{q}}(q, \dot{q}) = \mathbb{A}(q) \cdot \dot{q} = \emptyset \quad (5.54)$$

Sendo  $\mathbb{A}$  dado por:

$$\mathbb{A}(q) = \begin{bmatrix} \mathbb{D} & -(\mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v^*(q_\theta) + \mathbb{F}) \\ \emptyset & \mathbb{G}(q_\theta) \cdot \mathbb{J}_\omega^*(q_\theta) \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

No caso de não haverem vínculos de orientação entre os efetuadores das cadeias seriais e o efetuador do mecanismo paralelo (efetuador pontual, ou cadeias seriais ligadas ao efetuador através de juntas esféricas, no caso de mecanismos espaciais, ou juntas de rotação, no caso de mecanismos planos), a matriz  $\mathbb{A}$  assume a seguinte expressão:

$$\mathbb{A}(q) = \begin{bmatrix} \mathbb{D} & -(\mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v^*(q_\theta) + \mathbb{F}) \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

### 5.2.7 Vínculos de quasi-acelerações

Os vínculos de quasi-velocidades são dados pela derivada temporal dos vínculos de velocidades de coordenadas generalizadas. Derivando (5.53), temos:

$$\ddot{\bar{q}}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{x}}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ \ddot{\bar{x}}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \cdot \ddot{q}_0 - \mathbb{E} \cdot (\mathbb{J}_v^* \cdot \ddot{q}_\theta + \mathbb{G}^*) - \mathbb{F} \cdot \ddot{q}_\theta \\ \mathbb{G} \cdot (\mathbb{J}_\omega^* \cdot \ddot{q}_\theta + \mathbb{G}^*) + \dot{\mathbb{G}} \cdot \omega^* \end{bmatrix} = \emptyset \quad (5.57)$$

Sendo:

$$\mathbb{G}^*(q_\theta, \dot{q}_\theta) = \left[ \mathbb{g}_{\mathcal{B}_1}(q_1, \dot{q}_1)^T \ \dots \ \mathbb{g}_{\mathcal{B}_n}(q_n, \dot{q}_n)^T \right]^T \quad (5.58)$$

$$\mathbb{G}^*(q_\theta, \dot{q}_\theta) = \left[ \mathbb{g}_{\mathcal{B}_1}(q_1, \dot{q}_1)^T \ \dots \ \mathbb{g}_{\mathcal{B}_n}(q_n, \dot{q}_n)^T \right]^T \quad (5.59)$$

$$\omega^*(q_\theta, \dot{q}_\theta) = \mathbb{J}_\omega^*(q_\theta) \cdot \dot{q}_\theta = \left[ \omega_{\mathcal{B}_1}(q_1, \dot{q}_1)^T \ \dots \ \omega_{\mathcal{B}_n}(q_n, \dot{q}_n)^T \right]^T \quad (5.60)$$

$$\dot{\mathbb{G}}(\mathbf{q}_\emptyset, \dot{\mathbf{q}}_\emptyset) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbb{G}}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dot{\mathbb{G}}_n(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

$$\dot{\mathbb{G}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \check{\mathbb{C}}^T(\check{\mathbf{x}}_0) \cdot \check{\mathbb{Q}}_i \cdot \check{\mathbb{C}}(\check{\mathbb{C}}(\check{\mathbf{x}}_i) \cdot \omega_{\mathcal{B}_i}) \quad (5.62)$$

Repare que (5.57) pode ser reescrita como:

$$\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbb{A}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad (5.63)$$

Sendo:

$$\mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -\mathbb{E} \cdot \mathbb{g}^*(\mathbf{q}_\emptyset, \dot{\mathbf{q}}_\emptyset) \\ \mathbb{G}(\mathbf{q}_\emptyset) \cdot \mathbb{g}^*(\mathbf{q}_\emptyset, \dot{\mathbf{q}}_\emptyset) + \dot{\mathbb{G}}(\mathbf{q}_\emptyset, \dot{\mathbf{q}}_\emptyset) \cdot \omega^*(\mathbf{q}_\emptyset, \dot{\mathbf{q}}_\emptyset) \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Para o caso de não haver vínculos de orientação, temos simplesmente:

$$\mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\mathbb{E} \cdot \mathbb{g}^*(\mathbf{q}_\emptyset, \dot{\mathbf{q}}_\emptyset) \quad (5.65)$$

### 5.3 Acoplamento de subsistemas

Seja  $\mathbb{f}$  a matriz-coluna contendo todos os sistemas de forças não-reativas generalizadas:

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{f}}_{\mathcal{B}_0} \\ \vdots \\ \bar{\mathbb{f}}_{\mathcal{B}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{u}_{\mathcal{B}_0} \\ \vdots \\ \mathbb{u}_{\mathcal{B}_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{M}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \nu_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \\ \vdots \\ \nu_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{g}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0) \\ \vdots \\ \mathbb{g}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_0) \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Definindo:

$$\mathbb{M}'(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{M}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

$$\nu'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left[ \nu_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)^T \quad \dots \quad \nu_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n)^T \right]^T \quad (5.68)$$

$$\mathbb{g}'(\mathbf{q}) = \left[ \mathbb{g}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0)^T \quad \dots \quad \mathbb{g}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_0)^T \right]^T \quad (5.69)$$

$$\mathbb{u}' = \left[ \mathbb{u}_{\mathcal{B}_0}^T \quad \dots \quad \mathbb{u}_{\mathcal{B}_n}^T \right]^T \quad (5.70)$$

(5.66) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{F} = \mathbb{U}' - \mathbb{M}'(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbb{V}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbb{G}'(\mathbf{q}) \quad (5.71)$$

Pelo princípio de D'Alembert, temos que:

$$\sum_{i=0}^n \delta W_i = \sum_{i=0}^n \delta \mathbf{q}_i^T \cdot \bar{\mathbb{F}}_{\mathcal{B}_i} = 0 \quad (5.72)$$

Ou seja:

$$\delta \mathbf{q}^T \cdot \mathbb{F} = 0 \quad (5.73)$$

Além disso, a partir da equação (5.54), temos que:

$$\mathbb{A}(\mathbf{q}) \cdot \delta \mathbf{q} = 0 \quad (5.74)$$

$\mathbf{q}$  pode ser escrita em função de  $\mathbf{q}^\#$  e  $\mathbf{q}^\circ$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{q} = \mathbb{Q}^\# \mathbf{q}^\# + \mathbb{Q}^\circ \mathbf{q}^\circ \quad (5.75)$$

Sendo  $\mathbb{Q}^\#$  e  $\mathbb{Q}^\circ$  matrizes constantes que contém apenas zeros e uns, contendo apenas um "1" por coluna. Aplicando o operador variação em (5.75), tem-se que:

$$\delta \mathbf{q} = \mathbb{Q}^\# \delta \mathbf{q}^\# + \mathbb{Q}^\circ \delta \mathbf{q}^\circ \quad (5.76)$$

Substituindo (5.76) em (5.74), podemos isolar  $\delta \mathbf{q}^\circ$  em função de  $\delta \mathbf{q}^\#$ :

$$\delta \mathbf{q}^\circ = -(\mathbb{A} \mathbb{Q}^\circ)^{-1} \mathbb{A} \mathbb{Q}^\# \delta \mathbf{q}^\# \quad (5.77)$$

Substituindo (5.77) em (5.76), obtemos  $\delta \mathbf{q}$  apenas em função de  $\mathbf{q}$  e  $\delta \mathbf{q}^\#$ :

$$\delta \mathbf{q} = \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \delta \mathbf{q}^\# \quad (5.78)$$

Sendo:

$$\mathbb{C}(\mathbf{q}) = \mathbb{Q}^\# - \mathbb{Q}^\circ (\mathbb{A} \mathbb{Q}^\circ)^{-1} \mathbb{A} \mathbb{Q}^\# \quad (5.79)$$

Além disso, repare que  $\mathbb{C}$  respeita a seguinte relação:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\# \quad (5.80)$$

Substituindo (5.78) em (5.73), temos:

$$\delta q^{\#T} C^T f = 0 \quad (5.81)$$

Tendo em vista que  $q^{\#}$  são coordenadas independentes,  $\delta q^{\#}$  são variações arbitrárias. Sendo assim, a equação dinâmica do mecanismo paralelo pode ser escrita como:

$$C^T f = 0 \quad (5.82)$$

Ou seja:

$$C(q)^T (M'(q) \ddot{q} + v'(q, \dot{q}) + g'(q)) = C(q)^T u' \quad (5.83)$$

## 5.4 Simulação dinâmica direta

É possível realizar a simulação dinâmica direta do sistema utilizando a equação dinâmica (5.83) e os vínculos de quasi-acelerações (5.57):

$$\begin{cases} C(q)^T (M'(q) \ddot{q} + v'(q, \dot{q}) + g'(q)) = C(q)^T u' \\ A(q) \ddot{q} + b(q, \dot{q}) = 0 \end{cases} \quad (5.84)$$

Reescrevendo em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} C(q)^T M'(q) \\ A(q) \end{bmatrix} \cdot \ddot{q} = \begin{bmatrix} C(q)^T (u' - v'(q, \dot{q}) - g'(q)) \\ -b(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

É necessário que as condições iniciais respeitem os vínculos de posição e velocidades. Com isso, teoricamente, os vínculos continuariam sendo respeitados na solução do sistema de EDOs. Porém, devido a erros numéricos de truncamento e erros associados ao método de integração numérica utilizado, haverá um acúmulo de erros que irá aumentar a cada passo de integração, e os vínculos de posição e velocidade eventualmente podem deixar de ser respeitados. Esse problema pode ser resolvido utilizando a técnica das constantes de estabilização de Baumgarte [8]. A idéia é substituir a equação dos vínculos de quasi-acelerações pela seguinte equação:

$$\ddot{q}'(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \lambda^2 \bar{q} = 0 \quad (5.86)$$

Substituindo (5.54) e (5.63) em (5.86), temos:

$$\ddot{\bar{q}}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + 2\lambda A(q) \cdot \dot{q} + \lambda^2 \bar{q}(q) = 0 \quad (5.87)$$

Impondo que (5.87) seja respeitada, garantimos que, teoricamente, as componentes de  $\bar{q}(q)$  tenderão exponencialmente a zero independentemente das condições iniciais, para  $\lambda > 0$ . Porém, devido aos erros de integração numérica, as componentes de  $\bar{q}(q)$  não irão convergir para zero, mas sim para uma faixa de valores em torno de zero. Quanto maior a ordem do método de integração numérica e quanto menor o passo de integração, menor será a ordem de grandeza dessa faixa de valores em torno do zero. Se essa faixa de valores for suficientemente pequena, pode-se considerar que os vínculos de posição e velocidades estão sendo respeitados mesmo havendo erros de truncamento e erros associados ao método de integração numérica utilizado.

É importante ressaltar que valores muito altos de  $\lambda$  podem comprometer a estabilidade numérica da simulação, e valores muito pequenos podem fazer com que a faixa de valores em torno de zero em que as componentes de  $\bar{q}(q)$  estarão variando pode se tornar muito grande. É seguro dizer que um bom valor de limite superior para  $\lambda$  a ser adotado é  $1/h$ , sendo  $h$  o tamanho do passo de integração, pois fazendo  $\lambda = 1/h$  já garante a estabilidade do método para praticamente qualquer método de integração numérica de EDOs. Na prática, valores de  $\lambda$  em torno de  $1/100h$  se mostraram bastante adequados nas simulações realizadas.

Sendo assim, o sistema de EDOs que será utilizado para realizar a simulação dinâmica direta é dado por:

$$\begin{bmatrix} C(q)^T M'(q) \\ A(q) \end{bmatrix} \cdot \ddot{q} = \begin{bmatrix} C(q)^T (u' - v'(q, \dot{q}) - g'(q)) \\ -b(q, \dot{q}) - 2\lambda A(q) \cdot \dot{q} - \lambda^2 \bar{q}(q) \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

## 5.5 Simulação dinâmica inversa

Na simulação dinâmica inversa, são dados os perfis de  $q^\#$ ,  $\dot{q}^\#$  e  $\ddot{q}^\#$  em função do tempo e obtem-se os perfis dos esforços nos atuadores para a trajetória dada. Para isso, será utilizada a equação dinâmica (5.83):

$$C(q)^T (M'(q) \ddot{q} + v'(q, \dot{q}) + g'(q)) = C(q)^T u' \quad (5.83)$$

Repare que os termos desta equação dependem de  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$ . Sendo assim, primeiramente

é preciso obter  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  dados  $\mathbf{q}^\#$ ,  $\dot{\mathbf{q}}^\#$  e  $\ddot{\mathbf{q}}^\#$ .

$\mathbf{q}$  é obtido resolvendo numéricamente a equação dos vínculos de posição (5.16), a qual é um sistema de equações algébricas não lineares.

$$\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \mathbb{0} \quad (5.16)$$

Tendo obtido  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  é obtido pela equação (5.80):

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\# \quad (5.80)$$

Para obter  $\ddot{\mathbf{q}}$ , substitui-se a segunda derivada temporal da equação (5.75) na equação dos vínculos de quasi-acelerações (5.63):

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{Q}^\#\ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbb{A}\mathbb{Q}^\circ\ddot{\mathbf{q}}^\circ + \mathbb{b} &= \mathbb{0} \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{q}}^\circ &= -(\mathbb{A}\mathbb{Q}^\circ)^{-1}(\mathbb{b} + \mathbb{A}\mathbb{Q}^\#\ddot{\mathbf{q}}^\#) \\ \therefore \ddot{\mathbf{q}} &= (\mathbb{Q}^\# - \mathbb{Q}^\circ(\mathbb{A}\mathbb{Q}^\circ)^{-1}\mathbb{A}\mathbb{Q}^\#) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# - (\mathbb{A}\mathbb{Q}^\circ)^{-1}\mathbb{b} \end{aligned} \quad (5.89)$$

Comparando (5.79) com (5.89), temos:

$$\therefore \ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbb{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (5.90)$$

Sendo:

$$\mathbb{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -(\mathbb{A}\mathbb{Q}^\circ)^{-1} \cdot \mathbb{b} \quad (5.91)$$

Além disso, normalmente não há atuadores em todas as juntas do mecanismo paralelo. Sendo assim,  $\mathbf{u}'$  pode ser reescrito como:

$$\mathbf{u}' = \mathbb{U} \cdot \mathbf{u}^* \quad (5.92)$$

Sendo  $\mathbb{U}$  uma matriz constante composta por zeros e uns, e  $\mathbf{u}^*$  os esforços aplicados pelos atuadores.

Substituindo (5.80), (5.90) e (5.92) em (5.83), temos:

$$\mathbb{C}^T(\mathbb{M}'(\mathbb{C} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbb{c}) + \mathbf{v}' + \mathbf{g}') = \mathbb{C}^T \mathbb{U} \cdot \mathbf{u}^* \quad (5.93)$$

Definindo:

$$\mathbb{Z}(q)^\top = \mathbb{C}(q)^\top U \quad (5.94)$$

Temos:

$$\mathbb{C}^\top M' C \cdot \ddot{q}^{\#} + \mathbb{C}^\top (M' c + v') + \mathbb{C}^\top g' = \mathbb{Z}^\top u^* \quad (5.95)$$

Sendo assim, (5.95) pode ser reescrita como:

$$M_{\mathcal{M}}(q) \ddot{q}^{\#} + v_{\mathcal{M}}(q, \dot{q}) + g_{\mathcal{M}}(q) = \mathbb{Z}(q)^\top u^* \quad (5.96)$$

Sendo:

$$M_{\mathcal{M}} = \mathbb{C}^\top M' C \quad (5.97)$$

$$v_{\mathcal{M}} = \mathbb{C}^\top (M' c + v') \quad (5.98)$$

$$g_{\mathcal{M}} = \mathbb{C}^\top g' \quad (5.99)$$

Sendo assim, para mecanismos sem atuação redundante, a simulação dinâmica inversa é feita utilizando a equação (5.96) para obter os esforços dos atuadores, dados  $q^{\#}$ ,  $\dot{q}^{\#}$  e  $\ddot{q}^{\#}$ , obtendo  $q$  através da solução numérica da equação (5.17) e  $\dot{q}$  através de (5.80).

Para o caso de mecanismos com atuação redundante, há infinitas soluções para  $u^*$  de modo que o mecanismo realize a trajetória desejada. Sendo assim, normalmente é escolhida uma solução que seja solução de um problema de otimização (como a minimização da energia consumida), tendo a equação (5.96) como restrição.

## 6 PROJETO DOS CONTROLADORES

Esta subseção é destinada ao projeto de controladores não lineares, destinados ao controle de posição de plataformas paralelas cujo modelo dinâmico para simulação dinâmica inversa é dado por (5.96), utilizando a técnica de Linearização por Realimentação aliada a outras leis de controle não linear, como as leis Controle por Modos Deslizantes [84, 100], e também aliada a técnicas de controle linear, como a alocação de pólos no espaço de estados em tempo contínuo (Controle por Torque Computado).

Para facilitar a leitura das deduções e com o intuito de deixar um pouco menos carregada a notação, será adotada a seguinte notação:

$$\mathbb{H}(\mathbf{q}) = \mathbb{M}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) \quad (6.1)$$

$$\mathbb{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{v}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbb{g}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) \quad (6.2)$$

$$u = \mathbb{Z}(\mathbf{q})^T u^* \quad (6.3)$$

Sendo assim, equação (5.96) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbb{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = u \quad (6.4)$$

Além disso, definimos o erro de controle como sendo:

$$\epsilon = \mathbf{q}_d^\# - \mathbf{q}^\# \quad (6.5)$$

Sendo  $\mathbf{q}_d^\#$  o sinal de referência

### 6.1 Linearização por Realimentação (LR)

A técnica de controle conhecida como Linearização por Realimentação consiste em utilizar a entrada de controle para cancelar as não linearidades do sistema, de modo a obter um sistema linear equivalente, normalmente desacoplado, no qual é possível utilizar

inúmeras técnicas de controle linear.

Tendo em vista a equação dinâmica (6.4), é proposta a seguinte lei de Linearização por Realimentação:

$$v = \hat{H}(q)(\ddot{q}_d^\# - v') + \hat{h}(q, \dot{q}) \quad (6.6)$$

Sendo  $\hat{H}$  e  $\hat{h}$  estimadores para  $H$  e  $h$ , respectivamente.

Substituindo a lei de controle (6.6) em (6.4), temos:

$$\ddot{e} = v' + \delta(t, q, \dot{q}, v') \quad (6.7)$$

Sendo:

$$\delta = H^{-1}(\tilde{H}(\ddot{q}_d^\# - v') + \tilde{h}) \quad (6.8)$$

$$\tilde{H} = H - \hat{H} \quad (6.9)$$

$$\tilde{h} = h - \hat{h} \quad (6.10)$$

Repare que, para o caso em que não há erros de modelagem ( $\tilde{H} = 0$  e  $\tilde{h} = 0 \Rightarrow \delta = 0$ ), a dinâmica de cada componente do erro se comporta como um sistema linear de segunda ordem forçado com inércia unitária e duplo integrador em  $s = 0$ .

## 6.2 Controle por Torque Computado (TC)

A lei de Controle por Torque Computado tem o intuito de fazer com que a dinâmica de cada componente do erro de controle se comporte como um movimento harmônico amortecido, fazendo com que o erro tenda assintóticamente a zero independentemente da condição inicial, na ausência de erros de modelagem. Para atingir este objetivo, basta utilizar a seguinte lei de realimentação de estados para  $v'$ :

$$v' = -k_v \dot{e} - k_p e \quad (6.11)$$

Sendo  $k_v$  e  $k_p$  matrizes diagonais positiva-definidas.

Substituindo a lei de controle (6.11) em (6.7), temos:

$$\ddot{e} + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e = \delta'(t, q, \dot{q}) \quad (6.12)$$

Sendo:

$$\delta' = H^{-1}(\tilde{H}(\ddot{q}_d^\# + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e) + \tilde{h}) \quad (6.13)$$

Repare que o desempenho desta técnica de controle depende diretamente da representatividade do modelo obtido dentro das condições de operação do sistema.

## 6.3 Controle por Modos Deslizantes (MD)

O Controle por Modos Deslizantes é uma técnica de controle não-linear robusto, a qual tem como principal vantagem uma menor sensibilidade aos erros de modelagem, sendo robusto tanto a incertezas estruturadas quanto a incertezas não estruturadas. Nesta subseção serão deduzidas 4 leis de controle baseadas nesta técnica.

### 6.3.1 Dedução das leis de controle

Sejam  $\underline{\lambda}$ ,  $\underline{k}_v$  e  $\underline{k}_p$  matrizes diagonais positiva-definidas. Assim, pode-se definir uma matriz-coluna  $s$  de duas maneiras diferentes:

$$s = \dot{e} + \underline{\lambda}e \quad (6.14)$$

e

$$s = \ddot{e} + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e \quad (6.15)$$

Tendo definido  $s$ , define-se a chamada superfície de escorregamento:

$$s = 0 \quad (6.16)$$

Repare que fazendo com o sistema atinja a superfície de escorregamento, o erro de controle tenderá assintóticamente a zero, independente de qual das definições de  $s$  for escolhida.

Seja  $V(s)$  uma função de Lyapunov dada por:

$$V(s) = \frac{1}{2}s^T W s \quad (6.17)$$

Sendo  $W$  uma matriz simétrica positiva-definida. Pela teoria de estabilidade de Lyapunov, se  $\dot{V} < 0 \forall s \neq 0$ ,  $s$  converge para  $0$  independentemente das condições iniciais do sistema. Para que isso seja possível, é imposta a seguinte condição:

$$\frac{d}{dt} V(s) = s^T \left( W \dot{s} + \frac{1}{2} \dot{W} s \right) \leq -s^T \underline{\eta} sinal(s) \quad (6.18)$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}^T \left( \mathbb{W} \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} \mathbf{s} + \underline{\eta} \operatorname{sinal}(\mathbf{s}) \right) \leq 0 \quad (6.19)$$

Sendo  $\underline{\eta}$  uma matriz diagonal positiva-definida. Repare que  $\mathbf{s}^T \underline{\eta} \operatorname{sinal}(\mathbf{s})$  é a soma ponderada dos módulos das componentes de  $\mathbf{s}$ , o que implica que  $-\mathbf{s}^T \underline{\eta} \operatorname{sinal}(\mathbf{s}) < 0 \forall \mathbf{s} \neq 0$ . Repare também que  $V(\mathbf{s})$  pode ser interpretada como uma distância quadrática do sistema até a superfície de escorregamento. A imposição da condição (6.18) implica que a distância do sistema à superfície de escorregamento é sempre decrescente enquanto o sistema não atingir a superfície de escorregamento, e garante a convergência  $\mathbf{s}$  para zero em tempo finito e, a partir deste momento, a convergência assintótica do erro de controle  $\mathbf{e}$  para zero.

Para ilustrar, considere  $\mathbb{W} = \mathbb{1}$ ; se  $\dot{\mathbf{s}} = -\underline{\eta} \operatorname{sinal}(\mathbf{s})$ , (6.18) é satisfeita e cada componente de  $\mathbf{s}$  respeita a EDO  $\dot{s}_i = -\eta_i \operatorname{sinal}(s_i)$ , a qual converge para zero em um tempo finito de  $t_i = \frac{|s_i(0)|}{\eta_i}$ .

O projeto do controlador é feito utilizando a condição (6.18), a qual é conhecida como condição de escorregamento, e será subdividido pelas diferentes definições apresentadas para a variável  $\mathbf{s}$  ((6.14) e (6.15)).

a) Para  $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \underline{\lambda} \mathbf{e}$ :

Derivando (6.14) e substituindo em (6.18), temos:

$$\mathbf{s}^T \left( \mathbb{W} (\ddot{\mathbf{e}} + \underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} \mathbf{s} + \underline{\eta} \operatorname{sinal}(\mathbf{s}) \right) \leq 0 \quad (6.20)$$

Substituindo (6.7) em (6.20), temos:

$$\mathbf{s}^T \left( \mathbb{W} (\mathbf{u}' + \underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}} + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}} (\ddot{\mathbf{q}}_d^\# - \mathbf{u}') + \tilde{\mathbf{h}})) + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} \mathbf{s} + \underline{\eta} \operatorname{sinal}(\mathbf{s}) \right) \leq 0 \quad (6.21)$$

Definindo:

$$\mathbf{u}' = -\underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{u}'' \quad (6.22)$$

Temos:

$$\mathbf{s}^T \left( \mathbb{W} ((\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}) \mathbf{u}'' + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}} (\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}})) + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} \mathbf{s} + \underline{\eta} \operatorname{sinal}(\mathbf{s}) \right) \leq 0 \quad (6.23)$$

Note que:

$$\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1} (\mathbb{H} - \hat{\mathbb{H}}) = \mathbb{H}^{-1} \hat{\mathbb{H}} \quad (6.24)$$

Sendo assim, são notáveis duas possíveis escolhas para  $\mathbb{W}$  que facilitam o projeto do controlador:

$$\mathbb{W} = \mathbb{1} \quad (6.25)$$

e

$$\mathbb{W} = \mathbb{H} \quad (6.26)$$

Mais uma vez, o projeto do controlador será subdividido em 2 casos:

a.1) Para  $\mathbb{W} = \mathbb{1}$ :

Substituindo (6.25) em (6.23), obtem-se:

$$\mathbb{s}^T \left( (\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}) \mathbb{u}'' + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}}) + \underline{\eta} \sinh(\mathbb{s}) \right) \leq 0 \quad (6.27)$$

Para satisfazer (6.27), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\mathbb{u}'' = -\underline{k} \sinh(\mathbb{s}) \quad (6.28)$$

Sendo  $\underline{k}$  uma matriz diagonal positiva-definida, com  $\underline{k} \geq \underline{\eta}$ . Substituindo (6.28) em (6.27), temos:

$$\mathbb{s}^T \left( -(\underline{k} - \underline{\eta}) \sinh(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sinh(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}}) \right) \leq 0 \quad (6.29)$$

Pode-se dizer que, (6.29) é sempre satisfeita se:

$$\text{diag}(\underline{k}) - \text{diag}(\underline{\eta}) \geq |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sinh(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}})| \quad (6.30)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.30), temos:

$$|\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sinh(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}})| \leq |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} \text{diag}(\underline{k}) + |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} |\ddot{\mathbb{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbb{e}}| + |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{h}}|_{max} \quad (6.31)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$(\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq \text{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} |\ddot{\mathbb{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbb{e}}| + |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{h}}|_{max} \quad (6.32)$$

(6.30) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Existe solução para (6.32) apenas se a matriz  $\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max}$  for uma *M-matrix*, ou seja, se módulo do maior autovalor de  $|\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max}$  for menor que 1. Se este

for o caso, a solução que minimiza a norma de  $\text{diag}(\underline{k})$  é dada por:

$$\text{diag}(\underline{k}) = (\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max})^{-1}(\text{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}| + |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbf{h}}|_{max}) \quad (6.33)$$

a.2) Para  $\mathbb{W} = \mathbb{H}$ :

Substituindo (6.26) em (6.23), obtem-se:

$$\mathbf{s}^T \left( \hat{\mathbb{H}}\mathbf{u}'' + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbf{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{h}}) + \underline{\eta} \sinh(\mathbf{s}) \right) \leq 0 \quad (6.34)$$

Para satisfazer (6.34), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{u}'' = -\hat{\mathbb{H}}^{-1} \left( \underline{k} \sinh(\mathbf{s}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbf{s} \right) \quad (6.35)$$

Sendo  $\underline{k}$  uma matriz diagonal positiva-definida, com  $\underline{k} \geq \underline{\eta}$ . Substituindo (6.28) em (6.34), temos:

$$\mathbf{s}^T \left( -(\underline{k} - \underline{\eta}) \sinh(\mathbf{s}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbf{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}} \right) \leq 0 \quad (6.36)$$

Pode-se dizer que, (6.36) é sempre satisfeita se:

$$\text{diag}(\underline{k}) - \text{diag}(\underline{\eta}) \geq \left| \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbf{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}} \right| \quad (6.37)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.37), temos:

$$\left| \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbf{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}} \right| \leq \frac{1}{2}|\dot{\mathbb{H}}|_{max}|\mathbf{s}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}| + |\tilde{\mathbf{h}}|_{max} \quad (6.38)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$\text{diag}(\underline{k}) \geq \text{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2}|\dot{\mathbb{H}}|_{max}|\mathbf{s}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}| + |\tilde{\mathbf{h}}|_{max} \quad (6.39)$$

(6.37) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Sempre existe solução para (6.39), e a solução que minimiza a norma de  $\text{diag}(\underline{k})$  é dada por:

$$\text{diag}(\underline{k}) = \text{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2}|\dot{\mathbb{H}}|_{max}|\mathbf{s}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}| + |\tilde{\mathbf{h}}|_{max} \quad (6.40)$$

Repare que as duas leis de controle previamente deduzidas possuem termos discontinuos, os quais podem gerar o efeito conhecido como *chattering*, o qual pode

gerar sérios desgastes nos atuadores do sistema e causar vibrações indesejadas no mecanismo. A utilização da definição (6.15) para  $s$  na dedução da lei de controle diminui bastante o efeito do *chattering*, pois utiliza termos que são integrais de funções discontínuas, o que consequentemente gera um perfil muito mais suave para o esforço de controle. Sendo assim, agora serão deduzidas as leis de controle baseadas na definição (6.15) para  $s$ .

- b) Para  $s = \ddot{e} + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e$

Substituindo (6.7) em (6.15), temos:

$$s = u' + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e + \delta \quad (6.41)$$

Sendo assim, definimos:

$$u' = -k_v \dot{e} - k_p e + u'' \quad (6.42)$$

Portanto:

$$s = u'' + H^{-1}(\tilde{H}(\ddot{\phi}_d^\# + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e - u'') + \tilde{h}) \quad (6.43)$$

Definindo:

$$\sigma = \ddot{\phi}_d^\# + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e \quad (6.44)$$

Temos:

$$s = (\mathbb{1} - H^{-1}\tilde{H})u'' + H^{-1}(\tilde{H}\sigma + \tilde{h}) \quad (6.45)$$

Derivando (6.45), temos:

$$\dot{s} = (\mathbb{1} - H^{-1}\tilde{H})\dot{u}'' + H^{-1}\dot{\epsilon} \quad (6.46)$$

Sendo:

$$\dot{\epsilon} = (\dot{H}H^{-1}\tilde{H} - \dot{\tilde{H}})u'' - \dot{H}H^{-1}(\tilde{H}\sigma + \tilde{h}) + \dot{\tilde{H}}\sigma + \tilde{H}\dot{\sigma} + \dot{\tilde{h}} \quad (6.47)$$

Substituindo (6.46) em (6.18), temos:

$$s^T \left( W((\mathbb{1} - H^{-1}\tilde{H})\dot{u}'' + H^{-1}\dot{\epsilon}) + \frac{1}{2} \dot{W}s + \underline{\eta} \operatorname{sign}(s) \right) \leq 0 \quad (6.48)$$

Mais uma vez, são notáveis duas possíveis escolhas para  $W$  que facilitam o projeto do controlador:

$$W = \mathbb{1} \quad (6.49)$$

e

$$\mathbb{W} = \mathbb{H} \quad (6.50)$$

Subdividido mais uma vez o projeto do controlador será em 2 casos:

b.1) Para  $\mathbb{W} = \mathbb{1}$ :

Substituindo (6.49) em (6.48), obtem-se:

$$\mathbb{s}^T \left( (\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}) \dot{\psi}'' + \mathbb{H}^{-1} \mathbb{e} + \underline{\eta} \sin(\mathbb{s}) \right) \leq 0 \quad (6.51)$$

Para satisfazer (6.51), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\dot{\psi}'' = -\underline{k} \sin(\mathbb{s}) \quad (6.52)$$

Sendo  $\underline{k}$  uma matriz diagonal positiva-definida, com  $\underline{k} \geq \underline{\eta}$ . Substituindo (6.52) em (6.51), temos:

$$\mathbb{s}^T \left( -(\underline{k} - \underline{\eta}) \sin(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sin(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} \mathbb{e} \right) \leq 0 \quad (6.53)$$

Pode-se dizer que, (6.53) é sempre satisfeita se:

$$\text{diag}(\underline{k}) - \text{diag}(\underline{\eta}) \geq |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sin(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} \mathbb{e}| \quad (6.54)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.54), temos:

$$\begin{aligned} & |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sin(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} \left( (\dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}}) \psi'' - \dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}} \sigma + \tilde{\mathbb{h}}) + \dot{\tilde{\mathbb{H}}} \sigma + \tilde{\mathbb{H}} \dot{\sigma} + \dot{\tilde{\mathbb{h}}} \right)| \leq \\ & |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} \text{diag}(\underline{k}) + |\mathbb{H}^{-1} (\dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max} |\psi'' - \sigma| + |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} |\dot{\sigma}| \\ & + |\mathbb{H}^{-1} \dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{h}}|_{max} + |\mathbb{H}^{-1} \dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{max} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$\begin{aligned} & (\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq \text{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1} (\dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max} |\psi'' - \sigma| + \\ & |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} |\dot{\sigma}| + |\mathbb{H}^{-1} \dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{h}}|_{max} + |\mathbb{H}^{-1} \dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{max} \end{aligned} \quad (6.56)$$

(6.54) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Existe solução para (6.56) apenas se a matriz  $\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max}$  for uma *M-matrix*, ou seja, se módulo do maior autovalor de  $|\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max}$  for menor que 1. Se este

for o caso, a solução que minimiza a norma de  $\text{diag}(\underline{k})$  é dada por:

$$\begin{aligned}\text{diag}(\underline{k}) = (\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{\max})^{-1} & (\text{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1}(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{\max}|\psi'' - \sigma| + \\ & |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{\max}|\dot{\sigma}| + |\mathbb{H}^{-1}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{\max} + |\mathbb{H}^{-1}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}|_{\max})\end{aligned}\quad (6.57)$$

b.2) Para  $\mathbb{W} = \mathbb{H}$ :

Substituindo (6.50) em (6.48), obtem-se:

$$\mathbb{s}^T \left( \hat{\mathbb{H}}\dot{\psi}'' + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{s} + \epsilon + \underline{\eta} \sin(\mathbb{s}) \right) \leq 0 \quad (6.58)$$

Para satisfazer (6.58), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\dot{\psi}'' = -\hat{\mathbb{H}}^{-1} \left( \underline{k} \sin(\mathbb{s}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{s} \right) \quad (6.59)$$

Sendo  $\underline{k}$  uma matriz diagonal positiva-definida, com  $\underline{k} \geq \underline{\eta}$ . Substituindo (6.59) em (6.58), temos:

$$\mathbb{s}^T \left( -(\underline{k} - \underline{\eta}) \sin(\mathbb{s}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{s} + \epsilon \right) \leq 0 \quad (6.60)$$

Pode-se dizer que, (6.60) é sempre satisfeita se:

$$\text{diag}(\underline{k}) - \text{diag}(\underline{\eta}) \geq \left| \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{s} + \epsilon \right| \quad (6.61)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.61), temos:

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{s} + (\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})\psi'' - \dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}\sigma + \tilde{\mathbb{h}}) + \dot{\tilde{\mathbb{H}}}\sigma + \tilde{\mathbb{H}}\sigma + \dot{\tilde{\mathbb{h}}} \right| \leq \frac{1}{2}|\dot{\mathbb{H}}|_{\max}|\mathbb{s}| + \\ |(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{\max}|\psi'' - \sigma| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{\max}|\dot{\sigma}| + |\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{\max} + |\dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{\max}\end{aligned}\quad (6.62)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$\text{diag}(\underline{k}) \geq \text{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2}|\dot{\mathbb{H}}|_{\max}|\mathbb{s}| + |(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{\max}|\psi'' - \sigma| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{\max}|\dot{\sigma}| + |\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{\max} + |\dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{\max} \quad (6.63)$$

(6.61) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Sempre existe solução para (6.63), e a solução que minimiza a norma de  $\text{diag}(\underline{k})$

é dada por:

$$\text{diag}(\underline{k}) = \text{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2} |\dot{\tilde{H}}|_{\max} |\$| + |(\dot{H}H^{-1}\tilde{H} - \dot{\tilde{H}})|_{\max} |\psi'' - \sigma| + |\tilde{H}|_{\max} |\dot{\sigma}| + |\dot{H}H^{-1}\tilde{h}|_{\max} + |\dot{\tilde{h}}|_{\max} \quad (6.64)$$

### 6.3.2 Camada Limite

Uma técnica muito utilizada para diminuir os efeitos do *chattering* no MD é a substituição da função sinal por uma função de saturação nas leis de controle. Definindo:

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } |x| \leq 1 \\ \text{sinal}(x), & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \quad (6.65)$$

Sendo assim, no lugar de  $\text{sinal}(\$)$ , será utilizado  $\text{sat}(\$/\phi)$  nas leis de controle, sendo  $\phi$  um número positivo conhecido como comprimento da camada limite.

Ao mesmo tempo que a utilização da camada limite diminui os efeitos do *chattering* no sistema, sua utilização não mais garante que o sistema atinja em tempo finito e se mantenha na superfície de escorregamento, apenas garante que o sistema atinja a camada limite ( $-\phi < s_i < \phi$ ,  $i = 1, \dots, \nu^{\#}$ ) em tempo finito, e lá se mantenha.

### 6.3.3 Ganho adaptativo

O cálculo de  $\underline{k}$  pode ser um tanto complexo utilizando as equações (6.33), (6.40), (6.57) ou (6.64), pois depende do módulo máximo de matrizes que não possuem expressões explícitas. Tal cálculo pode ser feito numéricamente discretizando a área de trabalho do mecanismo e atribuindo valores máximos e mínimos para cada parâmetro incerto do sistema, obtendo uma matriz  $\underline{k}$  que varia conforme a posição do mecanismo. O uso desta estratégia, porém, poderá resultar na obtenção de valores de  $\underline{k}$  muito maiores do que o necessário, o que pode amplificar o fenômeno do *chattering*. Sendo assim, é proposta a obtenção da matriz  $\underline{k}$  de forma adaptativa, utilizando a seguinte lei de adaptação, a qual é baseada em uma lei de adaptação proposta em [64]:

$$\underline{k}_i[k] = \begin{cases} |\underline{k}_i[k-1] + \gamma_i \text{sinal}(s_i[k]) \text{sinal}(s_i[k-1])|, & \text{se } |s_i[k]| \geq \phi \text{ ou } \text{sinal}(s_i[k]) = -\text{sinal}(s_i[k-1]) \\ \underline{k}_i[k-1], & \text{se } |s_i[k]| < \phi \text{ e } \text{sinal}(s_i[k]) = \text{sinal}(s_i[k-1]) \end{cases} \quad (6.66)$$

Sendo  $\gamma_i$  uma constante positiva, a qual determina a velocidade da adaptação.

Esta lei de adaptação pode ser explicada da seguinte maneira:  $\underline{k}_i$  aumenta enquanto o sistema não atingir a região da camada limite. Enquanto o sistema estiver nesta região,  $\underline{k}_i$  se mantém constante ou diminui a cada cruzamento com a superfície de escorregamento. Se o sistema estiver região da camada limite e  $\underline{k}_i$  respeitar a inequação (6.32), (6.39), (6.56) ou (6.63) (dependendo da lei de controle utilizada),  $\underline{k}_i$  irá diminuir a cada cruzamento com a superfície de escorregamento, até que o sistema saia ligeiramente da região. Assim que o sistema sair da região,  $\underline{k}_i$  irá aumentar até o sistema atingi-la novamente, repetindo este ciclo infinitamente, com  $\underline{k}_i$  variando em uma faixa de valores muito próxima do menor valor possível para que o sistema se mantenha na região da camada limite.

# **PARTE III**

## **RESULTADOS**

## 7 RESULTADOS E DISCUSSÃO

*“A melhor maneira de explicar é fazer”*

-- Lewis Carroll

### 7.1 Modelagem e Simulação

Nesta seção, será realizada a simulação dinâmica direta do mecanismo 5R utilizando o algoritmo de modelagem e simulação de mecanismos paralelos apresentado, e a lei de Controle por Torque Computado no espaço da tarefa, apresentada na subseção anterior. Serão consideradas incertezas paramétricas nas simulações.

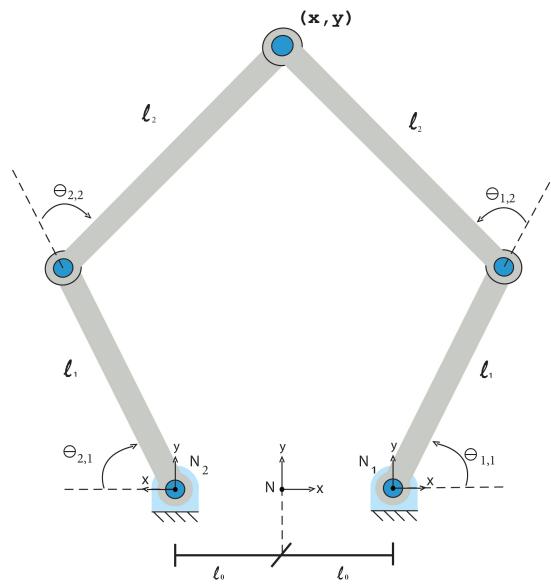
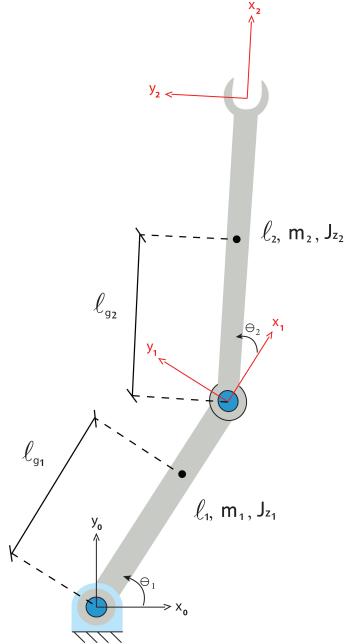


Figura 9: Pentágono articulado (5R)

O mecanismo 5R (figura 9) será modelado através do acoplamento de 2 subsistemas seriais  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  do tipo RR (figura 10), e um efetuador pontual  $\mathcal{B}_0$  de massa  $m_0$ .

#### 7.1.1 Modelo do efetuador

De acordo com as equações (5.5), (5.6), (5.7) e (5.8), os parâmetros  $m_0$  (massa do efetuador) e  $\emptyset$  definem o modelo do efetuador.

Figura 10: Mecanismo RR

Para o subsistema em questão, temos:

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \quad (7.1)$$

O vetor gravidade será considerado na direção e sentido do eixo  $z$  (perpendicular ao plano), ou seja:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g \end{bmatrix}^T \quad (7.2)$$

### 7.1.2 Parâmetros de Denavit-Hartemberg das cadeias seriais

Tabela 2: Parâmetros de Denavit-Hartemberg do mecanismo RR

Ligamento	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
(1)	$l_1$	0	0	$q_1(t)$
(2)	$l_2$	0	0	$q_2(t)$

### 7.1.3 Arquitetura do mecanismo paralelo

É possível relacionar as coordenadas um ponto no espaço descrito no sistema  $N_0$  com as coordenadas do mesmo ponto escritas nos sistemas  $N_1$  e  $N_2$  da seguinte maneira:

$$[p]_{N_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [p]_{N_1} + \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$[p]_{N_0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot [p]_{N_2} + \begin{bmatrix} -l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Escolhendo o ponto  $p$  como sendo o efetuador do mecanismo paralelo, o qual tem a mesma localização dos efetuadores das cadeias serias neste caso, temos:

$$q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_1(q_1) + \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot x_2(q_2) + \begin{bmatrix} -l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Sendo assim, temos que os vínculos de posição são dados por:

$$\bar{q}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot q_0 - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot x(q_0) - \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \\ -l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (7.7)$$

Sendo assim, as matrizes que descrevem a arquitetura do mecanismo são dadas por:

$$\mathbb{d} = \begin{bmatrix} l_0 & 0 & 0 & -l_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (7.8)$$

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (7.9)$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

$$\mathbb{F} = \emptyset \quad (7.11)$$

### 7.1.4 Coordenadas dependentes e independentes

Tendo em vista que o mecanismo em questão possui duas cadeias seriais de 2 graus de liberdade, temos:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta_{1,1} \\ \theta_{1,2} \\ \theta_{2,1} \\ \theta_{2,2} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Neste caso escolheremos as coordenadas  $x$  e  $y$  para serem as coordenadas generalizadas independentes (tendo em vista que o mecanismo possui dois graus de liberdade, ou seja:

$$\mathbf{q}^\# = [x \ y]^\top \quad (7.13)$$

$$\mathbf{q}^\circ = [z \ \theta_{1,1} \ \theta_{1,2} \ \theta_{2,1} \ \theta_{2,2}]^\top \quad (7.14)$$

Sendo assim, temos que as matrizes  $\mathbb{Q}^\#$  e  $\mathbb{Q}^\circ$  são dadas por:

$$\mathbb{Q}^\# = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.15) \quad \mathbb{Q}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

### 7.1.5 Simulação dinâmica direta

Para realizar a simulação dinâmica direta, definimos:

#### 7.1.5.1 Parâmetros do modelo

Definimos os seguinte parâmetros para o modelo o mecanismo em questão na tabela 3:

Tabela 3: Parâmetros do mecanismo

Parâmetros	Valores	Unidades
$l_0$	0.050	$m$
$l_1$	0.120	$m$
$l_2$	0.150	$m$
$l_{g1}$	0.060	$m$
$l_{g2}$	0.075	$m$
$m_0$	0.000	$kg$
$m_1$	0.143	$kg$
$m_2$	0.171	$kg$
$J_{z1}$	$1.716 \cdot 10^{-4}$	$kg.m^2$
$J_{z2}$	$3.206 \cdot 10^{-4}$	$kg.m^2$

#### 7.1.5.2 Espaço de trabalho

Dados os parâmetros geométricos definidos na tabela 3, obtemos o seguinte espaço de trabalho para o mecanismo (figura 11):

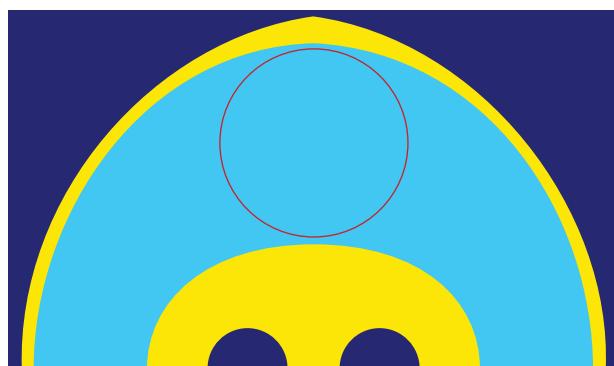


Figura 11: Espaço de trabalho do mecanismo 5R

A região em azul escuro é a região não pertencente ao espaço de trabalho do mecanismo. As regiões em azul claro, em amarelo, e em vermelho são regiões pertencentes

ao espaço de trabalho do mecanismo. A região a amarela é considerada singular (próxima a singularidades) e a vermelha é a trajetória a ser seguida pelo mecanismo.

#### 7.1.5.3 Condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = 0.07m \\ y(0) = 0.17m \\ \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

#### 7.1.5.4 Trajetória de referência

$$\begin{cases} x_d(t) = 0.07 \cos(2\pi t) \\ y_d(t) = 0.17 + 0.07 \sin(2\pi t) \end{cases} \quad (7.18)$$

#### 7.1.5.5 Parâmetros do controlador

$$\underline{k}_p = \lambda^2 \mathbb{1}$$

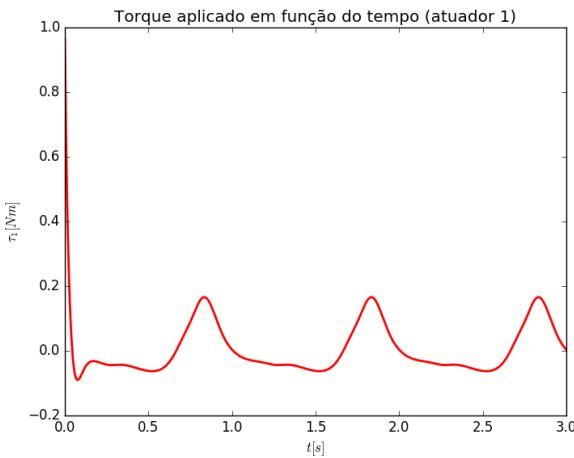
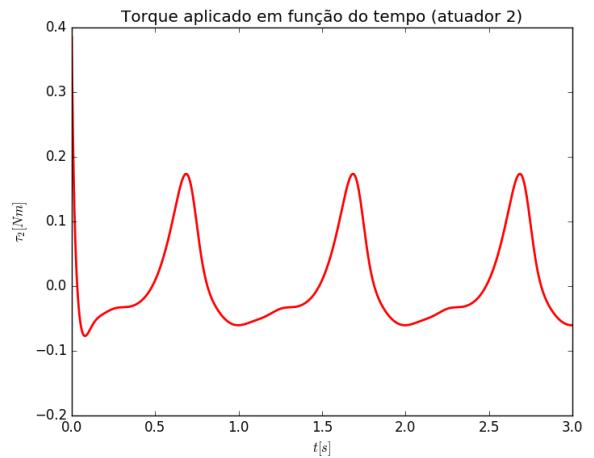
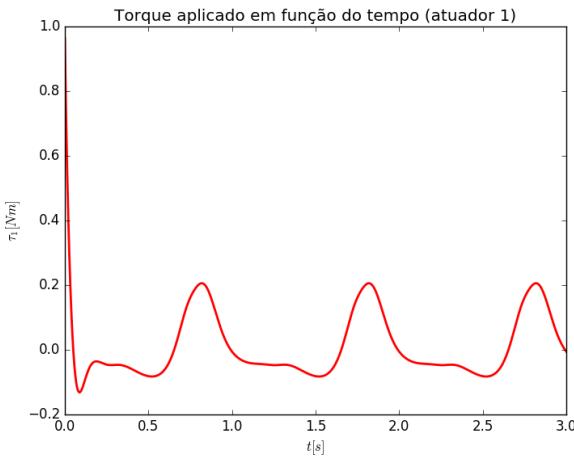
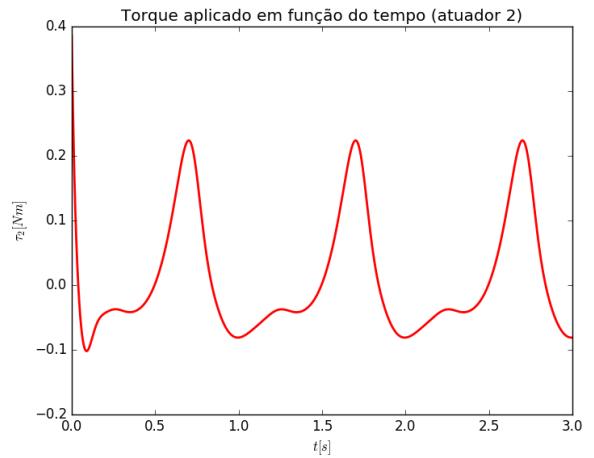
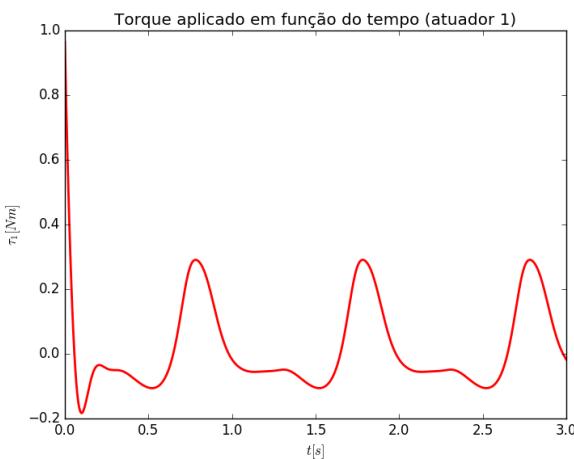
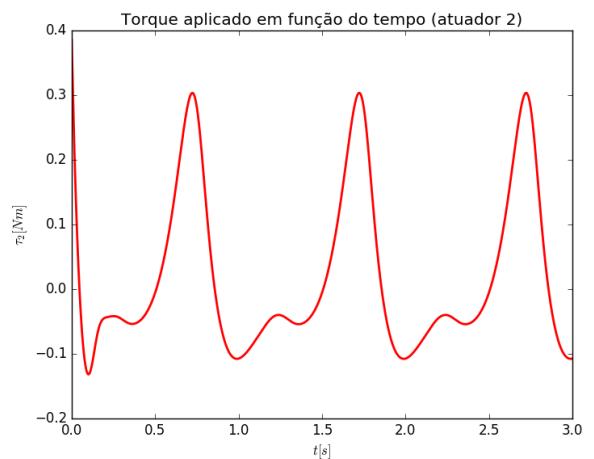
$$\underline{k}_v = 2\lambda \mathbb{1}$$

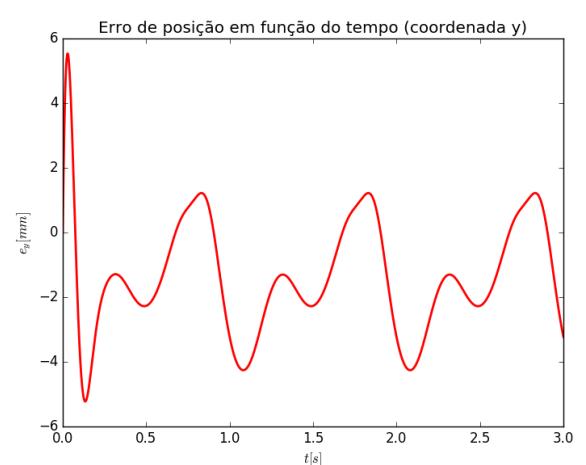
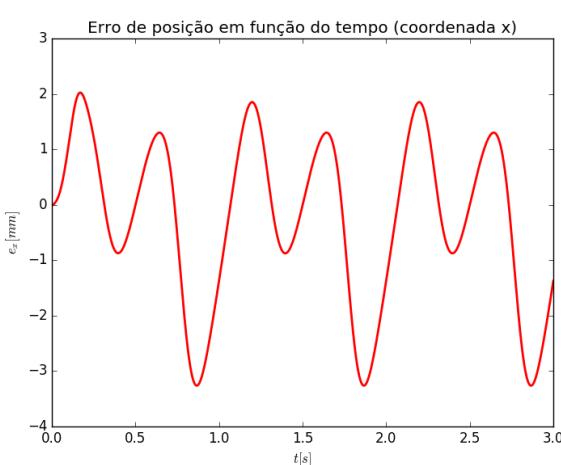
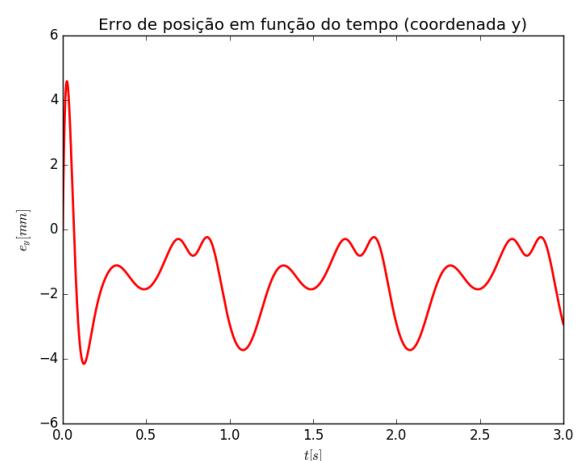
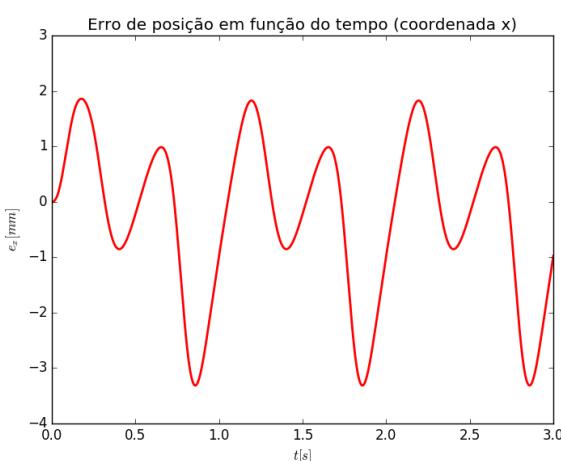
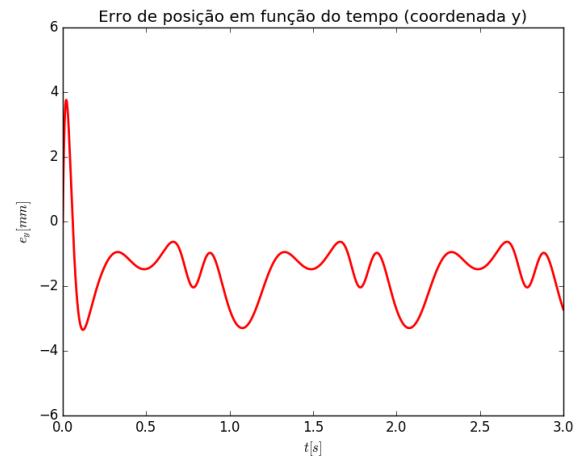
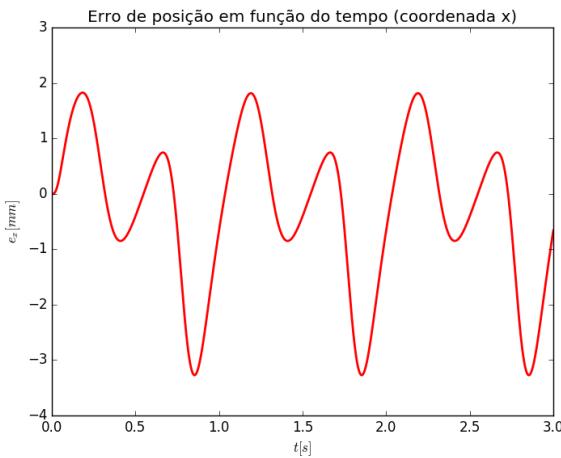
$$\lambda = 40 \text{ rad/s}$$

Os parâmetros do Controle por Torque Computado foram escolhidos de modo que a dinâmica do erro de controle se comporte como uma dinâmica de segunda ordem com amortecimento crítico. O valor de  $\lambda$  foi escolhido para o tempo de assentamento do erro de controle seja de  $0.1s$ , o que é razoável para um sistema mecânico.

#### 7.1.5.6 Simulações

Nas figuras 12 a 23 são apresentados os resultados de 3 simulações dinâmicas diretas do mecanismo 5R, considerando 3 níveis de incerteza do modelo: 0%, 20% e 40%. Todas as simulações são realizadas utilizando a lei de Control por Torque Computado apresentada na seção 6.2, utilizando os parâmetros definidos na tabela 3.

Figura 12:  $\tau_1$ : sem incertezaFigura 13:  $\tau_2$ : sem incertezaFigura 14:  $\tau_1$ : 20% de incertezaFigura 15:  $\tau_2$ : 20% de incertezaFigura 16:  $\tau_1$ : 40% de incertezaFigura 17:  $\tau_2$ : 40% de incerteza



Nos gráficos pode-se claramente observar o aumento do esforço de controle conforme o nível de incerteza cresce. Também é possível observar que o perfil do erro na coordenada  $x$  não sofreu muita influência com o aumento do nível de incerteza, enquanto o perfil do erro em  $y$  muda bastante de formato.

Tendo em vista que o presente trabalho tem caráter experimental, as comparações entre o desempenho de diferentes estratégias de controle serão feitas baseadas nos resultados obtidos experimentalmente.

## 7.2 Ensaios Experimentais

Nesta sessão, será descrita a bancada experimental e serão apresentados e discutidos os resultados experimentais do controle do mecanismo 5R utilizando 8 diferentes estratégias de controle.

### 7.2.1 Bancada experimental

A bancada é constituída de:

- 2 motores DC modelo PM70 da AMETEK com as seguintes características:
  - Corrente nominal de  $13A$
  - Torque nominal de  $0.5Nm$
  - Potência nominal de  $250W$
  - Tensão de alimentação de  $24V$
  - Rotação nominal de  $3600rpm$
  - Peso de  $1.80kgf$
- 2 encoders incrementais do modelo E40S com as seguintes características:
  - Resolução de  $5000pulsos/volta$ .
  - Tensão de alimentação de  $12V$  a  $24V$
  - 3 canais de saída A, B e Z
- 1 driver modelo Pololu Dual VNH5019 Motor Driver Shield com as seguintes características.

- Tensão de operação: de  $5.5V$  a  $24V$
  - Corrente de saída: até  $12A$  contínuos ( $30A$  de pico)
  - Dois canais de saída para motor
  - Entrada de tensão compatível com os padrões  $5V$  e  $3.3V$
  - Frequência de operação do PWM de até  $20kHz$
- 1 Microprocessador responsável pela execução das malhas de controle. O modelo utilizado foi o *Raspberry Pi 2 Model B* com as seguintes características:
    - Processador: quadcore ARMv7
    - 1GB RAM
    - Alimentação de  $5V$ ,  $2A$
  - 1 Fonte de tensão chaveada com as seguintes características:
    - Tensão nominal de  $24V$
    - Corrente saída de até  $16.25A$
  - 1 Placa de conversão de níveis de tensão de fabricação própria com as seguintes características:
    - Converte os  $24V$  gerados pela fonte chaveada para  $15V$ , para alimentar os encoders
    - Converte os níveis de tensão das saídas dos encoders de  $0V$  –  $15V$  para  $0V$  –  $3.3V$ , para poder mandar os sinais do encoder para o *Raspberry Pi*

Boa parte dos elementos da bancada podem ser vistos na figura 24.

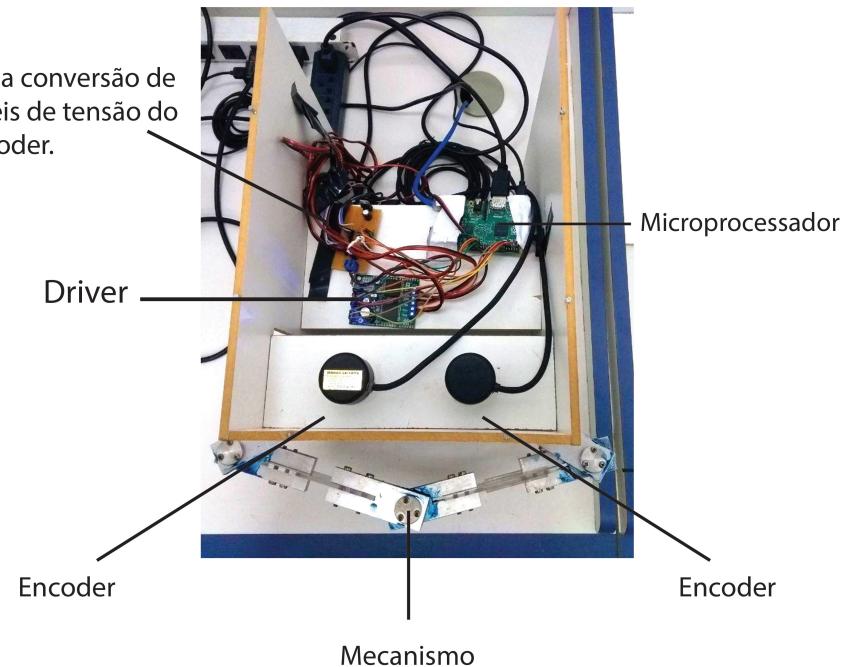


Figura 24: Bancada experimental

### 7.2.2 Sistema de controle

O sistema de controle é constituído de:

- Derivadores numéricos para a obtenção da velocidade e aceleração dos motores
- Observadores das correntes que passam pelos motores
- Malhas de controles (malha de controle de corrente e malha de controle de posição)

Pelos encoders são obtidos os deslocamentos angulares dos motores, e com os derivadores numéricos são obtidos seus sinais de velocidade e aceleração. Esses três sinais juntos com suas respectivas referências são utilizados na malha de controle de posição. Os sinais de velocidade e de tensão que são enviados aos motores são utilizados para estimar as correntes que passam pelos motores. A partir dos erros entre o valores estimados e as correntes de referência, o controlador calcula, a partir da lei de controle, as tensões a serem enviadas aos motores. Representações das arquiteturas de controle implementadas, controle no espaço das juntas e no espaço da tarefa, podem ser vistas nas figuras 25 e 26.

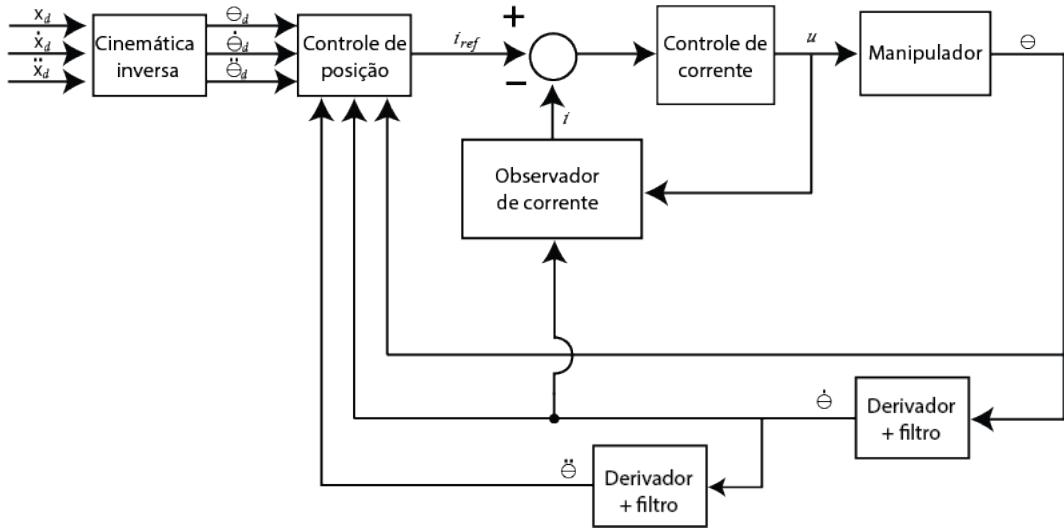


Figura 25: Arquitetura de controle: espaço das juntas

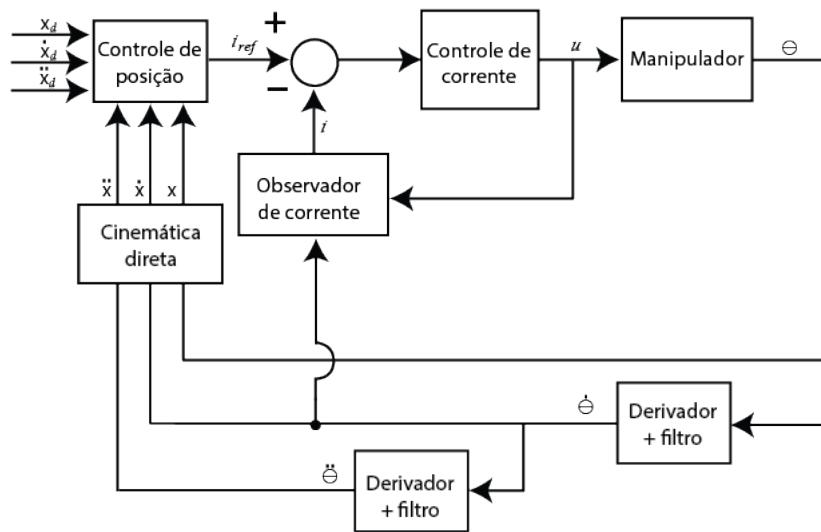


Figura 26: Arquitetura de controle: espaço das juntas

### 7.2.3 Derivadores numéricos

A partir das posições angulares obtidas através da leitura dos encoders, é possível estimar as velocidades angulares dos motores utilizando um derivador numérico. Uma das formas de se implementar um derivador numérico é utilizar o método das diferenças finitas:

$$\dot{x}_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T} \quad (7.19)$$

No entanto, como há ruídos nos sinais obtidos, a utilização do método das diferenças

finitas amplifica os ruídos de alta frequência. Diante disso, os derivadores numéricos foram utilizados em série com filtros passa-baixa tipo Bessel de segunda ordem (para a estimação da velocidade a partir da posição) e oitava ordem (para a estimação da aceleração a partir da velocidade).

### 7.2.4 Observador de corrente

Para a estimação da corrente elétrica foi considerada a equação da dinâmica elétrica do motor (4.180):

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + k_e \omega \quad (4.180)$$

Esta equação pode interpretada como um sistema linear de primeira ordem com entrada  $u - k_e \omega$  e polo em  $s = -R/L$ . Sendo assim, o sistema pode ser considerado naturalmente estável e pode ser utilizado um observador em malha aberta para estimar a corrente elétrica.

Tendo em vista que a frequência do polo deste sistema está em torno de 240Hz, muito acima das frequências em que o sistema mecânico opera, o observador de corrente é implementado simplesmente a partir do cálculo da corrente considerando a equação (4.180) em regime permanente, ou seja,  $\frac{di}{dt} = 0$ . Com isso, obtemos a seguinte expressão para o observador de corrente:

$$\hat{i} = \frac{u - k_e \omega}{R} \quad (7.20)$$

### 7.2.5 Compensadores de não-linearidades

Para implementar as técnicas de controle baseadas em modelo, é utilizado o algoritmo de modelagem proposto para tabelar os termos do modelo dinâmico que dependem apenas da posição.

Tendo em vista que a matriz de inércia generalizada depende apenas da posição, e que a matriz-coluna de esforços de inércias giroscópicos pode ser expressa como a soma de matrizes coluna dependentes apenas da posição multiplicados por termos quadráticos das quasi-velocidades independentes, é feita uma discretização da área de trabalho, de modo a calcular o valor destas matrizes em um número finito de pontos e realizar interpolações em tempo real, de modo a obter um valor estimado desses termos da dinâmica em qualquer

ponto não singular pertencente à área de trabalho.

A discretização realizada aplica uma malha quadradiculada de lado 5mm na área de trabalho do mecanismo, de modo a calcular os termos da dinâmica comentados em cada ponto não singular pertencente à discretização.

### 7.2.6 Estratégias de controle

Foram realizados ensaios experimentais utilizando as seguintes estratégias de controle:

- Controle Proporcional-Derivativo com pré-alimentação no espaço das juntas (PDq)
- Controle Proporcional-Derivativo com pré-alimentação no espaço da tarefa (PDx)
- Controle por Toque Computado no espaço das juntas (TCq)
- Controle por Toque Computado no espaço da tarefa (TCx)
- Controle Proporcional-Derivativo + Modos Deslizantes no espaço das juntas (PDMDq)
- Controle Proporcional-Derivativo + Modos Deslizantes no espaço da tarefa (PDMDx)
- Controle por Toque Computado + Modos Deslizantes no espaço das juntas (TCMDq)
- Controle por Toque Computado + Modos Deslizantes no espaço da tarefa (TCMDx)

Todas as leis de controle podem ser obtidas através da seguinte lei de controle, deduzida em 6.3:

$$u' = \hat{H} \left( \ddot{q}_d^{\#} + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e + \int_0^t \underline{k} \operatorname{sat}(s/\phi) d\tau \right) + \hat{h} \quad (7.21)$$

Sendo:

$$s = \ddot{e} + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e \quad (7.22)$$

Repare que, para  $\underline{k} = 0$ , temos a lei de Controle por Torque Computado. Para  $\underline{k} = 0$ ,  $\hat{h} = 0$  e  $\hat{H}$  constante e diagonal, temos uma lei de Controle Proporcional-Derivativo com pré-alimentação. Sendo assim, para  $\underline{k} \neq 0$ , podemos obter estas mesmas leis de controle, agora com um termo adicional de controle robusto vindo do Controle por Modos Deslizantes.

Esta lei de controle tem a vantagem de, além de poder ser interpretada como uma estratégia híbrida, praticamente eliminar o fenômeno do *chattering*, tendo em vista que o termo descontínuo é suavizado através de uma função de saturação e uma integral.

### 7.2.7 Parâmetros do sistema

Nas tabelas 4 e 5 são apresentados os valores estimados dos parâmetros das cadeias seriais do mecanismo. A massa do efetuador é considerada nula. Os comprimentos dos elos e a distância entre os atuadores são os valores de projeto do sistema e estão de acordo com as medições realizadas. Os parâmetros de inércias, ou seja, as massas, momentos de inércia, e posição dos centros de massa, foram obtidos a partir do modelo CAD do mecanismo.

Tabela 4: Parâmetros da cadeia serial 1

Parâmetros	Valores	Unidades
$l_0$	0.050	$m$
$l_1$	0.120	$m$
$l_2$	0.160	$m$
$l_{g1}$	0.060	$m$
$l_{g2}$	0.078	$m$
$m_1$	0.062	$kg$
$m_2$	0.124	$kg$
$J_{z1}$	$1.073 \cdot 10^{-4}$	$kg.m^2$
$J_{z2}$	$4.380 \cdot 10^{-4}$	$kg.m^2$

Tabela 5: Parâmetros da cadeia 2

Parâmetros	Valores	Unidades
$l_0$	0.050	$m$
$l_1$	0.120	$m$
$l_2$	0.160	$m$
$l_{g1}$	0.060	$m$
$l_{g2}$	0.058	$m$
$m_1$	0.062	$kg$
$m_2$	0.097	$kg$
$J_{z1}$	$2.960 \cdot 10^{-4}$	$kg.m^2$
$J_{z2}$	$9.800 \cdot 10^{-4}$	$kg.m^2$

Os valores dos parâmetros estimados dos motores são apresentados nas tabelas 16 e 18, as quais estão no apêndice E, juntamente com o processo de identificação utilizado.

### 7.2.8 Trajetórias de referência

A primeira trajetória realizada é uma trajetória circular com período de 1 segundo. São realizados 8 ciclos seguidos de uma parada repentina. Sua expressão é dada por:

$$\begin{cases} x_d(t) = -0.05 \sin(2\pi t) \\ y_d(t) = 0.158 - 0.05 \cos(2\pi t) \end{cases} \quad (7.23)$$

A segunda trajetória a ser realizada é uma trajetória triangular cujas coordenadas dos vértices (em metros) são:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -0.002 & 0.108 \end{bmatrix}^T \quad (7.24)$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.050 & 0.258 \end{bmatrix}^T \quad (7.25)$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -0.050 & 0.258 \end{bmatrix}^T \quad (7.26)$$

São realizados 2 ciclos, sendo que cada lado do triângulo é percorrido em  $0.75s$ , e sendo o trecho I de  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$ , o trecho II de  $\mathbf{x}_2$  a  $\mathbf{x}_3$ , e o trecho III de  $\mathbf{x}_3$  a  $\mathbf{x}_1$ . Depois de completar os 2 ciclos, é feita uma parada suave. Em cada lado do triângulo, é parametrizada uma trajetória polinomial de sétima ordem, na qual é imposta a posição inicial e final, velocidade nula, aceleração nula e tranco nulo no início e no final da trajetória. A expressão do polinômio é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_0)(35t^4 - 84t^5 + 70t^6 - 20t^7) \quad (7.27)$$

Sendo  $\mathbf{x}$  a posição atual,  $\mathbf{x}_0$  a posição inicial,  $\mathbf{x}_f$  a posição final, e  $t$  a fração do tempo decorrido em relação ao tempo total da trajetória (repare que  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_f$ ).

### 7.2.9 Condições iniciais

O mecanismo sempre parte do repouso na posição  $\mathbf{x}_1$ , dada pela equação (7.28)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -0.002 & 0.108 \end{bmatrix}^T \quad (7.28)$$

### 7.2.10 Parâmetros dos controladores

Com o intuito de que o sistema em malha fechada se comporte como um sistema de segunda ordem com amortecimento crítico,  $\underline{k}_p$  e  $\underline{k}_v$  são parametrizados em função de um parâmetro  $\lambda$ , da seguinte maneira:

$$\underline{k}_p = \lambda^2 \mathbb{1} \quad (7.29)$$

$$\underline{k}_v = 2\lambda \mathbb{1} \quad (7.30)$$

Os parâmetros dos controladores de posição utilizados nas trajetórias definidas são apresentados nas tabelas 6, 7 e 8.

Tabela 6: Parâmetros dos controladores: espaço das juntas - trajetória circular

Estratégia	$\lambda [rad/s]$	$m^* [kg.m^2]$	$\phi [rad/s^2]$	$k_1 [rad/s^2]$	$k_2 [rad/s^2]$
PDq	35	$3.58 \cdot 10^{-3}$	-	-	-
PDMDq	35	$3.58 \cdot 10^{-3}$	20	200	200
TCq	60	-	-	-	-
TCMDq	60	-	20	363	363

Tabela 7: Parâmetros dos controladores: espaço das juntas - trajetória triangular

Estratégia	$\lambda [rad/s]$	$m^* [kg.m^2]$	$\phi [rad/s^2]$	$k_1 [rad/s^2]$	$k_2 [rad/s^2]$
PDq	25	$3.58 \cdot 10^{-3}$	-	-	-
PDMDq	25	$3.58 \cdot 10^{-3}$	90	200	200
TCq	60	-	-	-	-
TCMDq	60	-	20	363	363

Tabela 8: Parâmetros dos controladores: espaço da tarefa

Estratégia	$\lambda [rad/s]$	$m^* [kg]$	$\phi [m/s^2]$	$k_1 [m/s^2]$	$k_2 [m/s^2]$
PDx	70	0.207	-	-	-
PDMDx	70	0.207	6	70	0
TCx	60	-	-	-	-
TCMDx	60	-	6	103	0

Além disso, os controladores de corrente utilizados são controladores lineares de segunda ordem, projetados por alocação de polos. A expressões das funções de transferência de um motor DC são deduzidas e apresentadas no apêndice C, e o projeto do controlador

é apresentado no apêndice D. Tendo em vista que o período de amostragem da malha de corrente é de  $1ms$ , 3 dos pólos 4 polos da malha de corrente são alocados em  $z = 0$ ,  $z = 0.6$ ,  $z = 0.7$ . O último polo é alocado na mesma posição do zero em malha aberta do sistema.

### 7.2.11 Resultados experimentais

Nesta subsessão são apresentados os gráficos de seguimento de trajetória, da evolução temporal dos erros de controle em  $x$  e  $y$ , e da evolução temporal dos esforços de controle para todas as 8 estratégias de controle definidas, tanto para a trajetória circular, quanto para a trajetória triangular (figuras de 27 a 106). Também são apresentadas tabelas de comparação de desempenho e é feita a discussão dos resultados.

### 7.2.11.1 PDq - Trajetória circular

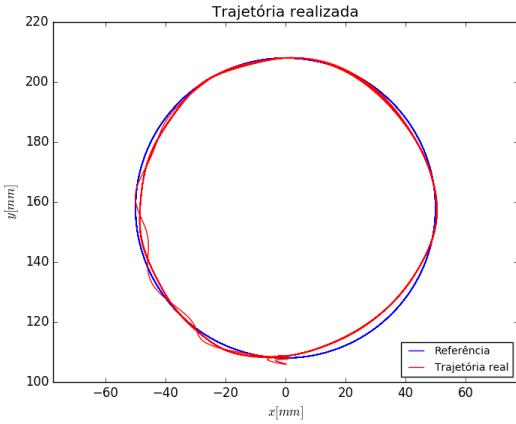


Figura 27: Trajetória realizada

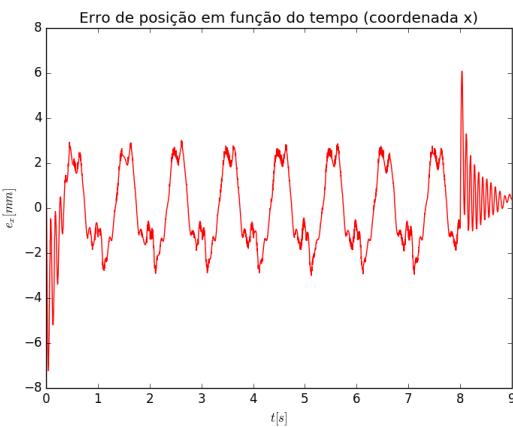


Figura 28: Erro de controle  $e_x$

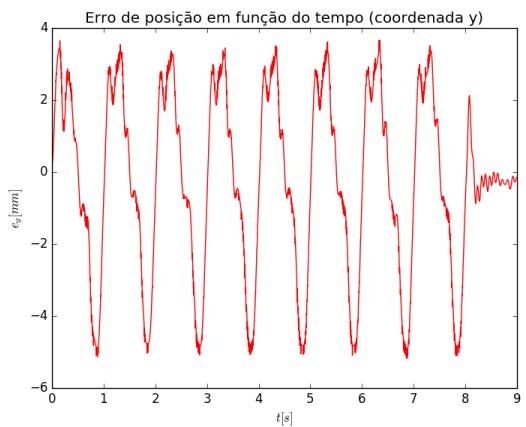


Figura 29: Erro de controle  $e_y$

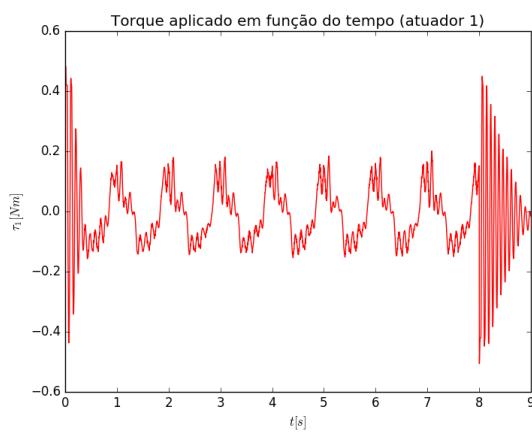


Figura 30: Esforço de controle  $\tau_1$

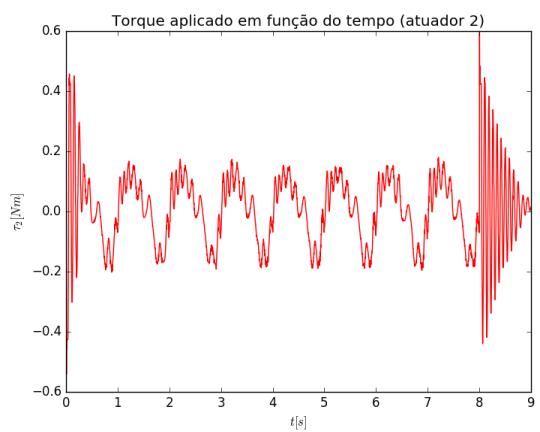


Figura 31: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.2 PDMDq - Trajetória circular

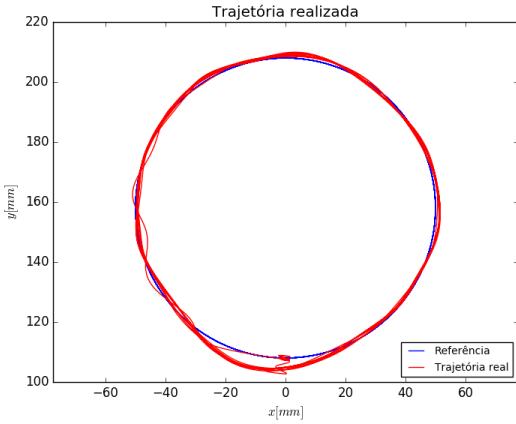


Figura 32: Trajetória realizada

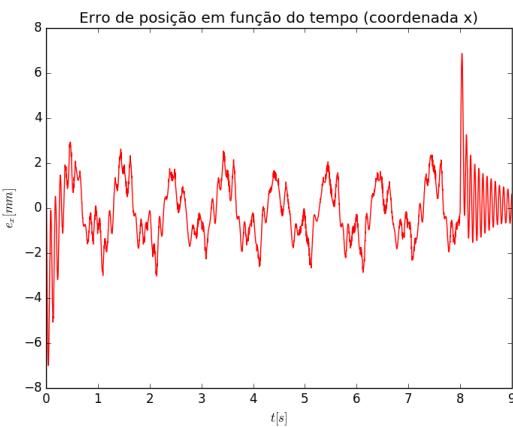


Figura 33: Erro de controle  $e_x$

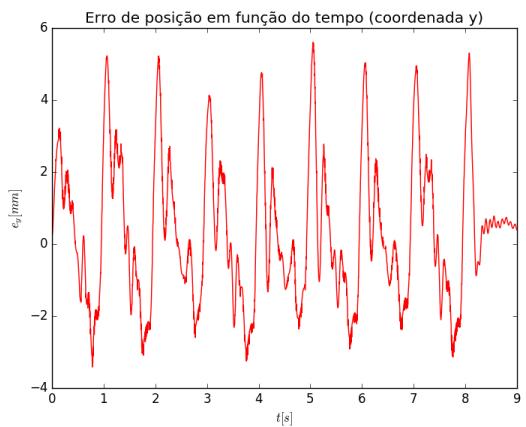


Figura 34: Erro de controle  $e_y$

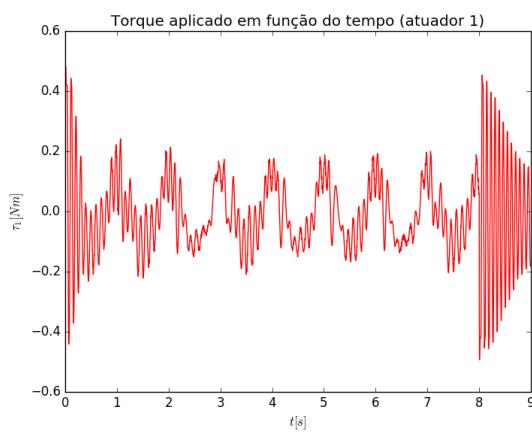


Figura 35: Esforço de controle  $\tau_1$

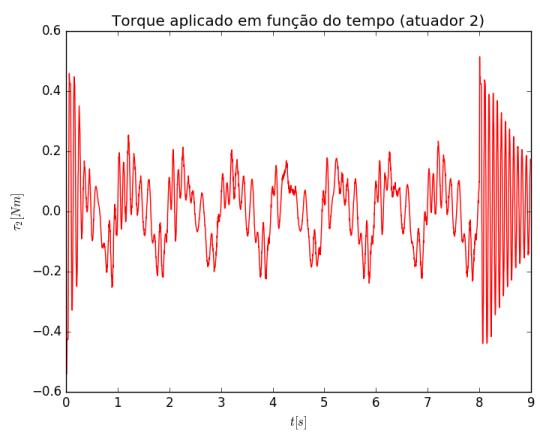


Figura 36: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.3 TCq - Trajetória circular

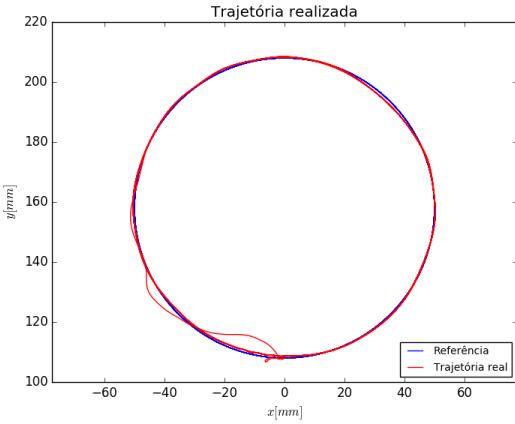


Figura 37: Trajetória realizada

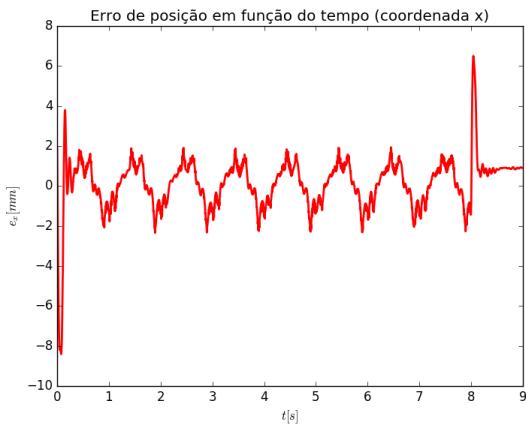


Figura 38: Erro de controle  $e_x$

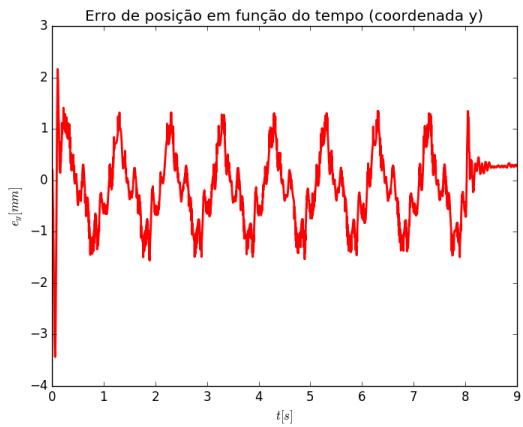


Figura 39: Erro de controle  $e_y$

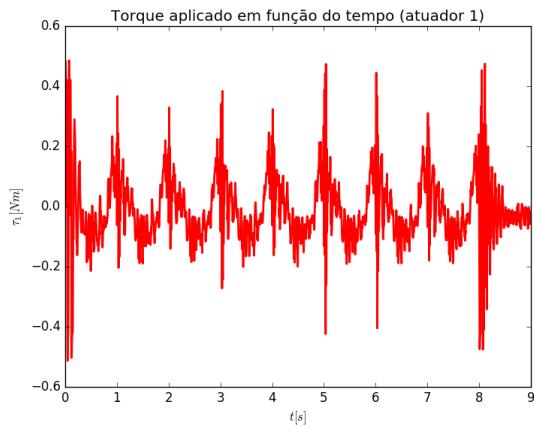


Figura 40: Esforço de controle  $\tau_1$

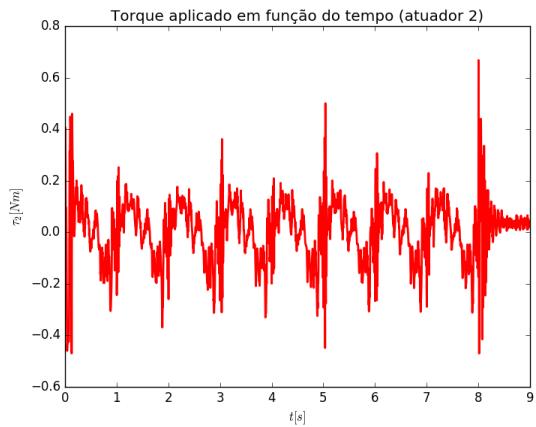


Figura 41: Esforço de controle  $\tau_2$

#### 7.2.11.4 TCMDq - Trajetória circular

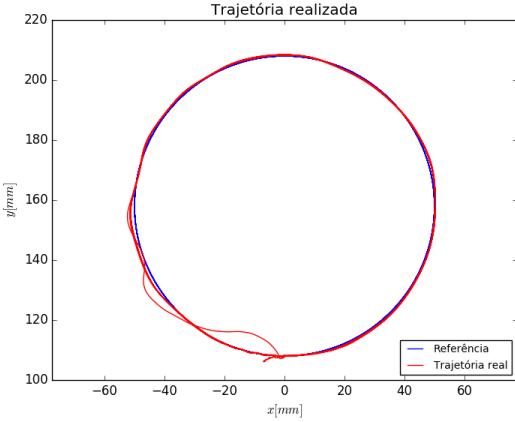


Figura 42: Trajetória realizada

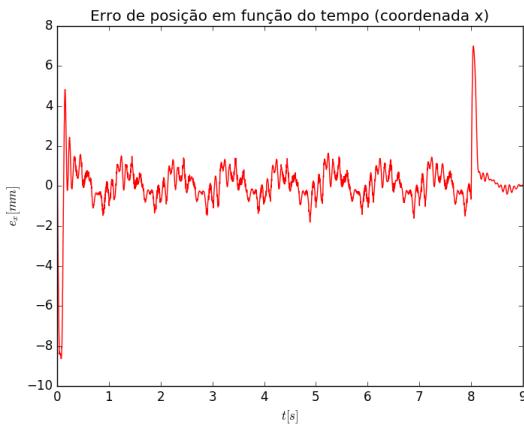


Figura 43: Erro de controle  $e_x$

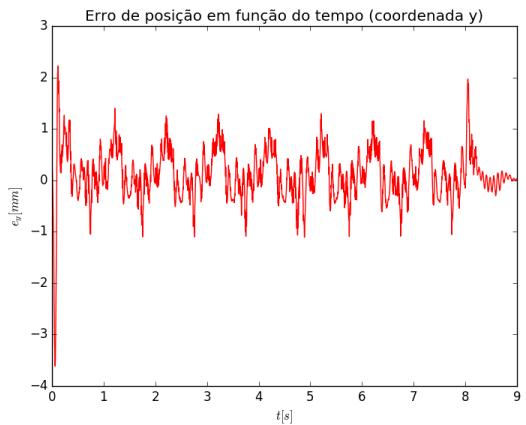


Figura 44: Erro de controle  $e_y$

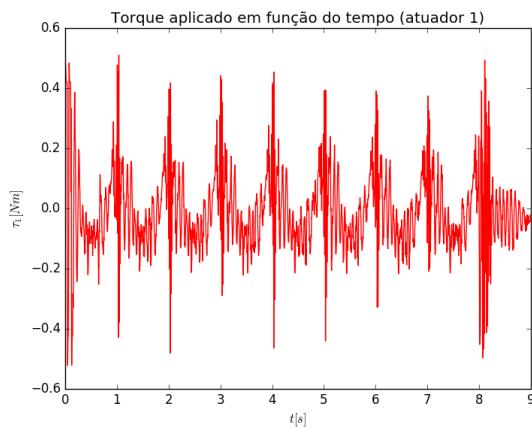


Figura 45: Esforço de controle  $\tau_1$

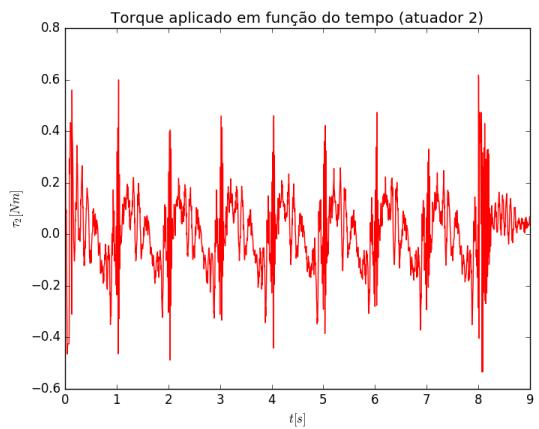


Figura 46: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.5 PDx - Trajetória circular

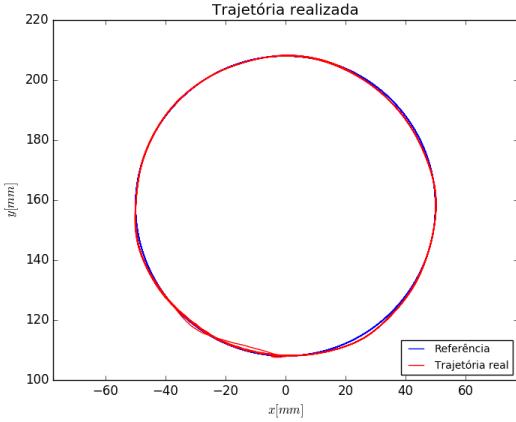


Figura 47: Trajetória realizada

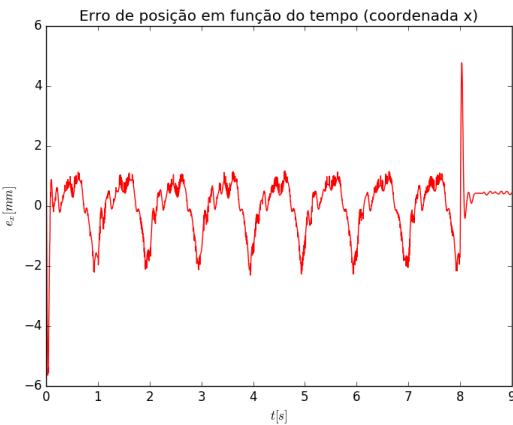


Figura 48: Erro de controle  $e_x$

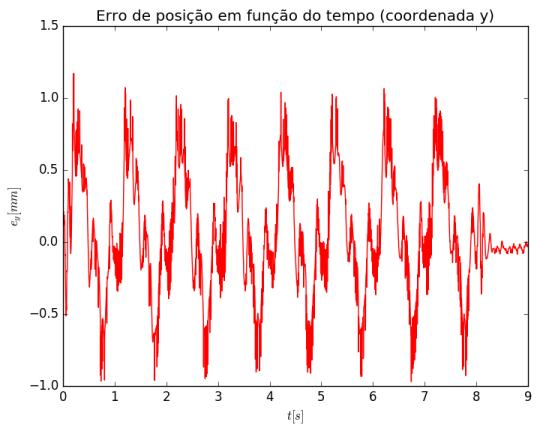


Figura 49: Erro de controle  $e_y$

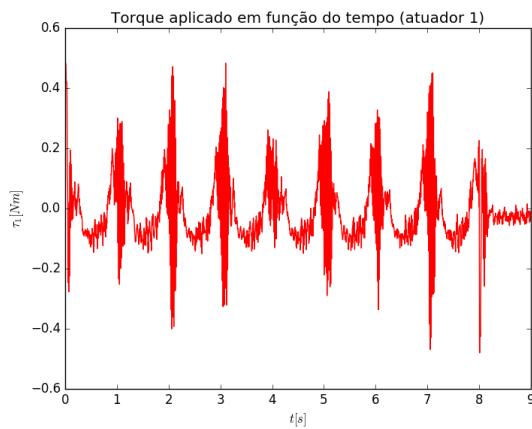


Figura 50: Esforço de controle  $\tau_1$

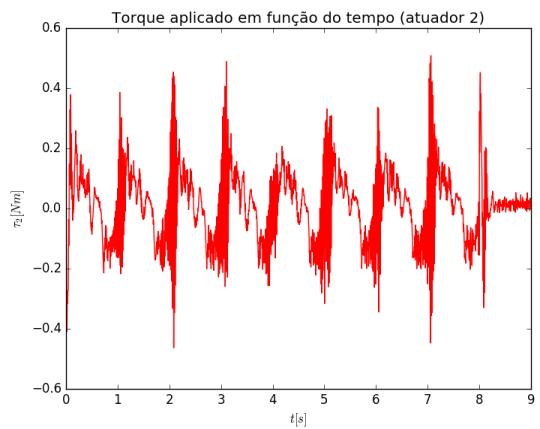


Figura 51: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.6 PDMDx - Trajetória circular

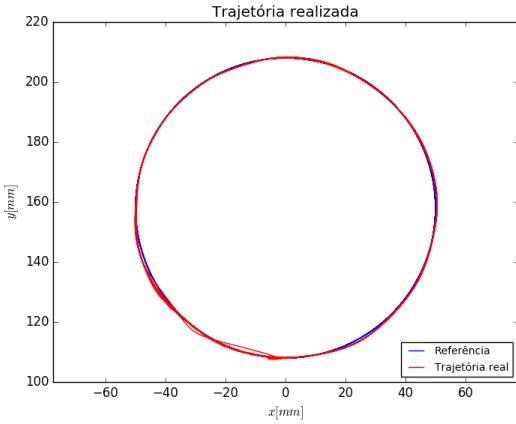


Figura 52: Trajetória realizada

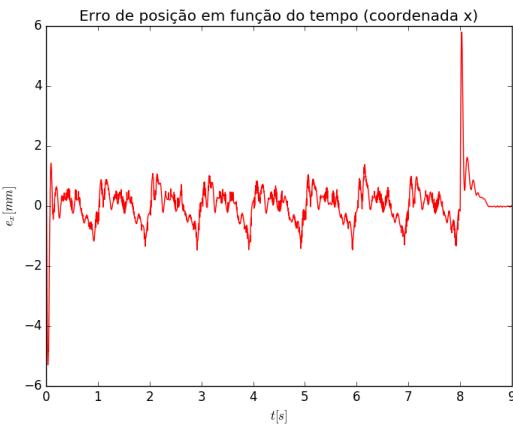


Figura 53: Erro de controle  $e_x$

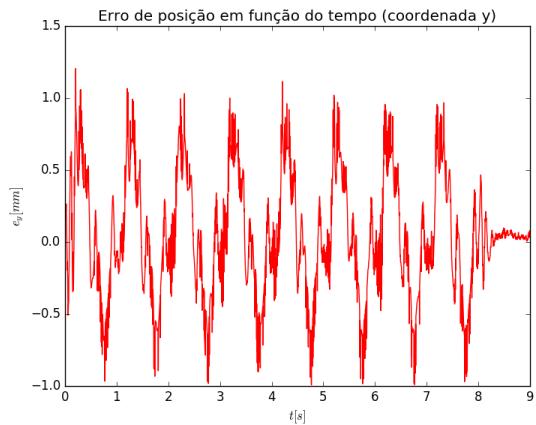


Figura 54: Erro de controle  $e_y$

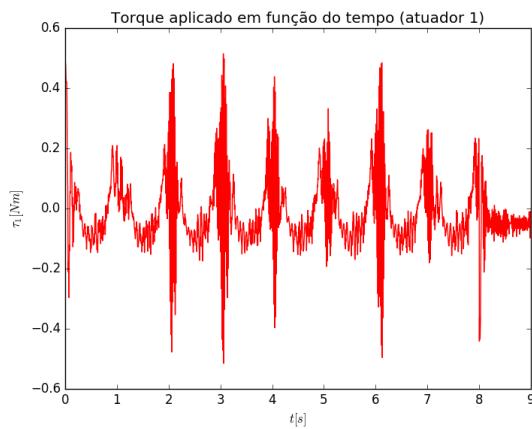


Figura 55: Esforço de controle  $\tau_1$

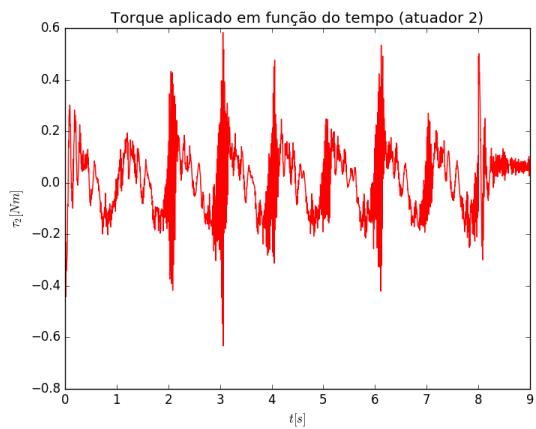


Figura 56: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.7 TCx - Trajetória circular

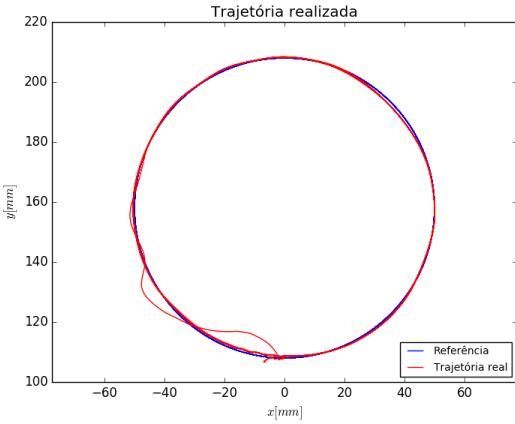


Figura 57: Trajetória realizada

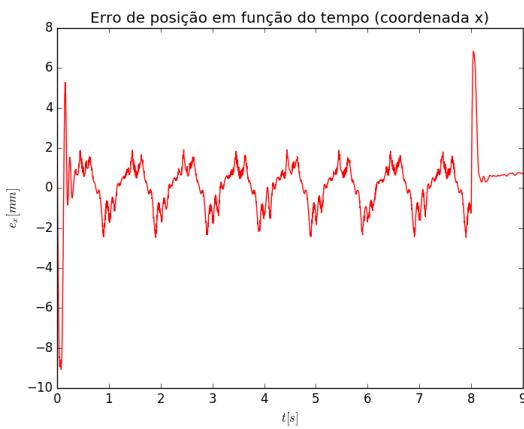


Figura 58: Erro de controle  $e_x$

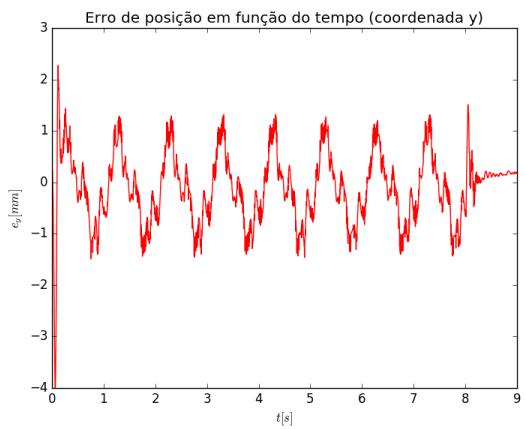


Figura 59: Erro de controle  $e_y$

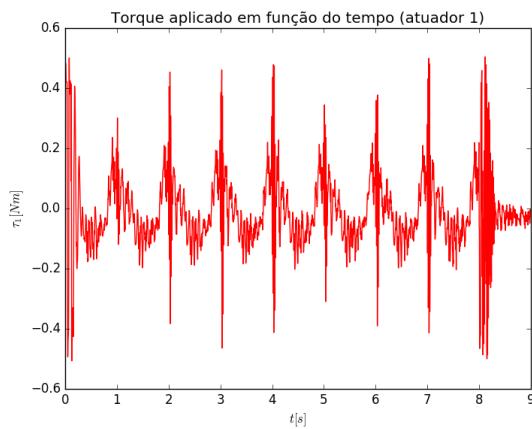


Figura 60: Esforço de controle  $\tau_1$

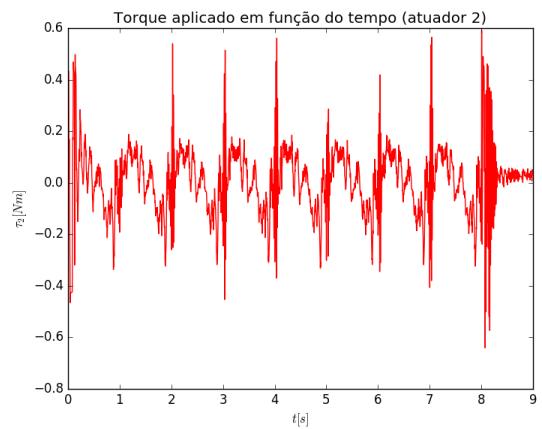


Figura 61: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.8 TCMDx - Trajetória circular

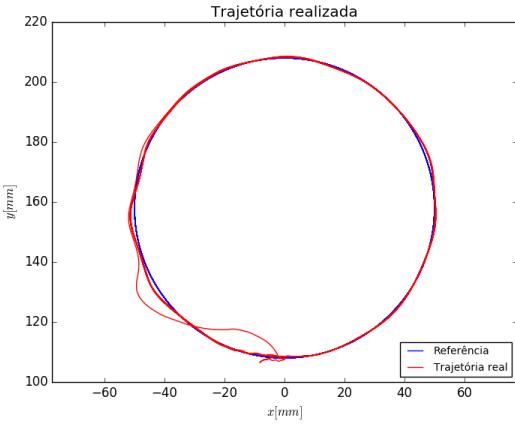


Figura 62: Trajetória realizada

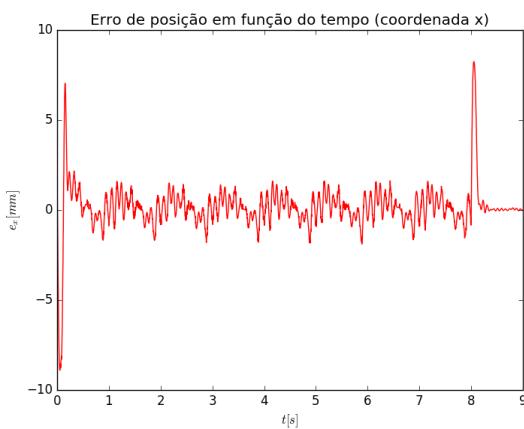


Figura 63: Erro de controle  $e_x$

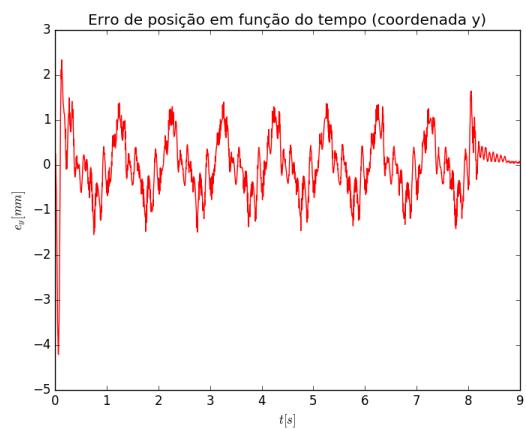


Figura 64: Erro de controle  $e_y$

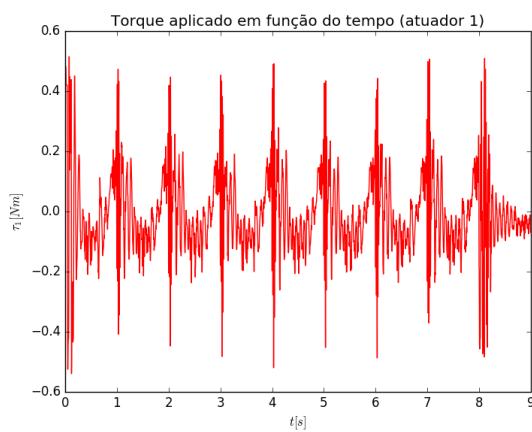


Figura 65: Esforço de controle  $\tau_1$

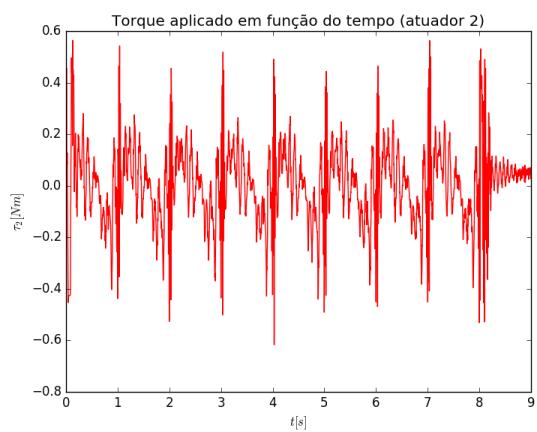


Figura 66: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.9 PDq - Trajetória triangular

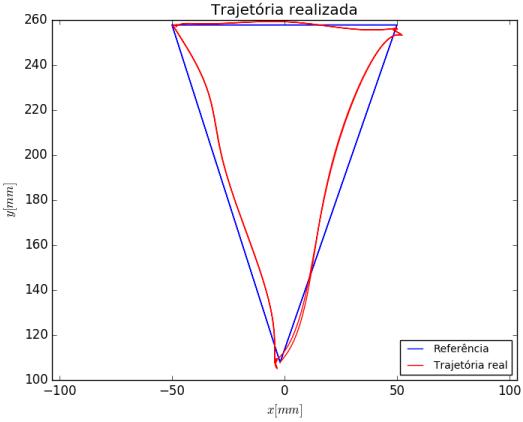


Figura 67: Trajetória realizada

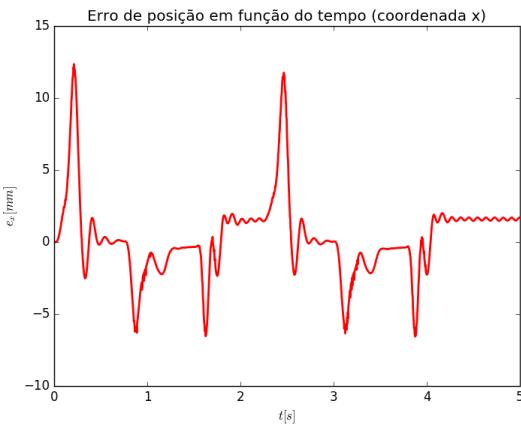


Figura 68: Erro de controle  $e_x$

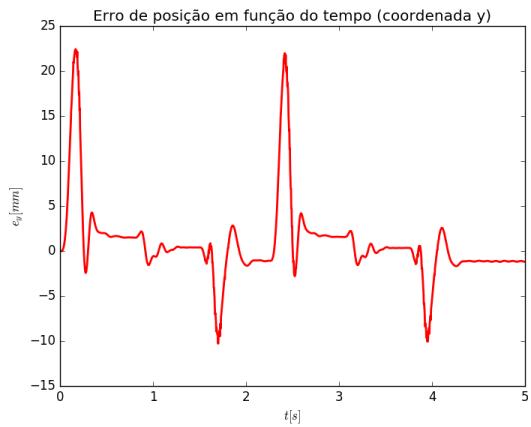


Figura 69: Erro de controle  $e_y$

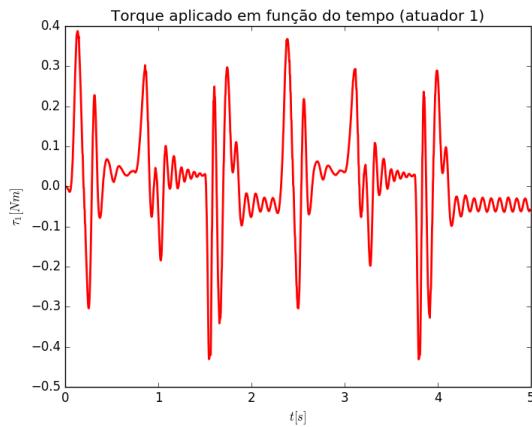


Figura 70: Esforço de controle  $\tau_1$

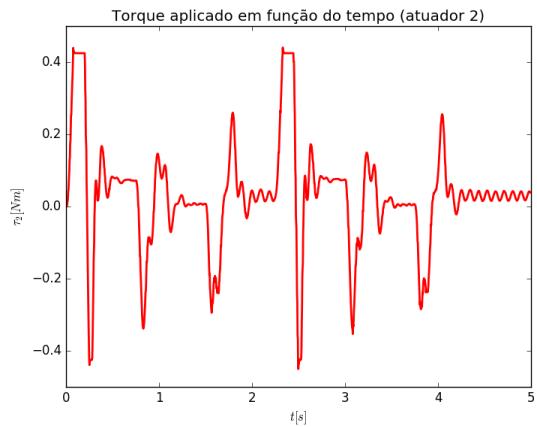


Figura 71: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.10 PDMDq - Trajetória triangular

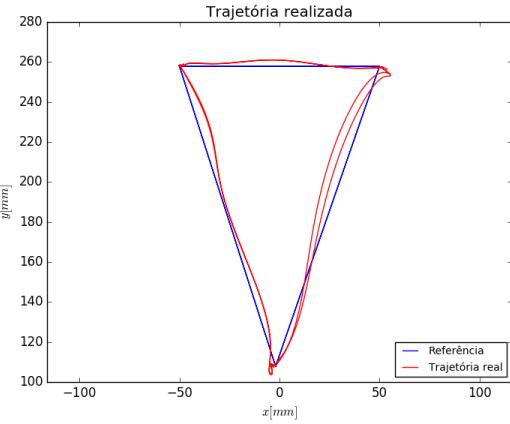


Figura 72: Trajetória realizada



Figura 73: Erro de controle  $e_x$

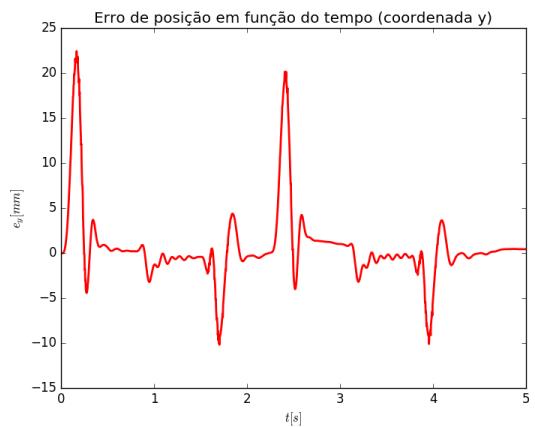


Figura 74: Erro de controle  $e_y$

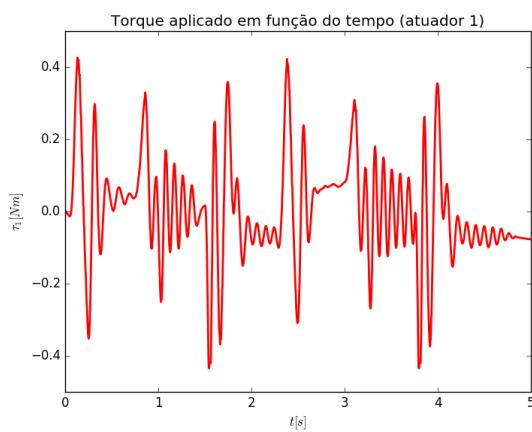


Figura 75: Esforço de controle  $\tau_1$



Figura 76: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.11 TCq - Trajetória triangular

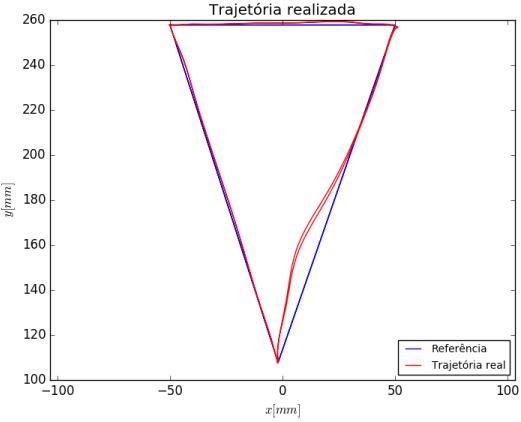


Figura 77: Trajetória realizada

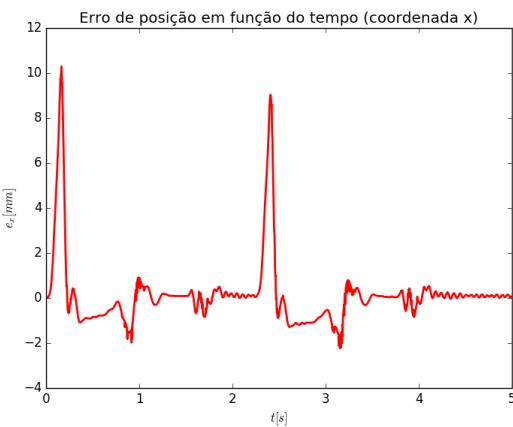


Figura 78: Erro de controle  $e_x$

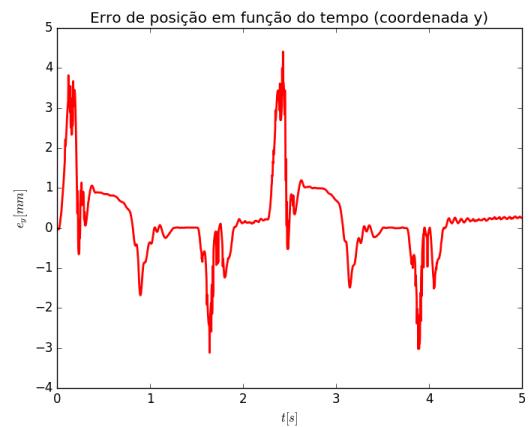


Figura 79: Erro de controle  $e_y$

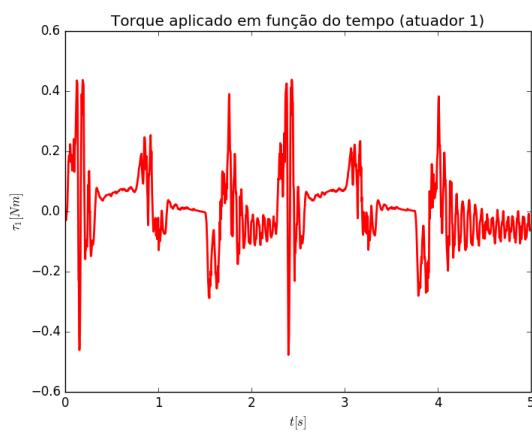


Figura 80: Esforço de controle  $\tau_1$

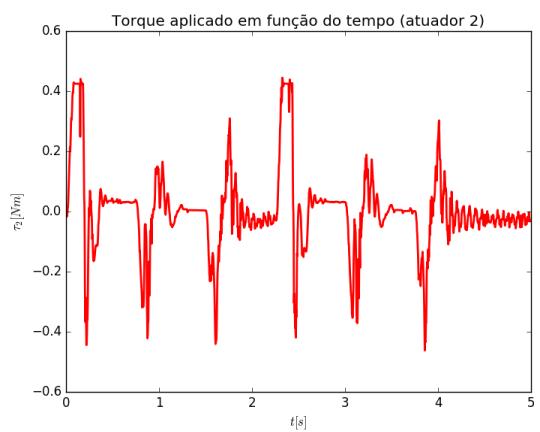


Figura 81: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.12 TCMDq - Trajetória triangular

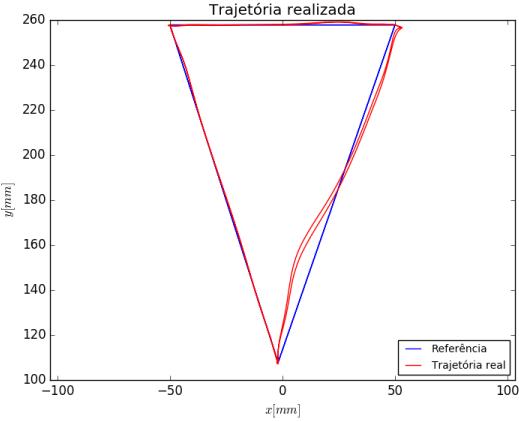


Figura 82: Trajetória realizada

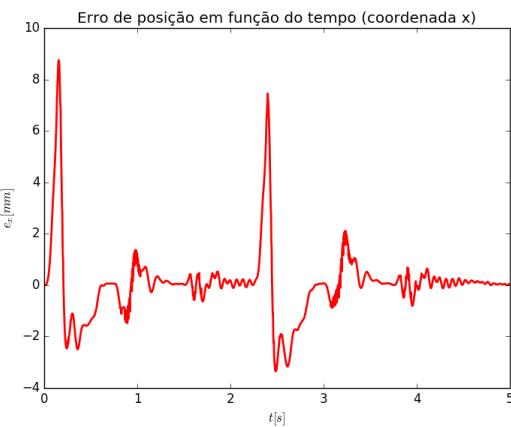


Figura 83: Erro de controle  $e_x$

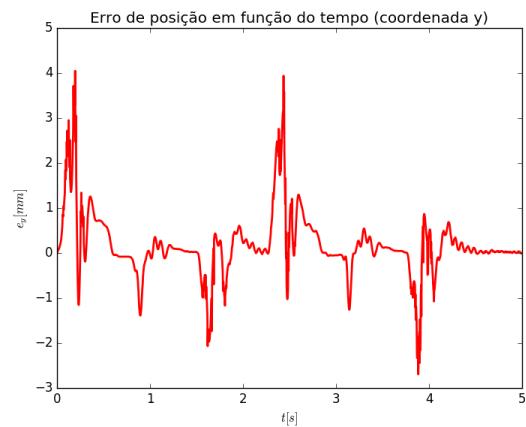


Figura 84: Erro de controle  $e_y$

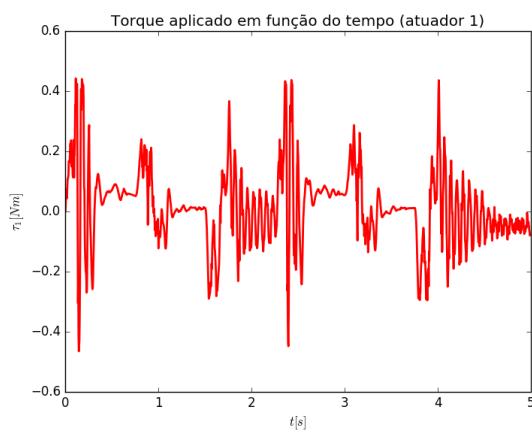


Figura 85: Esforço de controle  $\tau_1$

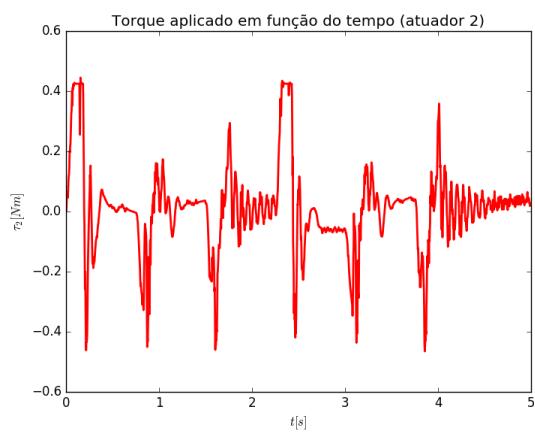


Figura 86: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.13 PDx - Trajetória triangular

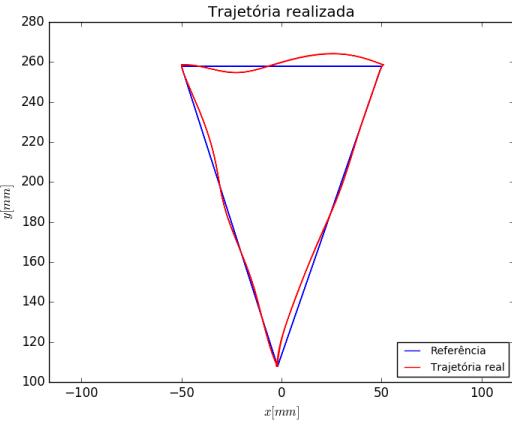


Figura 87: Trajetória realizada

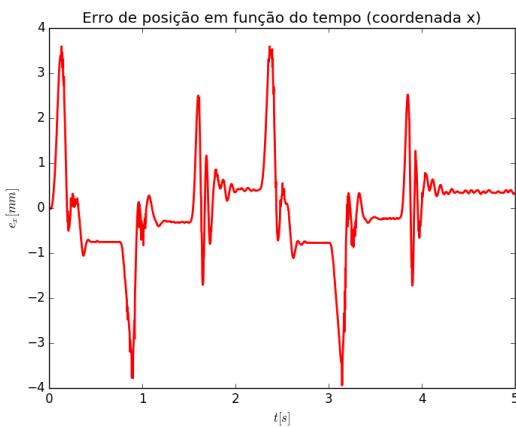


Figura 88: Erro de controle  $e_x$

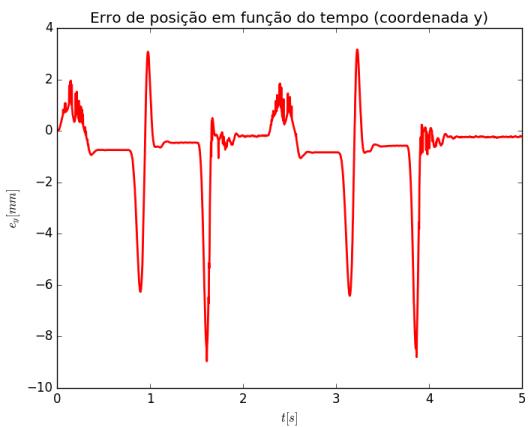


Figura 89: Erro de controle  $e_y$

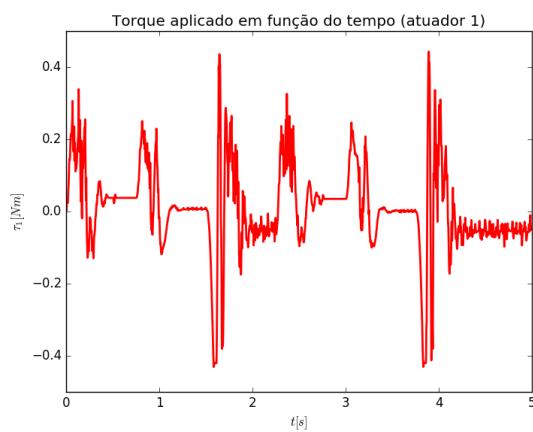


Figura 90: Esforço de controle  $\tau_1$

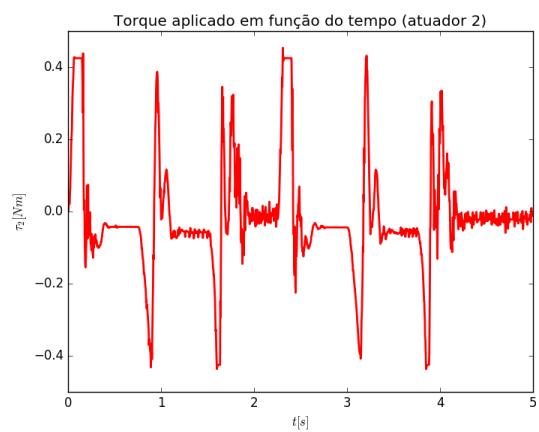


Figura 91: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.14 PDMDx - Trajetória triangular

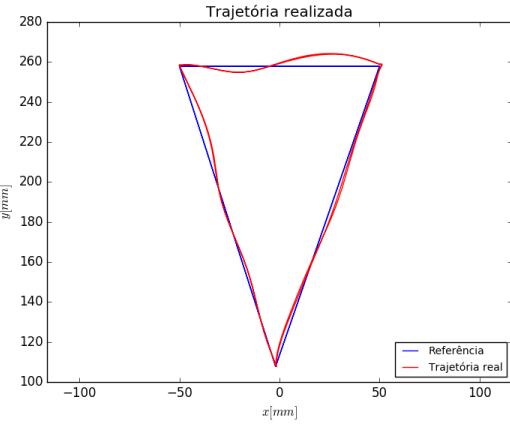


Figura 92: Trajetória realizada

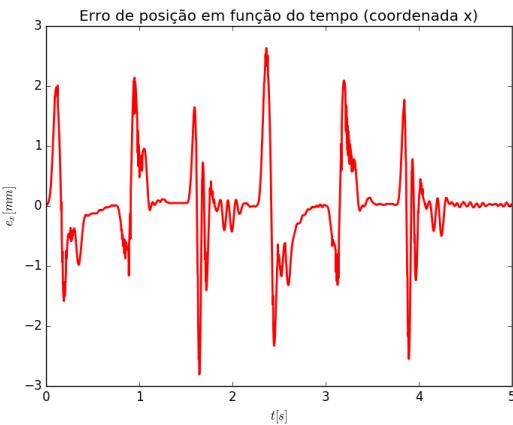


Figura 93: Erro de controle  $e_x$

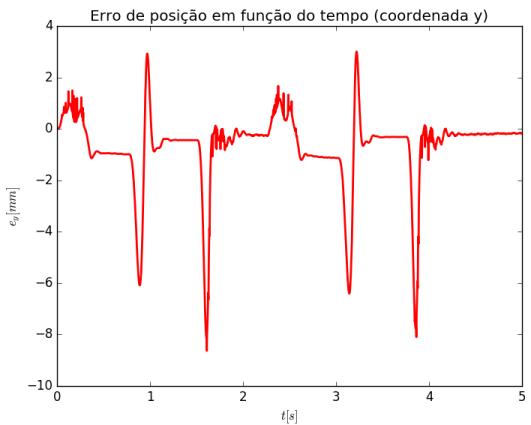


Figura 94: Erro de controle  $e_y$

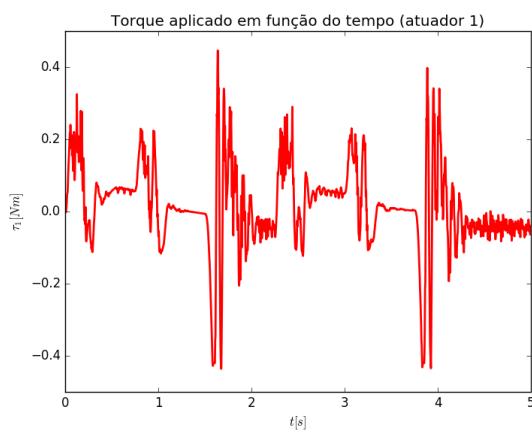


Figura 95: Esforço de controle  $\tau_1$

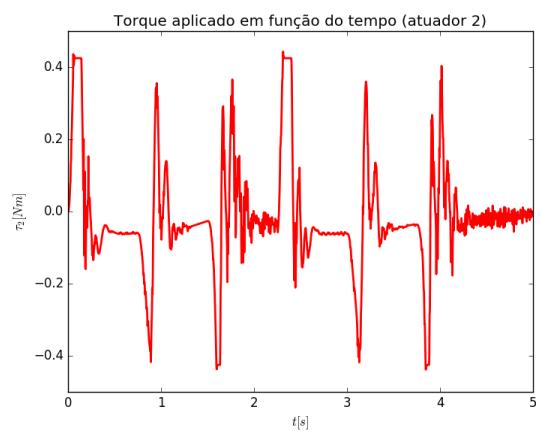


Figura 96: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.15 TCx - Trajetória triangular

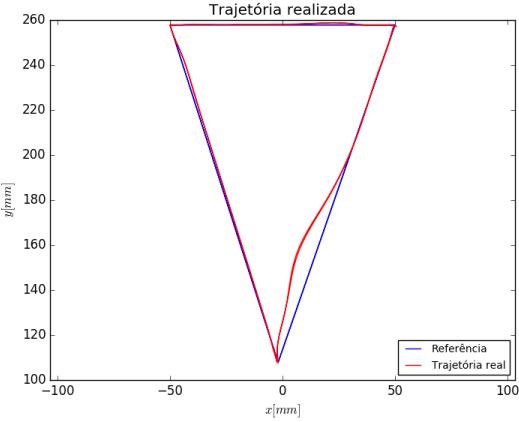


Figura 97: Trajetória realizada

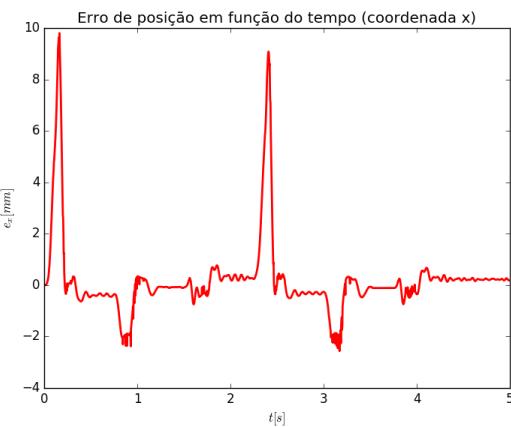


Figura 98: Erro de controle  $e_x$

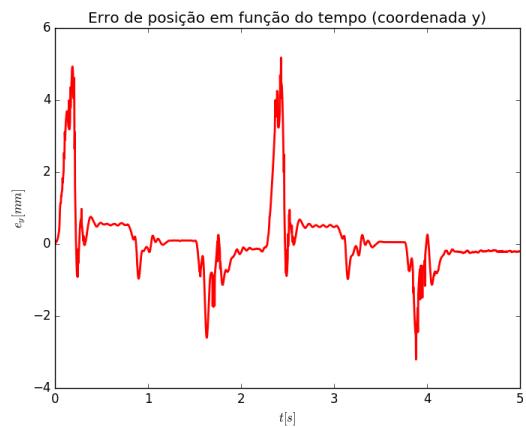


Figura 99: Erro de controle  $e_y$

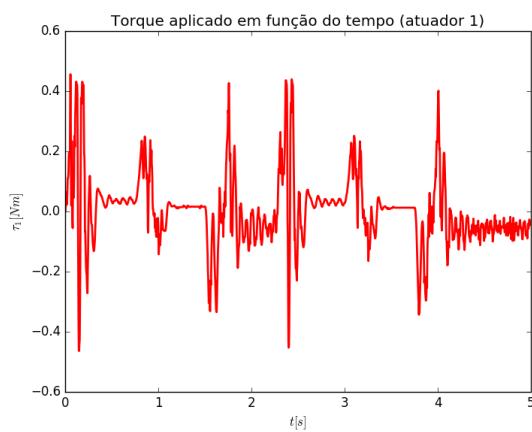


Figura 100: Esforço de controle  $\tau_1$

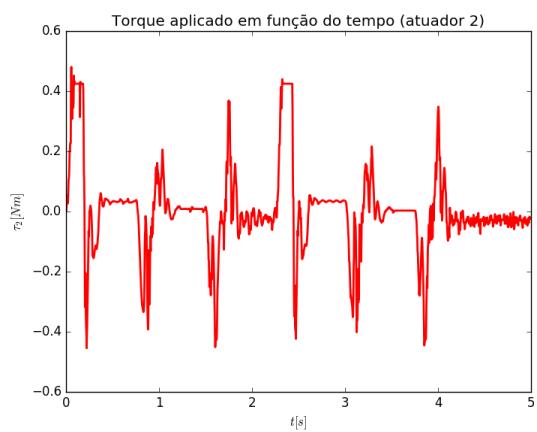


Figura 101: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.16 TCMDx - Trajetória triangular

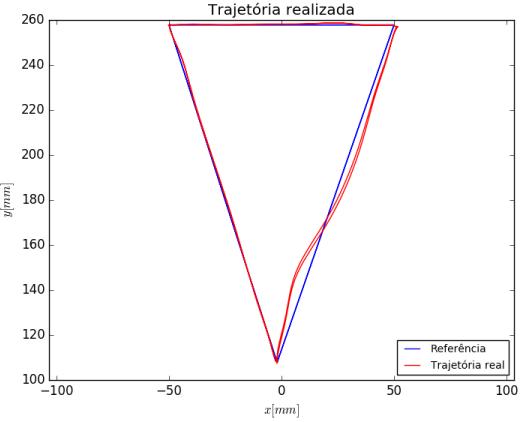


Figura 102: Trajetória realizada

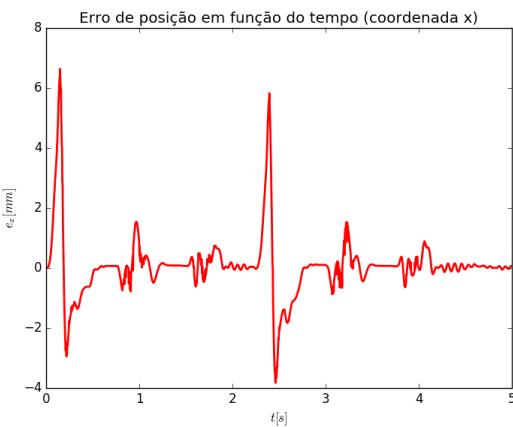


Figura 103: Erro de controle  $e_x$

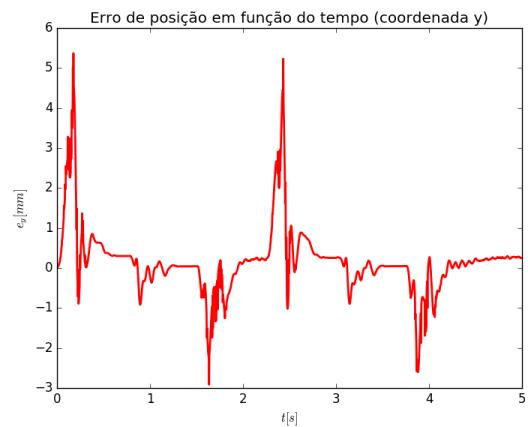


Figura 104: Erro de controle  $e_y$

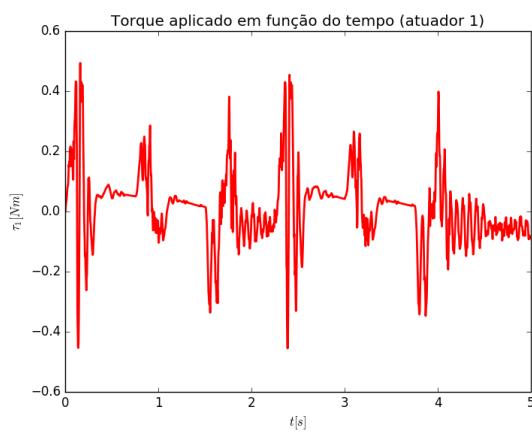


Figura 105: Esforço de controle  $\tau_1$

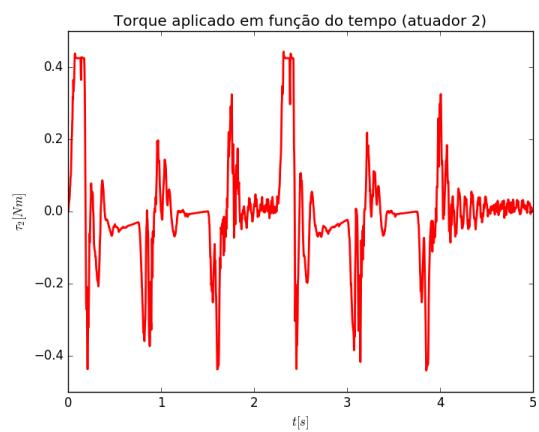


Figura 106: Esforço de controle  $\tau_2$

### 7.2.11.17 Tabelas comparativas

As tabelas 9 e 10 apresentam os valores eficazes dos erros de posição e dos esforços de controle nas trajetórias circular e triangular, para cada estratégia de controle, os quais são calculados da seguinte maneira:

$$e_{ef} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_x^2[k] + e_y^2[k]} \quad (7.31)$$

$$\tau_{ef} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tau_1^2[k] + \tau_2^2[k]} \quad (7.32)$$

Tabela 9: Valores eficazes de erro e esforço de controle (em regime permanente) - Trajetória circular

Estratégia	$e_{ef}[mm]$	$\tau_{ef}[N.m]$
PDq	3.15	0.132
PDMDq	2.37	0.141
TCq	1.14	0.143
TCMDq	0.77	0.168
PDx	0.91	0.155
PDMDx	0.65	0.169
TCx	1.16	0.150
TCMDx	0.90	0.185

Tabela 10: Valores eficazes de erro e esforço de controle - Trajetória triangular

Estratégia	$e_{ef}[mm]$	$\tau_{ef}[N.m]$
PDq	5.39	0.197
PDMDq	5.16	0.212
TCq	1.85	0.181
TCMDq	1.63	0.191
PDx	1.98	0.191
PDMDx	1.79	0.188
TCx	1.83	0.188
TCMDx	1.36	0.186

As tabelas 11 e 12 apresentam o aumento ou diminuição percentual dos valores eficazes

de erro de posição e esforço de controle das estratégias de controle híbridas em relação às estratégias de controle puras.

Tabela 11: Aumento/diminuição dos valores eficazes de erro e esforço de controle utilizando a associação com o MD - Trajetória circular

Estratégia	$e_{ef}$	$\tau_{ef}$
PDq → PDMDq	-24.9%	6.87%
TCq → TCMDq	-32.9%	17.5%
PDx → PDMDx	-28.9%	8.77%
TCx → TCMDx	-22.1%	23.1%

Tabela 12: Aumento/diminuição dos valores eficazes de erro e esforço de controle utilizando a associação com o MD - Trajetória triangular

Estratégia	$e_{ef}$	$\tau_{ef}$
PDq → PDMDq	-4.20%	7.88%
TCq → TCMDq	-11.5%	5.45%
PDx → PDMDx	-9.64%	-1.69%
TCx → TCMDx	-25.5%	-0.68%

Por fim, as tabelas 13 e 14 apresentam os valores de erro estacionário de posição, ou seja, o valor de erro de posição após o manipulador terminar de realizar a trajetória e se estabilizar em um ponto fixo. O valor de erro  $e$  da terceira coluna é obtido fazendo  $e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$ , ou seja, é a distância entre a posição desejada e a posição real do efetuador.

Tabela 13: Erro estacionário de posição - Trajetória circular

Estratégia	$e_x [mm]$	$e_y [mm]$	$e [mm]$
PDq	0.444	-0.195	0.484
PDMDq	0.116	0.481	0.494
TCq	0.903	0.289	0.949
TCMDq	0.039	0.012	0.041
PDx	0.423	-0.033	0.425
PDMDx	-0.010	0.034	0.036
TCx	0.748	0.182	0.769
TCMDx	0.006	0.060	0.061

Tabela 14: Erro estacionário de posição - Trajetória triangular

Estratégia	$e_x[\text{mm}]$	$e_y[\text{mm}]$	$e[\text{mm}]$
PDq	1.601	-1.152	1.972
PDMDq	0.762	0.428	0.874
TCq	0.099	0.264	0.279
TCMDq	0.028	0.017	0.033
PDx	0.368	-0.229	0.434
PDMDx	0.017	-0.170	0.171
TCx	0.228	-0.210	0.305
TCMDx	0.009	0.271	0.271

### 7.2.12 Discussão dos resultados

À partir dos gráficos de seguimento de trajetória, evolução temporal dos erros e esforços de controle, e das tabelas comparativas apresentadas, é possível tirar algumas conclusões sobre as técnicas de controle implementadas.

Primeiramente, analisando as tabelas 9 e 10, é possível perceber que em todos os casos a associação das técnicas de controle PD e TC com o MD obteve uma diminuição nos valores eficazes do erro de controle. Na trajetória circular, essa associação teve como consequência um aumento perceptível no valor eficaz do esforço de controle, como pode ser visto na tabela 11, enquanto que, na trajetória triangular, as estratégias de controle no espaço das juntas tiveram um aumento bem mais sutil, e as estratégias no espaço tarefa tiveram até uma pequena diminuição no custo energético, como pode ser visto na tabela 12. De qualquer maneira, mesmo nos casos em que houve aumento no custo energético, a utilização da associação de técnicas pode ser considerada vantajosa, tendo em vista que, como foi constatado experimentalmente, um aumento de  $5\text{rad/s}$  nos valores utilizados do parâmetro  $\lambda$  já seria o suficiente para comprometer a estabilidade do sistema em todas as estratégias de controle utilizadas, então pode-se concluir que a associação com o MD é uma maneira eficiente de diminuir o erro de seguimento de trajetória sem comprometer a estabilidade do sistema.

Outro resultado interessante que vale a pena ser comentado é a diminuição do erro estacionário de posição obtida com a utilização da associação das técnicas de controle PD e TC com o MD. Como pode ser observado nas tabelas 13 e 14, em todos os casos, com exceção do PDq na trajetória circular e do TCx na trajetória triangular, houve uma diminuição significativa do erro de posição com a utilização da associação de técnicas.

No caso do TCx na trajetória triangular, houve uma diminuição significativa do erro de posição na direção  $x$ , mas não na direção  $y$ . Isso pode ser explicado pelo simples fato de ter sido utilizado um valor nulo para  $k_2$  nessa estratégia de controle, o que significa que o MD teoricamente só estaria atuando na direção  $x$ . Esse comportamento de atuar no sentido de o erro estacionário de posição praticamente zerar pode ser facilmente observado nas figuras 43, 44, 53, 63, 83, 84, 93 e 103, e tem características similares às técnicas de controle que utilizam a integral do erro de controle com este intuito, com a vantagem da associação com o MD não degradar o desempenho do sistema durante a trajetória (muito pelo contrário) e de não necessitar da utilização de técnicas de *anti-windup* para garantir a estabilidade do sistema no caso de saturação nos esforços de controle.

Mais uma vez, analisando as tabelas 9 e 10, pode-se observar que, em relação ao consumo energético, não há uma diferença tão significativa entre as estratégias de controle, principalmente na trajetória circular. As estratégias com maior consumo energético são PDMDx e TCMDx na trajetória circular, e PDq e PDMDq na trajetória triangular. As estratégias com menor consumo energético são PDq e PDMDq na trajetória circular, e TCq e TCMDx na trajetória triangular. Além disso, em relação aos valores eficazes dos erros de controle, pode-se observar que há diferenças bem mais significativas. As estratégias com os maiores valores eficazes de erro de controle são PDq e PDMDq em ambas as trajetórias. Já as estratégias com os menores valores eficazes de erro de controle são TCMDx em ambas as trajetórias, PDMDx na trajetória circular, e TCMDq na trajetória na trajetória triangular.

Também vale a pena comentar o comportamento das estratégias de controle na parte do regime transitivo na trajetória circular (partida e parada bruscas). Analisando os gráficos de evolução temporal de erro de controle, é bastante nítido que a estratégia PDx é a que apresenta o menor erro em regime transitivo (figuras 48 e 49), seguida da PDMDx (figuras 53 e 54). Além disso, pode-se observar que, nesse quesito, as estratégias de controle híbridas (associadas ao MD) apresentam um desempenho levemente inferior às não híbridas.

Um comportamento interessante foi observado na trajetória circular. Percebe-se que, para as estratégias PDq e PDMDq, o erro de seguimento de trajetória é maior nos trechos I e III (figuras 67 e 72), enquanto que para TCq, TCMCq, TCx e TCMDx, o erro está mais concentrado no trecho I (figuras 77, 82, 97 e 102), e para PDx e PDMDx o erro está mais concentrado no trecho II (figuras 87 e 92).

Outros fenômenos interessantes observados são que a utilização da associação das téc-

nicas de controle com o MD em geral adiciona harmônicos nas respostas temporais dos erros de controle e gera um efeito similar ao efeito de batimento, fazendo com que os valores de pico dos erros variem como se estivessem seguindo uma envoltória senoidal de baixa frequências. Estes fenômenos podem ser facilmente observados nas figuras 33, 34, 43, 44, 53 e 63.

Outro efeito interessante que foi observado foi a diminuição dos valores de pico de erro de controle nas trajetórias triangulares, normalmente seguido de um efeito de *undershoot*, quando foi utilizada a associação com o MD. Isso pode ser facilmente observado nas figuras 83, 84, 93 e 103.

Não se pode deixar de mencionar o desempenho surpreendentemente bom das estratégias PDx e PDMDx, muito superior ao desempenho das estratégias PDq e PDMDq. Na trajetória circular, a estratégia PDMDx obteve o menor valor eficaz de erro de controle e o menor valor de erro estacionário, e a estratégia PDx apresentou um menor valor eficaz de erro de controle e um menor valor de erro estacionário que as estratégias TCq e TCx, como pode ser visto nas tabelas 9 e 13. Já na trajetória triangular, apesar dessas estratégias também apresentarem bom desempenho, a estratégia PDMDx já não mais supera as estratégias TCMDq e TCMDx em relação aos valores eficazes de erro de controle, e a estratégia PDx também já não mais supera as estratégias TCMDq e TCMDx em relação aos valores eficazes de erro de controle nesse mesmo quesito.

O desempenho surpreendentemente bom do PDx e do PDMDx pode ser explicado pelo fato de que o valor de  $m^*$  utilizado nas estratégias PDx e PDMDx foi baseado na matriz de inércia generalizada escrita no espaço tarefa calculada no centro da trajetória circular, a qual é praticamente diagonal com as componentes da diagonal muito próximas. Sendo assim, o modelo de inércia equivalente constante é muito mais válido para a trajetória circular do que para a trajetória triangular, a qual se afasta muito mais do centro do círculo. Além disso, como o ponto de partida das trajetórias é relativamente próximo de uma região quase singular, as matrizes de inércia generaliza estimadas possuem valores mais altos nesse ponto, o que limita um pouco o maior valor de  $\lambda$  que pode ser escolhido de modo a garantir a estabilidade do sistema nas estratégias TCq, TCx, TCMDq e TCMDx, enquanto que nas estratégias PDx e PDMDx a matriz de inércia generaliza estimada é constante e não possui valores tão altos, o que permitiu a utilização de um maior valor de  $\lambda$  sem afetar a estabilidade de sistema, o que contribui imensamente para a obtenção de menores valores de erros de controle. Isso também explica o fenômeno de todas as estratégias de controle terem um erro relativamente grande no trecho I, com exceção de PDx e PDMDx. Se o ponto  $x_1$  fosse mais afastado das singularidades, muito provavelmente

os valores de erro nesse trecho seriam muito inferiores. Além disso, vale comentar que, além de serem competitivas em relação ao erro de controle, as estratégias PDx e PDMDx são competitivas em relação ao consumo energético, tendo em vista que ambas apresentam valores intermediários de consumo energético em ambas as trajetórias.

Por fim, vale fazer a comparação entre o controle no espaço das juntas e o controle no espaço da tarefa. Analisando as tabelas 9 e 10, pode-se observar que claramente as estratégias PD e PDMD se mostram muito mais eficazes no espaço da tarefa do que no espaço das juntas, tendo em vista a grande diferença nos valores eficazes dos erros de controle e da pequena diferença no custo energético. Já em relação às estratégias TC e TCMD, não há uma diferença de eficiência considerável comparando os dois espaços, tendo em vista que na trajetória circular as estratégias no espaço das juntas se mostram ligeiramente superiores, enquanto na trajetória circular as estratégias no espaço da tarefa se mostram levemente superiores.

## 8 CONCLUSÕES E TEMAS PARA PESQUISA FUTURA

### 8.1 Conclusões

Esta Tese de Doutorado abordou como tema a modelagem dinâmica e o controle de manipuladores paralelos, tendo por objetivo oferecer contribuições para o aumento do seu desempenho. Especificamente, a busca por este aprimoramento foi realizada mediante o emprego de técnicas de controle baseadas no modelo do manipulador. Com relação ao objeto de estudo, escolheu-se o robô denominado Clara, equipamento desenvolvido no LaMMAr. Sua estrutura mecânica corresponde ao mecanismo pentágono articulado, de dois graus de liberdade, que opera no espaço plano.

A metodologia seguida na pesquisa compreendeu a execução de seis fases, abrangendo desde o desenvolvimento de algoritmos para as modelagens cinemática e dinâmica ao projeto de controladores e sua validação experimental.

Após o desenvolvimento teórico, a execução das simulações e dos ensaios experimentais, foi possível reunir diversas conclusões quanto à modelagem dinâmica, à técnica de controle mais adequada, bem como a sua implementação.

Em relação à modelagem dinâmica, o algoritmo genérico de modelagem de mecanismos paralelos translacionais desenvolvido se mostrou bastante promissor, tendo em vista que, além de facilitar o processo de modelagem, ele pode ser implementado no próprio microprocessador que realiza o controle do mecanismo, podendo ser utilizado para tabelar previamente os termos seu modelo dinâmico em função da posição do efetuador. Esta estratégia se mostrou muito vantajosa, pois facilita a implementação de técnicas de controle baseadas em modelo e diminui consideravelmente seus custos computacionais.

A partir dos resultados experimentais obtidos, algumas conclusões relevantes podem ser tiradas. Quanto à lei de Controle por Modos Deslizantes proposta, esta apresenta uma característica bastante interessante e conveniente: pode ser interpretada como a combina-

ção de outras técnicas técnicas de controle, como o Controle por Torque Computado ou o Controle Proporcional Derivativo, com um termo adicional proveniente do Controle por Modos Deslizantes.

Além disso, tal combinação permitiu que o efetuador do manipulador realizasse as trajetórias programadas, nos regimes permanente e transitório, com menor erro de seguimento, superando as técnicas puras, tanto no espaço das juntas como no da tarefa. Deve-se ressaltar que tal desempenho foi alcançado, sem que houvesse um aumento significativo do consumo energético, mantendo-se a estabilidade do sistema.

Mercece também destaque o desempenho do controle Proporcional Derivativo no espaço da tarefa, que mostrou ser bastante competitivo em comparação às técnicas de controle puras baseadas em modelo, nos critérios erro de seguimento e torque dos atuadores, em trajetórias nos regimes permanente e transitório.

Por fim, pôde-se concluir que a escolha entre o espaço das juntas e o da tarefa pode influenciar muito no desempenho do sistema para as leis de controle não baseadas em modelo, indicando que o espaço da tarefa é o mais adequado. No entanto, para as leis de controle baseadas em modelo, tal escolha não influenciou significativamente o desempenho do sistema.

## 8.2 Principais contribuições

Dentre as principais contribuições, destacam-se:

- a) O desenvolvimento de um algoritmo genérico para modelagem cinemática e dinâmica de manipuladores seriais e paralelos translacionais. Este algoritmo poderá integrar os sistemas de controle de outros manipuladores paralelos do LaMMAr, como os robôs Laila e Dora.
- b) A síntese de uma nova lei de controle não linear robusto, a qual pode ser interpretada como a combinação das técnicas de Controle por Torque Computado ou Controle Proporcional-Derivativo ao Controle por Modos Deslizantes, e a constatação de seu caráter promissor no que tange à minimização do erro de seguimento de trajetória, sem aumentar demasiadamente o consumo energético do manipulador.
- c) A comparação do desempenho de técnicas combinadas e puras, mediante a execução de ensaios experimentais, com controle da trajetória do efetuador, permitindo a avaliação do comportamento do manipulador, tanto em regime permanente como em regime

transitório.

Outras contribuições referem-se às seguintes publicações realizadas durante o desenvolvimento da Tese:

A partir dos resultados obtidos no trabalho de formatura realizado na graduação, foi publicado um artigo intitulado “Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies” [32], o qual foi escrito em coautoria com Eng. Guilherme Martinho Dobrianskyj e o Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho. Este trabalho foi apresentado no BioRob 2014 (IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics) na seção de posters, no dia 15 de agosto de 2014. O artigo pode ser acessado por <<http://dx.doi.org/10.1109/BIOROB.2014.6913880>>.

Um capítulo de livro, intitulado “Dynamic modelling and control of balanced parallel mechanisms” [68], foi escrito em coautoria com o Dr. Renato M. M. Orsino e com o Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho, para o livro *Dynamic balancing of mechanisms and synthesizing of parallel robots* (editado pelo Prof. Dr. Dan Zhang da Universidade do Instituto de Tecnologia de Ontario e publicado pela editora Springer). Este capítulo de livro trata do uso de uma metodologia de modelagem modular para o balanceamento adaptativo e desenvolvimento de algoritmos de controle para mecanismos robóticos paralelos. O capítulo pode ser acessado por <[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3\\_16](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3_16)>.

Um artigo, publicado no periódico *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, intitulado “A new approach for obtaining the dynamic balancing conditions in serial mechanisms” [26], foi escrito em coautoria com o Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho. O artigo pode ser acessado por <<http://dx.doi.org/10.1504/IJMRS.2016.077036>>.

Um artigo, publicado no *Congresso Brasileira de Automática - 2018*, intitulado “H-Infinity Control of a 3-DOF RRR Spatial Serial Mechanism” [96]. Foi escrito em coautoria com a Eng. Isabella Stevani, o Prof. Dr. Diego Colón, e o Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho. O artigo pode ser acessado por <<https://ssl4799.websitseguro.com/swge5/PROCEEDINGS/>> (doi:10.20906/CPS/CBA2018-0458).

Um artigo, publicado no COBEM-2019 (*25<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering - 2019*), intitulado “Design And Control Of A 2-DOF Parallel Mechanism” [27]. Foi escrito em coautoria com o Eng. Victor Pacheco Bartholomeu, a Eng. Isabella Stevani, a Eng. Juliana Martins de Oliveira Fuess, o Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho, e o Prof. Dr. Diego Colón.

### **8.3 Sugestão de temas para pesquisa futura**

Investigar a eficácia do emprego de técnicas de controle combinadas para manipuladores paralelos, redundantes e não-redundantes, que operem no espaço tridimensional.

Investigar as condições para a eficácia do uso de técnicas de controle para manipuladores paralelos, não-baseadas em modelo e que atuem no espaço da tarefa.

Generalizar o algoritmo de modelagem proposto para englobar mecanismos paralelos de até 6 graus de liberdade.

## REFERÊNCIAS

- 1 H. Abdellatif, B. Heimann. Computational efficient inverse dynamics of 6-DOF fully parallel manipulators by using the Lagrangian formalism *Mechanism and Machine Theory*, 44(1): 192–207, 2009.
- 2 H. Abdellatif, B. Heimann, J. Kotlarski, T. Ortmaier. Practical model-based and robust control of parallel manipulators using passivity and sliding mode theory. *Robotics 2010: Current and Future Challenges*, InTech, 2010.
- 3 J. Angeles, S. K. Lee. The Formulation of Dynamical Equations of Holonomic Mechanical Systems Using a Natural Orthogonal Complement *Journal of Applied Mechanics*, 55(1): 243–244, 1988.
- 4 A. Arian, B. Danaei, H. Abdi, S. Nahavandi. Kinematic and dynamic analysis of the Gantry-Tau, a 3-DoF translational parallel manipulator *Applied Mathematical Modelling*, 51: 217–231, 2017.
- 5 A. Akbarzadeh, J. Enferadi, M. Sharifnia. Dynamics analysis of a 3-RRP spherical parallel manipulator using the natural orthogonal complement *Multibody System Dynamics*, 29(4): 361–380, 2013.
- 6 R. Z. H. de Almeida. Modelagem dinâmica e controle e robô manipulador de arquitetura paralela assimétrica de três graus de liberdade. *Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- 7 O. Altuzarra, P. M. Eggers, F. J. Campa, C. Roldan-Paraponiaris, C. Pinto. Dynamic Modelling of Lower-Mobility Parallel Manipulators Using the Boltzmann-Hamel Equations. *Mechanisms, Transmissions and Applications*, 157–165, Springer, 2015.
- 8 J. Baumgarte. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1(1): 1–16, 1972.
- 9 P. Begon, F. Pierrot, P. Dauchez. Fuzzy sliding mode control of a fast parallel robot. *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*, 1178–1183, IEEE, 1995.
- 10 R. Ben-Horina, M. Shohama, S. Djerassi. Kinematics, dynamics and construction of a planarly actuated parallel robot *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 14(2): 163–172, 1998.
- 11 A.M. Bloch, M. Reyhanoglu, N.H. McClamroch. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(11): 1746–1757, 1992.
- 12 S. Briot, I.A. Bonev. Are parallel robots more accurate than serial robots? *Canadian Society for Mechanical Engineering (CSME) Transactions*, 31(4): 445–456, 2007.

- 13 E. L. L. Cabral. Cinemática Direta de Robôs Manipuladores. *Análise de Robôs*, sites.poli.usp.br/p/eduardo.cabral/Cinemática Direta.pdf acessado em 25/08/2016.
- 14 E. F. Camacho, C. B. Alba. *Model predictive control*. Springer Science & Business Media, 2013.
- 15 L. Campos, F. Bourbonnais, I.A. Bonev, P. Bigras. Development of a five-bar parallel robot with large workspace. *Proc. of the ASME IDETC/CIE 2010 Montreal, Quebec, Canada*, August 15–18, 2010. [DETC2010-28962]
- 16 A. A. Campos-Bonilla, R. Guenther, D. Martins. Differential kinematics of serial manipulators using virtual chains *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 24(4): 1–10, 2005.
- 17 J. C. M. Carvalho, R.C. Ibrahim, T. A. H. Coelho. *MECANISMOS, MÁQUINAS & ROBÔS: uma abordagem unificada para a análise e síntese*. ISBN: 978-85-3524654-4, Elsevier Editora Ltda, 2018.
- 18 R. Clavel. Robots parallèles: du packaging à cadence élevée à la production d'ultra haute précision. *Journées Nationales de la Recherche en Robotique*, 8ème Edition, 2011.
- 19 A. Chemori, G. S. Natal, F. Pierrot. Control of parallel robots: towards very high accelerations. *SSD'2013: 10th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, 2013.
- 20 S-L. Chen, Y-C. Tsai. Contouring control of a parallel mechanism based on equivalent errors. *American Control Conference, 2008*, 2384–2388, IEEE, 2008.
- 21 H. Cheng, G. Liu, Y-K. Yiu, Z. H. Xiong, Z. Li. Advantages and Dynamics of Parallel Manipulators with Redundant Actuation *Proceedings 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Expanding the Societal Role of Robotics in the Next Millennium*, 1: 171–176, 2001.
- 22 H. Cheng, Y-K. Yiu, Z. Li. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 8(4): 483–491, 2003.
- 23 W. Chung, L-C. Fu, S-H. Hsu. Motion control. *Springer Handbook of Robotics*, Edited by B. Siciliano and O. Khatib, 133–159, 2008.
- 24 A. Codourey. Dynamic Modelling and Mass Matrix Evaluation of the DELTA Parallel Robot for Axes Decoupling Control *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IROS '96*, 3: 1211–1218, 1996.
- 25 A. Codourey, E. Burdet. A body-oriented method for finding a linear form of the dynamic equation of fully parallel robots. *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation*, 2: 1612–1618, 1997.
- 26 A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. A new approach for obtaining the dynamic balancing conditions in serial mechanisms. *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 3(1): 32–47, 2016.
- 27 A. G. Coutinho, V. P. Bartholomeu, I. Stevani, J. M. de Oliveira-Fuess, T. A. H. Coelho, D. Cólón. Design And Control Of A 2-DOF Parallel Mechanism In *25th COBEM, Uberlândia, Brazil, Paper ID COBEM2019-0373*, 2019.

- 28 J. J. Craig. *Introduction to robotics: mechanics and control*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: control engineering. Pearson/Prentice Hall, 2005.
- 29 B. Dasgupta, T. S. Mruthyunjaya. A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator *Mechanism and Machine Theory*, 33(8): 1135–1152, 1998.
- 30 J. Denavit, R. S. Hartenberg. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 22:(1) 215–221, 1955.
- 31 G. M. Dobrianyj, A. G. Coutinho. Plataforma robótica para reabilitação do membro superior humano. *Tese (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- 32 G. M. Dobrianskyj, A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies. *Biomedical Robotics and Biomechatronics 2014 5th IEEE RAS EMBS International Conference on*, 819 – 825, IEEE, 2014.
- 33 V. Duchaine, S. Bouchard, C. M. Gosselin. Computationally efficient predictive robot control. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, 12(5): 570–578, 2007.
- 34 M. M. Ebrahimi, F. Piltan, M. Bazregar, A. Nabaee. Intelligent Robust Fuzzy-Parallel Optimization Control of a Continuum Robot Manipulator. *International Journal of Control and Automation*, 6(3): 15–34, 2013.
- 35 M. Ertugrul, O. Kaynak. Neuro sliding mode control of robotic manipulators. *Mechatronics*, 10(1): 239–263, 2000.
- 36 R. Featherstone, D. E. Orin. Dynamics. *Springer Handbook of Robotics*, Edited by B. Siciliano and O. Khatib, 35–66, 2008.
- 37 J. V. C. Fontes, M. M. da Silva. On the dynamic performance of parallel kinematic manipulators with actuation and kinematic redundancies *Mechanism and Machine Theory*, 103: 148–166, 2016.
- 38 J. V. C. Fontes, J. C. Santos, M. M. da Silva. Numerical and experimental evaluation of the dynamic performance of kinematically redundant parallel manipulators *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 40: 142, 2018.
- 39 J. Gallardo-Alvarado, R. Rodríguez-Castro, P. J. Delossantos-Lara. Kinematics and dynamics of a 4- P RUR Schönflies parallel manipulator by means of screw theory and the principle of virtual work *Mechanism and Machine Theory*, 122(4): 347–360, 2018.
- 40 T. Geike, J. McPhee. Inverse dynamic analysis of parallel manipulators with full mobility *Mechanism and Machine Theory*, 38(6): 549–562, 2003.
- 41 J. Guldner, V. I. Utkin. The chattering problem in sliding mode system. *14th Int. Symp. Math. Theory Netw. Syst.(MTNS), Perpignan, France*, 2000.

- 42 M. Honegger, R. Brega, G. Schweitzer. Application of a nonlinear adaptive controller to a 6 dof parallel manipulator. *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA'00. IEEE International Conference on*, 1930–1935, IEEE, 2000.
- 43 H. Hu, P-Y. Woo. Fuzzy supervisory sliding-mode and neural-network control for robotic manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 53(3): 929–940, 2006.
- 44 E. Jarzebowska. Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(12):118 – 131, 2009.
- 45 E. Jarzebowska. *Model-based tracking control of nonlinear systems*. Chapman and Hall/CRC, 2016.
- 46 Y. Jiang, T. Li, L. Wang, F. Chen. Improving tracking accuracy of a novel 3-DOF redundant planar parallel kinematic machine. *Mechanism and Machine Theory*, 119: 198–218, 2018.
- 47 P. C. Kaminski. *Mecânica geral para engenheiros*. Edgard Blücher, 2000.
- 48 T. R. Kane, D.A. Levinson. *Dynamics: theory and applications*. New York: McGraw-Hill; 1985.
- 49 W. Khalil, E. Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Taylor & Francis, 2002.
- 50 W. Khalil, O. Ibrahim. General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 49(1): 19–37, 2007.
- 51 W. A. Khan, V. N. Krovi, S. K. Saha, J. Angeles. Recursive kinematics and inverse dynamics for a planar 3R parallel manipulator *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 127(4): 529–536, 2005.
- 52 H. Kordjazi, A. Akbarzadeh. Inverse dynamics of a 3-prismatic–revolute–revolute planar parallel manipulator using natural orthogonal complement *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 225(2):258–269, 2011.
- 53 V. D. Kumazawa, T. A. Hess Coelho, D. Rinaudi, G. Carbone, M. Ceccarelli. Kinematic analysis and operation feasibility of a 3-dof asymmetric parallel mechanism. In *20th COBEM, Gramado, Brazil, Paper No. COB09-0744*, 2009.
- 54 Y. Li, S. Staicu. Inverse dynamics of a 3-PRC parallel kinematic machine *Nonlinear Dynamics*, 67(2): 1031–1041, 2012.
- 55 Y-W. Li, J-S. Wang, L-P. Wang, X-J. Liu. Inverse dynamics and simulation of a 3-DOF spatial parallel manipulator *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3: 4092-4097, 2003.
- 56 Q. Li, F. X. Wu. Control performance improvement of a parallel robot via the design for control approach *Mechatronics*, 14(8): 947–964, 2004.

- 57 Y. Li, Q. Xu. Dynamic modeling and robust control of a 3-PRC translational parallel kinematic machine *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25(3): 630–640, 2009.
- 58 Y. Li, Q. Xu. Kinematics and inverse dynamics analysis for a general 3-PRS spatial parallel mechanism *Robotica*, 23(2): 219–229, 2005.
- 59 O. Linda, M. Manic. Uncertainty-robust design of interval type-2 fuzzy logic controller for delta parallel robot *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, 7(4): 661–670, 2011.
- 60 H. Lipkin. A note on denavit-hartenberg notation in robotics *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 921–926, American Society of Mechanical Engineers, 2005.
- 61 L. Mariti, N. P. Belfiore, E. Pennestri, P. P. Valentini. Comparison of solution strategies for multibody dynamics equations *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(7): 637–656, 2011.
- 62 J-P. Merlet. Still a long way to go on the road for parallel mechanisms In *ASME DETC Conference, Montreal, 2002*, 2002.
- 63 J-P. Merlet, C. Gosselin. Parallel Mechanisms and Robots. *Springer Handbook of Robotics*, Edited by B. Siciliano and O. Khatib, 269–286, 2008.
- 64 G. Monsees. Discrete-Time Sliding Mode Control. *Doctoral Thesis - Delft University of Technology*, 2002.
- 65 P. E. Nikravesh. *Computer-aided analysis of mechanical systems*. Prentice Hall, 1988.
- 66 R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho. A contribution for developing more efficient dynamic modelling algorithms of parallel robots *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 1(1): 15 – 34, 2013.
- 67 R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho, C. P. Pesce. Analytical mechanics approaches in the dynamic modelling of Delta mechanism *Robotica*, 33(4): 953–973, 2015.
- 68 R. M. M. Orsino, A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. Dynamic Modelling and Control of Balanced Parallel Mechanisms *Dynamic Balancing of Mechanisms and Synthesizing of Parallel Robots*, 403–445, Springer International Publishing, 2016.
- 69 R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho. A contribution on the modular modelling of multibody systems *Proc. Royal Society A*, 471(2183), The Royal Society, 2015.
- 70 A. Pashkevich, D. Chablat, P. Wenger. Kinematics and Workspace Analysis of a Three-Axis Parallel Manipulator: the Orthoglide *Robotica*, 24: 39–49, 2006.
- 71 M. Pekal, J. Fraczek. Comparison of natural complement formulations for multibody dynamics. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 54(4); 1391–1404, 2016.
- 72 M. Pekal, J. Fraczek. Comparison of selected formulations for multibody system dynamics with redundant constraints *Archive of Mechanical Engineering*, 63(1); 93–112, 2016.

- 73 P. J. Prince, J. R. Dormand. High order embedded Runge-Kutta formulae *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 7(1): 67–75, 1981.
- 74 A. G. Ruiz, J. C. Santos, J. Croes, W. Desmet, M. M. da Silva. On redundancy resolution and energy consumption of kinematically redundant planar parallel manipulators *Robotica*, 36: 1–13, 2018.
- 75 N. Sadati, R. Ghadami. Adaptive multi-model sliding mode control of robotic manipulators using soft computing *Neurocomputing*, 71(13): 2702–2710, 2008.
- 76 S. K. Saha, W. O. Schiehlen. Recursive kinematics and dynamics for closed loop multibody systems *Int. J. of Mechanics of Structures and Machines*, 29: 143–175, 2001.
- 77 W. Shang, S. Cong Nonlinear computed torque control for a high-speed planar parallel manipulator *Mechatronics*, 19(6): 987–992, 2009.
- 78 T-N. Shiau, Y-J. Tsai, M-S. Tsai. Nonlinear dynamic analysis of a parallel mechanism with consideration of joint effects *Mechanism and Machine Theory*, 43(4): 491–505, 2008.
- 79 A. Shukla, H. Karki. Modeling simulation & control of 6-DOF Parallel Manipulator using PID controller and compensator *IFAC Proceedings Volumes*, 47(1): 421–428, 2014.
- 80 B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo. *Robotics: modelling, planning and control*. Springer Science & Business Media, 2010.
- 81 Y. Singh, M. Santhakumar. Inverse dynamics and robust sliding mode control of a planar parallel (2-PRP and 1-PPR) robot augmented with a nonlinear disturbance observer *Mechanism and Machine Theory*, 92: 29–50, 2015.
- 82 Y. Singh, V. Vinoth, Y. R. Kiran, J. K. Mohanta, M. Santhakumar. Inverse dynamics and control of a 3-DOF planar parallel (U-shaped 3-PPR) manipulator *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 34: 164–179, 2015.
- 83 Y. Singh, V. Vinoth, M. Santhakumar. Dynamic Modelling and Control of a 3-DOF Planar Parallel Robotic (XYTheta Motion) Platform *Procedia Materials Science*, 5: 1528–1539, 2014.
- 84 J-J. E. Slotine, W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- 85 J-J. E. Slotine. The robust control of robot manipulators *The International Journal of Robotics Research*, 4(2): 49–64, 1985.
- 86 J-J. E. Slotine, W. Li. On the adaptive control of robot manipulators *The International Journal of Robotics Research*, 6(3): 49–59, 1987.
- 87 M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar. *Robot modeling and control*. Wiley New York, 2006.
- 88 S. Staicu. Relations matricielles de récurrence en dynamique des mécanismes *Revue Roumaine des Sciences Techniques—Série de Mécanique Appliquée*, 50(1–3):15–28, 2005.
- 89 S. Staicu. Inverse dynamics of the 3-PRR planar parallel robot *Robotics and Autonomous Systems*, 57(5): 556–563, 2009.

- 90 S. Staicu. Recursive modelling in dynamics of Delta parallel robot *Robotica*, 27(2): 199–207, 2009.
- 91 S. Staicu. Recursive modelling in dynamics of Agile Wrist spherical parallel robot *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25(2): 409–416, 2009.
- 92 S. Staicu, D. C. Carp-Ciocardia. Dynamic analysis of Clavel's Delta parallel robot *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3: 4116–4121, 2003.
- 93 S. Staicu, X-J. Liu, J. Wang. Inverse dynamics of the HALF parallel manipulator with revolute actuators *Nonlinear Dynamics*, 50:(1), 1–12, 2007.
- 94 S. Staicu, D. Zhang. A novel dynamic modelling approach for parallel mechanisms analysis *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 24(1): 167–172, 2008.
- 95 S. Staicu, D. Zhang, R. Rugescu. Dynamic modelling of a 3-DOF parallel manipulator using recursive matrix relations *Robotica*, 24(1): 125–130, 2006.
- 96 I. Stevani, A. G. Coutinho, D. Colón, T. A. H. Coelho. H-Infinity Control of a 3-DOF RRR Spatial Serial Mechanism *Congresso Brasileiro de Automática 2018 Conference Proceedings ISSN: 2525-8311*, doi:10.20906/CPS/CBA2018-0458, 2018.
- 97 R. A. Tenenbaum. *Fundamentals of Applied Dynamics*. Springer Science & Business Media, 2006.
- 98 G. S. Toscano, H. Simas, E. B. Castelan, D. Martins. A new kinetostatic model for humanoid robots using screw theory *Robotica*, 1: 1–18, 2018.
- 99 L. W. Tsai. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, 1999.
- 100 V. Utkin, J. Guldner, J. Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. Vol. 34. CRC press, 2009.
- 101 V. Utkin, H. Lee Chattering problem in sliding mode control systems *International Workshop on Variable Structure Systems, 2006. VSS'06*, 346–350, 2006.
- 102 A. Vivas, P. Poignet. Predictive functional control of a parallel robot *Control Engineering Practice*, 13(7): 863–874, 2005.
- 103 K. Waldron, J. Schmiedeler. Kinematics *Springer Handbook of Robotics*, Edited by B. Siciliano and O. Khatib, 9–34, 2008.
- 104 J. Wang, J. Wu, L. Wang, Z. You. Dynamic feed-forward control of a parallel kinematic machine *Mechatronics*, 19(3): 313–324, 2009.
- 105 J. Wu, J. Wang, L. Wang, T. Li. Dynamics and control of a planar 3-DOF parallel manipulator with actuation redundancy *Mechanism and Machine Theory*, 44(4): 835–849, 2009.
- 106 F. Xi, R. Sinatra. Inverse dynamics of hexapods using the natural orthogonal complement method *Journal of manufacturing systems*, 21(2): 73–82, 2002.

- 107 J. Yao, W. Gu, Z. Feng, L. Chen, Y. Xu, Y. Zhao. Dynamic analysis and driving force optimization of a 5-DOF parallel manipulator with redundant actuation *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 48: 51–58, 2017.
- 108 P-L. Yen, C-C. Lai. Dynamic modeling and control of a 3-DOF Cartesian parallel manipulator *Mechatronics*, 19(3): 390–398, 2009.
- 109 M. Zeinali, L. Notash. Adaptive sliding mode control with uncertainty estimator for robot manipulators *Mechanism and Machine Theory*, 45(1): 80–90, 2010.
- 110 Z. Zhan, X. Zhang, Z. Jian, H. Zhang. Error modelling and motion reliability analysis of a planar parallel manipulator with multiple uncertainties *Mechanism and Machine Theory*, 124: 55–72, 2018.
- 111 Xu. Zhang, Xi. Zhang, Z. Chen. Dynamic analysis of a 3-RRR parallel mechanism with multiple clearance joints *Mechanism and Machine Theory*, 78: 105–115, 2014.
- 112 Y. Zhao, F. Gao. Inverse dynamics of the 6-dof out-parallel manipulator by means of the principle of virtual work *Robotica*, 27(2): 259–268, 2009.
- 113 Y. Zhao, F. Gao. Dynamic formulation and performance evaluation of the redundant parallel manipulator *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25(4): 770–781, 2009.
- 114 Z. Zhu, J. Li, Z. Gan, H. Zhang. Kinematic and dynamic modelling for real-time control of Tau parallel robot *Mechanism and Machine Theory*, 40(9): 1051–1067, 2005.
- 115 A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto, E. Portillo. Extended CTC control for parallel robots *Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA), 2010 IEEE Conference on*, 1–8, IEEE, 2010.
- 116 A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto. Control of parallel robots using passive sensor data *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2398–2403, IEEE, 2008.
- 117 A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto. A redundant dynamic model of parallel robots for model-based control *Robotica*, 31(2): 203–216, 2013.
- 118 A. Zubizarreta, M. Marcos, I. Cabanes, C. Pinto, E. Portillo. Redundant sensor based control of the 3RRR parallel robot *Mechanism and machine theory*, 54(1): 1–17, 2012.

# APÊNDICE A – CINEMÁTICA DE CORPOS RÍGIDOS

## A.1 Conceitos básicos

Este apêndice tem o intuito de apresentar os conceitos de derivada temporal de vetores em relação a um referencial e as definições velocidade e aceleração.

Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dois referenciais, e  $p$  e  $o$  pontos no espaço. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- $r_{o|p}$ : vetor que liga o ponto  $o$  ao ponto  $p$ , orientado no sentido de  $o$  até  $p$ .
- $v_p^{\mathcal{A}}$ : vetor velocidade do ponto  $p$  em relação a  $\mathcal{A}$ .
- $a_p^{\mathcal{A}}$ : vetor aceleração do ponto  $p$  em relação a  $\mathcal{A}$ .
- $\omega_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ : vetor velocidade angular de  $\mathcal{B}$  em relação a  $\mathcal{A}$ .
- $\alpha_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ : vetor aceleração angular de  $\mathcal{B}$  em relação a  $\mathcal{A}$ .
- $\frac{d^{[\mathcal{A}]}}{dt}$ : Operador derivada temporal em relação ao referencial  $\mathcal{A}$ .

### A.1.1 Produto vetorial

Para a realização do cálculo de derivadas vetoriais, frequentemente é necessário o uso do produto vetorial. A notação para o operador produto vetorial utilizada será o " $\wedge$ ". Com o intuito de deixar as equações mais legíveis, iremos adotar as seguintes convenções:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \equiv \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})) \equiv \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \quad (\text{A.2})$$

Além disso, vale destacar algumas propriedades básicas do produto vetorial que serão utilizadas durante o texto:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \quad (\text{A.5})$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \quad (\text{A.6})$$

Também é possível definir o produto vetorial para matrizes-coluna de ordem 3. Sejam  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  dois vetores e  $\mathbb{A}$  um sistema de coordenadas.

Definindo:

$$\mathbb{S}(\mathbb{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Sendo

$$\mathbb{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T \quad (\text{A.8})$$

Temos que

$$[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}]_{\mathbb{A}} = \mathbb{S}([\mathbf{a}]_{\mathbb{A}}) \cdot [\mathbf{b}]_{\mathbb{A}} = -\mathbb{S}([\mathbf{b}]_{\mathbb{A}}) \cdot [\mathbf{a}]_{\mathbb{A}} \quad (\text{A.9})$$

### A.1.2 Derivada temporal de versores

Seja  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbb{B}}$  um versor fixo ao referencial  $\mathbb{B}$ . A derivada temporal de  $\hat{\mathbf{x}}_{\mathbb{B}}$  em relação ao referencial  $\mathbb{A}$  é definida como:

$$\frac{d^{[\mathbb{A}]} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbb{B}}}{dt} = \dot{\hat{\mathbf{x}}}^{[\mathbb{A}]}_{\mathbb{B}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}}^{[\mathbb{A}]} \wedge \hat{\mathbf{x}}_{\mathbb{B}} \quad (\text{A.10})$$

### A.1.3 Derivada temporal de vetores

Seja  $\mathbb{B}$  um sistema de coordenadas fixo ao referencial  $\mathbb{B}$  e  $\mathbf{x}$  um vetor cuja decomposição na base de  $\mathbb{B}$  é conhecida e dada por  $\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{i}}_{\mathbb{B}} + y\hat{\mathbf{j}}_{\mathbb{B}} + z\hat{\mathbf{k}}_{\mathbb{B}}$ . A derivada temporal de  $\mathbf{x}$  em

relação ao referencial  $\mathcal{A}$  é definida como:

$$\begin{aligned}\frac{d^{[\mathcal{A}]} \mathbf{x}}{dt} &= \dot{\mathbf{x}}^{[\mathcal{A}]} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}} + x\dot{\hat{\mathbf{i}}}_{\mathcal{B}}^{[\mathcal{A}]} + y\dot{\hat{\mathbf{j}}}_{\mathcal{B}}^{[\mathcal{A}]} + z\dot{\hat{\mathbf{k}}}_{\mathcal{B}}^{[\mathcal{A}]} \\ &= \dot{x}\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge x\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge y\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge z\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}} \\ &= \dot{x}\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge (x\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}} + y\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}} + z\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}})\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Repare que o termo  $\dot{x}\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}$  é a derivada temporal do vetor  $\mathbf{x}$  no referencial  $\mathcal{B}$ . Sendo assim, temos:

$$\frac{d^{[\mathcal{A}]} \mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^{[\mathcal{A}]} = \dot{\mathbf{x}}^{[\mathcal{B}]} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{x} \quad (\text{A.12})$$

#### A.1.4 Derivada temporal de matrizes de rotação

Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dois referenciais, e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dois sistemas de referência fixos a  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , respectivamente. Sendo assim, a matriz de rotação  $[\mathbf{1}]_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}$  é dada por:

$$[\mathbf{1}]_{\mathbf{A}|\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} & [\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} & [\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Derivando (A.13), temos:

$$\begin{aligned}\frac{d[\mathbf{1}]_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}}{dt} &= \left[ \left[ \frac{d^{[\mathcal{A}]} \hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}}}{dt} \right]_{\mathcal{A}} \quad \left[ \frac{d^{[\mathcal{A}]} \hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}}}{dt} \right]_{\mathcal{A}} \quad \left[ \frac{d^{[\mathcal{A}]} \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}}{dt} \right]_{\mathcal{A}} \right] \\ &= \left[ [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} \quad [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} \quad [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} \right] \\ &= \left[ \mathbb{S}([\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}}) \cdot [\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} \quad \mathbb{S}([\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}}) \cdot [\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} \quad \mathbb{S}([\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}}) \cdot [\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} \right] \\ &= \mathbb{S}([\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}}) \cdot \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{i}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} & [\hat{\mathbf{j}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} & [\hat{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{A}} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Portanto:

$$\frac{d[\mathbf{1}]_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}}{dt} = \mathbb{S}([\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}}) \cdot [\mathbf{1}]_{\mathbf{A}|\mathbf{B}} \quad (\text{A.15})$$

#### A.1.5 Definição de vetor velocidade

Supondo que o ponto  $\circ$  esteja fixo a  $\mathcal{A}$ , a velocidade do ponto  $\mathbf{p}$  em relação ao referencial  $\mathcal{A}$  é definida como:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}^{\mathcal{A}} = \frac{d^{[\mathcal{A}]} \mathbf{r}_{\circ|\mathbf{p}}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_{\circ|\mathbf{p}}^{[\mathcal{A}]} \quad (\text{A.16})$$

Caso o não esteja fixo a  $\mathcal{A}$ , temos que:

$$\frac{d^{[A]} r_{o|p}}{dt} = \dot{r}_{o|p}^{[A]} = v_p^A - v_o^A \quad (\text{A.17})$$

### A.1.6 Definição de vetor aceleração

A aceleração do ponto  $p$  em relação ao referencial  $\mathcal{A}$  é definida como:

$$a_p^A = \frac{d^{[A]} v_p^A}{dt} \quad (\text{A.18})$$

### A.1.7 Definição de vetor aceleração angular

A aceleração angular do corpo  $\mathcal{B}$  em relação ao referencial  $\mathcal{A}$  é definida como:

$$\alpha_{\mathcal{B}}^A = \frac{d^{[A]} \omega_{\mathcal{B}}^A}{dt} \quad (\text{A.19})$$

## A.2 Equações de campos de velocidades e acelerações

Esta subseção tem o intuito de apresentar as equações básicas da cinemática de corpos rígidos, as equações de campos de velocidades e acelerações.

### A.2.1 Equação do campo de velocidades

Sejam  $p$  e  $o$  dois pontos pertencentes a um corpo rígido  $\mathcal{B}$ , e  $\mathcal{A}$  um referencial. Podemos relacionar a velocidades dos ponto  $p$  e  $o$  em relação a  $\mathcal{A}$  através da equação do campo de velocidades:

$$v_p^A = v_o^A + \omega_{\mathcal{B}}^A \wedge r_{o|p} \quad (\text{A.20})$$

### A.2.2 Equação do campo de acelerações

Derivando (A.20) no tempo em relação a  $\mathcal{A}$ , temos:

$$a_p^A = a_o^A + \alpha_{\mathcal{B}}^A \wedge r_{o|p} + \omega_{\mathcal{B}}^A \wedge (v_p^A - v_o^A) \quad (\text{A.21})$$

Substituindo (A.20) em (A.21), obtemos a equação do campo de acelerações:

$$\boldsymbol{a}_p^A = \boldsymbol{a}_o^A + \boldsymbol{\alpha}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o|p} + \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o|p} \quad (\text{A.22})$$

## A.3 Composição de movimentos

Esta subseção tem o intuito de apresentar um dos princípios básicos da cinemática de corpos rígidos, a composição de movimentos.

### A.3.1 Composição de velocidades lineares

Sejam  $\mathcal{A}$  um referencial, e  $A$  um sistema de coordenadas fixo a  $\mathcal{A}$ , definido pela origem  $o_A$  e pelos versores  $\hat{i}_A$ ,  $\hat{j}_A$  e  $\hat{k}_A$ . Sejam também  $\mathcal{B}$  um referencial,  $B$  um sistema de coordenadas fixo a  $\mathcal{B}$ , definido pela origem  $o_B$  e pelos versores  $\hat{i}_B$ ,  $\hat{j}_B$  e  $\hat{k}_B$ , e  $p$  um ponto no espaço. Definindo os vetores  $\boldsymbol{r}_{o_A|o_B}$ ,  $\boldsymbol{r}_{o_B|p}$  e  $\boldsymbol{r}_{o_A|p}$  tem-se que:

$$\boldsymbol{r}_{o_A|p} = \boldsymbol{r}_{o_A|o_B} + \boldsymbol{r}_{o_B|p} \quad (\text{A.23})$$

Derivando (A.23) no tempo em relação a  $\mathcal{A}$ , temos:

$$\boldsymbol{v}_p^A = \boldsymbol{v}_{o_B}^A + \dot{\boldsymbol{r}}_{o_B|p}^{[A]} \quad (\text{A.24})$$

Utilizando a equação (A.12), temos que:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{o_B|p}^{[A]} = \dot{\boldsymbol{r}}_{o_B|p}^{[B]} + \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o_B|p} \quad (\text{A.25})$$

Ou seja:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{o_B|p}^{[A]} = \boldsymbol{v}_p^B + \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o_B|p} \quad (\text{A.26})$$

Substituindo (A.26) em (A.24), temos:

$$\boldsymbol{v}_p^A = \boldsymbol{v}_{o_B}^A + \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o_B|p} + \boldsymbol{v}_p^B \quad (\text{A.27})$$

Definindo:

$$\boldsymbol{v}_{p|B}^A = \boldsymbol{v}_{o_B}^A + \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o_B|p} \quad (\text{A.28})$$

Temos princípio da composição de movimento para velocidades lineares:

$$\mathbf{v}_p^A = \mathbf{v}_{p|\mathcal{B}}^A + \mathbf{v}_p^B \quad (\text{A.29})$$

Ou seja,  $\mathbf{v}_p^A$  é composto pela soma de  $\mathbf{v}_{p|\mathcal{B}}^A$ , que seria a velocidade de  $p$  se  $p$  estivesse fixo a  $\mathcal{B}$  (movimento de arrastamento), e  $\mathbf{v}_p^B$ , que é a velocidade de  $p$  em relação a  $\mathcal{B}$  (movimento relativo).

### A.3.2 Composição de acelerações lineares

Derivando (A.27) no tempo em relação a  $\mathcal{A}$ , temos:

$$\mathbf{a}_p^A = \mathbf{a}_{o_B}^A + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o_B|p} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \dot{\mathbf{r}}_{o_B|p}^{[A]} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{v}_p^B + \mathbf{a}_p^B \quad (\text{A.30})$$

Substituindo (A.26) em (A.30), temos:

$$\mathbf{a}_p^A = \mathbf{a}_{o_B}^A + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o_B|p} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o_B|p} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{v}_p^B + \mathbf{a}_p^B \quad (\text{A.31})$$

Definindo:

$$\mathbf{a}_{p|\mathcal{B}}^A = \mathbf{a}_{o_B}^A + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o_B|p} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o_B|p} \quad (\text{A.32})$$

Temos princípio da composição de movimento para acelerações lineares:

$$\mathbf{a}_p^A = \mathbf{a}_{p|\mathcal{B}}^A + \mathbf{a}_p^B + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{v}_p^B \quad (\text{A.33})$$

Ou seja,  $\mathbf{a}_p^A$  é composto pela soma de  $\mathbf{a}_{p|\mathcal{B}}^A$ , que seria a aceleração de  $p$  se  $p$  estivesse fixo a  $\mathcal{B}$  (aceleração de arrastamento),  $\mathbf{a}_p^B$ , que é a aceleração de  $p$  em relação a  $\mathcal{B}$  (aceleração relativa), e da parcela  $2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{v}_p^B$  (aceleração complementar).

### A.3.3 Composição de velocidades angulares

Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dois referenciais e  $\mathcal{C}$  um corpo rígido. Sejam também os pontos  $p_1$  e  $p_2$ , ambos fixos a  $\mathcal{C}$ .

Aplicando o princípio da composição de movimento para velocidades lineares, temos que:

$$\mathbf{v}_{p_1}^A = \mathbf{v}_{p_1|\mathcal{B}}^A + \mathbf{v}_{p_1}^B \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{o}_B}^{\mathcal{A}} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{B}} \quad (\text{A.35})$$

A partir da equação (A.28), temos que:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1 \mid \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{o}_B}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{o}_B \mid \mathbf{p}_1} \quad (\text{A.36})$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_2 \mid \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{o}_B}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{o}_B \mid \mathbf{p}_2} \quad (\text{A.37})$$

Sendo assim, temos:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{o}_B}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{o}_B \mid \mathbf{p}_1} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{B}} \quad (\text{A.38})$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{o}_B}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{o}_B \mid \mathbf{p}_2} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{B}} \quad (\text{A.39})$$

Subtraindo (A.39) de (A.38), temos:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2 \mid \mathbf{p}_1} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{B}} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{B}} \quad (\text{A.40})$$

Como  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  pertencem a um mesmo corpo rígido, temos que:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2 \mid \mathbf{p}_1} \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{B}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2 \mid \mathbf{p}_1} \quad (\text{A.42})$$

Substituindo (A.41) e (A.42) em (A.40):

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2 \mid \mathbf{p}_1} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2 \mid \mathbf{p}_1} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2 \mid \mathbf{p}_1} \quad (\text{A.43})$$

Temos princípio da composição de movimento para velocidades angulares:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \quad (\text{A.44})$$

Ou seja,  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$  é composta pela soma de  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ , que seria velocidade angular de  $\mathcal{C}$  se  $\mathcal{C}$  estivesse fixo a  $\mathcal{B}$  (velocidade angular de arrastamento), e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ , que é a velocidade angular de  $\mathcal{C}$  em relação a  $\mathcal{B}$  (velocidade angular relativa).

Repare que, fazendo  $\mathcal{C} \equiv \mathcal{A}$ , temos que:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \quad (\text{A.45})$$

$$\therefore \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \quad (\text{A.46})$$

### A.3.4 Composição de acelerações angulares

Derivando (A.44) no tempo em relação a  $\mathcal{A}$ , temos princípio da composição de movimento para acelerações angulares:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \quad (\text{A.47})$$

Ou seja,  $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$  é composta pela soma de  $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ , que seria a aceleração angular de  $\mathcal{C}$  se  $\mathcal{C}$  estivesse fixo a  $\mathcal{B}$  (aceleração angular de arrastamento),  $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ , que é a aceleração angular de  $\mathcal{C}$  em relação a  $\mathcal{B}$  (aceleração angular relativa), e da parcela  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  (aceleração angular complementar).

Repare que, fazendo  $\mathcal{C} \equiv \mathcal{A}$  e utilizando (A.46), temos que:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \quad (\text{A.48})$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = -\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \quad (\text{A.49})$$

# APÊNDICE B – CINEMÁTICA DE ORIENTAÇÃO VIA QUATERNIONS

Este apêndice tem o intuito apresentar alguns conceitos básicos relativos à utilização de quaternions unitários para descrever a orientação de um corpo rígido no espaço.

## B.1 Motivação

Existem várias maneiras de representar a orientação de um corpo rígido no espaço, como a utilização de matrizes de rotação, angulos de Euler e quaternions unitários.

Como foi visto no capítulo 4, utilizando a convenção de Denavit-Hartenberg é possível obter a orientação do efetuador de um mecanismo serial na representação de matriz de rotação. Esta representação possui o inconveniente de possuir um grande número de parâmetros para representar a orientação (9 parâmetros para representar 3 graus de liberdade de rotação). Além disso, a composição de rotações consecutivas através da multiplicação de matrizes de rotação leva ao acúmulo de erros numéricos, o que pode fazer com que a matriz perca as condições necessárias para ser uma matriz de rotação.

A representação por ângulos de Euler possui a vantagem de ter o mínimo número de parâmetros possível (3 parâmetros para representar 3 graus de liberdade de rotação). Porém, este tipo de representação perde um grau de liberdade quando o ângulo intermediário alinha os eixos de rotação do primeiro e do terceiro ângulo, o que pode ser bastante inconveniente. Além disso, este tipo de representação não possui uma maneira de compor rotações consecutivas.

A representação por quaternions unitários possui um número não tão grande de parâmetros (4 parâmetros para representar 3 graus de liberdade de rotação), permite compor rotações consecutivas, pode ser facilmente renormalizada (de modo a evitar o acúmulo de

erros numéricos) e não possui o problema de perder graus de liberdade dependendo da configuração. Sendo assim, pode-se dizer que esta é uma forma bastante conveniente de representar a orientação de um corpo rígido no espaço.

## B.2 Definições, propriedades e fórmulas de conversão

### B.2.1 Quaternion unitário

Um quaternion pode ser representado pela seguinte matriz-coluna:

$$\check{q} = \begin{bmatrix} q_i & q_j & q_k & q_r \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.1})$$

A matriz-coluna  $\check{q}^v = [q_i \ q_j \ q_k]^T$  é conhecida como parte vetorial e o escalar  $q_r$  como a parte real do quaternion.

Um quaternion é dito unitário quando respeita a seguinte propriedade:

$$\check{q}^T \check{q} = q_i^2 + q_j^2 + q_k^2 + q_r^2 = 1 \quad (\text{B.2})$$

### B.2.2 Produto de quaternions

Da mesma maneira que a composição de rotações consecutivas pode ser feita através da multiplicação de matrizes de rotação, ela também pode ser feita através da multiplicação de quaternions unitários, seguindo a mesma lógica. O produto de dois quaternions pode ser definido da seguinte maneira:

$$\check{a} \otimes \check{b} = \check{Q}_I(\check{a}) \cdot \check{b} = \check{Q}_{II}(\check{b}) \cdot \check{a} \quad (\text{B.3})$$

Sendo:

$$\check{Q}_I(\check{q}) = \begin{bmatrix} q_r & -q_k & q_j & q_i \\ q_k & q_r & -q_i & q_j \\ -q_j & q_i & q_r & q_k \\ -q_i & -q_j & -q_k & q_r \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\check{Q}_{II}(\check{q}) = \begin{bmatrix} q_r & q_k & -q_j & q_i \\ -q_k & q_r & q_i & q_j \\ q_j & -q_i & q_r & q_k \\ -q_i & -q_j & -q_k & q_r \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

### B.2.3 Quaternion inverso/conjugado

Da mesma maneira que é possível definir a multiplicação de quaternions, também é possível definir o quaternion inverso  $\check{q}^{-1}$ , o qual apresenta a seguinte propriedade:

$$\check{q} \otimes \check{q}^{-1} = \check{q}^{-1} \otimes \check{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.6})$$

Também é possível definir o quaternion conjugado  $\check{q}^*$  como o quaternion com a parte vetorial com sinal invertido e a parte real com o mesmo sinal, ou seja:

$$\check{q}^* = \begin{bmatrix} -q_i & -q_j & -q_k & q_r \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.7})$$

Para o caso de quaternions unitários, temos que o quaternion inverso é igual ao quaternion conjugado, ou seja:

$$\check{q}^{-1} = \check{q}^* \quad (\text{B.8})$$

### B.2.4 Rotações elementares

As rotações de um angulo  $\theta$  em torno dos eixo  $x$ ,  $y$  e  $z$  podem ser representadas pelos seguintes quaternions unitários, respectivamente:

$$\check{q}_x(\theta) = \begin{bmatrix} \sin(\sin \theta) \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.9})$$

$$\check{q}_y(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\sin \theta) \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.10})$$

$$\check{q}_z(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin(\sin \theta) \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}} & \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.11})$$

### B.2.5 Conversão Matriz de Rotação → Quaternion

Serão apresentadas 4 fórmulas de conversão da representação de orientação por matrizes de rotação para representação por quaternions. Seja uma matriz de rotação  $\mathbb{R}$  dada por:

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Assim, as expressões das fórmulas de conversão são dadas por:

$$\begin{cases} S = 2\sqrt{1 + R_{11} + R_{22} + R_{33}} \\ q_i = (R_{32} - R_{23})/S \\ q_j = (R_{13} - R_{31})/S \\ q_k = (R_{21} - R_{12})/S \\ q_r = S/4 \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{cases} S = 2\sqrt{1 + R_{11} - R_{22} - R_{33}} \\ q_i = S/4 \\ q_j = (R_{12} + R_{21})/S \\ q_k = (R_{13} + R_{31})/S \\ q_r = (R_{32} - R_{23})/S \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{cases} S = 2\sqrt{1 - R_{11} + R_{22} - R_{33}} \\ q_i = (R_{12} + R_{21})/S \\ q_j = S/4 \\ q_k = (R_{23} + R_{32})/S \\ q_r = (R_{13} - R_{31})/S \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{cases} S = 2\sqrt{1 - R_{11} - R_{22} + R_{33}} \\ q_i = (R_{13} + R_{31})/S \\ q_j = (R_{23} + R_{32})/S \\ q_k = S/4 \\ q_r = (R_{21} - R_{12})/S \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Com o intuito de evitar raízes de números negativos, divisões por zero, e problemas numéricos relacionados a raízes e divisões por números próximos a zero, recomenda-se utilizar a seguinte estratégia: caso o traço de  $\mathbb{R}$  seja maior que zero, utilize a expressão (B.13). Caso contrário, utilize as expressões (B.14), (B.15) ou (B.16), dependendo de qual for o maior elemento da diagonal principal de  $\mathbb{R}$ . Caso seja  $R_{11}$ , utilize a expressão (B.14); caso seja  $R_{22}$ , utilize a expressão (B.15); caso seja  $R_{33}$ , utilize a expressão (B.16).

### B.2.6 Conversão Quaternion → Matriz de Rotação

A conversão da representação de orientação por quaternions para a representação por matrizes de rotação é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbb{R} = \underline{\mathbb{R}}(\check{q}) = \begin{bmatrix} 1 - 2q_j^2 - 2q_k^2 & 2(q_i q_j - q_k q_r) & 2(q_i q_k + q_j q_r) \\ 2(q_i q_j + q_k q_r) & 1 - 2q_i^2 - 2q_k^2 & 2(q_j q_k - q_i q_r) \\ 2(q_i q_k - q_j q_r) & 2(q_i q_r + q_j q_k) & 1 - 2q_i^2 - 2q_j^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Repare que esta expressão não está sujeita a instabilidades numéricas, dado que há apenas multiplicações, somas e subtrações. Além disso, repare que invertendo o sinal de cada componente do quaternion, a expressão (B.17) contínua a mesma, ou seja,  $\check{q}$  e  $-\check{q}$  representam a mesma rotação.

### B.2.7 Conversão Derivada de Quaternion ↔ Velocidade Angular

Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dois referenciais, e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dois sistemas de referênciais fixos a  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , respectivamente. Sejam também  $\check{q}$  um quaternion unitário que representa a mesma rotação que a matriz  $[\mathbf{1}]_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}$ , e  $\omega$  uma matriz-coluna tal que  $\omega = [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}]_{\mathbf{A}}$ .

Definindo a seguinte matriz:

$$\check{\mathbb{C}}(\check{q}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_r & q_k & -q_j \\ -q_k & q_r & q_i \\ q_j & -q_i & q_r \\ -q_i & -q_j & -q_k \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

Pode-se relacionar a derivada temporal de  $\check{q}$  e  $\omega$  das seguintes maneiras:

$$\dot{\check{q}} = \check{\mathbb{C}}(\check{q}) \cdot \omega \quad (\text{B.19})$$

$$\omega = 4\check{\mathbb{C}}^T(\check{q}) \cdot \dot{\check{q}} \quad (\text{B.20})$$

Além disso, repare que

$$\check{\mathbb{C}}^T(\check{q}) \cdot \check{q} = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$\check{\mathbb{C}}^T(\check{q}) \cdot \check{\mathbf{b}} = -\check{\mathbb{C}}^T(\check{\mathbf{b}}) \cdot \check{q} \quad (\text{B.22})$$

# APÊNDICE C – FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE MOTORES DC

Este apêndice tem o intuito de mostrar a dedução e apresentar as funções de transferência de um motor de corrente contínua.

Para realizar a modelagem dos motores, será considerado o seguinte circuito equivalente apresentado na figura 107.

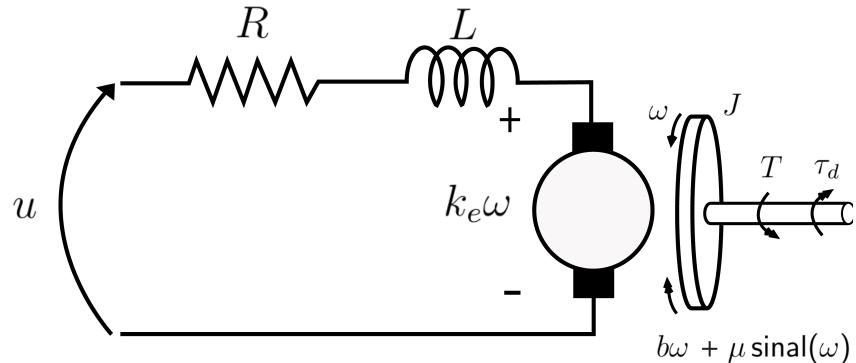


Figura 107: Circuito elétrico equivalente e modelo mecânico do motor

Pela lei de Ohm, temos que:

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + k_e \omega \quad (\text{C.1})$$

Sendo  $J$  a inércia do rotor,  $b$  o coeficiente de atrito viscoso, e  $\mu$  o coeficiente de atrito seco do mancal do eixo do motor. Sendo assim, obtemos pelo teorema do momento angular:

$$J\dot{\omega} = T - b\omega - \mu \sin(\omega) - \tau_d \quad (\text{C.2})$$

Sendo  $\tau_d$  o torque que o mecanismo aplica no motor, o qual será considerado um sinal de distúrbio de controle.

Como hipótese, será considerado que o torque fornecido pelo motor é proporcional à corrente de armadura:

$$T = k_t i \quad (\text{C.3})$$

Substituindo (C.3) em (C.2),

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{di}{dt} + Ri + k_e = u \\ J \dot{\omega} + b\omega + \mu \sin(\omega) = k_t i - \tau_d \end{array} \right. \quad (\text{C.4})$$

$$(J \dot{\omega} + b\omega + \mu \sin(\omega)) = k_t i - \tau_d \quad (\text{C.5})$$

Considerando  $\mu = 0$  e aplicando a Transformada de Laplace para condições iniciais nulas nas equações (C.4) e (C.5), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (Ls + R)I(s) + k_e W(s) = U(s) \\ (Js + bs)W(s) = k_t I(s) - \tau_d(s) \end{array} \right. \quad (\text{C.6})$$

$$(Js + bs)W(s) = k_t I(s) - \tau_d(s) \quad (\text{C.7})$$

Isolando  $W(s)$  da equação (C.7),

$$W(s) = \frac{k_t I(s) - \tau_d(s)}{Js + b} \quad (\text{C.8})$$

## C.1 Funções de transferência de corrente

Substituindo (C.8) na equação (C.6) temos,

$$I(s) = \frac{Js + b}{(Ls + R)(Js + bs) + k_t k_e} U(s) + \frac{k_e}{(Ls + R)(Js + bs) + k_t k_e} \tau_d(s) \quad (\text{C.9})$$

Assim, as funções de transferência do sistema são dadas por:

$$G_I(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{Js + b}{(Ls + R)(Js + b) + k_t k_e} \quad (\text{C.10})$$

$$G_{Id}(s) = \frac{I(s)}{\tau_d(s)} = \frac{k_e}{(Ls + R)(Js + b) + k_t k_e} \quad (\text{C.11})$$

## C.2 Funções de transferência de velocidade

Substituindo as equações (C.9) na equação (C.8) encontramos,

$$W(s) = \frac{k_t}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} U(s) - \frac{(Ls + R)}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} \tau_d(s) \quad (\text{C.12})$$

Logo, temos as funções de transferência do motor na forma:

$$G_v(s) = \frac{W(s)}{U(s)} = \frac{k_t}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} \quad (\text{C.13})$$

$$G_{vd}(s) = \frac{W(s)}{\tau_d(s)} = -\frac{(Ls + R)}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} \quad (\text{C.14})$$

## C.3 Funções de transferência de posição

Tendo que vista que a velocidade angular é a derivada temporal da posição angular, baste dividir por  $s$  as funções de transferência (C.13) e (C.14) para obtermos as função de transferência de posição do motor.

$$G_p(s) = \frac{k_t}{s((Js + b)(Ls + R) + k_e k_t)} \quad (\text{C.15})$$

$$G_{pd}(s) = -\frac{(Ls + R)}{s((Js + b)(Ls + R) + k_e k_t)} \quad (\text{C.16})$$

## APÊNDICE D – CONTROLADOR DE CORRENTE

Este apêndice tem o intuito de mostrar o projeto do controlador de corrente utilizado na implementação experimental das leis de controle de posição.

Como foi visto no apêndice C, a função de transferência de corrente de um motor DC é dada por:

$$G_I(s) = \frac{As + B}{s^2 + Cs + D} \quad (\text{D.1})$$

Sendo:

$$\begin{cases} A = 1/L \\ B = b/LJ \\ C = b/J + R/L \\ D = \frac{Rb+k_t k_e}{LJ} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Discretizado pela técnica do segurador de ordem zero, considerando um período de amostragem  $T$ , obtemos:

$$Gd_I(z) = \frac{\mathcal{A}z + \mathcal{B}}{z^2 + \mathcal{C}z + \mathcal{D}} \quad (\text{D.3})$$

Sendo:

$$\begin{cases} \mathcal{A} = -\left((BC - 2AD)(e^{T\Delta} - 1) + B\Delta(1 + e^{T\Delta} - 2e^{\frac{T}{2}(\Delta+C)})\right)/\mathcal{E} \\ \mathcal{B} = \left((BC - 2AD)(e^{T\Delta} - 1) - B\Delta(1 + e^{T\Delta} - 2e^{\frac{T}{2}(\Delta-C)})\right)/\mathcal{E} \\ \mathcal{C} = 2De^{\frac{T}{2}(\Delta-C)}\Delta/\mathcal{E} \\ \mathcal{D} = -2D(e^{T\Delta} + 1)/\mathcal{E} \\ \mathcal{E} = 2De^{\frac{T}{2}(\Delta+C)}\Delta \\ \Delta = \sqrt{C^2 - 4D} \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

Como o sistema é de segunda ordem e não possui integrador, é proposto o seguinte controlador:

$$K(z) = \frac{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}{(z - 1)(z - \delta)} \quad (\text{D.5})$$

Como o controlador proposto possui 4 parâmetros, é possível alocar 4 pólos. Tendo em vista que a planta e o controlador são de segunda ordem, o sistema em malha fechada será de quarta ordem. Sendo assim, o controlador proposto é capaz de alocar todos os pólos do sistema.

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$G_{mf}(z) = \frac{(\mathcal{A}z + \mathcal{B})(\gamma + \alpha z^2 + \beta z)}{z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \quad (\text{D.6})$$

Sendo:

$$\begin{cases} a_0 = \mathcal{B}\gamma + \mathcal{D}\delta \\ a_1 = \mathcal{B}\beta + \mathcal{A}\gamma + (\mathcal{C} - \mathcal{D})\delta - \mathcal{D} \\ a_2 = \mathcal{B}\alpha + \mathcal{A}\beta + (1 - \mathcal{C})\delta - \mathcal{C} + \mathcal{D} \\ a_3 = \mathcal{A}\alpha - \delta + \mathcal{C} - 1 \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

Sendo assim, o polinômio característico do sistema em malha fechada é dada por:

$$P(z) = z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (\text{D.8})$$

Para alocar os pólos do sistema em malha fechada em  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , é necessário que:

$$P(z) = z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \quad (\text{D.9})$$

Sendo:

$$\begin{cases} c_0 = p_1 p_2 p_3 p_4 \\ c_1 = -p_1 p_2 p_3 - p_1 p_4 p_3 - p_2 p_4 p_3 - p_1 p_2 p_4 \\ c_2 = p_1 p_2 + p_3 p_2 + p_4 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_3 p_4 \\ c_3 = -p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Portanto, os parâmetros de  $K(z)$  podem ser obtidos resolvendo o seguinte sistema de

equações algébricas:

$$\begin{cases} \mathcal{B}\gamma + \mathcal{D}\delta &= c_0 \\ \mathcal{B}\beta + \mathcal{A}\gamma + (\mathcal{C} - \mathcal{D})\delta - \mathcal{D} &= c_1 \\ \mathcal{B}\alpha + \mathcal{A}\beta + (1 - \mathcal{C})\delta - \mathcal{C} + \mathcal{D} &= c_2 \\ \mathcal{A}\alpha - \delta + \mathcal{C} - 1 &= c_3 \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

O qual é um sistema linear. Representando de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{B} & \mathcal{D} \\ 0 & \mathcal{B} & \mathcal{A} & \mathcal{C} - \mathcal{D} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} & 0 & 1 - \mathcal{C} \\ \mathcal{A} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 + \mathcal{D} \\ c_2 + \mathcal{C} - \mathcal{D} \\ c_3 + 1 - \mathcal{C} \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

Sua solução é dada por:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\mathcal{A}^2 c_1 + \mathcal{B}(-\mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{A}c_2 + \mathcal{B}(\mathcal{C}+c_3)) - (\mathcal{C}-c_4-1)(\mathcal{B}(\mathcal{B}-\mathcal{C}(\mathcal{A}+\mathcal{B})) + \mathcal{A}\mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B}))}{(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}^2\mathcal{D}-\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}+\mathcal{B}^2)} \\ \beta = \frac{\mathcal{C}(\mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2 + \mathcal{B}(\mathcal{B}-\mathcal{C}(\mathcal{A}+\mathcal{B}))) - \mathcal{A}\mathcal{D}^2(\mathcal{A}+\mathcal{B}) + (\mathcal{A}c_3 - \mathcal{B}c_4)(\mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{C}\mathcal{B}) + (\mathcal{A}(\mathcal{C}-1) - \mathcal{B})(\mathcal{A}c_1 - \mathcal{B}c_2)}{(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}^2\mathcal{D}-\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}+\mathcal{B}^2)} \\ \gamma = \frac{(\mathcal{A}^2\mathcal{D} - (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}))c_1 + \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{B}(1-\mathcal{C}+c_4) - \mathcal{A}(\mathcal{C}-\mathcal{D}+c_3)) + \mathcal{A}^2(\mathcal{D}+c_2))}{(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}^2\mathcal{D}-\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}+\mathcal{B}^2)} \\ \delta = \frac{\mathcal{A}^3 c_1 + \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{C}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{B}) - \mathcal{A}\mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{A}^2 c_2 + \mathcal{B}(\mathcal{A}c_3 - \mathcal{B}c_4))}{(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}^2\mathcal{D}-\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}+\mathcal{B}^2)} \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

# APÊNDICE E – CURVAS E IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS MOTORES

Este apêndice tem o intuito de mostrar como foi feita a identificação dos parâmetros dos motores através das curvas de velocidades obtidas e das equações de seu modelo dinâmico.

As curvas de velocidades dos motores foram obtidas aplicando o derivador numérico citado na seção 7.2.3 no sinal de posição fornecido pelo encoders. Foi utilizada uma entrada degrau de tensão 6.5V. As curvas dos motores 1 e 2 podem ser observadas nas figuras 108 e 109 respectivamente.

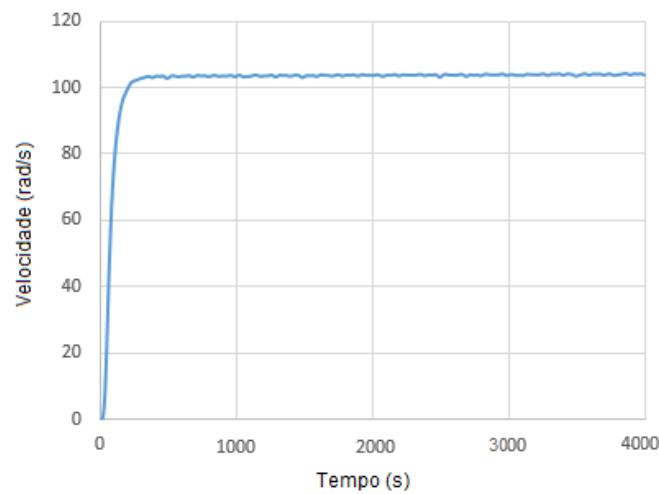


Figura 108: Curva de velocidade do motor 1

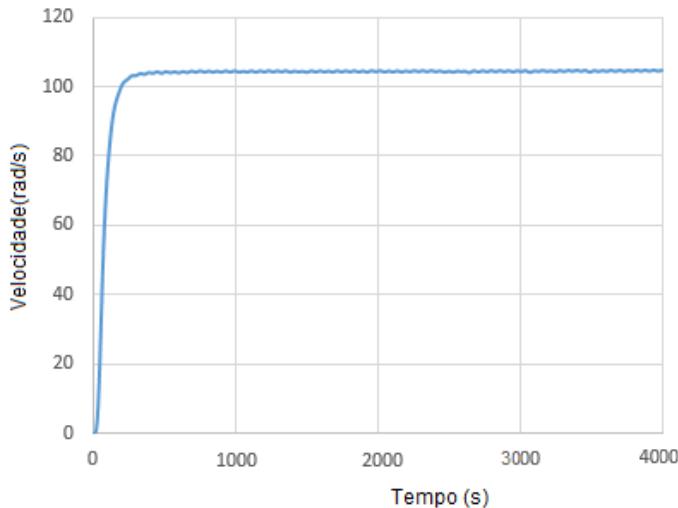


Figura 109: Curva de velocidade do motor 2

Para obtenção dos parâmetros do motor, foram realizados os seguintes procedimentos:

- O valor de indutância ( $L$ ) foi medido através de um multímetro e considerado constante independentemente da velocidade do motor.
- O valor da constante de força contra-eletromotriz ( $k_e$ ) e da resistência ( $R$ ) foram obtidos através do método dos mínimos quadrados implementado sobre os valores medidos da tensão, corrente e velocidade apresentados na tabela 15. Utilizando a equação do circuito elétrico equivalente do motor (C.1) em regime permanente ( $\frac{di}{dt} = 0$ ):

$$u = Ri + k_e\omega \quad (\text{E.1})$$

Tabela 15: Medidas para obtenção de  $k_e$  do motor 1

$u(V)$	$i(A)$	$\omega(rad/s)$
1.524	0.79	12.272
2.52	0.84	31.390
3.51	0.89	49.755
4.6	0.94	68.079
5.49	0.98	86.322
6.51	1.02	105.736
7.49	1.05	123.683
8.5	1.09	140.924
9.49	1.11	161.111

Aplicando o método dos mínimos quadrados, temos:

$$\begin{bmatrix} \langle \omega, \omega \rangle & \langle \omega, i \rangle \\ \langle \omega, i \rangle & \langle i, i \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_e \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \omega, u \rangle \\ \langle i, u \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Sendo o produto interno definido como  $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i$  obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 87991.6 & 799.092 \\ 799.092 & 8.5289 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_e \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400.99 \\ 50.4493 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Sendo assim, obtemos como resultado:

$$R = 1.10098 \Omega \quad (\text{E.4})$$

$$k_e = 0.0513822 Vs/rad \quad (\text{E.5})$$

- $k_t$  é obtido utilizando a seguinte proporção:

$$k_t = \frac{k'_t}{k'_e} k_e \quad (\text{E.6})$$

Sendo  $k'_t$  e  $k'_e$  valores obtidos da curva fornecida no datasheet do motor, dados por:

$$k'_t = 0.0467188 Nm/A \quad (\text{E.7})$$

$$k'_e = 0.0428786 \text{ Vs/rad} \quad (\text{E.8})$$

Substituindo os valores na equação (E.6), temos que:

$$k_t = 0.055984 \text{ Nm/A} \quad (\text{E.9})$$

- As constantes de atrito viscoso ( $b$ ) e seco ( $\mu$ ) são obtidas a partir da equação dinâmica mecânica do motor (C.2) em regime permanente ( $\dot{\omega} = 0$ ) com  $\omega > 0$ , ou seja:

$$b\omega + \mu = k_t i \quad (\text{E.10})$$

Aplicando novamente o método dos mínimos quadrados, temos:

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle \omega, 1 \rangle \\ \langle \omega, 1 \rangle & \langle \omega, \omega \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, k_t i \rangle \\ \langle \omega, k_t i \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 9 & 779.272 \\ 779.272 & 87991.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.487621 \\ 44.7364 \end{bmatrix} \quad (\text{E.12})$$

Logo, temos que:

$$\mu = 0.0435651 \text{ Nm} \quad (\text{E.13})$$

$$b = 0.000122595 \text{ Nms/rad} \quad (\text{E.14})$$

- $J$  foi obtido a partir da curva de velocidades do motor (figura 108). Como não houve sobressinal, o tempo de assentamento obtido foi de  $0.207s$ .

$$t_{98\%} = \frac{4}{\sigma} \quad (\text{E.15})$$

Da equação (E.15) temos que  $p = -19.3237 \text{ rad/s}$ . Então, igualando o denominador da função de transferência do motor (C.10) a zero e substituindo o valor do pólo:

$$[(Ls + R)(Js + b) + k_t k_e]_{s=p} = 0 \quad (\text{E.16})$$

Obtemos  $J = 1.469 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$

Os valores dos parâmetros obtidos são apresentados na tabela 16

Parâmetros	Valores	Unidades
$R$	1.101	$\Omega$
$L$	0.667	$mH$
$b$	$1.226 \cdot 10^{-4}$	$Ns$
$k_t$	$5.598 \cdot 10^{-2}$	$Nm/A$
$\mu$	$4.357 \cdot 10^{-2}$	$Nm$
$k_e$	$5.138 \cdot 10^{-2}$	$Vs/rad$
$J$	$1.469 \cdot 10^{-4}$	$kg.m^2$

Analogamente, foram determinados os parâmetros do motor 2, os quais estão apresentados na tabela 18, sendo que foi considerado um tempo de assentamento de  $0.198s$ . A tabela de medições correspondente a esse motor pode ser observada na tabela 17.

Tabela 17: Medições para obtenção de  $k_e$  do motor 2

$u(V)$	$i(A)$	$\omega(rad/s)$
1.49	0.92	13.696
2.48	0.99	31.747
3.47	1.06	49.909
4.47	1.14	67.889
5.46	1.20	86.067
6.47	1.27	104.681
7.47	1.32	122.742
8.48	1.37	140.553

Tabela 18: Parâmetros do Motor 2

Parâmetros	Valores	Unidades
$R$	0.829	$\Omega$
$L$	0.667	$mH$
$b$	$2.039 \cdot 10^{-4}$	$Ns$
$k_t$	$5.666 \cdot 10^{-2}$	$Nm/A$
$\mu$	$4.992 \cdot 10^{-2}$	$Nm$
$k_e$	$5.200 \cdot 10^{-2}$	$Vs/rad$
$J$	$1.887 \cdot 10^{-4}$	$kg.m^2$