

# Adaptative balancing techniques applied to parallel mechanisms

Tarcisio Antonio Hess Coelho<sup>a</sup>, Renato Maia Matarazzo Orsino<sup>b</sup>, André Garnier Coutinho<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Department of Mechatronics and Mechanical Systems Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil. E-mail: tarchess@usp.br*

<sup>b</sup> *Department of Mechanical Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil.*

## SUMMARY

### KEYWORDS:

#### 0.1 Control

#### Controle por modos deslizantes

Nesta seção será feita uma breve introdução ao controle por modos deslizantes. O tema será explorado apenas para o controle de sistemas de segunda ordem, sem incertezas paramétricas, para não fugir do escopo do capítulo.

Seja um sistema dinâmico dado pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} = u \quad (1)$$

Definimos a seguinte superfície, chamada de superfície de escorregamento:

$$s(e, \dot{e}) = -(\dot{e} + \lambda e) = 0, \lambda > 0 \quad (2)$$

Sendo  $e = x_d - x$  o erro de controle e  $x_d$  o sinal de referência. Repare que se o sistema estiver na superfície de escorregamento, temos:

$$\dot{e} + \lambda e = 0 \Rightarrow e(t) = C e^{-\lambda t} \quad (3)$$

Sendo assim, o erro cai exponencialmente para zero, com constante de tempo  $1/\lambda$ .

Para encontrar a lei de controle que leva o sistema à superfície de escorregamento, parte-se da definição de  $s$ :

$$s = -(\dot{e} + \lambda e)$$

Derivando no tempo:

$$\dot{s} = -(\ddot{e} + \lambda \dot{e}) = \ddot{x} - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \quad (4)$$

Substituindo (1) em (4):

$$\dot{s} = u - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \quad (5)$$

Utilizando a seguinte lei de controle:

$$u = \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} - k \operatorname{sign}(s), k > 0 \quad (6)$$

Temos:

$$\dot{s} = -k \operatorname{sign}(s) \quad (7)$$

Supondo que o sistema começa em  $s(0) = s_0 > 0$ . Resolvendo a EDO para  $s > 0$ :

$$\dot{s} = -k \Rightarrow s = -kt + C$$

$$s(0) = s_0 \Rightarrow C = s_0$$

$$\therefore s = s_0 - kt, \quad s > 0$$

Em  $t = t_s = \frac{|s_0|}{k}$ ,  $s$  chega em zero. Resolvendo a EDO para  $s(t_s) = 0$ :

$$\dot{s} = 0 \Rightarrow s = C$$

$$s(t_s) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Portanto, para a solução da EDO para  $s(0) = s_0 > 0$

$$s(t) = \begin{cases} s_0 - kt, & t < t_s \\ 0, & t \geq t_s \end{cases} \quad (8)$$

Resolvendo para  $s(0) = s_0 < 0$ , temos um resultado análogo:

$$s(t) = \begin{cases} s_0 + kt, & t < t_s \\ 0, & t \geq t_s \end{cases} \quad (9)$$

Assim, pode-se concluir que a EDO (7) converge para  $s = 0$ , independente da condição inicial. Portanto, temos que a lei de controle (6) faz com que o sistema representado por (1) siga o sinal de referência, pois o erro de controle converge para zero.

### Controle por modos deslizantes estendido

Como foi visto na seção de modelagem, é muito conveniente utilizar coordenadas redundantes para realizar a modelagem de mecanismos paralelos. Sendo assim, propomos nesta seção uma lei de controle para sistemas descritos por coordenadas redundantes.

O modelo de um sistema mecânico multi-corpos pode ser descrito de maneira genérica pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \mathbb{C}_n^\top(\mathbf{q}_n) \left( \mathbb{M}_n(\mathbf{q}_n) \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbb{w}_n(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) + \mathbb{z}_n(\mathbf{q}_n) \right) = \mathbf{u}_n \\ \mathbb{A}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbb{b}_n(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (10)$$

De maneira matricial compacta:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \\ \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n - \mathbb{C}_n^\top (\mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n) \\ -\mathbb{b}_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

Gostaria que  $\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{v}_n$ , sendo  $\mathbf{v}_n$  uma entrada de controle. Para que isso aconteça, utilizamos a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{u}_n = \mathbb{C}_n^\top (\mathbb{M}_n \mathbf{v}_n + \mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n) \quad (12)$$

Como queremos que  $\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{v}_n$  e  $\ddot{\mathbf{q}}_n$  tem restrições,  $\mathbf{v}_n$  deve respeitar as mesmas restrições, ou seja:

$$\mathbb{A}_n \mathbf{v}_n + \mathbb{b}_n = \mathbf{0} \quad (13)$$

Aplicando a lei de controle (12) e a restrição (13) em (11), temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \\ \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_n = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top (\mathbb{M}_n \mathbf{v}_n + \mathbf{w}_n + \mathbf{z}_n) - \mathbb{C}_n^\top (\mathbf{w}_n + \mathbf{z}_n) \\ \mathbb{A}_n \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \mathbf{v}_n \\ \mathbb{A}_n \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \\ \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \mathbf{v}_n$$

$$\therefore \ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{v}_n \quad (14)$$

Seja  $\mathbf{v}'_n$  dado pela lei de controle por modos deslizantes:

$$\mathbf{v}'_n = \ddot{\mathbf{q}}_{n,d} + \lambda \dot{\mathbf{e}}_n + k \text{sign}(\dot{\mathbf{e}}_n + \lambda \mathbf{e}_n) \quad (15)$$

Sendo  $\mathbf{e}_n = \mathbf{q}_{n,d} - \mathbf{q}_n$  o erro de controle e  $\mathbf{q}_{n,d}$  o sinal de referência. Se não houvesse restrições, poderíamos fazer  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}'_n$ :

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{v}_n \Rightarrow \ddot{\mathbf{e}}_n + \lambda \dot{\mathbf{e}}_n + k \text{sign}(\dot{\mathbf{e}}_n + \lambda \mathbf{e}_n) = 0$$

Isso garantiria que  $\mathbf{e}_n \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  para quaisquer condições iniciais, como visto na seção anterior.

Como temos restrições em  $\mathbf{v}_n$ , procuramos  $\mathbf{v}_n$  mais próximo possível de  $\mathbf{v}'_n$  através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{v}_n} \quad & (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n) \\ \text{tal que} \quad & \mathbb{A}_n \mathbf{v}_n + \mathbb{b}_n = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Como  $\mathbb{M}_n$  é não-negativa definida, temos que  $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n) \geq 0$  para qualquer valor de  $\mathbf{v}_n$ . Aplicando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, pode-se dizer que o seguinte problema equivalente:

$$\text{Min}_{\mathbf{v}_n, \lambda} \quad L = (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n) + (\mathbb{A}_n \mathbf{v}_n + \mathbb{b}_n)^\top \lambda \quad (17)$$

Para solucionar o problema, impõe-se a estacionariedade da função lagrangeana:

$$\begin{aligned} \delta L = 0 \Rightarrow \delta \mathbf{v}_n^\top \mathbb{M}_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n \delta \mathbf{v}_n + (\mathbb{A}_n \delta \mathbf{v}_n)^\top \lambda + (\mathbb{A}_n \mathbf{v}_n + \mathbb{b}_n)^\top \delta \lambda &= 0 \\ \Rightarrow \delta \mathbf{v}_n^\top \left( (\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_n^\top) (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n) + \mathbb{A}_n^\top \lambda \right) + \delta \lambda^\top (\mathbb{A}_n \mathbf{v}_n + \mathbb{b}_n) &= 0 \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{M}_n$  é simétrica e  $\delta \mathbf{v}_n$  e  $\delta \lambda$  são arbitrários, temos:

$$\begin{cases} 2\mathbb{M}_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n) + \mathbb{A}_n^\top \lambda = 0 \\ \mathbb{A}_n \mathbf{v}_n + \mathbb{b}_n = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Como  $\mathbb{C}_n$  o complemento ortogonal de  $\mathbb{A}_n$ , multiplicando a primeira equação de (18) por  $\mathbb{C}_n^\top$ , temos:

$$2\mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n) + \mathbb{C}_n^\top \mathbb{A}_n^\top \lambda = 0 \Rightarrow \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}'_n) = 0$$

$$\therefore \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \mathbf{v}_n = \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \mathbf{v}'_n \quad (19)$$

Sendo assim, temos que a lei de controle que torna o sistema em malha fechado o mais próximo possível de  $\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{v}'_n$ , segundo o critério de otimização adotado, é:

$$\mathbf{u}_n = \mathbb{C}_n^\top (\mathbb{M}_n \mathbf{v}'_n + \mathbf{w}_n + \mathbf{z}_n) \quad (20)$$

**Prova que o método converge, não vai para o livro**

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \zeta \mathbf{u} \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \zeta^{-1} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \mathbf{u}'$$

$$\mathbf{u}' = \ddot{\mathbf{q}}_d + \lambda \dot{\mathbf{e}} - k \mathbf{sign}(\mathbf{s})$$

$$\mathbf{s} = -\dot{\mathbf{e}} - \lambda \mathbf{e}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = -\ddot{\mathbf{e}} - \lambda \dot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d - \lambda \dot{\mathbf{e}}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \zeta \mathbf{u} \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbf{q}}_d - \lambda \dot{\mathbf{e}}$$

Aplicando a lei de controle:

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \lambda \dot{\mathbf{e}} - k \mathbf{sign}(\mathbf{s})) \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbf{q}}_d - \lambda \dot{\mathbf{e}}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \lambda \dot{\mathbf{e}} - k \mathbf{sign}(\mathbf{s})) - \mathbb{C}^T \mathbb{M}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \lambda \dot{\mathbf{e}}) \\ -\mathbb{b} - \mathbb{A}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \lambda \dot{\mathbf{e}}) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbb{C}^T \mathbb{M} k \mathbf{sign}(\mathbf{s}) \\ -\mathbb{b} - \mathbb{A}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \lambda \dot{\mathbf{e}}) \end{bmatrix}$$

Definindo:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} = [(\mathbb{C}^T \mathbb{M})^\dagger \quad \mathbb{A}^\dagger]$$

Temos:

$$\dot{\mathbf{s}} = -(\mathbb{C}^T \mathbb{M})^\dagger \mathbb{C}^T \mathbb{M} k \mathbf{sign}(\mathbf{s}) - \mathbb{A}^\dagger \mathbb{b} - \mathbb{A}^\dagger \mathbb{A}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \lambda \dot{\mathbf{e}})$$

Sendo assim, se a seguinte inequação for respeitada para pelo menos  $\nu^\#$  componentes de  $\dot{\mathbf{s}}$ , o erro vai a zero:

$$\dot{\mathbf{s}} = -(\mathbb{C}^T \mathbb{M})^\dagger \mathbb{C}^T \mathbb{M} k \mathbf{sign}(\mathbf{s}) - \mathbb{A}^\dagger \mathbb{b} - \mathbb{A}^\dagger \mathbb{A}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \lambda \dot{\mathbf{e}}) \leq \mathbf{0}$$

**Acknowledgments**