

ANDRÉ GARNIER COUTINHO

# Simulação dinâmica e validação experimental de técnicas de controle para robôs de arquitetura paralela

Relatório anual de atividades apresentado à Comissão de Atividade Discente (CADIS) do Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP)

Área de concentração:  
Engenharia Mecânica

Orientador:  
Prof. Dr. Tarcisio A. Hess Coelho

São Paulo  
13 de Janeiro de 2016

**Nome:** André Garnier Coutinho

**NUSP:** 6846085

**Curso:** Doutorado Direto

**Área de concentração:** Engenharia Mecânica de Projeto e Fabricação (3151)

**Orientador:** Professor Doutor Tarcisio Antonio Hess Coelho

**Ano de ingresso no PPGEM:** 2014

**Bolsista:** Sim

**Agência de fomento:** CNPq

**Editais/Chamadas:** Cota Institucional (Demanda Social)

**Prazo Máximo para Inscrição no Exame de Qualificação:** 18/08/2016

## Resumo

Para realizar o projeto de um sistema de controle, é necessário primeiramente de um modelo da planta a ser controlada. O grau de fidelidade do modelo da planta, dentro das condições de operação desejadas do sistema, influi diretamente na performance do sistema em malha fechada que o projeto do controlador pode oferecer. Quanto mais rico for o modelo, mais fácil de atingir requisitos de performance mais elevados (menor tempo de resposta e menor sobressinal, por exemplo) garantindo a estabilidade do sistema.

Utilizando os métodos tradicionais de modelagem de Sistemas Mecânicos Multicorpos, é difícil e trabalhoso de se obter modelos de sistemas complexos, como mecanismos paralelos. Para contornar esse problema, é comum desprezar alguns efeitos de acoplamentos inerciais, simplificando o processo de modelagem. Porém, essa estratégia gera modelos mais pobres, o que irá limitar a performance que o sistema poderá atingir quando for feito o projeto do sistema de controle.

A solução proposta para ser possível aumentar a performance, garantindo a robustez, de um sistema de controle de mecanismos paralelos é a utilização dos novos métodos de modelagem dinâmica desenvolvidos pelo grupo de pesquisa do Prof. Doutor Tarcisio Antonio Hess Coelho, os quais são adequados para incluir todos os efeitos de dinâmica de corpos rígidos, independentemente da complexidade do sistema.

O presente projeto visa desenvolver um algoritmo de modelagem que inclua todos os efeitos da dinâmica de corpos rígidos para realizar a modelagem dinâmica de mecanismos paralelos (baseado na metodologia de Orsino), desenvolver uma metodologia de projeto de controle robusto para mecanismos paralelos tradicionais e mecanismos com atuação redundante, e realizar simulações e validações experimentais das leis de controle sintetizadas pela metodologia proposta.

# 1 Introdução

Os mecanismos de arquitetura paralela são amplamente utilizados em simuladores de voo, simuladores automobilísticos, e tarefas de *pick-and-place*. Além disso, também são empregados em sistemas de posicionamento, sistemas de medição, máquinas de usinagem, entre outras tarefas.

Há uma série de vantagens em utilizar mecanismos paralelos no lugar dos tradicionais seriais. Dentre elas podemos citar sua grande capacidade de carga, alta precisão de posicionamento, alta rigidez estrutural, e uma redução significativa na inércia [5, 9, 10, 17]. Outra característica marcante desse tipo de arquitetura são as altas velocidades e acelerações atingidas, as quais superam muito os valores máximos atingidos utilizando arquitetura serial. Grande parte dessas vantagens se devem à possibilidade de instalação de todos os motores na base imóvel do mecanismo. Como desvantagens podemos citar o menor espaço de trabalho e modelo dinâmico muito mais complexo e de difícil obtenção [1, 5].



Figura 1: Robô industrial Adept Quattro

Levando-se em conta esta dificuldade de obtenção e a complexidade inerente do modelo dinâmico, o controle de mecanismos de arquitetura paralela é uma tarefa desafiadora. A utilização de modelos dinâmicos simplificados limita o desempenho do projeto de controladores baseados no modelo. Porém, mesmo na hipótese do modelo dinâmico completo estar disponível, o emprego de técnicas de controle não linear pode acarretar um custo computacional muito elevado [3, 7, 12]. Este paradigma, aliado à falta de estratégias de controle apropriadas para esse tipo de mecanismos, resulta na exploração insatisfatória dos potenciais promissores de tais máquinas, como resposta dinâmica rápida e alta precisão [19]. Além disso, observa-se na literatura a escassez de trabalhos publicados com comprovação experimental de técnicas de controle aplicáveis a mecanismos paralelos [1].

Uma alternativa para a superação desta dificuldade seria a combinação de técnicas de controle não linear robusto (por exemplo, controle por modos deslizantes [12, 13]) com modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos, desenvolvidos a partir de novas metodologias de modelagem de sistemas multicorpos [6, 23, 24, 25]. Com esta estratégia, torna-se possível sintetizar leis de controle de alto desempenho e custo computacional mais adequado, viabilizando a exploração do potencial promissor dos mecanismos paralelos.

## 2 Objetivos

Os principais objetivos do projeto são:

- Desenvolvimento de um algoritmo gerador de modelos dinâmicos completos de mecanismos paralelos, de forma explícita. Pretende-se utilizar a metodologia proposta por Orsino et. al. [25] de acoplamento de subsistemas multicorpos.
- Elaboração de uma metodologia de projeto de controlador não linear robusto, de alto desempenho, baseado na técnica de controle por modos deslizantes [12, 13], aplicável a mecanismos de arquitetura paralela. Para tanto, serão consideradas as incertezas paramétricas e a possibilidade de atuação redundante [17], além da síntese de leis de controle com custo computacional consideravelmente menor do que as tradicionais, que empregam o Controle por Torque Computado [3, 7].
- Realizar a modelagem cinemática e dinâmica do mecanismo  $2\underline{R}\underline{S}U+\underline{P}PaP$  [11], utilizando o algoritmo de modelagem desenvolvido.
- Realizar o projeto de um controlador de trajetória para o mecanismo escolhido, utilizando a metodologia de projeto de controle proposta.
- Realizar simulações dinâmicas das leis de controle sintetizadas.
- Realizar a validação experimental do controlador projetado no protótipo do mecanismo escolhido, que se encontra no laboratório de mecanismos.

É importante ressaltar que os dois primeiros objetivos citados já foram alcançados e que a arquitetura paralela  $2\underline{R}\underline{S}U+\underline{P}PaP$  foi desenvolvida pelo grupo de pesquisa do Prof. Dr. Tarcio Antonio Hess Coelho, havendo ainda poucos estudos na literatura sobre ela. Sendo assim, pode-se afirmar que simulações dinâmicas e validações experimentais de leis de controle não-linear robusto neste mecanismo tem caráter inédito.

### 3 Metodologia do projeto

O estágio atual de desenvolvimento do presente projeto ocorre basicamente em três áreas: a realização da modelagem e simulação cinemática e dinâmica do mecanismo  $2\text{RSU} + \text{PPaP}$  [11], o projeto de um controlador não linear robusto de alto desempenho baseado no modelo dinâmico, e a validação experimental das leis de controle sintetizadas.

Os trabalhos no âmbito de modelagem e simulação estão sendo desenvolvidos a partir da aplicação do algoritmo genérico de modelagem cinemática e dinâmica de mecanismos paralelos desenvolvido, baseado na utilização dos parâmetros de Denavit-Hartenberg [3, 15, 16] e no método Orsino de acoplamento de subsistemas [25]. Toda modelagem será feita em Python, utilizando uma biblioteca de manipulação simbólica (SymPy). As simulações da dinâmica direta do mecanismo serão feitas utilizando métodos implícitos de solução de sistemas de EDOs, de modo a garantir estabilidade numérica do método, mesmo utilizando leis de controle descontínuas.

Os trabalhos na área de projeto de controle serão feitos utilizando a metodologia desenvolvida de projeto de controladores robustos multivariáveis para mecanismos paralelos, baseada no modelo dinâmico do mecanismo a ser controlado e na técnica de controle por modos deslizantes [12, 13].

Os trabalhos no âmbito da validação experimental das leis de controle sintetizadas serão realizados no protótipo do mecanismo  $2\text{RSU} + \text{PPaP}$  que encontra-se no laboratório de mecanismos. A bancada experimental já está funcional e já estão sendo realizados ensaios de leis de controle de trajetória baseadas apenas no modelo cinemático do mecanismo. Para realização da validação experimental, será realizada a identificação dos parâmetros do sistema e suas respectivas incertezas, projeto do controlador baseado nos parâmetros e incertezas identificadas, e implementação das leis de controle e aquisição de dados em ambiente Labview.

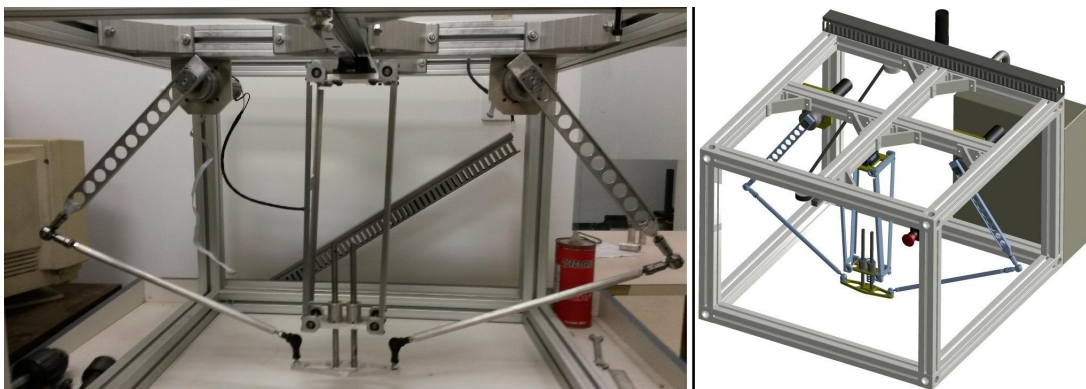


Figura 2: Mecanismo  $2\text{RSU} + \text{PPaP}$

## 4 Síntese de Resultados

Esta seção apresenta uma síntese dos principais resultados teóricos obtidos até o momento.

### Convenções de notação

$a, b, \dots$	Escalares, componentes de matrizes coluna, componentes de matrizes ou índices
$A, B, \dots$	Escalares, componentes de matrizes coluna, componentes de matrizes
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$	Matrizes coluna
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$	Matrizes
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Vetores
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Tensores
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Pontos
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Sistemas de coordenadas
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Corpos rígidos ou referenciais
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Sistemas ou subsistemas mecânicos multicorpos
$\underline{a}$	Matriz diagonal cuja diagonal é composta pelos parâmetros $a_1, a_2, \dots, a_n$
$\mathcal{C}^s$	Classe de diferenciabilidade
$\mathbf{c}_i$	Abreviação de $\cos(\theta_i)$
$\mathbf{c}_{i+j}$	Abreviação de $\cos(\theta_i + \theta_j)$
$\mathbf{d}$	Operador diferencial
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz coluna cujos elementos são a diagonal de uma matriz quadrada
$\delta$	Operador variacional
$g$	Aceleração gravitacional
$[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}$	Matriz-coluna formada pelas coordenadas do ponto $\mathbf{p}$ no sistema de coordenadas $\mathbf{B}$ .
$[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}}$	Matriz-coluna formada pelas coordenadas do ponto $\mathbf{p}$ no sistema de coordenadas $\mathbf{B}$ em coordenadas homogêneas, ou seja: $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} \\ 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{s}_i$	Abreviação de $\sin(\theta_i)$
$\mathbf{s}_{i+j}$	Abreviação de $\sin(\theta_i + \theta_j)$
$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$	Vetor $\mathbf{v}$ escrito na base do sistema de coordenadas $\mathbf{B}$

$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B} \mathbf{B}}^{\mathbf{S}}$	Matriz de produto vetorial, tal que: $[\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}} = [\mathbf{v}_1]_{\mathbf{B} \mathbf{B}}^{\mathbf{S}} [\mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}}$ . É dada por:
$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B} \mathbf{B}}^{\mathbf{S}} =$	$\begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$ , sendo $v_x, v_y$ e $v_z$ as componentes de $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$
$[\mathbf{v}]^{\mathbf{D}}$	Matriz diagonal cuja diagonal é composta pelos elementos da matriz coluna $\mathbf{v}$
$\mathbf{0}$	Matriz coluna nula ou matriz nula
$\mathbf{0}$	Vetor nulo ou tensor nulo
$\mathbb{1}$	Matriz identidade
$[\mathbb{1}]_{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j}$	Matriz de mudança de base, i.e. $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_i} = [\mathbb{1}]_{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_j}$
$[\mathbb{1}]_{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j}^{\mathbf{H}}$	Matriz de transformação homogênea, i.e. $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_i}^{\mathbf{H}} = [\mathbb{1}]_{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j}^{\mathbf{H}} \cdot [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_j}^{\mathbf{H}}$
$\mathbf{1}$	Tensor identidade
$[\cdot]^{\mathbf{T}}$	Matriz transposta
$[\cdot]^{-1}$	Matriz inversa
$[\cdot]^{\dagger}$	Matriz pseudo-inversa
$[\emptyset]$	Matriz coluna vazia ou matriz vazia

## 4.1 Algoritmo para modelagem de mecanismos seriais

Para explicar o algoritmo desenvolvido é necessário primeiro definir uma série de conceitos:

Seja  $\mathcal{B}$  um sistema mecânico serial de  $\nu^{\#}$  graus de liberdade. Definimos:

- $\mathcal{N}$ : referencial inercial.
- $\mathbf{N}$ : sistema de coordenadas fixo a  $\mathcal{N}$ .
- $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, \nu^{\#}$ : i-ésima barra do mecanismo serial.
- $\mathbf{g}_i, i = 1, \dots, \nu^{\#}$ : centro de massa da i-ésima barra.
- $\mathbf{x}$ : ponto no espaço fixo ao efetuador.
- $\mathbf{B}_i, i = 1, \dots, \nu^{\#}$ : sistema de coordenadas solidário a  $\mathcal{B}_i$  com origem no centro da i-ésima junta e eixos paralelos às direções principais de inércia de  $\mathcal{B}_i$ .
- $m_i$ : massa da barra  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbf{I}_i$ : tensor de inércia da barra  $\mathcal{B}_i$ .



- $\boldsymbol{\omega}_i$ : vetor velocidade angular absoluta da barra  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbf{v}_i$ : vetor velocidade linear absoluta do centro de massa  $\mathbf{g}_i$ .
- $\mathbf{a}_i$ : vetor aceleração linear absoluta do centro de massa  $\mathbf{g}_i$ .
- $\boldsymbol{\omega}$ : matriz-coluna contendo as componentes não nulas de  $[\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathcal{B}_i}$ , com  $i = 1, \dots, \nu^\#$ .
- $\boldsymbol{\nu}$ : matriz-coluna contendo as componentes não nulas de  $[\mathbf{v}_i]_{\mathcal{N}}$ , com  $i = 1, \dots, \nu^\#$ .
- $\mathbf{q}^\#$ : matriz-coluna de  $\nu^\#$  coordenadas generalizadas independentes. Contém os deslocamentos angulares relativos das juntas rotativas e os deslocamentos lineares relativos das juntas prismáticas.
- $\mathbf{q}^\circ$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas redundantes. Contém as coordenadas dos centros de massa das barras do mecanismo escritas no sistema  $\mathcal{N}$ .
- $\mathbf{q}$ : matriz-coluna contendo todas as coordenadas generalizadas. É definida por  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{\#T} & \mathbf{q}^{\circ T} \end{bmatrix}^T$
- $\mathbf{p}^\#$ : matriz-coluna de  $\nu^\#$  velocidades generalizadas independentes. É dada por  $\mathbf{p}^\# = \dot{\mathbf{q}}^\#$ .
- $\mathbf{p}^\circ$ : matriz-coluna de velocidades generalizadas redundantes. É definida por  $\mathbf{p}^\circ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^T & \boldsymbol{\nu}^T \end{bmatrix}^T$
- $\mathbf{p}$ : matriz-coluna contendo todas as velocidades generalizadas. É definida por  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{\#T} & \mathbf{p}^{\circ T} \end{bmatrix}^T$
- $\underline{\mathbf{p}}^\circ(\mathbf{q}^\#, \mathbf{p}^\#)$ :  $\mathbf{p}^\circ$  escrito em função de  $\mathbf{q}^\#$  e  $\mathbf{p}^\#$ .
- $\mathbf{A}(\mathbf{q}^\#)$ : Jacobiano dos vínculos de velocidades.
- $\mathbb{C}(\mathbf{q}^\#)$ : complemento ortogonal do Jacobiano dos vínculos de velocidades. Além disso  $\mathbf{p} = \mathbb{C}(\mathbf{q}^\#)\mathbf{p}^\#$ .
- $\mathbb{M}$ : matriz de inércia desacoplada.
- $\mathbf{v}(\mathbf{p}^\#)$ : vetor dos termos giroscópicos desacoplados.
- $\mathbf{f}(\mathbf{q}^\#)$ : vetor dos esforços de atrito aplicados na direção oposta a  $\mathbf{p}$ .
- $\mathbf{g}$ : vetor dos esforços gravitacionais aplicados na direção oposta a  $\mathbf{p}$ .
- $\mathbf{u}$ : esforços ativos externos aplicados na direção de  $\mathbf{p}^\#$ .

O algoritmo é baseado na metodologia de Orsino baseada nas equações de Gibbs-Appell e Maggi para modelagem dos subsistemas seriais. O modelo para simulação dinâmica direta é dado pelo seguinte equacionamento:

$$\begin{cases} \mathbb{C}^T(\mathfrak{q}^\#) \left( \mathbb{M} \dot{\mathfrak{p}} + \mathfrak{v}(\mathfrak{p}^\#) + \mathfrak{f}(\mathfrak{p}^\#) + \mathfrak{g} \right) = \mathfrak{u} \\ \mathbb{A}(\mathfrak{q}^\#) \dot{\mathfrak{p}} = \mathbb{b}(\mathfrak{q}^\#, \mathfrak{p}^\#) \end{cases} \quad (1)$$

Sendo:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial \mathfrak{p}^\circ}{\partial \mathfrak{p}^\#} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathfrak{p}^\circ}{\partial \mathfrak{p}^\#} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbb{b} = -\dot{\mathbb{A}}(\mathfrak{q}^\#, \mathfrak{p}^\#) \mathfrak{p} \quad (4)$$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu^\#} \left( m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + 2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \wedge \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \right) \quad (5)$$

$$\mathbb{M} = \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\mathfrak{p}}^2} \quad (6)$$

$$\mathfrak{v} = \frac{\partial S}{\partial \dot{\mathfrak{p}}} - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\mathfrak{p}}^2} \dot{\mathfrak{p}} \quad (7)$$

Aqui seguem as etapas do algoritmo para dedução do modelo dinâmico de um subsistema serial acompanhado de um exemplo de aplicação no mecanismo RR:

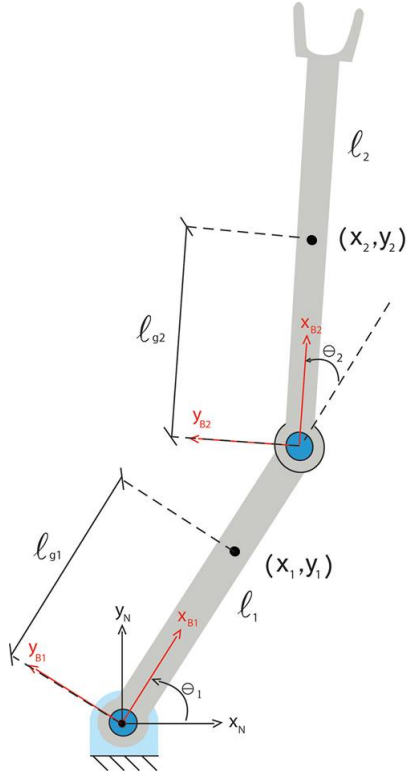


Figura 3: Mecanismo RR

1) Definição das coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q}^\# = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{q}^\circ = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

2) Definição das velocidades generalizadas:

$$\mathbf{p}^\# = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{p}^\circ = \begin{bmatrix} \omega_{z1} & \omega_{z2} & v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

3) Cinemática de posição dos centros de massa e do efetuador utilizando matrizes de transformação homogênea:

$$[\mathbf{g}_1]_{B_1}^H = \begin{bmatrix} l_{g1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

$$[\mathbf{g}_2]_{B_2}^H = \begin{bmatrix} l_{g2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

$$[\mathbf{x}]_{B_2}^H = \begin{bmatrix} l_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$$[\mathbb{1}]_{N|B_1}^H = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[\mathbb{1}]_{B_1|B_2}^H = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[\mathbb{1}]_{N|B_2}^H = [\mathbb{1}]_{N|B_1}^H [\mathbb{1}]_{B_1|B_2}^H = \begin{bmatrix} c_{1+2} & -s_{1+2} & 0 & l_1 c_1 \\ s_{1+2} & c_{1+2} & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[g_1]_N^H = [\mathbb{1}]_{N|B_1}^H [g_1]_{B_1}^H = \begin{bmatrix} l_{g1} c_1 \\ l_{g1} s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[g_2]_N^H = [\mathbb{1}]_{N|B_2}^H [g_2]_{B_2}^H = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{g2} c_{1+2} \\ l_1 s_1 + l_{g2} s_{1+2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[x]_N^H = [\mathbb{1}]_{N|B_2}^H [x]_{B_2}^H = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{1+2} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{1+2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

4) Cinemática de velocidades dos centros de massa:

$$[\underline{\mathbf{v}}_1]_{\mathbf{N}} = \frac{d}{dt} [\underline{\mathbf{g}}_1]_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} -l_{g1} \mathbf{s}_1 \dot{\theta}_1 \\ l_{g1} \mathbf{c}_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[\underline{\mathbf{v}}_2]_{\mathbf{N}} = \frac{d}{dt} [\underline{\mathbf{g}}_2]_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} -l_1 \mathbf{s}_1 \dot{\theta}_1 - l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 \mathbf{c}_1 \dot{\theta}_1 + l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

5) Cinemática de velocidades angulares das barras:

$$[\underline{\boldsymbol{\omega}}_1]_{\mathbf{B}_1 | \mathbf{B}_1}^{\mathbf{S}} = [\underline{\mathbb{1}}]_{\mathbf{N} | \mathbf{B}_1}^{\mathbf{T}} \frac{d}{dt} [\underline{\mathbb{1}}]_{\mathbf{N} | \mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\underline{\boldsymbol{\omega}}_1]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[\underline{\boldsymbol{\omega}}_2]_{\mathbf{B}_2 | \mathbf{B}_2}^{\mathbf{S}} = [\underline{\mathbb{1}}]_{\mathbf{N} | \mathbf{B}_2}^{\mathbf{T}} \frac{d}{dt} [\underline{\mathbb{1}}]_{\mathbf{N} | \mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\underline{\boldsymbol{\omega}}_2]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

6) Montar o vetor  $\underline{\mathbb{p}}^\circ(\mathfrak{q}^\#, \mathfrak{p}^\#)$  e calcular  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{b}$  através das equações (2), (3) e (4):

$$\underline{\mathbb{p}}^\circ(\mathfrak{q}^\#, \mathfrak{p}^\#) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ -l_{g1} \mathbf{s}_1 \dot{\theta}_1 \\ l_{g1} \mathbf{c}_1 \dot{\theta}_1 \\ -l_1 \mathbf{s}_1 \dot{\theta}_1 - l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 \mathbf{c}_1 \dot{\theta}_1 + l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \underline{\mathbb{p}}^\circ}{\partial \mathfrak{p}^\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -l_{g1} \mathbf{s}_1 & 0 \\ l_{g1} \mathbf{c}_1 & 0 \\ -l_1 \mathbf{s}_1 - l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} & -l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} \\ l_1 \mathbf{s}_1 + l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} & l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -l_{g1}\mathbf{s}_1 & 0 \\ l_{g1}\mathbf{c}_1 & 0 \\ -l_1\mathbf{s}_1 - l_{g2}\mathbf{s}_{1+2} & -l_{g2}\mathbf{s}_{1+2} \\ l_1\mathbf{s}_1 + l_{g2}\mathbf{c}_{1+2} & l_{g2}\mathbf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{g1}\mathbf{s}_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{g1}\mathbf{c}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1\mathbf{s}_1 - l_{g2}\mathbf{s}_{1+2} & -l_{g2}\mathbf{s}_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ l_1\mathbf{c}_1 + l_{g2}\mathbf{c}_{1+2} & l_{g2}\mathbf{c}_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{g1}\mathbf{c}_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_{g1}\mathbf{s}_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_1\mathbf{c}_1\dot{\theta}_1^2 + l_{g2}\mathbf{c}_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1\mathbf{s}_1\dot{\theta}_1^2 + l_{g2}\mathbf{s}_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

7) Calcular a energia de acelerações  $S$ :

$$S = \frac{1}{2} \left( m_1(\dot{v}_{x1}^2 + \dot{v}_{y1}^2) + m_2(\dot{v}_{x2}^2 + \dot{v}_{y2}^2) + J_{z1}\dot{\omega}_{z1}^2 + J_{z2}\dot{\omega}_{z2}^2 \right) \quad (30)$$

8) Obter  $\mathbb{M}$  e  $\mathbb{v}$  utilizando as equações (6) e (7):

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{z1} & J_{z2} & m_1 & m_1 & m_2 & m_2 \end{bmatrix}^D \quad (31)$$

$$\mathbb{v} = \mathbb{0} \quad (32)$$

9) Montar os vetores  $\mathbb{f}$ ,  $\mathbb{g}$  e  $\mathbb{u}$ :

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} c_1 \dot{\theta}_1 + \gamma_1 \text{sign}(\dot{\theta}_1) \\ c_2 \dot{\theta}_2 + \gamma_2 \text{sign}(\dot{\theta}_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbb{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_1 g \\ 0 \\ m_2 g \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbb{u} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Sendo assim, a partir da equação (1), temos que o modelo para simulação dinâmica direta do mecanismo RR é dado por:

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -l_{g1}s_1 & 0 \\ l_{g1}c_1 & 0 \\ -l_1s_1 - l_{g2}s_{1+2} & -l_{g2}s_{1+2} \\ l_1s_1 + l_{g2}c_{1+2} & l_{g2}c_{1+2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{z1} \\ J_{z2} \\ m_1 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_2 \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_{z1} \\ \dot{\omega}_{z2} \\ \dot{v}_{x1} \\ \dot{v}_{y1} \\ \dot{v}_{x2} \\ \dot{v}_{y2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1\dot{\theta}_1 + \gamma_1 \text{sign}(\dot{\theta}_1) \\ c_2\dot{\theta}_2 + \gamma_2 \text{sign}(\dot{\theta}_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_1g \\ 0 \\ m_2g \end{bmatrix} \Bigg\} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{g1}s_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{g1}c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -l_1s_1 - l_{g2}s_{1+2} & -l_{g2}s_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ l_1c_1 + l_{g2}c_{1+2} & l_{g2}c_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_{z1} \\ \dot{\omega}_{z2} \\ \dot{v}_{x1} \\ \dot{v}_{y1} \\ \dot{v}_{x2} \\ \dot{v}_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{g1}c_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_{g1}s_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_1c_1\dot{\theta}_1^2 + l_{g2}c_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1s_1\dot{\theta}_1^2 + l_{g2}s_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (36)$$

## 4.2 Algoritmo para modelagem de mecanismos paralelos

Para realizar a modelagem de mecanismos paralelos a partir de subsistemas seriais já deduzidos, é necessário introduzir mais alguns conceitos:

Sejam  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$   $n+1$  subsistemas mecânicos e  $\mathcal{M}$  um sistema mecânico de  $\nu^\#$  graus de liberdade gerado pelo acoplamento dos subsistemas citados. Definimos:

- $\mathbf{q}_r$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas que descrevem a orientação da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ . Normalmente é dada pelas componentes de um quaternion unitário, i.e.  $\mathbf{q}_r = [q_i \ q_j \ q_k \ q_r]^T$  com  $\mathbf{q}_r^T \cdot \mathbf{q}_r = [1]$ .
- $\mathbf{q}_t$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas que descrevem a posição da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ .
- $\mathbf{q}_0$ : matriz-coluna de todas as coordenadas generalizadas da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ . É definida como  $\mathbf{q}_0 = [\mathbf{q}_r^T \ \mathbf{q}_t^T]^T$ .
- $\mathbf{q}_j^\#, j = 1, \dots, n$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas independentes do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .



- $\mathbf{q}^\circ$ : matriz-coluna de coordenadas generalizadas redundantes não pertencentes à plataforma/efetuador. Definida como  $\mathbf{q}^\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^{\#T} & \dots & \mathbf{q}_n^{\#T} \end{bmatrix}^T$ .
- $\mathbf{q}$ : matriz-coluna contendo todas as coordenadas generalizadas do sistema  $\mathcal{M}$ . Definida como  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0^T & \mathbf{q}^\circ T \end{bmatrix}^T$ .
- $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$ : matriz-coluna dos vínculos de posição entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ .
- $\mathbf{p}_r$ : matriz-coluna de velocidades generalizadas associadas a movimentos de rotação (instantânea) em torno do centro de massa da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ . Respeita  $\mathbf{p}_r = \mathbb{D}(\mathbf{q}_r)\dot{\mathbf{q}}_r$ , sendo  $\mathbb{D}(\mathbf{q}_r)$  uma matriz de posto completo com número de colunas maior ou igual ou número de linhas tal que  $\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbb{D}^\dagger(\mathbf{q}_r)\mathbf{p}_r$ .
- $\mathbf{p}_t$ : matriz-coluna de velocidades generalizadas associadas à translação do centro de massa de  $\mathcal{B}_0$ . É dada por  $\mathbf{p}_t = \dot{\mathbf{q}}_t$ .
- $\mathbf{p}_0^\#$ : matriz-coluna de todas as velocidades generalizadas independentes da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ . É definida como  $\mathbf{p}_0^\# = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_r^T & \mathbf{p}_t^T \end{bmatrix}^T$ .
- $\mathbf{p}_0^\circ$ : matriz-coluna de velocidades generalizadas redundantes da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ . É dada por  $\mathbf{p}_0^\circ = \dot{\mathbf{q}}_r$ .
- $\mathbf{p}_j^\#$ ,  $j = 1, \dots, n$ : matriz-coluna de velocidades generalizadas independentes do subsistema  $\mathcal{B}_j$ . É definida por  $\mathbf{p}_j^\# = \dot{\mathbf{q}}_j^\#$ .
- $\mathbf{p}_j^\circ$ ,  $j = 1, \dots, n$ : matriz-coluna de velocidades generalizadas redundantes do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbf{p}_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ : matriz-coluna de velocidades generalizadas do subsistema  $\mathcal{B}_j$ . É definida por  $\mathbf{p}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_j^{\#T} & \mathbf{p}_j^{\circ T} \end{bmatrix}^T$ .
- $\mathbf{p}^\#$ : matriz-coluna de  $\nu^\#$  velocidades generalizadas independentes de  $\mathcal{M}$ . É dada por  $\mathbf{p}^\# = \mathbf{p}_0^\#$ .
- $\mathbf{p}^\circ$ : matriz-coluna de velocidades generalizadas redundantes de  $\mathcal{M}$ . É definida por  $\mathbf{p}^\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^{\circ T} & \mathbf{p}_1^T & \dots & \mathbf{p}_n^T \end{bmatrix}^T$ .
- $\mathbf{p}$ : matriz-coluna contendo todas as velocidades generalizadas de  $\mathcal{M}$ . É definida por  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{\#T} & \mathbf{p}^{\circ T} \end{bmatrix}^T$ .
- $\mathbf{p}$ : matriz-coluna definida como  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{\#T} & \mathbf{p}^{\circ T} \end{bmatrix}^T$ , sendo  $\mathbf{p}^\# = \mathbf{p}_0^\#$  e  $\mathbf{p}^\circ = \dot{\mathbf{q}}^\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{\#T} & \dots & \mathbf{p}_n^{\#T} \end{bmatrix}^T$ .

- $\underline{\dot{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ :  $\dot{q}$  escrita em função de  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$ .
- $\underline{\omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ : matriz-coluna dos vínculos de orientação entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por  $\underline{\omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ .
- $\underline{\bar{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ : matriz-coluna de todos os vínculos de velocidades entre subsistemas. As equações vinculares são dadas por  $\underline{\bar{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ .
- $\underline{A}_j(\mathbf{q})$ ,  $j = 0, \dots, n$ : Jacobiano dos vínculos de velocidades do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\underline{C}_j(\mathbf{q})$ ,  $j = 0, \dots, n$ : complemento ortogonal do Jacobiano dos vínculos de velocidades do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\underline{M}_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ : matriz de inércia desacoplada do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\underline{v}_j(\mathbf{p})$ ,  $j = 0, \dots, n$ : matriz-coluna dos termos giroscópicos desacoplados do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\underline{f}_j(\mathbf{q})$ ,  $j = 0, \dots, n$ : matriz-coluna dos esforços de atrito do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\underline{g}_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ : matriz-coluna dos esforços gravitacionais do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\underline{u}_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ : matriz-coluna dos esforços ativos externos do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .

O modelo para simulação dinâmica direta é dado pelo seguinte equacionamento:

$$\begin{cases} \mathbb{C}^T(\mathbf{q}) \left( \underline{M} \dot{\mathbf{p}} + \underline{v}(\mathbf{p}) + \underline{f}(\mathbf{p}) + \underline{g} \right) = \check{\mathbb{C}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{u} \\ \underline{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{p}} = \underline{b}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases} \quad (37)$$

Sendo:

$$\underline{\dot{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^\dagger \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_t \\ \mathbf{p}_1^\# \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^\dagger & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_t \\ \mathbf{p}_1^\# \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^\dagger & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad (38)$$

$$\underline{\bar{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \underline{\dot{q}} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\check{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\partial \bar{p}^\dagger}{\partial \mathbf{p}^\circ} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{p}^\#} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{C}_n \end{bmatrix} \check{\mathbb{C}} \quad (41)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \bar{\mathbb{p}}}{\partial \mathbb{p}} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbb{b} = -\dot{\mathbb{A}}(\mathbf{q}, \mathbb{p})\mathbb{p} \quad (43)$$

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{M}_n \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\mathbb{v} = \begin{bmatrix} \mathbb{v}_0^T & \mathbb{v}_1^T & \dots & \mathbb{v}_n^T \end{bmatrix}^T \quad (45)$$

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} \mathbb{f}_0^T & \mathbb{f}_1^T & \dots & \mathbb{f}_n^T \end{bmatrix}^T \quad (46)$$

$$\mathbb{g} = \begin{bmatrix} \mathbb{g}_0^T & \mathbb{g}_1^T & \dots & \mathbb{g}_n^T \end{bmatrix}^T \quad (47)$$

$$\mathbb{u} = \begin{bmatrix} \mathbb{u}_0^T & \mathbb{u}_1^T & \dots & \mathbb{u}_n^T \end{bmatrix}^T \quad (48)$$

Aqui seguem as etapas do algoritmo para dedução do modelo dinâmico de um mecanismo paralelo acompanhado de um exemplo de aplicação, a dedução do modelo dinâmico do mecanismo 5R (pentágono articulado) a partir do acoplamento dos modelos de 2 mecanismos RR e uma massa pontual (efetuator).

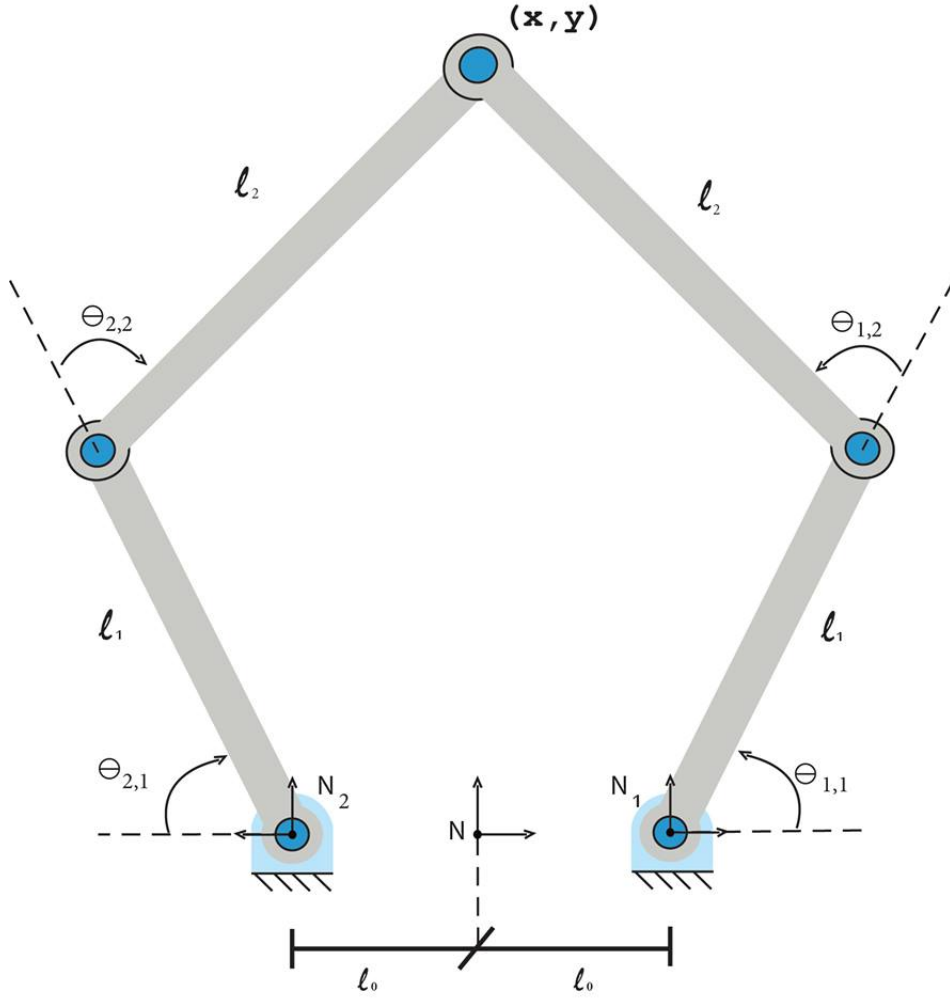


Figura 4: Mecanismo 5R

O modelo do mecanismo RR é dado pela equação (36). O modelo da massa pontual é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_0 \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_0 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Etapas do algoritmo:

1) Definição das coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q}_r = [\emptyset] \quad (50)$$

$$\mathbf{q}_t = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \quad (51)$$

$$\mathbf{q}_1^\# = \begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} \end{bmatrix}^T \quad (52)$$

$$\mathfrak{q}_2^\# = \begin{bmatrix} \theta_{2,1} & \theta_{2,2} \end{bmatrix}^\top \quad (53)$$

2) Definição das velocidades generalizadas:

$$\mathfrak{p}_r = [\emptyset] \quad (54)$$

$$\mathfrak{p}_t = \dot{\mathfrak{q}}_t = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}^\top \quad (55)$$

$$\mathfrak{p}_1^\circ = \begin{bmatrix} \omega_{1,z1} & \omega_{1,z2} & v_{1,x1} & v_{1,y1} & v_{1,x2} & v_{1,y2} \end{bmatrix}^\top \quad (56)$$

$$\mathfrak{p}_2^\circ = \begin{bmatrix} \omega_{2,z1} & \omega_{2,z2} & v_{2,x1} & v_{2,y1} & v_{2,x2} & v_{2,y2} \end{bmatrix}^\top \quad (57)$$

3) Definição dos vínculos de posição entre subsistemas utilizando matrizes de transformação homogênea:

$$[\mathbb{1}]_{N|N_1}^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$[\mathbb{1}]_{N|N_2}^H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$[\mathbf{x}_0]_N = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$[\mathbf{x}_1]_{N_1} = \begin{bmatrix} l_1 \mathbf{c}_{1,1} + l_2 \mathbf{c}_{1,1+2} \\ l_1 \mathbf{s}_{1,1} + l_2 \mathbf{s}_{1,1+2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$[\mathbf{x}_2]_{N_2} = \begin{bmatrix} l_1 \mathbf{c}_{2,1} + l_2 \mathbf{c}_{2,1+2} \\ l_1 \mathbf{s}_{2,1} + l_2 \mathbf{s}_{2,1+2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$[\mathbf{x}_1]_N^H = [\mathbb{1}]_{N|N_1}^H [\mathbf{x}_1]_{N_1}^H = \begin{bmatrix} l_0 + l_1 c_{1,1} + l_2 c_{1,1+2} \\ l_1 s_{1,1} + l_2 s_{1,1+2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$[\mathbf{x}_2]_N^H = [\mathbb{1}]_{N|N_2}^H [\mathbf{x}_2]_{N_2}^H = \begin{bmatrix} -l_0 - l_1 c_{2,1} - l_2 c_{2,1+2} \\ l_1 s_{2,1} + l_2 s_{2,1+2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Vínculos de posição:

$$\begin{cases} [\mathbf{x}_0]_N = [\mathbf{x}_1]_N \\ [\mathbf{x}_0]_N = [\mathbf{x}_2]_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = l_0 + l_1 c_{1,1} + l_2 c_{1,1+2} \\ y = l_1 s_{1,1} + l_2 s_{1,1+2} \\ x = -l_0 - l_1 c_{2,1} - l_2 c_{2,1+2} \\ y = l_1 s_{2,1} + l_2 s_{2,1+2} \end{cases} \quad (65)$$

$$\therefore \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x - l_0 - l_1 c_{1,1} - l_2 c_{1,1+2} \\ y - l_1 s_{1,1} - l_2 s_{1,1+2} \\ x + l_0 + l_1 c_{2,1} + l_2 c_{2,1+2} \\ y - l_1 s_{2,1} - l_2 s_{2,1+2} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (66)$$

4) Definição dos vínculos de orientação entre subsistemas:

$$\bar{\omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = [\emptyset] \quad (67)$$

Nesse exemplo não há vínculos de orientação entre subsistemas.

5) Cálculo dos Jacobianos dos vínculos de posição e definição dos vínculos de velocidades através de (39):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 s_{1,1} + l_2 s_{1+2} & l_2 s_{1+2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 c_{1,1} - l_2 c_{1+2} & -l_2 c_{1+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -l_1 s_{2,1} - l_2 s_{2+2} & -l_2 s_{2+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -l_1 c_{2,1} - l_2 c_{2+2} & -l_2 c_{2+2} \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\dot{\underline{q}}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\theta}_{1,1} & \dot{\theta}_{1,2} & \dot{\theta}_{2,1} & \dot{\theta}_{2,2} \end{bmatrix}^T \quad (69)$$

$$\bar{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 \mathfrak{s}_{1,1} + l_2 \mathfrak{s}_{1+2} & l_2 \mathfrak{s}_{1+2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 \mathfrak{c}_{1,1} - l_2 \mathfrak{c}_{1+2} & -l_2 \mathfrak{c}_{1+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -l_1 \mathfrak{s}_{2,1} - l_2 \mathfrak{s}_{2+2} & -l_2 \mathfrak{s}_{2+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -l_1 \mathfrak{c}_{2,1} - l_2 \mathfrak{c}_{2+2} & -l_2 \mathfrak{c}_{2+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_{1,1} \\ \dot{\theta}_{1,2} \\ \dot{\theta}_{2,1} \\ \dot{\theta}_{2,2} \end{bmatrix} = \mathbb{0} \quad (70)$$

6) Cálculo de  $\check{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{b}$  através de (40), (41), (42) e (43):

$$\check{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\mathfrak{c}_{1,1+2}}{l_1 \mathfrak{s}_{1,2}} & \frac{\mathfrak{s}_{1,1+2}}{l_1 \mathfrak{s}_{1,2}} \\ -\frac{l_1 \mathfrak{c}_{1,1} + l_2 \mathfrak{c}_{1,1+2}}{l_1 l_2 \mathfrak{s}_{1,2}} & -\frac{l_1 \mathfrak{s}_{1,1} + l_2 \mathfrak{s}_{1,1+2}}{l_1 l_2 \mathfrak{s}_{1,2}} \\ \frac{\mathfrak{c}_{2,1+2}}{l_1 \mathfrak{s}_{2,2}} & \frac{\mathfrak{s}_{2,1+2}}{l_1 \mathfrak{s}_{2,2}} \\ \frac{l_1 \mathfrak{c}_{2,1} + l_2 \mathfrak{c}_{2,1+2}}{l_1 l_2 \mathfrak{s}_{2,2}} & -\frac{l_1 \mathfrak{s}_{2,1} + l_2 \mathfrak{s}_{2,1+2}}{l_1 l_2 \mathfrak{s}_{2,2}} \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\mathbb{C} = \left[ \begin{array}{cc}
1 & 0 \\
0 & 1 \\
\frac{\underline{c_{1,1+2}}}{\underline{l_1 s_{1,2}}} & \frac{\underline{s_{1,1+2}}}{\underline{l_1 s_{1,2}}} \\
\frac{l_1 c_{1,1} + l_2 c_{1,1+2}}{\underline{l_1 l_2 s_{1,2}}} & \frac{l_1 s_{1,1} + l_2 s_{1,1+2}}{\underline{l_1 l_2 s_{1,2}}} \\
\frac{\underline{c_{1,1+2}}}{\underline{l_1 s_{1,2}}} & \frac{\underline{s_{1,1+2}}}{\underline{l_1 s_{1,2}}} \\
\frac{\underline{c_{\theta_{1,1}}}}{\underline{l_2 s_{1,2}}} & \frac{\underline{s_{\theta_{1,1}}}}{\underline{l_2 s_{1,2}}} \\
\frac{l_{g1} s_{1,1} c_{1,1+2}}{\underline{l_1 s_{1,2}}} & \frac{l_{g1} s_{1,1} s_{1,1+2}}{\underline{l_1 s_{1,2}}} \\
\frac{l_{g1} c_{1,1} c_{1,1+2}}{\underline{l_1 s_{1,2}}} & \frac{l_{g1} c_{1,1} s_{1,1+2}}{\underline{l_1 s_{1,2}}} \\
\frac{l_2 s_{1,1} c_{1,1+2} - l_{g2} c_{1,1} s_{1,1+2}}{\underline{l_2 s_{1,2}}} & \frac{(l_2 - l_{g2}) s_{1,1} s_{1,1+2}}{\underline{l_2 s_{1,2}}} \\
\frac{(l_2 - l_{g2}) c_{1,1} c_{1,1+2}}{\underline{l_2 s_{1,2}}} & \frac{l_2 c_{1,1} s_{1,1+2} - l_{g2} s_{1,1} c_{1,1+2}}{\underline{l_2 s_{1,2}}} \\
\frac{\underline{c_{2,1+2}}}{\underline{l_1 s_{2,2}}} & \frac{\underline{s_{2,1+2}}}{\underline{l_1 s_{2,2}}} \\
\frac{l_1 c_{2,1} + l_2 c_{2,1+2}}{\underline{l_1 l_2 s_{2,2}}} & \frac{l_1 s_{2,1} + l_2 s_{2,1+2}}{\underline{l_1 l_2 s_{2,2}}} \\
\frac{\underline{c_{2,1+2}}}{\underline{l_1 s_{2,2}}} & \frac{\underline{s_{2,1+2}}}{\underline{l_1 s_{2,2}}} \\
\frac{\underline{c_{2,1}}}{\underline{l_2 s_{2,2}}} & \frac{\underline{s_{2,1}}}{\underline{l_2 s_{2,2}}} \\
\frac{l_{g1} s_{2,1} c_{2,1+2}}{\underline{l_1 s_{2,2}}} & \frac{l_{g1} s_{2,1} s_{2,1+2}}{\underline{l_1 s_{2,2}}} \\
\frac{l_{g1} c_{2,1} c_{2,1+2}}{\underline{l_1 s_{2,2}}} & \frac{l_{g1} c_{2,1} s_{2,1+2}}{\underline{l_1 s_{2,2}}} \\
\frac{l_2 s_{2,1} c_{2,1+2} - l_{g2} c_{2,1} s_{2,1+2}}{\underline{l_2 s_{2,2}}} & \frac{(l_2 - l_{g2}) s_{2,1} s_{2,1+2}}{\underline{l_2 s_{2,2}}} \\
\frac{(l_2 - l_{g2}) c_{2,1} c_{2,1+2}}{\underline{l_2 s_{2,2}}} & \frac{l_2 c_{2,1} s_{2,1+2} - l_{g2} s_{2,1} c_{2,1+2}}{\underline{l_2 s_{2,2}}} \\
\frac{\underline{l_2 s_{2,2}}}{\underline{l_2 s_{2,2}}} & \frac{\underline{l_2 s_{2,2}}}{\underline{l_2 s_{2,2}}}
\end{array} \right] \quad (72)$$



$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_{g1}s_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{g1}c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1s_1-l_{g2}s_{1+2} & -l_{g2}s_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1c_1+l_{g2}c_{1+2} & l_{g2}c_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{g1}s_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{g1}c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_1s_1-l_{g2}s_{1+2} & -l_{g2}s_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1c_1+l_{g2}c_{1+2} & l_{g2}c_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & l_1s_{1,1}+l_2s_{1+2} & l_2s_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1c_{1,1}-l_2c_{1+2} & -l_2c_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_1s_{2,1}-l_2s_{2+2} & -l_2s_{2+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_1c_{2,1}-l_2c_{2+2} & -l_2c_{2+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(73)

$$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{g1}c_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 \\ l_{g1}s_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 \\ l_1c_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 + l_{g2}c_{1,1+2}(\dot{\theta}_{1,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \\ l_1s_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 + l_{g2}s_{1,1+2}(\dot{\theta}_{1,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \\ 0 \\ 0 \\ l_{g1}c_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 \\ l_{g1}s_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 \\ l_2c_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 + l_{g2}c_{2,1+2}(\dot{\theta}_{2,1} + \dot{\theta}_{2,2})^2 \\ l_2s_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 + l_{g2}s_{2,1+2}(\dot{\theta}_{2,1} + \dot{\theta}_{2,2})^2 \\ -l_1c_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 - l_2c_{1,1+2}(\dot{\theta}_{1,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \\ -l_1s_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 - l_2s_{1,1+2}(\dot{\theta}_{1,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \\ l_1c_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 + l_2c_{2,1+2}(\dot{\theta}_{2,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \\ -l_1s_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 - l_2s_{2,1+2}(\dot{\theta}_{2,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

7) Obter  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{v}$ ,  $\mathbb{f}$ ,  $\mathbb{g}$  e  $\mathbb{u}$  através de (44), (45), (46), (47) e (48):

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} m_0 & m_0 & 0 & 0 & J_{z1} & J_{z2} & m_1 & m_1 & m_2 & m_2 & 0 & 0 & J_{z1} & J_{z2} & m_1 & m_1 & m_2 & m_2 \end{bmatrix}^D \quad (75)$$

$$\mathbb{v} = \mathbb{0} \quad (76)$$

$$\mathbb{g} = \begin{bmatrix} 0 & m_0g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1g & 0 & m_2g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1g & 0 & m_2g \end{bmatrix}^T \quad (77)$$

$$\mathbb{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \tau_{2,1} & \tau_{2,2} \end{bmatrix}^T \quad (78)$$

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \dot{\theta}_{1,1} + \gamma_1 \text{sign}(\dot{\theta}_{1,1}) \\ c_2 \dot{\theta}_{1,2} + \gamma_2 \text{sign}(\dot{\theta}_{1,2}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 \dot{\theta}_{2,1} + \gamma_1 \text{sign}(\dot{\theta}_{2,1}) \\ c_2 \dot{\theta}_{2,2} + \gamma_2 \text{sign}(\dot{\theta}_{2,2}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

### 4.3 Modelo dinâmico acoplado

Para as deduções que serão feitas nas próximas subseções, é conveniente reescrever o modelo do mecanismo da seguinte maneira:

$$\mathbb{M}^\#(\mathbf{q})\dot{\mathbf{p}}^\# + \mathbf{v}^\#(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbb{f}^\#(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbf{g}^\#(\mathbf{q}) = \mathbb{Z}^\mathsf{T}(\mathbf{q})\mathbf{u}^\star \quad (80)$$

Esse modelo é obtido utilizando a propriedade da matriz  $\mathbb{C}$  deduzida de que  $\mathbf{p} = \mathbb{C}(\mathbf{q})\mathbf{p}^\#$ . Sendo assim:

$$\mathbb{M}^\# = \mathbb{C}^\mathsf{T} \mathbb{M} \mathbb{C} \quad (81)$$

$$\mathbf{v}^\# = \mathbb{C}^\mathsf{T} (\mathbb{M} \dot{\mathbf{C}} \mathbf{p}^\# + \mathbf{v}) \quad (82)$$

$$\mathbb{f}^\# = \mathbb{C}^\mathsf{T} \mathbb{f} \quad (83)$$

$$\mathbf{g}^\# = \mathbb{C}^\mathsf{T} \mathbf{g} \quad (84)$$

Além disso, a matriz-coluna  $\mathfrak{u}^*$  é definida de modo que suas componentes sejam apenas as componentes não nulas de  $\mathfrak{u}$ . Sendo assim,  $\mathbb{Z}$  é definida da seguinte maneira:

$$\mathbb{Z} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{u}^*}^T \check{\mathbb{C}} \quad (85)$$

$\mathfrak{u}^*$  são os esforços ativos aplicados na direção de  $\dot{\mathfrak{q}}^*$ , sendo  $\mathfrak{q}^*$  uma matriz-coluna de deslocamentos relativos das juntas atuadas. Pode-se provar que <sup>1</sup>:

$$\dot{\mathfrak{q}}^* = \mathbb{Z} \mathfrak{p}^\# \quad (86)$$

#### 4.4 Inclusão da dinâmica dos atuadores

Para incluir a dinâmica de atuadores do tipo motor DC com redutor acoplado nos modelos de manipuladores seriais e plataformas paralelas, definimos os parâmetros do modelo do sistema motor-redutor:

- $L[H]$ : indutância da armadura.
- $R[\Omega]$ : resistência da armadura.
- $k_w[V \cdot s/rad]$ : constante de força contra-eletromotriz.
- $k_t[N \cdot m/A]$ : constante de torque.
- $J_m[kg \cdot m^2]$ : Momento de inércia do sistema motor-redutor medido em relação ao eixo de saída do redutor.
- $c_m[kg \cdot m^2/s]$ : Coeficiente de atrito viscoso do sistema motor-redutor medido em relação ao eixo de saída do redutor.
- $\gamma_m[N \cdot m]$ : Coeficiente de atrito seco do sistema motor-redutor medido em relação ao eixo de saída do redutor.
- $r$ : relação de redução.
- $\eta$ : eficiência do redutor

O modelo dinâmico do sistema motor-redutor é dado por:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + k_w r \dot{\theta} = v \\ J_m \ddot{\theta} + c_m \dot{\theta} + \gamma_m \text{sign}(\dot{\theta}) = \eta r k_t i - \tau_{ext} \end{cases} \quad (87)$$

Sendo  $i$  a corrente da armadura,  $v$  a tensão de entrada,  $\theta$  o deslocamento angular do eixo do redutor, e  $\tau_{ext}$  o torque externo aplicado pelo mecanismo em que o eixo de saída

---

<sup>1</sup>A prova se baseia no fato de que  $\dot{\mathfrak{q}}^* = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \dot{\mathfrak{q}}^*}^T \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p} = \check{\mathbb{C}} \mathfrak{p}^\#$  e  $\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \dot{\mathfrak{q}}^*} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{u}^*}$

do redutor está acoplado.

Seja  $\nu^*$  o número de juntas atuadas de um mecanismo  $\mathcal{M}$ . Cada um dos  $\nu^*$  motores do sistema é modelado por (87), sendo assim, podemos reescrever (87) de maneira matricial:

$$\begin{cases} \underline{L} \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \underline{R}\mathfrak{z} + \underline{k_w} r \dot{\mathfrak{q}}^* = \mathfrak{u} \\ \underline{J_m} \ddot{\mathfrak{q}}^* + \underline{c_m} \dot{\mathfrak{q}}^* + \underline{\gamma_m} \text{sign}(\dot{\mathfrak{q}}^*) = \underline{\eta r k_t} \mathfrak{z} - \mathfrak{u}^* \end{cases} \quad (88)$$

Isolando  $\mathfrak{u}^*$  e substituindo em (80), temos:

$$\mathbb{M}^\#(\mathfrak{q}) \dot{\mathfrak{p}}^\# + \mathfrak{v}^\#(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{f}^\#(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{g}^\#(\mathfrak{q}) = \mathbb{Z}^\top(\mathfrak{q}) (\underline{\eta r k_t} \mathfrak{z} - \underline{J_m} \ddot{\mathfrak{q}}^* - \underline{c_m} \dot{\mathfrak{q}}^* - \underline{\gamma_m} \text{sign}(\dot{\mathfrak{q}}^*)) \quad (89)$$

Aplicando (86) em (89), podemos reescrever (89) da seguinte maneira:

$$\mathbb{M}^{\#'}(\mathfrak{q}) \dot{\mathfrak{p}}^\# + \mathfrak{v}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{f}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{g}^\#(\mathfrak{q}) = \mathbb{Z}^\top(\mathfrak{q}) \underline{\eta r k_t} \mathfrak{z} \quad (90)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}^{\#'} = \mathbb{M}^\# + \mathbb{Z}^\top \underline{J_m} \mathbb{Z} \quad (91)$$

$$\mathfrak{v}^{\#'} = \mathfrak{v}^\# + \mathbb{Z}^\top \underline{J_m} \dot{\mathfrak{z}} \mathfrak{p}^\# \quad (92)$$

$$\mathfrak{f}^{\#'} = \mathfrak{f}^\# + \mathbb{Z}^\top \underline{c_m} \mathbb{Z} \mathfrak{p}^\# + \mathbb{Z}^\top \underline{\gamma_m} \text{sign}(\mathbb{Z} \mathfrak{p}^\#) \quad (93)$$

Portanto, o modelo do mecanismo  $\mathcal{M}$  considerando a dinâmica dos atuadores é dado por:

$$\begin{cases} \underline{L} \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \underline{R}\mathfrak{z} + \underline{k_w} r \mathbb{Z}(\mathfrak{q}) \mathfrak{p}^\# = \mathfrak{u} \\ \mathbb{M}^{\#'}(\mathfrak{q}) \dot{\mathfrak{p}}^\# + \mathfrak{v}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{f}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{g}^\#(\mathfrak{q}) = \mathbb{Z}^\top(\mathfrak{q}) \underline{\eta r k_t} \mathfrak{z} \end{cases} \quad (94)$$

## 4.5 Modelo utilizado no projeto de controle

Partindo do modelo (94), apresentado na subseção anterior, serão utilizados alguns artifícios matemáticos a fim de obter um modelo mais conveniente para a realização do projeto de controle.

A entrada do sistema é a matriz-coluna  $\mathfrak{u}$ , cujas componentes são de tensões aplicadas nos motores. Como a saída do sistema é a posição e orientação da plataforma, é conveniente que a entrada do sistema apareça na segunda equação matricial de (94). Para que isso seja possível, isolamos  $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$  na primeira equação de (94) e substituímos na derivada temporal da segunda equação:

$$\mathbb{M}^{\#'}\ddot{\mathbf{p}}^{\#} + \dot{\mathbb{M}}^{\#'}\dot{\mathbf{p}}^{\#} + \dot{\mathbf{v}}^{\#'} + \dot{\mathbf{f}}^{\#'} + \dot{\mathbf{g}}^{\#} = \dot{\mathbf{Z}}^{\top}\underline{\eta rk_t\mathfrak{i}} + \mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})(\mathbf{v} - \underline{R\mathfrak{i}} - \underline{k_w r}\mathbf{Z}\mathbf{p}^{\#})$$

$$\therefore \mathbb{M}^{\#'}\ddot{\mathbf{p}}^{\#} + \dot{\mathbb{M}}^{\#'}\dot{\mathbf{p}}^{\#} + \dot{\mathbf{v}}^{\#'} + \dot{\mathbf{f}}^{\#'} + \dot{\mathbf{g}}^{\#} + (\mathbf{Z}^{\top}(\underline{R/L}) - \dot{\mathbf{Z}}^{\top})\underline{\eta rk_t\mathfrak{i}} + \mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta r^2 k_t k_w/L})\mathbf{Z}\mathbf{p}^{\#} = \mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})\mathbf{v} \quad (95)$$

Ainda não é possível isolar  $\mathbf{v}$  em (95), pois é possível que o mecanismo  $\mathcal{M}$  tenha atuação redundante, o que implica que poderão existir mais incógnitas que equações e consequentemente infinitas soluções para  $\mathbf{v}$ . Dentro de todas as soluções para  $\mathbf{v}$  será escolhida aquela que minimiza  $\mathbf{v}^{\top}\mathbf{Q}\mathbf{v}$ , sendo  $\mathbf{Q}$  uma matriz simétrica positiva definida, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{v}} \quad & \mathbf{v}^{\top}\mathbf{Q}\mathbf{v} \\ \text{tal que} \quad & \mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})\mathbf{v} = \mathbf{z} \end{aligned} \quad (96)$$

Sendo:

$$\mathbf{z} = \ddot{\mathbf{p}}^{\#} + \dot{\mathbb{M}}^{\#'}\dot{\mathbf{p}}^{\#} + \dot{\mathbf{v}}^{\#'} + \dot{\mathbf{f}}^{\#'} + \dot{\mathbf{g}}^{\#} + (\mathbf{Z}^{\top}(\underline{R/L}) - \dot{\mathbf{Z}}^{\top})\underline{\eta rk_t\mathfrak{i}} + \mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta r^2 k_t k_w/L})\mathbf{Z}\mathbf{p}^{\#} \quad (97)$$

Aplicando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, pode-se dizer que o seguinte problema é equivalente:

$$\text{Min}_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}} \quad \mathcal{L} = \mathbf{v}^{\top}\mathbf{Q}\mathbf{v} + (\mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})\mathbf{v} - \mathbf{z})^{\top}\boldsymbol{\lambda} \quad (98)$$

Para solucionar o problema, impõe-se a estacionariedade da função lagrangeana:

$$\delta\mathcal{L} = 0 \Rightarrow \delta\mathbf{v}^{\top}\mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{v}^{\top}\mathbf{Q}\delta\mathbf{v} + (\mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})\delta\mathbf{v})^{\top}\boldsymbol{\lambda} + (\mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})\mathbf{v} - \mathbf{z})^{\top}\delta\boldsymbol{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \delta\mathbf{v}^{\top} \left( (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{\top})\mathbf{v} + (\underline{\eta rk_t/L})\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda} \right) + \delta\boldsymbol{\lambda}^{\top}(\mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})\mathbf{v} - \mathbf{z}) = 0$$

Como  $\mathbf{Q}$  é simétrica e  $\delta\mathbf{v}$  e  $\delta\boldsymbol{\lambda}$  são arbitrários, temos:

$$\begin{cases} 2\mathbf{Q}\mathbf{v} + (\underline{\eta rk_t/L})\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})\mathbf{v} - \mathbf{z} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (99)$$

Seja  $\Psi$  um complemento ortogonal de  $\mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})$ . Multiplicando a primeira equação de (99) por  $\Psi^{\top}$ , temos:

$$\begin{cases} 2\Psi^{\top}\mathbf{Q}\mathbf{v} + \Psi^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda} = 2\Psi^{\top}\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}^{\top}(\underline{\eta rk_t/L})\mathbf{v} - \mathbf{z} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (100)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \mathbb{Z}^\top(\eta r k_t/L) \\ \Psi^\top \mathbb{Q} \end{bmatrix} \mathfrak{u} = \begin{bmatrix} \mathbb{z} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathfrak{u} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}^\top(\eta r k_t/L) \\ \Psi^\top \mathbb{Q} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{z} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} \quad (101)$$

Seja  $\mathbb{A}$  um matriz tal que:

$$\mathfrak{u} = \mathbb{A} \mathbb{z} \quad (102)$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{Z}^\top(\eta r k_t/L) \\ \Psi^\top \mathbb{Q} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{z} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} = \mathbb{A} \mathbb{z} \quad (103)$$

No caso de não haver atuação redundante:

$$\mathbb{A} = (\mathbb{Z}^\top(\eta r k_t/L))^{-1} \quad (104)$$

Substituindo (97) em (102), temos:

$$\mathbb{H}(\mathfrak{q}) \ddot{\mathfrak{p}}^\# + \mathbb{h}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, \dot{\mathfrak{p}}, \mathfrak{i}) = \mathfrak{u} \quad (105)$$

Sendo:

$$\mathbb{H} = \mathbb{A} \mathbb{M}^{\#'} \quad (106)$$

$$\mathbb{h} = \mathbb{A}(\dot{\mathbb{M}}^{\#'} \dot{\mathfrak{p}}^\# + \dot{\mathfrak{v}}^{\#'} + \dot{\mathfrak{f}}^{\#'} + \dot{\mathfrak{g}}^\# + (\mathbb{Z}^\top(R/L) - \dot{\mathbb{Z}}^\top) \eta r k_t \mathfrak{i} + \mathbb{Z}^\top(\eta r^2 k_t k_w/L) \mathbb{Z} \mathfrak{p}^\#) \quad (107)$$

Para o caso da orientação da plataforma de  $\mathcal{M}$  não ser descrita por coordenadas redundantes, temos  $\mathfrak{p}^\# = \dot{\mathfrak{q}}_0$ , o que leva ao seguinte modelo para o sistema a ser controlado:

$$\begin{cases} \underline{L} \frac{d\mathfrak{i}}{dt} + \underline{R} \mathfrak{i} + \underline{k_w r} \mathbb{Z}(\mathfrak{q}) \dot{\mathfrak{q}}_0 = \mathfrak{u} \\ \mathbb{H}(\mathfrak{q}) \ddot{\mathfrak{q}}_0 + \mathbb{h}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, \dot{\mathfrak{p}}, \mathfrak{i}) = \mathfrak{u} \end{cases} \quad (108)$$

Para o caso da orientação da plataforma de  $\mathcal{M}$  ser descrita por coordenadas redundantes, temos:

$$\mathfrak{p}^\# = \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_r \\ \mathfrak{p}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \dot{\mathfrak{q}}_r \\ \dot{\mathfrak{q}}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathfrak{q}}_r \\ \dot{\mathfrak{q}}_t \end{bmatrix} = \mathbb{D}' \dot{\mathfrak{q}}_0 \quad (109)$$

$$\ddot{\mathfrak{p}}^\# = \mathbb{D}' \ddot{\mathfrak{q}}_0 + 2\dot{\mathbb{D}}' \dot{\mathfrak{q}}_0 + \ddot{\mathbb{D}}' \dot{\mathfrak{q}}_0 \quad (110)$$

Substituindo (110) em (105), temos:

$$\mathbb{H}'(\mathfrak{q}) \ddot{\mathfrak{q}}_0 + \mathbb{h}'(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, \dot{\mathfrak{p}}, \mathfrak{i}) = \mathfrak{u} \quad (111)$$

Sendo:

$$\mathbb{H}' = \mathbb{H}\mathbb{D}' \quad (112)$$

$$\mathbb{h}' = \mathbb{H}(2\dot{\mathbb{D}}'\ddot{\mathbf{q}}_0 + \ddot{\mathbb{D}}'\dot{\mathbf{q}}_0) + \mathbb{h} \quad (113)$$

O que leva ao seguinte modelo para o sistema a ser controlado:

$$\begin{cases} \underline{L}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \underline{R}\mathbf{i} + \underline{k_w r}\mathbb{Z}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{u} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{H}'(\mathbf{q}) \\ \mathbb{A}'(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{u} - \mathbb{h}'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{i}) \\ \mathbb{b}'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (114)$$

Sendo  $\mathbb{A}'(\mathbf{q})$  o jacobiano das equações vinculares que relacionam as componentes  $\mathbf{q}_0$ , e  $\mathbb{b}'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})$  dado por:

$$\mathbb{b}' = -2\dot{\mathbb{A}}'\ddot{\mathbf{q}}_0 - \ddot{\mathbb{A}}'\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (115)$$

Vale observar que  $\mathbb{A}'^T$  é complemento ortogonal de  $\mathbb{D}'$ , e como  $\mathbb{H}$  não é singular, também é complemento ortogonal de  $\mathbb{H}'$ .

## 4.6 Projeto do Controlador

Esta subseção é destinada ao projeto de controladores não lineares robustos, destinados ao controle de posição e orientação de plataformas paralelas descritas pelos modelos (108) e (114), utilizando a técnica de controle por modos deslizantes.

Sejam  $\underline{k_p}$  e  $\underline{k_v}$  matrizes diagonais positivas definidas,  $\mathbf{q}_0^\diamond$  uma matriz-coluna de sinais referência, e  $\mathbf{s}$  uma matriz-coluna dada por:

$$\mathbf{s} = -(\ddot{\mathbf{e}} + \underline{k_v}\dot{\mathbf{e}} + \underline{k_p}\mathbf{e}) \quad (116)$$

Sendo:

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_0^\diamond - \mathbf{q}_0 \quad (117)$$

Seja  $V(\mathbf{s})$  um função de Lyapunov dada por:

$$V(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{s} \quad (118)$$

Pela teoria de estabilidade de Lyapunov, se  $\dot{V} < 0 \ \forall \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{s}$  converge para  $\mathbf{0}$  independentemente das condições iniciais do sistema. Para que isso seja possível, é imposta a seguinte condição:

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T\dot{\mathbf{s}} \leq -\varkappa\mathbf{s}^T\mathbf{sign}(\mathbf{s}) \quad (119)$$

Sendo  $\varkappa$  uma constante positiva. Repare que  $\mathbf{s}^T\mathbf{sign}(\mathbf{s})$  é a soma dos módulos das componentes de  $\mathbf{s}$ , o que implica que  $-\varkappa\mathbf{s}^T\mathbf{sign}(\mathbf{s}) < 0 \ \forall \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ . Repare também que se  $\dot{\mathbf{s}} = -\varkappa\mathbf{sign}(\mathbf{s})$ , (119) é satisfeita e cada componente de  $\mathbf{s}$  respeita a EDO  $\dot{s}_i = -\varkappa\mathbf{sign}(s_i)$ ,



a qual converge para zero em um tempo finito de  $t = \frac{|s_i(0)|}{\varkappa}$ . Sendo assim, pode-se dizer que se (119) for satisfeita,  $s$  converge para zero em tempo finito e, a partir desse momento, o erro de controle  $e$  converge assintoticamente para zero.

O projeto do controlador é feito utilizando a condição (119), a qual é conhecida como condição de escorregamento. Assim, derivando (116), temos:

$$\dot{s} = \ddot{q}_0 - \sigma \quad (120)$$

Sendo:

$$\sigma = \ddot{q}_0^\diamond + \underline{k}_v \dot{e} + \underline{k}_p e \quad (121)$$

Substituindo (120) em (119), temos:

$$s^T (\ddot{q}_0 - \sigma + \varkappa \text{sign}(s)) \leq 0 \quad (122)$$

A partir de agora o projeto do controlador será dividido em dois casos:

i)  $q_0$  é um conjunto de coordenadas generalizadas independentes

Nesse caso, o modelo do sistema é dado por (108), ou seja:

$$\begin{cases} \underline{L} \frac{d\dot{q}}{dt} + \underline{R}\dot{q} + \underline{k}_w r \mathbb{Z}(q) \dot{q}_0 = v \\ \mathbb{H}(q) \ddot{q}_0 + \mathbb{h}(q, \dot{p}, \dot{p}, \dot{q}) = v \end{cases}$$

Isolando  $\ddot{q}_0$  na segunda equação de (108) e substituindo em (122), temos:

$$s^T (\mathbb{H}^{-1}(v - \mathbb{h}) - \sigma + \varkappa \text{sign}(s)) \leq 0 \quad (123)$$

Para satisfazer (123), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$v = \hat{\mathbb{h}} + \hat{\mathbb{H}}(\sigma - \underline{k} \text{sign}(s)) \quad (124)$$

Sendo  $\hat{\mathbb{h}}$  e  $\hat{\mathbb{H}}$  estimadores de  $\mathbb{h}$  e  $\mathbb{H}$ , respectivamente. Substituindo (124) em (123), temos:

$$s^T (\delta + \Delta \sigma + \varkappa \text{sign}(s) - (\Delta + 1) \underline{k} \text{sign}(s)) \leq 0 \quad (125)$$

Sendo:

$$\delta(q, \dot{q}, \dot{p}, \dot{q}) = \mathbb{H}^{-1}(\hat{\mathbb{h}} - \mathbb{h}) \quad (126)$$

$$\Delta(q) = \mathbb{H}^{-1} \hat{\mathbb{H}} - \mathbb{1} \quad (127)$$

Pode-se dizer que (125) é sempre satisfeita se:

$$(\Delta + \mathbb{1}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq |\delta + \Delta\sigma + \varkappa \text{sign}(\mathfrak{s})| \quad (128)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado esquerdo de (128), temos:

$$|\delta + \Delta\sigma + \varkappa \text{sign}(\mathfrak{s})| \leq |\delta|_{\max} + |\Delta|_{\max}|\sigma| + \text{diag}(\varkappa\mathbb{1}) \quad (129)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$(\Delta + \mathbb{1}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq |\delta|_{\max} + |\Delta|_{\max}|\sigma| + \text{diag}(\varkappa\mathbb{1}) \quad (130)$$

(125) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (119) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Uma possível solução para (130) é obtida fazendo  $\underline{k} = k\mathbb{1}$ , a qual é válida apenas se o somatório de cada uma das linhas de  $|\Delta|_{\max}$  for menor do que 1. Esta solução é dada por:

$$k = \varkappa + \max_{1 \leq i \leq \nu^\#} \left( \frac{|\delta_i|_{\max}}{1 - \sum_{j=1}^{\nu^\#} |\Delta_{i,j}|_{\max}} \right) + \sum_{\kappa=1}^{\nu^\#} \max_{1 \leq i \leq \nu^\#} \left( \frac{|\Delta_{i,\kappa}|_{\max}}{1 - \sum_{j=1}^{\nu^\#} |\Delta_{i,j}|_{\max}} \right) |\sigma_\kappa| \quad (131)$$

Sendo  $\delta_i$  e  $\sigma_i$  as  $i$ -ésimas componentes de  $\delta$  e  $\sigma$ , respectivamente, e  $\Delta_{i,j}$  o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $\Delta$ .

ii)  $\mathfrak{q}_0$  é um conjunto de coordenadas generalizadas redundantes

Nesse caso, o modelo do sistema é dado por (114), ou seja:

$$\begin{cases} \underline{L} \frac{d\mathfrak{i}}{dt} + \underline{R}\mathfrak{i} + \underline{k}_w r \mathbb{Z}(\mathfrak{q}) \dot{\mathfrak{q}}_0 = \mathfrak{u} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{H}'(\mathfrak{q}) \\ \mathbb{A}'(\mathfrak{q}) \end{bmatrix} \ddot{\mathfrak{q}}_0 = \begin{bmatrix} \mathfrak{u} - \mathbb{H}'(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, \dot{\mathfrak{p}}, \mathfrak{i}) \\ \mathbb{B}'(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, \dot{\mathfrak{p}}) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Seja  $\mathfrak{u}$  a seguinte lei de controle:

$$\mathfrak{u} = \hat{\mathbb{H}}' \mathfrak{u}' + \hat{\mathbb{H}}' \quad (132)$$

Sendo  $\mathfrak{u}'$  uma matriz-coluna que respeita a seguinte restrição:

$$\mathbb{A}' \mathfrak{u}' = \mathbb{B}' \quad (133)$$

Substituindo (132) e (133) na segunda equação de (114), temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{H}' \\ \mathbb{A}' \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{H}}' - \mathbb{H}' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{H}}' \\ \mathbb{A}' \end{bmatrix} \mathbf{v}' \quad (134)$$

Repare que, se não houvesse erros de modelagem, teríamos:

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{v}' \quad (135)$$

Seja  $\mathbf{v}''$  uma matriz-coluna dada por:

$$\mathbf{v}'' = \sigma - \underline{k} \text{sign}(\mathbf{s}) \quad (136)$$

Se não houvesse restrições em  $\mathbf{v}'$ , poderíamos fazer  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}''$  e projetar  $\underline{k}$  de maneira similar à apresentada no item *i*).

Como temos restrições em  $\mathbf{v}'$ , procuramos  $\mathbf{v}'$  mais próximo possível de  $\mathbf{v}''$  através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{v}'} \quad & (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'')^T \mathbb{H}'^T \mathbb{H}' (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') \\ \text{tal que} \quad & \mathbb{A}' \mathbf{v}' = \mathbb{b}' \end{aligned} \quad (137)$$

Como  $\mathbb{H}'^T \mathbb{H}'$  é não-negativa definida, temos que  $(\mathbf{v}' - \mathbf{v}'')^T \mathbb{H}'^T \mathbb{H}' (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') \geq 0$  para qualquer valor de  $\mathbf{v}'$ .

Aplicando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, pode-se dizer que o seguinte problema é equivalente:

$$\text{Min}_{\mathbf{v}, \lambda} \quad \mathcal{L} = (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'')^T \mathbb{H}'^T \mathbb{H}' (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') + (\mathbb{A}' \mathbf{v}' - \mathbb{b}')^T \lambda \quad (138)$$

Para solucionar o problema, impõe-se a estacionariedade da função lagrangeana:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = 0 \Rightarrow & \delta \mathbf{v}'^T \mathbb{H}'^T \mathbb{H}' (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') + (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'')^T \mathbb{H}'^T \mathbb{H}' \delta \mathbf{v}' + (\mathbb{A}' \delta \mathbf{v}')^T \lambda + (\mathbb{A}' \mathbf{v}' - \mathbb{b}')^T \delta \lambda = 0 \\ \Rightarrow & \delta \mathbf{v}'^T \left( 2 \mathbb{H}'^T \mathbb{H}' (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') + \mathbb{A}'^T \lambda \right) + \delta \lambda^T (\mathbb{A}' \mathbf{v}' - \mathbb{b}') = 0 \end{aligned}$$

Como  $\delta \mathbf{v}'$  e  $\delta \lambda$  são arbitrários, temos:

$$\begin{cases} \mathbb{H}'^T \mathbb{H}' (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') + \mathbb{A}'^T \lambda = 0 \\ \mathbb{A}' \mathbf{v}' = \mathbb{b}' \end{cases} \quad (139)$$

Como  $\mathbb{H}'^T$  é complemento ortogonal de  $\mathbb{A}'$ , multiplicando a primeira equação de (139) por  $\mathbb{H}'$ , temos:

$$2\mathbb{H}'\mathbb{H}'^T\mathbb{H}'(\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}'') + \mathbb{H}\mathbb{A}'^T\mathfrak{L} = 0 \Rightarrow \mathbb{H}'\mathbb{H}'^T\mathbb{H}'(\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}'') = 0$$

Como  $\mathbb{H}'\mathbb{H}'^T$  é não singular:

$$\therefore \mathbb{H}'\mathfrak{v}' = \mathbb{H}'\mathfrak{v}'' \quad (140)$$

Sendo assim, temos que a lei de controle que torna o sistema em malha fechada o mais próximo possível de  $\ddot{\mathfrak{q}}_0 = \mathfrak{v}''$  (desprezando os erros de modelagem), segundo o critério de otimização adotado, é:

$$\mathfrak{v} = \hat{\mathbb{H}}'\mathfrak{v}'' + \hat{\mathbb{H}}' = \hat{\mathbb{H}}'(\mathfrak{v} - \underline{k}\text{sign}(\mathfrak{s})) + \hat{\mathbb{H}}' \quad (141)$$

Depois de encontrada a lei de controle ótima, é necessário projetar a matriz de ganhos  $\underline{k}$  utilizando a condição de escorregamento (119). Para isso, lembrando que  $\mathbb{H}'^T$  é complemento ortogonal de  $\mathbb{A}'$ , isolamos  $\ddot{\mathfrak{q}}_0$  em (114):

$$\ddot{\mathfrak{q}}_0 = \mathbb{H}'^\dagger(\mathfrak{v} - \mathfrak{h}') + \mathbb{A}'^\dagger\mathfrak{b}' \quad (142)$$

Substituindo a lei de controle (141) em (142), temos:

$$\ddot{\mathfrak{q}}_0 = \mathbb{H}'^\dagger(\hat{\mathbb{H}}'(\mathfrak{v} - \underline{k}\text{sign}(\mathfrak{s})) + \hat{\mathbb{H}}' - \mathfrak{h}') + \mathbb{A}'^\dagger\mathfrak{b}' \quad (143)$$

Finalmente, substituindo (143) na condição de escorregamento (119), obtemos:

$$\mathfrak{s}^T(\mathfrak{v} + \Delta\mathfrak{v} + \mathfrak{x}\text{sign}(\mathfrak{s}) + \mathbb{A}'^\dagger\mathfrak{b}' - (\Delta + 1)\underline{k}\text{sign}(\mathfrak{s})) \leq 0 \quad (144)$$

Sendo:

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}, \dot{\mathfrak{p}}, \mathfrak{i}) = \mathbb{H}'^\dagger(\hat{\mathbb{H}}' - \mathfrak{h}') \quad (145)$$

$$\Delta(\mathfrak{q}) = \mathbb{H}'^\dagger\hat{\mathbb{H}}' - \mathbb{1} \quad (146)$$

De maneira análoga ao que foi apresentado no item *i*), se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$(\Delta + \mathbb{1}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq |\mathfrak{v}|_{\max} + |\Delta|_{\max}|\mathfrak{v}| + \text{diag}(\mathfrak{x}\mathbb{1}) + |\mathbb{A}'^\dagger\mathfrak{b}'| \quad (147)$$

(144) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (119) também seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle para zero.

Porém, desprezando os erros de modelagem em  $\mathbb{H}$  e admitindo que  $\mathbb{D}'$  não depende de parâmetros incertos, pode-se observar que  $\mathbb{A} + \mathbb{1}$  é singular, pois  $\mathbb{D}'$  tem mais colunas do que linhas:

$$\mathbb{A} + \mathbb{1} = \mathbb{H}'^\dagger \hat{\mathbb{H}}' = \mathbb{D}'^\dagger \mathbb{H}^{-1} \hat{\mathbb{H}} \mathbb{D}' \simeq \mathbb{D}'^\dagger \mathbb{D}' \quad (148)$$

Sendo assim, não há como garantir que (147) será sempre satisfeita. Porém é possível projetar  $\underline{k}$  de modo que (147) chegue o mais próximo possível de ser safeita. Para isso, o seguinte problema de otimização deve ser resolvido numericamente a cada atualização da lei de controle:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\text{diag}(\underline{k})} \quad & (\mathbb{D}'^\dagger \mathbb{D}' \text{diag}(\underline{k}) - \mathfrak{d})^\top (\mathbb{D}'^\dagger \mathbb{D}' \text{diag}(\underline{k}) - \mathfrak{d}) \\ \text{tal que} \quad & \text{diag}(\underline{k}) \geq \mathbb{0} \end{aligned} \quad (149)$$

Sendo:

$$\mathfrak{d} = |\mathfrak{d}|_{\max} + |\mathbb{A}|_{\max} |\mathfrak{v}| + \text{diag}(\varkappa \mathbb{1}) + |\mathbb{A}'^\dagger \mathbb{b}'| \quad (150)$$

## 5 Publicações

A partir dos resultados obtidos no trabalho de formatura realizado na graduação, foi publicado um artigo intitulado “Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies” [14], o qual foi escrito pelo aluno em coautoria com Eng. Guilherme Martinho Dobrianskyj e seu orientador, Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho. Este trabalho foi apresentado no BioRob 2014 (IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics) na seção de posters, no dia 15 de agosto de 2014. O artigo pode ser acessado por <http://dx.doi.org/10.1109/BIOROB.2014.6913880>.

Um capítulo de livro, intitulado “Dynamic modelling and control of balanced parallel mechanisms” [24], foi escrito em coautoria com o aluno de doutorado direto Renato M. M. Orsino e com o Prof. Dr. Tarcísio Antonio Hess Coelho, para o livro *Dynamic balancing of mechanisms and synthesizing of parallel robots* (editado pelo Prof. Dr. Dan Zhang da Universidade do Instituto de Tecnologia de Ontario e publicado pela editora Springer). Este capítulo de livro trata do uso de uma metodologia de modelagem modular para o balanceamento adaptativo e desenvolvimento de algoritmos de controle para mecanismos robóticos paralelos. O capítulo pode ser acessado por [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3\\_16](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-17683-3_16).

Um artigo, submetido para o *Special Issue on: “Dynamic Balancing of Mechanisms and Parallel Robots”* do periódico *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, intitulado “A new approach for obtaining the dynamic balancing conditions in serial mechanisms” [26], foi escrito em coautoria com o Prof. Dr. Tarcísio Antonio Hess Coelho. O artigo já foi aceito e está processo de editoração.

## 6 Disciplinas de pós-graduação

Ao longo do programa o aluno já cumpriu 56 créditos, tendo cursado 7 disciplinas de pós-graduação:

- PME-5004 — Complementos de Matemática I
- PMR-5010 — Elementos Finitos em Sistemas Multifísicos: Fundamentos
- PMR-5215 — Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos
- PMR-5238 — Análise e Síntese de Mecanismo Planos e Tridimensionais
- PMR-5211 — Mecânica dos Sólidos Experimental
- PMR-5234 — Técnicas de Ultra-Som e suas aplicações na Indústria e na Medicina
- PMR-5014 — Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

Ressalta-se que em todas o aluno obteve conceito A, demonstrando bom aproveitamento.

Ainda é necessário cumprir mais 24 créditos de pós-graduação, os quais deverão ser cumpridos realizando a publicação de 3 artigos em periódicos indexados.

## 7 Cronograma de Atividades do Projeto

Serão realizados as seguintes etapas para a realização da proposta:

- (1) Modelagem cinemática do mecanismo  $2R_{SU} + PPaP$
- (2) Modelagem dinâmica do mecanismo
- (3) Simulação dinâmica inversa do mecanismo
- (4) Simulação dinâmica direta do mecanismo utilizando leis de Controle por Torque Computado
- (5) Identificação dos parâmetros do sistema e suas respectivas incertezas, utilizando o protótipo
- (6) Projeto de controlador por modos deslizantes
- (7) Simulação do sistema em malha fechada, utilizando o controlador projetado
- (8) Preparo para o exame de qualificação
- (9) Validação experimental do controlador projetado, utilizando o protótipo
- (10) Escrever artigo sobre uma nova abordagem para modelagem dinâmica de mecanismos seriais, utilizando o método Orsino de acoplamento de subsistemas [25], aliado aos parâmetros de Denavit-Hartenberg [3, 15, 16]
- (11) Escrever artigo sobre modelagem dinâmica de mecanismos paralelos, utilizando o método Orsino de acoplamento de subsistemas
- (12) Escrever artigo sobre controle não linear robusto aplicado a mecanismos paralelos
- (13) Avaliação geral dos resultados
- (14) Preparo da tese

Aqui segue um cronograma estimado para realização das atividades propostas:



Tabela 2: Cronograma – Planejamento de Atividades por quadrimestre

Ativ./Quad.	3º/15	1º/16	2º/16	3º/16	1º/17	2º/17	3º/17
(1)	■	■					
(2)	■	■					
(3)	■	■					
(4)		■	■				
(5)			■	■			
(6)			■	■			
(7)			■	■			
(8)	■	■	■				
(9)					■	■	■
(10)		■	■				
(11)				■			
(12)							■
(13)							■
(14)					■	■	■

## Referências

- [1] R. Z. H. de Almeida. Modelagem dinâmica e controle e robô manipulador de arquitetura paralela assimétrica de três graus de liberdade. *Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- [2] G. M. Dobrianj, A. G. Coutinho. Plataforma robótica para reabilitação do membro superior humano. *Tese (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- [3] J. J. Craig. *Introduction to robotics: mechanics and control*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: control engineering. Pearson/Prentice Hall, 2005.
- [4] E. Jarzebowska. Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(12):118 – 131, 2009.
- [5] J-P. Merlet. Still a long way to go on the road for parallel mechanisms. In *ASME DETC Conference, Montreal, 2002*, 2002.

- [6] R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho. A contribution for developing more efficient dynamic modelling algorithms of parallel robots. *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 1(1):15 – 34, 2013.
- [7] A. Zubizarreta, I. Cabanes, M. Marcos, C. Pinto, E. Portillo. Extended CTC control for parallel robots. *Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA), 2010 IEEE Conference on*, 2010.
- [8] A.M. Bloch, M. Reyhanoglu, N.H. McClamroch. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 1992.
- [9] W. Khalil, E. Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Taylor & Francis, 2002.
- [10] L. W. Tsai. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, 1999.
- [11] V. D. Kumazawa, T. A. Hess Coelho, D. Rinaudi, G. Carbone, M. Ceccarelli. Kinematic analysis and operation feasibility of a 3-dof asymmetric parallel mechanism. In *20th COBEM, Gramado, Brazil*, 2009.
- [12] J-J. E. Slotine, W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- [13] V. Utkin, J. Guldner, J. Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. Vol. 34. CRC press, 2009.
- [14] G. M. Dobrianskyj, A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies. *Biomedical Robotics and Biomechatronics 2014 5th IEEE RAS EMBS International Conference on*, 819 – 825, 2014.
- [15] J. Denavit, R. S. Hartenberg. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices. *Journal of Applied Mechanics*, 215–221, June 1955.
- [16] H. Lipkin. A note on denavit-hartenberg notation in robotics. *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 921–926, 2005.
- [17] H. Cheng, Y-K. Yiu, Z. Li. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 8(4): 483–491, 2003.
- [18] O. Altuzarra, P. M. Eggers, F. J. Campa, C. Roldan-Paraponiaris, C. Pinto. Dynamic Modelling of Lower-Mobility Parallel Manipulators Using the Boltzmann-Hamel Equations *Mechanisms, Transmissions and Applications*, 31: 157–165, 2015.

- [19] H. Abdellatif, B. Heimann, J. Kotlarski, T. Ortmaier. Practical model-based and robust control of parallel manipulators using passivity and sliding mode theory *Robotics 2010: Current and Future Challenges*, InTech, 2010.
- [20] Y. Li, Q. Xu. Dynamic modeling and robust control of a 3-PRC translational parallel kinematic machine *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25(3): 630–640, 2009.
- [21] O. Linda, M. Manic. Uncertainty-robust design of interval type-2 fuzzy logic controller for delta parallel robot *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, 7(4): 661–670, 2011.
- [22] S-L. Chen, Y-C. Tsai. Contouring control of a parallel mechanism based on equivalent errors *American Control Conference, 2008*, 2384–2388, 2008.
- [23] R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho, C. P. Pesce. Analytical mechanics approaches in the dynamic modelling of Delta mechanism *Robotica*, 33(4): 953–973, 2015.
- [24] R. M. M. Orsino, A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. Dynamic Modelling and Control of Balanced Parallel Mechanisms, in *Dynamic Balancing of Mechanisms and Synthesizing of Parallel Robots*, Springer, 2016:403–445.
- [25] R. M. M. Orsino, T. A. H. Coelho. A contribution on the modular modelling of multibody systems *Proc. Royal Society A*, 471(2183), 2015.
- [26] A. G. Coutinho, T. A. H. Coelho. A new approach for obtaining the dynamic balancing conditions in serial mechanisms *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 2015. Manuscript accepted for publication