

ANDRÉ GARNIER COUTINHO

**SIMULAÇÃO DINÂMICA E VALIDAÇÃO
EXPERIMENTAL DE TÉCNICAS DE CONTROLE
PARA MANIPULADORES PARALELOS**

São Paulo
2019

ANDRÉ GARNIER COUTINHO

**SIMULAÇÃO DINÂMICA E VALIDAÇÃO
EXPERIMENTAL DE TÉCNICAS DE CONTROLE
PARA MANIPULADORES PARALELOS**

Tese apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para ob-
tenção do Título de Doutor em Engenharia
Mecânica.

São Paulo
2019

ANDRÉ GARNIER COUTINHO

**SIMULAÇÃO DINÂMICA E VALIDAÇÃO
EXPERIMENTAL DE TÉCNICAS DE CONTROLE
PARA MANIPULADORES PARALELOS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração:

Engenharia Mecânica de Projeto e Fabricação

Orientador:

Prof. Dr. Tarcisio A. H. Coelho

São Paulo
2019

Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Prof^a. Dra. Maira Martins da Silva

Prof. Dr. Bruno Augusto Angélico

Prof. Dr. Diego Colón

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que sempre me apoiaram e ajudaram a perseguir o meu sonho de me tornar Doutor em Engenharia Mecânica pela Escola Politécnica da USP. Não tenho palavras para descrever o que significa para mim poder estar contribuindoativamente na exploração das fronteiras do conhecimento.

Dentre as várias pessoas que sempre estiveram ao lado nesta jornada, gostaria de destacar o meu orientador e amigo Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho, o qual sempre esteve ao meu lado desde o início da jornada no meio acadêmico, sempre sendo super solícito, me apoiando, e me orientando da melhor maneira possível; meu grande amigo Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino, o qual me introduziu e ensinou o que há de mais sofisticado e eficiente na parte de modelagem de sistemas multicorpos, um conhecimento fundamental para o desenvolvimento desta tese, também sempre sendo extremamente solícito e me ajudando sempre que podia; aos grandes amigos Eng^a. Juliana Martins de Oliveira Fuess e Eng. Victor Pacheco Bartholomeu, os quais participaramativamente e possibilitaram o desenvolvimento do protótipo de manipulador paralelo que possibilitou adicionar um caráter experimental na tese desenvolvida; à minha namorada Adriana Marques Cavalcanti, a qual está há mais de 12 anos ao meu lado, sempre me apoiando em todos os momentos e me inspirando a ser cada vez mais uma pessoa melhor; e aos meus pais Antonio Valdec Martins Coutinho e Taís Borges Garnier, e avó Maria Luiza Borges Garnier, os quais estão sempre se preocuparam muito comigo, sempre me apoiando e ajudando de todas as maneiras.

Por último, mas não menos importante, além dessas pessoas incríveis que tive a oportunidade de conhecer em minha vida, gostaria de destacar meu agradecimento a outras três pessoas maravilhosas que conheci há pouco tempo, que mudaram minha vida, e que tornaram possível a conclusão desta tese de doutorado: minha psicóloga Dra. Ana Maria Canzonieri, minha psiquiatra Dra. Letícia Pacheco Lessa, e minha professora de yoga Alessandra Dotto.

Muito obrigado a todos, sem vocês nada disso seria possível.

“ ‘Nesta direção’, disse o Gato, girando a pata direita, ‘mora um Chapeleiro. E nesta direção’, apontando com a pata esquerda, ‘mora uma Lebre de Março. Visite quem você quiser, são ambos loucos.’

‘Mas eu não ando com loucos’, observou Alice.

‘Oh, você não tem como evitar’, disse o Gato, ‘somos todos loucos por aqui. Eu sou louco. Você é louca’.

‘Como é que você sabe que eu sou louca?’, disse Alice.

‘Você deve ser’, disse o Gato, ‘Senão não teria vindo para cá.’ ”

-- Lewis Carroll

RESUMO

Para realizar o projeto de um sistema de controle, em geral, é necessário primeiramente de um modelo da planta a ser controlada. O grau de fidelidade do modelo da planta, dentro das condições de operação desejadas do sistema, influí diretamente no desempenho do sistema em malha fechada que o projeto do controlador pode oferecer. Quanto mais rico for o modelo, mais fácil de atingir requisitos de desempenho mais elevados (menor tempo de resposta e menor sobressinal, por exemplo) garantindo a estabilidade do sistema.

Utilizando os métodos tradicionais de modelagem de Sistemas Mecânicos Multicorpos, é difícil e trabalhoso de se obter modelos de sistemas complexos, como mecanismos paralelos. Para contornar esse problema, é comum desprezar alguns efeitos de acoplamentos inerciais, simplificando o processo de modelagem. Porém, essa estratégia gera modelos mais pobres, o que irá limitar o desempenho que o sistema poderá atingir quando for feito o projeto do sistema de controle.

A solução proposta para ser possível aumentar o desempenho, garantindo a robustez, de um sistema de controle de mecanismos paralelos é a utilização dos novos métodos e estratégias de modelagem dinâmica desenvolvidos pelo grupo de pesquisa do Prof. Doutor Tarcisio Antonio Hess Coelho, os quais são adequados para incluir todos os efeitos da dinâmica de corpos rígidos, independentemente da complexidade do sistema.

A presente tese visa desenvolver um algoritmo de modelagem que inclua todos os efeitos da dinâmica de corpos rígidos para realizar a modelagem dinâmica de mecanismos paralelos (baseado na metodologia Orsino), desenvolver uma metodologias de projeto de controle robusto para mecanismos paralelos tradicionais e mecanismos com atuação redundante, e realizar simulações e validações experimentais das leis de controle sintetizadas pela metodologia proposta.

Palavras-Chave – Mecanismos paralelos, Robótica, Modelagem Dinâmica , Controle, Controle não linear.

ABSTRACT

Abstract...

Keywords – Word, Word, Word, Word, Word.

LISTA DE FIGURAS

1	Robô industrial Adept Quattro	15
2	Malha de CTC (Adaptado de [15])	22
3	Malha de CTcp (Adaptado de [15])	22
4	Malha de controle adaptativo (Adaptado de [15])	24
5	Protótipo do mecanismo 5R	29
6	Pentágono articulado (5R)	79
7	Mecanismo <u>RR</u>	80
8	Espaço de trabalho do mecanismo <u>RR</u>	82
9	Função de saturação $f_{sat}(x) = \tanh(100x)$	84
10	Torque aplicado pelo atuador 1	85
11	Torque aplicado pelo atuador 2	85
12	Erro de na coordenada x	85
13	Erro de na coordenada y	85
14	Variável s_x	85
15	Variável s_y	85
16	Torque aplicado pelo atuador 1	86
17	Torque aplicado pelo atuador 2	86
18	Erro de na coordenada x	86
19	Erro de na coordenada x	86
20	Variável s_x	86
21	Variável s_y	86
22	Torque aplicado pelo atuador 1	87
23	Torque aplicado pelo atuador 2	87

24	Erro de na coordenada x	87
25	Erro de na coordenada y	87
26	Arquitetura do sistema - Fonte:Própria	89
27	Arquitetura de controle - Fonte:Própria	90
28	Circuito elétrico do motor - Fonte:Própria	98
29	Curva de velocidade do motor 1 - Fonte:Própria	104
30	Curva de velocidade do motor 2 - Fonte:Própria	104

LISTA DE TABELAS

1	DH	80
2	Parâmetros do Motor 1	91
3	Parâmetros do Motor 2	91
4	Medições para obtenção de k_e do motor 1	105
2	Parâmetros do Motor 1	107
5	Medições para obtenção de k_e do motor 2	107
3	Parâmetros do Motor 2	108

SUMÁRIO

Parte I: INTRODUÇÃO	14
1 Introdução	15
1.1 Objetivos	16
1.2 Sobre a organização do texto	17
2 Revisão da literatura	18
2.1 Modelagem dinâmica	18
2.2 Controle	21
2.3 Bancada de ensaios	25
3 Metodologia da Pesquisa	26
3.1 Primeira fase	26
3.2 Segunda fase	26
3.3 Terceira fase	26
3.4 Quarta fase	27
3.5 Quinta fase	27
3.6 Sexta fase	27
3.7 O que tinha antes	28
Parte II: MODELAGEM	30
4 Modelagem de manipuladores seriais	31
4.1 Cinemática	32
4.1.1 Cinemática de posição	32
4.1.2 Cinemática de velocidades lineares	33

4.1.3	Cinemática de velocidades angulares	35
4.1.4	Cinemática de acelerações lineares	37
4.1.5	Cinemática de acelerações angulares	39
4.2	Dinâmica dos elos e juntas	41
4.2.1	Modelo dos subsistemas	42
4.2.2	Sistemas de forças ativas generalizadas	43
4.2.3	Vínculos cinemáticos entre subsistemas	43
4.2.4	Acoplamento de subsistemas	44
4.3	Dinâmica dos atuadores	46
4.3.1	Cinemática	48
4.3.1.1	Cinemática de velocidades angulares	48
4.3.1.2	Cinemática de acelerações angulares	49
4.3.2	Dinâmica Mecânica	49
4.3.2.1	Modelo dos subsistemas rotores	50
4.3.2.2	Modelo do subsistema serial	51
4.3.2.3	Sistemas de forças ativas generalizadas	51
4.3.2.4	Vínculos entre subsistemas	51
4.3.2.5	Acoplamento de subsistemas	52
4.4	Modelo completo	53
5	Modelagem de manipuladores paralelos	55
5.1	Modelo dos subsistemas	57
5.2	Vínculos cinemáticos entre subsistemas	58
5.2.1	Vínculos de posição	58
5.2.2	Vínculos de velocidades lineares	59
5.2.3	Vínculos de velocidades angulares	60
5.2.4	Vínculos de quasi-velocidades	60

5.2.5	Vínculos de quasi-acelerações	61
5.3	Acoplamento de subsistemas	61
5.4	Simulação dinâmica direta	63
5.5	Simulação dinâmica inversa	64
6	Projeto dos controladores	67
6.1	Linearização por Realimentação (LR)	68
6.2	Controle por Torque Computado (CTC)	68
6.3	Controle por Modos Deslizantes em Tempo Contínuo	69
6.3.1	Dedução das leis de controle	69
6.3.2	Camada Limite	76
6.3.3	Ganho adaptativo	76
Parte III: RESULTADOS		78
7	Resultados e Discussão	79
7.1	Algoritmos e suas implementações	79
7.2	Simulações	79
7.3	Ensaios Experimentais	87
7.3.1	Bancada experimental	87
7.4	Sistema de controle	89
7.4.1	Derivador	90
7.4.2	Cálculo da corrente	90
7.4.3	Parâmetros do sistema	91
8	Conclusões e temas para pesquisa futura	92
8.1	Principais contribuições	92
8.2	Sugestão de temas para pesquisa futura	93

Referências	94
Apêndice A – Funções de transferência de motores DC	98
Apêndice B – Controlador de Corrente	101
Apêndice C – Curva dos motores	104
Apêndice D – Cinemática de corpos rígidos	109
D.1 Conceitos básicos	109
D.1.1 Produto vetorial	109
D.1.2 Derivada temporal de versores	110
D.1.3 Derivada temporal de vetores	110
D.1.4 Definição de vetor velocidade	111
D.1.5 Definição de vetor aceleração	111
D.2 Equações de Poisson	111
D.2.1 Equação de Poisson para velocidades	111
D.2.2 Equação de Poisson para acelerações	111
D.3 Composição de movimentos	112
D.3.1 Composição de velocidades lineares	112
D.3.2 Composição de acelerações lineares	113
D.3.3 Composição de velocidades angulares	113
D.3.4 Composição de acelerações angulares	115

PARTE I

INTRODUÇÃO

1 INTRODUÇÃO

“Frase espirituosa de um autor famoso”

-- Autor famoso

Os mecanismos de arquitetura paralela são amplamente utilizados em simuladores de voo, simuladores automobilisticos, e tarefas de *pick-and-place*. Além disso, também são empregados em sistemas de posicionamento, sistemas de medição, máquinas de usinagem, entre outras tarefas.

Há uma série de vantagens em utilizar mecanismos paralelos no lugar dos tradicionais seriais. Dentre elas podemos citar sua grande capacidade de carga, alta precisão de posicionamento, alta rigidez estrutural, e uma redução significativa na inércia [11, 27, 33, 48]. Outra característica marcante desse tipo de arquitetura são as altas velocidades e acelerações atingidas, as quais superam muito os valores máximos atingidos utilizando arquitetura serial. Grande parte dessas vantagens se devem à possibilidade de instalação de todos os motores na base imóvel do mecanismo. Como desvantagens podemos citar o menor espaço de trabalho e modelo dinâmico muito mais complexo e de difícil obtenção [2, 33].



Figura 1: Robô industrial Adept Quattro

Levando-se em conta esta dificuldade de obtenção e a complexidade inerente do modelo dinâmico, o controle de mecanismos de arquitetura paralela é uma tarefa desafiadora. A utilização de modelos dinâmicos simplificados limita o desempenho do projeto de controladores baseados no modelo. Porém, mesmo na hipótese do modelo dinâmico completo estar disponível, o emprego de técnicas de controle não linear pode acarretar um custo computacional muito elevado [15, 42, 55]. Este paradigma, aliado à falta de estratégias de controle apropriadas para esse tipo de mecanismos, resulta na exploração insatisfatória

dos potenciais promissores de tais máquinas, como resposta dinâmica rápida e alta precisão [1]. Além disso, observa-se na literatura a escassez de trabalhos publicados com comprovação experimental de técnicas de controle aplicáveis a mecanismos paralelos [2].

Uma alternativa para a superação desta dificuldade seria a combinação de técnicas de controle não linear robusto (por exemplo, controle por modos deslizantes [42, 49]) com modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos, desenvolvidos a partir de novas metodologias de modelagem de sistemas multicorpos [34–37]. Com esta estratégia, torna-se possível sintetizar leis de controle de alto desempenho e custo computacional mais adequado, viabilizando a exploração do potencial promissor dos mecanismos paralelos.

1.1 Objetivos

Os principais objetivos da tese são:

- Desenvolvimento de um algoritmo gerador de modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos, de forma implícita. Será utilizada uma metodologia baseada no método Orsino de acoplamento de subsistemas multicorpos [36].
- Elaboração de metodologias de projeto de controlador não linear robusto, de alto desempenho, aplicável a mecanismos de arquitetura paralela. Para tanto, serão consideradas as incertezas paramétricas e a possibilidade de atuação redundante [11], além de estratégias para a síntese de leis de controle com custo computacional consideravelmente menor do que as tradicionais, que empregam o Controle por Torque Computado [15, 55].
- Realizar a modelagem cinemática e dinâmica dos mecanismos 5R [34] e 2RSU+PPaP [2, 28], utilizando o algoritmo de modelagem desenvolvido.
- Realizar o projeto de um controlador de trajetória para os mecanismos escolhidos, utilizando a metodologia de projeto de controle proposta.
- Realizar simulações dinâmicas utilizando as leis de controle sintetizadas.
- Realizar a validação experimental dos controladores projetados no protótipo dos mecanismos 5R, o qual se encontra no laboratório de mecanismos da EPUSP.

É importante ressaltar que os 5 primeiros objetivos citados já foram parcialmente alcançados e que a arquitetura paralela 2RSU+PPaP foi desenvolvida pelo grupo de

pesquisa do Prof. Dr. Tarcio Antonio Hess Coelho, havendo ainda poucos estudos na literatura sobre ela.

1.2 Sobre a organização do texto

O capítulo 2 apresenta a revisão da Literatura sobre o assunto, sendo que a metodologia da pesquisa é descrita no capítulo 3. A seguir, os capítulos 4 e 5 abordam a modelagem dinâmica de manipuladores seriais e paralelos, respectivamente. Com relação ao projeto dos controladores, este assunto é elaborado no capítulo 6. No capítulo 7 são apresentados os resultados mais relevantes desta Tese, além da pertinente discussão. Por fim, no capítulo 8, apresentam-se as principais conclusões da Tese e os temas sugeridos para pesquisa futura.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Considerando o tema de pesquisa desta Tese, esta revisão se concentrará em tópicos relacionados à modelagem dinâmica, ao controle e à utilização de bancada de ensaios para validação experimental.

2.1 Modelagem dinâmica

Não tratar de formalismos clássicos da Mecânica (NE,L,GA etc), apenas citar referências q os descrevam de modo geral (livros, tese Orsino) e de modo específico quando aplicados a manipuladores paralelos (artigos). A seguir, serão tratadas as questões ligadas à topologia dos manipuladores, à geração do modelo, bem como as análises para a sua resolução.

Começar refletindo acerca dos manipuladores seriais. Sua estrutura mecânica corresponde a um mecanismo de cadeia aberta, com juntas ativas de um gdL (apenas R ou P), o número de coordenadas generalizadas coincide com a mobilidade do mecanismo. Tais características topológicas e cinemáticas podem ser exploradas para facilitar a geração dos modelos cinemáticos e dinâmicos.

De fato, o modelo cinemático pode ser obtido, recursivamente ao longo da cadeia cinemática, pelo emprego de métodos vetoriais ou matriciais, partindo-se da base e se dirigindo ao efetuador. Tradicionalmente, empregam-se os vetores \mathbf{q} e \mathbf{x} para descrever as coordenadas associadas aos atuadores e ao efetuador, respectivamente. Enquanto que o problema direto é de resolução relativamente simples, o problema inverso demanda a realização de um processo mais elaborado. Matematicamente, este corresponde à resolução de um sistema não-linear de equações algébricas. Para algumas topologias que utilizem mecanismos esféricos nos punhos, é possível alcançar o desacoplamento das equações de posição e orientação do efetuador.

Com relação à dinâmica, a geração das equações também pode ser realizada de modo

recursivo, partindo-se do efetuador e se dirigindo à base, sendo que a solução do problema inverso é obtida mediante a resolução de um sistema linear de equações algébricas. Por outro lado, a solução do problema dinâmico direto é alcançada pela integração de um sistema de equações diferenciais ordinárias (ODEs).

Neste momento, tratar do manipulador paralelo, sua topologia em comparação com os seriais. Dependendo da complexidade da estrutura, podem existir juntas de 1, 2 ou até 3 gdl, ativas ou passivas. Além disso, o número de elos é muito superior. Ao se elaborar o modelo cinemático, é possível notar que haverá um grande número de variáveis, dentre as quais algumas serão independentes e outras, dependentes.

No início do processo de modelagem, é comum se realizar um corte nas juntas que conectam o efetuador às cadeias cinemáticas. Deste modo, ocorrerá a decomposição do mecanismo original de cadeia fechada no elo do efetuador e nas demais cadeias. Assim, admite-se que estas cadeias possam ser tratadas como abertas. Consequentemente, as equações cinemáticas, geradas em cada cadeia, expressarão o acoplamento entre as variáveis dependentes e independentes do mecanismo. Além disso, para os manipuladores paralelos, a literatura destaca que o problema inverso da cinemática de posição é menos complexo que o direto.

Saha e Schielen [?] mencionam que a dinâmica inversa, uma vez definida a trajetória do efetuador, determina os esforços dos atuadores necessários para o controle, enquanto que a direta é utilizada em simulações do manipulador com o controlador.

Com relação à dinâmica, Pekal e Fraczek [?] esclarecem que a solução do problema direto pode ser obtida mediante a resolução de um sistema de equações diferenciais e algébricas (DAEs), representado pelas Eq.(2.1, 2.2)

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\Lambda} = \mathbb{Q} \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{o} \quad (2.2)$$

Uma alternativa é resolver o sistema representado pela Eq.(2.3),

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{M} & \boldsymbol{\Phi}_q^T \\ \boldsymbol{\Phi}_q & \mathbf{o} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Q} \\ \boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo $\boldsymbol{\Gamma} = -(\boldsymbol{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2\boldsymbol{\Phi}_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\Phi}_{tt}$.

Para melhorar a precisão associada às restrições de posição e velocidade, recomenda-se substituir $\boldsymbol{\Gamma}$ por $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}$, expresso na Eq.(2.4), que é conhecido como método de Baumgarte para a estabilização das restrições [?], sendo $\hat{\alpha} = \hat{\beta} \in <1, 10>$.

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{\Gamma} - 2\hat{\alpha}\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \hat{\beta}^2\boldsymbol{\Phi} \quad (2.4)$$

Um outro modo de aprimorar a precisão é alcançado pela separação das coordenadas \mathbf{q} em dois grupos: independentes \mathbf{v} e dependentes \mathbf{u} . Assim, multiplica-se a Eq.(2.1) pelo complemento ortogonal [?] de $\boldsymbol{\Phi}_q^T$. Pekal e Fraczek [?] discutem várias alternativas de obtenção do complemento ortogonal, dentre elas, destacam-se a decomposição QR, a decomposição em matrizes de autovalores e autovetores e a decomposição em valores singulares (SVD). Com esta ação, eliminam-se os multiplicadores de Lagrange e o número de equações se reduz à mobilidade do mecanismo. Em seguida, substituem-se as acelerações $\ddot{\mathbf{q}}$ por $\ddot{\mathbf{v}}$. Por consequência, somente as acelerações e velocidades independentes serão integradas no sistema de equações diferenciais. Além disso, em cada passo de integração, as variáveis dependentes \mathbf{u} e $\dot{\mathbf{u}}$ serão calculadas a partir das independentes, estabilizando as restrições de posição e velocidade.

Quando a matriz dos coeficientes \mathbf{Y} , expressa na Eq.(2.1), for singular, os métodos numéricos normalmente empregados, como decomposição LU ou QR, não serão capazes de resolver o sistema de equações. Neste caso, costuma-se empregar \mathbf{Y}^+ , ou seja, a matriz inversa de Moore-Penrose. Outras formulações, como as de Udwadia-Kalaba, Udwadia-Phohomsiri e baseadas no método dos mínimos quadrados, também foram propostas para tratar as situações em que \mathbf{Y} é singular.

Segundo Mariti et al. (2011) [?], expressar o modelo dinâmico por meio de coordenadas redundantes, independentemente do formalismo escolhido, possui como propósito a realização de simulações de sistemas multicorpos, sendo que um exemplo é o software comercial MSC-Adams. No entanto, se a finalidade for o controle de manipuladores, significando que o modelo é parte integrante de implementações que demandem cálculos em tempo real, a expressão das equações dinâmicas nas coordenadas independentes é necessária.

Além disso, é largamente difundido que a escolha das variáveis cinemáticas independentes recaia sobre as componentes do vetor \mathbf{q} , associadas aos deslocamentos impostos pelos atuadores, e suas derivadas temporais. No entanto, alguns autores [?, 29] mencionam as vantagens de se escolher as componentes do vetor \mathbf{x} , afirmando que a expressão do modelo dinâmico nestas variáveis é menos complexa.

2.2 Controle

Existem diversas técnicas propostas pela literatura para realizar o controle de mecanismos paralelos. Dentre elas, podemos destacar:

- Controle PID
- Controle por Torque Computado (CTC)
- Controle por Torque Computado com pré-alimentação (CTCp)
- Controle por Torque Computado Estendido (CTCe)
- Controle Preditivo Baseado em Modelo (CPM)
- Controle Adaptativo
- Controle por Modos Deslizantes (CMD)

A técnica mais simples consiste na utilização de malhas do tipo PID, controlando cada junta ativa de maneira independente, considerando a dinâmica do mecanismo como distúrbios de controle. Essa técnica é caracterizada por sua facilidade de projeto e implementação, tanto em hardware quanto em software, além de exibir um desempenho satisfatório para movimento lento. Porém, essa técnica não se mostra adequada para a realização de trajetórias em altas velocidades e/ou acelerações [23, 55].

Uma das técnicas de controle mais exploradas na literatura é o Controle por Torque Computado (CTC). Basicamente, é uma técnica de controle não linear, mais conhecida como linearização pela realimentação, aplicada a sistemas mecânicos. A técnica consiste na utilização de duas malhas de controle, uma malha que realiza o desacoplamento do sistema e a compensação das não linearidades, e outra malha composta por PIDs independentes [15]. Como resultado, alcança-se um desempenho superior àquele obtido utilizando simples PIDs, permitindo inclusive a realização de trajetórias precisas em altas velocidades e/ou acelerações. No entanto, seu desempenho poderá ser limitado pela qualidade/fidelidade do modelo dinâmico utilizado para a compensação das não linearidades [43]. Sua implementação também é mais complexa, visto que é necessário calcular o modelo dinâmico inverso em tempo real, o que também aumenta consideravelmente seu custo computacional. Além disso, a técnica é sensível a incertezas estruturadas (paramétricas) e não estruturadas (dinâmicas não modeladas). Como exemplos de utilização do CTC,

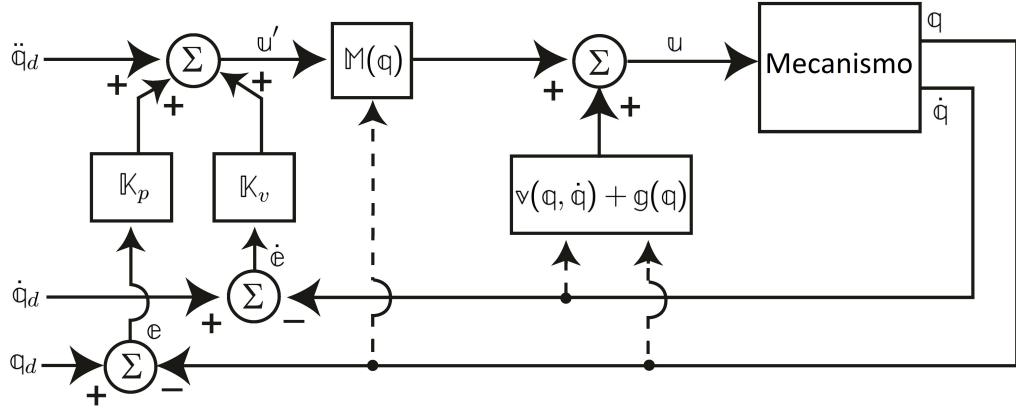


Figura 2: Malha de CTC (Adaptado de [15])

podem ser citados os trabalhos de Cheng et al. [11], Li e Wu [29], Li e Fu [30], Shang et al. [40] e Yen et al. [53].

Visando a redução do custo computacional associado ao cálculo do modelo dinâmico em tempo real, alguns autores propõe a utilização do CTC com pré-alimentação (CTCp) [27, 41, 45]. Essa técnica é similar ao CTC, com a diferença de que a compensação das não linearidades é feita por pré-alimentação e não mais por realimentação. Consequentemente, realiza-se o cálculo do modelo dinâmico previamente, diminuindo o custo computacional.

De fato, Codourey [12] obteve uma redução de 600% no erro de posição utilizando o CTCp em um ensaio experimental com o robô DELTA, ao substituir os PDs originais. Na simulação do controle de um mecanismo 6-UPS, Wang et al. [52] utilizaram em cascata controladores lineares de posição, velocidade e corrente em cada junta ativa, além de uma compensação dinâmica por pré-alimentação dos distúrbios de torque.

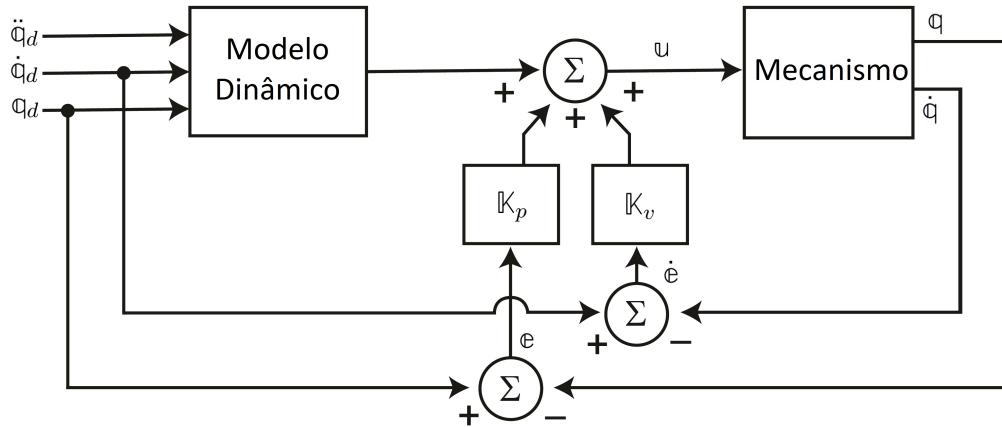


Figura 3: Malha de CTCp (Adaptado de [15])

Com o intuito de melhorar a robustez do CTC associada a incertezas paramétricas, Zubizarreta et al. [55–58] propuseram o Controle por Torque Computado Estendido

(CTCe), que utiliza informação redundante obtida pelo sensoriamento de juntas passivas. Em [55], os controladores propostos demonstraram maior robustez, principalmente em relação a parâmetros cinemáticos, durante as simulações realizadas com o mecanismo 3-RRR.

Outra técnica alternativa, aplicada a mecanismos paralelos, é o controle preditivo baseado em modelo (CPM). Para a sua implementação, o CPM necessita minimizar uma função objetivo, dependente das saídas e do esforço de controle, ambos calculados em tempo futuro [8]. Assim, dependendo do modelo utilizado, o processo de otimização pode agregar um custo computacional que inviabilize o controle, comprometendo a motivação inicial de aprimorar o desempenho do sistema. Como exemplos de utilização do CPM, podem ser citados os trabalhos de Vivas et al. [51] e Duchaine et al. [19].

Com o propósito de controlar o mecanismo H4, Vivas et al. [51] utilizaram uma malha de CPM linear e outra malha para compensação das não linearidades. Após a comparação do desempenho do controlador proposto com o CTC, os autores observaram maior robustez do CPM a incertezas paramétricas.

Duchaine et al. [19], por sua vez, propuseram um controlador preditivo baseado no modelo não linear de um mecanismo paralelo de 6 graus de liberdade. Visando a obtenção de uma solução analítica para o problema de otimização, foram adotadas diversas hipóteses simplificadoras no modelo dinâmico do mecanismo. Com o intuito de comparar o controlador proposto com um PID, foram feitos alguns experimentos, onde se observou que o CPM apresentou erro nulo de posição no final da trajetória, enquanto que o PID demorou um tempo considerável para alcançar erro nulo. Foi verificada a equivalência entre o custo computacional dos 2 controladores.

O controle adaptativo, também encontrado na literatura, caracteriza-se pela utilização de leis de adaptação para realizar a estimação em tempo real de parâmetros do sistema ou de termos de compensação dinâmica. Sendo assim, as técnicas de controle adaptativo possibilitam que o sistema se torne praticamente insensível a incertezas paramétricas. Para o caso em que se realiza a estimação em tempo real dos parâmetros do sistema, pode-se dizer que o custo computacional é superior ao do CTC, visto que é necessário integrar as leis de adaptação em tempo real. Além disso, é necessário obter o modelo dinâmico linear em relação aos parâmetros do sistema [44], o que pode ser uma tarefa difícil, inviabilizando, em alguns casos, a aplicação da técnica. Em [13] é proposto um algoritmo de obtenção do modelo dinâmico simplificado de mecanismos paralelos nesse formato.

Em [44] é proposta uma lei de controle que combina o controle adaptativo com a técnica de controle robusto conhecida por Controle por Modos Deslizantes. Chemori et al. [9] utilizaram essa técnica com o intuito de diminuir os erros de posição em regime permanente no controle de um mecanismo paralelo do tipo PAR2. Por outro lado, Honegger et al. [23] empregaram o controle adaptativo com estimativa em tempo real dos parâmetros do sistemas, realizando a compensação dinâmica por pré-alimentação, em um mecanismo paralelo do tipo Hexaglide.

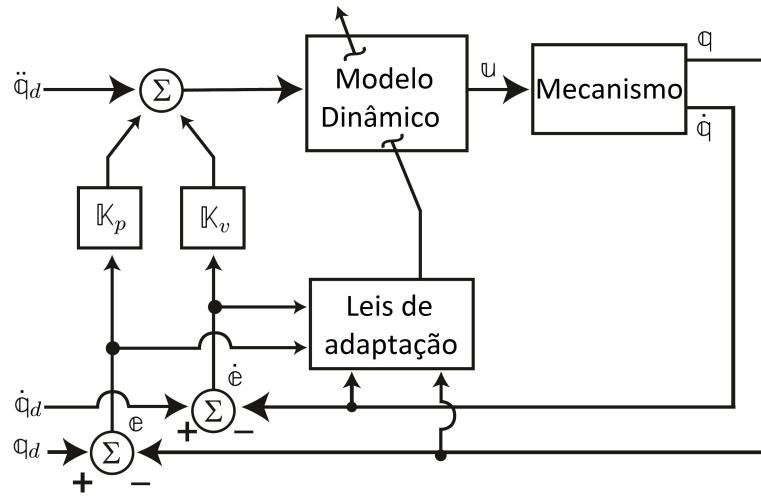


Figura 4: Malha de controle adaptativo (Adaptado de [15])

Outra técnica promissora para aplicação em mecanismos paralelos é o Controle por Modos Deslizantes (CMD). A técnica consiste no projeto de leis de controle que levem o sistema para superfícies de escorregamento no espaço de fase, de modo que assim que o sistema atinja e é mantido nas superfícies de escorregamento, o erro de controle decai exponencialmente para zero [42]. Para garantir que o sistema atinja em tempo finito e se mantenha nas superfícies de escorregamento, são utilizados termos descontínuos na lei de controle, o que pode causar problemas de oscilações bruscas em alta frequência nos esforços de controle (*chattering*). Em [22] e [50] são propostas técnicas para evitar esse tipo de problema. A grande vantagem da utilização deste tipo de lei de controle é sua grande robustez a incertezas estruturadas e não estruturadas, sendo possível realizar o projeto do controlador de modo a suprimir um dado nível de incertezas paramétricas. Em [43] é proposta uma metodologia de projeto de Controle por Modos Deslizantes para manipuladores robóticos seriais.

Na literatura são encontradas diversos artigos utilizando a técnica de CMD aliada à lógica *fuzzy* e/ou redes neurais para o controle de manipuladores robóticos [5, 21, 24, 39]. Begon et al. [5] propuseram uma lei de controle baseada na teoria de CMD e na utilização

de lógica *fuzzy* para controlar de maneira independente os atuadores de um mecanismo paralelo do tipo Hexa. A técnica proposta teve o intuito de obter a robustez característica do CDM sem necessitar de uma lei de controle com termos descontínuos, evitando o *chattering*.

Em [54], Zeinali et al. desenvolveram uma lei de controle baseada nas teorias de CMD e controle adaptativo. O controlador desenvolvido realiza a compensação dinâmica em tempo real do erro de modelagem através de uma lei de adaptação. Além disso, substitui o termo descontínuo da lei de controle por um termo do tipo PID, com o intuito de evitar o *chattering*. A estabilidade e robustez da lei de controle proposta foram provadas utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov [42]. A robustez da lei de controle foi verificada através de simulações do controlador proposto aplicado a um mecanismo serial do tipo RR, nas quais o controlador conseguiu manter erros de posição muito pequenos em regime permanente, mesmo sendo baseado em um modelo muito pobre e na presença de distúrbios de torque. A técnica apresentada se mostra promissora, porém, como no artigo foi feita apenas a simulação da lei de controle em um mecanismo serial bidimensional, ainda não se pode afirmar nada sobre seu desempenho em mecanismos paralelos tridimensionais.

2.3 Bancada de ensaios

3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Fundamentalmente, a metodologia desta pesquisa compreende a execução de seis fases, abrangendo desde o desenvolvimento de algoritmos para as modelagens cinemática e dinâmica ao projeto de controladores e sua validação experimental.

3.1 Primeira fase

Desenvolver um algoritmo genérico, capaz de gerar os modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos que operem em espaço plano, esférico ou tridimensional. Esta geração parte da definição da topologia do mecanismo paralelo, suas cadeias cinemáticas, descrevendo a localização relativa de seus elos e juntas.

Dentre os efeitos de modelagem considerados, destacam-se os decorrentes da inércia efetiva e acoplada, das forças de Coriolis e centrífugas, da força gravitacional, bem como dos esforços dos atuadores. Pretende-se que a geração dos modelos seja realizada de forma implícita. Para tanto, será empregado o método Recursivo Modular de Modelagem (RMM) proposto por Orsino [36] que, por meio da definição de níveis hierárquicos da estrutura de um sistema mecânico e a descrição da dependência das variáveis cinemáticas envolvidas, permite o acoplamento de subsistemas multicorpos.

3.2 Segunda fase

Efetuar as modelagens cinemática e dinâmica do mecanismo articulado plano 5R [34], utilizando o algoritmo desenvolvido na fase anterior.

3.3 Terceira fase

Nesta fase, diferentes técnicas de controle serão avaliadas sob a perspectiva de sua utilização em manipuladores paralelos. Assim, em princípio, esta pesquisa foca na síntese

de um controlador não-linear robusto e de alto desempenho. Para tanto, serão consideradas as incertezas paramétricas e a possibilidade de atuação redundante [11], além de estratégias para a determinação de leis de controle com custo computacional consideravelmente menor do que as tradicionais, que empreguem o Controle por Torque Computado [15, 55].

3.4 Quarta fase

Avaliar o emprego de diferentes técnicas de controle de trajetória aplicadas especificamente para o manipulador 5R, empregando a metodologia da terceira fase.

3.5 Quinta fase

Realizar diversas simulações que permitam observar a consistência dos resultados, no tocante às análises cinemáticas direta e inversa, bem como das análises dinâmicas direta e inversa. Além disso, serão determinadas as respostas dinâmicas do manipulador sujeito às distintas leis de controle sintetizadas.

3.6 Sexta fase

De modo a avaliar o desempenho previsto pelo uso de diferentes controladores para o manipulador paralelo 5R, será realizada a validação experimental em uma das bancadas de ensaio do LaMMaR. Para tanto, serão escolhidas duas trajetórias: uma que considere o comportamento em regime permanente e outra em regime transitório.

Neste sentido, almeja-se observar se haverá alguma diferença de desempenho se o controle for executado no espaço das juntas ou no da tarefa. Além disso, pretende-se considerar os efeitos da implementação de técnicas de controle puras ou combinadas. Para auxiliar na comparação entre as técnicas de controle, serão definidas duas métricas: uma que considere o erro de posicionamento do efetuador e outra a magnitude dos torques dos atuadores.

3.7 O que tinha antes

O estágio atual de desenvolvimento do presente projeto ocorre basicamente em três áreas: aplicação do algoritmo de modelagem e simulação para os mecanismos 5R [34] e 2RSU + PPaP [28], o projeto e simulação de controladores não lineares robustos de alto desempenho baseado no modelo dinâmico para os mecanismos citados, e a validação experimental das leis de controle sintetizadas.

Os trabalhos no âmbito de modelagem e simulação estão sendo desenvolvidos a partir da aplicação do algoritmo de modelagem cinemática e dinâmica de mecanismos paralelos desenvolvido, baseado na utilização dos parâmetros de Denavit-Hartenberg [15, 16, 32] e no método Orsino de acoplamento de subsistemas [36]. Toda modelagem será feita em C++, utilizando uma biblioteca otimizada de cálculo matricial (Armadillo). As simulações da dinâmica direta do mecanismo serão feitas utilizando o método Runge-Kutta de 8^a ordem [38] para solução de sistemas de EDOs, de modo a garantir estabilidade numérica do método, mesmo utilizando leis de controle quase descontínuas.

Os trabalhos na área de projeto de controle serão feitos utilizando a metodologia desenvolvida de projeto de controladores robustos multivariáveis para mecanismos paralelos, baseada no modelo dinâmico do mecanismo a ser controlado e na técnica de controle por modos deslizantes [42, 49].

Os trabalhos no âmbito da validação experimental das leis de controle sintetizadas serão realizados no protótipo do mecanismo 5R que encontra-se no laboratório de mecanismos. A bancada experimental do mecanismo 5R já está funcional e já forem realizados alguns testes de leis de controle de trajetória baseadas no modelo dinâmico do mecanismo. Para a realização da validação experimental nesta bancada, será realizada a identificação dos parâmetros do sistema e suas respectivas incertezas, projeto do controlador baseado nos parâmetros e incertezas identificadas, implementação das leis de controle, e aquisição de dados.

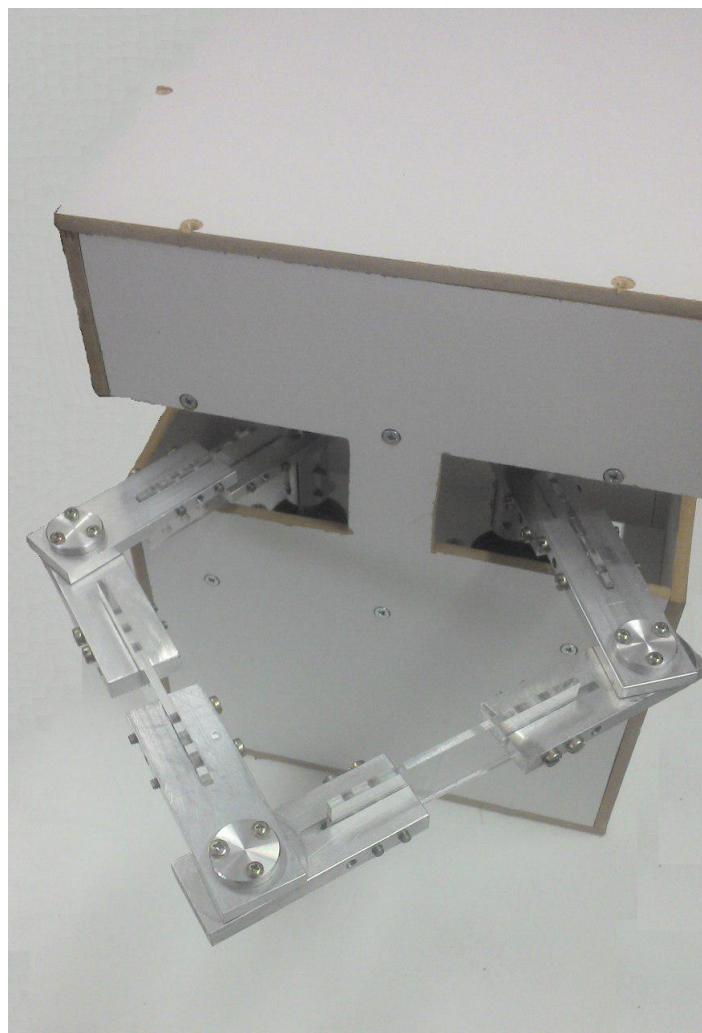


Figura 5: Protótipo do mecanismo 5R

PARTE II

MODELAGEM

4 MODELAGEM DE MANIPULADORES SERIAIS

“Frase espirituosa de um autor famoso”

-- Autor famoso

Este capítulo tem o intuito de apresentar um algoritmo genérico para a obtenção do modelo cinemático e dinâmico de mecanismos seriais. O algoritmo apresentado é implementável em linguagens de programação comumente usadas atualmente, como C++, Java e Python, sem necessitar de recursos de manipulação simbólica.

Para a obtenção do modelo, são necessários apenas os parâmetros de Denavit-Hartenberg [7, 15, 16, 32] do mecanismo e as posições dos centros de massa dos ligamentos em relação aos sistemas de coordenadas fixos aos ligamentos.

Seja \mathcal{B} um sistema mecânico serial de ν graus de liberdade. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- \mathcal{N} ou \mathcal{B}_0 : referencial inercial.
- \mathbb{N} ou B_0 : sistema de coordenadas da base do mecanismo, fixo a \mathcal{N} .
- $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, \nu$: i -ésimo ligamento.
- $B_i, i = 1, \dots, \nu$: sistema de coordenadas solidário a \mathcal{B}_i .
- $o_i, i = 0, \dots, \nu$: origem do sistema B_i .
- $\{i_i, j_i, k_i\}, i = 0, \dots, \nu$: base ortonormal do sistema B_i .
- $g_i, i = 1, \dots, \nu$: centro de massa de \mathcal{B}_i .
- x : ponto no espaço fixo ao efetuador.
- m_i : massa da barra \mathcal{B}_i .
- I_{g_i} : tensor de inércia da barra \mathcal{B}_i em relação a seu centro de massa.
- \mathbb{I}_i : tensor de inércia I_{g_i} escrito na base \mathbb{N} , ou seja, $[I_{g_i}]_{\mathbb{N}|\mathbb{N}}$.

- $q_i, i = 1, \dots, \nu$: deslocamento relativo (angular ou linear) da i -ésima junta.
- \mathbf{q} : matriz-coluna de ν coordenadas generalizadas independentes. É dada por $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_\nu \end{bmatrix}^\top$.
- \mathbf{g} : Vetor aceleração gravitacional.
- $\mathbf{\bar{g}}$: Vetor aceleração gravitacional escrito na base \mathbb{N} , ou seja, $[\mathbf{g}]_{\mathbb{N}}$.
- \mathbf{f}_i : Vetor força não-reativa resultante aplicada no centro de massa de \mathcal{B}_i .
- $\boldsymbol{\tau}_i$: Vetor torque não-reativo resultante aplicado em \mathcal{B}_i .
- $\bar{\mathbf{f}}_i$: Matriz-coluna de forças não-reativas generalizadas aplicadas no subsistema \mathcal{B}_i . É dada por $\bar{\mathbf{f}}_i = \begin{bmatrix} [\mathbf{f}_i]_{\mathbb{N}}^\top & [\boldsymbol{\tau}_i]_{\mathbb{N}}^\top \end{bmatrix}^\top$.

4.1 Cinemática

4.1.1 Cinemática de posição

Dados os parâmetros de Denavit-Hartemberg a_i, α_i, d_i e θ_i , com $1 \leq i \leq \nu$, é possível obter as matrizes de transformação homogênea $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1} \mid \mathcal{B}_i}^H$ a partir da seguinte expressão [7] :

$$[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1} \mid \mathcal{B}_i}^H = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.1)$$

Tendo obtido $[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1} \mid \mathcal{B}_i}^H$, é possível obter as transformações homogêneas que relacionam os sistemas solidários aos ligamentos (\mathcal{B}_i) ao sistema da base (\mathbb{N}) pela seguinte expressão recursiva:

$$[\mathbf{1}]_{\mathbb{N} \mid \mathcal{B}_i}^H = \begin{cases} [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_0 \mid \mathcal{B}_1}^H, & \text{se } i = 1 \\ [\mathbf{1}]_{\mathbb{N} \mid \mathcal{B}_{i-1}}^H \cdot [\mathbf{1}]_{\mathcal{B}_{i-1} \mid \mathcal{B}_i}^H, & \text{se } i > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.2)$$

As matrizes $[\mathbf{1}]_{\mathbb{N}|\mathcal{B}_i}^H$ apresentam o seguinte formato:

$$[\mathbf{1}]_{\mathbb{N}|\mathcal{B}_i}^H = \begin{bmatrix} [i]_{\mathbb{N}} & [j]_{\mathbb{N}} & [\mathbf{k}_i]_{\mathbb{N}} & [\mathbf{o}_i]_{\mathbb{N}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Sendo assim, tendo obtido $[\mathbf{1}]_{\mathbb{N}|\mathcal{B}_i}^H$, automaticamente obtemos $[i]_{\mathbb{N}}, [j]_{\mathbb{N}}, [\mathbf{k}_i]_{\mathbb{N}}$ e $[\mathbf{o}_i]_{\mathbb{N}}$. Note que também obtemos as coordenadas do efetuador no sistema da base, pois

$$[\mathbf{x}]_{\mathbb{N}} = [\mathbf{o}_{\nu}]_{\mathbb{N}} \quad (4.4)$$

Além disso, como $[g_i]_{\mathcal{B}_i}$ são dados de entrada do algoritmo, obtemos as coordenadas dos centros de massa dos ligamentos no sistema da base através da seguinte expressão:

$$[g_i]_{\mathbb{N}}^H = [\mathbf{1}]_{\mathbb{N}|\mathcal{B}_i}^H \cdot [g_i]_{\mathcal{B}_i}^H \quad (4.5)$$

4.1.2 Cinemática de velocidades lineares

A velocidade do efetuador pode ser obtida aplicando recursivamente o princípio da composição de movimentos para velocidades lineares deduzido anteriormente (D.22):

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}0} = \mathbf{v}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}0} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}1} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}1} = \mathbf{v}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}1} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}2} \quad (4.7)$$

⋮

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \mathbf{v}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_i} \quad (4.8)$$

⋮

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_{\nu-1}} = \mathbf{v}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_{\nu}}^{\mathcal{B}_{\nu-1}} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_{\nu}} \quad (4.9)$$

Como \mathbf{x} é fixo a \mathcal{B}_{ν} , temos que:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_{\nu}} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Sendo assim, a velocidade do efetuador em relação a cada um dos referenciais pode ser obtida recursivamente pela seguinte expressão:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i = \nu + 1 \\ \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_i} + \mathbf{v}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, \dots, 1 \quad (4.11)$$

Sendo que, a partir da equação (D.13), a velocidade de arrastamento de cada uma das juntas é dada por:

$$\boldsymbol{v}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \dot{q}_i \boldsymbol{k}_{i-1}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \dot{q}_i \boldsymbol{k}_{i-1} \wedge \boldsymbol{r}_{\mathbf{o}_{i-1}|\mathbf{x}}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.12)$$

Fazendo as seguintes definições:

$$\mathbb{J}_v(i)(\mathbf{q}) = \begin{cases} [\boldsymbol{k}_{i-1}]_{\mathbf{N}}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ [\boldsymbol{k}_{i-1}]_{\mathbf{N}} \wedge ([\mathbf{x}]_{\mathbf{N}} - [\mathbf{o}_{i-1}]_{\mathbf{N}}), & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.13)$$

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_i}]_{\mathbf{N}} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0 = [\boldsymbol{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{N}}]_{\mathbf{N}} \quad (4.15)$$

Temos que:

$$[\boldsymbol{v}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}]_{\mathbf{N}} = \mathbb{J}_v(i) \dot{q}_i, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.16)$$

$$\mathbf{v}_{i-1} = \begin{cases} \emptyset, & i = \nu + 1 \\ \mathbf{v}_i + \mathbb{J}_v(i) \dot{q}_i, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, \dots, 1 \quad (4.17)$$

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_v(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.18)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_v(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_v(1)(\mathbf{q}) & \dots & \mathbb{J}_v(\nu)(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Para obter as velocidades dos centros de massa dos ligamentos, seguimos a mesma linha de raciocínio e obtemos os seguintes resultados:

Definindo:

$$\dot{\mathbb{J}}_{v,i,j}(\mathbf{q}) = \begin{cases} 0, & j > i \\ [\mathbf{k}_{j-1}]_{\mathbb{N}}, & j \leq i \text{ e } j\text{-ésima junta prismática} \quad i, j = 1, \dots, \nu \\ [\mathbf{k}_{j-1}]_{\mathbb{N}} \wedge ([\mathbf{g}_i]_{\mathbb{N}} - [\mathbf{o}_{j-1}]_{\mathbb{N}}), & j \leq i \text{ e } j\text{-ésima junta rotativa} \end{cases}$$

(4.20)

$$\mathbf{v}_{i,j} = [\mathbf{v}_{\mathbf{g}_i}^{\mathbb{B}_j}]_{\mathbb{N}} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_{i,0} = [\mathbf{v}_{\mathbf{g}_i}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}} \quad (4.22)$$

Temos:

$$\mathbf{v}_{i,j-1} = \begin{cases} 0, & j = i + 1 \\ \mathbf{v}_{i,j} + \dot{\mathbb{J}}_{v,i,j} \dot{q}_j, & 1 \leq j \leq i \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu, j = i + 1, \dots, 1 \quad (4.23)$$

$$\mathbf{v}_i^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{v,i}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.24)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{v,i}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbb{J}}_{v,i,1}(\mathbf{q}) & \dots & \dot{\mathbb{J}}_{v,i,\nu}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

4.1.3 Cinemática de velocidades angulares

A velocidade angular do efetuador pode ser obtida aplicando recursivamente o princípio da composição de movimentos para velocidades angulares deduzido anteriormente (D.37):

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}_{\nu}}^{\mathbb{B}_0} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}_1}^{\mathbb{B}_0} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}_{\nu}}^{\mathbb{B}_1} \quad (4.26)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}_{\nu}}^{\mathbb{B}_1} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}_2}^{\mathbb{B}_1} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}_{\nu}}^{\mathbb{B}_2} \quad (4.27)$$

⋮

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}_{\nu}}^{\mathbb{B}_{i-1}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}_i}^{\mathbb{B}_{i-1}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbb{B}_{\nu}}^{\mathbb{B}_i} \quad (4.28)$$

⋮

$$\omega_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{\nu-2}} = \omega_{\mathcal{B}_{\nu-1}}^{\mathcal{B}_{\nu-2}} + \omega_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{\nu-1}} \quad (4.29)$$

Sendo assim, a velocidade angular do efetuador em relação a cada um dos referenciais pode ser obtida recursivamente pela seguinte expressão:

$$\omega_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i = \nu + 1 \\ \omega_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i} + \omega_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, \dots, 1 \quad (4.30)$$

Sendo que a velocidade angular de arrastamento de cada uma das juntas é dada por:

$$\omega_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \dot{q}_i k_{i-1}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.31)$$

Fazendo as seguintes definições:

$$\ddot{\omega}_i(q) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ [k_{i-1}]_N, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.32)$$

$$\omega_i = [\omega_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i}]_N \quad (4.33)$$

$$\omega^\star = \omega_0 = [\omega_{\mathcal{B}_\nu}^N]_N \quad (4.34)$$

Temos que:

$$[\omega_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}]_N = \ddot{\omega}_i \dot{q}_i, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.35)$$

$$\omega_{i-1} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i = \nu + 1 \\ \omega_i + \ddot{\omega}_i \dot{q}_i, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, \dots, 1 \quad (4.36)$$

$$\omega^\star(q, \dot{q}) = \mathbb{J}_\omega(q) \cdot \dot{q} \quad (4.37)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_\omega(q) = \begin{bmatrix} \ddot{\omega}_1(q) & \dots & \ddot{\omega}_\nu(q) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Para obter as velocidades angulares de cada ligamentos, seguimos a mesma linha de raciocínio e obtemos os seguintes resultados:

Definindo:

$$\ddot{\omega}_{i,j}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \emptyset, & j > i \\ \dot{\omega}_j(\mathbf{q}), & j \leq i \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, \nu \quad (4.39)$$

$$\omega_{i,j} = [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_j}]_{\mathbb{N}} \quad (4.40)$$

$$\omega_i^* = \omega_{i,0} = [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}} \quad (4.41)$$

Temos:

$$\omega_{i,j-1} = \begin{cases} \emptyset, & j = i + 1 \\ \omega_{i,j} + \ddot{\omega}_{i,j} \dot{q}_j, & 1 \leq j \leq i \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu, j = i + 1, \dots, 1 \quad (4.42)$$

$$\omega_i^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{\omega i}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.43)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{\omega i}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{i,1}(\mathbf{q}) & \dots & \dot{\omega}_{i,\nu}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

4.1.4 Cinemática de acelerações lineares

A aceleração do efetuador pode ser obtida aplicando recursivamente o princípio da composição de movimentos para velocidades lineares deduzido anteriormente (D.26):

$$\mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_0} = \mathbf{a}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_0} + \mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_1} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_0} \wedge \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_1} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_1} = \mathbf{a}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} + \mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_2} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \wedge \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_2} \quad (4.46)$$

⋮

$$\mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \mathbf{a}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_i} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_i} \quad (4.47)$$

⋮

$$\mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_{\nu-1}} = \mathbf{a}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_{\nu}}^{\mathcal{B}_{\nu-1}} + \mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_{\nu}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{\nu}}^{\mathcal{B}_{\nu-1}} \wedge \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_{\nu}} \quad (4.48)$$

Como \mathbf{x} é fixo a \mathcal{B}_ν , temos que:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}\nu} = \mathbf{0} \quad (4.49)$$

Sendo assim, a aceleração do efetuador em relação a cada um dos referenciais pode ser obtida recursivamente pela seguinte expressão:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i = \nu + 1 \\ \mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_i} + \mathbf{a}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge \mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_i}, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad (4.50)$$

Sendo que, a partir da equação (D.15), a aceleração de arrastamento de cada uma das juntas é dada por:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \ddot{q}_i \mathbf{k}_{i-1}, & \text{i-ésima junta prismática} \\ \ddot{q}_i \mathbf{k}_{i-1} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{o}_{i-1}|\mathbf{x}} + \dot{q}_i^2 \mathbf{k}_{i-1} \wedge \mathbf{k}_{i-1} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{o}_{i-1}|\mathbf{x}}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.51)$$

Fazendo as seguintes definições:

$$\mathbb{Q}_i = [\mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{B}_i}]_{\mathbb{N}} \quad (4.52)$$

$$\mathbb{Q}^\star = \mathbb{Q}_0 = [\mathbf{a}_{\mathbf{x}}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}} \quad (4.53)$$

Temos que:

$$[\mathbf{a}_{\mathbf{x}|\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}]_{\mathbb{N}} = \ddot{q}_i \mathbb{J}_v i + \dot{q}_i^2 \mathbb{J}_\omega i \wedge \mathbb{J}_v i, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.54)$$

$$\mathbb{Q}_{i-1} = \begin{cases} \mathbb{0}, & i = \nu + 1 \\ \mathbb{Q}_i + \mathbb{J}_v i \ddot{q}_i + (\mathbb{Q})_i, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, \dots, 1 \quad (4.55)$$

$$\mathbb{Q}^\star(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_v(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.56)$$

Sendo:

$$(\mathbb{Q})_i = \dot{q}_i \mathbb{J}_\omega i \wedge (\dot{q}_i \mathbb{J}_v i + 2\mathbf{v}_i) \quad (4.57)$$

$$\mathbb{Q} = \sum_{i=1}^{\nu} (\mathbb{Q})_i \quad (4.58)$$

Para obter as acelerações dos centros de massa dos ligamentos, seguimos a mesma linha de raciocínio e obtemos os seguintes resultados:

Definindo:

$$\mathbb{C}_{i,j} = [\mathbf{a}_{\mathbf{g}_i}^{\mathcal{B}_j}]_{\mathbb{N}} \quad (4.59)$$

$$\mathbb{C}_i^* = \mathbb{C}_{i,0} = [\mathbf{a}_{\mathbf{g}_i}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}} \quad (4.60)$$

Temos:

$$\mathbb{C}_{i,j-1} = \begin{cases} 0, & j = i+1 \\ \mathbb{C}_{i,j} + \mathbb{J}_{v,i,j} \ddot{q}_j + (\mathbb{G}_i)_j, & 1 \leq j \leq i \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu, j = i+1, \dots, 1 \quad (4.61)$$

$$\mathbb{C}_i^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{v,i}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{G}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.62)$$

Sendo:

$$(\mathbb{G}_i)_j = \dot{q}_j \mathbb{J}_{\omega,i,j} \wedge (\dot{q}_j \mathbb{J}_{\omega,i,j} + 2\mathbf{v}_{i,j}) \quad (4.63)$$

$$\mathbb{G}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^i (\mathbb{G}_i)_j \quad (4.64)$$

4.1.5 Cinemática de acelerações angulares

A aceleração angular do efetuador pode ser obtida aplicando recursivamente o princípio da composição de movimentos para acelerações deduzido anteriormente (D.40):

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_0} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_0} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_1} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_0} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_1} \quad (4.65)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_1} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_2} \quad (4.66)$$

⋮

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i} \quad (4.67)$$

⋮

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{\nu-2}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_{\nu-1}}^{\mathcal{B}_{\nu-2}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{\nu-1}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_{\nu-1}}^{\mathcal{B}_{\nu-2}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{\nu-1}} \quad (4.68)$$

Sendo assim, a aceleração angular do efetuador em relação a cada um dos referenciais pode ser obtida recursivamente pela seguinte expressão:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i = \nu + 1 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{B}_i}, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad (4.69)$$

Sendo que a aceleração angular de arrastamento de cada uma das juntas é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{i-ésima junta for prismática} \\ \ddot{q}_i \mathbf{k}_{i-1}, & \text{i-ésima junta rotativa} \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.70)$$

Fazendo as seguintes definições:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}]_{\mathbb{N}} \quad (4.71)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^* = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_\nu}^{\mathcal{N}}]_{\mathbb{N}} \quad (4.72)$$

Temos que:

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}}]_{\mathbb{N}} = \ddot{q}_i \mathbb{J} \boldsymbol{\omega}_i, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.73)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} = \begin{cases} \mathbf{0}, & i = \nu + 1 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \mathbb{J} \boldsymbol{\omega}_i \ddot{q}_i + (\dot{\boldsymbol{\omega}})_i, & 1 \leq i \leq \nu \end{cases} \quad i = \nu + 1, \dots, 1 \quad (4.74)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_\omega(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.75)$$

Sendo:

$$(\dot{\boldsymbol{\omega}})_i = \dot{q}_i \mathbb{J} \boldsymbol{\omega}_i \wedge \boldsymbol{\omega}_i \quad (4.76)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{i=1}^{\nu} (\dot{\boldsymbol{\omega}})_i \quad (4.77)$$

Para obter as acelerações angulares dos centros de massa dos ligamentos, seguimos a mesma linha de raciocínio e obtemos os seguintes resultados:

Definindo:

$$\dot{\omega}_{i,j} = [\dot{\omega}_{\mathbf{g}_i}^{\mathbb{B}_j}]_{\mathbb{N}} \quad (4.78)$$

$$\dot{\omega}_i^* = \dot{\omega}_{i,0} = [\dot{\omega}_{\mathbb{B}_i}^{\mathbb{N}}]_{\mathbb{N}} \quad (4.79)$$

Temos:

$$\dot{\omega}_{i,j-1} = \begin{cases} 0, & j = i + 1 \\ \dot{\omega}_{i,j} + \mathbb{J}_{\omega_{i,j}} \ddot{q}_j + (\dot{\omega}_i)_j, & 1 \leq j \leq i \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu, \quad j = i + 1, \dots, 1 \quad (4.80)$$

$$\dot{\omega}_i^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbb{J}_{\omega_i}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\omega}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.81)$$

Sendo:

$$(\dot{\omega}_i)_j = \dot{q}_j \mathbb{J}_{\omega_{i,j}} \wedge \omega_{i,j} \quad (4.82)$$

$$\dot{\omega}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^i (\dot{\omega}_i)_j \quad (4.83)$$

4.2 Dinâmica dos elos e juntas

O modelo dinâmico de \mathcal{B} é obtido utilizando um procedimento de acoplamento de subsistemas baseado no Método Orsino [36], e é dado por:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbb{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (4.84)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_v^T \mathbb{J}_v i + \mathbb{J}_{\omega}^T \mathbb{I}_i \mathbb{J}_{\omega} i \quad (4.85)$$

$$\mathbb{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_v^T \mathbb{g}_i + \mathbb{J}_{\omega}^T (\mathbb{I}_i \dot{\omega}_i^* + \omega_i^* \wedge (\mathbb{I}_i \omega_i^*)) \quad (4.86)$$

$$\mathbb{g}(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_v^T \mathfrak{d} \quad (4.87)$$

Segue abaixo, a dedução.

4.2.1 Modelo dos subsistemas

O modelo dinâmico de cada ligamento pode ser obtido por Newton-Euler, pois são considerados como corpos rígidos livres no espaço sujeitos apenas à força peso. Sendo assim, através do Teorema do Movimento do Baricentro e do Teorema do Momento Angular, obtemos os esforços não-reativos (ativos e iniciais) aplicados em cada ligamento:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_i = -m_i \mathbf{a}_{\mathbf{g}_i}^N + m_i \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\tau}_i = -\mathbf{I}_{\mathbf{g}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^N - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^N \wedge (\mathbf{I}_{\mathbf{g}_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^N) \end{cases} \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.88)$$

Aplicando as equações vetoriais no sistema N, temos:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{f}_i]_N \\ [\boldsymbol{\tau}_i]_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & 0 \\ 0 & [\mathbf{I}_{\mathbf{g}_i}]_{N|N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{a}_{\mathbf{g}_i}^N]_N \\ [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}_i}^N]_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^N]_N \wedge ([\mathbf{I}_{\mathbf{g}_i}]_{N|N} \cdot [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_i}^N]_N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -m_i [\mathbf{g}]_N \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Ou seja:

$$\bar{\mathbf{f}}_i = - \left\{ \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^* \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_i^* \wedge (\mathbb{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i \mathbb{0} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.90)$$

Como subsistemas estão desacoplados, não há forças reativas, portanto o modelo dinâmico de cada subsistema pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \mathbb{0} \quad (4.91)$$

Além disso, definindo as quasi-velocidades:

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i^* \\ \boldsymbol{\omega}_i^* \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

E as quasi-coordenadas:

$$d\pi_i = \mathbf{p}_i dt \quad (4.93)$$

Temos que o trabalho virtual realizado por cada subsistema é dado por:

$$\delta W_i = \delta \pi_i^\top \cdot \bar{\mathbf{f}}_i \quad (4.94)$$

4.2.2 Sistemas de forças ativas generalizadas

Considere também um subsistema constituído pelos esforços que os atuadores aplicam nas juntas do mecanismo. Primeiramente, definimos a matriz-coluna de quasi-velocidades relativas a esse subsistema:

$$\underline{p}^{\#} = \dot{\underline{q}} \quad (4.95)$$

Seja \underline{u} a matriz-coluna de esforços generalizados aplicadas pelos atuadores na direção de $\delta \underline{q}$. Sendo assim, o trabalho virtual realizado por este subsistema é dado por:

$$\delta W^{\#} = \delta \underline{q}^T \cdot \underline{u} \quad (4.96)$$

4.2.3 Vínculos cinemáticos entre subsistemas

Através das equações (4.24), (4.43) e (4.95), é possível relacionar as quasi-velocidades de cada subsistema com as quasi-velocidades $\underline{p}^{\#}$ da seguinte maneira:

$$\underline{p}_i(\underline{q}, \underline{p}^{\#}) = \mathbb{J}_i(\underline{q}) \cdot \underline{p}^{\#}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.97)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_i(\underline{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v_i}(\underline{q}) \\ \mathbb{J}_{\omega_i}(\underline{q}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.98)$$

Seja \underline{p}° a matriz coluna que contém as quasi-velocidades de todos os ligamentos:

$$\underline{p}^{\circ} = \begin{bmatrix} \underline{p}_1^T & \dots & \underline{p}_{\nu}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.99)$$

\underline{p}° pode ser expresso em função apenas das quasi-velocidades $\underline{p}^{\#}$ da seguinte forma:

$$\underline{p}^{\circ}(\underline{q}, \underline{p}^{\#}) = \mathbb{J}(\underline{q}) \underline{p}^{\#} \quad (4.100)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}(\underline{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_1(\underline{q})^T & \dots & \mathbb{J}_{\nu}(\underline{q})^T \end{bmatrix}^T \quad (4.101)$$

Sendo assim, a partir de (4.100), os vínculos de quasi-velocidades entre subsistemas

podem ser expressos como:

$$\bar{P}(q, p) = A(q) \cdot p = 0 \quad (4.102)$$

Sendo:

$$A(q) = \begin{bmatrix} J(q) & -1 \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

$$p = \begin{bmatrix} p^{\#T} & p^{\circ T} \end{bmatrix}^T \quad (4.104)$$

4.2.4 Acoplamento de subsistemas

Seja f a matriz-coluna contendo todos os sistemas de forças não-reativas generalizadas:

$$f = \begin{bmatrix} u^T & f^{\circ T} \end{bmatrix}^T \quad (4.105)$$

Sendo:

$$f^{\circ} = \begin{bmatrix} f_1^T & \dots & f_{\nu}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.106)$$

Seja π um conjunto de de quasi-coordenadas tal que:

$$d\pi = p dt \quad (4.107)$$

Ou seja:

$$d\pi = \begin{bmatrix} d\pi^{\#T} & d\pi^{\circ T} \end{bmatrix}^T \quad (4.108)$$

Sendo:

$$d\pi^{\#} = dq \quad (4.109)$$

$$d\pi^{\circ} = \begin{bmatrix} d\pi_1^T & \dots & d\pi_{\nu}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.110)$$

Pelo princípio de d'Alembert, temos que

$$\delta W^{\#} + \sum_{i=1}^{\nu} \delta W_i = 0 \quad (4.111)$$

Através de (4.111), (4.96), (4.148), (4.105) e (4.107), temos que:

$$\delta \pi^T \cdot f = 0 \quad (4.112)$$

Além disso, a partir da definição de π (4.107) e dos vínculos de quasi-velocidades (4.102), temos que as variações das quasi-coordenadas π devem respeitar a seguinte relação:

$$A(q) \cdot \delta \pi = 0 \quad (4.113)$$

Subdividindo $\delta \pi$ em $\delta \pi^\#$ e $\delta \pi^\circ$ e considerando $\delta \pi^\#$ como variáveis livres, temos:

$$\begin{bmatrix} J(q) & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \pi^\# \\ \delta \pi^\circ \end{bmatrix} = 0 \quad (4.114)$$

$$\Rightarrow \delta \pi^\circ = J(q) \delta \pi^\# \quad (4.115)$$

$$\therefore \delta \pi = C(q) \cdot \delta \pi^\# \quad (4.116)$$

Sendo:

$$C(q) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ J(q) \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

Repare que trocando $\delta \pi$ por p em (4.113), obtemos os vínculos de quasi-velocidades do sistema (4.102). Sendo assim, à partir das expressões (4.116) e (4.117), temos que C respeita a seguinte relação:

$$p = C(q) \cdot p^\# \quad (4.118)$$

Sendo assim, substituindo (4.116) em (4.112), temos:

$$\delta \pi^{\#T} \cdot C^T f = 0 \quad (4.119)$$

Tendo em vista que as quasi-coordenadas $\pi^\#$ são independentes, as variações $\delta \pi^\#$ são arbitrárias. Sendo assim, as equações dinâmicas do sistema são dadas por:

$$C^T f = 0 \quad (4.120)$$

Substituindo (4.117) e (4.105) em (4.120), temos:

$$u + J^T f^\circ = 0 \quad (4.121)$$

Substituindo (4.101), (4.98), (4.90) e (4.106) em (4.121), temos:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v_i} \\ \mathbb{J}_{\omega_i} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} m_i \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{Q}_i^* \\ \dot{\mathbb{Q}}_i^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i^* \wedge (\mathbb{I}_i \cdot \omega_i^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i \mathfrak{D} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{u} \quad (4.122)$$

Substituindo (4.62) e (4.81) em (4.122), temos:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v_i} \\ \mathbb{J}_{\omega_i} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} m_i(\mathbb{J}_{v_i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{Q}_i) \\ \mathbb{I}_i(\mathbb{J}_{\omega_i} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbb{Q}}_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i^* \wedge (\mathbb{I}_i \cdot \omega_i^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_i \mathfrak{D} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{u} \quad (4.123)$$

Sendo assim, obtemos o modelo dinâmico mostrado anteriormente:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \nu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (4.84)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v_i}^T \mathbb{J}_{v_i} + \mathbb{J}_{\omega_i}^T \mathbb{I}_i \mathbb{J}_{\omega_i} \quad (4.85)$$

$$\nu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v_i}^T \mathbb{Q}_i + \mathbb{J}_{\omega_i}^T (\mathbb{I}_i \dot{\mathbb{Q}}_i + \omega_i^* \wedge (\mathbb{I}_i \omega_i^*)) \quad (4.86)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^{\nu} m_i \mathbb{J}_{v_i}^T \mathfrak{D} \quad (4.87)$$

4.3 Dinâmica dos atuadores

Esta subseção tem o intuito de complementar algoritmo de modelagem de mecanismos seriais já apresentado através inclusão da dinâmica dos atuadores.

Seja \mathcal{B}' um sistema mecânico serial de ν graus de liberdade, constituído por um mecanismo serial \mathcal{B} e ν atuadores, possivelmente acoplados a redutores de velocidades. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- \mathcal{R}_i , $i = 1, \dots, \nu$: rotor do i -ésimo atuador.
- \mathbf{R}_i , $i = 1, \dots, \nu$: sistema de coordenadas solidário a \mathcal{R}_i .
- J_{r_i} , $i = 1, \dots, \nu$: momento de inércia do rotor \mathcal{R}_i .
- $\mathbf{I}_{\mathbf{r}_i}$, $i = 1, \dots, \nu$: tensor de inércia do rotor \mathcal{R}_i em relação a seu centro de massa.

- $\mathbb{I}_{r_i}, i = 1, \dots, \nu$: tensor de inércia $\mathbf{I}_{\mathbf{r}_i}$ escrito na base \mathbb{N} , ou seja, $[\mathbf{I}_{\mathbf{r}_i}]_{\mathbb{N}|\mathbb{N}}$.
- $\boldsymbol{\tau}_{r_i}, i = 1, \dots, \nu$: Vetor torque não-reativo resultante aplicado em \mathcal{R}_i .
- $\bar{\mathbb{F}}_{r_i}, i = 1, \dots, \nu$: Matriz-coluna de forças não-reativas generalizadas aplicadas no subsistema $\mathcal{B}_{r_i}, i = 1, \dots, \nu$. É dada por $\bar{\mathbb{F}}_{r_i} = [\boldsymbol{\tau}_i]_{\mathbb{N}}$.
- $q_{r_i}, i = 1, \dots, \nu$: Deslocamentos angular realizado pelo i-ésimo rotor.
- \mathbb{q}_r : Matriz-coluna dos deslocamentos angulares realizados pelos rotores.
- $\mathbb{f}(\dot{\phi}_r)$: matriz-coluna das forças de atrito generalizadas aplicadas nos rotores, em sentido oposto aos seus deslocamentos.
- \mathbb{i} : Matriz-coluna de correntes elétricas que fluem pelas armaduras dos atuadores.
- \mathbb{v} : Matriz-coluna de tensões elétricas aplicadas nos terminais dos atuadores.
- $r_i, i = 1, \dots, \nu$: Relação de transmissão do i-ésimo redutor.
- \underline{r} : Matriz diagonal de relações de transmissão dos redutores.
- $\underline{k_t}$: Matriz diagonal de constantes de torque dos atuadores.
- $\underline{k_w}$: Matriz diagonal de constantes de força contra-eletromotriz dos atuadores.
- \underline{R} : Matriz diagonal de resistências elétricas dos atuadores.
- \underline{L} : Matriz diagonal de indutâncias dos atuadores.
- i : Corrente elétrica.
- v : Tensão elétrica.
- ω : Velocidade angular.
- k_w : Constante de força contra-eletromotriz.
- R : Resistência elétrica.
- L : Indutância.

4.3.1 Cinemática

4.3.1.1 Cinemática de velocidades angulares

Devido aos redutores de velocidade e aos fusos de esferas, o deslocamento relativo q_{r_i} gerado pelo i-ésimo rotor é convertido em um deslocamento q_i através da seguinte relação:

$$\underline{q}_r = \underline{r} \underline{q} \quad (4.124)$$

Sendo assim, a velocidade angular do i-ésimo rotor pode ser obtida aplicando o princípio da composição de movimentos para velocidades angulares deduzido anteriormente (D.37):

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^N = \boldsymbol{\omega}_{B_{i-1}}^N + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{B_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.125)$$

Sendo que a velocidade angular relativa de cada rotor é dada por:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{B_{i-1}} = \dot{q}_{r_i} \mathbf{k}_{i-1} = r_i \dot{q}_i \mathbf{k}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.126)$$

Aplicando a equação (4.125) no sistema N, temos:

$$\omega_{r_i}^* = \omega_{i-1}^* + r_i \dot{q}_i [\mathbf{k}_{i-1}]_N, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.127)$$

Sendo:

$$\omega_{r_i}^* = [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_i}^N]_N \quad (4.128)$$

Utilizando a equação (4.43), pode-se reescrever (4.127) da seguinte maneira:

$$\omega_{r_i}^*(q, \dot{q}) = \mathbb{J}_{\omega_{r_i}}(q) \cdot \dot{q} \quad (4.129)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_{\omega_{r_i,j}}(q) = \begin{cases} r_i [\mathbf{k}_{i-1}]_N, & j = i \\ \mathbb{J}_{\omega_{i,j}}(q), & j \neq i \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, \nu \quad (4.130)$$

$$\mathbb{J}_{\omega_{r_i}}(q) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{\omega_{r_i,1}}(q) & \dots & \mathbb{J}_{\omega_{r_i,\nu}}(q) \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

4.3.1.2 Cinemática de acelerações angulares

A aceleração angular do i-ésimo rotor pode ser obtida aplicando o princípio da composição de movimentos para acelerações deduzido anteriormente (D.40):

$$\dot{\omega}_{\mathcal{R}_i}^N = \dot{\omega}_{\mathcal{B}_{i-1}}^N + \dot{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} + \omega_{\mathcal{B}_{i-1}}^N \wedge \omega_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} \quad (4.132)$$

Sendo que a aceleração angular de relativa de cada rotor é dada por:

$$\dot{\omega}_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{B}_{i-1}} = \ddot{q}_{r_i} \mathbf{k}_{i-1} = r_i \ddot{q}_i \mathbf{k}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.133)$$

Aplicando a equação (4.132) no sistema \mathbb{N}_i , temos:

$$\dot{\omega}_{r_i}^* = \dot{\omega}_{i-1}^* + r_i \ddot{q}_i [\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbb{N}} + \omega_{i-1}^* \wedge r_i \dot{q}_i [\mathbf{k}_{i-1}]_{\mathbb{N}}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.134)$$

Sendo:

$$\dot{\omega}_{r_i}^* = [\dot{\omega}_{\mathcal{R}_i}^N]_{\mathbb{N}} \quad (4.135)$$

Utilizando a equação (4.81), pode-se reescrever (4.134) da seguinte maneira:

$$\dot{\omega}_{r_i}^*(q, \dot{q}, \ddot{q}) = J_{\omega_{r_i}}(q) \cdot \ddot{q} + \dot{\omega}_{r_i}(q, \dot{q}) \quad (4.136)$$

Sendo:

$$\dot{\omega}_{r_i}(q, \dot{q}) = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ \dot{\omega}_{i-1}(q, \dot{q}) + \omega_{i-1}^*(q, \dot{q}) \wedge \dot{q}_i J_{\omega_{r_i}}(q), & i > 1 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.137)$$

4.3.2 Dinâmica Mecânica

O modelo dinâmico de \mathcal{B}' é obtido utilizando um procedimento de acoplamento de subsistemas baseado no Método Orsino [36], e é dado por:

$$M^*(q) \ddot{q} + v^*(q, \dot{q}) + g^*(q) = u^* \quad (4.138)$$

Sendo:

$$M^*(q) = M(q) + \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_{r_i}}^T I_{r_i} J_{\omega_{r_i}} \quad (4.139)$$

$$\nu^*(q, \dot{q}) = \nu(q, \dot{q}) + \underline{r} \zeta(\underline{r} \dot{q}) + \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_r i}^T (\mathbb{I}_{r i} \dot{\omega}_{r i} + \omega_{r i}^* \wedge (\mathbb{I}_{r i} \omega_{r i}^*)) \quad (4.140)$$

$$g^*(q) = g(q) \quad (4.141)$$

$$u^* = \underline{r} k_i \mathbb{I} \quad (4.142)$$

Segue abaixo, a dedução.

4.3.2.1 Modelo dos subsistemas rotores

O modelo dinâmico de cada rotor pode ser obtido por Newton-Euler, pois são considerados como corpos rígidos com inércia puramente rotativa, livres no espaço. Os efeitos da massas do rotor, do estator e do redutor podem facilmente incluídos no modelo simplesmente atualizando os valores dos parâmetros de inércia dos ligamentos. Sendo assim, através do Teorema do Momento Angular, obtemos os esforços iniciais aplicados em cada rotor:

$$\tau_{r i} = -\mathbf{I}_{r i} \cdot \dot{\omega}_{r i}^N - \omega_{r i}^N \wedge (\mathbf{I}_{r i} \cdot \omega_{r i}^N), \quad i = 1, \dots, \nu \quad (4.143)$$

Aplicando as equações vetoriais no sistema N, temos:

$$[\tau_{r i}]_N = -[\mathbf{I}_{r i}]_{N|N} \cdot [\dot{\omega}_{r i}^N]_N - [\omega_{r i}^N]_N \wedge ([\mathbf{I}_{r i}]_{N|N} \cdot [\omega_{r i}^N]_N) \quad (4.144)$$

Ou seja:

$$\bar{f}_{r i} = -\mathbb{I}_{r i} \cdot \dot{\omega}_{r i}^* - \omega_{r i}^* \wedge (\mathbb{I}_{r i} \cdot \omega_{r i}^*) \quad (4.145)$$

Como os subsistemas estão desacoplados, não há forças reativas, portanto o modelo dinâmico de cada subsistema rotor pode ser escrito como:

$$\bar{f}_{r i} = 0 \quad (4.146)$$

Além disso, definindo as quasi-coordenadas:

$$d\pi_{r i} = \omega_{r i}^* dt \quad (4.147)$$

Temos que o trabalho virtual realizado por cada subsistema é dado por:

$$\delta W_{ri} = \delta \mathbb{q}_{ri}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{ri} \quad (4.148)$$

4.3.2.2 Modelo do subsistema serial

O modelo do subsistema serial utilizado é o mesmo que foi deduzido anteriormente considerando $u = 0$. O efeito das forças ativas aplicadas pelos atuadores será contabilizado na próxima subseção. Sendo assim, os esforços generalizados não-reativos do subsistema serial são dados por:

$$\bar{\mathbf{f}}_s = -\mathbb{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \nu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.149)$$

Além disso, o trabalho virtual realizado por este subsistema é dado por:

$$\delta W_s = \delta \mathbf{q}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_s \quad (4.150)$$

4.3.2.3 Sistemas de forças ativas generalizadas

Considere também um subsistema constituído pelos esforços que os atuadores aplicam em seus rotores. Os torques gerados pelos atuadores são proporcionais à corrente elétrica que flui pelas suas armaduras e são aplicados na direção dos deslocamentos virtuais relativos dos rotores. Além disso, é possível que hajam esforços de atrito devido ao atrito gerado nos mancais e nas engrenagens do redutor, aplicados na direção da ação dos deslocamentos virtuais relativos dos rotores. Sendo assim, o trabalho virtual realizado por este subsistema é dado por:

$$\delta W_\tau = \delta \mathbf{q}_r^T \cdot (k_t \ddot{\mathbf{i}} - \zeta(\dot{\mathbf{q}}_r)) \quad (4.151)$$

4.3.2.4 Vínculos entre subsistemas

Tendo em vista que o sistema mecânico \mathcal{B}' tem ν graus de liberdade, e \mathbf{q} são um conjunto de ν coordenadas generalizadas independentes, podemos relacionar os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{q}_r$ e $\delta \mathbb{q}_{ri}$, com $i = 1, \dots, \nu$, com os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{q}$, ou seja, obter os vínculos cinemáticos entre os subsistemas.

Para relacionar δq_r com δq basta aplicar o operador variação em (4.124):

$$\delta q_r = \underline{r} \delta q \quad (4.152)$$

Para relacionar $\delta \pi_{ri}$, aplica-se a relação (4.129) em (4.147):

$$d\pi_{ri} = J_{\omega_r i} dq \quad (4.153)$$

Portanto:

$$\delta \pi_{ri} = J_{\omega_r i} \delta q \quad (4.154)$$

4.3.2.5 Acoplamento de subsistemas

Tendo em vista que um procedimento mais detalhado para acoplamento de subsistemas já foi apresentado, nesta subseção ele será realizado de forma mais sucinta.

Pelo princípio de d'Alembert, temos que

$$\delta W_\tau + \delta W_s + \sum_{i=1}^{\nu} \delta W_{ri} = 0 \quad (4.155)$$

Ou seja:

$$\delta q_r^\top \cdot (\underline{k}_t \ddot{\underline{q}} - \zeta(\dot{q}_r) + \delta q^\top \cdot \bar{F}_s + \sum_{i=1}^{\nu} \delta \pi_{ri}^\top \cdot \bar{F}_{ri}) = 0 \quad (4.156)$$

Sabe-se que os deslocamentos virtuais δq , δq_r e $\delta \pi_{ri}$, com $i = 1, \dots, \nu$, não são independentes entre si. Porém, é possível relacionar δq_r e $\delta \pi_{ri}$ com os deslocamentos virtuais δq através das equações (4.152) e (4.154). Sendo assim:

$$(\underline{r} \delta q)^\top \cdot (\underline{k}_t \ddot{\underline{q}} - \zeta(\underline{r} \dot{q}) + \delta q^\top \cdot \bar{F}_s + \sum_{i=1}^{\nu} (J_{\omega_r i} \delta q)^\top \cdot \bar{F}_{ri}) = 0 \quad (4.157)$$

Ou seja:

$$\delta q^\top \cdot \left(\underline{r} \underline{k}_t \ddot{\underline{q}} - \zeta(\underline{r} \dot{q}) + \bar{F}_s + \sum_{i=1}^{\nu} J_{\omega_r i}^\top \bar{F}_{ri} \right) = 0 \quad (4.158)$$

Tendo em vista que as coordenadas q são independentes, as variações δq são ar-

bitrârias. Sendo assim, as equações dinâmicas do sistema são dadas por:

$$\underline{r} \underline{k}_t \ddot{\underline{\mathbf{i}}} - \underline{r} \zeta(\underline{r} \dot{\underline{\mathbf{q}}}) + \bar{\mathbb{F}}_s + \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega_r i}^T \bar{\mathbb{F}}_{r i} = \emptyset \quad (4.159)$$

Substituindo (4.145) e (4.149) em (4.159), temos:

$$\underline{r} \underline{k}_t \ddot{\underline{\mathbf{i}}} - \underline{r} \zeta(\underline{r} \dot{\underline{\mathbf{q}}}) - \mathbb{M} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} - \nu - \mathbb{g} - \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega_r i}^T (\mathbb{I}_{r i} \cdot \dot{\omega}_{r i}^* + \omega_{r i}^* \wedge (\mathbb{I}_{r i} \cdot \omega_{r i}^*)) = \emptyset \quad (4.160)$$

Substituindo (4.136) em (4.160):

$$\underline{r} k_t \ddot{\underline{\mathbf{i}}} - \underline{r} \zeta(\underline{r} \dot{\underline{\mathbf{q}}}) - \mathbb{M} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} - \nu - \mathbb{g} - \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega_r i}^T (\mathbb{I}_{r i} \cdot (\mathbb{J}_{\omega_r i} \cdot \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \dot{\omega}_{r i}) + \omega_{r i}^* \wedge (\mathbb{I}_{r i} \cdot \omega_{r i}^*)) = \emptyset \quad (4.161)$$

Sendo assim, obtemos o modelo dinâmico mostrado anteriormente:

$$\mathbb{M}^*(\underline{\mathbf{q}}) \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \nu^*(\underline{\mathbf{q}}, \dot{\underline{\mathbf{q}}}) + \mathbb{g}^*(\underline{\mathbf{q}}) = \underline{u}^* \quad (4.138)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}^*(\underline{\mathbf{q}}) = \mathbb{M}(\underline{\mathbf{q}}) + \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega_r i}^T \mathbb{I}_{r i} \mathbb{J}_{\omega_r i} \quad (4.139)$$

$$\nu^*(\underline{\mathbf{q}}, \dot{\underline{\mathbf{q}}}) = \nu(\underline{\mathbf{q}}, \dot{\underline{\mathbf{q}}}) + \underline{r} \zeta(\underline{r} \dot{\underline{\mathbf{q}}}) + \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{J}_{\omega_r i}^T (\mathbb{I}_{r i} \dot{\omega}_{r i} + \omega_{r i}^* \wedge (\mathbb{I}_{r i} \omega_{r i}^*)) \quad (4.140)$$

$$\mathbb{g}^*(\underline{\mathbf{q}}) = \mathbb{g}(\underline{\mathbf{q}}) \quad (4.141)$$

$$\underline{u}^* = \underline{r} k_t \ddot{\underline{\mathbf{i}}} \quad (4.142)$$

4.4 Modelo completo

O modelo do sistema elétrico equivalente de um motor de corrente contínua é dado por uma fonte de tensão variável ligada em série a um indutor, um resistor, e uma força contra-eletromotriz diretamente proporcional à velocidade angular do rotor em relação ao estator, ou seja:

$$L \frac{di}{dt} + R i + k_w \omega = v \quad (4.162)$$

Tendo em vista que todas as juntas de um mecanismo paralelo são atuadas, a equação matricial da dinâmica elétrica do sistema é dada por:

$$\underline{L} \frac{d\ddot{\underline{\mathbf{i}}}}{dt} + \underline{R} \ddot{\underline{\mathbf{i}}} + \underline{k}_w \dot{\underline{\mathbf{q}}}_r = \underline{v} \quad (4.163)$$

Sendo assim, juntando as equações (4.138) e (4.163), obtemos a dinâmica do sistema como um todo:

$$\begin{cases} \mathbb{M}^*(q) \ddot{q} + \nu^*(q, \dot{q}) + g^*(q) = r \underline{k}_t \ddot{i} \\ \underline{L} \frac{d\ddot{q}}{dt} + \underline{R} \ddot{i} + r \underline{k}_w \dot{q} = \psi \end{cases} \quad (4.164)$$

5 MODELAGEM DE MANIPULADORES PARALELOS

Esta subseção tem o intuito de apresentar um algoritmo genérico para a obtenção do modelo dinâmico de mecanismos paralelos cujo efetuador realiza apenas movimentos de translação. O algoritmo apresentado é implementável em linguagens de programação comumente usadas atualmente, como C++, Java e Python, sem necessitar de recursos de manipulação simbólica.

Para a obtenção do modelo do mecanismo paralelos, são necessários apenas os modelos de mecanismos seriais deduzidos utilizando o algoritmo apresentado anteriormente, do modelo do efetuador, e de 7 matrizes constantes que são utilizadas para descrever a arquitetura do mecanismo paralelo.

Para realizar a modelagem de mecanismos paralelos a partir de subsistemas seriais já deduzidos, é necessário introduzir mais alguns conceitos:

Sejam $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ $n + 1$ subsistemas mecânicos e \mathcal{M} um sistema mecânico de $\nu^{\#}$ graus de liberdade gerado pelo acoplamento dos subsistemas citados. Definimos:

- $\mathcal{N}_i, i = 0, \dots, n$: referencial inercial relativo ao subsistema \mathcal{B}_i .
- $\mathbb{N}_i, i = 0, \dots, n$: sistema de coordenadas solidário a \mathcal{N}_i .
- $\mathbf{o}_i, i = 0, \dots, n$: origem do sistema \mathbb{N}_i .
- \mathbf{g} : centro de massa da plataforma/efetuador \mathcal{B}_0 .
- \mathbf{B} : sistema de coordenadas solidário a \mathcal{B}_0 com origem em \mathbf{g} .
- m : massa da plataforma/efetuador \mathcal{B}_0 .
- \mathbf{f} : Vetor de forças não-reativas (ativas e iniciais) aplicadas no centro de massa da plataforma/efetuador \mathcal{B}_0 .

- \mathbf{g} : Vetor aceleração gravitacional.
- $\mathbf{\ddot{g}}$: Vetor aceleração gravitacional escrito na base \mathbb{N}_0 , ou seja, $[\mathbf{g}]_{\mathbb{N}_0}$.
- $\mathbf{q}_i, i = 0, \dots, n$: matriz-coluna de coordenadas generalizadas do subsistema \mathcal{B}_i .
- \mathbf{q}^* : matriz-coluna de coordenadas generalizadas da plataforma/efetuador \mathcal{B}_0 .
- \mathbf{q}^\diamond : matriz-coluna de coordenadas generalizadas dos subsistemas seriais. Definida como $\mathbf{q}^\diamond = [\mathbf{q}_1^\top \dots \mathbf{q}_n^\top]^\top$.
- \mathbf{q} : matriz-coluna contendo todas as coordenadas generalizadas do sistema \mathcal{M} . Definida como $\mathbf{q} = [\mathbf{q}^{*\top} \mathbf{q}^{\diamond\top}]^\top$.
- $\mathbf{q}^\#$: matriz-coluna de $\nu^\#$ coordenadas generalizadas independentes.
- \mathbf{q}^o : matriz-coluna de coordenadas generalizadas redundantes (contém as componentes de \mathbf{q} não pertencentes a $\mathbf{q}^\#$)
- $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$: matriz-coluna dos vínculos de posição entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$.
- $\bar{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: matriz-coluna dos vínculos de orientação entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por $\bar{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$: ponto no espaço fixo ao efetuador de \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{x}_i(\mathbf{q}_i), i = 1, \dots, n$: $[\mathbf{x}_i]_{\mathbb{N}_i}$ escrito em função das coordenadas \mathbf{q}_i .
- $\mathbb{J}_v(\mathbf{q}_i), i = 1, \dots, n$: jacobiano \mathbb{J}_v do subsistema \mathcal{B}_i .
- $\mathbb{J}_\omega(\mathbf{q}_i), i = 1, \dots, n$: jacobiano \mathbb{J}_ω do subsistema \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{g}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i), i = 1, \dots, n$: matriz-coluna \mathbf{g} do subsistema \mathcal{B}_i .
- $\dot{\mathbf{g}}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i), i = 1, \dots, n$: matriz-coluna $\dot{\mathbf{g}}$ do subsistema \mathcal{B}_i .
- $\mathbb{M}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i), i = 0, \dots, n$: matriz de inércia generalizada do subsistema \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{v}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i), i = 0, \dots, n$: matriz-coluna das forças de inércia giroscópica e atrito generalizadas do subsistema \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{g}_{\mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i), i = 0, \dots, n$: matriz-coluna dos esforços gravitacionais generalizados do subsistema \mathcal{B}_i .
- $\mathbf{u}_{\mathcal{B}_i}, i = 0, \dots, n$: matriz-coluna dos esforços ativos externos generalizados aplicados ao subsistema \mathcal{B}_i .

5.1 Modelo dos subsistemas

O modelo dinâmico de cada subsistema desacoplado pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbb{F}}_{\mathcal{B}_i}(u_i, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) = u_{\mathcal{B}_i} - \left(M_{\mathcal{B}_i}(q_i)\ddot{q}_i + v_{\mathcal{B}_i}(q_i, \dot{q}_i) + g_{\mathcal{B}_i}(q_i) \right) = 0, i = 0, \dots, n \quad (5.1)$$

Sendo que para $i = 0$ temos o modelo do efetuador/plataforma e para $i > 0$ temos os modelos dos mecanismos seriais obtidos anteriormente.

O trabalho virtual dos esforços não-reativos (ativos e iniciais) de cada subsistema é dado por:

$$\delta W_i = \delta q_i^T \cdot \bar{\mathbb{F}}_{\mathcal{B}_i}, i = 0, \dots, n \quad (5.2)$$

Para os subsistemas seriais, as matrizes $M_{\mathcal{B}_i}$, $v_{\mathcal{B}_i}$ e $g_{\mathcal{B}_i}$ são obtidas utilizando o algoritmo de modelagem de mecanismos seriais apresentado anteriormente. Para o efetuador, iremos utilizar o modelo de um corpo rígido livre no espaço, que realiza apenas translação. Sendo assim, aplicando Teorema do Movimento do Baricentro no efetuador, obtemos os esforços não-reativos nele aplicados:

$$\mathbf{f} = -m\mathbf{a}_g^{N_0} + m\mathbf{g} \quad (5.3)$$

Aplicando as equações vetoriais no sistema N , temos:

$$[\mathbf{f}]_{N_0} = -m [\mathbf{a}_g^{N_0}]_{N_0} + m [\mathbf{g}]_{N_0} \quad (5.4)$$

Definindo:

$$q^* = [g]_{N_0} \quad (5.5)$$

Temos:

$$\bar{\mathbb{F}}_{\mathcal{B}_0} = -m\ddot{q}^* + m\emptyset \quad (5.6)$$

Portanto:

$$M_{\mathcal{B}_0} = m\mathbf{1} \quad (5.7)$$

$$v_{\mathcal{B}_0} = \emptyset \quad (5.8)$$

$$g_{\mathcal{B}_0} = -m\emptyset \quad (5.9)$$

5.2 Vínculos cinemáticos entre subsistemas

5.2.1 Vínculos de posição

Seja p_i um ponto pertencente à plataforma/efetuador \mathcal{B}_0 e também ao efetuador do subsistema serial \mathcal{B}_i . Sendo assim, é possível relacionar as coordenadas do ponto p_i escritas no sistema N_0 partindo da plataforma/efetuador \mathcal{B}_0 e da cadeia serial \mathcal{B}_i :

$$[p_i]_{N_0} = [\mathbf{1}]_{N_0 \mid B} [p_i]_B + [g]_{N_0} = [\mathbf{1}]_{N_0 \mid N_i} [p_i]_{N_i} + [o_i]_{N_0} \quad (5.10)$$

Sabe-se que $[g]_{N_0} = q^*$ e $[p_i]_{N_i} = x_i(q_i)$. Tendo em vista que $[p_i]_B$, $[\mathbf{1}]_{N_0 \mid N_i}$, $[o_i]_{N_0}$ e $[\mathbf{1}]_{N_0 \mid B}$ são constantes, definindo:

$$d_i = [o_i]_{N_0} - [\mathbf{1}]_{N_0 \mid B} [p_i]_B \quad (5.11)$$

$$\mathbb{E}_i = [\mathbf{1}]_{N_0 \mid B} \quad (5.12)$$

Temos:

$$q^* = d_i + \mathbb{E}_i \cdot x_i(q_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.13)$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q^* = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{E}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(q_1) \\ \vdots \\ x_n(q_n) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Além disso, em alguns casos é necessário incluir vínculos afins entre as coordenadas generalizadas, ou seja:

$$\mathbb{D}_{\oplus} \cdot q^* = d_{\oplus} + \mathbb{F}_{\oplus} \cdot q^{\diamond} \quad (5.15)$$

Juntando a equação (5.15) à equação (5.14), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \mathbb{D}_{\oplus} \end{bmatrix} \cdot q^* = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \\ \mathbb{D}_{\oplus} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{E}_n \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(q_1) \\ \vdots \\ x_n(q_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbb{F}_{\oplus} \end{bmatrix} \cdot q^{\diamond} \quad (5.16)$$

Sendo assim, os vínculos de posição entre subsistemas podem ser descritos de maneira

genérica por:

$$\bar{q}(q) = \mathbb{D} \cdot q^* - d - \mathbb{E} \cdot \dot{x}(q) - \mathbb{F} \cdot \dot{q}^\diamond = 0 \quad (5.17)$$

Sendo:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \mathbb{D}_\oplus^T \end{bmatrix}^T \quad (5.18)$$

$$d = \begin{bmatrix} d_1^T & \dots & d_n^T & d_\oplus^T \end{bmatrix}^T \quad (5.19)$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{E}_n \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\dot{x}(q) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(q_1)^T & \dots & \dot{x}_n(q_n)^T \end{bmatrix}^T \quad (5.21)$$

5.2.2 Vínculos de velocidades lineares

Derivando no tempo a equação (5.17), temos:

$$\dot{\bar{q}}(q, \dot{q}) = \mathbb{D} \cdot \dot{q}^* - \mathbb{E} \cdot \dot{x}(q, \dot{q}) - \mathbb{F} \cdot \dot{q}^\diamond = 0 \quad (5.22)$$

A derivada \dot{x} pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\dot{x}(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(q_1) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(q_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v\mathcal{B}_1}(q_1) \cdot \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{J}_{v\mathcal{B}_n}(q_n) \cdot \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbb{J}_v(q^\diamond) \cdot \dot{q}^\diamond \quad (5.23)$$

Sendo:

$$\mathbb{J}_v(q^\diamond) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{v\mathcal{B}_1}(q_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{J}_{v\mathcal{B}_n}(q_n) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Assim, substituindo (5.23) em (5.22), obtemos:

$$\dot{\bar{q}}(q, \dot{q}) = \mathbb{D} \cdot \dot{q}^* - (\mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v(q^\diamond) + \mathbb{F}) \cdot \dot{q}^\diamond = 0 \quad (5.25)$$

5.2.3 Vínculos de velocidades angulares

Supondo que os efetuadores de cada cadeia serial \mathcal{B}_i estejam ligados rigidamente à plataforma/efetuador \mathcal{B}_0 , temos que todos apresentam velocidade angular em relação a N_0 , tendo em vista que \mathcal{B}_0 só translada. Sendo assim, obtem-se as seguintes relações:

$$[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_0}^{N_0}]_{N_0} = \emptyset = [\mathbf{1}]_{N_0 \mid N_i} [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_0}^{N_i}]_{N_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.26)$$

Sabe-se que $[\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_0}^{N_i}]_{N_i} = \mathbb{J}_{\omega \mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i$ e que $\mathbb{E}_i = [\mathbf{1}]_{N_0 \mid N_i}$. Sendo assim, temos:

$$\emptyset = \mathbb{E}_i \cdot \mathbb{J}_{\omega \mathcal{B}_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.27)$$

Assim:

$$\emptyset = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{E}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{\omega \mathcal{B}_1}(\mathbf{q}_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{J}_{\omega \mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}_n \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Sendo assim, os vínculos de posição entre subsistemas podem ser descritos de maneira genérica por:

$$\bar{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\diamond) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\diamond = \emptyset \quad (5.29)$$

Sendo:

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{E}_n \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\diamond) = \begin{bmatrix} \mathbb{J}_{\omega \mathcal{B}_1}(\mathbf{q}_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbb{J}_{\omega \mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

5.2.4 Vínculos de quasi-velocidades

Os vínculos de quasi-velocidades são dados pela união dos vínculos de velocidades lineares e dos vínculos de velocidades angulares, ou seja:

$$\bar{\mathbb{P}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \bar{\omega}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \cdot \dot{\mathbf{q}}^* - \mathbb{E} \cdot \mathbb{J}_v(\mathbf{q}^\diamond) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\diamond - \mathbb{F} \cdot \dot{\mathbf{q}}^\diamond \\ -\mathbb{Q} \cdot \mathbb{J}_w(\mathbf{q}^\diamond) \cdot \dot{\mathbf{q}}^\diamond \end{bmatrix} = \emptyset \quad (5.32)$$

Repare que (5.32) pode ser reescrita como:

$$\bar{p}(q, \dot{q}) = A(q)\dot{q} = 0 \quad (5.33)$$

Sendo A dado por:

$$A(q) = \begin{bmatrix} D & -(E \cdot J_v(q^\diamond) + F) \\ 0 & -Q \cdot J_w(q^\diamond) \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

5.2.5 Vínculos de quasi-acelerações

Derivando (5.32), temos:

$$\dot{\bar{p}}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} \ddot{q}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ \dot{\omega}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \cdot \ddot{q}^* - E \cdot (J_v(q^\diamond) \cdot \ddot{q}^\diamond + \underline{g}(q, \dot{q})) - F \cdot \ddot{q}^\diamond \\ -Q \cdot (J_w(q^\diamond) \cdot \ddot{q}^\diamond + \dot{\underline{g}}(q, \dot{q})) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.35)$$

Sendo:

$$\underline{g}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \underline{g}_{\mathcal{B}_1}(q_1, \dot{q}_1)^T & \dots & \underline{g}_{\mathcal{B}_n}(q_n, \dot{q}_n)^T \end{bmatrix}^T \quad (5.36)$$

$$\dot{\underline{g}}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \dot{\underline{g}}_{\mathcal{B}_1}(q_1, \dot{q}_1)^T & \dots & \dot{\underline{g}}_{\mathcal{B}_n}(q_n, \dot{q}_n)^T \end{bmatrix}^T \quad (5.37)$$

Repare que (5.35) pode ser reescrita como:

$$\dot{\bar{p}}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) = 0 \quad (5.38)$$

Sendo:

$$b(q, \dot{q}) = - \begin{bmatrix} E \cdot \underline{g}(q, \dot{q}) \\ Q \cdot \dot{\underline{g}}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

5.3 Acoplamento de subsistemas

Seja \mathbb{F} a matriz-coluna contendo todos os sistemas de forças não-reativas generalizadas:

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{F}}_{\mathcal{B}_0} \\ \vdots \\ \bar{\mathbb{F}}_{\mathcal{B}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{U}_{\mathcal{B}_0} \\ \vdots \\ \mathbb{U}_{\mathcal{B}_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{\mathcal{B}_0}(q_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M_{\mathcal{B}_n}(q_n) \end{bmatrix} \cdot \dot{p} - \begin{bmatrix} \nu_{\mathcal{B}_0}(q_0, \dot{q}_0) \\ \vdots \\ \nu_{\mathcal{B}_n}(q_n, \dot{q}_n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{\mathcal{B}_0}(q_0) \\ \vdots \\ g_{\mathcal{B}_n}(q_0) \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Definindo:

$$\mathbb{M}'(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0) & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & \mathbb{M}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\mathbb{v}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left[\mathbb{v}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)^T \quad \dots \quad \mathbb{v}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n)^T \right]^T \quad (5.42)$$

$$\mathbb{g}'(\mathbf{q}) = \left[\mathbb{g}_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{q}_0)^T \quad \dots \quad \mathbb{g}_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{q}_0)^T \right]^T \quad (5.43)$$

$$\mathbb{u}' = \left[\mathbb{u}_{\mathcal{B}_0}^T \quad \dots \quad \mathbb{u}_{\mathcal{B}_n}^T \right]^T \quad (5.44)$$

(5.40) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{f} = \mathbb{u}' - \mathbb{M}'(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbb{v}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbb{g}'(\mathbf{q}) \quad (5.45)$$

Pelo princípio de D'Alambert, temos que:

$$\sum_{i=0}^n \delta W_i = \sum_{i=0}^n \delta \mathbf{q}_i^T \cdot \bar{\mathbb{f}}_{\mathcal{B}_i} = 0 \quad (5.46)$$

Ou seja:

$$\delta \mathbf{q}^T \cdot \mathbb{f} = 0 \quad (5.47)$$

Além disso, a partir da equação (5.33), temos que:

$$\mathbb{A}(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q} = 0 \quad (5.48)$$

\mathbf{q} pode ser escrita em função de $\mathbf{q}^\#$ e \mathbf{q}° da seguinte maneira:

$$\mathbf{q} = \mathbb{Q}^\# \mathbf{q}^\# + \mathbb{Q}^\circ \mathbf{q}^\circ \quad (5.49)$$

Sendo $\mathbb{Q}^\#$ e \mathbb{Q}° matrizes constantes que contém apenas zeros e uns, contendo apenas um "1" por coluna. Aplicando o operador variação em (5.49), tem-se que:

$$\delta \mathbf{q} = \mathbb{Q}^\# \delta \mathbf{q}^\# + \mathbb{Q}^\circ \delta \mathbf{q}^\circ \quad (5.50)$$

Substituindo (5.50) em (5.48), podemos isolar $\delta \mathbf{q}^\circ$ em função de $\delta \mathbf{q}^\#$:

$$\delta \mathbf{q}^\circ = -(\mathbb{A} \mathbb{Q}^\circ)^{-1} \mathbb{A} \mathbb{Q}^\# \delta \mathbf{q}^\# \quad (5.51)$$

Substituindo (5.51) em (5.50), obtemos δq apenas em função de q e $\delta q^\#$:

$$\delta q = C(q) \cdot \delta q^\# \quad (5.52)$$

Sendo:

$$C(q) = Q^\# - (AQ^\circ)^{-1}AQ^\# \quad (5.53)$$

Além disso, repare que C respeita a seguinte relação:

$$\dot{q} = C(q) \cdot \dot{q}^\# \quad (5.54)$$

Substituindo (5.52) em (5.47), temos:

$$\delta q^{\#T} C^T f = 0 \quad (5.55)$$

Tendo em vista que $q^\#$ são coordenadas independentes, $\delta q^\#$ são variações arbitrárias.

Sendo assim, a equação dinâmica do mecanismo paralelo pode ser escrita como:

$$C^T f = 0 \quad (5.56)$$

Ou seja:

$$C(q)^T (M'(q)\ddot{q} + v'(q, \dot{q}) + g'(q)) = C(q)^T u' \quad (5.57)$$

5.4 Simulação dinâmica direta

É possível realizar a simulação dinâmica direta do sistema utilizando a equação dinâmica (5.57) e os vínculos de quasi-acelerações (5.35):

$$\begin{cases} C(q)^T (M'(q)\ddot{q} + v'(q, \dot{q}) + g'(q)) = C(q)^T u' \\ A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) = 0 \end{cases} \quad (5.58)$$

Reescrevendo em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} C(q)^T M'(q) \\ A(q) \end{bmatrix} \cdot \ddot{q} = \begin{bmatrix} C(q)^T (u' - v'(q, \dot{q}) - g'(q)) \\ -b(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

É necessário que as condições iniciais respeitem os vínculos de posição e velocidades. Com isso, teoricamente, os vínculos continuariam sendo respeitados na solução do sistema

de EDOs. Porém, devido a erros numéricos de truncamento e erros associados ao método de integração numérica utilizado, os vínculos de posição e velocidade podem deixar de ser respeitados. Esse problema pode ser resolvido utilizando a técnica das constantes de estabilização de Baumgarte [4]. A idéia é substituir a equação dos vínculos de aceleração pela seguinte equação:

$$\bar{P}'(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}} + 2\lambda\dot{\bar{q}} + \lambda^2\bar{q} \\ \dot{\bar{w}} + \lambda\bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{w}} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \bar{w} \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \bar{q} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.60)$$

Substituindo (5.32) e (5.35) em (5.60), temos:

$$\bar{P}'(q, \dot{q}, \ddot{q}) = A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A(q) \cdot \dot{q} + \lambda^2 \begin{bmatrix} \bar{q}(q) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.61)$$

Impondo que (5.61) seja respeitada, garantimos que $\bar{q}(q)$ e $\bar{w}(q, \dot{q})$ tenderão exponencialmente a zero independentemente das condições iniciais, para $\lambda > 0$, ou seja, irá fazer com que os vínculos de posição e velocidades sejam respeitados mesmo havendo erros de truncamento e erros associados ao método de integração numérica de EDOs. É importante ressaltar que λ é superiormente limitado pelo passo de integração h e pelo método de integração, porém, escolhendo $\lambda = 1/h$ já garante a estabilidade do método para praticamente qualquer método de integração numérica de EDOs.

Sendo assim, o sistema de EDOs que será utilizado para realizar a simulação dinâmica direta é dado por:

$$\begin{bmatrix} C(q)^T M'(q) \\ A(q) \end{bmatrix} \cdot \ddot{q} = \begin{bmatrix} C(q)^T (u' - v'(q, \dot{q}) - g'(q)) \\ -b(q, \dot{q}) - \lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A(q) \cdot \dot{q} - \lambda^2 \begin{bmatrix} \bar{q}(q) \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

5.5 Simulação dinâmica inversa

Na simulação dinâmica inversa, são dados os perfis de $q^\#$, $\dot{q}^\#$ e $\ddot{q}^\#$ em função do tempo e obtem-se os perfis dos esforços nos atuadores para a trajetória dada. Para isso, será utilizada a equação dinâmica (5.57):

$$C(q)^T (M'(q)\ddot{q} + v'(q, \dot{q}) + g'(q)) = C(q)^T u'$$

Repare que os termos desta equação dependem de q , \dot{q} e \ddot{q} . Sendo assim, primeiramente é preciso obter q , \dot{q} e \ddot{q} dados $q^\#$, $\dot{q}^\#$ e $\ddot{q}^\#$.

\bar{q} é obtido resolvendo numéricamente a equação dos vínculos de posição (5.16), a qual é um sistema de equações algébricas não lineares.

$$\bar{q}(q) = 0$$

Tendo obtido q , \dot{q} é obtido pela equação (5.54):

$$\dot{q} = C(q) \cdot \dot{q}^\#$$

Para obter \ddot{q} , substitui-se a segunda derivada temporal da equação (5.49) na equação dos vínculos de quasi-acelerações (5.38):

$$\begin{aligned} A\mathbb{Q}^\# \ddot{q}^\# + A\mathbb{Q}^\circ \ddot{q}^\circ + b &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{q}^\circ &= -(A\mathbb{Q}^\circ)^{-1}(b + A\mathbb{Q}^\# \ddot{q}^\#) \\ \therefore \ddot{q} &= (\mathbb{Q}^\# - (A\mathbb{Q}^\circ)^{-1}A\mathbb{Q}^\#) \cdot \ddot{q}^\# - (A\mathbb{Q}^\circ)^{-1}b \end{aligned} \quad (5.63)$$

Comparando (5.53) com (5.63), temos:

$$\therefore \ddot{q} = C(q) \cdot \ddot{q}^\# + c(q, \dot{q}) \quad (5.64)$$

Sendo:

$$c(q, \dot{q}) = -(A(q)\mathbb{Q}^\circ)^{-1} \cdot b(q, \dot{q}) \quad (5.65)$$

Além disso, normalmente não há atuadores em todas as juntas do mecanismo paralelo. Sendo assim, u' pode ser reescrito como:

$$u' = U \cdot u^* \quad (5.66)$$

Sendo U uma matriz constante composta por zeros e uns, e u^* os esforços aplicados pelos atuadores.

Substituindo (5.54), (5.64) e (5.66) em (5.57), temos:

$$C^T(M'(C \cdot \ddot{q}^\# + c) + v' + g') = C^T U \cdot u^* \quad (5.67)$$

Definindo:

$$Z(q)^T = C(q)^T U \quad (5.68)$$

Temos:

$$\mathbb{C}^T \mathbb{M}' \mathbb{C} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbb{C}^T (\mathbb{M}' \mathbf{c} + \mathbf{v}') + \mathbb{C}^T \mathbf{g}' = \mathbb{Z}^T \mathbf{u}^* \quad (5.69)$$

Sendo assim, (5.69) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbf{v}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) = \mathbb{Z}(\mathbf{q})^T \mathbf{u}^* \quad (5.70)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{M}} = \mathbb{C}^T \mathbb{M}' \mathbb{C} \quad (5.71)$$

$$\mathbf{v}_{\mathcal{M}} = \mathbb{C}^T (\mathbb{M}' \mathbf{c} + \mathbf{v}') \quad (5.72)$$

$$\mathbf{g}_{\mathcal{M}} = \mathbb{C}^T \mathbf{g}' \quad (5.73)$$

Sendo assim, para mecanismos sem atuação redundante, a simulação dinâmica inversa é feita utilizando a equação (5.70) para obter os esforços nos atuadores, dados $\mathbf{q}^\#$, $\dot{\mathbf{q}}^\#$ e $\ddot{\mathbf{q}}^\#$, obtendo \mathbf{q} através da solução numérica da equação (5.17) e $\dot{\mathbf{q}}$ através de (5.54).

Para o caso de mecanismos com atuação redundante, há infinitas para \mathbf{u}^* de modo que o mecanismo realize a trajetória desejada. Sendo assim, normalmente é escolhida uma solução que seja solução de um problema de otimização (como a minimização da energia consumida), tendo a equação (5.70) como restrição.

6 PROJETO DOS CONTROLADORES

Esta subseção é destinada ao projeto de controladores não lineares, destinados ao controle de posição de plataformas paralelas cujo modelo dinâmico para simulação dinâmica inversa é dado por (5.70), utilizando a técnica de Linearização por Realimentação aliada a outras leis de controle não linear, como as leis Controle por Modos Deslizantes em Tempo Contínuo [42, 49], e também aliada a técnicas de controle linear, como a alocação de pólos no espaço de estados (Controle por Torque Computado), alocação de pólos no domínio da frequência com observador de disturbios, e o Controle por Modos Deslizantes em Tempo Discreto.

Para facilitar a leitura das deduções e com o intuito de deixar um pouco menos carregada a notação, será adotada a seguinte notação:

$$\mathbb{H}(\mathbf{q}) = \mathbb{M}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) \quad (6.1)$$

$$\mathbb{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{v}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbb{g}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) \quad (6.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbb{Z}(\mathbf{q})^T \mathbf{u}^* \quad (6.3)$$

Sendo assim, equação (5.70) pode ser reescrita como:

$$\mathbb{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}^\# + \mathbb{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u} \quad (6.4)$$

Além disso, definimos o erro de controle como sendo:

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_d^\# - \mathbf{q}^\# \quad (6.5)$$

Sendo $\mathbf{q}_d^\#$ o sinal de referência

6.1 Linearização por Realimentação (LR)

A técnica de controle conhecida como Linearização por Realimentação consiste utilizar a entrada de controle para cancelar as não linearidades do sistema, de modo a obter um sistema linear equivalente, normalmente desacoplado, no qual é possível utilizar inúmeras técnicas de controle linear.

Tendo em vista a equação dinâmica (6.4), é proposta a seguinte lei de Linearização por Realimentação:

$$u = \hat{H}(q)(\ddot{q}_d^\# - u') + \hat{h}(q, \dot{q}) \quad (6.6)$$

Sendo \hat{H} e \hat{h} estimadores para H e h , respectivamente.

Substituindo a lei de controle (6.6) em (6.4), temos:

$$\ddot{e} = u' + \delta(t, q, \dot{q}, u') \quad (6.7)$$

Sendo:

$$\delta = H^{-1}(\tilde{H}(\ddot{q}_d^\# - u') + \tilde{h}) \quad (6.8)$$

$$\tilde{H} = H - \hat{H} \quad (6.9)$$

$$\tilde{h} = h - \hat{h} \quad (6.10)$$

Repare que, para o caso em que não há erros de modelagem ($\tilde{H} = 0$ e $\tilde{h} = 0 \Rightarrow \delta = 0$), a dinâmica de cada componente do erro se comporta como um sistema linear de segunda ordem forçado com inércia unitária e duplo integrador em $s = 0$.

6.2 Controle por Torque Computado (CTC)

A lei de Controle por Torque Computado tem o intuito de fazer com que a dinâmica de cada componente do erro de controle se comporte como um movimento harmônico amortecido, fazendo com que o erro tenda assintóticamente a zero independentemente da condição inicial, na ausência de erros de modelagem. Para atingir este objetivo, basta utilizar a seguinte lei de realimentação de estados para u' :

$$u' = -k_v \dot{e} - k_p e \quad (6.11)$$

Sendo k_v e k_p matrizes diagonais positiva-definidas.

Substituindo a lei de controle (6.11) em (6.7), temos:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \underline{k}_v \dot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p \mathbf{e} = \tilde{\mathbf{s}}'(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (6.12)$$

Sendo:

$$\tilde{\mathbf{s}}' = \mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{k}_v \dot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p \mathbf{e}) + \tilde{\mathbf{h}}) \quad (6.13)$$

Repare que o desempenho desta técnica de controle depende diretamente da representatividade do modelo obtido dentro das condições de operação do sistema.

6.3 Controle por Modos Deslizantes em Tempo Contínuo

O Controle por Modos Deslizantes é uma técnica de controle não-linear robusto, a qual tem como principal vantagem uma menor sensibilidade aos erros de modelagem, sendo robusto tanto a incertezas estruturadas quanto a incertezas não estruturadas. Nesta subseção serão deduzidas 4 leis de controle baseadas nesta técnica.

6.3.1 Dedução das leis de controle

Sejam $\underline{\lambda}$, \underline{k}_v e \underline{k}_p matrizes diagonais positiva-definidas. Assim, pode-se definir uma matriz-coluna \mathbf{s} de duas maneiras diferentes:

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \underline{\lambda} \mathbf{e} \quad (6.14)$$

e

$$\mathbf{s} = \ddot{\mathbf{e}} + \underline{k}_v \dot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p \mathbf{e} \quad (6.15)$$

Tendo definido \mathbf{s} , define-se a chamada superfície de escorregamento:

$$\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (6.16)$$

Repare que fazendo com o sistema atinja a superfície de escorregamento, o erro de controle tenderá assintóticamente a zero, independente de qual das definições de \mathbf{s} for escolhida.

Seja $V(\mathbf{s})$ uma função de Lyapunov dada por:

$$V(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbb{W} \mathbf{s} \quad (6.17)$$

Sendo \mathbb{W} uma matriz simétrica positiva-definida. Pela teoria de estabilidade de Lyapunov, se $\dot{V} < 0 \forall s \neq 0$, s converge para 0 independentemente das condições iniciais do sistema. Para que isso seja possível, é imposta a seguinte condição:

$$\frac{d}{dt} V(s) = s^T \left(\mathbb{W} \dot{s} + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} s \right) \leq -s^T \underline{\eta} \text{sinal}(s) \quad (6.18)$$

$$\Rightarrow s^T \left(\mathbb{W} \dot{s} + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} s + \underline{\eta} \text{sinal}(s) \right) \leq 0 \quad (6.19)$$

Sendo $\underline{\eta}$ uma matriz diagonal positiva-definida. Repare que $s^T \underline{\eta} \text{sinal}(s)$ é a soma ponderada dos módulos das componentes de s , o que implica que $-s^T \underline{\eta} \text{sinal}(s) < 0 \forall s \neq 0$. Repare também que $V(s)$ pode ser interpretada como uma distância quadrática do sistema até a superfície de escorregamento. A imposição da condição (6.18) implica que a distância do sistema à superfície de escorregamento é sempre decrescente enquanto o sistema não atingir a superfície de escorregamento, e garante a convergência s para zero em tempo finito e, a partir deste momento, a convergência assintótica do erro de controle e para zero.

Para ilustrar, considere $\mathbb{W} = \mathbb{1}$; se $\dot{s} = -\underline{\eta} \text{sinal}(s)$, (6.18) é satisfeita e cada componente de s respeita a EDO $\dot{s}_i = -\eta_i \text{sinal}(s_i)$, a qual converge para zero em um tempo finito de $t_i = \frac{|s_i(0)|}{\eta_i}$.

O projeto do controlador é feito utilizando a condição (6.18), a qual é conhecida como condição de escorregamento, e será subdividido pelas diferentes definições apresentadas para a variável s ((6.14) e (6.15)).

a) Para $s = \dot{e} + \lambda e$:

Derivando (6.14) e substituindo em (6.18), temos:

$$s^T \left(\mathbb{W}(\ddot{e} + \underline{\lambda} \dot{e}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} s + \underline{\eta} \text{sinal}(s) \right) \leq 0 \quad (6.20)$$

Substituindo (6.7) em (6.20), temos:

$$s^T \left(\mathbb{W}(\psi' + \underline{\lambda} \dot{e} + \mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{e}_d^\# - \psi') + \tilde{\mathbb{h}})) + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} s + \underline{\eta} \text{sinal}(s) \right) \leq 0 \quad (6.21)$$

Definindo:

$$\psi' = -\underline{\lambda} \dot{e} + \psi'' \quad (6.22)$$

Temos:

$$\mathbb{S}^T \left(\mathbb{W} ((\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}) \mathbb{U}'' + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}})) + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}} \mathbb{S} + \underline{\eta} \sin(\mathbb{S}) \right) \leq 0 \quad (6.23)$$

Note que:

$$\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1} (\mathbb{H} - \hat{\mathbb{H}}) = \mathbb{H}^{-1} \hat{\mathbb{H}} \quad (6.24)$$

Sendo assim, são notáveis duas possíveis escolhas para \mathbb{W} que facilitam o projeto do controlador:

$$\mathbb{W} = \mathbb{1} \quad (6.25)$$

e

$$\mathbb{W} = \mathbb{H} \quad (6.26)$$

Mais uma vez, o projeto do controlador será subdividido em 2 casos:

a.1) Para $\mathbb{W} = \mathbb{1}$:

Substituindo (6.25) em (6.23), obtem-se:

$$\mathbb{S}^T \left((\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}) \mathbb{U}'' + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}}) + \underline{\eta} \sin(\mathbb{S}) \right) \leq 0 \quad (6.27)$$

Para satisfazer (6.27), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\mathbb{U}'' = -\underline{k} \sin(\mathbb{S}) \quad (6.28)$$

Sendo \underline{k} uma matriz diagonal positiva-definida, com $\underline{k} \geq \underline{\eta}$. Substituindo (6.28) em (6.27), temos:

$$\mathbb{S}^T \left(-(\underline{k} - \underline{\eta}) \sin(\mathbb{S}) + \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sin(\mathbb{S}) + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}}) \right) \leq 0 \quad (6.29)$$

Pode-se dizer que, (6.29) é sempre satisfeita se:

$$\text{diag}(\underline{k}) - \text{diag}(\underline{\eta}) \geq |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sin(\mathbb{S}) + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}})| \quad (6.30)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.30), temos:

$$|\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sin(\mathbb{S}) + \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}})| \leq |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} \text{diag}(\underline{k}) + |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} |\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}}| + |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbf{h}}|_{max} \quad (6.31)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$(\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq \text{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} |\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{\mathbf{e}}| + |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbf{h}}|_{max} \quad (6.32)$$

(6.30) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Existe solução para (6.32) apenas se a matriz $\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}$ for uma *M-matrix*, ou seja, se módulo do maior autovalor de $|\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}$ for menor que 1. Se este for o caso, a solução que minimiza a norma de $\text{diag}(\underline{k})$ é dada por:

$$\text{diag}(\underline{k}) = (\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max})^{-1}(\text{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}| + |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbf{h}}|_{max}) \quad (6.33)$$

a.2) Para $\mathbb{W} = \mathbb{H}$:

Substituindo (6.26) em (6.23), obtem-se:

$$\mathbf{s}^T \left(\hat{\mathbb{H}}\mathbf{v}'' + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbf{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{h}}) + \underline{\eta} \sinh(\mathbf{s}) \right) \leq 0 \quad (6.34)$$

Para satisfazer (6.34), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{v}'' = -\hat{\mathbb{H}}^{-1} \left(\underline{k} \sinh(\mathbf{s}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbf{s} \right) \quad (6.35)$$

Sendo \underline{k} uma matriz diagonal positiva-definida, com $\underline{k} \geq \underline{\eta}$. Substituindo (6.28) em (6.34), temos:

$$\mathbf{s}^T \left(-(\underline{k} - \underline{\eta}) \sinh(\mathbf{s}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbf{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}} \right) \leq 0 \quad (6.36)$$

Pode-se dizer que, (6.36) é sempre satisfeita se:

$$\text{diag}(\underline{k}) - \text{diag}(\underline{\eta}) \geq \left| \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbf{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}} \right| \quad (6.37)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.37), temos:

$$\left| \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbf{s} + \tilde{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}) + \tilde{\mathbf{h}} \right| \leq \frac{1}{2}|\dot{\mathbb{H}}|_{max}|\mathbf{s}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}| + |\tilde{\mathbf{h}}|_{max} \quad (6.38)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$\text{diag}(\underline{k}) \geq \text{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2}|\dot{\mathbb{H}}|_{max}|\mathbf{s}| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\ddot{\mathbf{q}}_d^\# + \underline{\lambda}\dot{\mathbf{e}}| + |\tilde{\mathbf{h}}|_{max} \quad (6.39)$$

(6.37) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Sempre existe solução para (6.39), e a solução que minimiza a norma de $\text{diag}(\underline{k})$

é dada por:

$$\text{diag}(\underline{k}) = \text{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2} |\dot{\tilde{H}}|_{max} |\underline{s}| + |\tilde{H}|_{max} |\ddot{q}_d^\# + \underline{\lambda} \dot{e}| + |\tilde{h}|_{max} \quad (6.40)$$

Repare que as duas leis de controle previamente deduzidas possuem termos discontinuos, os quais podem gerar o efeito conhecido como *chattering*, o qual pode gerar sérios desgastes nos atuadores do sistema e causar vibrações indesejadas no mecanismo. A utilização da definição (6.15) para \underline{s} na dedução da lei de controle diminui bastante o efeito do *chattering*, pois utiliza termos que são integrais de funções discontinuas, o que consequentemente gera um perfil muito mais suave para o esforço de controle. Sendo assim, agora serão deduzidas as leis de controle baseadas na definição (6.15) para \underline{s} .

b) Para $\underline{s} = \ddot{e} + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e$

Substituindo (6.7) em (6.15), temos:

$$\underline{s} = \underline{u}' + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e + \ddot{\epsilon} \quad (6.41)$$

Sendo assim, definimos:

$$\underline{u}' = -\underline{k}_v \dot{e} - \underline{k}_p e + \underline{u}'' \quad (6.42)$$

Portanto:

$$\underline{s} = \underline{u}'' + H^{-1}(\tilde{H}(\ddot{q}_d^\# + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e - \underline{u}'') + \tilde{h}) \quad (6.43)$$

Definindo:

$$\sigma = \ddot{q}_d^\# + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e \quad (6.44)$$

Temos:

$$\underline{s} = (\mathbb{1} - H^{-1}\tilde{H})\underline{u}'' + H^{-1}(\tilde{H}\sigma + \tilde{h}) \quad (6.45)$$

Derivando (6.45), temos:

$$\dot{\underline{s}} = (\mathbb{1} - H^{-1}\tilde{H})\dot{\underline{u}''} + H^{-1}\dot{\epsilon} \quad (6.46)$$

Sendo:

$$\dot{\epsilon} = (\dot{H}H^{-1}\tilde{H} - \dot{\tilde{H}})\underline{u}'' - \dot{H}H^{-1}(\tilde{H}\sigma + \tilde{h}) + \dot{\tilde{H}}\sigma + \dot{\tilde{H}}\dot{\sigma} + \dot{\tilde{h}} \quad (6.47)$$

Substituindo (6.46) em (6.18), temos:

$$\underline{s}^T \left(\mathbb{W}((\mathbb{1} - H^{-1}\tilde{H})\dot{\underline{u}''} + H^{-1}\dot{\epsilon}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbb{W}}\underline{s} + \underline{\eta} \sinh(\underline{s}) \right) \leq 0 \quad (6.48)$$

Mais uma vez, são notáveis duas possíveis escolhas para \mathbb{W} que facilitam o projeto do controlador:

$$\mathbb{W} = \mathbb{1} \quad (6.49)$$

e

$$\mathbb{W} = \mathbb{H} \quad (6.50)$$

Subdividido mais uma vez o projeto do controlador será em 2 casos:

b.1) Para $\mathbb{W} = \mathbb{1}$:

Substituindo (6.49) em (6.48), obtem-se:

$$\mathbb{s}^T \left((\mathbb{1} - \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}) \dot{u}'' + \mathbb{H}^{-1} \mathbb{e} + \underline{\eta} \sin(\mathbb{s}) \right) \leq 0 \quad (6.51)$$

Para satisfazer (6.51), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\dot{u}'' = -\underline{k} \sin(\mathbb{s}) \quad (6.52)$$

Sendo \underline{k} uma matriz diagonal positiva-definida, com $\underline{k} \geq \underline{\eta}$. Substituindo (6.52) em (6.51), temos:

$$\mathbb{s}^T \left(-(\underline{k} - \underline{\eta}) \sin(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sin(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} \mathbb{e} \right) \leq 0 \quad (6.53)$$

Pode-se dizer que, (6.53) é sempre satisfeita se:

$$\text{diag}(\underline{k}) - \text{diag}(\underline{\eta}) \geq |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sin(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} \mathbb{e}| \quad (6.54)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.54), temos:

$$\begin{aligned} |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} \underline{k} \sin(\mathbb{s}) + \mathbb{H}^{-1} \left((\dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}}) u'' - \dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} (\tilde{\mathbb{H}} \sigma + \tilde{h}) + \dot{\tilde{\mathbb{H}}} \sigma + \tilde{\mathbb{H}} \dot{\sigma} + \dot{\tilde{h}} \right)| \leq \\ |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} \text{diag}(\underline{k}) + |\mathbb{H}^{-1} (\dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max} |u'' - \sigma| + |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} |\dot{\sigma}| \\ + |\mathbb{H}^{-1} \dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} \tilde{h}|_{max} + |\mathbb{H}^{-1} \dot{\tilde{h}}|_{max} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq \text{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1} (\dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max} |u'' - \sigma| + \\ |\mathbb{H}^{-1} \tilde{\mathbb{H}}|_{max} |\dot{\sigma}| + |\mathbb{H}^{-1} \dot{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{-1} \tilde{h}|_{max} + |\mathbb{H}^{-1} \dot{\tilde{h}}|_{max} \end{aligned} \quad (6.56)$$

(6.54) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Existe solução para (6.56) apenas se a matriz $\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}$ for uma *M-matrix*, ou seja, se módulo do maior autovalor de $|\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}$ for menor que 1. Se este for o caso, a solução que minimiza a norma de $\text{diag}(\underline{k})$ é dada por:

$$\begin{aligned} \text{diag}(\underline{k}) = & (\mathbb{1} - |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max})^{-1}(\text{diag}(\underline{\eta}) + |\mathbb{H}^{-1}(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max}|\psi'' - \sigma| + \\ & |\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\dot{\sigma}| + |\mathbb{H}^{-1}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max} + |\mathbb{H}^{-1}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}|_{max} \end{aligned} \quad (6.57)$$

b.2) Para $\mathbb{W} = \mathbb{H}$:

Substituindo (6.50) em (6.48), obtem-se:

$$\mathbb{s}^T \left(\hat{\mathbb{H}}\dot{\psi}'' + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{s} + \epsilon + \underline{\eta} \sin(\mathbb{s}) \right) \leq 0 \quad (6.58)$$

Para satisfazer (6.58), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\dot{\psi}'' = -\hat{\mathbb{H}}^{-1} \left(\underline{k} \sin(\mathbb{s}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbb{H}}\mathbb{s} \right) \quad (6.59)$$

Sendo \underline{k} uma matriz diagonal positiva-definida, com $\underline{k} \geq \underline{\eta}$. Substituindo (6.59) em (6.58), temos:

$$\mathbb{s}^T \left(-(\underline{k} - \underline{\eta}) \sin(\mathbb{s}) + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}\mathbb{s} + \epsilon \right) \leq 0 \quad (6.60)$$

Pode-se dizer que, (6.60) é sempre satisfeita se:

$$\text{diag}(\underline{k}) - \text{diag}(\underline{\eta}) \geq \left| \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}\mathbb{s} + \epsilon \right| \quad (6.61)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado direito de (6.61), temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbb{H}}}\mathbb{s} + (\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})\psi'' - \dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}(\tilde{\mathbb{H}}\sigma + \tilde{\mathbb{h}}) + \dot{\tilde{\mathbb{H}}}\sigma + \tilde{\mathbb{H}}\sigma + \dot{\tilde{\mathbb{h}}} \right| \leq & \frac{1}{2}|\dot{\tilde{\mathbb{H}}}|_{max}|\mathbb{s}| + \\ & |(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max}|\psi'' - \sigma| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\dot{\sigma}| + |\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max} + |\dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{max} \end{aligned} \quad (6.62)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$\text{diag}(\underline{k}) \geq \text{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2}|\dot{\tilde{\mathbb{H}}}|_{max}|\mathbb{s}| + |(\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}} - \dot{\tilde{\mathbb{H}}})|_{max}|\psi'' - \sigma| + |\tilde{\mathbb{H}}|_{max}|\dot{\sigma}| + |\dot{\mathbb{H}}\mathbb{H}^{-1}\tilde{\mathbb{H}}|_{max} + |\dot{\tilde{\mathbb{h}}}|_{max} \quad (6.63)$$

(6.61) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (6.18) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Sempre existe solução para (6.63), e a solução que minimiza a norma de $\text{diag}(\underline{k})$ é dada por:

$$\text{diag}(\underline{k}) = \text{diag}(\underline{\eta}) + \frac{1}{2} |\dot{\tilde{H}}|_{\max} |\$| + |(\dot{H}H^{-1}\tilde{H} - \dot{\tilde{H}})|_{\max} |\psi'' - \sigma| + |\tilde{H}|_{\max} |\dot{\sigma}| + |\dot{H}H^{-1}\tilde{H}|_{\max} + |\dot{\tilde{H}}|_{\max} \quad (6.64)$$

6.3.2 Camada Limite

Uma técnica muito utilizada para diminuir os efeitos do *chattering* no CMD é substituição da função sinal por uma função de saturação nas leis de controle. Definindo:

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } |x| \leq 1 \\ \text{sinal}(x), & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \quad (6.65)$$

Sendo assim, no lugar de $\text{sinal}(\$)$, será utilizado $\text{sat}(\$/\phi)$ nas leis de controle, sendo ϕ um número positivo conhecido como comprimento da camada limite.

Ao mesmo tempo que a utilização da camada limite diminui os efeitos do *chattering* no sistema, sua utilização não mais garante que o sistema atinja em tempo finito e se mantenha na superfície de escorregamento, apenas garante que o sistema atinja a camada limite ($-\phi < s_i < \phi$, $i = 1, \dots, \nu^*$) em tempo finito, e lá se mantenha.

6.3.3 Ganho adaptativo

O cálculo de \underline{k} pode ser um tanto complexo utilizando as equações (6.33), (6.40), (6.57) ou (6.64), pois depende do módulo máximo de matrizes que não possuem expressões explícitas. Tal cálculo pode ser feito numéricamente discretizando a área de trabalho do mecanismo e atribuindo valores máximos e mínimos para cada parâmetro incerto do sistema, obtendo uma matriz \underline{k} que varia conforme a posição do mecanismo. O uso desta estratégia, porém, poderá resultar na obtenção de valores de \underline{k} muito maiores do que o necessário, o que pode amplificar o fenômeno do *chattering*. Sendo assim, é proposta a obtenção da matriz \underline{k} de forma adaptativa, utilizando a seguinte lei de adaptação:

$$\underline{k}_i[k] = \begin{cases} |\underline{k}_i[k-1] + \gamma_i \operatorname{sinal}(s_i[k]) \operatorname{sinal}(s_i[k-1])|, & \text{se } |s_i[k]| \geq \phi \text{ ou } \operatorname{sinal}(s_i[k]) = -\operatorname{sinal}(s_i[k-1]) \\ \underline{k}_i[k-1], & \text{se } |s_i[k]| < \phi \text{ e } \operatorname{sinal}(s_i[k]) = \operatorname{sinal}(s_i[k-1]) \end{cases} \quad (6.66)$$

Sendo γ_i uma constante positiva, a qual determina a velocidade da adaptação.

Esta lei de adaptação pode ser explicada da seguinte maneira: \underline{k}_i aumenta enquanto o sistema não atingir a região da camada limite. Enquanto o sistema estiver nesta região, \underline{k}_i se mantém constante ou diminui a cada cruzamento com a superfície de escorregamento. Se o sistema estiver região da camada limite e \underline{k}_i respeitar a inequação (6.32), (6.39), (6.56) ou (6.63) (dependendo da lei de controle utilizada), \underline{k}_i irá diminuir a cada cruzamento com a superfície de escorregamento, até que o sistema saia ligeiramente da região. Assim que o sistema sair da região, \underline{k}_i irá aumentar até o sistema atingi-la novamente, repetindo este ciclo infinitamente, com \underline{k}_i variando em uma faixa de valores muito próxima do menor valor possível para que o sistema se mantenha na região da camada limite.

PARTE III

RESULTADOS

7 RESULTADOS E DISCUSSÃO

“Frase espirituosa de um autor famoso”

-- Autor famoso

7.1 Algoritmos e suas implementações

7.2 Simulações

Nesta seção, será realizada a simulação dinâmica direta do mecanismo 5R utilizando o algoritmo de modelagem e simulação de mecanismos paralelos apresentado, e a lei de controle apresentada na subseção anterior. Serão consideradas incertezas paramétricas, tanto no projeto do controlador, quanto na simulação.

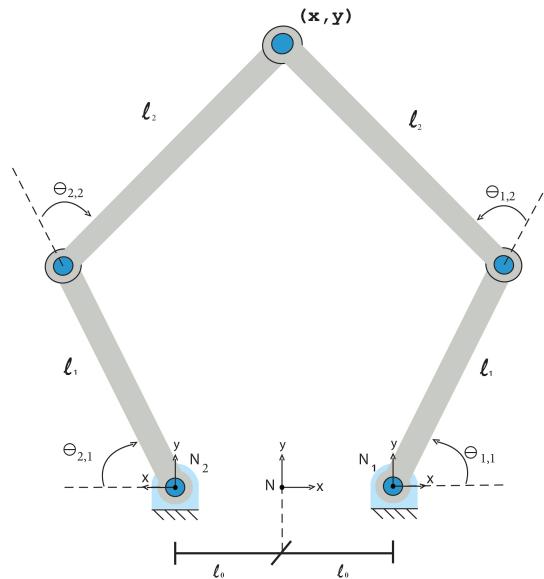
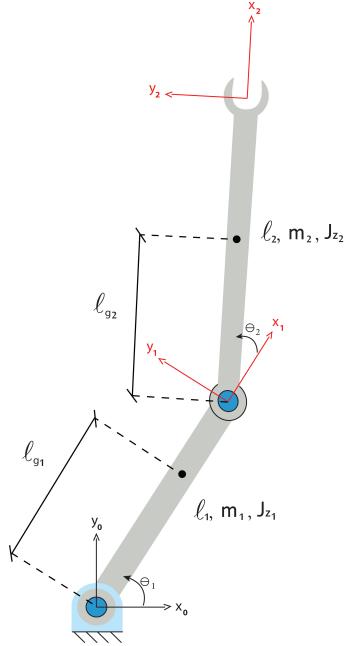


Figura 6: Pentágono articulado (5R)

O mecanismo 5R será modelado através do acoplamento de 2 subsistemas seriais \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 do tipo RR, e um efetuador pontual \mathcal{B}_0 de massa m_0 .

- i) Modelo do efetuador

Figura 7: Mecanismo RR

O modelo do efetuador pontual \mathcal{B}_0 segue o formato dado pela equação (5.1), ou seja:

$$\bar{\mathbb{F}}_{\mathcal{B}_0}(u_0, q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0) = u_0 - (\mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(q_0)\ddot{q}_0 + \mathbb{v}_{\mathcal{B}_0}(q_0, \dot{q}_0) + g_{\mathcal{B}_0}(q_0)) = 0 \quad (7.1)$$

Para o subsistema em questão, temos:

$$\mathbb{M}_{\mathcal{B}_0}(q_0) = \begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\mathbb{v}_{\mathcal{B}_0}(q_0, \dot{q}_0) = 0 \quad (7.3)$$

$$g_{\mathcal{B}_0}(q_0) = \begin{bmatrix} 0 & m_0 g \end{bmatrix}^T \quad (7.4)$$

$$q_0 = q^\# = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \quad (7.5)$$

$$u_0 = 0 \quad (7.6)$$

ii) Parâmetros de Denavit-Hartemberg das cadeias seriais

Tabela 1: Parâmetros de Denavit-Hartemberg do mecanismo RR

Ligamento	a_i	α_i	d_i	θ_i
(1)	l_1	0	0	$q_1(t)$
(2)	l_2	0	0	$q_2(t)$

iii) Arquitetura do mecanismo paralelo

É possível relacionar as coordenadas um ponto no espaço descrito no sistema N com as coordenadas do mesmo ponto escritas nos sistemas N_1 e N_2 da seguinte maneira:

$$[p]_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [p]_{N_1} + \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

$$[p]_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot [p]_{N_2} + \begin{bmatrix} -l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Escolhendo o ponto p como sendo o efetuador do mecanismo paralelo, o qual tem a mesma localização dos efetuadores das cadeias serias neste caso, temos:

$$q^\# = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x_1(q_1) + \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

$$q^\# = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x_2(q_2) + \begin{bmatrix} -l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Sendo assim, temos que os vínculos de posição são dados por:

$$\bar{q}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot q^\# - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(q^\circ) - \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \\ -l_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \emptyset \quad (7.11)$$

Como não temos vínculos de velocidades angulares para esse mecanismo, as matrizes que descrevem a arquitetura do mecanismo são dadas por:

$$d = \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \\ -l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.12) \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.13) \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

$$F = \emptyset \quad (7.15)$$

$$P = Q = R = [\emptyset] \quad (7.16)$$

iv) Parâmetros e incertezas do modelo

Definimos os seguinte parâmetros e incertezas para o mecanismo em questão:

- | | |
|---------------------------------|--|
| - $l_1 = 0.12m$ | - $m_1 = (0.143 \pm 0.0215)kg$ |
| - $l_2 = 0.15m$ | - $m_2 = (0.171 \pm 0.0257)kg$ |
| - $l_{g1} = (0.06 \pm 0.009)m$ | - $Jz_1 = (171.6 \pm 25.7)10^{-6}kg \cdot m^2$ |
| - $l_{g2} = (0.075 \pm 0.011)m$ | - $Jz_2 = (320.6 \pm 48.1)10^{-6}kg \cdot m^2$ |
| - $m_0 = 0 kg$ | - $g = 9.8m/s^2$ |

v) Espaço de trabalho

Dados os parâmetros geométricos defidos acima, obtemos o seguinte espaço de trabalho para o mecanismo:

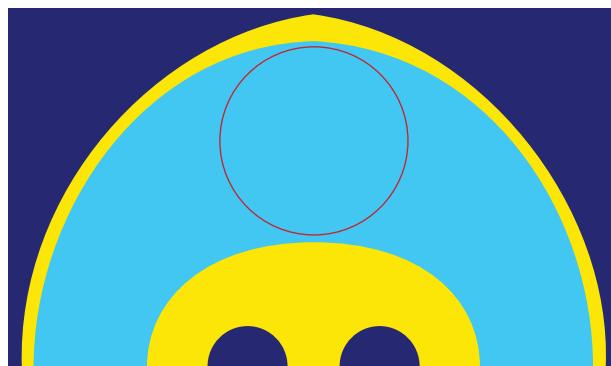


Figura 8: Espaço de trabalho do mecanismo RR

A região em azul escuro é a região não pertencente ao espaço de trabalho do mecanismo. As regiões em azul claro, em amarelo, e em vermelho são regiões pertencentes ao espaço do mecanismo. A região a amarela é considerada singular (próxima a singularidades) e a vermelha é a trajetória a ser seguida pelo mecanismo.

vi) Controlador

A lei de controle por modos deslizantes que será utilizada na simulação dinâmica direta é dada pelas equações (6.28) e (??). Γ , η e $\eta_{i,j}$ são obtidas da seguinte maneira:

- Discretiza-se o espaço de trabalho em um número finito de pontos considerados não-singulares. Foi adotada um discretização de 1cm na horizontal e na vertical.

- Para cada ponto calcula-se $|\Delta|$, $|\delta_0|$ e $|\delta_{i,j}|$ para todas as combinações possíveis de parâmetros, com os parâmetros podendo assumir seu valor mínimo e seu valor máximo. Como temos 6 parâmetros incertos, temos 64 possibilidades.
- Obtem-se o valor máximo de $|\Delta|$, $|\delta_0|$ e $|\delta_{i,j}|$ para cada ponto.
- Obtem-se o valor máximo de $|\Delta|$, $|\delta_0|$ e $|\delta_{i,j}|$ para o espaço de trabalho, a partir do valor máximo em cada ponto.

Realizando-se esse procedimento e adotando $\eta = 20.0$, obtemos:

$$\text{diag}(\underline{k}) = \begin{bmatrix} 75.3 \\ 108 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 37.0 \\ 54.1 \end{bmatrix} \dot{x}^2 + \begin{bmatrix} 22.7 \\ 35.5 \end{bmatrix} |\dot{x}\dot{y}| + \begin{bmatrix} 17.5 \\ 28.5 \end{bmatrix} \dot{y}^2 + \begin{bmatrix} 1.25 & 0.92 \\ 1.68 & 1.65 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} |\ddot{x}_d + \lambda\dot{e}_x| \\ |\ddot{y}_d + \lambda\dot{e}_y| \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

vi) Simulação dinâmica direta

Para realizar a simulação dinâmica direta, definimos:

- Parâmetros do mecanismo:

- $l_1 = 0.12m$	- $m_1 = 0.1645kg$
- $l_2 = 0.15m$	- $m_2 = 0.1967kg$
- $l_{g1} = 0.051m$	- $Jz_1 = 197.3 \cdot 10^{-6}kg \cdot m^2$
- $l_{g2} = 0.086m$	- $Jz_2 = 368.7 \cdot 10^{-6}kg \cdot m^2$
- $m_0 = 0 kg$	- $g = 9.8m/s^2$

- Parâmetros estimados

- $\hat{l}_1 = 0.12m$	- $\hat{m}_1 = 0.143kg$
- $\hat{l}_2 = 0.15m$	- $\hat{m}_2 = 0.171kg$
- $\hat{l}_{g1} = 0.06m$	- $\hat{J}_{z1} = 171.6 \cdot 10^{-6}kg \cdot m^2$
- $\hat{l}_{g2} = 0.075m$	- $\hat{J}_{z2} = 320.6 \cdot 10^{-6}kg \cdot m^2$
- $\hat{m}_0 = 0 kg$	- $\hat{g} = 9.8m/s^2$

- Condições iniciais:

$$\begin{cases} q_1^\#(0) = 0.07m \\ q_2^\#(0) = 0.17m \\ \dot{q}_1^\#(0) = 0 \\ \dot{q}_2^\#(0) = 0 \end{cases} \quad (7.18)$$

- Trajetória de referência:

$$\begin{cases} q_{1d}^{\#}(t) = 0.07 \cos(28.57t) \\ q_{2d}^{\#}(t) = 0.17 + 0.07 \sin(28.57t) \end{cases} \quad (7.19)$$

- Parâmetros do controlador:

$$\lambda = 40.0$$

$$\eta = 20.0$$

Os parâmetros do mecanismo foram escolhidos de modo que haja um erro de 15% em cada parâmetro incerto. Os parâmetros do controlador foram escolhidos de modo que o sistema tenha um tempo de alcance às superfícies de escorregamento $t_r \leq 0.1s$ (pois $s(0) = [0 \ -2]^T$) e um tempo de assentamento de $t_a = 0.1s$, quando o sistema chega nas superfícies de escorregamento.

A função $f(x) = \text{sinal}(x)$ foi substituída pela função de saturação $f_{sat}(x) = \tanh(100x)$, a qual tem as seguintes propriedades:

- $f_{sat}(0.023) = -f_{sat}(-0.023) = 0.98$
- $f_{sat}(\infty) = -f_{sat}(-\infty) = 1$
- $\frac{df_{sat}}{dx}(0) = 100$

Sua utilização garante a estabilidade nas simulações numéricas, evita o chattering nos atuadores, e ainda garante um erro em regime permanente desprezível para esta aplicação.

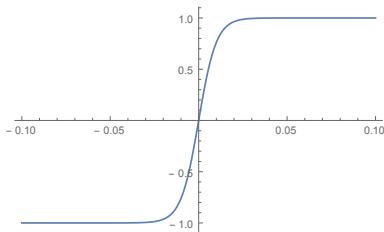


Figura 9: Função de saturação $f_{sat}(x) = \tanh(100x)$

Aqui seguem os resultados das simulações numéricas:

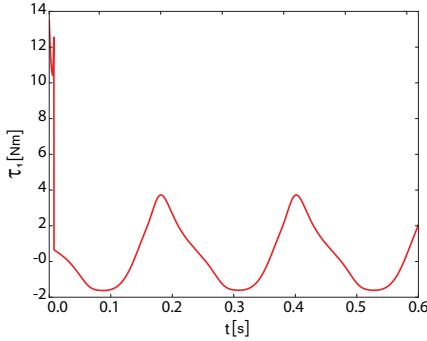


Figura 10: Torque aplicado pelo atuador 1

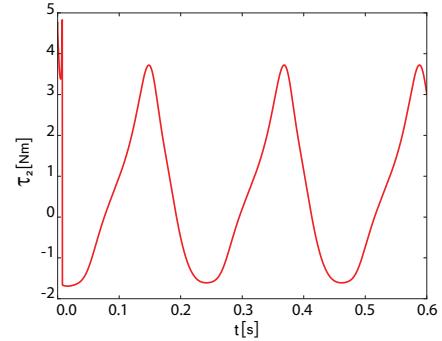
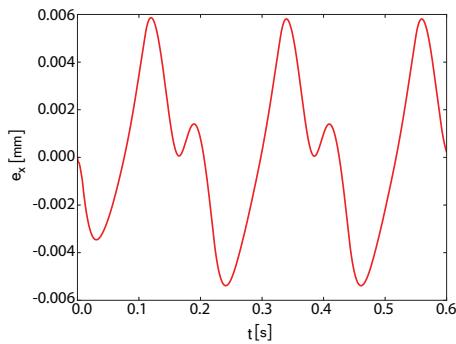
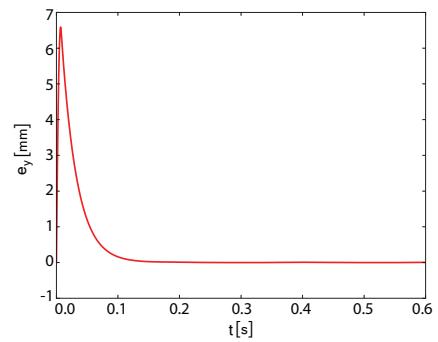
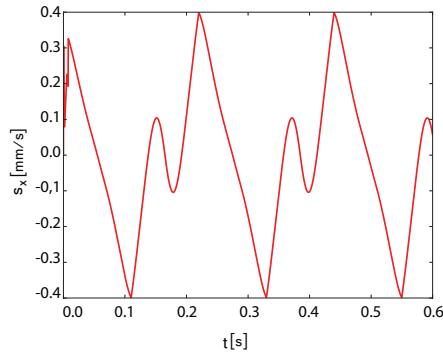
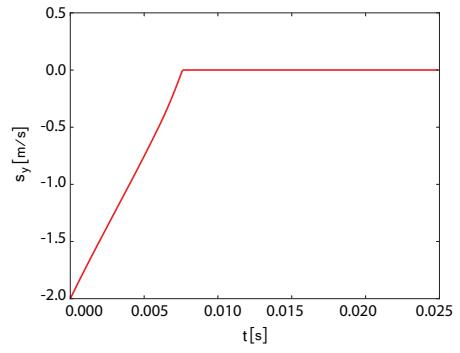


Figura 11: Torque aplicado pelo atuador 2

Figura 12: Erro de na coordenada x Figura 13: Erro de na coordenada y Figura 14: Variável s_x Figura 15: Variável s_y

Repare que o tempo de alcance de s_y é aproximadamente $t_r = 0.008s < 0.1s$. Além disso, 0.1s depois de alcançar a superfície de escorregamento, o erro e_y já é praticamente nulo, como pode-se observar no gráfico da figura 13. Sendo assim, temos os resultados coerentes com os parâmetros do controlador adotados.

O projeto do controlador foi feito supondo incertezas de 15% nos parâmetros incertos. Porém, realizando a simulação com o mesmo controlador, aumentando para 50% os erros

paramétricos, pode-se observar que o sistema ainda consegue ser controlado, com erros de controle na ordem de centésimos de milímetro, como pode ser visto nos resultados abaixo:

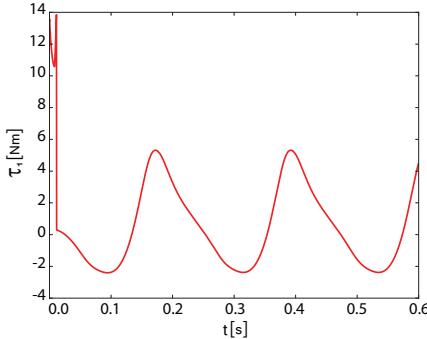


Figura 16: Torque aplicado pelo atuador 1

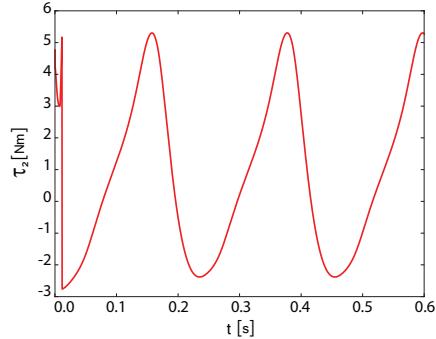


Figura 17: Torque aplicado pelo atuador 2

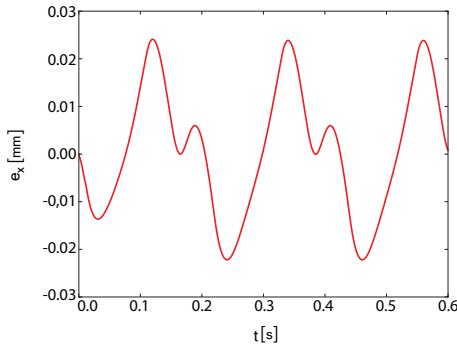


Figura 18: Erro de na coordenada x

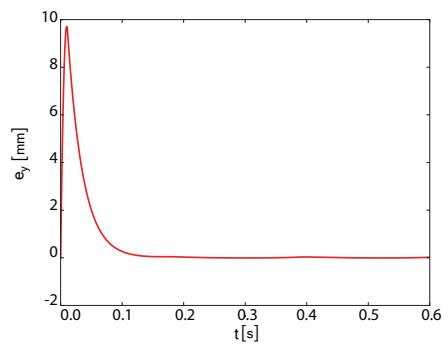


Figura 19: Erro de na coordenada x

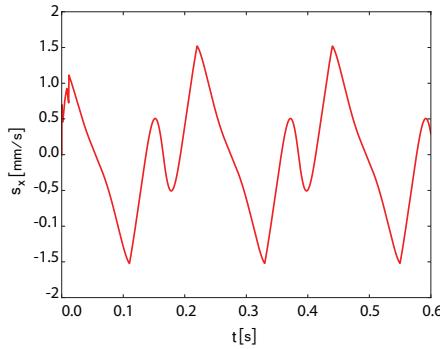


Figura 20: Variável s_x

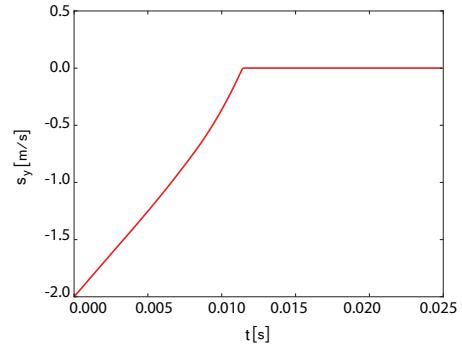
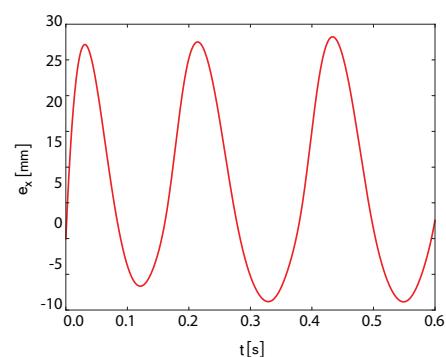
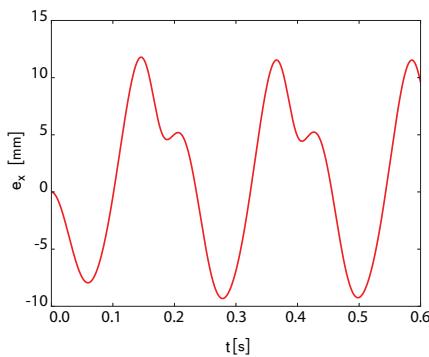
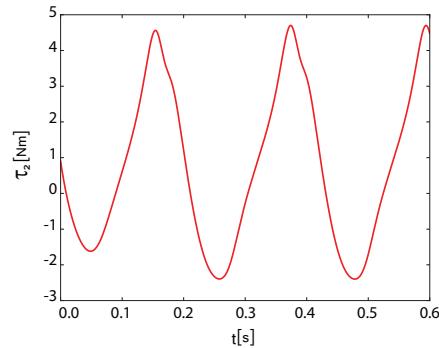
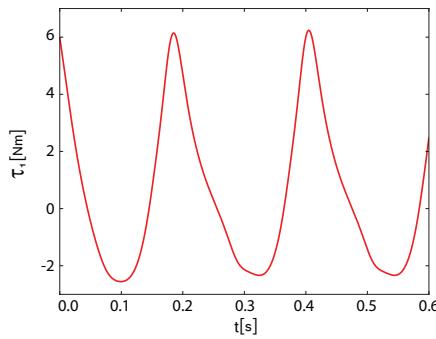


Figura 21: Variável s_y

Para fins de comparação, realizamos a simulação anterior mudando a lei de controle para a tradicional lei de Controle por Torque Computado com amortecimento crítico [15]:

$$\psi = \hat{h}(q, \dot{q}^\#) + \hat{H}(q)(\ddot{q}_d^\# + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e) \quad (7.20)$$

Escolhendo $\lambda = 40.0$, obtemos os seguintes resultados:



Repare que a lei de Controle por Torque Computado não consegue seguir a trajetória de forma satisfatória, mantendo um erro em regime permanente oscilatório com pico 12mm na coordenada x e 27mm na coordenada y .

7.3 Ensaios Experimentais

Nesta sessão, será descrita a bancada experimental e serão apresentados e discutidos os resultados experimentais do controle do mecanismo 5R utilizando 8 diferentes estratégias de controle

7.3.1 Bancada experimental

A bancada é constituída de:

- 2 motores DC modelo PM70 da AMETEK com as seguintes características:
 - Corrente nominal de 13A

- Torque nominal de $0,5Nm$
 - Potência útil de $200W$
 - Tensão de alimentação de $24V$
 - Rotação nominal de $3600rpm$
 - Peso de $1.80kgf$
- 2 encoders incrementais do modelo E40S com as seguintes características:
 - Resolução de $5000pulsos/volta$.
 - Tensão de alimentação de $12V$ a $24V$
 - 3 canais de saída A, B e Z
 - 1 driver modelo Pololu Dual VNH5019 Motor Driver Shield com as seguintes características.
 - Tensões de operação: $5,5V$ a $24V$
 - Corrente de saída: até $12A$ contínuos ($30A$ de pico)
 - Dois canais de saída para motor
 - Entrada de tensão do sistema pode ser tanto $5V$ quanto $3.3V$
 - Frequência de operação do PWM de até $20kHz$
 - 1 Microprocessador responsável pela execução das malhas de controle. O modelo utilizado foi o *Raspberry Pi 2 Model B* com as seguintes características:
 - Processador: quadcore ARMv7
 - 1GB RAM
 - alimentação de $5V, 2A$

A arquitetura do sistema pode ser vista na figura 26.

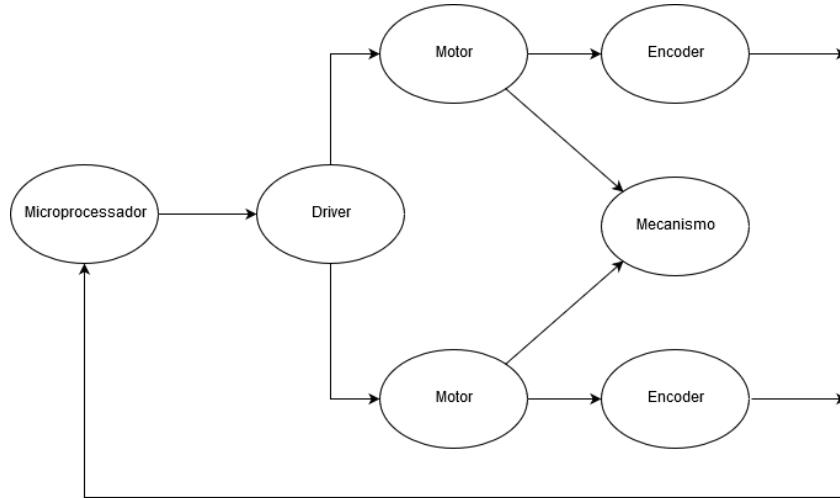


Figura 26: Arquitetura do sistema - Fonte:Própria

7.4 Sistema de controle

O sistema de controle é constituído de:

- 2 derivadores para a obtenção da velocidade e aceleração dos motores
- Cálculo da corrente que passa pelos motores
- Malhas de controles, sendo uma linear (controle de corrente) e uma não linear

Pelo encoder obtemos a posição dos motores, com os derivadores obtemos a velocidade e a aceleração. Esses três sinais juntos com suas respectivas referências são utilizadas na malha de controle não linear. A velocidade, junto com a tensão que é enviada ao motor são utilizadas para calcular a corrente que passa no motor. Com o erro entre o valor calculado e a corrente de referência, o controlador calcula e envia a tensão ao motor. A arquitetura pode ser visualizada na figura 27.

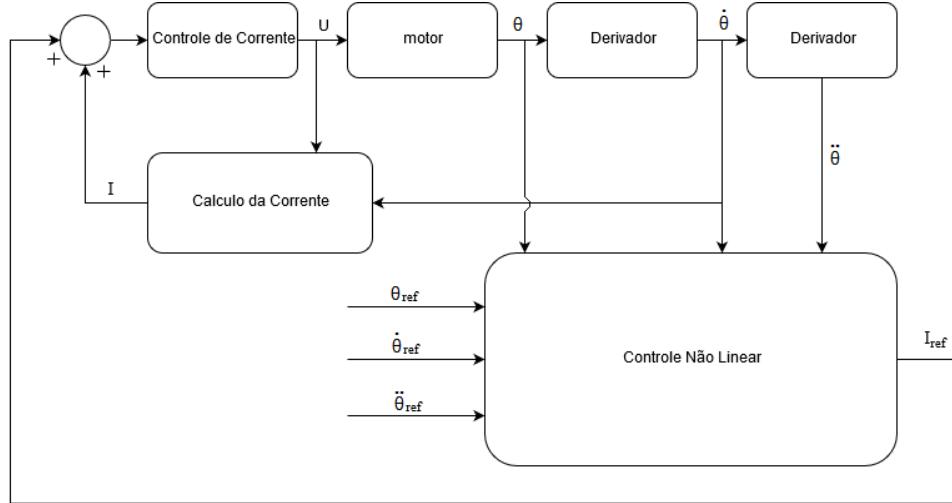


Figura 27: Arquitetura de controle - Fonte:Própria

7.4.1 Derivador

A partir da posição angular obtida através da leitura do encoder, é possível determinar a velocidade usando um derivador numérico. Uma das formas de se obter o derivador é pelo método das diferenças finitas:

$$\dot{x}_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T} \quad (7.21)$$

No entanto, como há ruídos nos sinais obtidos, a utilização do método das diferenças finitas amplifica os ruídos de alta frequência. Diante disso, optamos por utilizar os derivador derivadores em série com filtros passa-baixa tipo Bessel de segunda ordem (para o cálculo da velocidade a partir da posição) e oitava ordem (para o cálculo da aceleração a partir da velocidade).

7.4.2 Cálculo da corrente

Para o cálculo da corrente foi considerada a equação da dinâmica elétrica do motor (4.163):

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + k_e \omega \quad (4.163)$$

A dinâmica elétrica é muito mais rápida que a mecânica, portanto ela será desprezada ($\frac{di}{dt} = 0$). Com isso, obtemos a seguinte equação para o cálculo da corrente:

$$I = \frac{u - k_e \omega}{R} \quad (7.22)$$

7.4.3 Parâmetros do sistema

Parâmetros	Valores	Unidades
R	1.10098	Ω
L	0.667	mH
b	0.000122595	Ns
k_t	0.055984	Nm/A
μ	0.0435651	Nm
k_e	0.0513822	Vs/rad
J	$1.469 * 10^{-4}$	$kg.m^2$

Parâmetros	Valores	Unidades
R	0.829383	Ω
L	0.667	mH
b	0.000203914	Ns
k_t	0.0566596	Nm/A
μ	0.0499202	Nm
k_e	0.0520023	Vs/rad
J	$1.88738 * 10^{-4}$	$kg.m^2$

8 CONCLUSÕES E TEMAS PARA PESQUISA FUTURA

8.1 Principais contribuições

A partir dos resultados obtidos no trabalho de formatura realizado na graduação, foi publicado um artigo intitulado “Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies” [18], o qual foi escrito em coautoria com Eng. Guilherme Martinho Dobrianskyj e o Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho. Este trabalho foi apresentado no BioRob 2014 (IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics) na seção de posters, no dia 15 de agosto de 2014. O artigo pode ser acessado por [⟨http://dx.doi.org/10.1109/BIOROB.2014.6913880⟩](http://dx.doi.org/10.1109/BIOROB.2014.6913880).

Um capítulo de livro, intitulado “Dynamic modelling and control of balanced parallel mechanisms” [34], foi escrito em coautoria com o Dr. Renato M. M. Orsino e com o Prof. Dr. Tarcisio Antonio Hess Coelho, para o livro *Dynamic balancing of mechanisms and synthesizing of parallel robots* (editado pelo Prof. Dr. Dan Zhang da Universidade do Instituto de Tecnologia de Ontario e publicado pela editora Springer). Este capítulo de livro trata do uso de uma metodologia de modelagem modular para o balanceamento adaptativo e desenvolvimento de algoritmos de controle para mecanismos robóticos paralelos. O capítulo pode ser acessado por [⟨http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3_16⟩](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3_16).

Um artigo, publicado no periódico *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, intitulado “A new approach for obtaining the dynamic balancing conditions in serial mechanisms” [14], foi escrito em coautoria com o Prof. Dr. Tarcísio Antonio Hess Coelho. O artigo pode ser acessado por [⟨http://dx.doi.org/10.1504/IJMRS.2016.077036⟩](http://dx.doi.org/10.1504/IJMRS.2016.077036).

Um artigo, publicado no *Congresso Brasileira de Automática - 2018*, intitulado “H-Infinity Control of a 3-DOF RRR Spatial Serial Mechanism” [46], foi escrito em coautoria com a Eng. Isabella Stevani, o Prof. Dr. Diego Colón, e o Prof. Dr. Tarcísio Antonio Hess Coelho. O artigo pode ser acessado por [⟨https://ssl4799.websitseguro.com/swge5/PROCEEDINGS/⟩](https://ssl4799.websitseguro.com/swge5/PROCEEDINGS/) (doi:10.20906/CPS/CBA2018-0458).

8.2 Sugestão de temas para pesquisa futura

REFERÊNCIAS

- 1 H. Abdellatif, B. Heimann, J. Kotlarski, T. Ortmaier. Practical model-based and robust control of parallel manipulators using passivity and sliding mode theory. *Robotics 2010: Current and Future Challenges*, InTech, 2010.
- 2 R. Z. H. de Almeida. Modelagem dinâmica e controle e robô manipulador de arquitetura paralela assimétrica de três graus de liberdade. *Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- 3 O. Altuzarra, P. M. Eggers, F. J. Campa, C. Roldan-Paraponiaris, C. Pinto. Dynamic Modelling of Lower-Mobility Parallel Manipulators Using the Boltzmann-Hamel Equations. *Mechanisms, Transmissions and Applications*, 157–165, Springer, 2015.
- 4 J. Baumgarte. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1(1): 1–16, 1972.
- 5 P. Begon, F. Pierrot, P. Dauchez. Fuzzy sliding mode control of a fast parallel robot. *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*, 1178–1183, IEEE, 1995.
- 6 A.M. Bloch, M. Reyhanoglu, N.H. McClamroch. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(11): 1746–1757, 1992.
- 7 E. L. L. Cabral. Cinemática Direta de Robôs Manipuladores. *Análise de Robôs*, sites.poli.usp.br/p/eduardo.cabral/Cinemática Direta.pdf acessado em 25/08/2016.
- 8 E. F. Camacho, C. B. Alba. *Model predictive control*. Springer Science & Business Media, 2013.
- 9 A. Chemori, G. S. Natal, F. Pierrot. Control of parallel robots: towards very high accelerations. *SSD'2013: 10th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, 2013.
- 10 S-L. Chen, Y-C. Tsai. Contouring control of a parallel mechanism based on equivalent errors. *American Control Conference, 2008*, 2384–2388, IEEE, 2008.
- 11 H. Cheng, Y-K. Yiu, Z. Li. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 8(4): 483–491, 2003.
- 12 A. Codourey. Dynamic modelling and mass matrix evaluation of the DELTA parallel robot for axes decoupling control. *Intelligent Robots and Systems' 96, IROS 96, Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference on*, 1211–1218, IEEE, 1996.

- 13 A. Codourey, E. Burdet. A body-oriented method for finding a linear form of the dynamic equation of fully parallel robots. *Robotics and Automation, 1997. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on*, 1211–1218, IEEE, 1997.
- 14 A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. A new approach for obtaining the dynamic balancing conditions in serial mechanisms. *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 3(1): 32–47, 2016.
- 15 J. J. Craig. *Introduction to robotics: mechanics and control*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: control engineering. Pearson/Prentice Hall, 2005.
- 16 J. Denavit, R. S. Hartenberg. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, 22:(1) 215–221, 1955.
- 17 G. M. Dobrianyj, A. G. Coutinho. Plataforma robótica para reabilitação do membro superior humano. *Tese (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- 18 G. M. Dobrianskyj, A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies. *Biomedical Robotics and Biomechatronics 2014 5th IEEE RAS EMBS International Conference on*, 819 – 825, IEEE, 2014.
- 19 V. Duchaine, S. Bouchard, C. M. Gosselin. Computationally efficient predictive robot control. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, 12(5): 570–578, 2007.
- 20 M. M. Ebrahimi, F. Piltan, M. Bazregar, A. Nabaee. Intelligent Robust Fuzzy-Parallel Optimization Control of a Continuum Robot Manipulator. *International Journal of Control and Automation*, 6(3): 15–34, 2013.
- 21 M. Ertugrul, O. Kaynak. Neuro sliding mode control of robotic manipulators. *Mechatronics*, 10(1): 239–263, 2000.
- 22 J. Guldner, V. I. Utkin. The chattering problem in sliding mode system. *14th Int. Symp. Math. Theory Netw. Syst.(MTNS), Perpignan, France*, 2000.
- 23 M. Honegger, R. Brega, G. Schweitzer. Application of a nonlinear adaptive controller to a 6 dof parallel manipulator. *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, 1930–1935, IEEE, 2000.
- 24 H. Hu, P-Y. Woo. Fuzzy supervisory sliding-mode and neural-network control for robotic manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 53(3): 929–940, 2006.
- 25 E. Jarzebowska. Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(12):118 – 131, 2009.
- 26 P. C. Kaminski. *Mecânica geral para engenheiros*. Edgard Blücher, 2000.

- 27 W. Khalil, E. Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Taylor & Francis, 2002.
- 28 V. D. Kumazawa, T. A. Hess Coelho, D. Rinaudi, G. Carbone, M. Ceccarelli. Kinematic analysis and operation feasibility of a 3-dof asymmetric parallel mechanism. In *20th COBEM, Gramado, Brazil, Paper No. COB09-0744*, 2009.
- 29 Y. Li, Q. Xu. Dynamic modeling and robust control of a 3-PRC translational parallel kinematic machine *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25(3): 630–640, 2009.
- 30 Q. Li, F. X. Wu. Control performance improvement of a parallel robot via the design for control approach *Mechatronics*, 14(8): 947–964, 2004.
- 31 O. Linda, M. Manic. Uncertainty-robust design of interval type-2 fuzzy logic controller for delta parallel robot *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, 7(4): 661–670, 2011.
- 32 H. Lipkin. A note on denavit-hartenberg notation in robotics *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 921–926, American Society of Mechanical Engineers, 2005.
- 33 J-P. Merlet. Still a long way to go on the road for parallel mechanisms In *ASME DETC Conference, Montreal, 2002*, 2002.
- 34 R. M. M. Orsino, A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. Dynamic Modelling and Control of Balanced Parallel Mechanisms. *Dynamic Balancing of Mechanisms and Synthesizing of Parallel Robots*, 403–445, Springer International Publishing, 2016.
- 35 R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho. A contribution for developing more efficient dynamic modelling algorithms of parallel robots. *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 1(1): 15 – 34, 2013.
- 36 R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho. A contribution on the modular modelling of multibody systems *Proc. Royal Society A*, 471(2183), The Royal Society, 2015.
- 37 R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho, C. P. Pesce. Analytical mechanics approaches in the dynamic modelling of Delta mechanism *Robotica*, 33(4): 953–973, 2015.
- 38 P. J. Prince, J. R. Dormand. High order embedded Runge-Kutta formulae *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 7(1): 67–75, 1981.
- 39 N. Sadati, R. Ghadami. Adaptive multi-model sliding mode control of robotic manipulators using soft computing *Neurocomputing*, 71(13): 2702–2710, 2008.
- 40 W. Shang, S. Cong Nonlinear computed torque control for a high-speed planar parallel manipulator *Mechatronics*, 19(6): 987–992, 2009.
- 41 B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo. *Robotics: modelling, planning and control*. Springer Science & Business Media, 2010.
- 42 J-J. E. Slotine, W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.

- 43 J-J. E. Slotine. The robust control of robot manipulators *The International Journal of Robotics Research*, 4(2): 49–64, 1985.
- 44 J-J. E. Slotine, W. Li. On the adaptive control of robot manipulators *The International Journal of Robotics Research*, 6(3): 49–59, 1987.
- 45 M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar. *Robot modeling and control*. Wiley New York, 2006.
- 46 I. Stevani, A. G. Coutinho, D. Cólón, T. A. H. Coellho. H-Infinity Control of a 3-DOF RRR Spatial Serial Mechanism *Congresso Brasileiro de Automática 2018 Conference Proceedings ISSN: 2525-8311*, doi:10.20906/CPS/CBA2018-0458, 2018.
- 47 R. A. Tenenbaum. *Fundamentals of Applied Dynamics*. Springer Science & Business Media, 2006.
- 48 L. W. Tsai. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, 1999.
- 49 V. Utkin, J. Guldner, J. Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. Vol. 34. CRC press, 2009.
- 50 V. Utkin, H. Lee Chattering problem in sliding mode control systems *International Workshop on Variable Structure Systems, 2006. VSS'06*, 346–350, 2006.
- 51 A. Vivas, P. Poignet. Predictive functional control of a parallel robot *Control Engineering Practice*, 13(7): 863–874, 2005.
- 52 J. Wang, J. Wu, L. Wang, Z. You. Dynamic feed-forward control of a parallel kinematic machine *Mechatronics*, 19(3): 313–324, 2009.
- 53 P-L. Yen, C-C. Lai Dynamic modeling and control of a 3-DOF Cartesian parallel manipulator *Mechatronics*, 19(3): 390–398, 2009.
- 54 M. Zeinali, L. Notash. Adaptive sliding mode control with uncertainty estimator for robot manipulators *Mechanism and Machine Theory*, 45(1): 80–90, 2010.
- 55 A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto, E. Portillo. Extended CTC control for parallel robots *Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA), 2010 IEEE Conference on*, 1–8, IEEE, 2010.
- 56 A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto. Control of parallel robots using passive sensor data *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2398–2403, IEEE, 2008.
- 57 A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto. A redundant dynamic model of parallel robots for model-based control *Robotica*, 31(2): 203–216, 2013.
- 58 A. Zubizarreta, M. Marcos, I. Cabanes, C. Pinto, E. Portillo. Redundant sensor based control of the 3RRR parallel robot *Mechanism and machine theory*, 54(1): 1–17, 2012.

APÊNDICE A – FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE MOTORES DC

Para a modelagem dos motores, será considerado o seguinte circuito de modelo dos motores:

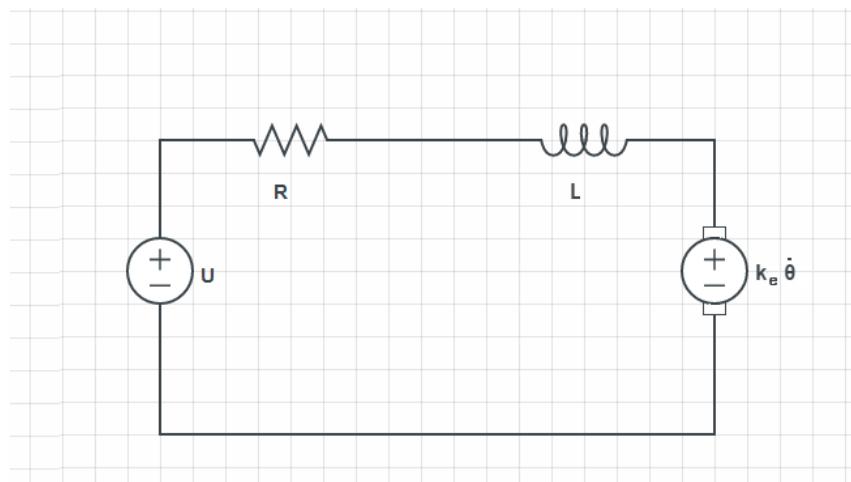


Figura 28: Circuito elétrico do motor - Fonte:Própria

Pela lei de Ohm, temos que:

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + k_e \omega \quad (\text{A.1})$$

Sendo J a inércia do rotor e b o coeficiente de atrito viscoso e \mathfrak{u} o coeficiente de atrito seco do mancal do eixo do motor, obtemos pelo teorema do momento angular:

$$J\dot{\omega} = T - b\omega - \mathfrak{u}sign(\omega) - \tau_d \quad (\text{A.2})$$

Sendo τ_d o torque que o mecanismo aplica no motor e será considerado um distúrbio.

Como hipótese, será considerado que o torque fornecido pelo motor é proporcional à corrente de armadura:

$$T = k_t i \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (A.3) em (A.2),

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + k_e = u \\ J\dot{\omega} + b\omega + \text{usign}(\omega) = k_t i - \tau_d \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$(\text{A.5})$$

Considerando $u = 0$ e aplicando Laplace para condições iniciais nulas nas equações (A.4) e (A.5), obtemos:

$$\begin{cases} (Ls + R)I(s) + k_e W(s) = U(s) \\ (Js + bs)W(s) = k_t I(s) - \tau_d(s) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$(\text{A.7})$$

Isolando $W(s)$ da equação (A.7),

$$W(s) = \frac{k_t I(s) - \tau_d(s)}{Js + b} \quad (\text{A.8})$$

- Função de transferência de corrente

Substituindo (A.8) na equação (A.6) temos,

$$I(s) = \frac{Js + b}{(Ls + R)(Js + bs) + k_t k_e} U(s) + \frac{k_e}{(Ls + R)(Js + bs) + k_t k_e} \tau_d(s) \quad (\text{A.9})$$

Com isso, as funções de transferência do sistema, serão:

$$G_I(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{Js + b}{(Ls + R)(Js + b) + k_t k_e} \quad (\text{A.10})$$

$$G_{Id}(s) = \frac{I(s)}{\tau_d(s)} = \frac{k_e}{(Ls + R)(Js + b) + k_t k_e} \quad (\text{A.11})$$

- Função de transferência de velocidade

Substituindo as equações (A.9) na equação (A.8) encontramos,

$$W(s) = \frac{k_t}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} U(s) - \frac{(Ls + R)}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} \tau_d(s) \quad (\text{A.12})$$

Logo, temos função de transferência do motor na forma:

$$G_v(s) = \frac{k_t}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} \quad (\text{A.13})$$

$$G_{vd}(s) = -\frac{(Ls + R)}{(Js + b)(Ls + R) + k_e k_t} \quad (\text{A.14})$$

- Função de transferência de posição

Integrando em s a equação (A.13) obtemos a função de transferência de posição do motor.

$$G_p(s) = \frac{k_t}{s((Js + b)(Ls + R) + k_e k_t)} \quad (\text{A.15})$$

$$G_{pd}(s) = -\frac{(Ls + R)}{s((Js + b)(Ls + R) + k_e k_t)} \quad (\text{A.16})$$

APÊNDICE B – CONTROLADOR DE CORRENTE

Como foi visto apêndice anterior, a função de transferência de corrente de um motor DC é dada por:

$$G_I(s) = \frac{As + B}{s^2 + Cs + D} \quad (\text{B.1})$$

Sendo:

$$\begin{cases} A = 1/L \\ B = b/LJ \\ C = b/J + R/L \\ D = \frac{Rb+k_t k_e}{LJ} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Discretizado pela técnica do segurador de ordem zero, considerando um período de amostragem T , obtemos:

$$Gd_I(z) = \frac{\mathcal{A}z + \mathcal{B}}{z^2 + \mathcal{C}z + \mathcal{D}} \quad (\text{B.3})$$

Sendo:

$$\begin{cases} \mathcal{A} = -\left((BC - 2AD)(e^{T\Delta} - 1) + B\Delta(1 + e^{T\Delta} - 2e^{\frac{T}{2}(\Delta+C)})\right)/\mathcal{E} \\ \mathcal{B} = \left((BC - 2AD)(e^{T\Delta} - 1) - B\Delta(1 + e^{T\Delta} - 2e^{\frac{T}{2}(\Delta-C)})\right)/\mathcal{E} \\ \mathcal{C} = 2De^{\frac{T}{2}(\Delta-C)}\Delta/\mathcal{E} \\ \mathcal{D} = -2D(e^{T\Delta} + 1)/\mathcal{E} \\ \mathcal{E} = 2De^{\frac{T}{2}(\Delta+C)}\Delta \\ \Delta = \sqrt{C^2 - 4D} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Como o sistema é de segunda ordem e não possui integrador, é proposto o seguinte

controlador:

$$K(z) = \frac{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}{(z - 1)(z - \delta)} \quad (\text{B.5})$$

Como o controlador proposto possui 4 parâmetros, é possível alocar 4 pólos. Tendo em vista que a planta e o controlador são de segunda ordem, o sistema em malha fechada será de quarta ordem. Sendo assim, o controlador proposto é capaz de alocar todos os pólos do sistema.

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$G_{mf}(z) = \frac{(\mathcal{A}z + \mathcal{B})(\gamma + \alpha z^2 + \beta z)}{z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \quad (\text{B.6})$$

Sendo:

$$\begin{cases} a_0 &= \mathcal{B}\gamma + \mathcal{D}\delta \\ a_1 &= \mathcal{B}\beta + \mathcal{A}\gamma + (\mathcal{C} - \mathcal{D})\delta - \mathcal{D} \\ a_2 &= \mathcal{B}\alpha + \mathcal{A}\beta + (1 - \mathcal{C})\delta - \mathcal{C} + \mathcal{D} \\ a_3 &= \mathcal{A}\alpha - \delta + \mathcal{C} - 1 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Sendo assim, o polinômio característico do sistema em malha fechada é dada por:

$$P(z) = z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (\text{B.8})$$

Para alocar os pólos do sistema em malha fechada em p_1, p_2, p_3, p_4 , é necessário que:

$$P(z) = z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \quad (\text{B.9})$$

Sendo:

$$\begin{cases} c_0 &= p_1 p_2 p_3 p_4 \\ c_1 &= -p_1 p_2 p_3 - p_1 p_4 p_3 - p_2 p_4 p_3 - p_1 p_2 p_4 \\ c_2 &= p_1 p_2 + p_3 p_2 + p_4 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_3 p_4 \\ c_3 &= -p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Portanto, os parâmetros de $K(z)$ podem ser obtidos resolvendo o seguinte sistema de

equações algébricas:

$$\begin{cases} \mathcal{B}\gamma + \mathcal{D}\delta &= c_0 \\ \mathcal{B}\beta + \mathcal{A}\gamma + (\mathcal{C} - \mathcal{D})\delta - \mathcal{D} &= c_1 \\ \mathcal{B}\alpha + \mathcal{A}\beta + (1 - \mathcal{C})\delta - \mathcal{C} + \mathcal{D} &= c_2 \\ \mathcal{A}\alpha - \delta + \mathcal{C} - 1 &= c_3 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Cuja solução é dada por:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\mathcal{A}^2 c_1 + \mathcal{B}(-\mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{A}c_2 + \mathcal{B}(\mathcal{C}+c_3)) - (\mathcal{C}-c_4-1)(\mathcal{B}(\mathcal{B}-\mathcal{C}(\mathcal{A}+\mathcal{B})) + \mathcal{A}\mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B}))}{(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}^2\mathcal{D}-\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}+\mathcal{B}^2)} \\ \beta = \frac{\mathcal{C}(\mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2 + \mathcal{B}(\mathcal{B}-\mathcal{C}(\mathcal{A}+\mathcal{B}))) - \mathcal{A}\mathcal{D}^2(\mathcal{A}+\mathcal{B}) + (\mathcal{A}c_3 - \mathcal{B}c_4)(\mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{C}\mathcal{B}) + (\mathcal{A}(\mathcal{C}-1) - \mathcal{B})(\mathcal{A}c_1 - \mathcal{B}c_2)}{(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}^2\mathcal{D}-\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}+\mathcal{B}^2)} \\ \gamma = \frac{(\mathcal{A}^2\mathcal{D} - (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}))c_1 + \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{B}(1-\mathcal{C}+c_4) - \mathcal{A}(\mathcal{C}-\mathcal{D}+c_3)) + \mathcal{A}^2(\mathcal{D}+c_2))}{(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}^2\mathcal{D}-\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}+\mathcal{B}^2)} \\ \delta = \frac{\mathcal{A}^3 c_1 + \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{C}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{B}) - \mathcal{A}\mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{A}^2 c_2 + \mathcal{B}(\mathcal{A}c_3 - \mathcal{B}c_4))}{(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}^2\mathcal{D}-\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}+\mathcal{B}^2)} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

APÊNDICE C – CURVA DOS MOTORES

A curva de velocidade foi obtida aplicando o derivador descrito na seção 7.4.1 no sinal de posição fornecido pelo encoder . Foi utilizada uma entrada degrau de tensão $6.5V$. As curvas dos motores 1 e 2 podem ser observadas nas figuras 29 e 30 respectivamente.

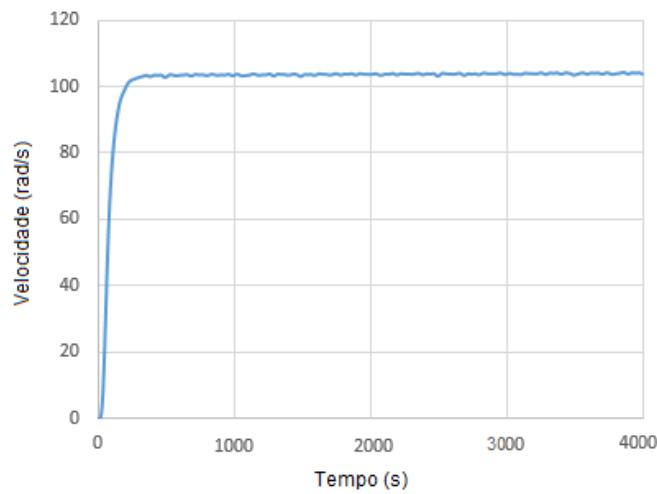


Figura 29: Curva de velocidade do motor 1 - Fonte:Própria

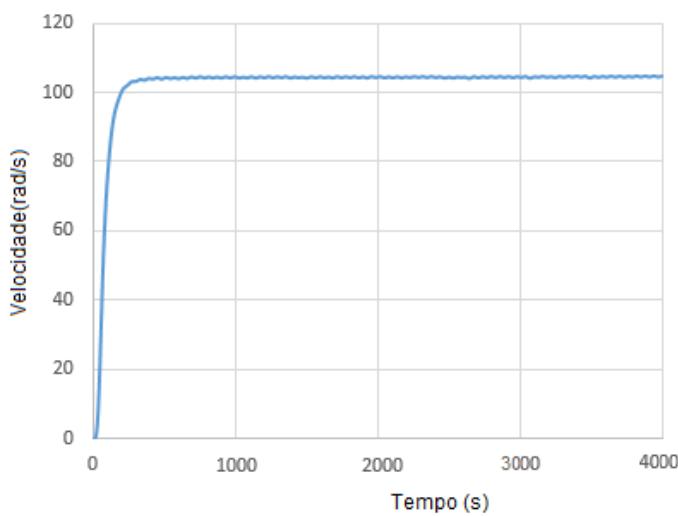


Figura 30: Curva de velocidade do motor 2 - Fonte:Própria

Para obtenção dos parâmetros do motor, foram realizados os seguintes procedimentos:

- O valor de indutância (L) foi medido através de um multímetro e considerado constante independente da velocidade do motor.
- O valor da constante de força contra-eletromotriz (k_e) e da resistência (R) foram obtidos através do método dos mínimos quadrados implementado sobre os valores medidos da tensão, corrente e velocidade apresentados na tabela 4. Utilizando a equação elétrica do motor (4.163) em regime permanente ($\frac{di}{dt} = 0$):

$$u = Ri + k_e\omega \quad (\text{C.1})$$

Tabela 4: Medições para obtenção de k_e do motor 1

$u(V)$	$i(A)$	$\omega(\text{rad/s})$
1.524	0.79	12.272
2.52	0.84	31.390
3.51	0.89	49.755
4.6	0.94	68.079
5.49	0.98	86.322
6.51	1.02	105.736
7.49	1.05	123.683
8.5	1.09	140.924
9.49	1.11	161.111

Aplicando o método dos mínimos quadrados, temos:

$$\begin{bmatrix} <\omega, \omega> & <\omega, i> \\ <\omega, i> & <i, i> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_e \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <\omega, u> \\ <i, u> \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Sendo o produto interno definido como $< f, g > = \sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i$ obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 87991.6 & 799.092 \\ 799.092 & 8.5289 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_e \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400.99 \\ 50.4493 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Obtivemos como resultados

$$R = 1.10098 \Omega \quad (\text{C.4})$$

$$k_e = 0.0513822 \text{ Vs/rad} \quad (\text{C.5})$$

- k_t foi obtido seguindo a proporção:

$$k_t = \frac{k'_t}{k'_e} k_e \quad (\text{C.6})$$

Sendo k'_t e k'_e valores obtidos da curva fornecida no datasheet do motor (Anexo ??) dados por:

$$k'_t = 0.0467188 \text{ Nm/A} \quad (\text{C.7})$$

$$k'_e = 0.0428786 \text{ Vs/rad} \quad (\text{C.8})$$

Substituindo os valores na equação (C.6), temos que:

$$k_t = 0.055984 \text{ Nm/A} \quad (\text{C.9})$$

- As constantes de atrito viscoso (b) e seco (μ) foram obtidas a partir da equação dinâmica mecânica do motor (A.2) em regime permanente ($\dot{\omega} = 0$) com $\omega > 0$, ou seja:

$$b\omega + \mu = k_t i \quad (\text{C.10})$$

Aplicando novamente o método dos mínimos quadrados, temos:

$$\begin{bmatrix} <1, 1> & <\omega, 1> \\ <\omega, 1> & <\omega, \omega> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <1, k_t i> \\ <\omega, k_t i> \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

Obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 9 & 779.272 \\ 779.272 & 87991.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.487621 \\ 44.7364 \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Logo, temos que:

$$\mu = 0.0435651 \text{ Nm} \quad (\text{C.13})$$

$$b = 0.000122595 \text{ Nms/rad} \quad (\text{C.14})$$

- J foi obtido a partir da curva de velocidades do motor figura 29. Como não houve sobressinal, o tempo de assentamento foi de $0.207s$.

$$t_{98\%} = \frac{4}{\sigma} \quad (\text{C.15})$$

Da equação (C.15) temos que $p = -19.3237$. Então, igualando o denominador da função de transferência do motor (A.10) a zero e substituindo o valor do pólo:

$$[(Ls + R)(Js + b) + k_t k_e]_{s=p} = 0 \quad (\text{C.16})$$

Obtemos $J = 1.469 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$

Os valores dos parâmetros obtidos são apresentados na tabela 2

Parâmetros	Valores	Unidades
R	1.10098	Ω
L	0.667	mH
b	0.000122595	Ns
k_t	0.055984	Nm/A
μ	0.0435651	Nm
k_e	0.0513822	Vs/rad
J	$1.469 \cdot 10^{-4}$	$kg \cdot m^2$

Analogamente determinamos os parâmetros do motor 2 apresentados na tabela 3. Sendo que foi considerado como tempo de assentamento $0.198s$. A tabela de medições correspondente a esse motor pode ser observada na tabela 5.

Tabela 5: Medições para obtenção de k_e do motor 2

$u(V)$	$i(A)$	$\omega(rad/s)$
1.49	0.92	13.696
2.48	0.99	31.747
3.47	1.06	49.909
4.47	1.14	67.889
5.46	1.20	86.067
6.47	1.27	104.681
7.47	1.32	122.742
8.48	1.37	140.553

Tabela 3: Parâmetros do Motor 2

Parâmetros	Valores	Unidades
R	0.829383	Ω
L	0.667	mH
b	0.000203914	Ns
k_t	0.0566596	Nm/A
μ	0.0499202	Nm
k_e	0.0520023	Vs/rad
J	$1.88738 * 10^{-4}$	$kg.m^2$

APÊNDICE D – CINEMÁTICA DE CORPOS RÍGIDOS

D.1 Conceitos básicos

Esta seção tem o intuito de apresentar os conceitos de derivada temporal de vetores em relação a um referencial e as definições velocidade e aceleração.

Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} dois referenciais, e p e o pontos no espaço. Primeiramente, fazemos as seguintes definições:

- $r_{o|p}$: vetor que liga o ponto o ao ponto p , orientado no sentido de o até p .
- $v_p^{\mathcal{A}}$: vetor velocidade do ponto p em relação a \mathcal{A} .
- $a_p^{\mathcal{A}}$: vetor aceleração do ponto p em relação a \mathcal{A} .
- $\dot{a}_p^{\mathcal{A}}$: vetor sobre-aceleração do ponto p em relação a \mathcal{A} .
- $\omega_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$: vetor velocidade angular de \mathcal{B} em relação a \mathcal{A} .
- $\dot{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$: vetor aceleração angular de \mathcal{B} em relação a \mathcal{A} .
- $\ddot{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$: vetor sobre-aceleração angular de \mathcal{B} em relação a \mathcal{A} .
- $\frac{d^{[4]}}{dt}$: Operador derivada temporal em relação ao referencial \mathcal{A} .

D.1.1 Produto vetorial

Para a realização do cálculo de derivadas vetoriais, frequentemente é necessário o uso do produto vetorial. A notação para o operador produto vetorial utilizada será o “ \wedge ”. Com o intuito de deixar as equações mais legíveis, iremos adotar as seguintes convenções:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \equiv \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})) \equiv \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \quad (\text{D.2})$$

Além disso, vale destacar algumas propriedades básicas do produto vetorial que serão utilizadas durante o texto:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \quad (\text{D.5})$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \quad (\text{D.6})$$

D.1.2 Derivada temporal de versores

Seja $\hat{\mathbf{x}}_{\mathcal{B}}$ um versor fixo ao referencial \mathcal{B} . A derivada temporal de $\hat{\mathbf{x}}_{\mathcal{B}}$ em relação ao referencial \mathcal{A} é definida como:

$$\frac{d^{[\mathcal{A}]} \hat{\mathbf{x}}_{\mathcal{B}}}{dt} = \dot{\hat{\mathbf{x}}}^{[\mathcal{A}]}_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \hat{\mathbf{x}}_{\mathcal{B}} \quad (\text{D.7})$$

D.1.3 Derivada temporal de vetores

Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}_{\mathcal{B}}, \mathbf{j}_{\mathcal{B}}, \mathbf{k}_{\mathcal{B}}\}$ uma base ortonormal fixa ao referencial \mathcal{B} e \mathbf{x} um vetor cuja decomposição na base \mathcal{B} é conhecida e dada por $\mathbf{x} = x\mathbf{i}_{\mathcal{B}} + y\mathbf{j}_{\mathcal{B}} + z\mathbf{k}_{\mathcal{B}}$. A derivada temporal de \mathbf{x} em relação ao referencial \mathcal{A} é definida como:

$$\begin{aligned} \frac{d^{[\mathcal{A}]} \mathbf{x}}{dt} &= \dot{\mathbf{x}}^{[\mathcal{A}]} = \dot{x}\mathbf{i}_{\mathcal{B}} + \dot{y}\mathbf{j}_{\mathcal{B}} + \dot{z}\mathbf{k}_{\mathcal{B}} + x\dot{\mathbf{i}}^{[\mathcal{A}]}_{\mathcal{B}} + y\dot{\mathbf{j}}^{[\mathcal{A}]}_{\mathcal{B}} + z\dot{\mathbf{k}}^{[\mathcal{A}]}_{\mathcal{B}} \\ &= \dot{x}\mathbf{i}_{\mathcal{B}} + \dot{y}\mathbf{j}_{\mathcal{B}} + \dot{z}\mathbf{k}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge x\mathbf{i}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge y\mathbf{j}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge z\mathbf{k}_{\mathcal{B}} \\ &= \dot{x}\mathbf{i}_{\mathcal{B}} + \dot{y}\mathbf{j}_{\mathcal{B}} + \dot{z}\mathbf{k}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge (x\mathbf{i}_{\mathcal{B}} + y\mathbf{j}_{\mathcal{B}} + z\mathbf{k}_{\mathcal{B}}) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Repare que o termo $\dot{x}\mathbf{i}_{\mathcal{B}} + \dot{y}\mathbf{j}_{\mathcal{B}} + \dot{z}\mathbf{k}_{\mathcal{B}}$ é a derivada temporal do vetor \mathbf{x} no referencial \mathcal{B} . Sendo assim, temos:

$$\frac{d^{[\mathcal{A}]} \mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^{[\mathcal{A}]} = \dot{\mathbf{x}}^{[\mathcal{B}]} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{x} \quad (\text{D.9})$$

D.1.4 Definição de vetor velocidade

Supondo que o ponto o esteja fixo a \mathcal{A} , a velocidade do ponto p em relação ao referencial \mathcal{A} é definida como:

$$\mathbf{v}_p^A = \frac{d^{[A]} \mathbf{r}_{o|p}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_{o|p}^{[A]} \quad (\text{D.10})$$

Caso o não esteja fixo a \mathcal{A} , temos que:

$$\frac{d^{[A]} \mathbf{r}_{o|p}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_{o|p}^{[A]} = \mathbf{v}_p^A - \mathbf{v}_o^A \quad (\text{D.11})$$

D.1.5 Definição de vetor aceleração

A aceleração do ponto p em relação ao referencial \mathcal{A} é definida como:

$$\mathbf{a}_p^A = \frac{d^{[A]} \mathbf{v}_p^A}{dt} \quad (\text{D.12})$$

D.2 Equações de Poisson

Esta subseção tem o intuito de apresentar as equações básicas da cinemática de corpos rígidos, as equações de Poisson para velocidades, acelerações e sobre-acelerações.

D.2.1 Equação de Poisson para velocidades

Sejam p e o dois pontos pertencentes a um corpo rígido \mathcal{B} , e \mathcal{A} um referencial. Podemos relacionar a velocidades dos ponto p e o em relação a \mathcal{A} através da equação de Poisson para velocidades:

$$\mathbf{v}_p^A = \mathbf{v}_o^A + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o|p} \quad (\text{D.13})$$

D.2.2 Equação de Poisson para acelerações

Derivando (D.13) no tempo em relação a \mathcal{A} , temos:

$$\mathbf{a}_p^A = \mathbf{a}_o^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o|p} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge (\mathbf{v}_p^A - \mathbf{v}_o^A) \quad (\text{D.14})$$

Substituindo (D.13) em (D.14), obtemos a equação de Poisson para acelerações:

$$\boldsymbol{a}_p^A = \boldsymbol{a}_o^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o|p} + \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o|p} \quad (\text{D.15})$$

D.3 Composição de movimentos

Esta subseção tem o intuito de apresentar um dos princípios básicos da cinemática de corpos rígidos, a composição de movimentos.

D.3.1 Composição de velocidades lineares

Sejam \mathcal{A} um referencial, e A um sistema de coordenadas fixo a \mathcal{A} , definido pela origem o_A e pelos versores \mathbf{i}_A , \mathbf{j}_A e \mathbf{k}_A . Sejam também \mathcal{B} um referencial, B um sistema de coordenadas fixo a \mathcal{B} , definido pela origem o_B e pelos versores \mathbf{i}_B , \mathbf{j}_B e \mathbf{k}_B , e p um ponto no espaço. Definindo os vetores $\boldsymbol{r}_{o_A|o_B}$, $\boldsymbol{r}_{o_B|p}$ e $\boldsymbol{r}_{o_A|p}$ tem-se que:

$$\boldsymbol{r}_{o_A|p} = \boldsymbol{r}_{o_A|o_B} + \boldsymbol{r}_{o_B|p} \quad (\text{D.16})$$

Derivando (D.16) no tempo em relação a \mathcal{A} , temos:

$$\boldsymbol{v}_p^A = \boldsymbol{v}_{o_B}^A + \dot{\boldsymbol{r}}_{o_B|p}^{[A]} \quad (\text{D.17})$$

Utilizando a equação (D.9), temos que:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{o_B|p}^{[A]} = \dot{\boldsymbol{r}}_{o_B|p}^{[B]} + \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o_B|p} \quad (\text{D.18})$$

Ou seja:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{o_B|p}^{[A]} = \boldsymbol{v}_p^B + \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o_B|p} \quad (\text{D.19})$$

Substituindo (D.19) em (D.17), temos:

$$\boldsymbol{v}_p^A = \boldsymbol{v}_{o_B}^A + \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o_B|p} + \boldsymbol{v}_p^B \quad (\text{D.20})$$

Definindo:

$$\boldsymbol{v}_{p|B}^A = \boldsymbol{v}_{o_B}^A + \boldsymbol{\omega}_B^A \wedge \boldsymbol{r}_{o_B|p} \quad (\text{D.21})$$

Temos princípio da composição de movimento para velocidades lineares:

$$\mathbf{v}_p^A = \mathbf{v}_{p|\mathcal{B}}^A + \mathbf{v}_p^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.22})$$

Ou seja, \mathbf{v}_p^A é composto pela soma de $\mathbf{v}_{p|\mathcal{B}}^A$, que seria a velocidade de p se p estivesse fixo a \mathcal{B} (movimento de arrastamento), e $\mathbf{v}_p^{\mathcal{B}}$, que seria a velocidade de p se \mathcal{B} estivesse parado em relação a \mathcal{A} (movimento relativo).

D.3.2 Composição de acelerações lineares

Derivando (D.20) no tempo em relação a \mathcal{A} , temos:

$$\mathbf{a}_p^A = \mathbf{a}_{o_B}^A + \dot{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o_B|p} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \dot{\mathbf{r}}_{o_B|p}^{[A]} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{v}_p^{\mathcal{B}} + \mathbf{a}_p^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.23})$$

Substituindo (D.19) em (D.23), temos:

$$\mathbf{a}_p^A = \mathbf{a}_{o_B}^A + \dot{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o_B|p} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o_B|p} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{v}_p^{\mathcal{B}} + \mathbf{a}_p^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.24})$$

Definindo:

$$\mathbf{a}_{p|\mathcal{B}}^A = \mathbf{a}_{o_B}^A + \dot{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o_B|p} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{r}_{o_B|p} \quad (\text{D.25})$$

Temos princípio da composição de movimento para acelerações lineares:

$$\mathbf{a}_p^A = \mathbf{a}_{p|\mathcal{B}}^A + \mathbf{a}_p^{\mathcal{B}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{v}_p^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.26})$$

Ou seja, \mathbf{a}_p^A é composto pela soma de $\mathbf{a}_{p|\mathcal{B}}^A$, que seria a aceleração de p se p estivesse fixo a \mathcal{B} (aceleração de arrastamento), $\mathbf{a}_p^{\mathcal{B}}$, que seria a aceleração de p se \mathcal{B} estivesse parado em relação a \mathcal{A} (aceleração relativa), e da parcela $2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^A \wedge \mathbf{v}_p^{\mathcal{B}}$ (aceleralção complementar).

D.3.3 Composição de velocidades angulares

Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} dois referenciais e \mathcal{C} um corpo rígido. Sejam também os pontos p_1 e p_2 , ambos fixos a \mathcal{C} .

Aplicando o princípio da composição de movimento para velocidades lineras, temos que:

$$\mathbf{v}_{p_1}^A = \mathbf{v}_{p_1|\mathcal{B}}^A + \mathbf{v}_{p_1}^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.27})$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2|_{\mathcal{B}}}^{\mathcal{A}} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.28})$$

A partir da equação (D.21), temos que:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1|_{\mathcal{B}}}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{o}_B}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{o}_B|\mathbf{p}_1} \quad (\text{D.29})$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_2|_{\mathcal{B}}}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{o}_B}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{o}_B|\mathbf{p}_2} \quad (\text{D.30})$$

Sendo assim, temos:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{o}_B}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{o}_B|\mathbf{p}_1} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.31})$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{o}_B}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{o}_B|\mathbf{p}_2} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.32})$$

Subtraindo (D.32) de (D.31), temos:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2|\mathbf{p}_1} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{B}} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.33})$$

Como \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 pertencem a um mesmo corpo rígido, temos que:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2|\mathbf{p}_1} \quad (\text{D.34})$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}^{\mathcal{B}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2|\mathbf{p}_1} \quad (\text{D.35})$$

Substituindo (D.34) e (D.35) em (D.33):

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2|\mathbf{p}_1} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2|\mathbf{p}_1} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \wedge \mathbf{r}_{\mathbf{p}_2|\mathbf{p}_1} \quad (\text{D.36})$$

Temos princípio da composição de movimento para velocidades angulares:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.37})$$

Ou seja, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$ é composta pela soma de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, que seria velocidade angular de \mathcal{C} se \mathcal{C} estivesse fixo a \mathcal{B} (velocidade angular de arrastamento), e $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, que seria a velocidade angular de \mathcal{C} se \mathcal{B} estivesse parado em relação a \mathcal{A} (velocidade angular relativa).

Repare que, fazendo $\mathcal{C} \equiv \mathcal{A}$, temos que:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.38})$$

$$\therefore \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \quad (\text{D.39})$$

D.3.4 Composição de acelerações angulares

Derivando (D.37) no tempo em relação a \mathcal{A} , temos princípio da composição de movimento para acelerações angulares:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \quad (\text{D.40})$$

Ou seja, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$ é composta pela soma de $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, que seria a aceleração angular de \mathcal{C} se \mathcal{C} estivesse fixo a \mathcal{B} (aceleração angular de arrastamento), $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, que seria a aceleração angular de \mathcal{C} se \mathcal{B} estivesse parado em relação a \mathcal{A} (aceleração angular relativa), e da parcela $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ (aceleração angular complementar).

Repare que, fazendo $\mathcal{C} \equiv \mathcal{A}$ e utilizando (D.39), temos que:

$$\mathbf{0} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \wedge \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \quad (\text{D.41})$$

$$\therefore \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = -\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \quad (\text{D.42})$$