ANDRÉ GARNIER COUTINHO

SIMULAÇÃO DINÂMICA E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE TÉCNICAS DE CONTROLE PARA MANIPULADORES PARALELOS

São Paulo
2019

ANDRÉ GARNIER COUTINHO

SIMULAÇÃO DINÂMICA E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE TÉCNICAS DE CONTROLE PARA MANIPULADORES PARALELOS

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

São Paulo
2019

ANDRÉ GARNIER COUTINHO

SIMULAÇÃO DINÂMICA E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE TÉCNICAS DE CONTROLE PARA MANIPULADORES PARALELOS

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração:

Engenharia Mecânica de Projeto e Fabricação

Orientador:

Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho

São Paulo
2019

Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Profª. Dra. Maira Martins da Silva

Prof. Dr. Bruno Augusto Angélico

Prof. Dr. Diego Colón

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que sempre me apoiaram e ajudaram a perseguir o meu sonho de me tornar Doutor em Engenharia Mecânica pela Escola Politécnia da USP. Não tenho palavras para descrever o que significa para mim poder estar contribuindo ativamente na exploração das fronteiras do conhecimento.

Dentre as várias pessoas que sempre estiveram ao lado nesta jornada, gostaria de destacar o meu orientador e amigo Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho, o qual sempre esteve ao meu lado desde o início da jornada no meio acadêmico, sempre sendo super solícito, me apoiando, e me orientando da melhor maneira possível; meu grande amigo Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino, o qual me introduziu e ensinou o que há de mais sofisticado e eficiente na parte de modelagem de sistemas multicorpos, um conhecimento fundamental para o desenvolvimento desta tese, também sempre sendo extremamente solícito e me ajudando sempre que podia; aos grandes amigos Engª. Juliana Martins de Oliveira Fuess e Eng. Victor Pacheco Bartholomeu, os quais participaram ativamente e possibilitaram o desenvolvimento do protótipo de manipulador paralelo que possibilitou adicionar um caráter experimental na tese desenvolvida; à minha namorada Adriana Marques Cavalcanti, a qual está há mais de 12 anos ao meu lado, sempre me apoiando em todos os momentos e me inspirando a ser cada vez mais uma pessoa melhor; e aos meus pais Antonio Valdec Martins Coutinho e Taïs Borges Garnier, e avó Maria Luiza Borges Garnier, os quais estão sempre se preocuparam muito comigo, sempre me apoiando e ajudando de todas as maneiras.

Por último, mas não menos importante, além dessas pessoas incríveis que tive a oportunidade de conhecer em minha vida, gostaria de destacar meu agradecimento a outras três pessoas maravilhosas que conheci há pouco tempo, que mudaram minha vida, e que tornaram possível a conclusão desta tese de doutorado: minha psicóloga Dra. Ana Maria Canzonieri, minha psiquiatra Dra. Letícia Pacheco Lessa, e minha professora de yoga Alessandra Dotto.

Muito obrigado a todos, sem vocês nada disso seria possível.

" 'Nesta direção', disse o Gato, girando a pata direita, 'mora um Chapeleiro. E nesta direção', apontando com a pata esquerda, 'mora uma Lebre de Março. Visite quem você quiser, são ambos loucos.'
'Mas eu não ando com loucos', observou Alice.
'Oh, você não tem como evitar', disse o Gato, 'somos todos loucos por aqui. Eu sou louco. Você é louca'.
'Como é que você sabe que eu sou louca?', disse Alice.
'Você deve ser', disse o Gato, 'Senão não teria vindo para cá.' "

-- Lewis Carroll

RESUMO

Para realizar o projeto de um sistema de controle, em geral, é necessário primeiramente de um modelo da planta a ser controlada. O grau de fidelidade do modelo da planta, dentro das condições de operação desejadas do sistema, influi diretamente no desempenho do sistema em malha fechada que o projeto do controlador pode oferecer. Quanto mais rico for o modelo, mais fácil de atingir requisitos de desempenho mais elevados (menor tempo de resposta e menor sobressinal, por exemplo) garantindo a estabilidade do sistema.

Utilizando os métodos tradicionais de modelagem de Sistemas Mecânicos Multicorpos, é difícil e trabalhoso de se obter modelos de sistemas complexos, como mecanismos paralelos. Para contornar esse problema, é comum desprezar alguns efeitos de acoplamentos inerciais, simplificando o processo de modelagem. Porém, essa estratégia gera modelos mais pobres, o que irá limitar o desempenho que o sistema poderá atingir quando for feito o projeto do sistema de controle.

A solução proposta para ser possível aumentar o desempenho, garantindo a robustez, de um sistema de controle de mecanismos paralelos é a utilização dos novos métodos e estratégias de modelagem dinâmica desenvolvidos pelo grupo de pesquisa do Prof. Doutor Tarcisio Antonio Hess Coelho, os quais são adequados para incluir todos os efeitos da dinâmica de corpos rígidos, independentemente da complexidade do sistema.

A presente tese visa desenvolver um algoritmo de modelagem que inclua todos os efeitos da dinâmica de corpos rígidos para realizar a modelagem dinâmica de mecanismos paralelos (baseado na metodologia Orsino), desenvolver uma metodologias de projeto de controle robusto para mecanismos paralelos tradicionais e mecanismos com atuação redundante, e realizar simulações e validações experimentais das leis de controle sintetizadas pela metodologia proposta.

Palavras-Chave – Mecanismos paralelos, Robótica, Modelagem Dinâmica , Controle, Controle não linear.

ABSTRACT

Abstract...

Keywords – Word, Word, Word, Word, Word.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

PARTE I

INTRODUÇÃO

1 INTRODUÇÃO

"Frase espirituosa de um autor famoso"

-- Autor famoso

Os mecanismos de arquitetura paralela são amplamente utilizados em simuladores de voo, simuladores automobilisticos, e tarefas de *pick-and-place*. Além disso, também são empregados em sistemas de posicionamento, sistemas de medição, máquinas de usinagem, entre outras tarefas.

Há uma série de vantagens em utilizar mecanismos paralelos no lugar dos tradicionais seriais. Dentre elas podemos citar sua grande capacidade de carga, alta precisão de posicionamento, alta rigidez estrutural, e uma redução significativa na inércia [?, ?, ?, ?]. Outra característica marcante desse tipo de arquitetura são as altas velocidades e acelerações atingidas, as quais superam muito os valores máximos atingidos utilizando arquitetura serial. Grande parte dessas vantagens se devem à possibilidade de instalação de todos os motores na base imóvel do mecanismo. Como desvantagens podemos citar o menor espaço de trabalho e modelo dinâmico muito mais complexo e de difícil obtenção [?, ?].

Figura 1: Robô industrial Adept Quattro

Levando-se em conta esta dificuldade de obtenção e a complexidade inerente do modelo dinâmico, o controle de mecanismos de arquitetura paralela é uma tarefa desafiadora. A utilização de modelos dinâmicos simplificados limita o desempenho do projeto de controladores baseados no modelo. Porém, mesmo na hipótese do modelo dinâmico completo estar disponível, o emprego de técnicas de controle não linear pode acarretar um custo computacional muito elevado [?, ?, ?]. Este paradigma, aliado à falta de estratégias de controle apropriadas para esse tipo de mecanismos, resulta na exploração insatisfatória dos potenciais promissores de tais máquinas, como resposta dinâmica rápida e alta precisão [?]. Além disso, observa-se na literatura a escassez de trabalhos publicados com comprovação experimental de técnicas de controle aplicáveis a mecanismos paralelos [?].

Uma alternativa para a superação desta dificuldade seria a combinação de técnicas de controle não linear robusto (por exemplo, controle por modos deslizantes [?, ?]) com modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos, desenvolvidos a partir de novas metodologias de modelagem de sistemas multicorpos [?, ?, ?, ?]. Com esta estratégia, torna-se possível sintetizar leis de controle de alto desempenho e custo computacional mais adequado, viabilizando a exploração do potencial promissor dos mecanismos paralelos.

1.1 Objetivos

Os principais objetivos da tese são:

- Desenvolvimento de um algoritmo gerador de modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos, de forma implícita. Será utilizada uma metodologia baseada no método Orsino de acoplamento de subsistemas multicorpos [?].
- Elaboração de metodologias de projeto de controlador não linear robusto, de alto desempenho, aplicável a mecanismos de arquitetura paralela. Para tanto, serão consideradas as incertezas paramétricas e a possibilidade de atuação redundante [?], além de estratégias para a síntese de leis de controle com custo computacional consideralvemente menor do que as tradicionais, que empregam o Controle por Torque Computado [?, ?].
- Realizar a modelagem cinemática e dinâmica dos mecanismos 5R [?] e 2$\underline{\text{R}}$SU+$\underline{\text{P}}$PaP [?, ?], utilizando o algoritmo de modelagem desenvolvido.
- Realizar o projeto de um controlador de trajetória para os mecanismos escolhidos, utilizando a metodologia de projeto de controle proposta.
- Realizar simulações dinâmicas utilizando as leis de controle sintetizadas.
- Realizar a validação experimental dos controladores projetados no protótipo dos mecanismos 5R, o qual se encontra no laboratório de mecanismos da EPUSP.

É importante ressaltar que os 5 primeiros objetivos citados já foram parcialmente alcançados e que a arquitetura paralela 2$\underline{\text{R}}$SU+$\underline{\text{P}}$PaP foi desenvolvida pelo grupo de pesquisa do Prof. Dr. Tarcio Antonio Hess Coelho, havendo ainda poucos estudos na literatura sobre ela.

1.2 Sobre a organização do texto

O capítulo 2 apresenta a revisão da Literatura sobre o assunto, sendo que a metodologia da pesquisa é descrita no capítulo 3. A seguir, os capítulos 4 e 5 abordam a modelagem dinâmica de manipuladores seriais e paralelos, respectivamente. Com relação ao projeto dos controlado- res, este assunto é elaborado no capítulo 6. No capítulo 7 são apresentados os resultados mais relevantes desta Tese, além da pertinente discussão. Por fim, no capítulo 8, apresentam-se as principais conclusões da Tese e os temas sugeridos para pesquisa futura.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Considerando o tema de pesquisa desta Tese, esta revisão se concentrará em tópicos relacionados à modelagem dinâmica, ao controle e à utilização de bancada de ensaios para validação experimental.

2.1 Modelagem dinâmica

Não tratar de formalismos clássicos da Mecânica (NE,L,GA etc), apenas citar referências q os descrevam de modo geral (livros, tese Orsino) e de modo específico quando aplicados a manipuladores paralelos (artigos). A seguir, serão tratadas as questões ligadas à topologia dos manipuladores, à geração do modelo, bem como as análises para a sua resolução.

Começar refletindo acerca dos manipuladores seriais. Sua estrutura mecânica corresponde a um mecanismo de cadeia aberta, com juntas ativas de um gdL (apenas R ou P), o número de coordenadas generalizadas coincide com a mobilidade do mecanismo. Tais características topológicas e cinemáticas podem ser exploradas para facilitar a geração dos modelos cinemáticos e dinâmicos.

De fato, o modelo cinemático pode ser obtido, recursivamente ao longo da cadeia cinemática, pelo emprego de métodos vetoriais ou matriciais, partindo-se da base e se dirigindo ao efetuador. Tradicionalmente, empregam-se os vetores $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{x}$ para descrever as coordenadas associadas aos atuadores e ao efetuador, respectivamente. Enquanto que o problema direto é de resolução relativamente simples, o problema inverso demanda a realização de um processo mais elaborado. Matematicamente, este corresponde à resolução de um sistema não-linear de equações algébricas. Para algumas topologias que utilizem mecanismos esféricos nos punhos, é possível alcançar o desacoplamento das equações de posição e orientação do efetuador.

Com relação à dinâmica, a geração das equações também pode ser realizada de modo recursivo, partindo-se do efetuador e se dirigindo à base, sendo que a solução do problema inverso é obtida mediante a resolução de um sistema linear de equações algébricas. Por outro lado, a solução do problema dinâmico direto é alcançada pela integração de um sistema de equações diferenciais ordinárias (ODEs).

Neste momento, tratar do manipulador paralelo, sua topologia em comparação com os seriais. Dependendo da complexidade da estrutura, podem existir juntas de 1, 2 ou até 3 gdL, ativas ou passivas. Além disso, o número de elos é muito superior. Ao se elaborar o modelo cinemático, é possível notar que haverá um grande número de variáveis, dentre as quais algumas serão independentes e outras, dependentes.

No início do processo de modelagem, é comum se realizar um corte nas juntas que conectam o efetuador às cadeias cinemáticas. Deste modo, ocorrerá a decomposição do mecanismo original de cadeia fechada no elo do efetuador e nas demais cadeias. Assim, admite-se que estas cadeias possam ser tratadas como abertas. Consequentemente, as equações cinemáticas, geradas em cada cadeia, expressarão o acoplamento entre as variáveis dependentes e independentes do mecanismo. Além disso, para os manipuladores paralelos, a literatura destaca que o problema inverso da cinemática de posição é menos complexo que o direto.

Saha e Schielen [?] mencionam que a dinâmica inversa, uma vez definida a trajetória do efetuador, determina os esforços dos atuadores necessários para o controle, enquanto que a direta é utilizada em simulações do manipulador com o controlador.

Com relação à dinâmica, Pekal e Fraczek [?] esclarecem que a solução do problema direto pode ser obtida mediante a resolução de um sistema de equações diferenciais e algébricas (DAEs), representado pelas Eq.(2.1, 2.2)

$$\mathbb{M}\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\Lambda} = \mathbb{Q} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

Uma alternativa é resolver o sistema representado pela Eq.(2.3),

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{M} & \boldsymbol{\Phi}_q^T \\ \boldsymbol{\Phi}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Y}} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Q} \\ \boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

sendo $\boldsymbol{\Gamma} = -(\boldsymbol{\Phi}_q\,\dot{\boldsymbol{q}})_q\dot{\boldsymbol{q}} - 2\boldsymbol{\Phi}_{qt}\,\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\Phi}_{tt}$.

Para melhorar a precisão associada às restrições de posição e velocidade, recomenda-se substituir $\boldsymbol{\Gamma}$ por $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}$, expresso na Eq.(2.4), que é conhecido como método de Baumgarte para a estabilização das restrições [?], sendo $\hat{\alpha} = \hat{\beta} \in < 1, 10 >$.

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{\Gamma} - 2\hat{\alpha}\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \hat{\beta}^2\boldsymbol{\Phi} \tag{2.4}$$

Um outro modo de aprimorar a precisão é alcançado pela separação das coordenadas $\boldsymbol{q}$ em dois grupos: independentes $\boldsymbol{v}$ e dependentes $\boldsymbol{u}$. Assim, multiplica-se a Eq.(2.1) pelo complemento ortogonal [?] de $\boldsymbol{\Phi}_q^T$. Pekal e Fraczek [?] discutem várias alternativas de obtenção do complemento ortogonal, dentre elas, destacam-se a decomposição QR, a decomposição em matrizes de autovalores e autovetores e a decomposição em valores singulares (SVD). Com esta ação, eliminam-se os multiplicadores de Lagrange e o número de equações se reduz à mobilidade do mecanismo. Em seguida, substituem-se as acelerações $\ddot{\boldsymbol{q}}$ por $\ddot{\boldsymbol{v}}$. Por consequência, somente as acelerações e velocidades independentes serão integradas no sistema de equações diferenciais. Além disso, em cada passo de integração, as variáveis dependentes $\boldsymbol{u}$ e $\dot{\boldsymbol{u}}$ serão calculadas a partir das independentes, estabilizando as restrições de posição e velocidade.

Quando a matriz dos coeficientes $\boldsymbol{Y}$, expressa na Eq.(2.1), for singular, os métodos numéricos normalmente empregados, como decomposição LU ou QR, não serão capazes de resolver o sistema de equações. Neste caso, costuma-se empregar $\boldsymbol{Y}^+$, ou seja, a matriz inversa de Moore-Penrose. Outras formulações, como as de Udwadia-Kalaba, Udwadia-Phohomsiri e baseadas no método dos mínimos quadrados, também foram propostas para tratar as situações em que $\boldsymbol{Y}$ é singular.

Segundo Mariti et al. (2011) [?], expressar o modelo dinâmico por meio de coordenadas redundantes, independentemente do formalismo escolhido, possui como propósito a realização de simulações de sistemas multicorpos, sendo que um exemplo é o software comercial MSC-Adams. No entanto, se a finalidade for o controle de manipuladores, significando que o modelo é parte integrante de implementações que demandem cálculos em tempo real, a expresssão das equações dinâmicas nas coordenadas independentes é necessária.

Além disso, é largamente difundido que a escolha das variáveis cinemáticas independentes recaia sobre as componentes do vetor $\boldsymbol{q}$, associadas aos deslocamentos impostos pelos atuadores, e suas derivadas temporais. No entanto, alguns autores [?, ?] mencionam as vantagens de se escolher as componentes do vetor $\boldsymbol{x}$, afirmando que a expressão do modelo dinâmico nestas variáveis é menos complexa.

2.2 Controle

Existem diversas técnicas propostas pela literatura para realizar o controle de mecanismos paralelos. Dentre elas, podemos destacar:

- Controle PID
- Controle por Torque Computado (CTC)
- Controle por Torque Computado com pré-alimentação (CTCp)
- Controle por Torque Computado Estendido (CTCe)
- Controle Preditivo Baseado em Modelo (CPM)
- Controle Adaptativo
- Controle por Modos Deslizantes (CMD)

A técnica mais simples consiste na utilização de malhas do tipo PID, controlando cada junta ativa de maneira independente, considerando a dinâmica do mecanismo como distúrbios de controle. Essa técnica é caracterizada por sua facilidade de projeto e implementação, tanto em hardware quanto em software, além de exibir um desempenho satisfatório para movimento lento. Porém, essa técnica não se mostra adequada para a realização de trajetórias em altas velocidades e/ou acelerações [?, ?].

Uma das técnicas de controle mais exploradas na literatura é o Controle por Torque Computado (CTC). Basicamente, é uma técnica de controle não linear, mais conhecida como linearização pela realimentação, aplicada a sistemas mecânicos. A técnica consiste na utilização de duas malhas de controle, uma malha que realiza o desacoplamento do sistema e a compensação das não linearidades, e outra malha composta por PIDs independentes [?]. Como resultado, alcança-se um desempenho superior àquele obtido utilizando simples PIDs, permitindo inclusive a realização de trajetórias precisas em altas velocidades e/ou acelerações. No entanto, seu desempenho poderá ser limitado pela qualidade/fidelidade do modelo dinâmico utilizado para a compensação das não linearidades [?]. Sua implementação também é mais complexa, visto que é necessário calcular o modelo dinâmico inverso em tempo real, o que também aumenta consideravelmente seu custo computacional. Além disso, a técnica é sensível a incertezas estruturadas (paramétricas) e não estruturadas (dinâmicas não modeladas). Como exemplos de utilização do CTC,

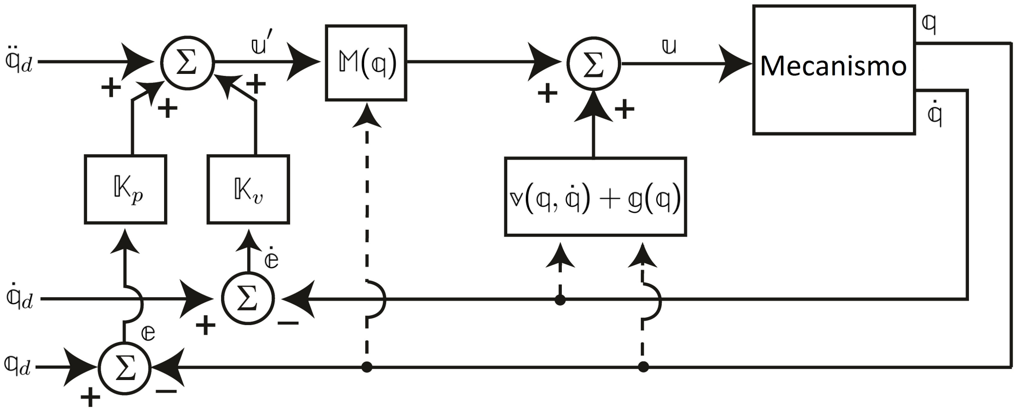

Figura 2: Malha de CTC (Adaptado de [?])

podem ser citados os trabalhos de Cheng at al. [?], Li e Wu [?], Li e Fu [?], Shang at al. [?] e Yen at al. [?].

Visando a redução do custo computacional associado ao cálculo do modelo dinâmico em tempo real, alguns autores propõe a utilização do CTC com pré-alimentação (CTCp) [?, ?, ?]. Essa técnica é similar ao CTC, com a diferença de que a compensação das não linearidades é feita por pré-alimentação e não mais por realimentação. Consequentemente, realiza-se o cálculo do modelo dinâmico previamente, diminuindo o custo computacional.

De fato, Codourey [?] obteve uma redução de 600% no erro de posição utilizando o CTCp em um ensaio experimental com o robô DELTA, ao substituir os PDs originais. Na simulação do controle de um mecanismo 6-UPS, Wang et al. [?] utilizaram em cascata controladores lineares de posição, velocidade e corrente em cada junta ativa, além de uma compensação dinâmica por pré-alimentação dos distúrbios de torque.

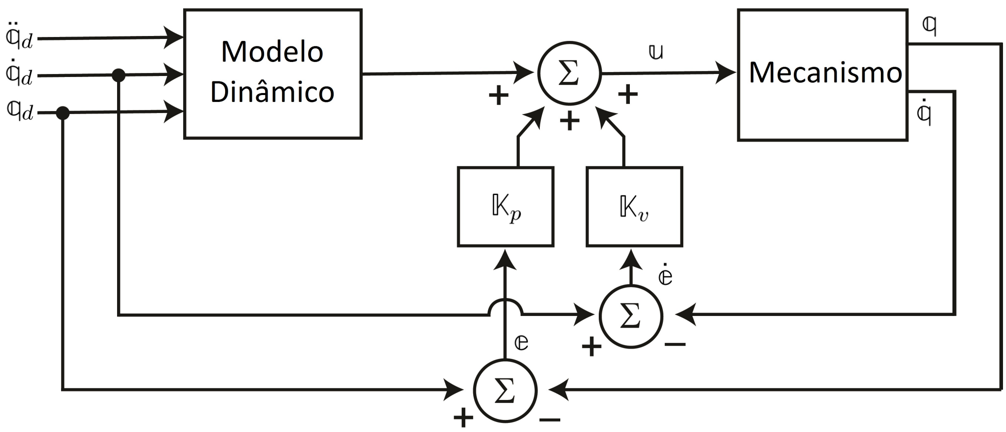

Figura 3: Malha de CTCp (Adaptado de [?])

Com o intuito de melhorar a robustez do CTC associada a incertezas paramétricas, Zubizarreta et al. [?, ?, ?, ?] propuseram o Controle por Torque Computado Estendido

(CTCe), que utiliza informação redundante obtida pelo sensoriamento de juntas passivas. Em [?], os controladores propostos demonstraram maior robustez, principalmente em relação a parâmetros cinemáticos, durante as simulações realizadas com o mecanismo 3-RRR.

Outra técnica alternativa, aplicada a mecanismos paralelos, é o controle preditivo baseado em modelo (CPM). Para a sua implementação, o CPM necessita minimizar uma função objetivo, dependente das saidas e do esforço de controle, ambos calculados em tempo futuro [?]. Assim, dependendo do modelo utilizado, o processo de otimização pode agregar um custo computacional que inviabilize o controle, comprometendo a motivação inicial de aprimorar o desempenho do sistema. Como exemplos de utilização do CPM, podem ser citados os trabalhos de Vivas et al. [?] e Duchaine et al. [?].

Com o propósito de controlar o mecanismo H4, Vivas et al. [?] utilizaram uma malha de CPM linear e outra malha para compensação das não linearidades. Após a comparação do desempenho do controlador proposto com o CTC, os autores observaram maior robustez do CPM a incertezas paramétricas.

Duchaine et al. [?], por sua vez, propuseram um controlador preditivo baseado no modelo não linear de um mecanismo paralelo de 6 graus de liberdade. Visando a obtenção de uma solução analítica para o problema de otimização, foram adotadas diversas hipóteses simplificadoras no modelo dinâmico do mecanismo. Com o intuito de comparar o controlador proposto com um PID, foram feitos alguns experimentos, onde se observou que o CPM apresentou erro nulo de posição no final da trajetória, enquanto que o PID demorou um tempo considerável para alcançar erro nulo. Foi verificada a equivalência entre o custo computacional dos 2 controladores.

O controle adaptativo, também encontrado na literatura, caracteriza-se pela utilização de leis de adaptação para realizar a estimação em tempo real de parâmetros do sistema ou de termos de compensação dinâmica. Sendo assim, as técnicas de controle adaptativo possibilitam que o sistema se torne praticamente insensível a incertezas paramétricas. Para o caso em que se realiza a estimação em tempo real dos parâmetros do sistema, pode-se dizer que o custo computacional é superior ao do CTC, visto que é necessário integrar as leis de adaptação em tempo real. Além disso, é necessário obter o modelo dinâmico linear em relação aos parâmetros do sistema [?], o que pode ser uma tarefa difícil, inviabilizando, em alguns casos, a aplicação da técnica. Em [?] é proposto um algoritmo de obtenção do modelo dinâmico simplificado de mecanismos paralelos nesse formato.

Em [?] é proposta uma lei de controle que combina o controle adaptativo com a técnica de controle robusto conhecida por Controle por Modos Deslizantes. Chemori et al. [?] utilizaram essa técnica com o intuito de diminuir os erros de posição em regime permanente no controle de um mecanismo paralelo do tipo PAR2. Por outro lado, Honegger at al. [?] empregaram o controle adaptativo com estimação em tempo real dos parâmetros do sistemas, realizando a compensação dinâmica por pré-alimentação, em um mecanismo paralelo do tipo Hexaglide.

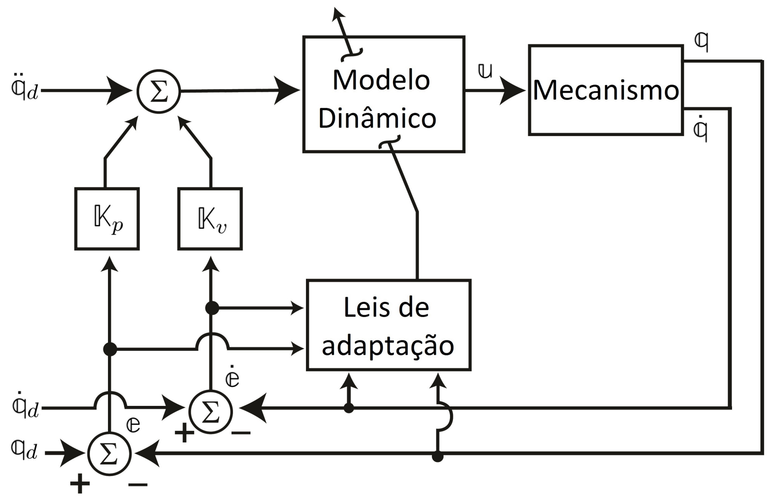

Figura 4: Malha de controle adaptativo (Adaptado de [?])

Outra técnica promissora para aplicação em mecanismos paralelos é o Controle por Modos Deslizantes (CMD). A técnica consiste no projeto de leis de controle que levem o sistema para superfícies de escorregamento no espaço de fase, de modo que assim que o sistema atinje e é mantido nas superfícies de escorregamento, o erro de controle decai exponencialmente para zero [?]. Para garantir que o sistema atinja em tempo finito e se mantenha nas superfícies de escorregamento, são utilizados termos descontínuos na lei de controle, o que pode causar problemas de oscilações bruscas em alta frequência nos esforços de controle (*chattering*). Em [?] e [?] são propostas técnicas para evitar esse tipo de problema. A grande vantagem da utilização deste tipo de lei de controle é sua grande robustez a incertezas estruturadas e não estruturadas, sendo possível realizar o projeto do controlador de modo a suprimir um dado nível de incertezas paramétricas. Em [?] é proposta uma metodologia de projeto de Controle por Modos Deslizantes para manipuladores robóticos seriais.

Na literatura são encontradas diversos artigos utilizando a técnica de CMD aliada à lógica *fuzzy* e/ou redes neurais para o controle de manipuladores robóticos [?, ?, ?, ?]. Begon et al. [?] propuseram uma lei de controle baseada na teoria de CMD e na utilização de lógica *fuzzy* para controlar de maneira independente os atuadores de um mecanismo paralelo do tipo Hexa. A técnica proposta teve o intuito de obter a robustez característica do CDM sem necessitar de uma lei de controle com termos descontínuos, evitando o *chattering*.

Em [?], Zeinali et al. desenvolveram uma lei de controle baseada nas teorias de CMD e controle adaptativo. O controlador desenvolvido realiza a compensação dinâmica em tempo real do erro de modelagem através de uma lei de adaptação. Além disso, substitui o termo descontínuo da lei de controle por um termo do tipo PID, com o intuito de evitar o *chattering*. A estabilidade e robustez da lei de controle proposta foram provadas utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov [?]. A robustez da lei de controle foi verificada através de simulações do controlador proposto aplicado a um mecanismo serial do tipo RR, nas quais o controlador conseguiu manter erros de posição muito pequenos em regime permanente, mesmo sendo baseado em um modelo muito pobre e na presença de distúrbios de torque. A técnica apresentada se mostra promissora, porém, como no artigo foi feita apenas a simulação da lei de controle em um mecanismo serial bidimensional, ainda não se pode afirmar nada sobre seu desempenho em mecanismos paralelos tridimensionais.

2.3 Bancada de ensaios

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Fundamentalmente, a metodologia desta pesquisa compreende a execução de seis fases, abrangendo desde o desenvolvimento de algoritmos para as modelagens cinemática e dinâmica ao projeto de controladores e sua validação experimental.

3.1 Primeira fase

Desenvolver um algoritmo genérico, capaz de gerar os modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos que operem em espaço plano, esférico ou tridimensional. Esta geração parte da definição da topologia do mecanismo paralelo, suas cadeias cinemáticas, descrevendo a localização relativa de seus elos e juntas.

Dentre os efeitos de modelagem considerados, destacam-se os decorrentes da inércia efetiva e acoplada, das forças de Coriolis e centrífugas, da força gravitacional, bem como dos esforços dos atuadores. Pretende-se que a geração dos modelos seja realizada de forma implícita. Para tanto, será empregado o método Recursivo Modular de Modelagem (RMM) proposto por Orsino [36] que, por meio da definição de níveis hierárquicos da estrutura de um sistema mecânico e a descrição da dependência das variáveis cinemáticas envolvidas, permite o acoplamento de subsistemas multicorpos.

3.2 Segunda fase

Efetuar as modelagens cinemática e dinâmica do mecanismo articulado plano 5R [34], utilizando o algoritmo desenvolvido na fase anterior.

3.3 Terceira fase

Nesta fase, diferentes técnicas de controle serão avaliadas sob a perspectiva de sua utilização em manipuladores paralelos. Assim, em princípio, esta pesquisa foca na síntese de um controlador não-linear robusto e de alto desempenho. Para tanto, serão consideradas as incertezas paramétricas e a possibilidade de atuação redundante [11], além de estratégias para a determinação de leis de controle com custo computacional consideralvemente menor do que as tradicionais, que empreguem o Controle por Torque Computado [15, 55].

3.4 Quarta fase

Avaliar o emprego de diferentes técnicas de controle de trajetória aplicadas especificamente para o manipulador 5R, empregando a metodologia da terceira fase.

3.5 Quinta fase

Realizar diversas simulações que permitam observar a consistência dos resultados, no tocante às análises cinemáticas direta e inversa, bem como das análises dinâmicas direta e inversa. Além disso, serão determinadas as respostas dinâmicas do manipulador sujeito às distintas leis de controle sintetizadas.

3.6 Sexta fase

De modo a avaliar o desempenho previsto pelo uso de diferentes controladores para o manipulador paralelo 5R, será realizada a validação experimental em uma das bancadas de ensaio do LaMMaR. Para tanto, serão escolhidas duas trajetórias: uma que considere o comportamento em regime permanente e outra em regime transitório.

Neste sentido, almeja-se observar se haverá alguma diferença de desempenho se o controle for executado no espaço das juntas ou no da tarefa. Além disso, pretende-se considerar os efeitos da implementação de técnicas de controle puras ou combinadas. Para auxiliar na comparação entre as técnicas de controle, serão definidas duas métricas: uma que considere o erro de posicionamento do efetuador e outra a magnitude dos torques dos atuadores.

3.7 O que tinha antes

O estágio atual de desenvolvimento do presente projeto ocorre basicamente em três áreas: aplicação do algoritmo de modelagem e simulação para os mecanismos 5R [?] e 2$\underline{\text{R}}$SU + $\underline{\text{P}}$PaP [?], o projeto e simulação de controladores não lineares robustos de alto desempenho baseado no modelo dinâmico para os mecanismos citados, e a validação experimental das leis de controle sintetizadas.

Os trabalhos no âmbito de modelagem e simulação estão sendo desenvolvidos a partir da aplicação do algoritmo de modelagem cinemática e dinâmica de mecanismos paralelos desenvolvido, baseado na utilização dos parâmetros de Denavit-Hartenberg [?, ?, ?] e no método Orsino de acoplamento de subsistemas [?]. Toda modelagem será feita em C++, utilizando uma biblioteca otimizada de cálculo matricial (Armadillo). As simulações da dinâmica direta do mecanismo serão feitas utilizando o método Runge-Kutta de 8ª ordem [?] para solução de sistemas de EDOs, de modo a garantir estabilidade numérica do método, mesmo utilizando leis de controle quase descontínuas.

Os trabalhos na área de projeto de controle serão feitos utilizando a metodologia desenvolvida de projeto de controladores robustos multivariáveis para mecanismos paralelos, baseada no modelo dinâmico do mecanismo a ser controlado e na técnica de controle por modos deslizantes [?, ?].

Os trabalhos no âmbito da validação experimental das leis de controle sintetizadas serão realizados no protótipo do mecanismo 5R que encontra-se no laboratório de mecanismos. A bancada experimental do mecanismo 5R já está funcional e já forem realizados alguns testes de leis de controle de trajetória baseadas no modelo dinâmico do mecanismo. Para a realização da validação experimental nesta bancada, será realizada a identificação dos parâmetros do sistema e suas respectivas incertezas, projeto do controlador baseado nos parâmetros e incertezas identificadas, implementação das leis de controle, e aquisição de dados.

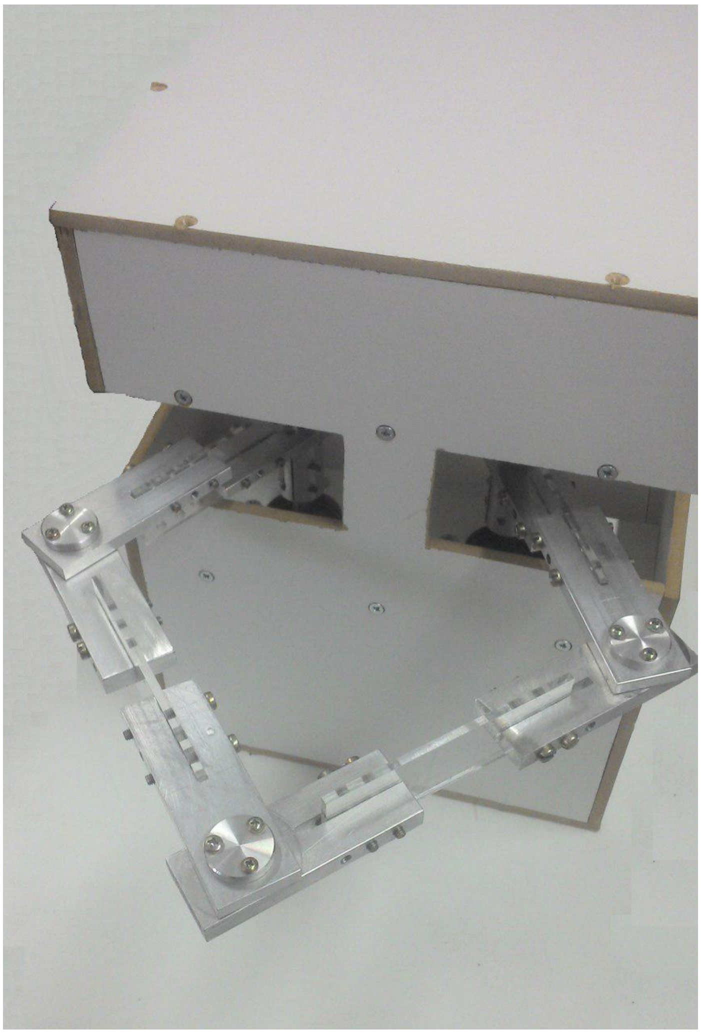

Figura 5: Protótipo do mecanismo 5R

PARTE II

MODELAGEM

4 MODELAGEM DE MANIPULADORES SERIAIS

"Frase espirituosa de um autor famoso"

-- Autor famoso

Este capítulo tem o intuito de apresentar um algoritmo genérico para a obtenção do modelo cinemático e dinâmico de mecanismos seriais. O algoritmo apresentado é implementável em linguagens de programação comumente usadas atualmente, como C++, Java e Python, sem necessitar de recursos de manipulação simbólica.
Para a obtenção do modelo, são necessários apenas os parametros de Denavit-Hartemberg [?, ?, ?, ?] do mecanismo e as posições dos centros de massa dos ligamentos em relação aos sistemas de coordenadas fixos aos ligamentos.

Seja $\mathscr{B}$ um sistema mecânico serial de ν graus de liberdade. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{B}_0$: referencial inercial.
- $\mathtt{N}$ ou $\mathtt{B}_0$: sistema de coordenadas da base do mecanismo, fixo a $\mathcal{N}$.
- $\mathcal{B}_i$, $i = 1, ..., \nu$: i-ésimo ligamento.
- $\mathtt{B}_i$, $i = 1, ..., \nu$: sistema de coordenadas solidário a $\mathcal{B}_i$.
- $\mathtt{o}_i$, $i = 0, ..., \nu$: origem do sistema $\mathtt{B}_i$.
- $\{\boldsymbol{i}_i, \boldsymbol{j}_i, \boldsymbol{k}_i\}$, $i = 0, ..., \nu$: base ortonormal do sistema $\mathtt{B}_i$.
- $\mathtt{g}_i$, $i = 1, ..., \nu$: centro de massa de $\mathcal{B}_i$.
- $\mathtt{x}$: ponto no espaço fixo ao efetuador.
- m_i: massa da barra $\mathcal{B}_i$.
- $\boldsymbol{I}_{\mathtt{g}_i}$: tensor de inércia da barra $\mathcal{B}_i$ em relação a seu centro de massa.
- $\mathbb{I}_i$: tensor de inércia $\boldsymbol{I}_{\mathtt{g}_i}$ escrito na base $\mathtt{N}$, ou seja, $[\boldsymbol{I}_{\mathtt{g}_i}]_{\mathtt{N|N}}$.

- q_i, $i = 1, ..., \nu$: deslocamento relativo (angular ou linear) da i-ésima junta.
- $\mathbb{q}$: matriz-coluna de ν coordenadas generalizadas independentes. É dada por $\mathbb{q} = \begin{bmatrix} q_1 & ... & q_\nu \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.
- $\boldsymbol{g}$: Vetor aceleração gravitacional.
- $\mathbb{g}$: Vetor aceleração gravitacional escrito na base $\mathtt{N}$, ou seja, $[\boldsymbol{g}]_\mathtt{N}$.
- $\boldsymbol{f}_i$: Vetor força não-reativa resultante aplicada no centro de massa de $\mathcal{B}_i$.
- $\boldsymbol{\tau}_i$: Vetor torque não-reativo resultante aplicado em $\mathcal{B}_i$.
- $\bar{\mathbb{f}}_i$: Matriz-coluna de forças não-reativas generalizadas aplicadas no subsistema $\mathcal{B}_i$. É dada por $\bar{\mathbb{f}}_i = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{f}_i]_\mathtt{N}^\mathsf{T} & [\boldsymbol{\tau}_i]_\mathtt{N}^\mathsf{T} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

4.1 Cinemática

4.1.1 Cinemática de posição

Dados os parâmetros de Denavit-Hartemberg a_i, α_i, d_i e θ_i, com $1 \leq i \leq \nu$, é possível obter as matrizes de transformação homogênea $[\mathbb{1}]^\mathsf{H}_{\mathtt{B}_{i-1}|\mathtt{B}_i}$ a partir da seguinte expressão [?] :

$$[\mathbb{1}]^\mathsf{H}_{\mathtt{B}_{i-1}|\mathtt{B}_i} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}\theta_i & -\mathsf{s}\theta_i\mathsf{c}\alpha_i & \mathsf{s}\theta_i\mathsf{s}\alpha_i & a_i\mathsf{c}\theta_i \\ \mathsf{s}\theta_i & \mathsf{c}\theta_i\mathsf{c}\alpha_i & -\mathsf{c}\theta_i\mathsf{s}\alpha_i & a_i\mathsf{s}\theta_i \\ 0 & \mathsf{s}\alpha_i & \mathsf{c}\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ i = 1, ..., \nu \tag{4.1}$$

Tendo obtido $[\mathbb{1}]^\mathsf{H}_{\mathtt{B}_{i-1}|\mathtt{B}_i}$, é possível obter as transformações homogêneas que relacionam os sistemas solidários aos ligamentos ($\mathtt{B}_i$) ao sistema da base ($\mathtt{N}$) pela seguinte expressão recursiva:

$$[\mathbb{1}]^\mathsf{H}_{\mathtt{N}|\mathtt{B}_i} = \begin{cases} [\mathbb{1}]^\mathsf{H}_{\mathtt{B}_0|\mathtt{B}_1}, \text{se } i = 1 \\ [\mathbb{1}]^\mathsf{H}_{\mathtt{N}|\mathtt{B}_{i-1}} \cdot [\mathbb{1}]^\mathsf{H}_{\mathtt{B}_{i-1}|\mathtt{B}_i}, \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu \tag{4.2}$$

As matrizes $[\mathbf{1}]^{\mathsf{H}}_{\mathtt{N}\,|\,\mathtt{B}_i}$ apresentam o seguinte formato:

$$[\mathbf{1}]^{\mathsf{H}}_{\mathtt{N}\,|\,\mathtt{B}_i} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{i}_i]_{\mathtt{N}} & [\boldsymbol{j}_i]_{\mathtt{N}} & [\boldsymbol{k}_i]_{\mathtt{N}} & [\mathsf{o}_i]_{\mathtt{N}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Sendo assim, tendo obtido $[\mathbf{1}]^{\mathsf{H}}_{\mathtt{N}\,|\,\mathtt{B}_i}$, automaticamente obtemos $[\boldsymbol{i}_i]_{\mathtt{N}}$, $[\boldsymbol{j}_i]_{\mathtt{N}}$, $[\boldsymbol{k}_i]_{\mathtt{N}}$ e $[\mathsf{o}_i]_{\mathtt{N}}$. Note que também obtemos as coordenadas do efetuador no sistema da base, pois

$$[\mathsf{x}]_{\mathtt{N}} = [\mathsf{o}_\nu]_{\mathtt{N}} \tag{4.4}$$

Além disso, como $[\mathsf{g}_i]_{\mathtt{B}_i}$ são dados de entrada do algoritmo, obtemos as coordenadas dos centros de massa dos ligamentos no sistema da base através da seguinte expressão:

$$[\mathsf{g}_i]^{\mathsf{H}}_{\mathtt{N}} = [\mathbf{1}]^{\mathsf{H}}_{\mathtt{N}\,|\,\mathtt{B}_i} \cdot [\mathsf{g}_i]^{\mathsf{H}}_{\mathtt{B}_i} \tag{4.5}$$

4.1.2 Cinemática de velocidades lineares

A velocidade do efetuador pode ser obtida aplicando recursivamente o príncipio da composição de movimentos para velocidades lineres deduzido anteriormente (C.22):

$$\boldsymbol{v}^{\mathcal{B}0}_{\mathsf{x}} = \boldsymbol{v}^{\mathcal{B}0}_{\mathsf{x}\,|\,\mathcal{B}1} + \boldsymbol{v}^{\mathcal{B}1}_{\mathsf{x}} \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathcal{B}1}_{\mathsf{x}} = \boldsymbol{v}^{\mathcal{B}1}_{\mathsf{x}\,|\,\mathcal{B}2} + \boldsymbol{v}^{\mathcal{B}2}_{\mathsf{x}} \tag{4.7}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathcal{B}i-1}_{\mathsf{x}} = \boldsymbol{v}^{\mathcal{B}i-1}_{\mathsf{x}\,|\,\mathcal{B}i} + \boldsymbol{v}^{\mathcal{B}i}_{\mathsf{x}} \tag{4.8}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathcal{B}\nu-1}_{\mathsf{x}} = \boldsymbol{v}^{\mathcal{B}\nu-1}_{\mathsf{x}\,|\,\mathcal{B}\nu} + \boldsymbol{v}^{\mathcal{B}\nu}_{\mathsf{x}} \tag{4.9}$$

Como $\mathtt{x}$ é fixo a $\mathcal{B}_\nu$, temos que:

$$\boldsymbol{v}^{\mathcal{B}\nu}_{\mathsf{x}} = \mathbf{0} \tag{4.10}$$

Sendo assim, a velocidade do efetuador em relação a cada um dos referenciais pode ser obtida recursivamente pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{v}^{\mathcal{B}i-1}_{\mathsf{x}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i = \nu + 1 \\ \boldsymbol{v}^{\mathcal{B}i}_{\mathsf{x}} + \boldsymbol{v}^{\mathcal{B}i-1}_{\mathsf{x}\,|\,\mathcal{B}i}, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \qquad i = \nu + 1, ..., 1 \tag{4.11}$$

Sendo que, a partir da equação (C.13), a velocidade de arrastamento de cada uma das juntas é dada por:

$$\boldsymbol{v}_{\mathtt{x}\,|\,\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \dot{q}_i \boldsymbol{k}_{i-1}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \dot{q}_i \boldsymbol{k}_{i-1} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{i-1}\,|\,\mathtt{x}}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu \tag{4.12}$$

Fazendo as seguintes definições:

$$\mathring{\mathbb{j}}_{v\,i}(\mathbb{q}) = \begin{cases} [\boldsymbol{k}_{i-1}]_{\mathtt{N}}\,, & \text{i-ésima junta prismática} \\ [\boldsymbol{k}_{i-1}]_{\mathtt{N}} \wedge ([\mathtt{x}]_{\mathtt{N}} - [\mathtt{o}_{i-1}]_{\mathtt{N}}), & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu \tag{4.13}$$

$$\mathbb{v}_i = [\boldsymbol{v}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}_i}]_{\mathtt{N}} \tag{4.14}$$

$$\mathbb{v}^{\star} = \mathbb{v}_0 = [\boldsymbol{v}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{N}}]_{\mathtt{N}} \tag{4.15}$$

Temos que:

$$\left[\boldsymbol{v}_{\mathtt{x}\,|\,\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}\right]_{\mathtt{N}} = \mathring{\mathbb{j}}_{v\,i}\dot{q}_i, \;\; i = 1, ..., \nu \tag{4.16}$$

$$\mathbb{v}_{i-1} = \begin{cases} \mathbb{0}, & i = \nu + 1 \\ \mathbb{v}_i + \mathring{\mathbb{j}}_{v\,i}\dot{q}_i, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, ..., 1 \tag{4.17}$$

$$\mathbb{v}^{\star}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{J}_v(\mathbb{q}) \cdot \dot{\mathbb{q}} \tag{4.18}$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_v(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbb{j}}_{v\,1}(\mathbb{q}) & ... & \mathring{\mathbb{j}}_{v\,\nu}(\mathbb{q}) \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Para obter as velocidades dos centros de massa dos ligamentos, seguimos a mesma linha de raciocínio e obtemos os seguintes resultados:

Definindo:

$$\mathbb{j}_{v\,i,j}(\mathbb{q}) = \begin{cases} \mathbb{0}, & j > i \\ [\boldsymbol{k}_{j-1}]_{\mathtt{N}}\,, & j \leq i \text{ e j-ésima junta prismática} \\ [\boldsymbol{k}_{j-1}]_{\mathtt{N}} \wedge ([\mathsf{g}_i]_{\mathtt{N}} - [\mathsf{o}_{j-1}]_{\mathtt{N}}), & j \leq i \text{ e j-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i,j = 1, ..., \nu \tag{4.20}$$

$$\mathbb{v}_{i,j} = \left[\boldsymbol{v}_{\mathsf{g}_i}^{\mathcal{B}_j}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.21}$$

$$\mathbb{v}_i^{\star} = \mathbb{v}_{i,0} = \left[\boldsymbol{v}_{\mathsf{g}_i}^{\mathcal{N}}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.22}$$

Temos:

$$\mathbb{v}_{i,j-1} = \begin{cases} \mathbb{0}, & j = i+1 \\ \mathbb{v}_{i,j} + \mathbb{j}_{v\,i,j}\dot{q}_j, & 1 \leq j \leq i \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu,\ j = i+1, ..., 1 \tag{4.23}$$

$$\mathbb{v}_i^{\star}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{J}_{v\,i}(\mathbb{q}) \cdot \dot{\mathbb{q}} \tag{4.24}$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{v\,i}(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{j}_{v\,i,1}(\mathbb{q}) & \ldots & \mathbb{j}_{v\,i,\nu}(\mathbb{q}) \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

4.1.3 Cinemática de velocidades angulares

A velocidade angular do efetuador pode ser obtida aplicando recursivamente o príncipio da composição de movimentos para velocidades angulares deduzido anteriormente (C.37):

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_0} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_0} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_1} \tag{4.26}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_1} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_2} \tag{4.27}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i} \tag{4.28}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{B}_{\nu-2}}_{\mathcal{B}_\nu} = \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{B}_{\nu-2}}_{\mathcal{B}_{\nu-1}} + \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{B}_{\nu-1}}_{\mathcal{B}_\nu} \tag{4.29}$$

Sendo assim, a velocidade angular do efetuador em relação a cada um dos referenciais pode ser obtida recursivamente pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{B}_{i-1}}_{\mathcal{B}_\nu} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i = \nu + 1 \\ \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{B}_i}_{\mathcal{B}_\nu} + \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{B}_{i-1}}_{\mathcal{B}_i}, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, ..., 1 \tag{4.30}$$

Sendo que a velocidade angular de arrastamento de cada uma das juntas é dada por:

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{B}_{i-1}}_{\mathcal{B}_i} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \dot{q}_i \boldsymbol{k}_{i-1}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu \tag{4.31}$$

Fazendo as seguintes definições:

$$\mathbb{j}_{\omega\, i}(\mathbb{q}) = \begin{cases} \mathbb{0}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \left[\boldsymbol{k}_{i-1}\right]_{\mathtt{N}}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu \tag{4.32}$$

$$\mathbb{w}_i = \left[\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{B}_i}_{\mathcal{B}_\nu}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.33}$$

$$\mathbb{w}^\star = \mathbb{w}_0 = \left[\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{B}_\nu}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.34}$$

Temos que:

$$\left[\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{B}_{i-1}}_{\mathcal{B}_i}\right]_{\mathtt{N}} = \mathbb{j}_{\omega\, i} \dot{q}_i, \ i = 1, ..., \nu \tag{4.35}$$

$$\mathbb{w}_{i-1} = \begin{cases} \mathbb{0}, & i = \nu + 1 \\ \mathbb{w}_i + \mathbb{j}_{\omega\, i} \dot{q}_i, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, ..., 1 \tag{4.36}$$

$$\mathbb{w}^\star(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{J}_\omega(\mathbb{q}) \cdot \dot{\mathbb{q}} \tag{4.37}$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_\omega(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{j}_{\omega\, 1}(\mathbb{q}) & \ldots & \mathbb{j}_{\omega\, \nu}(\mathbb{q}) \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

Para obter as velocidades angulares de cada ligamentos, seguimos a mesma linha de raciocínio e obtemos os seguintes resultados:

Definindo:

$$\mathring{\mathbb{j}}_{\omega\, i,j}(\mathbb{q}) = \begin{cases} \mathbb{0}, & j > i \\ \mathring{\mathbb{j}}_{\omega\, j}(\mathbb{q}), & j \leq i \end{cases} \quad i, j = 1, ..., \nu \tag{4.39}$$

$$\mathbb{w}_{i,j} = \left[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_j}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.40}$$

$$\mathbb{w}_i^{\star} = \mathbb{w}_{i,0} = \left[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.41}$$

Temos:

$$\mathbb{w}_{i,j-1} = \begin{cases} \mathbb{0}, & j = i+1 \\ \mathbb{w}_{i,j} + \mathring{\mathbb{j}}_{\omega\, i,j}\dot{q}_j, & 1 \leq j \leq i \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu,\ j = i+1, ..., 1 \tag{4.42}$$

$$\mathbb{w}_i^{\star}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{J}_{\omega\, i}(\mathbb{q}) \cdot \dot{\mathbb{q}} \tag{4.43}$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{\omega\, i}(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbb{j}}_{\omega\, i,1}(\mathbb{q}) & \dots & \mathring{\mathbb{j}}_{\omega\, i,\nu}(\mathbb{q}) \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

4.1.4 Cinemática de acelerações lineares

A aceleração do efetuador pode ser obtida aplicando recursivamente o príncipio da composição de movimentos para velocidades lineres deduzido anteriormente (C.26):

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}0} = \boldsymbol{a}_{\mathtt{x}\,|\,\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}0} + \boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}1} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}0} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}1} \tag{4.45}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}1} = \boldsymbol{a}_{\mathtt{x}\,|\,\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}1} + \boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}2} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}1} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}2} \tag{4.46}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}i-1} = \boldsymbol{a}_{\mathtt{x}\,|\,\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}i-1} + \boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}i} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}i-1} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}i} \tag{4.47}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}\nu-1} = \boldsymbol{a}_{\mathtt{x}\,|\,\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}\nu-1} + \boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}\nu} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}\nu-1} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}\nu} \tag{4.48}$$

Como $\mathtt{x}$ é fixo a $\mathcal{B}_\nu$, temos que:

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}_\nu} = \mathbf{0} \tag{4.49}$$

Sendo assim, a aceleração do efetuador em relação a cada um dos referenciais pode ser obtida recursivamente pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i = \nu + 1 \\ \boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}_i} + \boldsymbol{a}_{\mathtt{x}\,|\,\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}_i}, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, ..., 1 \tag{4.50}$$

Sendo que, a partir da equação (C.15), a aceleração de arrastamento de cada uma das juntas é dada por:

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{x}\,|\,\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \ddot{q}_i \boldsymbol{k}_{i-1}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \ddot{q}_i \boldsymbol{k}_{i-1} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{i-1}\,|\,\mathtt{x}} + \dot{q}_i^2 \boldsymbol{k}_{i-1} \wedge \boldsymbol{k}_{i-1} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{i-1}\,|\,\mathtt{x}}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu \tag{4.51}$$

Fazendo as seguintes definições:

$$\mathbb{a}_i = [\boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}_i}]_{\mathtt{N}} \tag{4.52}$$

$$\mathbb{a}^\star = \mathbb{a}_0 = [\boldsymbol{a}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{N}}]_{\mathtt{N}} \tag{4.53}$$

Temos que:

$$\left[\boldsymbol{a}_{\mathtt{x}\,|\,\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}\right]_{\mathtt{N}} = \ddot{q}_i \mathring{\mathbb{j}}_{v\,i} + \dot{q}_i^2 \mathring{\mathbb{j}}_{\omega\,i} \wedge \mathring{\mathbb{j}}_{v\,i}, \;\; i = 1, ..., \nu \tag{4.54}$$

$$\mathbb{a}_{i-1} = \begin{cases} \mathbb{0}, & i = \nu + 1 \\ \mathbb{a}_i + \mathring{\mathbb{j}}_{v\,i} \ddot{q}_i + (\underset{\sim}{\mathbb{g}})_i, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, ..., 1 \tag{4.55}$$

$$\mathbb{a}^\star(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) = \mathbb{J}_v(\mathbb{q}) \cdot \ddot{\mathbb{q}} + \underset{\sim}{\mathbb{g}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \tag{4.56}$$

Sendo:

$$(\underset{\sim}{\mathbb{g}})_i = \dot{q}_i \mathring{\mathbb{j}}_{\omega\,i} \wedge (\dot{q}_i \mathring{\mathbb{j}}_{v\,i} + 2\mathbb{v}_i) \tag{4.57}$$

$$\underset{\sim}{\mathbb{g}} = \sum_{i=1}^{\nu} (\underset{\sim}{\mathbb{g}})_i \tag{4.58}$$

Para obter as acelerações dos centros de massa dos ligamentos, seguimos a mesma linha de raciocínio e obtemos os seguintes resultados:

Definindo:

$$\mathbb{a}_{i,j} = \left[\boldsymbol{a}_{\mathtt{g}_i}^{\mathcal{B}_j}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.59}$$

$$\mathbb{a}_i^{\star} = \mathbb{a}_{i,0} = \left[\boldsymbol{a}_{\mathtt{g}_i}^{\mathcal{N}}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.60}$$

Temos:

$$\mathbb{a}_{i,j-1} = \begin{cases} \mathbb{0}, & j = i+1 \\ \mathbb{a}_{i,j} + \mathring{\mathbb{j}}_{v\,i,j}\ddot{q}_j + (\underset{\sim}{\mathbb{g}}_i)_j, & 1 \leq j \leq i \end{cases} \qquad i = 1, ..., \nu,\ j = i+1, ..., 1 \tag{4.61}$$

$$\mathbb{a}_i^{\star}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) = \mathbb{J}_{v\,i}(\mathbb{q}) \cdot \ddot{\mathbb{q}} + \underset{\sim}{\mathbb{g}}_i(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \tag{4.62}$$

Sendo:

$$(\underset{\sim}{\mathbb{g}}_i)_j = \dot{q}_j \mathring{\mathbb{j}}_{\omega\,i,j} \wedge (\dot{q}_j \mathring{\mathbb{j}}_{v\,i,j} + 2\mathbb{v}_{i,j}) \tag{4.63}$$

$$\underset{\sim}{\mathbb{g}}_i(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \sum_{j=1}^{i} (\underset{\sim}{\mathbb{g}}_i)_j \tag{4.64}$$

4.1.5 Cinemática de acelerações angulares

A aceleração angular do efetuador pode ser obtida aplicando recursivamente o príncipio da composição de movimentos para acelerações deduzido anteriormente (C.40):

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_0} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_0} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_1} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_0} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_1} \tag{4.65}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_1} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_2} \tag{4.66}$$

$$\vdots$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i} \tag{4.67}$$

$$\vdots$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{\nu-2}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_{\nu-1}}^{\mathcal{B}_{\nu-2}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{\nu-1}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{\nu-1}}^{\mathcal{B}_{\nu-2}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{\nu-1}} \tag{4.68}$$

Sendo assim, a aceleração angular do efetuador em relação a cada um dos referenciais pode ser obtida recursivamente pela seguinte expressão:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i = \nu + 1 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i}, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, ..., 1 \tag{4.69}$$

Sendo que a aceleração angular de arrastamento de cada uma das juntas é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{i-ésima junta for prismática} \\ \ddot{q}_i \boldsymbol{k}_{i-1}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu \tag{4.70}$$

Fazendo as seguintes definições:

$$\dot{\mathbb{\omega}}_i = [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathtt{x}}^{\mathcal{B}_i}]_{\mathtt{N}} \tag{4.71}$$

$$\dot{\mathbb{\omega}}^\star = \dot{\mathbb{\omega}}_0 = \left[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{N}}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.72}$$

Temos que:

$$\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}\right]_{\mathtt{N}} = \ddot{q}_i \mathring{\mathbb{J}}_{\omega\, i}, \; i = 1, ..., \nu \tag{4.73}$$

$$\dot{\mathbb{\omega}}_{i-1} = \begin{cases} \mathbb{0}, & i = \nu + 1 \\ \dot{\mathbb{\omega}}_i + \mathring{\mathbb{J}}_{\omega\, i} \ddot{q}_i + (\dot{\underset{\sim}{\mathbb{\omega}}})_i, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, ..., 1 \tag{4.74}$$

$$\dot{\mathbb{\omega}}^\star(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) = \mathbb{J}_\omega(\mathbb{q}) \cdot \ddot{\mathbb{q}} + \dot{\underset{\sim}{\mathbb{\omega}}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \tag{4.75}$$

Sendo:

$$(\dot{\underset{\sim}{\mathbb{\omega}}})_i = \dot{q}_i \mathring{\mathbb{J}}_{\omega\, i} \wedge \mathbb{\omega}_i \tag{4.76}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\mathbb{\omega}}} = \sum_{i=1}^{\nu} (\dot{\underset{\sim}{\mathbb{\omega}}})_i \tag{4.77}$$

Para obter as acelerações angulares dos centros de massa dos ligamentos, seguimos a mesma linha de raciocínio e obtemos os seguintes resultados:

Definindo:

$$\dot{\mathbb{w}}_{i,j} = \left[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathsf{g}_i}^{\mathcal{B}_j}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.78}$$

$$\dot{\mathbb{w}}_i^{\star} = \dot{\mathbb{w}}_{i,0} = \left[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.79}$$

Temos:

$$\dot{\mathbb{w}}_{i,j-1} = \begin{cases} \mathbb{0}, & j = i+1 \\ \dot{\mathbb{w}}_{i,j} + \mathring{\mathbb{j}}_{\omega\, i,j}\ddot{q}_j + (\underset{\sim}{\dot{\mathbb{w}}}_i)_j, & 1 \leq j \leq i \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu,\ j = i+1, ..., 1 \tag{4.80}$$

$$\dot{\mathbb{w}}_i^{\star}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) = \mathbb{J}_{\omega\, i}(\mathbb{q}) \cdot \ddot{\mathbb{q}} + \underset{\sim}{\dot{\mathbb{w}}}_i(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \tag{4.81}$$

Sendo:

$$(\underset{\sim}{\dot{\mathbb{w}}}_i)_j = \dot{q}_j \mathring{\mathbb{j}}_{\omega\, i,j} \wedge \mathbb{w}_{i,j} \tag{4.82}$$

$$\underset{\sim}{\dot{\mathbb{w}}}_i(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \sum_{j=1}^{i} (\underset{\sim}{\dot{\mathbb{w}}}_i)_j \tag{4.83}$$

4.2 Dinâmica dos elos e juntas

O modelo dinâmico de $\mathscr{B}$ é obtido utilizando um procedimento de acoplamento de subsistemas baseado no Método Orsino [?], e é dado por:

$$\mathbb{M}(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{v}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) + \mathbb{g}(\mathbb{q}) = \mathbb{u} \tag{4.84}$$

Sendo:

$$\mathbb{M}(\mathbb{q}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v\, i}^{\mathsf{T}} \mathbb{J}_{v\, i} + \mathbb{J}_{\omega\, i}^{\mathsf{T}} \mathbb{I}_i \mathbb{J}_{\omega\, i} \tag{4.85}$$

$$\mathbb{v}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v\, i}^{\mathsf{T}} \underset{\sim}{\mathbb{a}}_i + \mathbb{J}_{\omega\, i}^{\mathsf{T}} \left(\mathbb{I}_i \underset{\sim}{\dot{\mathbb{w}}}_i + \mathbb{w}_i^{\star} \wedge (\mathbb{I}_i \mathbb{w}_i^{\star}) \right) \tag{4.86}$$

$$\mathbb{g}(\mathbb{q}) = -\sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v\, i}^{\mathsf{T}} \mathbb{g} \tag{4.87}$$

Segue abaixo, a dedução.

4.2.1 Modelo dos subsistemas

O modelo dinâmico de cada ligamento pode ser obtido por Newton-Euler, pois são considerados como corpos rígidos livres no espaço sujeitos apenas à força peso. Sendo assim, através do Teorema do Movimento do Baricentro e do Teorema do Momento Angular, obtemos os esforços não-reativos (ativos e inerciais) aplicados em cada ligamento:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_i = -m_i \boldsymbol{a}_{\mathrm{g}_i}^{\mathcal{N}} + m_i \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{\tau}_i = -\boldsymbol{I}_{\mathrm{g}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}} \wedge (\boldsymbol{I}_{\mathrm{g}_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}}) \end{cases} \quad i = 1, ..., \nu \tag{4.88}$$

Aplicando as equações vetoriais no sistema $\mathtt{N}$, temos:

$$\begin{bmatrix} [\boldsymbol{f}_i]_{\mathtt{N}} \\ [\boldsymbol{\tau}_i]_{\mathtt{N}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & [\boldsymbol{I}_{\mathrm{g}_i}]_{\mathtt{N}|\mathtt{N}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\boldsymbol{a}_{\mathrm{g}_i}^{\mathcal{N}}]_{\mathtt{N}} \\ [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}}]_{\mathtt{N}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}}]_{\mathtt{N}} \wedge ([\boldsymbol{I}_{\mathrm{g}_i}]_{\mathtt{N}|\mathtt{N}} \cdot [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}}]_{\mathtt{N}}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -m_i [\boldsymbol{g}]_{\mathtt{N}} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} \tag{4.89}$$

Ou seja:

$$\bar{\mathbb{f}}_i = -\left\{ \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{I}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{a}_i^\star \\ \dot{\mathbb{\omega}}_i^\star \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{\omega}_i^\star \wedge (\mathbb{I}_i \cdot \mathbb{\omega}_i^\star) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i \mathbb{g} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} \right\} \tag{4.90}$$

Como subsistemas estão desacoplados, não há forças reativas, portanto o modelo dinâmico de cada subsistema pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbb{f}}_i = \mathbb{0} \tag{4.91}$$

Além disso, definindo as quasi-velocidades:

$$\mathbb{p}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{v}_i^\star \\ \mathbb{\omega}_i^\star \end{bmatrix} \tag{4.92}$$

E as quasi-coordenadas:

$$\mathsf{d}\mathbb{\pi}_i = \mathbb{p}_i \mathsf{d}t \tag{4.93}$$

Temos que o trabalho virtual realizado por cada subsistema é dado por:

$$\delta W_i = \delta \mathbb{\pi}_i^{\mathsf{T}} \cdot \bar{\mathbb{f}}_i \tag{4.94}$$

4.2.2 Sistemas de forças ativas generalizadas

Considere também um subsistema constituido pelos esforços que os atuadores aplicam nas juntas do mecanismo. Primeiramente, definimos a matriz-coluna de quasi-velocidades relativas a esse subsistema:

$$\mathbb{p}^{\#} = \dot{\mathbb{q}} \tag{4.95}$$

Seja $\mathbb{u}$ a matriz-coluna de esforços generalizados aplicadas pelos atuadores na direção de $\delta\mathbb{q}$. Sendo assim, o trabalho virtual realizado por este subsistema é dado por:

$$\delta W^{\#} = \delta\mathbb{q}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbb{u} \tag{4.96}$$

4.2.3 Vínculos cinemáticos entre subsistemas

Através das equações (4.24), (4.43) e (4.95), é possível relacionar as quasi-velocidades de cada subsistema com as quasi-velocidades $\mathbb{p}^{\#}$ da seguinte maneira:

$$\underline{\mathbb{p}_i}(\mathbb{q}, \mathbb{p}^{\#}) = \mathbb{J}_i(\mathbb{q}) \cdot \mathbb{p}^{\#},\ i = 1, ..., \nu \tag{4.97}$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_i(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v\,i}(\mathbb{q}) \\ \mathbb{J}_{\omega\,i}(\mathbb{q}) \end{bmatrix},\ i = 1, ..., \nu \tag{4.98}$$

Seja $\mathbb{p}^{\circ}$ a matriz coluna que contém as quasi-velocidades de todos os ligamentos:

$$\mathbb{p}^{\circ} = \begin{bmatrix} \mathbb{p}_1^{\mathsf{T}} & ... & \mathbb{p}_\nu^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{4.99}$$

$\mathbb{p}^{\circ}$ pode ser expresso em função apenas das quasi-velocidades $\mathbb{p}^{\#}$ da seguinte forma:

$$\underline{\mathbb{p}^{\circ}}(\mathbb{q}, \mathbb{p}^{\#}) = \mathbb{J}(\mathbb{q})\mathbb{p}^{\#} \tag{4.100}$$

Sendo:

$$\mathbb{J}(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_1(\mathbb{q})^{\mathsf{T}} & ... & \mathbb{J}_\nu(\mathbb{q})^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{4.101}$$

Sendo assim, a partir de (4.100), os vínculos de quasi-velocidades entre subsistemas podem ser expressos como:

$$\overline{\mathbb{p}}(\mathbb{q}, \mathbb{p}) = \mathbb{A}(\mathbb{q}) \cdot \mathbb{p} = \mathbb{0} \tag{4.102}$$

Sendo:

$$\mathbb{A}(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}(\mathbb{q}) & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \tag{4.103}$$

$$\mathbb{p} = \begin{bmatrix} \mathbb{p}^{\#\mathsf{T}} & \mathbb{p}^{\circ\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{4.104}$$

4.2.4 Acoplamento de subsistemas

Seja $\mathbb{f}$ a matriz-coluna contendo todos os sistemas de forças não-reativas generalizadas:

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} \mathbb{u}^{\mathsf{T}} & \mathbb{f}^{\circ\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{4.105}$$

Sendo:

$$\mathbb{f}^{\circ} = \begin{bmatrix} \mathbb{f}_1^{\mathsf{T}} & \dots & \mathbb{f}_\nu^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{4.106}$$

Seja $\mathbb{\pi}$ um conjunto de de quasi-coordenadas tal que:

$$\mathsf{d}\mathbb{\pi} = \mathbb{p}\,\mathsf{d}t \tag{4.107}$$

Ou seja:

$$\mathsf{d}\mathbb{\pi} = \begin{bmatrix} \mathsf{d}\mathbb{\pi}^{\#\mathsf{T}} & \mathsf{d}\mathbb{\pi}^{\circ\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{4.108}$$

Sendo:

$$\mathsf{d}\mathbb{\pi}^{\#} = \mathsf{d}\mathbb{q} \tag{4.109}$$

$$\mathsf{d}\mathbb{\pi}^{\circ} = \begin{bmatrix} \mathsf{d}\mathbb{\pi}_1^{\mathsf{T}} & \dots & \mathsf{d}\mathbb{\pi}_\nu^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{4.110}$$

Pelo princípio de d'Alembert, temos que

$$\delta W^{\#} + \sum_{i=1}^{\nu} \delta W_i = 0 \tag{4.111}$$

Através de (4.111), (4.96), (4.148), (4.105) e (4.107), temos que:

$$\delta\mathbb{\pi}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbb{f} = 0 \tag{4.112}$$

Além disso, a partir da definição de $\mathbb{\pi}$ (4.107) e dos vínculos de quasi-velocidades (4.102), temos que as variações das quasi-coordenadas $\mathbb{\pi}$ devem respeitar a seguinte relação:

$$\mathbb{A}(\mathbb{q}) \cdot \delta\mathbb{\pi} = \mathbb{0} \tag{4.113}$$

Subdividindo $\delta\mathbb{\pi}$ em $\delta\mathbb{\pi}^{\#}$ e $\delta\mathbb{\pi}^{\circ}$ e considerando $\delta\mathbb{\pi}^{\#}$ como variáveis livres, temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{J}(\mathbb{q}) & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\mathbb{\pi}^{\#} \\ \delta\mathbb{\pi}^{\circ} \end{bmatrix} = \mathbb{0} \tag{4.114}$$

$$\Rightarrow \delta\mathbb{\pi}^{\circ} = \mathbb{J}(\mathbb{q})\delta\mathbb{\pi}^{\#} \tag{4.115}$$

$$\therefore \delta\mathbb{\pi} = \mathbb{C}(\mathbb{q}) \cdot \delta\mathbb{\pi}^{\#} \tag{4.116}$$

Sendo:

$$\mathbb{C}(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{J}(\mathbb{q}) \end{bmatrix} \tag{4.117}$$

Repare que trocando $\delta\mathbb{\pi}$ por $\mathbb{p}$ em (4.113), obtemos os vínculos de quasi-velocidades do sistema (4.102). Sendo assim, à partir das expressões (4.116) e (4.117), temos que $\mathbb{C}$ respeita a seguinte relação:

$$\mathbb{p} = \mathbb{C}(\mathbb{q}) \cdot \mathbb{p}^{\#} \tag{4.118}$$

Sendo assim, substituindo (4.116) em (4.112), temos:

$$\delta\mathbb{\pi}^{\#\mathsf{T}} \cdot \mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{f} = \mathbb{0} \tag{4.119}$$

Tendo em vista que as quasi-coordenadas $\mathbb{\pi}^{\#}$ são independentes, as variações $\delta\mathbb{\pi}^{\#}$ são arbitrárias. Sendo assim, as equações dinâmicas do sistema são dadas por:

$$\mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{f} = \mathbb{0} \tag{4.120}$$

Substituindo (4.117) e (4.105) em (4.120), temos:

$$\mathbb{u} + \mathbb{J}^{\mathsf{T}}\mathbb{f}^{\circ} = \mathbb{0} \tag{4.121}$$

Substituindo (4.101), (4.98), (4.90) e (4.106) em (4.121), temos:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v\,i} \\ \mathbb{J}_{\omega\,i} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \left\{ \begin{bmatrix} m_i\mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{I}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{a}_i^{\star} \\ \dot{\omega}_i^{\star} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \omega_i^{\star} \wedge (\mathbb{I}_i \cdot \omega_i^{\star}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i\mathbb{g} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{u} \tag{4.122}$$

Substituindo (4.62) e (4.81) em (4.122), temos:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v\,i} \\ \mathbb{J}_{\omega\,i} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \left\{ \begin{bmatrix} m_i(\mathbb{J}_{v_i}\ddot{\mathbb{q}} + \underset{\sim}{\mathbb{a}}_i) \\ \mathbb{I}_i(\mathbb{J}_{\omega_i}\ddot{\mathbb{q}} + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \omega_i^{\star} \wedge (\mathbb{I}_i \cdot \omega_i^{\star}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i\mathbb{g} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{u} \tag{4.123}$$

Sendo assim, obtemos o modelo dinâmico mostrado anteriormente:

$$\mathbb{M}(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \nu(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) + \mathbb{g}(\mathbb{q}) = \mathbb{u} \tag{4.84}$$

Sendo:

$$\mathbb{M}(\mathbb{q}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v\,i}^{\mathsf{T}} \mathbb{J}_{v\,i} + \mathbb{J}_{\omega\,i}^{\mathsf{T}} \mathbb{I}_i \mathbb{J}_{\omega\,i} \tag{4.85}$$

$$\nu(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v\,i}^{\mathsf{T}} \underset{\sim}{\mathbb{a}}_i + \mathbb{J}_{\omega\,i}^{\mathsf{T}} \big(\mathbb{I}_i \underset{\sim}{\dot{\omega}}_i + \omega_i^{\star} \wedge (\mathbb{I}_i \omega_i^{\star}) \big) \tag{4.86}$$

$$\mathbb{g}(\mathbb{q}) = -\sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v\,i}^{\mathsf{T}} \mathbb{g} \tag{4.87}$$

4.3 Dinâmica dos atuadores

Esta subseção tem o intuito de complementar algoritmo de modelagem de mecanismos seriais já apresentado através inclusão da dinâmica dos atuadores.

Seja $\mathscr{B}'$ um sistema mecânico serial de ν graus de liberdade, constituido por um mecanismo serial $\mathscr{B}$ e ν atuadores, possivelmente acoplados a redutores de velocidades. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- $\mathcal{R}_i$, $i = 1, ..., \nu$: rotor do i-ésimo atuador.
- $\mathtt{R}_i$, $i = 1, ..., \nu$: sistema de coordenadas solidário a $\mathcal{R}_i$.
- $J_{r\,i}$, $i = 1, ..., \nu$: momento de inércia do rotor $\mathcal{R}_i$.
- $\boldsymbol{I}_{\mathtt{r}_i}$, $i = 1, ..., \nu$: tensor de inércia do rotor $\mathcal{R}_i$ em relação a seu centro de massa.

- $\mathbb{I}_{r\,i}$, $i = 1, ..., \nu$: tensor de inércia $\boldsymbol{I}_{\mathtt{r}_i}$ escrito na base $\mathtt{N}$, ou seja, $[\boldsymbol{I}_{\mathtt{r}_i}]_{\mathtt{N}|\mathtt{N}}$.
- $\boldsymbol{\tau}_{r\,i}$, $i = 1, ..., \nu$: Vetor torque não-reativo resultante aplicado em $\mathcal{R}_i$.
- $\bar{\mathbb{f}}_{r\,i}$, $i = 1, ..., \nu$: Matriz-coluna de forças não-reativas generalizadas aplicadas no subsistema $\mathcal{B}_{r\,i}$, $i = 1, ..., \nu$. É dada por $\bar{\mathbb{f}}_{r\,i} = [\boldsymbol{\tau}_i]_{\mathtt{N}}$.
- $q_{r\,i}$, $i = 1, ..., \nu$: Deslocamentos angular realizado pelo i-ésimo rotor.
- $\mathbb{q}_r$: Matriz-coluna dos deslocamentos angulares realizados pelos rotores.
- $\mathbb{\varsigma}(\dot{\mathbb{q}}_r)$: matriz-coluna das forças de atrito generalizadas aplicadas nos rotores, em sentido oposto aos seus deslocamentos.
- $\mathbb{i}$: Matriz-coluna de correntes elétricas que fluem pelas armaduras dos atuadores.
- $\mathbb{v}$: Matriz-coluna de tensões elétricas aplicadas nos terminais dos atuadores.
- r_i, $i = 1, ..., \nu$: Relação de transmissão do i-ésimo redutor.
- $\underline{r}$: Matriz diagonal de relações de transmissão dos redutores.
- $\underline{k_t}$: Matriz diagonal de constantes de torque dos atuadores.
- $\underline{k_w}$: Matriz diagonal de constantes de força contra-eletromotriz dos atuadores.
- $\underline{R}$: Matriz diagonal de resistências elétricas dos atuadores.
- $\underline{L}$: Matriz diagonal de indutâncias dos atuadores.
- i: Corrente elétrica.
- υ: Tensão elétrica.
- ω: Velocidade angular.
- k_w: Constante de força contra-eletromotriz.
- R: Resistência elétrica.
- L: Indutância.

4.3.1 Cinemática

4.3.1.1 Cinemática de velocidades angulares

Devido aos redutores de velocidade e aos fusos de esferas, o deslocamento relativo $q_{r\,i}$ gerado pelo i-ésimo rotor é convertido em um deslocamento q_i através da seguinte relação:

$$\mathbb{q}_r = \underline{r}\,\mathbb{q} \tag{4.124}$$

Sendo assim, a velocidade angular do i-ésimo rotor pode ser obtida aplicando o príncipio da composição de movimentos para velocidades angulares deduzido anteriormente (C.37):

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}},\ i = 1, ..., \nu \tag{4.125}$$

Sendo que a velocidade angular relativa de cada rotor é dada por:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \dot{q}_{r\,i}\boldsymbol{k}_{i-1} = r_i\dot{q}_i\boldsymbol{k}_{i-1},\ i = 1, ..., \nu \tag{4.126}$$

Aplicando a equação (4.125) no sistema $\mathtt{N}$, temos:

$$\mathbb{\omega}_{r\,i}^{\star} = \mathbb{\omega}_{i-1}^{\star} + r_i\dot{q}_i\left[\boldsymbol{k}_{i-1}\right]_{\mathtt{N}},\ i = 1, ..., \nu \tag{4.127}$$

Sendo:

$$\mathbb{\omega}_{r\,i}^{\star} = \left[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.128}$$

Utilizando a equação (4.43), pode-se reescrever (4.127) da seguinte maneira:

$$\mathbb{\omega}_{r\,i}^{\star}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{J}_{\omega_r\,i}(\mathbb{q}) \cdot \dot{\mathbb{q}} \tag{4.129}$$

Sendo:

$$\mathring{\mathbb{j}}_{\omega_r\,i,j}(\mathbb{q}) = \begin{cases} r_i\left[\boldsymbol{k}_{i-1}\right]_{\mathtt{N}},\ j = i \\ \mathring{\mathbb{j}}_{\omega\,i,j}(\mathbb{q}),\quad j \neq i \end{cases} \qquad i, j = 1, ..., \nu \tag{4.130}$$

$$\mathbb{J}_{\omega_r\,i}(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbb{j}}_{\omega_r\,i,1}(\mathbb{q}) & \dots & \mathring{\mathbb{j}}_{\omega_r\,i,\nu}(\mathbb{q}) \end{bmatrix} \tag{4.131}$$

4.3.1.2 Cinemática de acelerações angulares

A aceleração angular do i-ésimo rotor pode ser obtida aplicando o príncipio da composição de movimentos para acelerações deduzido anteriormente (C.40):

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{i-1}}^{\mathcal{N}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \tag{4.132}$$

Sendo que a aceleração angular de relativa de cada rotor é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \ddot{q}_{r\,i}\boldsymbol{k}_{i-1} = r_i\ddot{q}_i\boldsymbol{k}_{i-1},\ \ i = 1, ..., \nu \tag{4.133}$$

Aplicando a equação (4.132) no sistema $\mathtt{N}$, temos:

$$\dot{\omega}_{r\,i}^{\star} = \dot{\omega}_{i-1}^{\star} + r_i\ddot{q}_i\left[\boldsymbol{k}_{i-1}\right]_{\mathtt{N}} + \omega_{i-1}^{\star} \wedge r_i\dot{q}_i\left[\boldsymbol{k}_{i-1}\right]_{\mathtt{N}},\ \ i = 1, ..., \nu \tag{4.134}$$

Sendo:

$$\dot{\omega}_{r\,i}^{\star} = \left[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}}\right]_{\mathtt{N}} \tag{4.135}$$

Utilizando a equação (4.81), pode-se reescrever (4.134) da seguinte maneira:

$$\dot{\omega}_{r\,i}^{\star}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) = \mathbb{J}_{\omega_r\,i}(\mathbb{q}) \cdot \ddot{\mathbb{q}} + \underset{\sim}{\dot{\omega}}_{r\,i}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \tag{4.136}$$

Sendo:

$$\underset{\sim}{\dot{\omega}}_{r\,i}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \begin{cases} \mathbb{0}, & i = 1 \\ \underset{\sim}{\dot{\omega}}_{i-1}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) + \omega_{i-1}^{\star}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \wedge \dot{q}_i \mathring{\mathbb{J}}_{\omega_r\,i,i}(\mathbb{q}), & i > 1 \end{cases},\ \ i = 1, ..., \nu \tag{4.137}$$

4.3.2 Dinâmica Mecânica

O modelo dinâmico de $\mathscr{B}'$ é obtido utilizando um procedimento de acoplamento de subsistemas baseado no Método Orsino [?], e é dado por:

$$\mathbb{M}^*(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{v}^*(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) + \mathbb{g}^*(\mathbb{q}) = \mathbb{u}^* \tag{4.138}$$

Sendo:

$$\mathbb{M}^*(\mathbb{q}) = \mathbb{M}(\mathbb{q}) + \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega_r\,i}^{\mathsf{T}} \mathbb{I}_{r\,i} \mathbb{J}_{\omega_r\,i} \tag{4.139}$$

$$\mathbb{v}^*(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{v}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) + \underline{r}\, \mathbb{C}(\underline{r}\, \dot{\mathbb{q}}) + \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega_r\, i}^{\mathsf{T}} \left(\mathbb{I}_{r\, i} \dot{\underline{\omega}}_{r\, i} + \omega_{r\, i}^{\star} \wedge (\mathbb{I}_{r\, i} \omega_{r\, i}^{\star}) \right) \tag{4.140}$$

$$\mathbb{g}^*(\mathbb{q}) = \mathbb{g}(\mathbb{q}) \tag{4.141}$$

$$\mathbb{u}^* = \underline{r k_t} \mathbb{i} \tag{4.142}$$

Segue abaixo, a dedução.

4.3.2.1 Modelo dos subsistemas rotores

O modelo dinâmico de cada rotor pode ser obtido por Newton-Euler, pois são considerados como corpos rígidos com inércia puramente rotativa, livres no espaço. Os efeitos da massas do rotor, do estator e do redutor podem facilmente incluídos no modelo simplesmente atualizando os valores dos parâmetros de inércia dos ligamentos. Sendo assim, através do Teorema do Momento Angular, obtemos os esforços inerciais aplicados em cada rotor:

$$\boldsymbol{\tau}_{r\, i} = -\boldsymbol{I}_{\mathtt{r}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}} \wedge (\boldsymbol{I}_{\mathtt{r}_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}}),\ i = 1, ..., \nu \tag{4.143}$$

Aplicando as equações vetoriais no sistema $\mathtt{N}$, temos:

$$[\boldsymbol{\tau}_{r\, i}]_{\mathtt{N}} = -\left[\boldsymbol{I}_{\mathtt{r}_i}\right]_{\mathtt{N}|\mathtt{N}} \cdot \left[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}}\right]_{\mathtt{N}} - \left[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}}\right]_{\mathtt{N}} \wedge \left(\left[\boldsymbol{I}_{\mathtt{r}_i}\right]_{\mathtt{N}|\mathtt{N}} \cdot \left[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{N}}\right]_{\mathtt{N}}\right) \tag{4.144}$$

Ou seja:

$$\bar{\mathbb{f}}_{r\, i} = -\mathbb{I}_{r\, i} \cdot \dot{\omega}_{r\, i}^{\star} - \omega_{r\, i}^{\star} \wedge \left(\mathbb{I}_{r\, i} \cdot \omega_{r\, i}^{\star}\right) \tag{4.145}$$

Como os subsistemas estão desacoplados, não há forças reativas, portanto o modelo dinâmico de cada subsistema rotor pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbb{f}}_{r\, i} = \mathbb{0} \tag{4.146}$$

Além disso, definindo as quasi-coordenadas:

$$\mathsf{d}\pi_{r\, i} = \omega_{r\, i}^{\star} \mathsf{d}t \tag{4.147}$$

Temos que o trabalho virtual realizado por cada subsistema é dado por:

$$\delta W_{r\,i} = \delta \mathbb{m}_{r\,i}^{\mathsf{T}} \cdot \bar{\mathbb{f}}_{r\,i} \tag{4.148}$$

4.3.2.2 Modelo do subsistema serial

O modelo do subsistema serial utilizado é o mesmo que foi deduzido anteriormente considerando $\mathbb{u} = \mathbb{0}$. O efeito das forças ativas aplicadas pelos atuadores será contabilizado na próxima subseção. Sendo assim, os esforços generalizados não-reativos do subsistema serial são dados por:

$$\bar{\mathbb{f}}_s = -\mathbb{M}(\mathbb{q})\,\ddot{\mathbb{q}} - \mathbb{v}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) - \mathbb{g}(\mathbb{q}) \tag{4.149}$$

Além disso, o trabalho virtual realizado por este subsistema é dado por:

$$\delta W_s = \delta \mathbb{q}^{\mathsf{T}} \cdot \bar{\mathbb{f}}_s \tag{4.150}$$

4.3.2.3 Sistemas de forças ativas generalizadas

Considere também um subsistema constituido pelos esforços que os atuadores aplicam em seus rotores. Os torques gerados pelos atuadores são proporcionais à corrente elétrica que flui pelas suas armaduras e são aplicados na direção dos deslocamentos virtuais relativos dos rotores. Além disso, é possível que hajam esforços de atrito devido ao atrito gerado nos mancais e nas engrenagens do redutor, aplicados na direção aposta dos deslocamentos virtuais relativos dos rotores. Sendo assim, o trabalho virtual realizado por este subsistema é dado por:

$$\delta W_{\tau} = \delta \mathbb{q}_r^{\mathsf{T}} \cdot \left(\underline{k_t}\,\mathbb{i} - \mathbb{c}(\dot{\mathbb{q}}_r)\right) \tag{4.151}$$

4.3.2.4 Vínculos entre subsistemas

Tendo em vista que o sistema mecânico $\mathscr{B}'$ tem ν graus de liberdade, e $\mathbb{q}$ são um conjunto de ν coordenadas generalizadas independentes, podemos relacionar os deslocamentos virtuais $\delta\mathbb{q}_r$ e $\delta\mathbb{m}_{r\,i}$, com $i = 1, ..., \nu$, com os deslocamentos virtuais $\delta\mathbb{q}$, ou seja, obter os vínculos cinemáticos entre os subsistemas.

Para relacionar $\delta\mathbb{q}_r$ com $\delta\mathbb{q}$ basta aplicar o operador variação em (4.124):

$$\delta\mathbb{q}_r = \underline{r}\,\delta\mathbb{q} \tag{4.152}$$

Para relacionar $\delta\mathbb{w}_{r\,i}$, aplica-se a relação (4.129) em (4.147):

$$\mathsf{d}\mathbb{w}_{r\,i} = \mathbb{J}_{\omega_r\,i}\,\mathsf{d}\mathbb{q} \tag{4.153}$$

Portanto:

$$\delta\mathbb{w}_{r\,i} = \mathbb{J}_{\omega_r\,i}\,\delta\mathbb{q} \tag{4.154}$$

4.3.2.5 Acoplamento de subsistemas

Tendo em vista que um precedimento mais detalhado para acoplamento de subsistemas já foi apresentado, nesta subseção ele será realizado de forma mais sucinta.

Pelo princípio de d'Alembert, temos que

$$\delta W_\tau + \delta W_s + \sum_{i=1}^{\nu} \delta W_{r\,i} = 0 \tag{4.155}$$

Ou seja:

$$\delta\mathbb{q}_r^{\mathsf{T}} \cdot \left(\underline{k_t}\,\mathbb{i} - \mathfrak{C}(\dot{\mathbb{q}}_r\right) + \delta\mathbb{q}^{\mathsf{T}} \cdot \bar{\mathbb{f}}_s + \sum_{i=1}^{\nu} \delta\mathbb{w}_{r\,i}^{\mathsf{T}} \cdot \bar{\mathbb{f}}_{r\,i} = 0 \tag{4.156}$$

Sabe-se que os deslocamentos virtuais $\delta\mathbb{q}$, $\delta\mathbb{q}_r$ e $\delta\mathbb{w}_{r\,i}$, com $i = 1, ..., \nu$, não são independentes entre si. Porém, é possível relacionar $\delta\mathbb{q}_r$ e $\delta\mathbb{w}_{r\,i}$ com os deslocamentos virtuais $\delta\mathbb{q}$ através das equações (4.152) e (4.154). Sendo assim:

$$(\underline{r}\,\delta\mathbb{q})^{\mathsf{T}} \cdot \left(\underline{k_t}\,\mathbb{i} - \mathfrak{C}(\underline{r}\,\dot{\mathbb{q}})\right) + \delta\mathbb{q}^{\mathsf{T}} \cdot \bar{\mathbb{f}}_s + \sum_{i=1}^{\nu} (\mathbb{J}_{\omega_r\,i}\,\delta\mathbb{q})^{\mathsf{T}} \cdot \bar{\mathbb{f}}_{r\,i} = 0 \tag{4.157}$$

Ou seja:

$$\delta\mathbb{q}^{\mathsf{T}} \cdot \left(\underline{r}\,\underline{k_t}\,\mathbb{i} - \mathfrak{C}(\underline{r}\,\dot{\mathbb{q}}) + \bar{\mathbb{f}}_s + \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega_r\,i}^{\mathsf{T}}\,\bar{\mathbb{f}}_{r\,i}\right) = 0 \tag{4.158}$$

Tendo em vista que as coordenadas $\mathbb{q}$ são independentes, as variações $\delta\mathbb{q}$ são arbitrárias. Sendo assim, as equações dinâmicas do sistema são dadas por:

$$\underline{r}\,\underline{k_t}\,\mathbb{i} - \underline{r}\,\mathbb{\zeta}(\underline{r}\,\dot{\mathbb{q}}) + \bar{\mathbb{f}}_s + \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}^{\mathsf{T}}_{\omega_r\,i}\,\bar{\mathbb{f}}_{r\,i} = \mathbb{0} \tag{4.159}$$

Substituindo (4.145) e (4.149) em (4.159), temos:

$$\underline{r}\,\underline{k_t}\,\mathbb{i} - \underline{r}\,\mathbb{\zeta}(\underline{r}\,\dot{\mathbb{q}}) - \mathbb{M}\,\ddot{\mathbb{q}} - \mathbb{\nu} - \mathbb{g} - \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}^{\mathsf{T}}_{\omega_r\,i}\left(\mathbb{I}_{r\,i}\cdot\dot{\mathbb{\omega}}^{\star}_{r\,i} + \mathbb{\omega}^{\star}_{r\,i}\wedge\left(\mathbb{I}_{r\,i}\cdot\mathbb{\omega}^{\star}_{r\,i}\right)\right) = \mathbb{0} \tag{4.160}$$

Substituindo (4.136) em (4.160):

$$\underline{r}\underline{k_t}\,\mathbb{i} - \underline{r}\,\mathbb{\zeta}(\underline{r}\,\dot{\mathbb{q}}) - \mathbb{M}\,\ddot{\mathbb{q}} - \mathbb{\nu} - \mathbb{g} - \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}^{\mathsf{T}}_{\omega_r\,i}\left(\mathbb{I}_{r\,i}\cdot\left(\mathbb{J}_{\omega_r\,i}\cdot\ddot{\mathbb{q}} + \dot{\underset{\sim}{\mathbb{\omega}}}_{r\,i}\right) + \mathbb{\omega}^{\star}_{r\,i}\wedge\left(\mathbb{I}_{r\,i}\cdot\mathbb{\omega}^{\star}_{r\,i}\right)\right) = \mathbb{0} \tag{4.161}$$

Sendo assim, obtemos o modelo dinâmico mostrado anteriormente:

$$\mathbb{M}^*(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{\nu}^*(\mathbb{q},\dot{\mathbb{q}}) + \mathbb{g}^*(\mathbb{q}) = \mathbb{u}^* \tag{4.138}$$

Sendo:

$$\mathbb{M}^*(\mathbb{q}) = \mathbb{M}(\mathbb{q}) + \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}^{\mathsf{T}}_{\omega_r\,i}\mathbb{I}_{r\,i}\mathbb{J}_{\omega_r\,i} \tag{4.139}$$

$$\mathbb{\nu}^*(\mathbb{q},\dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{\nu}(\mathbb{q},\dot{\mathbb{q}}) + \underline{r}\,\mathbb{\zeta}(\underline{r}\,\dot{\mathbb{q}}) + \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}^{\mathsf{T}}_{\omega_r\,i}\left(\mathbb{I}_{r\,i}\dot{\underset{\sim}{\mathbb{\omega}}}_{r\,i} + \mathbb{\omega}^{\star}_{r\,i}\wedge\left(\mathbb{I}_{r\,i}\mathbb{\omega}^{\star}_{r\,i}\right)\right) \tag{4.140}$$

$$\mathbb{g}^*(\mathbb{q}) = \mathbb{g}(\mathbb{q}) \tag{4.141}$$

$$\mathbb{u}^* = \underline{r}\underline{k_t}\mathbb{i} \tag{4.142}$$

4.4 Modelo completo

O modelo do sistema elétrico equivalente de um motor de corrente contínua é dado por uma fonte de tensão variável ligada em série a um indutor, um resistor, e uma força contra-eletromotriz diretamente proporcional à velocidade angular do rotor em relação ao estator, ou seja:

$$\boxed{L\,\frac{\mathsf{d}i}{\mathsf{d}t} + R\,i + k_w\,\omega = \upsilon} \tag{4.162}$$

Tendo em vista que todas as juntas de um mecanismo paralelo são atuadas, a equação matricial da dinâmica elétrica do sistema é dada por:

$$\boxed{\underline{L}\,\frac{\mathsf{d}\mathbb{i}}{\mathsf{d}t} + \underline{R}\,\mathbb{i} + \underline{k_w}\,\dot{\mathbb{q}}_r = \mathbb{u}} \tag{4.163}$$

Sendo assim, juntando as equações (4.138) e (4.163), obtemos a dinâmica do sistema como um todo:

$$\begin{cases} \mathbb{M}^*(\mathbb{q})\,\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{v}^*(\mathbb{q},\dot{\mathbb{q}}) + \mathbb{g}^*(\mathbb{q}) = \underline{r}\,\underline{k_t}\,\mathbb{i} \\ \underline{L}\,\frac{\mathsf{d}\mathbb{i}}{\mathsf{d}t} + \underline{R}\,\mathbb{i} + \underline{r}\,\underline{k_w}\,\dot{\mathbb{q}} = \mathbb{u} \end{cases} \tag{4.164}$$

5 MODELAGEM DE MANIPULADORES PARALELOS

Esta subseção tem o intuito de apresentar um algoritmo genérico para a obtenção do modelo dinâmico de mecanismos paralelos cujo efetuador realiza apenas movimentos de translação. O algoritmo apresentado é implementável em linguagens de programação comumente usadas atualmente, como C++, Java e Python, sem necessitar de recursos de manipulação simbólica.
Para a obtenção do modelo do mecanismo paralelos, são necessários apenas os modelos de mecanismos seriais deduzidos utilizando o algoritmo apresentado anteriormente, do modelo do efetuador, e de 7 matrizes constantes que são utilizadas para descrever a arquitetura do mecanismo paralelo.

Para realizar a modelagem de mecanismos paralelos a partir de subsistemas seriais já deduzidos, é necessário introduzir mais alguns conceitos:

Sejam $\mathscr{B}_0$, $\mathscr{B}_1$, ..., $\mathscr{B}_n$ $n+1$ subsistemas mecânicos e $\mathscr{M}$ um sistema mecânico de $\nu^\#$ graus de liberdade gerado pelo acoplamento dos subsistemas citados. Definimos:

- $\mathcal{N}_i$, $i = 0, ..., n$: referencial inercial relativo ao subsistema $\mathscr{B}_i$.
- $\mathtt{N}_i$, $i = 0, ..., n$: sistema de coordenadas solidário a $\mathcal{N}_i$.
- o_i, $i = 0, ..., n$: origem do sistema $\mathtt{N}_i$.
- g: centro de massa da plataforma/efetuador $\mathcal{B}_0$.
- $\mathtt{B}$: sistema de coordenadas solidário a $\mathscr{B}_0$ com origem em g.
- m: massa da plataforma/efetuador $\mathcal{B}_0$.
- $\boldsymbol{f}$: Vetor de forças não-reativas (ativas e inerciais) aplicadas no centro de massa da plataforma/efetuador $\mathcal{B}_0$.

- $\boldsymbol{g}$: Vetor aceleração gravitacional.
- $\mathbb{g}$: Vetor aceleração gravitacional escrito na base $\mathtt{N_0}$, ou seja, $[\boldsymbol{g}]_{\mathtt{N_0}}$.
- $\mathbb{q}_i$, $i = 0, ..., n$: matriz-coluna de coordenadas generalizadas do subsistema $\mathscr{B}_i$.
- $\mathbb{q}^*$: matriz-coluna de coordenadas generalizadas da plataforma/efetuador $\mathscr{B}_0$.
- $\mathbb{q}^\diamond$: matriz-coluna de coordenadas generalizadas dos subsistemas seriais. Definida como $\mathbb{q}^\diamond = \begin{bmatrix} \mathbb{q}_1{}^\mathsf{T} & ... & \mathbb{q}_n{}^\mathsf{T} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.
- $\mathbb{q}$: matriz-coluna contendo todas as coordenadas generalizadas do sistema $\mathscr{M}$. Definida como $\mathbb{q} = \begin{bmatrix} \mathbb{q}^{*\mathsf{T}} & \mathbb{q}^{\diamond\mathsf{T}} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.
- $\mathbb{q}^\#$: matriz-coluna de $\nu^\#$ coordenadas generalizadas independentes.
- $\mathbb{q}^\circ$: matriz-coluna de coordenadas generalizadas redundantes (contém as componentes de $\mathbb{q}$ não pertencentes a $\mathbb{q}^\#$)
- $\overline{\mathbb{q}}(\mathbb{q})$: matriz-coluna dos vínculos de posição entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por $\overline{\mathbb{q}}(\mathbb{q}) = \mathbb{0}$.
- $\overline{\mathbb{\omega}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}})$: matriz-coluna dos vínculos de orientação entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por $\overline{\mathbb{\omega}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{0}$.
- $\mathtt{x}_i$, $i = 1, ..., n$: ponto no espaço fixo ao efetuador de $\mathscr{B}_i$.
- $\mathbb{x}_i(\mathbb{q}_i)$, $i = 1, ..., n$: $[\mathtt{x}_i]_{\mathtt{N}_i}$ escrito em função das coordenadas $\mathbb{q}_i$.
- $\mathbb{J}_{v\,\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i)$, $i = 1, ..., n$: jacobiano $\mathbb{J}_v$ do subsistema $\mathscr{B}_i$.
- $\mathbb{J}_{\omega\,\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i)$, $i = 1, ..., n$: jacobiano $\mathbb{J}_\omega$ do subsistema $\mathscr{B}_i$.
- $\underset{\sim}{\mathbb{a}}_{\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i, \mathbb{p}_i)$, $i = 1, ..., n$: matriz-coluna $\underset{\sim}{\mathbb{a}}$ do subsistema $\mathscr{B}_i$.
- $\underset{\sim}{\dot{\mathbb{\omega}}}_{\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i, \mathbb{p}_i)$, $i = 1, ..., n$: matriz-coluna $\underset{\sim}{\dot{\mathbb{\omega}}}$ do subsistema $\mathscr{B}_i$.
- $\mathbb{M}_{\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i)$, $i = 0, ..., n$: matriz de inércia generalizada do subsistema $\mathscr{B}_i$.
- $\mathbb{v}_{\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i, \mathbb{p}_i)$, $i = 0, ..., n$: matriz-coluna das forças de inércia giroscópica e atrito generalizadas do subsistema $\mathscr{B}_i$.
- $\mathbb{g}_{\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i)$, $i = 0, ..., n$: matriz-coluna dos esforços gravitacionais generalizados do subsistema $\mathscr{B}_i$.
- $\mathbb{u}_{\mathscr{B}_i}$, $i = 0, ..., n$: matriz-coluna dos esforços ativos externos generalizados aplicados ao subsistema $\mathscr{B}_i$.

5.1 Modelo dos subsistemas

O modelo dinâmico de cada subsistema desacoplado pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbb{f}}_{\mathscr{B}_i}(\mathbb{u}_i, \mathbb{q}_i, \dot{\mathbb{q}}_i, \ddot{\mathbb{q}}_i) = \mathbb{u}_{\mathscr{B}_i} - \Big(\mathbb{M}_{\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i)\ddot{\mathbb{q}}_i + \mathbb{v}_{\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i, \dot{\mathbb{q}}_i) + \mathbb{g}_{\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i)\Big) = \mathbb{0},\ i = 0, ..., n \tag{5.1}$$

Sendo que para $i = 0$ temos o modelo do efetuador/plataforma e para $i > 0$ temos os modelos dos mecanismos seriais obtidos anteriormente.

O trabalho virtual dos esforços não-reativos (ativos e inerciais) de cada subsistema é dado por:

$$\delta W_i = \delta \mathbb{q}_i^{\mathsf{T}} \cdot \bar{\mathbb{f}}_{\mathscr{B}_i},\ i = 0, ..., n \tag{5.2}$$

Para os subsistemas seriais, as matrizes $\mathbb{M}_{\mathscr{B}_i}$, $\mathbb{v}_{\mathscr{B}_i}$ e $\mathbb{g}_{\mathscr{B}_i}$ são obtidas utilizando o algoritmo de modelagem de mecanismos seriais apresentado anteriormente. Para o efetuador, iremos utilizar o modelo de um corpo rígido livre no espaço, que realiza apenas translação. Sendo assim, aplicando Teorema do Movimento do Baricentro no efetuador, obtemos os esforços não-reativos nele aplicados:

$$\boldsymbol{f} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{g}}^{\mathcal{N}_0} + m\boldsymbol{g} \tag{5.3}$$

Aplicando as equações vetoriais no sistema $\mathtt{N}$, temos:

$$[\boldsymbol{f}]_{\mathtt{N}_0} = -m\left[\boldsymbol{a}_{\mathrm{g}}^{\mathcal{N}_0}\right]_{\mathtt{N}_0} + m\,[\boldsymbol{g}]_{\mathtt{N}_0} \tag{5.4}$$

Definindo:

$$\mathbb{q}^* = [\mathrm{g}]_{\mathtt{N}_0} \tag{5.5}$$

Temos:

$$\bar{\mathbb{f}}_{\mathscr{B}_0} = -m\ddot{\mathbb{q}}^* + m\mathfrak{g} \tag{5.6}$$

Portanto:

$$\mathbb{M}_{\mathscr{B}_0} = m\mathbb{1} \tag{5.7}$$

$$\mathbb{v}_{\mathscr{B}_0} = \mathbb{0} \tag{5.8}$$

$$\mathbb{g}_{\mathscr{B}_0} = -m\mathfrak{g} \tag{5.9}$$

5.2 Vínculos cinemáticos entre subsistemas

5.2.1 Vínculos de posição

Seja $\mathtt{p}_i$ um ponto pertencente à plataforma/efetuador $\mathscr{B}_0$ e também ao efetuador do subsistema serial $\mathscr{B}_i$. Sendo assim, é possível relacionar as coordenadas do ponto $\mathtt{p}_i$ escritas no sistema $\mathtt{N}_0$ partindo da plataforma/efetuador $\mathscr{B}_0$ e da cadeia serial $\mathscr{B}_i$:

$$[\mathrm{p}_i]_{\mathtt{N}_0} = [\mathbf{1}]_{\mathtt{N}_0|\mathtt{B}}\,[\mathrm{p}_i]_{\mathtt{B}} + [\mathrm{g}]_{\mathtt{N}_0} = [\mathbf{1}]_{\mathtt{N}_0|\mathtt{N}_i}\,[\mathrm{p}_i]_{\mathtt{N}_i} + [\mathrm{o}_i]_{\mathtt{N}_0} \tag{5.10}$$

Sabe-se que $[\mathrm{g}]_{\mathtt{N}_0} = \mathbb{q}^*$ e $[\mathrm{p}_i]_{\mathtt{N}_i} = \mathbb{x}_i(\mathbb{q}_i)$. Tendo em vista que $[\mathrm{p}_i]_{\mathtt{B}}$, $[\mathbf{1}]_{\mathtt{N}_0|\mathtt{N}_i}$, $[\mathrm{o}_i]_{\mathtt{N}_0}$ e $[\mathbf{1}]_{\mathtt{N}_0|\mathtt{B}}$ são constantes, definindo:

$$\mathbb{d}_i = [\mathrm{o}_i]_{\mathtt{N}_0} - [\mathbf{1}]_{\mathtt{N}_0|\mathtt{B}}\,[\mathrm{p}_i]_{\mathtt{B}} \tag{5.11}$$

$$\mathbb{E}_i = [\mathbf{1}]_{\mathtt{N}_0|\mathtt{B}} \tag{5.12}$$

Temos:

$$\mathbb{q}^* = \mathbb{d}_i + \mathbb{E}_i \cdot \mathbb{x}_i(\mathbb{q}_i),\ i = 1, ..., n \tag{5.13}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \vdots \\ \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \mathbb{q}^* = \begin{bmatrix} \mathbb{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{d}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{E}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{x}_1(\mathbb{q}_1) \\ \vdots \\ \mathbb{x}_n(\mathbb{q}_n) \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Além disso, em alguns casos é necessário incluir vínculos afins entre as coordenadas generalizadas, ou seja:

$$\mathbb{D}_\oplus \cdot \mathbb{q}^* = \mathbb{d}_\oplus + \mathbb{F}_\oplus \cdot \mathbb{q}^\diamond \tag{5.15}$$

Juntando a equação (5.15) à equação (5.14), temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \vdots \\ \mathbb{1} \\ \mathbb{D}_\oplus \end{bmatrix} \cdot \mathbb{q}^* = \begin{bmatrix} \mathbb{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{d}_n \\ \mathbb{d}_\oplus \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{E}_n \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{x}_1(\mathbb{q}_1) \\ \vdots \\ \mathbb{x}_n(\mathbb{q}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \vdots \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{F}_\oplus \end{bmatrix} \cdot \mathbb{q}^\diamond \tag{5.16}$$

Sendo assim, os vínculos de posição entre subsistemas podem ser descritos de maneira genérica por:

$$\overline{\mathbb{q}}(\mathbb{q}) = \mathbb{D}\cdot\mathbb{q}^{*} - \mathbb{d} - \mathbb{E}\cdot\mathbb{x}(\mathbb{q}) - \mathbb{F}\cdot\mathbb{q}^{\diamond} = \mathbb{0} \tag{5.17}$$

Sendo:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \dots & \mathbb{1} & \mathbb{D}_{\oplus}^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{5.18}$$

$$\mathbb{d} = \begin{bmatrix} \mathbb{d}_1^{\mathsf{T}} & \dots & \mathbb{d}_n^{\mathsf{T}} & \mathbb{d}_{\oplus}^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{5.19}$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{E}_n \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

$$\mathbb{x}(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{x}_1(\mathbb{q}_1)^{\mathsf{T}} & \dots & \mathbb{x}_n(\mathbb{q}_n)^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{5.21}$$

5.2.2 Vínculos de velocidades lineares

Derivando no tempo a equação (5.17), temos:

$$\dot{\overline{\mathbb{q}}}(\mathbb{q},\dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{D}\cdot\dot{\mathbb{q}}^{*} - \mathbb{E}\cdot\dot{\mathbb{x}}(\mathbb{q},\dot{\mathbb{q}}) - \mathbb{F}\cdot\dot{\mathbb{q}}^{\diamond} = \mathbb{0} \tag{5.22}$$

A derivada $\dot{\mathbb{x}}$ pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbb{x}}(\mathbb{q},\dot{\mathbb{q}}) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\begin{bmatrix} \mathbb{x}_1(\mathbb{q}_1) \\ \vdots \\ \mathbb{x}_n(\mathbb{q}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v\,\mathscr{B}_1}(\mathbb{q}_1)\cdot\dot{\mathbb{q}}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{J}_{v\,\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_n)\cdot\dot{\mathbb{q}}_n \end{bmatrix} = \mathbb{J}_{\mathsf{v}}(\mathbb{q}^{\diamond})\cdot\dot{\mathbb{q}}^{\diamond} \tag{5.23}$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{\mathsf{v}}(\mathbb{q}^{\diamond}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v\,\mathscr{B}_1}(\mathbb{q}_1) & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{J}_{v\,\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_n) \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

Assim, substituindo (5.23) em (5.22), obtemos:

$$\dot{\overline{\mathbb{q}}}(\mathbb{q},\mathbb{p}) = \mathbb{D}\cdot\dot{\mathbb{q}}^{*} - (\mathbb{E}\cdot\mathbb{J}_{\mathsf{v}}(\mathbb{q}^{\diamond}) + \mathbb{F})\cdot\dot{\mathbb{q}}^{\diamond} = \mathbb{0} \tag{5.25}$$

5.2.3 Vínculos de velocidades angulares

Supondo que os efetuadores de cada cadeia serial $\mathscr{B}_i$ estejam ligados rigidamente à plataforma/efetuador $\mathscr{B}_0$, temos que todos apresentam velocidade angular em relação a $\mathtt{N}_0$, tendo em vista que $\mathcal{B}_0$ só translada. Sendo assim, obtem-se as seguintes relações:

$$\left[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{N}_0}\right]_{\mathtt{N}_0} = \mathbb{0} = [\mathbf{1}]_{\mathtt{N}_0|\mathtt{N}_i} \left[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{N}_i}\right]_{\mathtt{N}_i},\ i = 1, ..., n \tag{5.26}$$

Sabe-se que $[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{N}_i}]_{\mathtt{N}_i} = \mathbb{J}_{\omega\,\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i)\dot{\mathbb{q}}_i$ e que $\mathbb{E}_i = [\mathbf{1}]_{\mathtt{N}_0|\mathtt{N}_i}$. Sendo assim, temos:

$$\mathbb{0} = \mathbb{E}_i \cdot \mathbb{J}_{\omega\,\mathscr{B}_i}(\mathbb{q}_i)\dot{\mathbb{q}}_i,\ i = 1, ..., n \tag{5.27}$$

Assim:

$$\mathbb{0} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{E}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{\omega\,\mathscr{B}_1}(\mathbb{q}_1) & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{J}_{\omega\,\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbb{q}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbb{q}}_n \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

Sendo assim, os vínculos de posição entre subsistemas podem ser descritos de maneira genérica por:

$$\overline{\mathbb{\omega}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = -\mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_{\mathsf{w}}(\mathbb{q}^\diamond) \cdot \dot{\mathbb{q}}^\diamond = \mathbb{0} \tag{5.29}$$

Sendo:

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{E}_n \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

$$\mathbb{J}_{\mathsf{w}}(\mathbb{q}^\diamond) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{\omega\,\mathscr{B}_1}(\mathbb{q}_1) & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{J}_{\omega\,\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_n) \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

5.2.4 Vínculos de quasi-velocidades

Os vínculos de quasi-velocidades são dados pela união dos vínculos de velocidades lineares e dos vínculos de velocidades angulares, ou seja:

$$\overline{\mathbb{p}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \begin{bmatrix} \dot{\overline{\mathbb{q}}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \\ \overline{\mathbb{\omega}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \cdot \dot{\mathbb{q}}^* - \mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_{\mathsf{v}}(\mathbb{q}^\diamond) \cdot \dot{\mathbb{q}}^\diamond - \mathbb{F} \cdot \dot{\mathbb{q}}^\diamond \\ -\mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_{\mathsf{w}}(\mathbb{q}^\diamond) \cdot \dot{\mathbb{q}}^\diamond \end{bmatrix} = \mathbb{0} \tag{5.32}$$

Repare que (5.32) pode ser reescrita como:

$$\overline{\mathbb{p}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{A}(\mathbb{q})\dot{\mathbb{q}} = \mathbb{0} \tag{5.33}$$

Sendo $\mathbb{A}$ dado por:

$$\mathbb{A}(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{D} & -(\mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_{\mathsf{v}}(\mathbb{q}^{\diamond}) + \mathbb{F}) \\ \mathbb{0} & -\mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_{\mathsf{w}}(\mathbb{q}^{\diamond}) \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

5.2.5 Vínculos de quasi-acelerações

Derivando (5.32), temos:

$$\dot{\overline{\mathbb{p}}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) = \begin{bmatrix} \ddot{\overline{\mathbb{q}}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) \\ \dot{\overline{\omega}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \cdot \ddot{\mathbb{q}}^{*} - \mathbb{E} \cdot (\mathbb{J}_{\mathsf{v}}(\mathbb{q}^{\diamond}) \cdot \ddot{\mathbb{q}}^{\diamond} + \underset{\sim}{\mathbb{a}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}})) - \mathbb{F} \cdot \ddot{\mathbb{q}}^{\diamond} \\ -\mathbb{Q} \cdot (\mathbb{J}_{\mathsf{w}}(\mathbb{q}^{\diamond}) \cdot \ddot{\mathbb{q}}^{\diamond} + \underset{\sim}{\dot{\omega}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}})) \end{bmatrix} = \mathbb{0} \tag{5.35}$$

Sendo:

$$\underset{\sim}{\mathbb{a}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbb{a}}_{\mathscr{B}_1}(\mathbb{q}_1, \dot{\mathbb{q}}_1)^{\mathsf{T}} & \dots & \underset{\sim}{\mathbb{a}}_{\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_n, \dot{\mathbb{q}}_n)^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{5.36}$$

$$\underset{\sim}{\dot{\omega}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\dot{\omega}}_{\mathscr{B}_1}(\mathbb{q}_1, \dot{\mathbb{q}}_1)^{\mathsf{T}} & \dots & \underset{\sim}{\dot{\omega}}_{\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_n, \dot{\mathbb{q}}_n)^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{5.37}$$

Repare que (5.35) pode ser reescrita como:

$$\dot{\overline{\mathbb{p}}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) = \mathbb{A}(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{b}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{0} \tag{5.38}$$

Sendo:

$$\mathbb{b}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = -\begin{bmatrix} \mathbb{E} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{a}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \\ \mathbb{Q} \cdot \underset{\sim}{\dot{\omega}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

5.3 Acoplamento de subsistemas

Seja $\mathbb{f}$ a matriz-coluna contendo todos os sistemas de forças não-reativas generalizadas:

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{f}}_{\mathscr{B}_0} \\ \vdots \\ \overline{\mathbb{f}}_{\mathscr{B}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{u}_{\mathscr{B}_0} \\ \vdots \\ \mathbb{u}_{\mathscr{B}_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{\mathscr{B}_0}(\mathbb{q}_0) & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{M}_{\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_n) \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbb{p}} - \begin{bmatrix} \nu_{\mathscr{B}_0}(\mathbb{q}_0, \dot{\mathbb{q}}_0) \\ \vdots \\ \nu_{\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_n, \dot{\mathbb{q}}_n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{g}_{\mathscr{B}_0}(\mathbb{q}_0) \\ \vdots \\ \mathbb{g}_{\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_0) \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

Definindo:

$$\mathbb{M}'(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{\mathscr{B}_0}(\mathbb{q}_0) & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{M}_{\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_n) \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

$$\mathbb{v}'(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbb{v}_{\mathscr{B}_0}(\mathbb{q}_0, \dot{\mathbb{q}}_0)^\mathsf{T} & \dots & \mathbb{v}_{\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_n, \dot{\mathbb{q}}_n)^\mathsf{T} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \tag{5.42}$$

$$\mathbb{g}'(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{g}_{\mathscr{B}_0}(\mathbb{q}_0)^\mathsf{T} & \dots & \mathbb{g}_{\mathscr{B}_n}(\mathbb{q}_0)^\mathsf{T} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \tag{5.43}$$

$$\mathbb{u}' = \begin{bmatrix} \mathbb{u}_{\mathscr{B}_0}^\mathsf{T} & \dots & \mathbb{u}_{\mathscr{B}_n}^\mathsf{T} \end{bmatrix}^\mathsf{T} \tag{5.44}$$

(5.40) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{f} = \mathbb{u}' - \mathbb{M}'(\mathbb{q}) \cdot \ddot{\mathbb{q}} - \mathbb{v}'(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) - \mathbb{g}'(\mathbb{q}) \tag{5.45}$$

Pelo princípio de D'Alambert, temos que:

$$\sum_{i=0}^{n} \delta W_i = \sum_{i=0}^{n} \delta \mathbb{q}_i^\mathsf{T} \cdot \bar{\mathbb{f}}_{\mathscr{B}_i} = 0 \tag{5.46}$$

Ou seja:

$$\delta \mathbb{q}^\mathsf{T} \cdot \mathbb{f} = \mathbb{0} \tag{5.47}$$

Além disso, a partir da equação (5.33), temos que:

$$\mathbb{A}(\mathbb{q}) \delta \mathbb{q} = \mathbb{0} \tag{5.48}$$

$\mathbb{q}$ pode ser escrita em função de $\mathbb{q}^\#$ e $\mathbb{q}^\circ$ da seguinte maneira:

$$\mathbb{q} = \mathbb{Q}^\# \mathbb{q}^\# + \mathbb{Q}^\circ \mathbb{q}^\circ \tag{5.49}$$

Sendo $\mathbb{Q}^\#$ e $\mathbb{Q}^\circ$ matrizes constantes que contém apenas zeros e uns, contendo apenas um "1" por coluna. Aplicando o operador variação em (5.49), tem-se que:

$$\delta \mathbb{q} = \mathbb{Q}^\# \delta \mathbb{q}^\# + \mathbb{Q}^\circ \delta \mathbb{q}^\circ \tag{5.50}$$

Substituindo (5.50) em (5.48), podemos isolar $\delta \mathbb{q}^\circ$ em função de $\delta \mathbb{q}^\#$:

$$\delta \mathbb{q}^\circ = -(\mathbb{A} \mathbb{Q}^\circ)^{-1} \mathbb{A} \mathbb{Q}^\# \delta \mathbb{q}^\# \tag{5.51}$$

Substuindo (5.51) em (5.50), obtemos $\delta\mathbb{q}$ apenas em função de $\mathbb{q}$ e $\delta\mathbb{q}^{\#}$:

$$\delta\mathbb{q} = \mathbb{C}(\mathbb{q}) \cdot \delta\mathbb{q}^{\#} \tag{5.52}$$

Sendo:

$$\mathbb{C}(\mathbb{q}) = \mathbb{Q}^{\#} - (\mathbb{A}\mathbb{Q}^{\circ})^{-1}\mathbb{A}\mathbb{Q}^{\#} \tag{5.53}$$

Além disso, repare que $\mathbb{C}$ respeita a seguinte relação:

$$\dot{\mathbb{q}} = \mathbb{C}(\mathbb{q}) \cdot \dot{\mathbb{q}}^{\#} \tag{5.54}$$

Substuindo (5.52) em (5.47), temos:

$$\delta\mathbb{q}^{\#\mathsf{T}}\mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{f} = \mathbb{0} \tag{5.55}$$

Tendo em vista que $\mathbb{q}^{\#}$ são coordenadas independentes, $\delta\mathbb{q}^{\#}$ são variações arbitrárias. Sendo assim, a equação dinâmica do mecanismo paralelo pode ser escrita como:

$$\mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{f} = \mathbb{0} \tag{5.56}$$

Ou seja:

$$\mathbb{C}(\mathbb{q})^{\mathsf{T}}(\mathbb{M}'(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{v}'(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) + \mathbb{g}'(\mathbb{q})) = \mathbb{C}(\mathbb{q})^{\mathsf{T}}\mathbb{u}' \tag{5.57}$$

5.4 Simulação dinâmica direta

É possível realizar a simulação dinâmica direta do sistema utilizando a equação dinâmica (5.57) e os vínculos de quasi-acelerações (5.35):

$$\begin{cases} \mathbb{C}(\mathbb{q})^{\mathsf{T}}(\mathbb{M}'(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{v}'(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) + \mathbb{g}'(\mathbb{q})) = \mathbb{C}(\mathbb{q})^{\mathsf{T}}\mathbb{u}' \\ \mathbb{A}(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{b}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{0} \end{cases} \tag{5.58}$$

Reescrevendo em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbb{q})^{\mathsf{T}}\mathbb{M}'(\mathbb{q}) \\ \mathbb{A}(\mathbb{q}) \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbb{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbb{q})^{\mathsf{T}}(\mathbb{u}' - \mathbb{v}'(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) - \mathbb{g}'(\mathbb{q})) \\ -\mathbb{b}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \end{bmatrix} \tag{5.59}$$

É necessário que as condições iniciais respeitem os vínculos de posição e velocidades. Com isso, teoricamente, os vínculos continuariam sendo respeitados na solução do sistema de EDOs. Porém, devido a erros numéricos de truncamento e erros associados ao método de integração numérica utilizado, os vínculos de posição e velocidade podem deixar de ser respeitados. Esse problema pode ser resolvido utilizando a técnica das constantes de estabilização de Baumgarte [?]. A idéia é substituir a equação dos vínculos de aceleração pela seguinte equação:

$$\overline{\mathbb{p}}'(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) = \begin{bmatrix} \ddot{\overline{\mathbb{q}}} + 2\lambda\dot{\overline{\mathbb{q}}} + \lambda^2\overline{\mathbb{q}} \\ \dot{\overline{\mathbb{\omega}}} + \lambda\overline{\mathbb{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\overline{\mathbb{q}}} \\ \dot{\overline{\mathbb{\omega}}} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\overline{\mathbb{q}}} \\ \overline{\mathbb{\omega}} \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{q}} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} = \mathbb{0} \tag{5.60}$$

Substituindo (5.32) e (5.35) em (5.60), temos:

$$\overline{\mathbb{p}}'(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \ddot{\mathbb{q}}) = \mathbb{A}(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{b}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) + \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \mathbb{A}(\mathbb{q}) \cdot \dot{\mathbb{q}} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{q}}(\mathbb{q}) \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} = \mathbb{0} \tag{5.61}$$

Impondo que (5.61) seja respeitada, garantimos que $\overline{\mathbb{q}}(\mathbb{q})$ e $\overline{\mathbb{\omega}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}})$ tenderão exponencialmente a zero independentemente das condições iniciais, para $\lambda > 0$, ou seja, irá fazer com que os vínculos de posição e velocidades sejam respeitados mesmo havendo erros de truncamento e erros associados ao método de integração numérica de EDOs. É importante ressaltar que λ é superiomente limitado pelo passo de integração h e pelo método de integração, porém, escolhendo $\lambda = 1/h$ já garante a estabilidade do método para praticamente qualquer método de integração numérica de EDOs.

Sendo assim, o sistema de EDOs que será utilizado para realizar a simualação dinâmica direta é dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbb{q})^\mathsf{T}\mathbb{M}'(\mathbb{q}) \\ \mathbb{A}(\mathbb{q}) \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbb{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbb{q})^\mathsf{T}(\mathbb{u}' - \mathbb{v}'(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) - \mathbb{g}'(\mathbb{q})) \\ -\mathbb{b}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) - \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \mathbb{A}(\mathbb{q}) \cdot \dot{\mathbb{q}} - \lambda^2 \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{q}}(\mathbb{q}) \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

5.5 Simulação dinâmica inversa

Na simulação dinâmica inversa, são dados os perfis de $\mathbb{q}^\#$, $\dot{\mathbb{q}}^\#$ e $\ddot{\mathbb{q}}^\#$ em função do tempo e obtem-se os perfis dos esforços nos atuadores para a trajetória dada. Para isso, será utilizada a equação dinâmica (5.57):

$$\mathbb{C}(\mathbb{q})^\mathsf{T}(\mathbb{M}'(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{v}'(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) + \mathbb{g}'(\mathbb{q})) = \mathbb{C}(\mathbb{q})^\mathsf{T}\mathbb{u}'$$

Repare que os termos desta equação dependem de $\mathbb{q}$, $\dot{\mathbb{q}}$ e $\ddot{\mathbb{q}}$. Sendo assim, primeiramente é preciso obter $\mathbb{q}$, $\dot{\mathbb{q}}$ e $\ddot{\mathbb{q}}$ dados $\mathbb{q}^\#$, $\dot{\mathbb{q}}^\#$ e $\ddot{\mathbb{q}}^\#$.

$\mathbb{q}$ é obtido resolvendo numéricamente a equação dos vínculos de posição (5.16), a qual é um sistema de equações algébricas não lineares.

$$\overline{\mathbb{q}}(\mathbb{q}) = \mathbb{0}$$

Tendo obtido $\mathbb{q}$, $\dot{\mathbb{q}}$ é obtido pela equação (5.54):

$$\dot{\mathbb{q}} = \mathbb{C}(\mathbb{q}) \cdot \dot{\mathbb{q}}^{\#}$$

Para obter $\ddot{\mathbb{q}}$, substitui-se a segunda derivada temporal da equação (5.49) na equação dos vínculos de quasi-acelerações (5.38):

$$\mathbb{A}\mathbb{Q}^{\#}\ddot{\mathbb{q}}^{\#} + \mathbb{A}\mathbb{Q}^{\circ}\ddot{\mathbb{q}}^{\circ} + \mathbb{b} = \mathbb{0}$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathbb{q}}^{\circ} = -(\mathbb{A}\mathbb{Q}^{\circ})^{-1}(\mathbb{b} + \mathbb{A}\mathbb{Q}^{\#}\ddot{\mathbb{q}}^{\#})$$

$$\therefore \ddot{\mathbb{q}} = (\mathbb{Q}^{\#} - (\mathbb{A}\mathbb{Q}^{\circ})^{-1}\mathbb{A}\mathbb{Q}^{\#}) \cdot \ddot{\mathbb{q}}^{\#} - (\mathbb{A}\mathbb{Q}^{\circ})^{-1}\mathbb{b} \tag{5.63}$$

Comparando (5.53) com (5.63), temos:

$$\therefore \ddot{\mathbb{q}} = \mathbb{C}(\mathbb{q}) \cdot \ddot{\mathbb{q}}^{\#} + \mathbb{c}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \tag{5.64}$$

Sendo:

$$\mathbb{c}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = -(\mathbb{A}(\mathbb{q})\mathbb{Q}^{\circ})^{-1} \cdot \mathbb{b}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \tag{5.65}$$

Além disso, normalmente não há atuadores em todas as juntas do mecanismo paralelo. Sendo assim, $\mathbb{u}'$ pode ser reescrito como:

$$\mathbb{u}' = \mathbb{U} \cdot \mathbb{u}^{\star} \tag{5.66}$$

Sendo $\mathbb{U}$ uma matriz constante composta por zeros e uns, e $\mathbb{u}^{\star}$ os esforços aplicados pelos atuadores.

Substituindo (5.54), (5.64) e (5.66) em (5.57), temos:

$$\mathbb{C}^{\mathsf{T}}(\mathbb{M}'(\mathbb{C} \cdot \ddot{\mathbb{q}}^{\#} + \mathbb{c}) + \mathbb{v}' + \mathbb{g}') = \mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{U} \cdot \mathbb{u}^{\star} \tag{5.67}$$

Definindo:

$$\mathbb{Z}(\mathbb{q})^{\mathsf{T}} = \mathbb{C}(\mathbb{q})^{\mathsf{T}}\mathbb{U} \tag{5.68}$$

Temos:

$$\mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{M}'\mathbb{C}\cdot\ddot{\mathbb{q}}^{\#}+\mathbb{C}^{\mathsf{T}}(\mathbb{M}'\mathbb{c}+\mathbb{v}')+\mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{g}'=\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}\mathbb{u}^{\star} \tag{5.69}$$

Sendo assim, (5.69) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{M}_{\mathscr{M}}(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}}^{\#}+\mathbb{v}_{\mathscr{M}}(\mathbb{q},\dot{\mathbb{q}})+\mathbb{g}_{\mathscr{M}}(\mathbb{q})=\mathbb{Z}(\mathbb{q})^{\mathsf{T}}\mathbb{u}^{\star} \tag{5.70}$$

Sendo:

$$\mathbb{M}_{\mathscr{M}}=\mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{M}'\mathbb{C} \tag{5.71}$$

$$\mathbb{v}_{\mathscr{M}}=\mathbb{C}^{\mathsf{T}}(\mathbb{M}'\mathbb{c}+\mathbb{v}') \tag{5.72}$$

$$\mathbb{g}_{\mathscr{M}}=\mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{g}' \tag{5.73}$$

Sendo assim, para mecanismos sem atuação redundante, a simulação dinâmica inversa é feita utilizando a equação (5.70) para obter os esforços nos atuadores, dados $\mathbb{q}^{\#}$, $\dot{\mathbb{q}}^{\#}$ e $\ddot{\mathbb{q}}^{\#}$, obtendo $\mathbb{q}$ através da solução numérica da equação (5.17) e $\dot{\mathbb{q}}$ através de (5.54).

Para o caso de mecanismos com atuação redundante, há infinitas para $\mathbb{u}^{\star}$ de modo que o mecanismo realize a trajetória desejada. Sendo assim, normalmente é escolhida uma solução que seja solução de um problema de otimização (como a minimização da energia consumida), tendo a equação (5.70) como restrição.

6 PROJETO DOS CONTROLADORES

Esta subseção é destinada ao projeto de controladores não lineares, destinados ao controle de posição de plataformas paralelas cujo modelo dinâmico para simulação dinâmica inversa é dado por (5.70), utilizando a técnica de Linearização por Realimentação aliada a outras leis de controle não linear, como as leis Controle por Modos Deslizantes em Tempo Contínuo [**?**, **?**], e também aliada a técnicas de controle linear, como a alocação de pólos no espaço de estados (Controle por Torque Computado), alocação de pólos no domínio da frequência com observador de disturbios, e o Controle por Modos Deslizantes em Tempo Discreto.

Para facilitar a leitura das deduções e com o intuito de deixar um pouco menos carregada a notação, será adotada a seguinte notação:

$$\mathbb{H}(\mathbb{q}) = \mathbb{M}_{\mathscr{M}}(\mathbb{q}) \tag{6.1}$$

$$\mathbb{h}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{v}_{\mathscr{M}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) + \mathbb{g}_{\mathscr{M}}(\mathbb{q}) \tag{6.2}$$

$$\mathbb{u} = \mathbb{Z}(\mathbb{q})^{\mathsf{T}} \mathbb{u}^{\star} \tag{6.3}$$

Sendo assim, equação (5.70) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{H}(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}}^{\#} + \mathbb{h}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{u} \tag{6.4}$$

Além disso, definimos o erro de controle como sendo:

$$\mathbb{e} = \mathbb{q}_d^{\#} - \mathbb{q}^{\#} \tag{6.5}$$

Sendo $\mathbb{q}_d^{\#}$ o sinal de referência

6.1 Linearização por Realimentação (LR)

A técnica de controle conhecida como Linearização por Realimentação consiste utilizar a entrada de controle para cancelar as não linearidades do sistema, de modo a obter um sistema linear equivalente, normalmente desacoplado, no qual é possível utilizar inúmeras técnicas de controle linear.

Tendo em vista a equação dinâmica (6.4), é proposta a seguinte lei de Linearização por Realimentação:

$$\mathbb{u} = \hat{\mathbb{H}}(\mathbb{q})(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} - \mathbb{u}') + \hat{\mathbb{h}}(\mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \tag{6.6}$$

Sendo $\hat{\mathbb{H}}$ e $\hat{\mathbb{h}}$ estimadores para $\mathbb{H}$ e $\mathbb{h}$, respectivamente.

Substituindo a lei de controle (6.6) em (6.4), temos:

$$\ddot{\mathbb{e}} = \mathbb{u}' + \mathbb{\delta}(t, \mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}, \mathbb{u}') \tag{6.7}$$

Sendo:

$$\mathbb{\delta} = \mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} - \mathbb{u}') + \tilde{\mathbb{h}}) \tag{6.8}$$

$$\tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H} - \hat{\mathbb{H}} \tag{6.9}$$

$$\tilde{\mathbb{h}} = \mathbb{h} - \hat{\mathbb{h}} \tag{6.10}$$

Repare que, para o caso em que não há erros de modelagem ($\tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{0}$ e $\tilde{\mathbb{h}} = \mathbb{0} \Rightarrow \mathbb{\delta} = \mathbb{0}$), a dinâmica de cada componente do erro se comporta como um sistema linear de segunda ordem forçado com inércia unitária e duplo integrador em $s = 0$.

6.2 Controle por Torque Computado (CTC)

A lei de Controle por Torque Computado tem o intuito de fazer com que a dinâmica de cada componente do erro de controle se comporte como um movimento harmônico amortecido, fazendo com que o erro tenda assintóticamente a zero independentemente da condição inicial, na ausência de erros de modelagem. Para atingir este objetivo, basta utilizar a seguinte lei de realimentação de estados para $\mathbb{u}'$:

$$\mathbb{u}' = -\underline{k}_v \dot{\mathbb{e}} - \underline{k}_p \mathbb{e} \tag{6.11}$$

Sendo $\underline{k}_v$ e $\underline{k}_p$ matrizes diagonais positiva-definidas.

Substituindo a lei de controle (6.11) em (6.7), temos:

$$\ddot{\mathbb{e}} + \underline{k_v}\dot{\mathbb{e}} + \underline{k_p}\mathbb{e} = \mathbb{G}'(t, \mathbb{q}, \dot{\mathbb{q}}) \tag{6.12}$$

Sendo:

$$\mathbb{G}' = \mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{k}_v\dot{\mathbb{e}} + \underline{k}_p\mathbb{e}) + \tilde{\mathbb{h}}) \tag{6.13}$$

Repare que o desempenho desta técnica de controle depende diretamente da representatividade do modelo obtido dentro das condições de operação do sistema.

6.3 Controle por Modos Deslizantes em Tempo Contínuo

O Controle por Modos Deslizantes é uma técnica de controle não-linear robusto, a qual tem como principal vantagem uma menor sensibilidade aos erros de modelagem, sendo robusto tanto a incertezas estruturadas quanto a incertezas não estruturadas. Nesta subseção serão deduzidas 4 leis de controle baseadas nesta técnica.

6.3.1 Dedução das leis de controle

Sejam $\underline{\lambda}$, $\underline{k}_v$ e $\underline{k}_p$ matrizes diagonais positiva-definidas. Assim, pode-se definir uma matriz-coluna $\mathbb{s}$ de duas maneiras diferentes:

$$\mathbb{s} = \dot{\mathbb{e}} + \underline{\lambda}\mathbb{e} \tag{6.14}$$

e

$$\mathbb{s} = \ddot{\mathbb{e}} + \underline{k}_v\dot{\mathbb{e}} + \underline{k}_p\mathbb{e} \tag{6.15}$$

Tendo definido $\mathbb{s}$, define-se a chamada superfície de escorregamento:

$$\mathbb{s} = \mathbb{0} \tag{6.16}$$

Repare que fazendo com o sistema atinja a superfície de escorregamento, o erro de controle tenderá assintóticamente a zero, independente de qual das definições de $\mathbb{s}$ for escolhida.

Seja $V(\mathbb{s})$ uma função de Lyapunov dada por:

$$V(\mathbb{s}) = \frac{1}{2}\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\mathbb{W}\,\mathbb{s} \tag{6.17}$$

Sendo $\mathbb{W}$ uma matriz simétrica positiva-definida. Pela teoria de estabilidade de Lyapunov, se $\dot{V} < 0 \; \forall \mathbb{s} \neq \mathbb{0}$, $\mathbb{s}$ converge para $\mathbb{0}$ independentemente das condições iniciais do sistema. Para que isso seja possível, é imposta a seguinte condição:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} V(\mathbb{s}) = \mathbb{s}^{\mathsf{T}} \left(\mathbb{W} \dot{\mathbb{s}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} \mathbb{s} \right) \leq -\mathbb{s}^{\mathsf{T}} \underline{\eta} \, \mathsf{sinal}(\mathbb{s}) \tag{6.18}$$

$$\Rightarrow \mathbb{s}^{\mathsf{T}} \left(\mathbb{W} \dot{\mathbb{s}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} \mathbb{s} + \underline{\eta} \, \mathsf{sinal}(\mathbb{s}) \right) \leq 0 \tag{6.19}$$

Sendo $\underline{\eta}$ uma matriz diagonal positiva-definida. Repare que $\mathbb{s}^{\mathsf{T}} \underline{\eta} \, \mathsf{sinal}(\mathbb{s})$ é a soma ponderada dos módulos das componentes de $\mathbb{s}$, o que implica que $-\mathbb{s}^{\mathsf{T}} \underline{\eta} \, \mathsf{sinal}(\mathbb{s}) < 0 \; \forall \mathbb{s} \neq \mathbb{0}$. Repare também que $V(\mathbb{s})$ pode ser interpretada como uma distância quadrática do sistema até a superfície de escorregamento. A imposição da condição (6.18) implica que a distância do sistema à superfície de escorregamente é sempre decrescente enquanto o sistema não atingir a superfície de escorregamento, e garante a convergência $\mathbb{s}$ para zero em tempo finito e, a partir deste momento, a convergência assintótica do erro de controle $\mathbb{e}$ para zero.

Para ilustrar, considere $\mathbb{W} = \mathbb{1}$; se $\dot{\mathbb{s}} = -\underline{\eta} \; \mathsf{sinal}(\mathbb{s})$, (6.18) é satisfeita e cada componente de $\mathbb{s}$ respeita a EDO $\dot{s}_i = -\eta_i \; \mathsf{sinal}(s_i)$, a qual converge para zero em um tempo finito de $t_i = \frac{|s_i(0)|}{\eta_i}$.

O projeto do controlador é feito utilizando a condição (6.18), a qual é conhecida como condição de escorregamento, e será subdividido pelas diferentes definições apresentadas para a variável $\mathbb{s}$ ((6.14) e (6.15)).

a) Para $\mathbb{s} = \dot{\mathbb{e}} + \underline{\lambda} \mathbb{e}$:

Derivando (6.14) e substituindo em (6.18), temos:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}} \left(\mathbb{W}(\ddot{\mathbb{e}} + \underline{\lambda} \dot{\mathbb{e}}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} \mathbb{s} + \underline{\eta} \; \mathsf{sinal}(\mathbb{s}) \right) \leq 0 \tag{6.20}$$

Subtituindo (6.7) em (6.20), temos:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}} \left(\mathbb{W}\big(\mathbb{v}' + \underline{\lambda} \dot{\mathbb{e}} + \mathbb{H}^{-1}\big(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} - \mathbb{v}') + \tilde{\mathbb{h}}\big)\big) + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} \mathbb{s} + \underline{\eta} \; \mathsf{sinal}(\mathbb{s}) \right) \leq 0 \tag{6.21}$$

Definindo:

$$\mathbb{v}' = -\underline{\lambda} \dot{\mathbb{e}} + \mathbb{v}'' \tag{6.22}$$

Temos:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\Big(\mathbb{W}\big((\mathbb{1}-\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}})\mathbb{U}'' + \mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}})\big) + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{W}}\,\mathbb{s} + \underline{\eta}\ \mathsf{sinal}(\mathbb{s})\Big) \leq 0 \qquad (6.23)$$

Note que:

$$\mathbb{1}-\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{1}-\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{H}-\hat{\mathbb{H}}) = \mathbb{H}^{-1}\hat{\mathbb{H}} \qquad (6.24)$$

Sendo assim, são notáveis duas possíveis escolhas para $\mathbb{W}$ que facilitam o projeto do controlador:

$$\mathbb{W} = \mathbb{1} \qquad (6.25)$$

e

$$\mathbb{W} = \mathbb{H} \qquad (6.26)$$

Mais uma vez, o projeto do controlador será subdividido em 2 casos:

a.1) Para $\mathbb{W} = \mathbb{1}$:

Substuindo (6.25) em (6.23), obtem-se:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\Big((\mathbb{1}-\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}})\mathbb{U}'' + \mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}}) + \underline{\eta}\ \mathsf{sinal}(\mathbb{s})\Big) \leq 0 \qquad (6.27)$$

Para satisfazer (6.27), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\mathbb{U}'' = -\underline{k}\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) \qquad (6.28)$$

Sendo $\underline{k}$ uma matriz diagonal positiva-definida, com $\underline{k} \geq \underline{\eta}$. Substituindo (6.28) em (6.27), temos:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\Big(-\big(\underline{k}-\underline{\eta}\big)\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}\,\underline{k}\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}})\Big) \leq 0 \qquad (6.29)$$

Pode-se dizer que, (6.29) é sempre satisfeita se:

$$\mathsf{diag}(\underline{k}) - \mathsf{diag}(\underline{\eta}) \geq |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}\,\underline{k}\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}})| \qquad (6.30)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.30), temos:

$$|\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}\,\underline{k}\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s})+\mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#}+\underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}})+\tilde{\mathbb{h}})| \leq |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}\mathsf{diag}(\underline{k})+|\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#}+\underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}|+|\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{h}}|_{max} \qquad (6.31)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$(\mathbb{1}-|\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max})\cdot\mathsf{diag}(\underline{k}) \geq \mathsf{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}| + |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{h}}|_{max} \qquad (6.32)$$

(6.30) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Existe solução para (6.32) apenas se a matriz $\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}$ for uma *M-matrix*, ou seja, se módulo do maior autovalor de $|\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}$ for menor que 1. Se este for o caso, a solução que minimiza a norma de $\mathsf{diag}(\underline{k})$ é dada por:

$$\mathsf{diag}(\underline{k}) = (\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max})^{-1}(\mathsf{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}| + |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{h}}|_{max}) \quad (6.33)$$

a.2) Para $\mathbb{W} = \mathbb{H}$:

Substuindo (6.26) em (6.23), obtem-se:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\Big(\hat{\mathbb{H}}\mathbb{u}'' + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\,\mathbb{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}} + \tilde{\mathbb{h}}) + \underline{\eta}\ \mathsf{sinal}(\mathbb{s})\Big) \leq 0 \quad (6.34)$$

Para satisfazer (6.34), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\mathbb{u}'' = -\hat{\mathbb{H}}^{-1}\Big(\underline{k}\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \frac{1}{2}\dot{\hat{\mathbb{H}}}\,\mathbb{s}\Big) \quad (6.35)$$

Sendo $\underline{k}$ uma matriz diagonal positiva-definida, com $\underline{k} \geq \underline{\eta}$. Substituindo (6.28) em (6.34), temos:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\Big(-\big(\underline{k} - \underline{\eta}\big)\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}\,\mathbb{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}}\Big) \leq 0 \quad (6.36)$$

Pode-se dizer que, (6.36) é sempre satisfeita se:

$$\mathsf{diag}(\underline{k}) - \mathsf{diag}(\underline{\eta}) \geq \Big|\frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}\,\mathbb{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}}\Big| \quad (6.37)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.37), temos:

$$\Big|\frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}\,\mathbb{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}) + \tilde{\mathbb{h}}\Big| \leq \frac{1}{2}|\dot{\tilde{\mathbb{H}}}|_{max}|\mathbb{s}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}| + |\tilde{\mathbb{h}}|_{max} \quad (6.38)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$\mathsf{diag}(\underline{k}) \geq \mathsf{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2}|\dot{\tilde{\mathbb{H}}}|_{max}|\mathbb{s}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}| + |\tilde{\mathbb{h}}|_{max} \quad (6.39)$$

(6.37) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Sempre existe solução para (6.39), e a solução que minimiza a norma de $\mathsf{diag}(\underline{k})$

é dada por:

$$\mathsf{diag}(\underline{k}) = \mathsf{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2}|\dot{\tilde{\mathbb{H}}}|_{max}|\mathbb{s}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{\lambda}\dot{\mathbb{e}}| + |\tilde{\mathbb{h}}|_{max} \tag{6.40}$$

Repare que as duas leis de controle previamente deduzidas possuem termos descontínuos, os quais podem gerar o efeito conhecido como *chattering*, o qual pode gerar sérios desgastes nos atuadores do sistema e causar vibrações indesejadas no mecanismo. A utilização da definição (6.15) para $\mathbb{s}$ na dedução da lei de controle diminui bastante o efeito do *chattering*, pois utiliza termos que são integrais de funções discontínuas, o que consequentemente gera um perfil muito mais suave para o esforço de controle. Sendo assim, agora serão deduzidas as leis de controle baseadas na definição (6.15) para $\mathbb{s}$.

b) Para $\mathbb{s} = \ddot{\mathbb{e}} + \underline{k}_v\dot{\mathbb{e}} + \underline{k}_p\mathbb{e}$

Substituindo (6.7) em (6.15), temos:

$$\mathbb{s} = \mathbb{v}' + \underline{k}_v\dot{\mathbb{e}} + \underline{k}_p\mathbb{e} + \mathbb{\delta} \tag{6.41}$$

Sendo assim, definimos:

$$\mathbb{v}' = -\underline{k}_v\dot{\mathbb{e}} - \underline{k}_p\mathbb{e} + \mathbb{v}'' \tag{6.42}$$

Portanto:

$$\mathbb{s} = \mathbb{v}'' + \mathbb{H}^{-1}\big(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{k}_v\dot{\mathbb{e}} + \underline{k}_p\mathbb{e} - \mathbb{v}'') + \tilde{\mathbb{h}}\big) \tag{6.43}$$

Definindo:

$$\mathbb{\sigma} = \ddot{\mathbb{q}}_d^{\#} + \underline{k}_v\dot{\mathbb{e}} + \underline{k}_p\mathbb{e} \tag{6.44}$$

Temos:

$$\mathbb{s} = (\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}})\mathbb{v}'' + \mathbb{H}^{-1}\big(\tilde{\mathbb{H}}\mathbb{\sigma} + \tilde{\mathbb{h}}\big) \tag{6.45}$$

Derivando (6.45), temos:

$$\dot{\mathbb{s}} = (\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}})\dot{\mathbb{v}}'' + \mathbb{H}^{-1}\mathbb{c} \tag{6.46}$$

Sendo:

$$\mathbb{c} = (\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})\mathbb{v}'' - \dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\big(\tilde{\mathbb{H}}\mathbb{\sigma} + \tilde{\mathbb{h}}\big) + \dot{\tilde{\mathbb{H}}}\mathbb{\sigma} + \tilde{\mathbb{H}}\dot{\mathbb{\sigma}} + \dot{\tilde{\mathbb{h}}} \tag{6.47}$$

Substituindo (6.46) em (6.18), temos:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\Big(\mathbb{W}((\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}})\dot{\mathbb{v}}'' + \mathbb{H}^{-1}\mathbb{c}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{W}}\mathbb{s} + \underline{\eta}\ \mathsf{sinal}(\mathbb{s})\Big) \leq 0 \tag{6.48}$$

Mais uma vez, são notáveis duas possíveis escolhas para $\mathbb{W}$ que facilitam o projeto do controlador:

$$\mathbb{W} = \mathbb{1} \tag{6.49}$$

e

$$\mathbb{W} = \mathbb{H} \tag{6.50}$$

Subdividido mais uma vez o projeto do controlador será em 2 casos:

b.1) Para $\mathbb{W} = \mathbb{1}$:

Substuindo (6.49) em (6.48), obtem-se:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\Big((\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}})\dot{\mathbb{v}}'' + \mathbb{H}^{-1}\mathbb{e} + \underline{\eta}\ \mathsf{sinal}(\mathbb{s})\Big) \leq 0 \tag{6.51}$$

Para satisfazer (6.51), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\dot{\mathbb{v}}'' = -\underline{k}\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) \tag{6.52}$$

Sendo $\underline{k}$ uma matriz diagonal positiva-definida, com $\underline{k} \geq \underline{\eta}$. Substituindo (6.52) em (6.51), temos:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\Big(- \big(\underline{k} - \underline{\eta}\big)\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}\,\underline{k}\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1}\mathbb{e}\Big) \leq 0 \tag{6.53}$$

Pode-se dizer que, (6.53) é sempre satisfeita se:

$$\mathsf{diag}(\underline{k}) - \mathsf{diag}(\underline{\eta}) \geq |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}\,\underline{k}\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1}\mathbb{e}| \tag{6.54}$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.54), temos:

$$\begin{aligned} &|\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}\,\underline{k}\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1}\Big((\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})\mathbb{v}'' - \dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}\mathbb{\sigma} + \tilde{\mathbb{h}}) + \dot{\tilde{\mathbb{H}}}\mathbb{\sigma} + \tilde{\mathbb{H}}\dot{\mathbb{\sigma}} + \dot{\tilde{\mathbb{h}}}\Big)| \leq \\ &\qquad |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}\mathsf{diag}(\underline{k}) + |\mathbb{H}^{-1}(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max}|\mathbb{v}'' - \mathbb{\sigma}| + |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\dot{\mathbb{\sigma}}| \\ &\qquad + |\mathbb{H}^{-1}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{h}}|_{max} + |\mathbb{H}^{-1}\dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{max} \end{aligned} \tag{6.55}$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}) \cdot \mathsf{diag}(\underline{k}) \geq \mathsf{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1}(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max}|\mathbb{v}'' - \mathbb{\sigma}| + \\ |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\dot{\mathbb{\sigma}}| + |\mathbb{H}^{-1}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{h}}|_{max} + |\mathbb{H}^{-1}\dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{max} \end{aligned} \tag{6.56}$$

(6.54) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Existe solução para (6.56) apenas se a matriz $\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}$ for uma *M-matrix*, ou seja, se módulo do maior autovalor de $|\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}$ for menor que 1. Se este for o caso, a solução que minimiza a norma de $\mathsf{diag}(\underline{k})$ é dada por:

$$\begin{aligned}\mathsf{diag}(\underline{k}) = (\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max})^{-1}(\mathsf{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1}(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max}|\mathbb{v}'' - \mathbb{\sigma}| + \\ |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\dot{\mathbb{\sigma}}| + |\mathbb{H}^{-1}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{h}}|_{max} + |\mathbb{H}^{-1}\dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{max}\end{aligned} \quad (6.57)$$

b.2) Para $\mathbb{W} = \mathbb{H}$:

Substuindo (6.50) em (6.48), obtem-se:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\Big(\hat{\mathbb{H}}\dot{\mathbb{v}}'' + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{s} + \mathbb{e} + \underline{\eta}\ \mathsf{sinal}(\mathbb{s})\Big) \leq 0 \quad (6.58)$$

Para satisfazer (6.58), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\dot{\mathbb{v}}'' = -\hat{\mathbb{H}}^{-1}\Big(\underline{k}\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \frac{1}{2}\dot{\hat{\mathbb{H}}}\,\mathbb{s}\Big) \quad (6.59)$$

Sendo $\underline{k}$ uma matriz diagonal positiva-definida, com $\underline{k} \geq \underline{\eta}$. Substituindo (6.59) em (6.58), temos:

$$\mathbb{s}^{\mathsf{T}}\Big(- \big(\underline{k} - \underline{\eta}\big)\,\mathsf{sinal}(\mathbb{s}) + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}\,\mathbb{s} + \mathbb{e}\Big) \leq 0 \quad (6.60)$$

Pode-se dizer que, (6.60) é sempre satisfeita se:

$$\mathsf{diag}(\underline{k}) - \mathsf{diag}(\underline{\eta}) \geq \Big|\frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}\,\mathbb{s} + \mathbb{e}\Big| \quad (6.61)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.61), temos:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}\,\mathbb{s} + (\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})\mathbb{v}'' - \dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}\mathbb{\sigma} + \tilde{\mathbb{h}}) + \dot{\tilde{\mathbb{H}}}\mathbb{\sigma} + \tilde{\mathbb{H}}\mathbb{\sigma} + \dot{\tilde{\mathbb{h}}}\Big| \leq \frac{1}{2}|\dot{\tilde{\mathbb{H}}}|_{max}|\mathbb{s}| + \\ |(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max}|\mathbb{v}'' - \mathbb{\sigma}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\dot{\mathbb{\sigma}}| + |\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{h}}|_{max} + |\dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{max}\end{aligned} \quad (6.62)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$\mathsf{diag}(\underline{k}) \geq \mathsf{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2}|\dot{\tilde{\mathbb{H}}}|_{max}|\mathbb{s}| + |(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max}|\mathbb{v}'' - \mathbb{\sigma}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\dot{\mathbb{\sigma}}| + |\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{h}}|_{max} + |\dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{max} \quad (6.63)$$

(6.61) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Sempre existe solução para (6.63), e a solução que minimiza a norma de $\mathsf{diag}(\underline{k})$ é dada por:

$$\mathsf{diag}(\underline{k}) = \mathsf{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2}|\dot{\tilde{\mathbb{H}}}|_{max}|\mathbb{s}| + |(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max}|\mathbb{v}'' - \mathbb{\sigma}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\dot{\mathbb{\sigma}}| + |\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{h}}|_{max} + |\dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{max} \tag{6.64}$$

6.3.2 Camada Limite

Uma técnica muito utilizada para diminuir os efeitos do *chattering* no CMD é substituição da função sinal por uma função de saturação nas leis de controle. Definindo:

$$\mathsf{sat}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } |x| \leq 1 \\ \mathsf{sinal}(x), & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \tag{6.65}$$

Sendo assim, no lugar de $\mathsf{sinal}(\mathbb{s})$, será utilizado $\mathsf{sat}(\mathbb{s}/\phi)$ nas leis de controle, sendo ϕ um número positivo conhecido como comprimento da camada limite.

Ao mesmo tempo que a utilização da camada limite diminui os efeitos do *chattering* no sistema, sua utilização não mais garante que o sistema atinja em tempo finito e se mantenha na superfície de escorregamento, apenas garante que o sistema atinja a camada limite ($-\phi < s_i < \phi$, $i = 1, ..., \nu^{\#}$) em tempo finito, e lá se mantenha.

6.3.3 Ganho adaptativo

O cálculo de $\underline{k}$ pode ser um tanto complexo utilizando as equações (6.33), (6.40), (6.57) ou (6.64), pois depende do módulo máximo de matrizes que não possuem expressões explícitas. Tal cálculo pode ser feito numéricamente discretizando a área de trabalho do mecanismo e atribuindo valores máximos e mínimos para cada parâmetro incerto do sistema, obtendo uma matriz $\underline{k}$ que varia conforme a posição do mecanismo. O uso desta estratégia, porém, poderá resultar na obtenção de valores de $\underline{k}$ muito maiores do que o necessário, o que pode amplificar o fenômeno do *chattering*. Sendo assim, é proposta a obtenção da matriz $\underline{k}$ de forma adaptativa, utilizando a seguinte lei de adaptação:

$$\underline{k}_i[k] = \begin{cases} \left|\underline{k}_i[k-1] + \gamma_i \,\mathsf{sinal}(s_i[k])\,\mathsf{sinal}(s_i[k-1])\right|, & \text{se } |s_i[k]| \geq \phi \text{ ou } \mathsf{sinal}(s_i[k]) = -\,\mathsf{sinal}(s_i[k-1]) \\ \underline{k}_i[k-1], & \text{se } |s_i[k]| < \phi \text{ e } \mathsf{sinal}(s_i[k]) = \mathsf{sinal}(s_i[k-1]) \end{cases} \tag{6.66}$$

Sendo γ_i uma constante positiva, a qual determina a velocidade da adaptação.

Esta lei de adaptação pode ser explicada da seguinte maneira: $\underline{k}_i$ aumenta enquanto o sistema não atingir a região da camada limite. Enquanto o sistema estiver nesta região, $\underline{k}_i$ se mantém constante ou diminui a cada cruzamento com a superfície de escorregamento. Se o sistema estiver região da camada limite e $\underline{k}_i$ respeitar a inequação (6.32), (6.39), (6.56) ou (6.63) (dependendo da lei de controle utilizada), $\underline{k}_i$ irá dimunuir a cada cruzamento com a superfície de escorregamento, até que o sistema saia ligeiramente da região. Assim que o sistema sair da região, $\underline{k}_i$ irá aumentar até o sistema atingi-la novamente, repetindo este ciclo infinitamente, com $\underline{k}_i$ variando em uma faixa de valores muito próxima do menor valor possível para que o sistema se mantenha na região da camada limite.

APÊNDICE A

APÊNDICE B

APÊNDICE C – CINEMÁTICA DE CORPOS RÍGIDOS

C.1 Conceitos básicos

Esta seção tem o intuito de apresentar os conceitos de derivada temporal de vetores em relação a um referencial e as definições velocidade e aceleração.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois referenciais, e $\mathtt{p}$ e $\mathtt{o}$ pontos no espaço. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- $\boldsymbol{r}_{\mathtt{o}|\mathtt{p}}$: vetor que liga o ponto $\mathtt{o}$ ao ponto $\mathtt{p}$, orientado no sentido de $\mathtt{o}$ até $\mathtt{p}$.
- $\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}}$: vetor velocidade do ponto $\mathtt{p}$ em relação a $\mathcal{A}$.
- $\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}}$: vetor aceleração do ponto $\mathtt{p}$ em relação a $\mathcal{A}$.
- $\dot{\boldsymbol{a}}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}}$: vetor sobre-aceleração do ponto $\mathtt{p}$ em relação a $\mathcal{A}$.
- $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$: vetor velocidade angular de $\mathcal{B}$ em relação a $\mathcal{A}$.
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$: vetor aceleração angular de $\mathcal{B}$ em relação a $\mathcal{A}$.
- $\ddot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$: vetor sobre-aceleração angular de $\mathcal{B}$ em relação a $\mathcal{A}$.
- $\dfrac{\mathsf{d}^{[\mathcal{A}]}}{\mathsf{d}t}$: Operador derivada temporal em relação ao referencial $\mathcal{A}$.

C.1.1 Produto vetorial

Para a realização do cálculo de derivadas vetoriais, frequentemente é necessário o uso do produto vetorial. A notação para o operador produto vetorial utilizada será o "$\wedge$". Com o intuito de deixar as equações mais legíveis, iremos adotar as seguintes convenções:

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \equiv \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \tag{C.1}$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \big(\boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d})\big) \equiv \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d} \tag{C.2}$$

Além disso, vale destacar algumas propriedades básicas do produto vetorial que serão utilizadas durante o texto:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{C.3}$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \tag{C.4}$$

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} \tag{C.5}$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \tag{C.6}$$

C.1.2 Derivada temporal de versores

Seja $\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{B}}$ um versor fixo ao referencial $\mathcal{B}$. A derivada temporal de $\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{B}}$ em relação ao referencial $\mathcal{A}$ é definida como:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^{[\mathcal{A}]}\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{B}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_{\mathcal{B}}^{[\mathcal{A}]} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \hat{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{B}}} \tag{C.7}$$

C.1.3 Derivada temporal de vetores

Seja $\mathtt{B} = \{\boldsymbol{i}_{\mathtt{B}}, \boldsymbol{j}_{\mathtt{B}}, \boldsymbol{k}_{\mathtt{B}}\}$ uma base ortonormal fixa ao referencial $\mathcal{B}$ e $\boldsymbol{x}$ um vetor cuja decomposição na base $\mathtt{B}$ é conhecida e dada por $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i}_{\mathtt{B}} + y\boldsymbol{j}_{\mathtt{B}} + z\boldsymbol{k}_{\mathtt{B}}$. A derivada temporal de $\boldsymbol{x}$ em relação ao referencial $\mathcal{A}$ é definida como:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{[\mathcal{A}]}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\boldsymbol{x}}^{[\mathcal{A}]} = \dot{x}\boldsymbol{i}_{\mathtt{B}} + \dot{y}\boldsymbol{j}_{\mathtt{B}} + \dot{z}\boldsymbol{k}_{\mathtt{B}} + x\dot{\boldsymbol{i}}_{\mathtt{B}}^{[\mathcal{A}]} + y\dot{\boldsymbol{j}}_{\mathtt{B}}^{[\mathcal{A}]} + z\dot{\boldsymbol{k}}_{\mathtt{B}}^{[\mathcal{A}]} \\ &= \dot{x}\boldsymbol{i}_{\mathtt{B}} + \dot{y}\boldsymbol{j}_{\mathtt{B}} + \dot{z}\boldsymbol{k}_{\mathtt{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge x\boldsymbol{i}_{\mathtt{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge y\boldsymbol{j}_{\mathtt{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge z\boldsymbol{k}_{\mathtt{B}} \\ &= \dot{x}\boldsymbol{i}_{\mathtt{B}} + \dot{y}\boldsymbol{j}_{\mathtt{B}} + \dot{z}\boldsymbol{k}_{\mathtt{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \big(x\boldsymbol{i}_{\mathtt{B}} + y\boldsymbol{j}_{\mathtt{B}} + z\boldsymbol{k}_{\mathtt{B}}\big)\end{aligned} \tag{C.8}$$

Repare que o termo $\dot{x}\boldsymbol{i}_{\mathcal{B}} + \dot{y}\boldsymbol{j}_{\mathcal{B}} + \dot{z}\boldsymbol{k}_{\mathcal{B}}$ é a derivada temporal do vetor $\boldsymbol{x}$ no referencial $\mathcal{B}$. Sendo assim, temos:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^{[\mathcal{A}]}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{x}}^{[\mathcal{A}]} = \dot{\boldsymbol{x}}^{[\mathcal{B}]} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{x}} \tag{C.9}$$

C.1.4 Definição de vetor velocidade

Supondo que o ponto $\mathtt{o}$ esteja fixo a $\mathcal{A}$, a velocidade do ponto $\mathtt{p}$ em relação ao referencial $\mathcal{A}$ é definida como:

$$\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \frac{\mathrm{d}^{[\mathcal{A}]}\boldsymbol{r}_{\mathtt{o}|\mathtt{p}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathtt{o}|\mathtt{p}}^{[\mathcal{A}]} \tag{C.10}$$

Caso $\mathtt{o}$ não esteja fixo a $\mathcal{A}$, temos que:

$$\frac{\mathrm{d}^{[\mathcal{A}]}\boldsymbol{r}_{\mathtt{o}|\mathtt{p}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathtt{o}|\mathtt{p}}^{[\mathcal{A}]} = \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} - \boldsymbol{v}_{\mathtt{o}}^{\mathcal{A}} \tag{C.11}$$

C.1.5 Definição de vetor aceleração

A aceleração do ponto $\mathtt{p}$ em relação ao referencial $\mathcal{A}$ é definida como:

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \frac{\mathrm{d}^{[\mathcal{A}]}\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}}}{\mathrm{d}t} \tag{C.12}$$

C.2 Equações de Poisson

Esta subseção tem o intuito de apresentar as equações básicos da cinemática de corpos rígidos, as equações de Poisson para velocidades, acelerações e sobre-acelerações.

C.2.1 Equação de Poisson para velocidades

Sejam $\mathtt{p}$ e $\mathtt{o}$ dois pontos pertencentes a um corpo rígido $\mathcal{B}$, e $\mathcal{A}$ um referencial. Podemos relacionar a velocidades dos ponto $\mathtt{p}$ e $\mathtt{o}$ em relação a $\mathcal{A}$ através da equação de Poisson para velocidades:

$$\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathtt{o}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}|\mathtt{p}} \tag{C.13}$$

C.2.2 Equação de Poisson para acelerações

Derivando (C.13) no tempo em relação a $\mathcal{A}$, temos:

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{a}_{\mathtt{o}}^{\mathcal{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}|\mathtt{p}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge (\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} - \boldsymbol{v}_{\mathtt{o}}^{\mathcal{A}}) \tag{C.14}$$

Substituindo (C.13) em (C.14), obtemos a equação de Poisson para acelerações:

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{a}_{\mathtt{o}}^{\mathcal{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}\,|\,\mathtt{p}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}\,|\,\mathtt{p}} \tag{C.15}$$

C.3 Composição de movimentos

Esta subseção tem o intuito de apresentar um dos princípios básicos da cinemática de corpos rígidos, a composição de movimentos.

C.3.1 Composição de velocidades lineares

Sejam $\mathcal{A}$ um referencial, e $\mathtt{A}$ um sistema de coordenadas fixo a $\mathcal{A}$, definido pela origem $\mathtt{o}_{\mathtt{A}}$ e pelos versores $\boldsymbol{i}_{\mathtt{A}}$, $\boldsymbol{j}_{\mathtt{A}}$ e $\boldsymbol{k}_{\mathtt{A}}$. Sejam também $\mathcal{B}$ um referencial, $\mathtt{B}$ um sistema de coordenadas fixo a $\mathcal{B}$, definido pela origem $\mathtt{o}_{\mathtt{B}}$ e pelos versores $\boldsymbol{i}_{\mathtt{B}}$, $\boldsymbol{j}_{\mathtt{B}}$ e $\boldsymbol{k}_{\mathtt{B}}$, e $\mathtt{p}$ um ponto no espaço. Definindo os vetores $\boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{\mathtt{A}}\,|\,\mathtt{o}_{\mathtt{B}}}$, $\boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}\,|\,\mathtt{p}}$ e $\boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{\mathtt{A}}\,|\,\mathtt{p}}$ tem-se que:

$$\boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{\mathtt{A}}\,|\,\mathtt{p}} = \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{\mathtt{A}}\,|\,\mathtt{o}_{\mathtt{B}}} + \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}\,|\,\mathtt{p}} \tag{C.16}$$

Derivando (C.16) no tempo em relação a $\mathcal{A}$, temos:

$$\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}}^{\mathcal{A}} + \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}\,|\,\mathtt{p}}^{[\mathcal{A}]} \tag{C.17}$$

Utilizando a equação (C.9), temos que:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}\,|\,\mathtt{p}}^{[\mathcal{A}]} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}\,|\,\mathtt{p}}^{[\mathcal{B}]} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}\,|\,\mathtt{p}} \tag{C.18}$$

Ou seja:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}\,|\,\mathtt{p}}^{[\mathcal{A}]} = \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}\,|\,\mathtt{p}} \tag{C.19}$$

Substituindo (C.19) em (C.17), temos:

$$\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}\,|\,\mathtt{p}} + \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}} \tag{C.20}$$

Definindo:

$$\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}\,|\,\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o}_{\mathtt{B}}\,|\,\mathtt{p}} \tag{C.21}$$

Temos princípio da composição de movimento para velocidades lineares:

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}\,|\,\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}}} \tag{C.22}$$

Ou seja, $\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}}$ é composto pela soma de $\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}\,|\,\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, que seria a velocidade de $\mathtt{p}$ se $\mathtt{p}$ estivesse fixo a $\mathcal{B}$ (movimento de arrastamento), e $\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}}$, que seria a velocidade de $\mathtt{p}$ se $\mathcal{B}$ estivesse parado em relação a $\mathcal{A}$ (movimento relativo).

C.3.2 Composição de acelerações lineares

Derivando (C.20) no tempo em relação a $\mathcal{A}$, temos:

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{a}_{\mathtt{o_B}}^{\mathcal{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o_B}\,|\,\mathtt{p}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathtt{o_B}\,|\,\mathtt{p}}^{[\mathcal{A}]} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}} \tag{C.23}$$

Substituindo (C.19) em (C.23), temos:

$$\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{a}_{\mathtt{o_B}}^{\mathcal{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o_B}\,|\,\mathtt{p}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o_B}\,|\,\mathtt{p}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}} \tag{C.24}$$

Definindo:

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}\,|\,\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{a}_{\mathtt{o_B}}^{\mathcal{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o_B}\,|\,\mathtt{p}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathtt{o_B}\,|\,\mathtt{p}}} \tag{C.25}$$

Temos princípio da composição de movimento para acelerações lineares:

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{a}_{\mathtt{p}\,|\,\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}}} \tag{C.26}$$

Ou seja, $\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{A}}$ é composto pela soma de $\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}\,|\,\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, que seria a aceleração de $\mathtt{p}$ se $\mathtt{p}$ estivesse fixo a $\mathcal{B}$ (aceleração de arrastamento), $\boldsymbol{a}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}}$, que seria a aceleração de $\mathtt{p}$ se $\mathcal{B}$ estivesse parado em relação a $\mathcal{A}$ (aceleração relativa), e da parcela $2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}}^{\mathcal{B}}$ (aceleralção complementar).

C.3.3 Composição de velocidades angulares

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois referenciais e $\mathcal{C}$ um corpo rígido. Sejam também os pontos $\mathtt{p}_1$ e $\mathtt{p}_2$, ambos fixos a $\mathcal{C}$.

Aplicando o princípio da composição de movimento para velocidades lineras, temos que:

$$\boldsymbol{v}_{\mathtt{p}_1}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}_1\,|\,\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{v}_{\mathtt{p}_1}^{\mathcal{B}} \tag{C.27}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_2}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_2|\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_2}^{\mathcal{B}} \tag{C.28}$$

A partir da equação (C.21), temos que:

$$\boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_1|\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathsf{o}_\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathsf{o}_\mathcal{B}|\mathsf{p}_1} \tag{C.29}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_2|\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathsf{o}_\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathsf{o}_\mathcal{B}|\mathsf{p}_2} \tag{C.30}$$

Sendo assim, temos:

$$\boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_1}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathsf{o}_\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathsf{o}_\mathcal{B}|\mathsf{p}_1} + \boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_1}^{\mathcal{B}} \tag{C.31}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_2}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathsf{o}_\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathsf{o}_\mathcal{B}|\mathsf{p}_2} + \boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_2}^{\mathcal{B}} \tag{C.32}$$

Subtraindo (C.32) de (C.31), temos:

$$\boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_1}^{\mathcal{A}} - \boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_2}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathsf{p}_2|\mathsf{p}_1} + \boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_1}^{\mathcal{B}} - \boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_2}^{\mathcal{B}} \tag{C.33}$$

Como p_1 e p_2 pertencem a um mesmo corpo rígido, temos que:

$$\boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_1}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_2}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathsf{p}_2|\mathsf{p}_1} \tag{C.34}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_1}^{\mathcal{B}} = \boldsymbol{v}_{\mathsf{p}_2}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathsf{p}_2|\mathsf{p}_1} \tag{C.35}$$

Substituindo (C.34) e (C.35) em (C.33):

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathsf{p}_2|\mathsf{p}_1} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathsf{p}_2|\mathsf{p}_1} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathsf{p}_2|\mathsf{p}_1} \tag{C.36}$$

Temos princípio da composição de movimento para velocidades angulares:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \tag{C.37}$$

Ou seja, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$ é composta pela soma de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, que seria velocidade angular de de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{C}$ estivesse fixo a $\mathcal{B}$ (velocidade angular de arrastamento), e $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, que seria a velocidade angular de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{B}$ estivesse parado em relação a $\mathcal{A}$ (velocidade angular relativa).

Repare que, fazendo $\mathcal{C} \equiv \mathcal{A}$, temos que:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \tag{C.38}$$

$$\therefore \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \tag{C.39}$$

C.3.4 Composição de acelerações angulares

Derivando (C.37) no tempo em relação a $\mathcal{A}$, temos princípio da composição de movimento para acelerações angulares:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}} \tag{C.40}$$

Ou seja, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$ é composta pela soma de $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, que seria a aceleração angular de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{C}$ estivesse fixo a $\mathcal{B}$ (aceleração angular de arrastamento), $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, que seria a aceleração angular de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{B}$ estivesse parado em relação a $\mathcal{A}$ (aceleração angular relativa), e da parcela $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ (aceleralção angular complementar).

Repare que, fazendo $\mathcal{C} \equiv \mathcal{A}$ e utilizando (C.39), temos que:

$$\mathbf{0} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \tag{C.41}$$

$$\boxed{\therefore \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = -\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}} \tag{C.42}$$

ANEXO A – ALPHA

ANEXO B