

ANDRÉ GARNIER COUTINHO

**Simulação dinâmica e validação  
experimental de técnicas de controle  
para robôs de arquitetura paralela**

Texto apresentado à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo (EPUSP)  
como requisito parcial para a qualifica-  
ção no Curso de Doutorado em Enge-  
nharia Mecânica.

Área de concentração:  
Engenharia Mecânica

Orientador:  
Prof. Dr. Tarcisio A. Hess Coelho

São Paulo  
23 de Setembro de 2016

**Nome:** André Garnier Coutinho

**NUSP:** 6846085

**Curso:** Doutorado Direto

**Área de concentração:** Engenharia Mecânica de Projeto e Fabricação (3151)

**Orientador:** Professor Doutor Tarcisio Antonio Hess Coelho

**Ano de ingresso no PPGEM:** 2014

**Bolsista:** Sim

**Agência de fomento:** CNPq

**Edital/Chamada:** Cota Institucional (Demanda Social)

**Prazo Máximo para realização do Exame de Qualificação:** 17/10/2016

# **Sumário**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Revisão da literatura</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Metodologia do projeto</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Síntese de Resultados</b>	<b>12</b>
5.1	Cinemática de corpos rígidos . . . . .	13
5.2	Composição de movimentos . . . . .	14
5.3	Algoritmo para modelagem de mecanismos seriais . . . . .	16
5.4	Algoritmo para modelagem de mecanismos paralelos . . . . .	26
5.5	Projeto do Controlador . . . . .	35
5.6	Simulações . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Conclusões Parciais</b>	<b>46</b>
<b>7</b>	<b>Publicações</b>	<b>47</b>
<b>8</b>	<b>Disciplinas de pós-graduação</b>	<b>48</b>
<b>9</b>	<b>Cronograma de Atividades do Projeto</b>	<b>49</b>
<b>10</b>	<b>Sumário estruturado da tese</b>	<b>51</b>

## Resumo

Para realizar o projeto de um sistema de controle, em geral, é necessário primeiramente de um modelo da planta a ser controlada. O grau de fidelidade do modelo da planta, dentro das condições de operação desejadas do sistema, influí diretamente no desempenho do sistema em malha fechada que o projeto do controlador pode oferecer. Quanto mais rico for o modelo, mais fácil de atingir requisitos de performance mais elevados (menor tempo de resposta e menor sobressinal, por exemplo) garantindo a estabilidade do sistema.

Utilizando os métodos tradicionais de modelagem de Sistemas Mecânicos Multicorpos, é difícil e trabalhoso de se obter modelos de sistemas complexos, como mecanismos paralelos. Para contornar esse problema, é comum desprezar alguns efeitos de acoplamentos inerciais, simplificando o processo de modelagem. Porém, essa estratégia gera modelos mais pobres, o que irá limitar a performance que o sistema poderá atingir quando for feito o projeto do sistema de controle.

A solução proposta para ser possível aumentar o desempenho, garantindo a robustez, de um sistema de controle de mecanismos paralelos é a utilização dos novos métodos de modelagem dinâmica desenvolvidos pelo grupo de pesquisa do Prof. Doutor Tarcisio Antonio Hess Coelho, os quais são adequados para incluir todos os efeitos da dinâmica de corpos rígidos, independentemente da complexidade do sistema.

O presente projeto visa desenvolver um algoritmo de modelagem que inclua todos os efeitos da dinâmica de corpos rígidos para realizar a modelagem dinâmica de mecanismos paralelos (baseado na metodologia de Orsino), desenvolver uma metodologia de projeto de controle robusto para mecanismos paralelos tradicionais e mecanismos com atuação redundante, e realizar simulações e validações experimentais das leis de controle sintetizadas pela metodologia proposta.

# 1 Introdução

Os mecanismos de arquitetura paralela são amplamente utilizados em simuladores de voo, simuladores automobilisticos, e tarefas de *pick-and-place*. Além disso, também são empregados em sistemas de posicionamento, sistemas de medição, máquinas de usinagem, entre outras tarefas.

Há uma série de vantagens em utilizar mecanismos paralelos no lugar dos tradicionais seriais. Dentre elas podemos citar sua grande capacidade de carga, alta precisão de posicionamento, alta rigidez estrutural, e uma redução significativa na inércia [11, 27, 33, 47]. Outra característica marcante desse tipo de arquitetura são as altas velocidades e acelerações atingidas, as quais superam muito os valores máximos atingidos utilizando arquitetura serial. Grande parte dessas vantagens se devem à possibilidade de instalação de todos os motores na base imóvel do mecanismo. Como desvantagens podemos citar o menor espaço de trabalho e modelo dinâmico muito mais complexo e de difícil obtenção [2, 33].



Figura 1: Robô industrial Adept Quattro

Levando-se em conta esta dificuldade de obtenção e a complexidade inerente do modelo dinâmico, o controle de mecanismos de arquitetura paralela é uma tarefa desafiadora. A utilização de modelos dinâmicos simplificados limita o desempenho do projeto de controladores baseados no modelo. Porém, mesmo na hipótese do modelo dinâmico completo estar disponível, o emprego de técnicas de controle não linear pode acarretar um custo computacional muito elevado [15, 42, 54]. Este paradigma, aliado à falta de estratégias de controle apropriadas para esse tipo de mecanismos, resulta na exploração insatisfatória dos potenciais promissores de tais máquinas, como resposta dinâmica rápida e alta precisão [1]. Além disso, observa-se na literatura a escassez de trabalhos publicados com comprovação experimental de técnicas de controle aplicáveis a mecanismos paralelos [2].

Uma alternativa para a superação desta dificuldade seria a combinação de técnicas de controle não linear robusto (por exemplo, controle por modos deslizantes [42, 48]) com modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos, desenvolvidos a partir de novas metodologias de modelagem de sistemas multicorpos [34, 35, 36, 37]. Com esta estratégia, torna-se possível sintetizar leis de controle de alto desempenho e custo computacional mais adequado, viabilizando a exploração do potencial promissor dos mecanismos paralelos.

## 2 Objetivos

Os principais objetivos do projeto são:

- Desenvolvimento de um algoritmo gerador de modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos, de forma implícita. Pretende-se utilizar a metodologia proposta por Orsino et. al. [36] de acoplamento de subsistemas multicorpos.
- Elaboração de uma metodologia de projeto de controlador não linear robusto, de alto desempenho, baseado na técnica de controle por modos deslizantes [42, 48], aplicável a mecanismos de arquitetura paralela. Para tanto, serão consideradas as incertezas paramétricas e a possibilidade de atuação redundante [11], além da síntese de leis de controle com custo computacional consideravelmente menor do que as tradicionais, que empregam o Controle por Torque Computado [15, 54].
- Realizar a modelagem cinemática e dinâmica dos mecanismos 5R [34] e 2RSU+PPaP [2, 28], utilizando o algoritmo de modelagem desenvolvido.
- Realizar o projeto de um controlador de trajetória para os mecanismos escolhidos, utilizando a metodologia de projeto de controle proposta.
- Realizar simulações dinâmicas das leis de controle sintetizadas.
- Realizar a validação experimental dos controladores projetados nos protótipos dos mecanismos escolhidos, sendo que o protótipo do mecanismo 2RSU+PPaP se encontra no laboratório de mecanismos da EPUSP e o protótipo do pentágono articulado (5R) está sendo desenvolvido por outros alunos orientados pelo Prof. Dr. Tarcisio A. H. Coelho.

É importante ressaltar que os 5 primeiros objetivos citados já foram parcialmente alcançados e que a arquitetura paralela 2RSU+PPaP foi desenvolvida pelo grupo de pesquisa do Prof. Dr. Tarcio Antonio Hess Coelho, havendo ainda poucos estudos na literatura sobre ela. Sendo assim, pode-se afirmar que simulações dinâmicas e validações experimentais de leis de controle não linear robusto neste mecanismo tem caráter inédito.

### 3 Revisão da literatura

Esta seção é dedicada à revisão da literatura de técnicas de controle de posição aplicadas a mecanismos paralelos.

Existem diversas técnicas propostas pela literatura para realizar o controle de mecanismos paralelos. Dentre elas, podemos destacar:

- Controle PID
- Controle por Torque Computado (CTC)
- Controle por Torque Computado com pré-alimentação (CTCp)
- Controle por Torque Computado Estendido (CTCe)
- Controle Preditivo Baseado em Modelo (CPM)
- Controle Adaptativo
- Controle por Modos Deslizantes (CMD)

A técnica mais simples consiste na utilização de malhas do tipo PID, controlando cada junta ativa de maneira independente, considerando a dinâmica do mecanismo como distúrbios de controle. Essa técnica é caracterizada por sua facilidade de projeto e implementação, tanto em hardware quanto em software, além de exibir um desempenho satisfatório para movimento lento. Porém, essa técnica não se mostra adequada para a realização de trajetórias em altas velocidades e/ou acelerações [23, 54].

Uma das técnicas de controle mais exploradas na literatura é o Controle por Torque Computado (CTC). Basicamente, é uma técnica de controle não linear, mais conhecida como linearização pela realimentação, aplicada a sistemas mecânicos. A técnica consiste na utilização de duas malhas de controle, uma malha que realiza o desacoplamento do sistema e a compensação das não linearidades, e outra malha composta por PIDs independentes [15]. Como resultado, alcança-se um desempenho superior àquele obtido utilizando simples PIDs, permitindo inclusive a realização de trajetórias precisas em altas velocidades e/ou acelerações. No entanto, seu desempenho poderá ser limitado pela qualidade/fidelidade do modelo dinâmico utilizado para a compensação das não linearidades [43]. Sua implementação também é mais complexa, visto que é necessário calcular o modelo dinâmico inverso em tempo real, o que também aumenta consideravelmente seu custo computacional. Além disso, a técnica é sensível a incertezas estruturadas (paramétricas) e não estruturadas (dinâmicas não modeladas). Como exemplos de utilização do CTC, podem ser citados os trabalhos de Cheng at al. [11], Li e Wu [29], Li e Fu [30], Shang at al. [40] e Yen at al. [52].

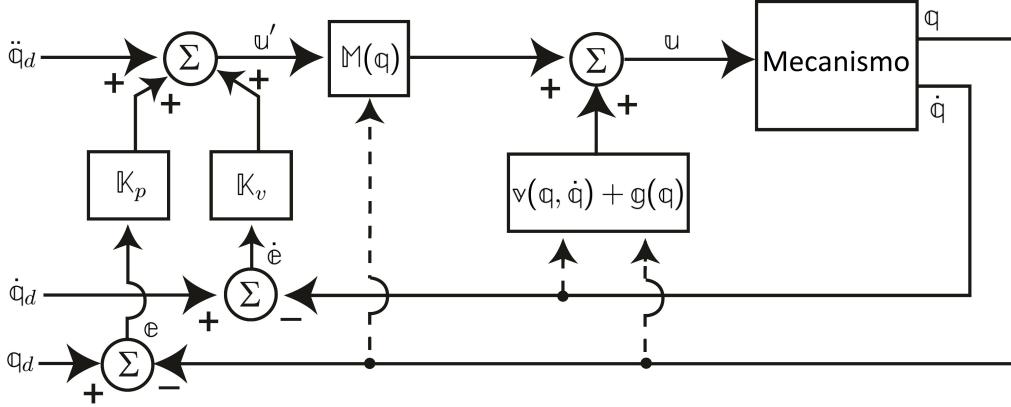


Figura 2: Malha de CTC (Adaptado de [15])

Visando a redução do custo computacional associado ao cálculo do modelo dinâmico em tempo real, alguns autores propõe a utilização do CTC com pré-alimentação (CTCp) [27, 41, 45]. Essa técnica é similar ao CTC, com a diferença de que a compensação das não linearidades é feita por pré-alimentação e não mais por realimentação. Consequentemente, realiza-se o cálculo do modelo dinâmico previamente, diminuindo o custo computacional.

De fato, Codourey [12] obteve uma redução de 600% no erro de posição utilizando o CTCp em um ensaio experimental com o robô DELTA, ao substituir os PDs originais. Na simulação do controle de um mecanismo 6-UPS, Wang et al. [51] utilizaram em cascata controladores lineares de posição, velocidade e corrente em cada junta ativa, além de uma compensação dinâmica por pré-alimentação dos distúrbios de torque.

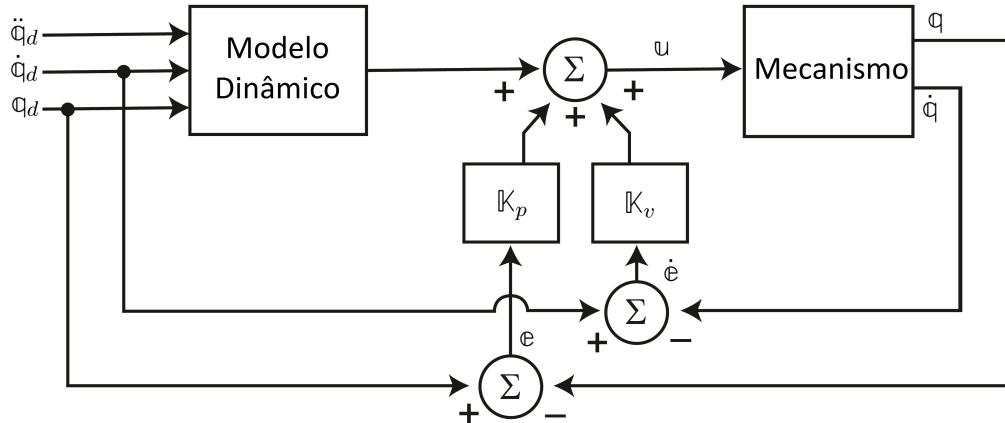


Figura 3: Malha de CTCp (Adaptado de [15])

Com o intuito de melhorar a robustez do CTC associada a incertezas paramétricas, Zubizarreta et al. [54, 55, 56, 57] propuseram o Controle por Torque Computado Estendido (CTCe), que utiliza informação redundante obtida pelo sensoriamento de juntas pas-sivas. Em [54], os controladores propostos demonstraram maior robustez, principalmente em relação a parâmetros cinemáticos, durante as simulações realizadas com o mecanismo 3-RRR.

Outra técnica alternativa, aplicada a mecanismos paralelos, é o controle preditivo baseado em modelo (CPM). Para a sua implementação, o CPM necessita minimizar uma função objetivo, dependente das saídas e do esforço de controle, ambos calculados em tempo futuro [8]. Assim, dependendo do modelo utilizado, o processo de otimização pode agregar um custo computacional que inviabilize o controle, comprometendo a motivação inicial de aprimorar o desempenho do sistema. Como exemplos de utilização do CPM, podem ser citados os trabalhos de Vivas et al. [50] e Duchaine et al. [19].

Com o propósito de controlar o mecanismo H4, Vivas et al. [50] utilizaram uma malha de CPM linear e outra malha para compensação das não linearidades. Após a comparação do desempenho do controlador proposto com o CTC, os autores observaram maior robustez do CPM a incertezas paramétricas.

Duchaine et al. [19], por sua vez, propuseram um controlador preditivo baseado no modelo não linear de um mecanismo paralelo de 6 graus de liberdade. Visando a obtenção de uma solução analítica para o problema de otimização, foram adotadas diversas hipóteses simplificadoras no modelo dinâmico do mecanismo. Com o intuito de comparar o controlador proposto com um PID, foram feitos alguns experimentos, onde se observou que o CPM apresentou erro nulo de posição no final da trajetória, enquanto que o PID demorou um tempo considerável para alcançar erro nulo. Foi verificada a equivalência entre o custo computacional dos 2 controladores.

O controle adaptativo, também encontrado na literatura, caracteriza-se pela utilização de leis de adaptação para realizar a estimativa em tempo real de parâmetros do sistema ou de termos de compensação dinâmica. Sendo assim, as técnicas de controle adaptativo possibilitam que o sistema se torne praticamente insensível a incertezas paramétricas. Para o caso em que se realiza a estimativa em tempo real dos parâmetros do sistema, pode-se dizer que o custo computacional é superior ao do CTC, visto que é necessário integrar as leis de adaptação em tempo real. Além disso, é necessário obter o modelo dinâmico linear em relação aos parâmetros do sistema [44], o que pode ser uma tarefa difícil, inviabilizando, em alguns casos, a aplicação da técnica. Em [13] é proposto um algoritmo de obtenção do modelo dinâmico simplificado de mecanismos paralelos nesse formato.

Em [44] é proposta uma lei de controle que combina o controle adaptativo com a técnica de controle robusto conhecida por Controle por Modos Deslizantes. Chemori et al. [9] utilizaram essa técnica com o intuito de diminuir os erros de posição em regime permanente no controle de um mecanismo paralelo do tipo PAR2. Por outro lado, Honegger et al. [23] empregaram o controle adaptativo com estimativa em tempo real dos parâmetros do sistemas, realizando a compensação dinâmica por pré-alimentação, em um mecanismo paralelo do tipo Hexaglide.

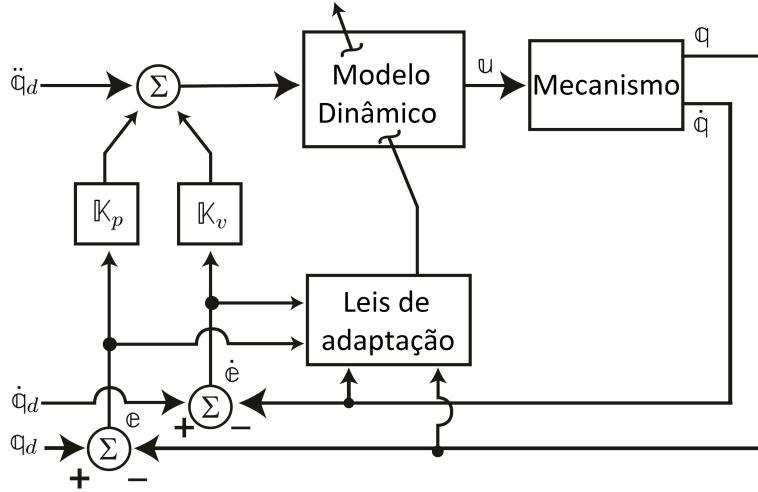


Figura 4: Malha de controle adaptativo (Adaptado de [15])

Outra técnica promissora para aplicação em mecanismos paralelos é o Controle por Modos Deslizantes (CMD). A técnica consiste no projeto de leis de controle que levem o sistema para superfícies de escorregamento no espaço de fase, de modo que assim que o sistema atinja e é mantido nas superfícies de escorregamento, o erro de controle decai exponencialmente para zero [42]. Para garantir que o sistema atinja em tempo finito e se mantenha nas superfícies de escorregamento, são utilizados termos descontínuos na lei de controle, o que pode causar problemas de oscilações bruscas em alta frequência nos esforços de controle (*chattering*). Em [22] e [49] são propostas técnicas para evitar esse tipo de problema. A grande vantagem da utilização deste tipo de lei de controle é sua grande robustez a incertezas estruturadas e não estruturadas, sendo possível realizar o projeto do controlador de modo a suprimir um dado nível de incertezas paramétricas. Em [43] é proposta uma metodologia de projeto de Controle por Modos Deslizantes para manipuladores robóticos seriais.

Na literatura são encontradas diversos artigos utilizando a técnica de CMD aliada à lógica *fuzzy* e/ou redes neurais para o controle de manipuladores robóticos [5, 21, 24, 39]. Begon et al. [5] propuseram uma lei de controle baseada na teoria de CMD e na utilização de lógica *fuzzy* para controlar de maneira independente os atuadores de um mecanismo paralelo do tipo Hexa. A técnica proposta teve o intuito de obter a robustez característica do CDM sem necessitar de uma lei de controle com termos descontínuos, evitando o *chattering*.

Em [53], Zeinali et al. desenvolveram uma lei de controle baseada nas teorias de CMD e controle adaptativo. O controlador desenvolvido realiza a compensação dinâmica em tempo real do erro de modelagem através de uma lei de adaptação. Além disso, substitui o termo descontínuo da lei de controle por um termo do tipo PID, com o intuito de evitar o *chattering*. A estabilidade e robustez da lei de controle proposta foram provadas utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov [42]. A robustez da lei de controle foi verificada

através de simulações do controlador proposto aplicado a um mecanismo serial do tipo RR, nas quais o controlador conseguiu manter erros de posição muito pequenos em regime permanente, mesmo sendo baseado em um modelo muito pobre e na presença de distúrbios de torque. A técnica apresentada se mostra promissora, porém, como no artigo foi feita apenas a simulação da lei de controle em um mecanismo serial bidimensional, ainda não se pode afirmar nada sobre seu desempenho em mecanismos paralelos tridimensionais.

## 4 Metodologia do projeto

O estágio atual de desenvolvimento do presente projeto ocorre basicamente em três áreas: aplicação do algoritmo de modelagem e simulação para os mecanismos 5R [34] e 2RSU + PPaP [28], o projeto e simulação de controladores não lineares robustos de alto desempenho baseado no modelo dinâmico para os mecanismos citados, e a validação experimental das leis de controle sintetizadas.

Os trabalhos no âmbito de modelagem e simulação estão sendo desenvolvidos a partir da aplicação do algoritmo de modelagem cinemática e dinâmica de mecanismos paralelos desenvolvido, baseado na utilização dos parâmetros de Denavit-Hartenberg [15, 16, 32] e no método Orsino de acoplamento de subsistemas [36]. Toda modelagem será feita em C++, utilizando uma biblioteca otimizada de cálculo matricial (Armadillo). As simulações da dinâmica direta do mecanismo serão feitas utilizando o método Runge-Kutta de 8<sup>a</sup> ordem [38] para solução de sistemas de EDOs, de modo a garantir estabilidade numérica do método, mesmo utilizando leis de controle quase descontínuas.

Os trabalhos na área de projeto de controle serão feitos utilizando a metodologia desenvolvida de projeto de controladores robustos multivariáveis para mecanismos paralelos, baseada no modelo dinâmico do mecanismo a ser controlado e na técnica de controle por modos deslizantes [42, 48].

Os trabalhos no âmbito da validação experimental das leis de controle sintetizadas serão realizados no protótipo do mecanismo 2RSU + PPaP que encontra-se no laboratório de mecanismos e no protótico do mecanismo 5R que está sendo construído por outros alunos do grupo de pesquisa. A bancada experimental do mecanismo 2RSU + PPaP já está funcional e já estão sendo realizados ensaios de leis de controle de trajetória baseadas apenas no modelo cinemático do mecanismo. Para a realização da validação experimental nesta bancada, será realizada a identificação dos parâmetros do sistema e suas respectivas incertezas, projeto do controlador baseado nos parâmetros e incertezas identificadas, implementação das leis de controle, e aquisição de dados em ambiente Labview.

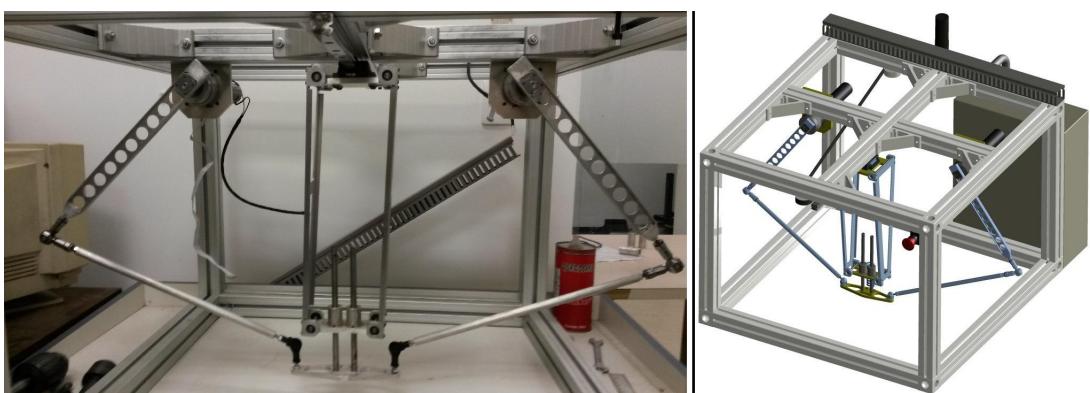


Figura 5: Mecanismo 2RSU + PPaP

## 5 Síntese de Resultados

Esta seção apresenta uma síntese dos principais resultados teóricos obtidos até o momento.

### Convenções de notação

$a, b, \dots$	Escalares, componentes de matrizes coluna, componentes de matrizes ou índices
$A, B, \dots$	Escalares, componentes de matrizes coluna, componentes de matrizes
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Matrizes coluna
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$	Matrizes
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Vetores
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Tensores
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Pontos
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Sistemas de coordenadas
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Corpos rígidos ou referenciais
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Sistemas ou subsistemas mecânicos multicorpos
$\underline{a}$	Matriz diagonal cuja diagonal é composta pelos parâmetros $a_1, a_2, \dots, a_n$
$c\theta$	Abreviação de $\cos(\theta)$
$d$	Operador diferencial
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz coluna cujos elementos são a diagonal de uma matriz quadrada
$g$	Aceleração gravitacional
$[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}$	Matriz-coluna formada pelas coordenadas do ponto $\mathbf{p}$ no sistema de coordenadas $\mathbf{B}$ .
$[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}^H$	Matriz-coluna formada pelas coordenadas do ponto $\mathbf{p}$ no sistema de coordenadas $\mathbf{B}$ em coordenadas homogêneas, ou seja: $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}^H = \begin{bmatrix} [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} \\ 1 \end{bmatrix}$
$s\theta$	Abreviação de $\sin(\theta)$
$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$	Vetor $\mathbf{v}$ escrito na base do sistema de coordenadas $\mathbf{B}$
$\mathbf{0}$	Matriz coluna nula ou matriz nula
$\mathbf{0}$	Vetor nulo ou tensor nulo
$\mathbb{1}$	Matriz identidade
$[\mathbf{1}]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_j}$	Matriz de mudança de base, i.e. $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_i} = [\mathbf{1}]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_j} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_j}$

$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_i \mid \mathcal{B}_j}^H$	Matriz de transformação homogênea, i.e. $[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}_i}^H = [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_i \mid \mathcal{B}_j}^H \cdot [\mathbf{p}]_{\mathcal{B}_j}^H$
$\mathbf{1}$	Tensor identidade
$[\cdot]^T$	Matriz transposta
$[\cdot]^{-1}$	Matriz inversa
$[\cdot]^\dagger$	Matriz pseudo-inversa
$[\emptyset]$	Matriz coluna vazia ou matriz vazia

## 5.1 Cinemática de corpos rígidos

Esta subseção tem o intuito de apresentar as equações básicas da cinemática de corpos rígidos, as equações de Poisson para velocidades, acelerações e sobre-acelerações.

### A) Equação de Poisson para velocidades

Sejam  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{o}$  dois pontos pertencentes a um corpo rígido  $\mathcal{B}$ . Podemos relacionar a velocidade do ponto  $\mathbf{p}$  e a velocidade do ponto  $\mathbf{o}$  através da equação de Poisson para velocidades:

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \quad (1)$$

### B) Equação de Poisson para acelerações

Derivando (1) no tempo, temos:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_o) \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos a equação de Poisson para acelerações:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \quad (3)$$

### C) Equação de Poisson para sobre-acelerações

Derivando (3) no tempo, temos:

$$\dot{\mathbf{a}}_p = \dot{\mathbf{a}}_o + \ddot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_o) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \quad (4)$$

Substituindo (1) em (5), obtemos a equação de Poisson para sobre-acelerações:

$$\dot{\mathbf{a}}_p = \dot{\mathbf{a}}_o + \ddot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) + 2\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}) \quad (5)$$

## 5.2 Composição de movimentos

Esta subseção tem o intuito de apresentar um dos princípios básicos da cinemática de corpos rígidos, a composição de movimentos.

### A) Composição de velocidades lineares

Sejam  $\mathcal{N}$  um referencial inercial,  $\mathbb{N}$  um sistema de coordenadas fixo a  $\mathcal{N}$ , definido pela origem  $o_{\mathbb{N}}$  e pelos versores  $\mathbf{i}_{\mathbb{N}}$ ,  $\mathbf{j}_{\mathbb{N}}$  e  $\mathbf{k}_{\mathbb{N}}$ . Sejam também  $\mathcal{B}$  um corpo rígido,  $\mathbb{B}$  um sistema de coordenadas fixo a  $\mathcal{B}$ , definido pela origem  $o_{\mathbb{B}}$  e pelos versores  $\mathbf{i}_{\mathbb{B}}$ ,  $\mathbf{j}_{\mathbb{B}}$  e  $\mathbf{k}_{\mathbb{B}}$ , e  $p$  um ponto no espaço. Definindo os vetores:

$$\mathbf{r}_{\mathbb{B}} = (o_{\mathbb{B}} - o_{\mathbb{N}}) \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\rho} = (p - o_{\mathbb{B}}) \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_p = (p - o_{\mathbb{N}}) \quad (8)$$

Desta maneira, tem-se que:

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_{o_{\mathbb{B}}} + \boldsymbol{\rho} \quad (9)$$

Derivando (9) no tempo, temos:

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{o_{\mathbb{B}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (10)$$

Admitindo que o vetor  $\boldsymbol{\rho}$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\rho} = (p - o_{\mathbb{B}}) = x\mathbf{i}_{\mathbb{B}} + y\mathbf{j}_{\mathbb{B}} + z\mathbf{k}_{\mathbb{B}} \quad (11)$$

Temos:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = x\dot{\mathbf{i}}_{\mathbb{B}} + y\dot{\mathbf{j}}_{\mathbb{B}} + z\dot{\mathbf{k}}_{\mathbb{B}} + \dot{x}\mathbf{i}_{\mathbb{B}} + \dot{y}\mathbf{j}_{\mathbb{B}} + \dot{z}\mathbf{k}_{\mathbb{B}} \quad (12)$$

Ou seja:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}} \wedge (p - o_{\mathbb{B}}) + \dot{x}\mathbf{i}_{\mathbb{B}} + \dot{y}\mathbf{j}_{\mathbb{B}} + \dot{z}\mathbf{k}_{\mathbb{B}} \quad (13)$$

Substituindo (13) em (10), temos:

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{o_{\mathbb{B}}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}} \wedge (p - o_{\mathbb{B}}) + \dot{x}\mathbf{i}_{\mathbb{B}} + \dot{y}\mathbf{j}_{\mathbb{B}} + \dot{z}\mathbf{k}_{\mathbb{B}} \quad (14)$$

Repare que  $\mathbf{v}_p$  pode ser dividido na soma de duas parcelas, a parcela  $\mathbf{v}_{o_{\mathbb{B}}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}} \wedge (p - o_{\mathbb{B}})$ , que seria a velocidade de  $p$  se  $p$  estivesse fixo a  $\mathcal{B}$  (movimento de arrastamento), e a parcela  $\dot{x}\mathbf{i}_{\mathbb{B}} + \dot{y}\mathbf{j}_{\mathbb{B}} + \dot{z}\mathbf{k}_{\mathbb{B}}$ , que seria a velocidade de  $p$  se  $\mathcal{B}$  estivesse parado (movimento relativo). Sendo assim, deduzimos princípio da composição de movimento para

velocidades lineares:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{arr} + \mathbf{v}_{rel} \quad (15)$$

### B) Composição de acelerações lineares

Derivando (14) no tempo, temos:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{o_B} + \dot{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + \boldsymbol{\omega}_B \wedge \dot{\rho} + \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\dot{x}\mathbf{i}_B + \dot{y}\mathbf{j}_B + \dot{z}\mathbf{k}_B) + \ddot{x}\mathbf{i}_B + \ddot{y}\mathbf{j}_B + \ddot{z}\mathbf{k}_B \quad (16)$$

Substituindo (13) em (16), temos:

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{o_B} + \dot{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + \boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + 2\boldsymbol{\omega}_B \wedge (\dot{x}\mathbf{i}_B + \dot{y}\mathbf{j}_B + \dot{z}\mathbf{k}_B) + \ddot{x}\mathbf{i}_B + \ddot{y}\mathbf{j}_B + \ddot{z}\mathbf{k}_B \quad (17)$$

Repare que  $\mathbf{a}_p$  pode ser dividido na soma de três parcelas, a parcela  $\mathbf{a}_{o_B} + \dot{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + \boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B)$ , que seria a aceleração de  $\mathbf{p}$  se  $\mathbf{p}$  estivesse fixo a  $\mathcal{B}$  (movimento de arrastamento), a parcela  $\ddot{x}\mathbf{i}_B + \ddot{y}\mathbf{j}_B + \ddot{z}\mathbf{k}_B$ , que seria a aceleração de  $\mathbf{p}$  se  $\mathcal{B}$  estivesse parado (movimento relativo), e a parcela complementar  $2\boldsymbol{\omega}_B \wedge (\dot{x}\mathbf{i}_B + \dot{y}\mathbf{j}_B + \dot{z}\mathbf{k}_B)$ . Sendo assim, deduzimos princípio da composição de movimento para acelerações lineares:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{arr} + \mathbf{a}_{rel} + 2\boldsymbol{\omega}_{arr} \wedge \mathbf{v}_{rel} \quad (18)$$

### B) Composição de sobre-acelerações lineares

Derivando (17) no tempo, temos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_p = & \dot{\mathbf{a}}_{o_B} + \ddot{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + \dot{\omega}_B \wedge \dot{\rho} + \dot{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + \boldsymbol{\omega}_B \wedge \dot{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + \\ & \boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge \dot{\rho} + 2\dot{\omega}_B \wedge (\dot{x}\mathbf{i}_B + \dot{y}\mathbf{j}_B + \dot{z}\mathbf{k}_B) + 2\boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\dot{x}\mathbf{i}_B + \dot{y}\mathbf{j}_B + \dot{z}\mathbf{k}_B) + \\ & 3\boldsymbol{\omega}_B \wedge (\ddot{x}\mathbf{i}_B + \ddot{y}\mathbf{j}_B + \ddot{z}\mathbf{k}_B) + \ddot{\dot{x}}\mathbf{i}_B + \ddot{\dot{y}}\mathbf{j}_B + \ddot{\dot{z}}\mathbf{k}_B \end{aligned} \quad (19)$$

Substituindo (13) em (19), temos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_p = & \dot{\mathbf{a}}_{o_B} + \ddot{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + 2\dot{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + \boldsymbol{\omega}_B \wedge \dot{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + \boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + \\ & 3\dot{\omega}_B \wedge (\dot{x}\mathbf{i}_B + \dot{y}\mathbf{j}_B + \dot{z}\mathbf{k}_B) + 3\boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\dot{x}\mathbf{i}_B + \dot{y}\mathbf{j}_B + \dot{z}\mathbf{k}_B) + 3\boldsymbol{\omega}_B \wedge (\ddot{x}\mathbf{i}_B + \ddot{y}\mathbf{j}_B + \ddot{z}\mathbf{k}_B) + \\ & \ddot{\dot{x}}\mathbf{i}_B + \ddot{\dot{y}}\mathbf{j}_B + \ddot{\dot{z}}\mathbf{k}_B \end{aligned} \quad (20)$$

Repare que  $\dot{\mathbf{a}}_p$  pode ser dividido na soma de três parcelas, a parcela  $\dot{\mathbf{a}}_{o_B} + \ddot{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} -$

$\mathbf{o}_B) + 2\dot{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B) + \boldsymbol{\omega}_B \wedge \dot{\omega}_B \wedge (\mathbf{p} - \mathbf{o}_B)$ , que seria a sobre-aceleração de  $\mathbf{p}$  se  $\mathbf{p}$  estivesse fixo a  $\mathcal{B}$  (movimento de arrastamento), a parcela  $\ddot{x}\mathbf{i}_B + \ddot{y}\mathbf{j}_B + \ddot{z}\mathbf{k}_B$ , que seria a sobre-aceleração de  $\mathbf{p}$  se  $\mathcal{B}$  estivesse parado (movimento relativo), e a parcela complementar  $3\dot{\omega}_B \wedge (\dot{x}\mathbf{i}_B + \dot{y}\mathbf{j}_B + \dot{z}\mathbf{k}_B) + 3\boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{\omega}_B \wedge (\dot{x}\mathbf{i}_B + \dot{y}\mathbf{j}_B + \dot{z}\mathbf{k}_B) + 3\boldsymbol{\omega}_B \wedge (\ddot{x}\mathbf{i}_B + \ddot{y}\mathbf{j}_B + \ddot{z}\mathbf{k}_B)$ . Sendo assim, deduzimos princípio da composição de movimento para sobre-acelerações lineares:

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_{arr} + \dot{\mathbf{a}}_{rel} + 3(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{arr} \wedge \mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega}_{arr} \wedge \boldsymbol{\omega}_{arr} \wedge \mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega}_{arr} \wedge \mathbf{a}_{rel}) \quad (21)$$

$$\mathbf{v}_p^A = \mathbf{v}_{p|B}^A + \mathbf{v}_p^B$$

$$\mathbf{a}_p^A = \mathbf{a}_{p|B}^A + \mathbf{a}_p^B + 2\boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \mathbf{v}_p^B$$

### 5.3 Algoritmo para modelagem de mecanismos seriais

Esta subseção tem o intuito de apresentar um algoritmo genérico para a obtenção do modelo cinemático e dinâmico de mecanismos seriais. O algoritmo apresentado é implementável em linguagens de programação comumente usadas atualmente, como C++, Java e Python, sem necessitar de recursos de manipulação simbólica.

Para a obtenção do modelo, são necessários apenas os parâmetros de Denavit-Hartenberg [15, 16, 32, 7] do mecanismo e as posições dos centros de massa dos ligamentos em relação aos sistemas de coordenadas fixos aos ligamentos.

Seja  $\mathcal{B}$  um sistema mecânico serial de  $\nu$  graus de liberdade. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- $\mathcal{N}$ : referencial inercial.
- $\mathcal{N}, B_0$ : sistema de coordenadas da base, fixo a  $\mathcal{N}$ .
- $B_i, i = 1, \dots, \nu$ : i-ésimo ligamento.
- $B_i, i = 1, \dots, \nu$ : sistema de coordenadas solidário a  $B_i$ .
- $\mathbf{o}_i, i = 0, \dots, \nu$ : origem do sistema  $B_i$ .
- $\{\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{k}_i\}, i = 0, \dots, \nu$ : base ortonormal do sistema  $B_i$ .
- $\mathbf{g}_i, i = 1, \dots, \nu$ : centro de massa de  $B_i$ .
- $\mathbf{x}$ : ponto no espaço fixo ao efetuador.

- $\omega$ : vetor velocidade angular absoluta do efetuador.
- $v$ : vetor velocidade linear absoluta do efetuador.
- $a$ : vetor aceleração linear absoluta do efetuador.
- $\omega_i, i = 1, \dots, \nu$ : vetor velocidade angular absoluta de  $\mathcal{B}_i$ .
- $v_i, i = 1, \dots, \nu$ : vetor velocidade linear absoluta do centro de massa de  $\mathcal{B}_i$ .
- $a_i, i = 1, \dots, \nu$ : vetor aceleração linear absoluta do centro de massa de  $\mathcal{B}_i$ .
- $m_i$ : massa da barra  $\mathcal{B}_i$ .
- $I_i$ : tensor de inércia da barra  $\mathcal{B}_i$  em relação a seu centro de massa.
- $q_i, i = 1, \dots, \nu$ : deslocamento relativo (angular ou linear) da  $i$ -ésima junta.
- $q$ : matriz-coluna de  $\nu$  coordenadas generalizadas independentes. É dada por  $q = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_\nu \end{bmatrix}^T$ .
- $v_{abs}, v_{rel}, v_{arr}$ : Velocidades absoluta, relativa e de arrastamento, respectivamente.
- $a_{abs}, a_{rel}, a_{arr}$ : Acelerações absoluta, relativa e de arrastamento, respectivamente.
- $\omega_{abs}, \omega_{rel}, \omega_{arr}$ : Velocidades angulares absoluta, relativa e de arrastamento, respectivamente.
- $\dot{\omega}_{abs}, \dot{\omega}_{rel}, \dot{\omega}_{arr}$ : Acelerações angulares absoluta, relativa e de arrastamento, respectivamente.

#### A) Cinemática de posição

Dados os parâmetros de Denavit-Hartemberg  $a_i, \alpha_i, d_i$  e  $\theta_i$ , com  $1 \leq i \leq \nu$ , é possível obter as matrizes de transformação homogênea  $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1} \mid \mathcal{B}_i}^H$  a partir da seguinte expressão [7] :

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1} \mid \mathcal{B}_i}^H = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cos \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (22)$$

Tendo obtido  $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1} \mid \mathcal{B}_i}^H$ , é possível obter as transformações homogêneas que relacionam os sistemas solidários aos ligamentos ( $\mathcal{B}_i$ ) ao sistema da base ( $\mathbb{N}$ ) pela seguinte expressão recursiva:

$$[\mathbf{1}]_{N|B_i}^H = \begin{cases} [\mathbf{1}]_{B_0|B_1}^H, \text{ se } i = 1 \\ [\mathbf{1}]_{N|B_{i-1}}^H \cdot [\mathbf{1}]_{B_{i-1}|B_i}^H, \text{ se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (23)$$

As matrizes  $[\mathbf{1}]_{N|B_i}^H$  apresentam o seguinte formato:

$$[\mathbf{1}]_{N|B_i}^H = \begin{bmatrix} [i]_N & [j_i]_N & [k_i]_N & [o_i]_N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (24)$$

Sendo assim, tendo obtido  $[\mathbf{1}]_{N|B_i}^H$ , automaticamente obtemos  $[i]_N$ ,  $[j_i]_N$ ,  $[k_i]_N$  e  $[o_i]_N$ . Note que também obtemos as coordenadas do efetuador no sistema da base, pois

$$[x]_N = [o_\nu]_N \quad (25)$$

Além disso, como  $[g_i]_{B_i}$  são dados de entrada do algoritmo, obtemos as coordenadas dos centros de massa dos ligamentos no sistema da base através da seguinte expressão:

$$[g_i]_N^H = [\mathbf{1}]_{N|B_i}^H \cdot [g_i]_{B_i}^H, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (26)$$

### B1) Cinemática de velocidades lineares

A posição do efetuador em relação ao sistema base é função dos deslocamentos relativos das juntas, ou seja:

$$[x]_N = \underline{x}(q) \quad (27)$$

Derivando no tempo, obtemos:

$$[v]_N = \frac{d}{dt} [x]_N = J_v(q) \cdot \dot{q} = \sum_{i=1}^{\nu} j_{vi}(q) \cdot \dot{q}_i \quad (28)$$

Sendo:

$$j_{vi}(q) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (29)$$

$$J_v(q) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q} = \begin{bmatrix} j_{v1}(q) & \dots & j_{v\nu}(q) \end{bmatrix} \quad (30)$$

Analizando a equação (28), pode-se observar que o produto  $j_{vi}\dot{q}_i$  representa a contribuição da  $i$ -ésima junta na velocidade do efetuador, com todas as outras juntas paradas [7]. Note que esta constatação está de acordo com a aplicação recursiva do

príncipio da composição de movimento para velocidades lineares [26, 46]:

$$\boldsymbol{v}_{abs} = \boldsymbol{v}_{arr} + \boldsymbol{v}_{rel} \quad (31)$$

Sendo assim, a contribuição de cada junta na velocidade do efetuador é dada por:

$$\ddot{\mathbf{j}}_{v,i} \cdot \dot{q}_i = \begin{cases} [\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbb{N}} \dot{q}_i, & \text{se a } i\text{-ésima junta for prismática} \\ ([\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbb{N}} \dot{q}_i) \wedge ([\mathbf{x}]_{\mathbb{N}} - [\mathbf{o}_{i-1}]_{\mathbb{N}}), & \text{se a } i\text{-ésima junta for de revolução} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (32)$$

Ou seja:

$$\ddot{\mathbf{j}}_{v,i}(\mathbf{q}) = \begin{cases} [\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbb{N}}, & \text{se a } i\text{-ésima junta for prismática} \\ [\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbb{N}} \wedge ([\mathbf{x}]_{\mathbb{N}} - [\mathbf{o}_{i-1}]_{\mathbb{N}}), & \text{se a } i\text{-ésima junta for de revolução} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (33)$$

Para obter as velocidades dos centros de massa dos ligamentos, o raciocínio é análogo:

$$[\mathbf{v}_i]_{\mathbb{N}} = \frac{d}{dt} [\mathbf{g}_i]_{\mathbb{N}} = \mathbb{J}_{v,i}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{\nu} \ddot{\mathbf{j}}_{v,i,j}(\mathbf{q}) \cdot \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (34)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{v,i}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{j}}_{v,i,1}(\mathbf{q}) & \dots & \ddot{\mathbf{j}}_{v,i,\nu}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (35)$$

$$\ddot{\mathbf{j}}_{v,i,j}(\mathbf{q}) = \begin{cases} 0, & \text{se } j > i \\ [\mathbf{k}_{j-1}]_{\mathbb{N}}, & \text{se } j \leq i \text{ e a } j\text{-ésima junta for prismática} \\ [\mathbf{k}_{j-1}]_{\mathbb{N}} \wedge ([\mathbf{g}_i]_{\mathbb{N}} - [\mathbf{o}_{j-1}]_{\mathbb{N}}), & \text{se } j \leq i \text{ e a } j\text{-ésima junta for de revolução} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, \nu \quad (36)$$

## B2) Cinemática de velocidades angulares

A velocidade angular de cada ligamento pode ser obtida aplicando recursivamente o princípio da composição de movimentos para velocidades angulares [26, 46]:

$$\boldsymbol{\omega}_{abs} = \boldsymbol{\omega}_{arr} + \boldsymbol{\omega}_{rel} \quad (37)$$

$$[\boldsymbol{\omega}_i]_N = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0 \\ [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_N, & \text{se } i > 0 \text{ e a } i\text{-ésima junta for prismática} \\ [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_N + [\boldsymbol{k}_{i-1}]_N \dot{q}_i, & \text{se } i > 0 \text{ e a } i\text{-ésima junta for de revolução} \end{cases} \quad i = 0, \dots, \nu \quad (38)$$

Sendo assim, a velocidade angular de cada ligamento pode ser obtida pelas seguintes expressões:

$$[\boldsymbol{\omega}_i]_N = \mathbb{J}_{\omega_i}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega_{i,j}}(\mathbf{q}) \cdot \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (39)$$

$$\mathbb{J}_{\omega_i}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{\omega_{i,1}}(\mathbf{q}) & \dots & \mathbb{J}_{\omega_{i,\nu}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (40)$$

$$\mathbb{J}_{\omega_{i,j}}(\mathbf{q}) = \begin{cases} 0, & \text{se } j > i \text{ ou a } j\text{-ésima junta for prismática} \\ [\boldsymbol{k}_{j-1}]_N, & \text{se } j \leq i \text{ e a } j\text{-ésima junta for de revolução} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, \nu \quad (41)$$

Note que também obtemos a velocidade angular do efetuador no sistema da base, pois

$$[\boldsymbol{\omega}]_N = [\boldsymbol{\omega}_\nu]_N = \mathbb{J}_\omega(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (42)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_\omega(\mathbf{q}) = \mathbb{J}_{\omega_\nu}(\mathbf{q}) \quad (43)$$

As velocidades angulares dos ligamentos escritas nas bases dos sistemas de coordenadas solidários aos ligamentos, podem ser obtidas pelas seguintes expressões:

$$[\boldsymbol{\omega}_i]_{B_i} = [\mathbf{1}]_{N|B_i}^\top \cdot [\boldsymbol{\omega}_i]_N = \mathbb{J}_{w_i}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (44)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{w_i}(\mathbf{q}) = [\mathbf{1}]_{N|B_i}^\top \cdot \mathbb{J}_{\omega_i}(\mathbf{q}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (45)$$

### C1) Cinemática de acelerações lineares

A aceleração do centro de massa de cada ligamento pode ser obtida aplicando recursivamente o princípio da composição de movimentos para acelerações lineares [26, 46]:

$$\boldsymbol{a}_{abs} = \boldsymbol{a}_{arr} + \boldsymbol{a}_{rel} + 2\boldsymbol{\omega}_{arr} \wedge \boldsymbol{v}_{rel} \quad (46)$$

$$[\boldsymbol{a}_{i,j}]_N = \begin{cases} 0, & \text{se } j = 0 \\ [\boldsymbol{a}_{i,j-1}]_N + \mathbb{J}_{v,i,j} \ddot{q}_i + \mathbb{J}_{\omega,i,j} \wedge ([\mathbb{J}_{\omega,i,j} \wedge ([g_i]_N - [o_{j-1}]_N)] \dot{q}_j^2 + 2 [\boldsymbol{\omega}_{j-1}]_N \wedge \mathbb{J}_{v,i,j} \dot{q}_j), & \text{se } j > 0 \end{cases} \quad (47)$$

Com  $i = 1, \dots, \nu$  e  $j = 1, \dots, i$

$$[\mathbf{a}_i]_{\mathbb{N}} = [\mathbf{a}_{i,i}]_{\mathbb{N}}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (48)$$

Sendo assim, a aceleração do centro de massa de cada ligamento pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$[\mathbf{a}_i]_{\mathbb{N}} = \mathbb{J}_{v,i}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (49)$$

Sendo:

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^i \mathbb{J}_{\omega,i,j} \wedge [\mathbb{J}_{\omega,i,j} \wedge ([\mathbf{g}_i]_{\mathbb{N}} - [\mathbf{o}_{j-1}]_{\mathbb{N}})] \dot{q}_j^2 + 2(\mathbb{J}_{\omega,j-1} \dot{\mathbf{q}}) \wedge \mathbb{J}_{v,i,j} \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (50)$$

Analogamente, para a aceleração do efetuador, temos:

$$\frac{d^2}{dt^2} [\mathbf{x}]_{\mathbb{N}} = \mathbb{J}_v(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (51)$$

Sendo:

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega,j} \wedge [\mathbb{J}_{\omega,j} \wedge ([\mathbf{x}]_{\mathbb{N}} - [\mathbf{o}_{j-1}]_{\mathbb{N}})] \dot{q}_j^2 + 2(\mathbb{J}_{\omega,j-1} \dot{\mathbf{q}}) \wedge \mathbb{J}_{v,j} \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (52)$$

## C2) Cinemática de acelerações angulares

A aceleração angular de cada ligamento pode ser obtida aplicando recursivamente o princípio da composição de movimentos para acelerações angulares [26, 46]:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{arr} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + \boldsymbol{\omega}_{arr} \wedge \boldsymbol{\omega}_{rel} \quad (53)$$

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{\mathbb{N}} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = 0 \\ [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}]_{\mathbb{N}} + \mathbb{J}_{\omega,i,i} \ddot{q}_i + [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_{\mathbb{N}} \wedge \mathbb{J}_{\omega,i,i} \dot{q}_i, \text{ se } i > 0 \end{cases} \quad i = 0, \dots, \nu \quad (54)$$

Sendo assim, a aceleração angular de cada ligamento pode ser obtida pelas seguintes expressões:

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{\mathbb{N}} = \mathbb{J}_{\omega,i}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (55)$$

Sendo:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^i (\mathbb{J}_{\omega,j-1} \dot{\mathbf{q}}) \wedge \mathbb{J}_{\omega,i,j} \cdot \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (56)$$

Note que também obtemos a aceleração angular do efetuador no sistema da base, pois

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}]_{\mathbb{N}} = [\dot{\boldsymbol{\omega}}_\nu]_{\mathbb{N}} = \mathbb{J}_\omega(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (57)$$

Sendo:

$$\dot{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\omega}_\nu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (58)$$

As acelerações angulares dos ligamentos escritas nas bases dos sistemas de coordenadas solidários aos ligamentos, podem ser obtidas pelas seguintes expressões:

$$[\dot{\omega}_i]_{B_i} = [\mathbf{1}]_{N|B_i}^T \cdot [\dot{\omega}_i]_N = J_{w,i}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\omega}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (59)$$

Sendo:

$$\dot{\omega}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [\mathbf{1}]_{N|B_i}^T \cdot \dot{\omega}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (60)$$

#### D) Dinâmica

O modelo dinâmico de  $\mathcal{B}$  é obtido utilizando o método Orsino de acoplamento de subsistemas [36], e é dado por:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + g(\mathbf{q}) = u \quad (61)$$

Sendo:

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i J_{v,i}^T J_{v,i} + J_{w,i}^T [I_i]_{B_i|B_i} J_{w,i} \quad (62)$$

$$v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i J_{v,i}^T \mathbf{q}_i + J_{w,i}^T \{ [I_i]_{B_i|B_i} \dot{\omega}_i + (J_{w,i} \dot{\mathbf{q}}) \wedge ([I_i]_{B_i|B_i} J_{w,i} \dot{\mathbf{q}}) \} \quad (63)$$

$$g(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^{\nu} m_i J_{v,i} [\mathbf{g}]_N \quad (64)$$

Segue abaixo, a dedução.

##### i) Modelo dos subsistemas

O modelo dinâmico desacoplado de cada ligamento pode ser obtido facilmente por Newton-Euler, pois são considerados como corpos rígidos livres no espaço, sujeitos apenas à força peso. Sendo assim, aplicando o Teorema do Movimentos do Baricentro e o Teorema do Momento Angular para cada ligamento, temos:

$$\begin{cases} m_i \mathbf{a}_i - m_i \mathbf{g} = \mathbf{0} \\ I_i \cdot \dot{\omega}_i + \omega_i \wedge (I_i \cdot \omega_i) = \mathbf{0} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (65)$$

Aplicando a primeira equação vetorial no sistema N e a segunda no sistema  $B_i$ ,

temos:

$$\begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & \emptyset \\ \emptyset & [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{a}_i]_{\mathbb{N}} \\ [\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_{\mathbf{B}_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i} \wedge ([\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_i} \cdot [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i [\mathbf{g}]_{\mathbb{N}} \\ \emptyset \end{bmatrix} = \emptyset, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (66)$$

Definindo:

$$\mathbb{M}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & \emptyset \\ \emptyset & [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (67)$$

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{p}_i) = \begin{bmatrix} \emptyset \\ [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i} \wedge ([\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_i} \cdot [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (68)$$

$$\mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} -m_i [\mathbf{g}]_{\mathbb{N}} \\ \emptyset \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (69)$$

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_i]_{\mathbb{N}} \\ [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (70)$$

(66) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{M}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v}_i(\mathbf{p}_i) + \mathbf{g}_i = \emptyset, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (71)$$

Seja  $\mathbb{f}_i$  o sistema de forças ativas (considerando os esforços de inércia) aplicado no  $i$ -ésimo subsistema, na direção das quasi-velocidades  $\mathbf{p}_i$ .  $\mathbb{f}_i$  pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\bar{\mathbb{f}}_i(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) = -(\mathbb{M}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v}_i(\mathbf{p}_i) + \mathbf{g}_i), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (72)$$

Portanto, o modelo dinâmico de cada subsistema pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbb{f}}_i(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) = \emptyset, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (73)$$

ii) Sistemas de forças ativas generalizadas e quasi-velocidades adicionais

Muitas vezes é conveniente definir um conjunto de quasi-velocidades adicionais  $\mathbf{p}_0$ , as quais só fazem sentido para o sistema acoplado, e sistemas de forças ativas generalizadas adicionais  $\mathbb{f}_0$  aplicados na direção das quasi-velocidades adicionais.

Neste algoritmo de modelagem, serão considerados como quasi-velocidades adicionais as derivadas temporais das coordenadas das juntas, ou seja:

$$\dot{p}_0 = \dot{q} \quad (74)$$

Nesse caso, os sistemas de forças ativas generalizadas adicionais serão os esforços que os atuadores aplicam nas juntas, ou seja:

$$f_0 = u \quad (75)$$

### iii) Vínculos cinemáticos entre subsistemas

Através das equações (34), (44) e (74), é possível relacionar as quasi-velocidades de cada subsistema com as quasi-velocidades adicionais da seguinte maneira:

$$\underline{p}_i(q, p_0) = J_i(q) \cdot p_0, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (76)$$

Sendo:

$$J_i(q) = \begin{bmatrix} J_{v,i}(q) \\ J_{w,i}(q) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (77)$$

Seja  $p^\circ$  a matriz coluna que contém as quasi-velocidades de todos os ligamentos:

$$p^\circ = [p_1^T \quad \dots \quad p_\nu^T]^T \quad (78)$$

$p^\circ$  pode ser expresso em função apenas das quasi-velocidades  $p_0$  da seguinte forma:

$$\underline{p}^\circ(q, p_0) = J(q)p_0 \quad (79)$$

Sendo:

$$J(q) = [J_1(q)^T \quad \dots \quad J_\nu(q)^T]^T \quad (80)$$

Sendo assim, as vínculos de quasi-velocidades entre subsistemas podem ser expressos como:

$$\bar{p}(q, p) = J(q)p_0 - p^\circ = 0 \quad (81)$$

### iv) Acoplamento de subsistemas

Seja  $\mathbb{F}$  a matriz-coluna contendo todos os sistemas de forças ativas generalizadas:

$$\mathbb{F} = [\mathbb{f}_0^T \quad \bar{\mathbb{f}}_1^T \quad \dots \quad \bar{\mathbb{f}}_\nu^T]^T \quad (82)$$

E seja  $\mathbb{A}$  o jacobiano dos vínculos de quasi-velocidades:

$$\mathbb{A}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}(\mathbf{q}) & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \quad (83)$$

Seja  $\mathbb{C}$  a seguinte matriz:

$$\mathbb{C}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{J}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (84)$$

Note que  $\mathbb{C}$  é complemento ortogonal de  $\mathbb{A}$ , visto que

$$\mathbb{A}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{C}(\mathbf{q}) = \mathbb{J}(\mathbf{q}) - \mathbb{J}(\mathbf{q}) = \emptyset \quad (85)$$

e para configurações não singulares o posto de  $\begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbf{q})^\top \\ \mathbb{A}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$  é cheio.

Sendo assim, o modelo dinâmico do mecanismo serial pode ser escrito como:

$$\mathbb{C}^\top \mathbf{f} = \emptyset \quad (86)$$

Ou seja:

$$\mathbf{u} - \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_i(\mathbf{q})^\top (\mathbb{M}_i \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v}_i(\mathbf{p}_i) + \mathbf{g}_i) = \emptyset \quad (87)$$

Substituindo (67), (68), (69), (70) e (77) em (87), temos:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v,i} \\ \mathbb{J}_{w,i} \end{bmatrix}^\top \left\{ \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & \emptyset \\ \emptyset & [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{a}_i]_{\mathbf{N}} \\ [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i} \wedge ([\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_i} \cdot [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i [\mathbf{g}]_{\mathbf{N}} \\ \emptyset \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{u} \quad (88)$$

Substituindo (44), (49) e (59) em (88), temos:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v,i} \\ \mathbb{J}_{w,i} \end{bmatrix}^\top \left\{ \begin{bmatrix} m_i (\mathbb{J}_{v,i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{o}_i) \\ [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_i} (\mathbb{J}_{w,i} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{v}}_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ (\mathbb{J}_{w,i} \dot{\mathbf{q}}) \wedge ([\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_i} \mathbb{J}_{w,i} \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i [\mathbf{g}]_{\mathbf{N}} \\ \emptyset \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{u} \quad (89)$$

Sendo assim, obtemos o modelo dinâmico mostrado anteriormente pelas equações (61), (62), (63), (64):

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

Sendo:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v,i}^\top \mathbb{J}_{v,i} + \mathbb{J}_{w,i}^\top [\mathbf{I}_i]_{\mathbf{B}_i \mid \mathbf{B}_i} \mathbb{J}_{w,i}$$

$$v(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i J_{v_i}^T \ddot{q}_i + J_w^T \{ [I_i]_{B_i | B_i} \dot{w}_i + (J_w \dot{q}) \wedge ([I_i]_{B_i | B_i} J_w \dot{q}) \}$$

$$g(q) = - \sum_{i=1}^{\nu} m_i J_{v_i} [g]_N$$

## 5.4 Algoritmo para modelagem de mecanismos paralelos

Esta subseção tem o intuito de apresentar um algoritmo genérico para a obtenção do modelo dinâmico de mecanismos paralelos. O algoritmo apresentado é implementável em linguagens de programação comumente usadas atualmente, como C++, Java e Python, sem necessitar de recursos de manipulação simbólica.

Para a obtenção do modelo do mecanismo paralelos, são necessários apenas os modelos de mecanismos seriais deduzidos utilizando o algoritmo apresentado anteriormente, do modelo do efetuador, e de 7 matrizes constantes que são utilizadas para descrever a arquitetura do mecanismo paralelo.

Para realizar a modelagem de mecanismos paralelos a partir de subsistemas seriais já deduzidos, é necessário introduzir mais alguns conceitos:

Sejam  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$   $n+1$  subsistemas mecânicos e  $\mathcal{M}$  um sistema mecânico de  $\nu^\#$  graus de liberdade gerado pelo acoplamento dos subsistemas citados. Definimos:

- $N_i, i = 1, \dots, n$ : sistema de coordenadas da base de  $\mathcal{B}_i$ .
- $q^\#, q_0$ : matriz-coluna de  $\nu^\#$  coordenadas generalizadas independentes da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ .
- $q_i, i = 1, \dots, n$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas do subsistema serial  $\mathcal{B}_i$ .
- $q^\circ$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas não pertencentes à plataforma/efetuador. Definida como  $q^\circ = [q_1^\top \dots q_n^\top]^\top$ .
- $q$ : matriz-coluna contendo todas as coordenadas generalizadas do sistema  $\mathcal{M}$ . Definida como  $q = [q^\# \top \quad q^\circ \top]^\top$ .
- $\bar{q}(q)$ : matriz-coluna dos vínculos de posição entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por  $\bar{q}(q) = \emptyset$ .
- $\bar{\omega}(q, \dot{q})$ : matriz-coluna dos vínculos de orientação entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por  $\bar{\omega}(q, \dot{q}) = \emptyset$ .
- $x_i, i = 1, \dots, n$ : ponto no espaço fixo ao efetuador de  $\mathcal{B}_i$ .

- $\mathbf{x}_i(\mathbf{q}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ :  $[\mathbf{x}_i]_{\mathbb{N}_i}$  escrito em função das coordenadas  $\mathbf{q}_i$ .
- $\mathbb{J}_{v\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ : jacobiano de velocidades lineares do efetuador de  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbb{J}_{\omega\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ : jacobiano de velocidades angulares do efetuador de  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbf{a}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ : parcela da aceleração linear do efetuador de  $\mathcal{B}_i$ , escrita na base de  $\mathbb{N}_i$ , independente de  $\ddot{\mathbf{q}}_i$ .
- $\dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ : parcela da aceleração angular do efetuador de  $\mathcal{B}_i$ , escrita na base de  $\mathbb{N}_i$ , independente de  $\ddot{\mathbf{q}}_i$ .
- $\mathbb{M}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ : matriz de inércia generalizada do subsistema  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbf{v}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ : matriz-coluna das forças de inércia giroscópica generalizadas do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbf{g}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ : matriz-coluna dos esforços gravitacionais generalizados do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ : matriz-coluna dos esforços ativos externos generalizados do subsistema  $\mathcal{B}_i$ .

i) Modelo dos subsistemas

O modelo dinâmico de cada subsistema pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbb{F}}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{u}_i, \mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{u}_i - (\mathbb{M}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{v}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) + \mathbf{g}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i)) = 0, i = 0, \dots, n \quad (90)$$

Sendo que para  $i = 0$  temos o modelo do efetuador/plataforma e para  $i > 0$  temos os modelos dos mecanismos seriais obtidos anteriormente.

ii) Vínculos cinemáticos entre subsistemas

a) Vínculos de posição

É possível relacionar as coordenadas da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$  com as coordenadas dos efetuadores das cadeias seriais por meio de rotações e translações, ou seja:

$$\mathbf{q}^\# = \mathbf{d}_i + \mathbb{E}_i \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{q}_i), i = 1, \dots, n \quad (91)$$

Sendo assim, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q^\# = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & E_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(q_1) \\ \vdots \\ x_n(q_n) \end{bmatrix} \quad (92)$$

Além disso, em alguns casos é necessário incluir vínculos afins entre as coordenadas generalizadas, ou seja:

$$D_\oplus \cdot q^\# = d_\oplus + F_\oplus \cdot q^\circ \quad (93)$$

Juntando a equação (93) à equação (92), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ D_\oplus \end{bmatrix} \cdot q^\# = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \\ d_\oplus \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & E_n \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(q_1) \\ \vdots \\ x_n(q_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_\oplus \end{bmatrix} \cdot q^\circ \quad (94)$$

Sendo assim, os vínculos de posição entre subsistemas podem ser descritos de maneira genérica por:

$$\bar{q}(q) = D \cdot q^\# - d - E \cdot x(q) - F \cdot q^\circ = 0 \quad (95)$$

Sendo  $d$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  matrizes constantes e  $x$  dado por:

$$x(q) = \begin{bmatrix} x_1(q_1) \\ \vdots \\ x_n(q_n) \end{bmatrix} \quad (96)$$

b) Vínculos de velocidades lineares

Derivando no tempo a equação (95), temos:

$$\dot{\bar{q}}(q, \dot{q}) = D \cdot \dot{q}^\# - E \cdot \dot{x}(q, \dot{q}) - F \cdot \dot{q}^\circ = 0 \quad (97)$$

A derivada  $\dot{\mathbf{x}}$  pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\mathbf{q}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v\mathcal{B}_1}(\mathbf{q}_1) \cdot \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{J}_{v\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \cdot \dot{\mathbf{q}}_n \end{bmatrix} = \mathbb{J}_v(\mathbf{q}^\circ) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ \quad (98)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_v(\mathbf{q}^\circ) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v\mathcal{B}_1}(\mathbf{q}_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{J}_{v\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \quad (99)$$

Assim, substituindo (98) em (97), obtemos:

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{D} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\# - \mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v(\mathbf{q}^\circ) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ - \mathbb{F} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ = 0 \quad (100)$$

### c) Vínculos de velocidades angulares

Em alguns casos, é necessário incluir vínculos entre as velocidades angulares dos efetuadores das cadeias seriais, de modo a restringir suas orientações no espaço.

De maneira análoga à equação (100), os vínculos de velocidades angulares serão definidos por:

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \mathbb{P} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\# - \mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\circ) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ - \mathbb{R} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ = 0 \quad (101)$$

Sendo  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  matrizes constantes e  $\mathbb{J}_w(\mathbf{q})$  dado por:

$$\mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\circ) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{w\mathcal{B}_1}(\mathbf{q}_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{J}_{w\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \quad (102)$$

### d) Vínculos de quasi-velocidades

Neste caso, as quasi-velocidades do sistema são dadas simplesmente por

$$\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}} \quad (103)$$

Os vínculos de quasi-velocidades são dados pela união dos vínculos de veloci-

dades lineares e dos vínculos de velocidades angulares, ou seja:

$$\bar{\mathbb{P}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \dot{\bar{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\# - \mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v(\mathbf{q}^\circ) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ - \mathbb{F} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ \\ \mathbb{P} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\# - \mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\circ) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ - \mathbb{R} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\circ \end{bmatrix} = \mathbb{0} \quad (104)$$

Repare que (104) pode ser reescrita como:

$$\bar{\mathbb{P}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbb{0} \quad (105)$$

Sendo  $\mathbb{A}$  o jacobiano dos vínculos de quasi-velocidades, o qual é dado por:

$$\mathbb{A}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \bar{\mathbb{P}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) & \mathbb{A}^\circ(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (106)$$

Sendo:

$$\mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) = \frac{\partial \bar{\mathbb{P}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^\#} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \\ \mathbb{P} \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$\mathbb{A}^\circ(\mathbf{q}) = \frac{\partial \bar{\mathbb{P}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^\circ} = - \begin{bmatrix} \mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v(\mathbf{q}^\circ) + \mathbb{F} \\ \mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\circ) + \mathbb{R} \end{bmatrix} \quad (108)$$

### e) Vínculos de quasi-acelerações

Derivando (104), temos:

$$\dot{\bar{\mathbb{P}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \\ \dot{\bar{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# - \mathbb{E} \cdot (\mathbb{J}_v(\mathbf{q}^\circ) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\circ + \mathbb{o}^\circ(\mathbf{q}^\circ, \dot{\mathbf{q}}^\circ)) - \mathbb{F} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\circ \\ \mathbb{P} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# - \mathbb{Q} \cdot (\mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\circ) \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\circ + \dot{\omega}^\circ(\mathbf{q}^\circ, \dot{\mathbf{q}}^\circ)) - \mathbb{R} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\circ \end{bmatrix} = \mathbb{0} \quad (109)$$

Sendo:

$$\mathbb{o}^\circ(\mathbf{q}^\circ, \dot{\mathbf{q}}^\circ) = \left[ \mathbb{o}_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)^\top \dots \mathbb{o}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n)^\top \right]^\top \quad (110)$$

$$\dot{\omega}^\circ(\mathbf{q}^\circ, \dot{\mathbf{q}}^\circ) = \left[ \dot{\omega}_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)^\top \dots \dot{\omega}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n)^\top \right]^\top \quad (111)$$

Repare que (109) pode ser reescrita como:

$$\dot{\bar{\mathbb{P}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbb{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{0} \quad (112)$$

Sendo:

$$\mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbb{E} \cdot \mathbb{o}^\circ(\mathbf{q}^\circ, \dot{\mathbf{q}}^\circ) \\ \mathbb{Q} \cdot \dot{\omega}^\circ(\mathbf{q}^\circ, \dot{\mathbf{q}}^\circ) \end{bmatrix} \quad (113)$$

### iii) Acoplamento de subsistemas

Seja  $\mathbb{f}$  a matriz-coluna contendo todos os sistemas de forças ativas generalizadas:

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{f}}_{\mathcal{B}_0} \\ \vdots \\ \bar{\mathbb{f}}_{\mathcal{B}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbb{M}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_0) \end{bmatrix} \quad (114)$$

Definindo:

$$\mathbb{M}'(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbb{M}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$\mathbf{v}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)^T & \dots & \mathbf{v}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n)^T \end{bmatrix}^T \quad (116)$$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0)^T & \dots & \mathbf{g}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_0)^T \end{bmatrix}^T \quad (117)$$

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^T & \dots & \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}^T \quad (118)$$

(114) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{f} = \mathbf{u}' - \mathbb{M}'(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{v}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}'(\mathbf{q}) \quad (119)$$

Um possível complemento ortogonal para o jacobiano dos vínculos de quasi-velocidades ( $\mathbb{A}$ ) é dado por

$$\mathbb{C}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbb{A}^\circ(\mathbf{q})^\dagger \cdot \mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (120)$$

Pois:

$$\mathbb{A}(\mathbf{q}) \cdot \mathbb{C}(\mathbf{q}) = \mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) - \mathbb{A}^\#(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (121)$$

e para configurações não singulares o posto de  $\begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbf{q})^T \\ \mathbb{A}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$  é cheio.

Além disso, repare que  $\mathbb{C}$  respeita a seguinte relação:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbb{C}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\# \quad (122)$$

Sendo assim, a equação dinâmica do mecanismo paralelo pode ser escrita como:

$$\mathbb{C}^T \mathbb{f} = \mathbf{0} \quad (123)$$

Ou seja:

$$\mathbb{C}(\mathbf{q})^T (\mathbb{M}'(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{v}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}'(\mathbf{q})) = \mathbb{C}(\mathbf{q})^T \mathbf{u}' \quad (124)$$

iv) Simulação dinâmica direta

É possível realizar a simulação dinâmica direta do sistema utilizando a equação dinâmica (124) e os vínculos de quasi-acelerações (109):

$$\begin{cases} \mathbb{C}(\mathbf{q})^T (\mathbb{M}'(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{v}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}'(\mathbf{q})) = \mathbb{C}(\mathbf{q})^T \mathbf{u}' \\ \mathbb{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{cases} \quad (125)$$

Reescrevendo em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbf{q})^T \mathbb{M}'(\mathbf{q}) \\ \mathbb{A}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbf{q})^T (\mathbf{u}' - \mathbf{v}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}'(\mathbf{q})) \\ \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (126)$$

É necessário que as condições iniciais respeitem os vínculos de posição e velocidades. Com isso, teoricamente, os vínculos continuariam sendo respeitados na solução do sistema de EDOs. Porém, devido a erros numéricos de truncamento e erros associados ao método de integração numérica utilizado, os vínculos de posição e velocidade podem deixar de ser respeitados. Esse problema pode ser resolvido utilizando a técnica das constantes de estabilização de Baumgarte [4]. A idéia é substituir a equação dos vínculos de aceleração pela seguinte equação:

$$\bar{\mathbf{p}}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + 2\lambda\dot{\mathbf{q}} + \lambda^2\bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\omega}} + \lambda\bar{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\omega}} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \bar{\omega} \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ 0 \end{bmatrix} = \emptyset \quad (127)$$

Substituindo (104) e (109) em (127), temos:

$$\bar{\mathbf{p}}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbb{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{A}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) \\ 0 \end{bmatrix} = \emptyset \quad (128)$$

Impondo que (128) seja respeitada, garantimos que  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$  e  $\bar{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  tenderão exponencialmente a zero, para  $\lambda > 0$ , ou seja, irá fazer com que os vínculos de posição e velocidades sejam respeitados mesmo havendo erros de truncamento e erros associados ao método de integração numérica de EDOs. É importante ressaltar que  $\lambda$  é superiomente limitado pelo passo de integração  $h$  e pelo método de integração, porém, escolhendo  $\lambda = 1/h$  já garante a estabilidade do método para praticamente qualquer método de integração numérica de EDOs.

Sendo assim, o sistema de EDOs que será utilizado para realizar a simulação dinâmica direta é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}(q)^T \mathbb{M}'(q) \\ \mathbb{A}(q) \end{bmatrix} \cdot \ddot{q} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}(q)^T (u' - v'(q, \dot{q}) - g'(q)) \\ b(q, \dot{q}) - \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{A}(q) \cdot \dot{q} - \lambda^2 \begin{bmatrix} \bar{q}(q) \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (129)$$

#### v) Simulação dinâmica inversa

Na simulação dinâmica inversa, são dados os perfis de  $q^\#$ ,  $\dot{q}^\#$  e  $\ddot{q}^\#$  em função do tempo e obtem-se os perfis dos esforços nos atuadores para a trajetória dada. Para isso, será utilizada a equação dinâmica (124):

$$\mathbb{C}(q)^T (\mathbb{M}'(q) \ddot{q} + v'(q, \dot{q}) + g'(q)) = \mathbb{C}(q)^T u'$$

Repare que os termos desta equação dependem de  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$ . Sendo assim, primeiramente é preciso obter  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $\ddot{q}$  dados  $q^\#$ ,  $\dot{q}^\#$  e  $\ddot{q}^\#$ .

$q$  é obtido resolvendo numéricamente a equação dos vínculos de posição (94), a qual é um sistema de equações algébricas não lineares.

$$\bar{q}(q) = 0$$

Tendo obtido  $q$ ,  $\dot{q}$  é obtido pela equação (122):

$$\dot{q} = \mathbb{C}(q) \cdot \dot{q}^\#$$

Para obter  $\ddot{q}$ , desenvolvemos a equação dos vínculos de quasi-acelerações (109):

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^\#(q) \cdot \ddot{q}^\# + \mathbb{A}^\circ(q) \cdot \ddot{q}^\circ &= b(q, \dot{q}) \\ \Rightarrow \ddot{q}^\circ &= \mathbb{A}^\circ(q)^\dagger (b(q, \dot{q}) - \mathbb{A}^\#(q) \cdot \ddot{q}^\#) \\ \therefore \ddot{q} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{A}^\circ(q)^\dagger \cdot b(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbb{A}^\circ(q)^\dagger \cdot \mathbb{A}^\#(q) \end{bmatrix} \cdot \ddot{q}^\# \end{aligned} \quad (130)$$

Substituindo (120) em (130), temos:

$$\therefore \ddot{q} = \mathbb{C}(q) \cdot \ddot{q}^\# + c(q, \dot{q}) \quad (131)$$

Sendo:

$$c(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ A^\circ(q)^\dagger \cdot b(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (132)$$

Além disso, normalmente não há atuadores em todas as juntas do mecanismo paralelo. Sendo assim,  $u'$  pode ser reescrito como:

$$u' = U \cdot u^* \quad (133)$$

Sendo  $U$  uma matriz constante composta por zeros e uns, e  $u^*$  os esforços aplicados pelos atuadores.

Substituindo (122), (131) e (133) em (124), temos:

$$C(q)^T \{ M'(q) \cdot [C(q) \cdot \ddot{q}^\# + c(q, C(q) \cdot \dot{q}^\#)] + v'(q, C(q) \cdot \dot{q}^\#) + g'(q) \} = C(q)^T U \cdot u^* \quad (134)$$

Definindo:

$$Z(q)^T = C(q)^T U \quad (135)$$

Temos:

$$C(q)^T M'(q) C(q) \cdot \ddot{q}^\# + C(q)^T \{ M'(q) \cdot c(q, C(q) \cdot \dot{q}^\#) + v'(q, C(q) \cdot \dot{q}^\#) \} + C(q)^T g'(q) = Z(q)^T u^* \quad (136)$$

Supondo que não haja atuação redundante, para configurações não singulares, (136) pode ser reescrita como:

$$M_{\mathcal{M}}(q) \cdot \ddot{q}^\# + v_{\mathcal{M}}(q, \dot{q}^\#) + g_{\mathcal{M}}(q) = u^* \quad (137)$$

Sendo:

$$M_{\mathcal{M}}(q) = (Z(q)^T)^{-1} \cdot C(q)^T M'(q) C(q) \quad (138)$$

$$v_{\mathcal{M}}(q, \dot{q}^\#) = (Z(q)^T)^{-1} \cdot C(q)^T \{ M'(q) \cdot c(q, C(q) \cdot \dot{q}^\#) + v'(q, C(q) \cdot \dot{q}^\#) \} \quad (139)$$

$$g_{\mathcal{M}}(q) = (Z(q)^T)^{-1} \cdot C(q)^T g'(q) \quad (140)$$

Sendo assim, a simulação dinâmica inversa é feita utilizando a equação (137) para obter os esforços nos atuadores, dados  $q^\#$ ,  $\dot{q}^\#$  e  $\ddot{q}^\#$ , e obtendo  $q$  através da solução numérica da equação (95).

## 5.5 Projeto do Controlador

Esta subseção é destinada ao projeto de controladores não lineares robustos, destinados ao controle de posição de plataformas paralelas cujo modelo dinâmico para simulação dinâmica inversa é dado por (137), utilizando a técnica de controle por modos deslizantes [42, 48].

Sejam  $\underline{\lambda}$  uma matriz diagonal positiva,  $\ddot{q}_d^\#$  uma matriz-coluna de sinais referência, e  $s$  uma matriz-coluna dada por:

$$s = -(\dot{e} + \underline{\lambda}e) \quad (141)$$

Sendo:

$$e = \ddot{q}_d^\# - q^\# \quad (142)$$

Seja  $V(s)$  uma função de Lyapunov dada por:

$$V(s) = \frac{1}{2}s^T s \quad (143)$$

Pela teoria de estabilidade de Lyapunov, se  $\dot{V} < 0 \forall s \neq 0$ ,  $s$  converge para 0 independentemente das condições iniciais do sistema. Para que isso seja possível, é imposta a seguinte condição:

$$\frac{d}{dt} V(s) = s^T \dot{s} \leq -\eta s^T \text{sign}(s) \quad (144)$$

Sendo  $\eta$  uma constante positiva. Repare que  $s^T \text{sign}(s)$  é a soma dos módulos das componentes de  $s$ , o que implica que  $-\eta s^T \text{sign}(s) < 0 \forall s \neq 0$ . Repare também que se  $\dot{s} = -\eta \text{sign}(s)$ , (144) é satisfeita e cada componente de  $s$  respeita a EDO  $\dot{s}_i = -\eta \text{sign}(s_i)$ , a qual converge para zero em um tempo finito de  $t = \frac{|s_i(0)|}{\eta}$ . Sendo assim, pode-se dizer que se (144) for satisfeita,  $s$  converge para zero em tempo finito e, a partir desse momento, o erro de controle  $e$  converge assintoticamente para zero.

O projeto do controlador é feito utilizando a condição (144), a qual é conhecida como condição de escorregamento. Assim, derivando (141), temos:

$$\dot{s} = \ddot{q}^\# - \sigma \quad (145)$$

Sendo:

$$\sigma = \ddot{q}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{e} \quad (146)$$

Substituindo (145) em (144), temos:

$$s^T (\ddot{q}^\# - \sigma + \eta \text{sign}(s)) \leq 0 \quad (147)$$

Com o intuito de deixar um pouco menos carregada a notação, definimos:

$$\mathbb{H}(q) = \mathbb{M}_{\mathcal{M}}(q) \quad (148)$$

$$h(q, \dot{q}^{\#}) = v_{\mathcal{M}}(q, \dot{q}^{\#}) + g_{\mathcal{M}}(q) \quad (149)$$

$$u = u^* \quad (150)$$

Sendo assim, equação (137) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{H}(q)\ddot{q}^{\#} + h(q, \dot{q}^{\#}) = u \quad (151)$$

(151) será utilizada para realizar o projeto do controlador.

Isolando  $\dot{q}^{\#}$  em (151) e substituindo em (147), temos:

$$s^T(\mathbb{H}^{-1}(u - h) - \sigma + \eta \operatorname{sign}(s)) \leq 0 \quad (152)$$

Para satisfazer (152), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$u = \hat{h} + \hat{\mathbb{H}}(\sigma - k \operatorname{sign}(s)) \quad (153)$$

Sendo  $\hat{h}$  e  $\hat{\mathbb{H}}$  estimadores de  $h$  e  $\mathbb{H}$ , respectivamente, e  $k$  uma matriz diagonal positiva. Substituindo (153) em (152), temos:

$$s^T(\delta + \Delta\sigma + \eta \operatorname{sign}(s) - (\Delta + 1)k \operatorname{sign}(s)) \leq 0 \quad (154)$$

Sendo:

$$\delta(q, \dot{q}^{\#}) = \mathbb{H}^{-1}(\hat{h} - h) \quad (155)$$

$$\Delta(q) = \mathbb{H}^{-1}\hat{\mathbb{H}} - 1 \quad (156)$$

Pode-se dizer que (154) é sempre satisfeita se:

$$(\Delta + 1) \cdot \operatorname{diag}(k) \geq |\delta + \Delta\sigma + \eta \operatorname{sign}(s)| \quad (157)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado esquerdo de (157), temos:

$$|\delta + \Delta\sigma + \eta \operatorname{sign}(s)| \leq |\delta|_{max} + |\Delta|_{max}|\sigma| + \operatorname{diag}(\eta 1) \quad (158)$$

Além disso, pode-se fazer a seguinte majoração no lado direito de (157):

$$(\Delta + 1) \cdot \operatorname{diag}(k) \geq (1 - |\Delta|_{max}) \cdot \operatorname{diag}(k) \quad (159)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$(\mathbb{1} - |\Delta|_{max}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq |\delta|_{max} + |\Delta|_{max}|\sigma| + \text{diag}(\eta\mathbb{1}) \quad (160)$$

(154) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (144) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Uma possível solução para (160) é dada por:

$$\text{diag}(\underline{k}) = (\mathbb{1} - |\Delta|_{max})^{-1}(|\delta|_{max} + |\Delta|_{max}|\sigma| + \text{diag}(\eta\mathbb{1})) \quad (161)$$

A qual é válida apenas se  $(\mathbb{1} - |\Delta|_{max})^{-1}$  for positiva.

Sabendo-se que, dadas as passagens feitas para a obtenção de  $\mathbf{v}_M$  no algoritmo de modelagem,  $\mathbf{v}_M$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{v}_M(q, \dot{q}^\#) = \sum_{i=1}^{\nu^\#} \sum_{j=1}^i \delta_{i,j}(q) \dot{q}_i^\# \dot{q}_j^\# \quad (162)$$

Além disso, definindo:

$$\delta(q) = g_M(q) \quad (163)$$

$$\delta_0(q) = H(q)^{-1}(\hat{\delta}(q) - \delta(q)) \quad (164)$$

$$\delta_{i,j}(q) = H(q)^{-1}(\hat{\delta}_{i,j}(q) - \delta_{i,j}(q)) \quad (165)$$

Temos que:

$$\delta(q, \dot{q}^\#) = \delta_0(q) + \sum_{i=1}^{\nu^\#} \sum_{j=1}^i \delta_{i,j}(q) \dot{q}_i^\# \dot{q}_j^\# \quad (166)$$

Sendo assim, a equação (161) pode ser reescrita como:

$$\text{diag}(\underline{k}) = \mathbb{n} + \mathbb{T}|\sigma| + \sum_{i=1}^{\nu^\#} \sum_{j=1}^i \mathbb{n}_{i,j} |\dot{q}_i^\#| |\dot{q}_j^\#| \quad (167)$$

Sendo  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{n}$  e  $\mathbb{n}_{i,j}$  matrizes constantes dadas por:

$$\mathbb{T} = (\mathbb{1} - |\Delta|_{max})^{-1} |\Delta|_{max} \quad (168)$$

$$\mathbb{n} = (\mathbb{1} - |\Delta|_{max})^{-1} (|\delta_0|_{max} + \text{diag}(\eta\mathbb{1})) \quad (169)$$

$$\mathbb{n}_{i,j} = (\mathbb{1} - |\Delta|_{max})^{-1} |\delta_{i,j}|_{max}, \quad i = 1, \dots, \nu^\#, \quad j = 1, \dots, i \quad (170)$$

## 5.6 Simulações

Nesta subseção, será realizada a simulação dinâmica direta do mecanismo 5R utilizando o algoritmo de modelagem e simulação de mecanismos paralelos apresentado, e a lei de controle apresentada na subseção anterior. Serão consideradas incertezas paramétricas, tanto no projeto do controlador, quanto na simulação.

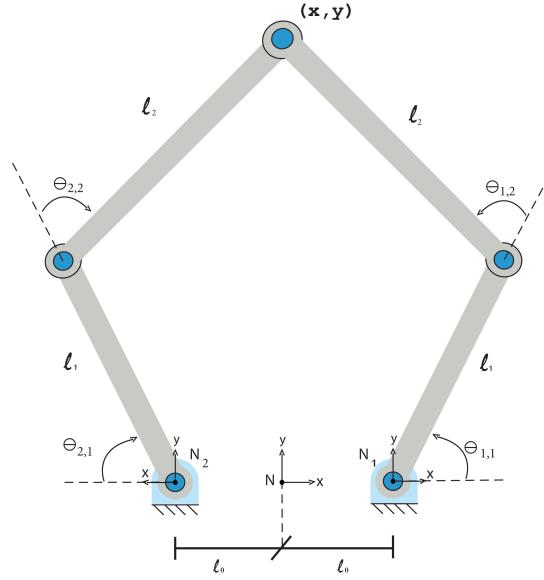


Figura 6: Pentágono articulado (5R)

O mecanismo 5R será modelado através do acoplamento de 2 subsistemas seriais  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  do tipo RR, e um efetuador pontual  $\mathcal{B}_0$  de massa  $m_0$ .

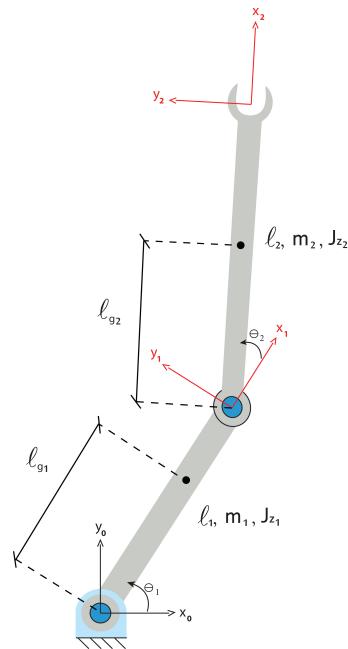


Figura 7: Mecanismo RR

i) Modelo do efetuador

O modelo do efetuador pontual  $\mathcal{B}_0$  segue o formato dado pela equação (90), ou seja:

$$\bar{\mathbb{F}}_{\mathcal{B}_0}(u_0, q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0) = u_0 - (\mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(q_0)\ddot{q}_0 + v_{\mathcal{B}_0}(q_0, \dot{q}_0) + g_{\mathcal{B}_0}(q_0)) = 0 \quad (171)$$

Para o subsistema em questão, temos:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(q_0) = \begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix} \quad (172)$$

$$v_{\mathcal{B}_0}(q_0, \dot{q}_0) = 0 \quad (173)$$

$$g_{\mathcal{B}_0}(q_0) = \begin{bmatrix} 0 & m_0 g \end{bmatrix}^T \quad (174)$$

$$q_0 = q^\# = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \quad (175)$$

$$u_0 = 0 \quad (176)$$

ii) Parâmetros de Denavit-Hartemberg das cadeias seriais

Tabela 2: Parâmetros de Denavit-Hartemberg do mecanismo RR

Ligamento	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
(1)	$l_1$	0	0	$q_1(t)$
(2)	$l_2$	0	0	$q_2(t)$

iii) Arquitetura do mecanismo paralelo

É possível relacionar as coordenadas um ponto no espaço descrito no sistema  $N$  com as coordenadas do mesmo ponto escritas nos sistemas  $N_1$  e  $N_2$  da seguinte maneira:

$$[p]_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [p]_{N_1} + \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (177)$$

$$[p]_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot [p]_{N_2} + \begin{bmatrix} -l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (178)$$

Escolhendo o ponto  $p$  como sendo o efetuador do mecanismo paralelo, o qual tem a

mesma localização dos efetuadores das cadeias serias neste caso, temos:

$$\dot{q}^\# = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{x}_1(q_1) + \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (179)$$

$$\dot{q}^\# = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{x}_2(q_2) + \begin{bmatrix} -l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (180)$$

Sendo assim, temos que os vínculos de posição são dados por:

$$\bar{q}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot q^\# - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(q^\circ) - \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \\ -l_0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (181)$$

Como não temos vínculos de velocidades angulares para esse mecanismo, as matrizes que descrevem a arquitetura do mecanismo são dadas por:

$$d = \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \\ -l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (182) \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (183) \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (184)$$

$$F = 0 \quad (185)$$

$$P = Q = R = [\emptyset] \quad (186)$$

#### iv) Parâmetros e incertezas do modelo

Definimos os seguinte parâmetros e incertezas para o mecanismo em questão:

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| - $l_1 = 0.12m$                 | - $m_1 = (0.143 \pm 0.0215)kg$                 |
| - $l_2 = 0.15m$                 | - $m_2 = (0.171 \pm 0.0257)kg$                 |
| - $l_{g1} = (0.06 \pm 0.009)m$  | - $Jz_1 = (171.6 \pm 25.7)10^{-6}kg \cdot m^2$ |
| - $l_{g2} = (0.075 \pm 0.011)m$ | - $Jz_2 = (320.6 \pm 48.1)10^{-6}kg \cdot m^2$ |
| - $m_0 = 0 kg$                  | - $g = 9.8m/s^2$                               |

v) Espaço de trabalho

Dados os parâmetros geométricos definidos acima, obtemos o seguinte espaço de trabalho para o mecanismo:

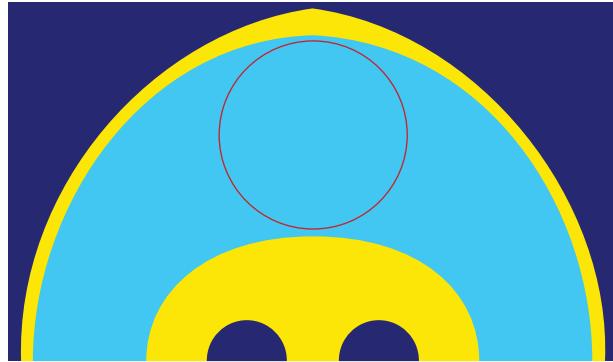


Figura 8: Espaço de trabalho do mecanismo RR

A região em azul escuro é a região não pertencente ao espaço de trabalho do mecanismo. As regiões em azul claro, em amarelo, e em vermelho são regiões pertencentes ao espaço do mecanismo. A região a amarela é considerada singular (próxima a singularidades) e a vermelha é a trajetória a ser seguida pelo mecanismo.

vi) Controlador

A lei de controle por modos deslizantes que será utilizada na simulação dinâmica direta é dada pelas equações (153) e (167).  $\Gamma$ ,  $\eta$  e  $\eta_{i,j}$  são obtidas da seguinte maneira:

- Discretiza-se o espaço de trabalho em um número finito de pontos considerados não-singulares. Foi adotada uma discretização de  $1\text{cm}$  na horizontal e na vertical.
- Para cada ponto calcula-se  $|\Delta|$ ,  $|\delta_0|$  e  $|\delta_{i,j}|$  para todas as combinações possíveis de parâmetros, com os parâmetros podendo assumir seu valor mínimo e seu valor máximo. Como temos 6 parâmetros incertos, temos 64 possibilidades.
- Obtem-se o valor máximo de  $|\Delta|$ ,  $|\delta_0|$  e  $|\delta_{i,j}|$  para cada ponto.
- Obtem-se o valor máximo de  $|\Delta|$ ,  $|\delta_0|$  e  $|\delta_{i,j}|$  para o espaço de trabalho, a partir do valor máximo em cada ponto.

Realizando-se esse procedimento e adotando  $\eta = 20.0$ , obtemos:

$$\text{diag}(k) = \begin{bmatrix} 75.3 \\ 108 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 37.0 \\ 54.1 \end{bmatrix} \dot{x}^2 + \begin{bmatrix} 22.7 \\ 35.5 \end{bmatrix} |\dot{x}\dot{y}| + \begin{bmatrix} 17.5 \\ 28.5 \end{bmatrix} \dot{y}^2 + \begin{bmatrix} 1.25 & 0.92 \\ 1.68 & 1.65 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} |\ddot{x}_d + \lambda\dot{e}_x| \\ |\ddot{y}_d + \lambda\dot{e}_y| \end{bmatrix} \quad (187)$$

vi) Simulação dinâmica direta

Para realizar a simulação dinâmica direta, definimos:

- Parâmetros do mecanismo:

$$\begin{aligned} - l_1 &= 0.12m & - m_1 &= 0.1645kg \\ - l_2 &= 0.15m & - m_2 &= 0.1967kg \\ - l_{g1} &= 0.051m & - Jz_1 &= 197.3 \cdot 10^{-6} kg \cdot m^2 \\ - l_{g2} &= 0.086m & - Jz_2 &= 368.7 \cdot 10^{-6} kg \cdot m^2 \\ - m_0 &= 0 kg & - g &= 9.8m/s^2 \end{aligned}$$

- Parâmetros estimados

$$\begin{aligned} - \hat{l}_1 &= 0.12m & - \hat{m}_1 &= 0.143kg \\ - \hat{l}_2 &= 0.15m & - \hat{m}_2 &= 0.171kg \\ - \hat{l}_{g1} &= 0.06m & - \hat{J}z_1 &= 171.6 \cdot 10^{-6} kg \cdot m^2 \\ - \hat{l}_{g2} &= 0.075m & - \hat{J}z_2 &= 320.6 \cdot 10^{-6} kg \cdot m^2 \\ - \hat{m}_0 &= 0 kg & - \hat{g} &= 9.8m/s^2 \end{aligned}$$

- Condições iniciais:

$$\begin{cases} q_1^\#(0) = 0.07m \\ q_2^\#(0) = 0.17m \\ \dot{q}_1^\#(0) = 0 \\ \dot{q}_2^\#(0) = 0 \end{cases} \quad (188)$$

- Trajetória de referência:

$$\begin{cases} q_{1d}^\#(t) = 0.07 \cos(28.57t) \\ q_{2d}^\#(t) = 0.17 + 0.07 \sin(28.57t) \end{cases} \quad (189)$$

- Parâmetros do controlador:

$$\lambda = 40.0$$

$$\eta = 20.0$$

Os parâmetros do mecanismo foram escolhidos de modo que haja um erro de 15% em cada parâmetro incerto. Os parâmetros do controlador foram escolhidos de modo que o sistema tenha um tempo de alcance às superfícies de escorregamento  $t_r \leq 0.1s$  (pois  $s(0) = [0 \ - 2]^T$ ) e um tempo de assentamento de  $t_a = 0.1s$ , quando o sistema chega nas superfícies de escorregamento.

A função  $f(x) = \text{sign}(x)$  foi substituída pela função de saturação  $f_{sat}(x) = \tanh(100x)$ , a qual tem as seguintes propriedades:

- $f_{sat}(0.023) = -f_{sat}(-0.023) = 0.98$
- $f_{sat}(\infty) = -f_{sat}(-\infty) = 1$
- $\frac{df_{sat}}{dx}(0) = 100$

Sua utilização garante a estabilidade nas simulações numéricas, evita o chattering nos atuadores, e ainda garante um erro em regime permanente desprezível para esta aplicação.

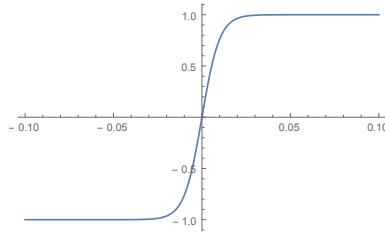


Figura 9: Função de saturação  $f_{sat}(x) = \tanh(100x)$

Aqui seguem os resultados das simulações numéricas:

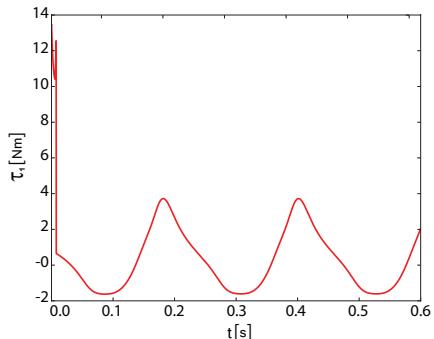


Figura 10: Torque aplicado pelo atuador 1

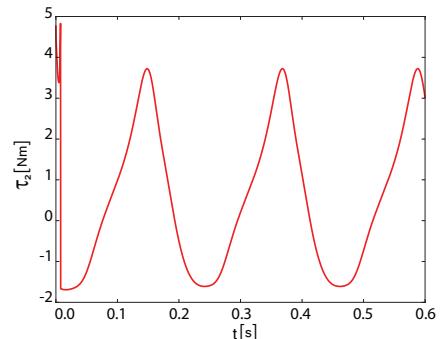


Figura 11: Torque aplicado pelo atuador 2

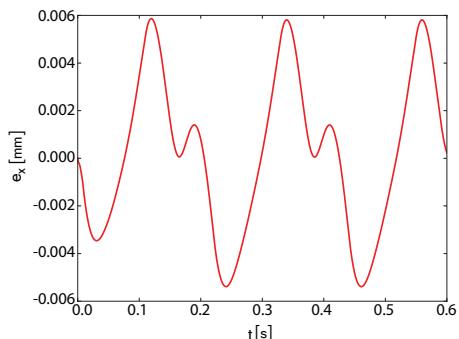


Figura 12: Erro de na coordenada  $x$

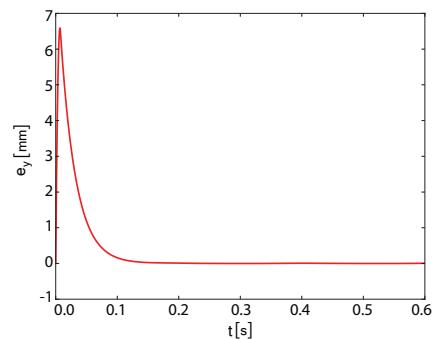


Figura 13: Erro de na coordenada  $y$

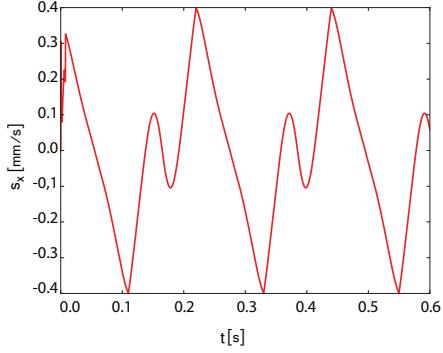


Figura 14: Variável  $s_x$

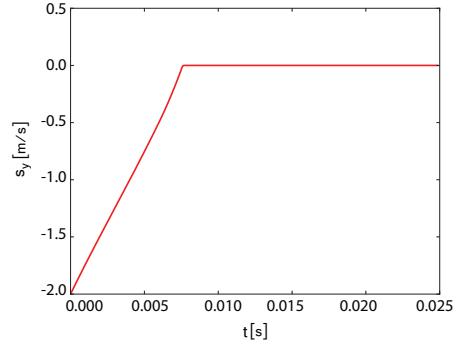


Figura 15: Variável  $s_y$

Repare que o tempo de alcance de  $s_y$  é aproximadamente  $t_r = 0.008s < 0.1s$ . Além disso, 0.1s depois de alcançar a superfície de escorregamento, o erro  $e_y$  já é praticamente nulo, como pode-se observar no gráfico da figura 13. Sendo assim, temos os resultados coerentes com os parâmetros do controlador adotados.

O projeto do controlador foi feito supondo incertezas de 15% nos parâmetros incertos. Porém, realizando a simulação com o mesmo controlador, aumentando para 50% os erros paramétricos, pode-se observar que o sistema ainda consegue ser controlado, com erros de controle na ordem de centésimos de milímetro, como pode ser visto nos resultados abaixo:

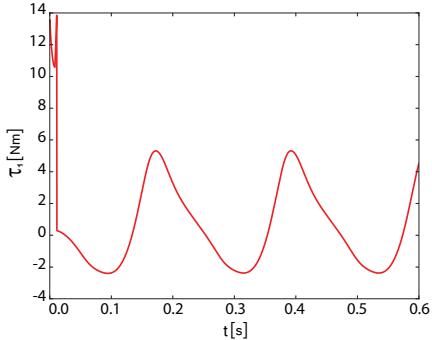


Figura 16: Torque aplicado pelo atuador 1

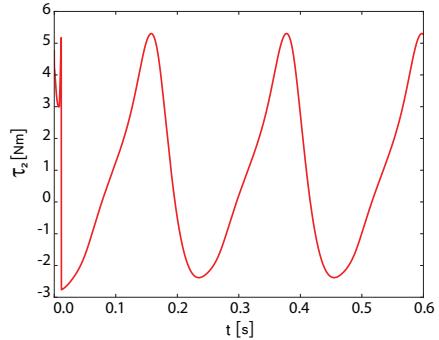


Figura 17: Torque aplicado pelo atuador 2

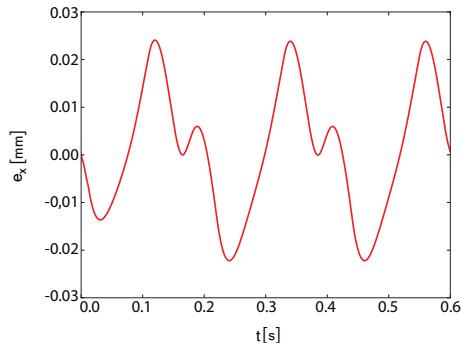


Figura 18: Erro de na coordenada  $x$

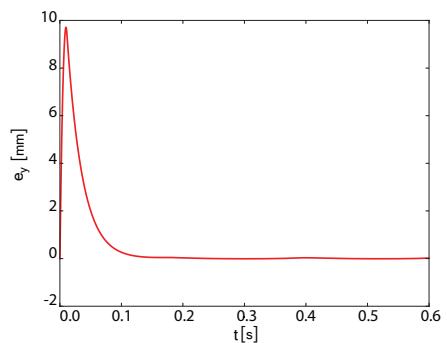


Figura 19: Erro de na coordenada  $x$

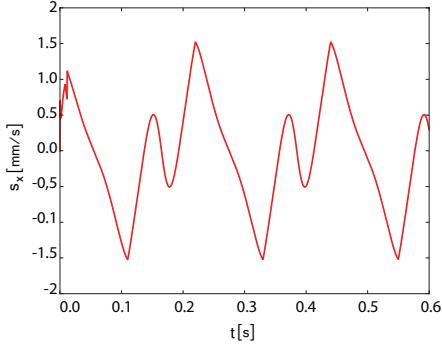


Figura 20: Variável  $s_x$

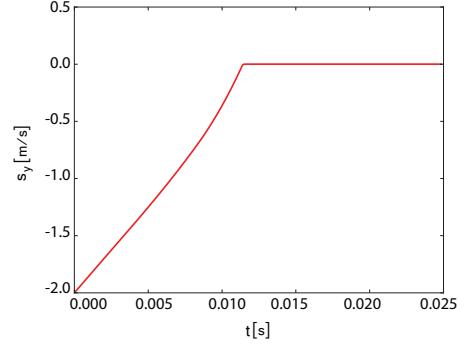


Figura 21: Variável  $s_y$

Para fins de comparação, realizamos a simulação anterior mudando a lei de controle para a tradicional lei de Controle por Torque Computado com amortecimento crítico [15]:

$$v = \hat{h}(q, \dot{q}^\#) + \hat{H}(q)(\ddot{q}_d^\# + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e) \quad (190)$$

Escolhendo  $\lambda = 40.0$ , obtemos os seguintes resultados:

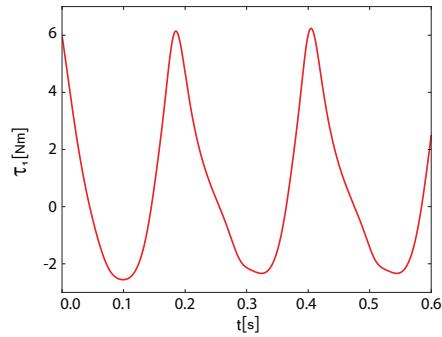


Figura 22: Torque aplicado pelo atuador 1

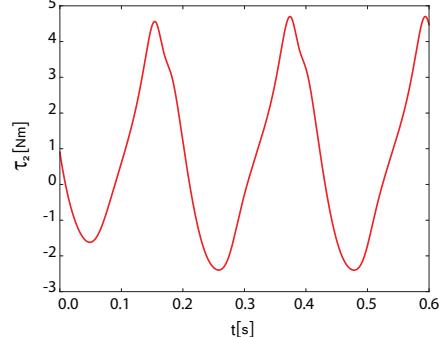


Figura 23: Torque aplicado pelo atuador 2

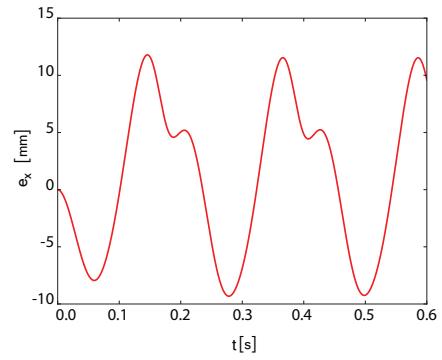


Figura 24: Erro de na coordenada  $x$

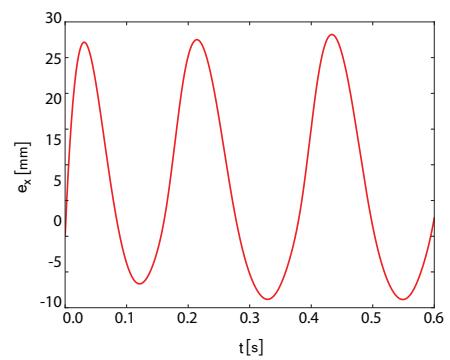


Figura 25: Erro de na coordenada  $y$

Repare que a lei de Controle por Torque Computado não consegue seguir a trajetória de forma satisfatória, mantendo um erro em regime permanente oscilatório com pico 12mm na coordenada  $x$  e 27mm na coordenada  $y$ .

## 6 Conclusões Parciais

Durante a realização do projeto proposto, foi possível concluir que é fundamental a utilização linguagens de alta eficiência computacional para realizar simulações dinâmicas de modelos completos de mecanismos de alta complexidade, apesar da dificuldade em programar em tais linguagens.

Tal constatação foi obtida quando foi feita a tentativa de utilizar um algoritmo de modelagem de mecanismos seriais implementado em Python para realizar a simulação dinâmica inversa de um mecanismo de 6 graus de liberdade. A algoritmo implementado demorava mais de um minuto para calcular cada ponto da simulação. Visto que o mecanismo 2RSU+PPaP é constituído de 2 cadeias seriais de 6 de liberdade, pode-se concluir que seria inviável realizar simulações dinâmicas deste mecanismos utilizando os algoritmos implementados em Python. Por este motivo, foi feita a migração da implementação dos algoritmos de modelagem para a linguagem C++, a qual se mostrou extremamente eficiente para esse tipo de tarefa. Utilizando o algoritmo implementado em C++, foi possível realizar mais de 10000 pontos da mesma simulação em menos de 1 segundo.

Também foi possível concluir, por meio de simulações, que é possível obter alto desempenho no controle mecanismos paralelos em altas velocidades/accelerações utilizando técnicas de controle não linear robusto, mesmo com altos níveis de incerteza nos parâmetros do modelo.

## 7 Publicações

A partir dos resultados obtidos no trabalho de formatura realizado na graduação, foi publicado um artigo intitulado “Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies” [18], o qual foi escrito em coautoria com Eng. Guilherme Martinho Dobrianskyj e o Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho. Este trabalho foi apresentado no BioRob 2014 (IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics) na seção de posters, no dia 15 de agosto de 2014. O artigo pode ser acessado por <http://dx.doi.org/10.1109/BIOROB.2014.6913880>.

Um capítulo de livro, intitulado “Dynamic modelling and control of balanced parallel mechanisms” [34], foi escrito em coautoria com o Dr. Renato M. M. Orsino e com o Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho, para o livro *Dynamic balancing of mechanisms and synthesizing of parallel robots* (editado pelo Prof. Dr. Dan Zhang da Universidade do Instituto de Tecnologia de Ontario e publicado pela editora Springer). Este capítulo de livro trata do uso de uma metodologia de modelagem modular para o balanceamento adaptativo e desenvolvimento de algoritmos de controle para mecanismos robóticos paralelos. O capítulo pode ser acessado por [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3\\_16](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3_16).

Um artigo, publicado no periódico *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, intitulado “A new approach for obtaining the dynamic balancing conditions in serial mechanisms” [14], foi escrito em coautoria com o Prof. Dr. Tarcísio Antonio Hess Coelho. O artigo pode ser acessado por <http://dx.doi.org/10.1504/IJMRS.2016.077036>.

## 8 Disciplinas de pós-graduação

Ao longo do programa foram cumpridos 56 créditos, tendo cursado 7 disciplinas de pós-graduação:

- PME-5004 — Complementos de Matemática I
- PMR-5010 — Elementos Finitos em Sistemas Multifísicos: Fundamentos
- PMR-5215 — Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos
- PMR-5238 — Análise e Síntese de Mecanismo Planos e Tridimensionais
- PMR-5211 — Mecânica dos Sólidos Experimental
- PMR-5234 — Técnicas de Ultra-Som e suas aplicações na Indústria e na Medicina
- PMR-5014 — Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

Ressalta-se que em todas as disciplinas foi obtido conceito A, demonstrando bom aproveitamento.

Ainda é necessário cumprir mais 24 créditos de pós-graduação, os quais deverão ser cumpridos realizando a publicação de 3 artigos em periódicos indexados, sendo que um dos 3 artigos já foi publicado.

## 9 Cronograma de Atividades do Projeto

Serão realizados as seguintes etapas para a realização da proposta:

- (1) Obtenção do espaço de trabalho e singularidades do mecanismo  $2\text{RSU}+\text{PPaP}$
- (2) Realização de projeto de controlador por modos deslizantes para o mecanismo  $2\text{RSU}+\text{PPaP}$ , considerando os esforços dos atuadores como entradas de controle
- (3) Simulação dinâmica direta do mecanismo  $2\text{RSU}+\text{PPaP}$  controlado pelo controlador projetado
- (4) Inclusão de atritos nas juntas no algoritmo de modelagem
- (5) Inclusão das inércias efetivas dos atuadores no algoritmo de modelagem
- (6) Dedução dos princípios de composição de movimento para as derivadas das acelerações lineares e angulares
- (7) Aplicações dos princípios de composição de movimento das derivadas das acelerações lineares e angulares para efetuadores e centros de massa de ligamentos de mecanismos seriais
- (8) Inclusão da dinâmica eletro-mecânica dos atuadores no algoritmo de modelagem
- (9) Identificação dos parâmetros dos sistemas e suas respectivas incertezas, utilizando os protótipos
- (10) Realização de projeto de controlador por modos deslizantes para os mecanismos  $5R$  e  $2\text{RSU}+\text{PPaP}$ , considerando a tensão elétrica nos atuadores como entrada de controle
- (11) Simulação dinâmica direta dos mecanismos controlados pelos controladores descritos no item anterior
- (12) Validação experimental dos controladores projetados, utilizando os protótipos
- (13) Escrever artigo sobre uma nova abordagem para modelagem dinâmica de mecanismos seriais, utilizando o método Orsino de acoplamento de subsistemas [36], aliado aos parâmetros de Denavit-Hartenberg [15, 16, 32]
- (14) Escrever artigo sobre modelagem dinâmica de mecanismos paralelos, utilizando o método Orsino de acoplamento de subsistemas
- (15) Escrever artigo sobre controle não linear robusto aplicado a mecanismos paralelos
- (16) Avaliação geral dos resultados

(17) Preparo da tese

Aqui segue um cronograma estimado para realização das atividades propostas:

Tabela 3: Cronograma – Planejamento de Atividades por quadrimestre

Ativ./Quad.	3º/16	1º/17	2º/17	3º/17
(1)	■■■			
(2)	■■■			
(3)	■■■			
(4)	■■■			
(5)	■■■			
(6)	■■■			
(7)	■■■			
(8)	■■■			
(9)	■■■	■■		
(10)	■■■	■■		
(11)	■■■	■■		
(12)	■■■	■■	■■	■■■
(13)		■■		
(14)			■■	
(15)				■■■
(16)			■■	■■■
(17)	■■	■■	■■	■■■

## 10 Sumário estruturado da tese

Esta subseção tem o intuito de apresentar a estrutura de capítulos e sub-capítulos que pretende ser utilizada na tese.

- 1) Introdução
- 2) Revisão da literatura
- 3) Metodologia do projeto
- 4) Modelagem dinâmica
  - 4.1) Algoritmo para modelagem de mecanismos seriais
  - 4.2) Algoritmo para modelagem de mecanismos paralelos
- 5) Controle
  - 5.1) Linearização pela realimentação
  - 5.2) Controle por Modos Deslizantes
  - 5.3) Controle por Modos Deslizantes Adaptativo
- 6) Resultados
  - 6.1) Mecanismos 5R
    - 6.1.1) Simulação
    - 6.1.2) Experimento
  - 6.2) Mecanismo 2RSU+PPaP
    - 6.2.1) Simulação
    - 6.2.2) Experimento
- 7) Conclusões
- 8) Referências

## Referências

- [1] H. Abdellatif, B. Heimann, J. Kotlarski, T. Ortmaier. Practical model-based and robust control of parallel manipulators using passivity and sliding mode theory. *Robotics 2010: Current and Future Challenges*, InTech, 2010.
- [2] R. Z. H. de Almeida. Modelagem dinâmica e controle e robô manipulador de arquitetura paralela assimétrica de três graus de liberdade. *Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- [3] O. Altuzarra, P. M. Eggers, F. J. Campa, C. Roldan-Paraponiaris, C. Pinto. Dynamic Modelling of Lower-Mobility Parallel Manipulators Using the Boltzmann-Hamel Equations. *Mechanisms, Transmissions and Applications*, 157–165, Springer, 2015.
- [4] J. Baumgarte. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1(1): 1–16, 1972.
- [5] P. Begon, F. Pierrot, P. Dauchez. Fuzzy sliding mode control of a fast parallel robot. *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*, 1178–1183, IEEE, 1995.
- [6] A.M. Bloch, M. Reyhanoglu, N.H. McClamroch. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(11): 1746–1757, 1992.
- [7] E. L. L. Cabral. Cinemática Direta de Robôs Manipuladores. *Análise de Robôs*, sites.poli.usp.br/p/eduardo.cabral/Cinemática Direta.pdf acessado em 25/08/2016.
- [8] E. F. Camacho, C. B. Alba. *Model predictive control*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] A. Chemori, G. S. Natal, F. Pierrot. Control of parallel robots: towards very high accelerations. *SSD'2013: 10th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, 2013.
- [10] S-L. Chen, Y-C. Tsai. Contouring control of a parallel mechanism based on equivalent errors. *American Control Conference, 2008*, 2384–2388, IEEE, 2008.
- [11] H. Cheng, Y-K. Yiu, Z. Li. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 8(4): 483–491, 2003.

- [12] A. Codourey. Dynamic modelling and mass matrix evaluation of the DELTA parallel robot for axes decoupling control. *Intelligent Robots and Systems' 96, IROS 96, Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference on*, 1211–1218, IEEE, 1996.
- [13] A. Codourey, E. Burdet. A body-oriented method for finding a linear form of the dynamic equation of fully parallel robots. *Robotics and Automation, 1997. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on*, 1211–1218, IEEE, 1997.
- [14] A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. A new approach for obtaining the dynamic balancing conditions in serial mechanisms. *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 3(1): 32–47, 2016.
- [15] J. J. Craig. *Introduction to robotics: mechanics and control*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: control engineering. Pearson/Prentice Hall, 2005.
- [16] J. Denavit, R. S. Hartenberg. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 22:(1) 215–221, 1955.
- [17] G. M. Dobrianksyj, A. G. Coutinho. Plataforma robótica para reabilitação do membro superior humano. *Tese (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- [18] G. M. Dobrianskyj, A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies. *Biomedical Robotics and Biomechatronics 2014 5th IEEE RAS EMBS International Conference on*, 819 – 825, IEEE, 2014.
- [19] V. Duchaine, S. Bouchard, C. M. Gosselin. Computationally efficient predictive robot control. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, 12(5): 570–578, 2007.
- [20] M. M. Ebrahimi, F. Piltan, M. Bazregar, A. Nabae. Intelligent Robust Fuzzy-Parallel Optimization Control of a Continuum Robot Manipulator. *International Journal of Control and Automation*, 6(3): 15–34, 2013.
- [21] M. Ertugrul, O. Kaynak. Neuro sliding mode control of robotic manipulators. *Mechatronics*, 10(1): 239–263, 2000.
- [22] J. Guldner, V. I. Utkin. The chattering problem in sliding mode system. *14th Int. Symp. Math. Theory Netw. Syst. (MTNS), Perpignan, France*, 2000.

- [23] M. Honegger, R. Brega, G. Schweitzer. Application of a nonlinear adaptive controller to a 6 dof parallel manipulator. *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA'00. IEEE International Conference on*, 1930–1935, IEEE, 2000.
- [24] H. Hu, P-Y. Woo. Fuzzy supervisory sliding-mode and neural-network control for robotic manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 53(3): 929–940, 2006.
- [25] E. Jarzebowska. Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(12):118 – 131, 2009.
- [26] P. C. Kaminski. *Mecânica geral para engenheiros*. Edgard Blücher, 2000.
- [27] W. Khalil, E. Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Taylor & Francis, 2002.
- [28] V. D. Kumazawa, T. A. Hess Coelho, D. Rinaudi, G. Carbone, M. Ceccarelli. Kinematic analysis and operation feasibility of a 3-dof asymmetric parallel mechanism. In *20th COBEM, Gramado, Brazil, Paper No. COB09-0744*, 2009.
- [29] Y. Li, Q. Xu. Dynamic modeling and robust control of a 3-PRC translational parallel kinematic machine *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25(3): 630–640, 2009.
- [30] Q. Li, F. X. Wu. Control performance improvement of a parallel robot via the design for control approach *Mechatronics*, 14(8): 947–964, 2004.
- [31] O. Linda, M. Manic. Uncertainty-robust design of interval type-2 fuzzy logic controller for delta parallel robot *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, 7(4): 661–670, 2011.
- [32] H. Lipkin. A note on denavit-hartenberg notation in robotics *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 921–926, American Society of Mechanical Engineers, 2005.
- [33] J-P. Merlet. Still a long way to go on the road for parallel mechanisms In *ASME DETC Conference, Montreal, 2002*, 2002.
- [34] R. M. M. Orsino, A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. Dynamic Modelling and Control of Balanced Parallel Mechanisms. *Dynamic Balancing of Mechanisms and Synthesizing of Parallel Robots*, 403–445, Springer International Publishing, 2016.

- [35] R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho. A contribution for developing more efficient dynamic modelling algorithms of parallel robots. *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 1(1): 15 – 34, 2013.
- [36] R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho. A contribution on the modular modelling of multibody systems *Proc. Royal Society A*, 471(2183), The Royal Society, 2015.
- [37] R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho, C. P. Pesce. Analytical mechanics approaches in the dynamic modelling of Delta mechanism *Robotica*, 33(4): 953–973, 2015.
- [38] P. J. Prince, J. R. Dormand. High order embedded Runge-Kutta formulae *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 7(1): 67–75, 1981.
- [39] N. Sadati, R. Ghadami. Adaptive multi-model sliding mode control of robotic manipulators using soft computing *Neurocomputing*, 71(13): 2702–2710, 2008.
- [40] W. Shang, S. Cong Nonlinear computed torque control for a high-speed planar parallel manipulator *Mechatronics*, 19(6): 987–992, 2009.
- [41] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo. *Robotics: modelling, planning and control*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [42] J-J. E. Slotine, W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- [43] J-J. E. Slotine. The robust control of robot manipulators *The International Journal of Robotics Research*, 4(2): 49–64, 1985.
- [44] J-J. E. Slotine, W. Li. On the adaptive control of robot manipulators *The International Journal of Robotics Research*, 6(3): 49–59, 1987.
- [45] M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar. *Robot modeling and control*. Wiley New York, 2006.
- [46] R. A. Tenenbaum. *Fundamentals of Applied Dynamics*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [47] L. W. Tsai. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, 1999.
- [48] V. Utkin, J. Guldner, J. Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. Vol. 34. CRC press, 2009.
- [49] V. Utkin, H. Lee Chattering problem in sliding mode control systems *International Workshop on Variable Structure Systems*, 2006. VSS’06, 346–350, 2006.

- [50] A. Vivas, P. Poignet. Predictive functional control of a parallel robot *Control Engineering Practice*, 13(7): 863–874, 2005.
- [51] J. Wang, J. Wu, L. Wang, Z. You. Dynamic feed-forward control of a parallel kinematic machine *Mechatronics*, 19(3): 313–324, 2009.
- [52] P-L. Yen, C-C. Lai. Dynamic modeling and control of a 3-DOF Cartesian parallel manipulator *Mechatronics*, 19(3): 390–398, 2009.
- [53] M. Zeinali, L. Notash. Adaptive sliding mode control with uncertainty estimator for robot manipulators *Mechanism and Machine Theory*, 45(1): 80–90, 2010.
- [54] A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto, E. Portillo. Extended CTC control for parallel robots *Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA), 2010 IEEE Conference on*, 1–8, IEEE, 2010.
- [55] A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto. Control of parallel robots using passive sensor data *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2398–2403, IEEE, 2008.
- [56] A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto. A redundant dynamic model of parallel robots for model-based control *Robotica*, 31(2): 203–216, 2013.
- [57] A. Zubizarreta, M. Marcos, I. Cabanes, C. Pinto, E. Portillo. Redundant sensor based control of the 3RRR parallel robot *Mechanism and machine theory*, 54(1): 1–17, 2012.