Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Trabalho 2 - 1º semestre de 2015

Questão 1. (2 pontos) Calcule a massa do sólido que ocupa a região interior ao elipsóide $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 2z$ e tal que $z^2 \leq 3(x^2 + \frac{y^2}{4})$, $z \geq 0$, cuja densidade é $\delta(x, y, z) = x^2$.

Solução:
Devemos calcular a integral

$$\iiint_{D_{xyz}} x^2 \, dx \, dy \, dz \tag{1}$$

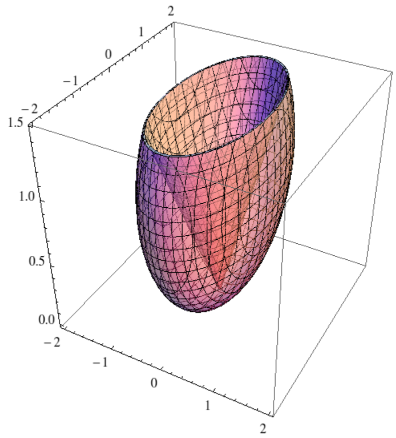

Figura 1: Região $D_{xyz} = \{(x, y, z) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 2z,\ z^2 \leq 3(x^2 + \frac{y^2}{4}) \text{ e } z \geq 0\}$

Realizamos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \, \cos\theta \\ y = 2\rho \sin\phi \, \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \tag{2}$$

$$J = \left\| \begin{matrix} \sin\phi \, \cos\theta & \rho\cos\phi \, \cos\theta & -\rho\sin\phi \, \sin\theta \\ 2\sin\phi \, \sin\theta & 2\rho\cos\phi \, \sin\theta & 2\rho\sin\phi \, \cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{matrix} \right\| = 2\rho^2 \sin\phi \tag{3}$$

Aplicando (2) à equação do elipsóide:

$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi \therefore \rho = 2\cos\phi \tag{4}$$

Aplicando (2) à equação do cone elíptico :

$$\rho^2\cos^2\phi = 3\rho^2\sin^2\phi \Rightarrow \tan^2\phi = \frac{1}{3} \therefore \phi = \frac{\pi}{6} \tag{5}$$

Assim podemos facilmente descrever D em coordenadas esféricas.

Calculando a integral :

$$\iiint_{D_{xyz}} x^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \sin^2\phi \, \cos^2\theta \cdot 2\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^{2\cos\phi} \sin^3\phi \, \cos^2\theta \, d\phi \, d\theta = \frac{2^6}{5} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\phi \sin^3\phi \, \cos^2\theta \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{2^6}{5} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\phi (1 - \cos^2\phi) \sin\phi \, \cos^2\theta \, d\phi \, d\theta$$

Fazendo a seguinte mudaça de variável: $u = \cos\phi \Rightarrow du = -\sin\phi \, d\phi$, temos:

$$= -\frac{2^6}{5} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} u^5 (1 - u^2) \cos^2\theta \, du \, d\theta = \frac{2^6}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u^5 (1 - u^2) \cos^2\theta \, du \, d\theta$$

$$= \frac{2^6}{5} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} \Big)_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{63}{160} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{63}{160} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{63}{2 \cdot 160} \Big(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \Big)_0^{2\pi} = \frac{63\pi}{160}$$

Questão 2. (2 pontos) Calcule o volume do sólido limitado por $x^2+y^2 = 1+z^2$ e $x^2+y^2 = 5$, isto é, $x^2 + y^2 \geq 1 + z^2$ e $x^2 + y^2 \leq 5$.

Solução:
Devemos calcular a integral

$$\iiint_{D_{xyz}} 1 \, dx \, dy \, dz \tag{6}$$

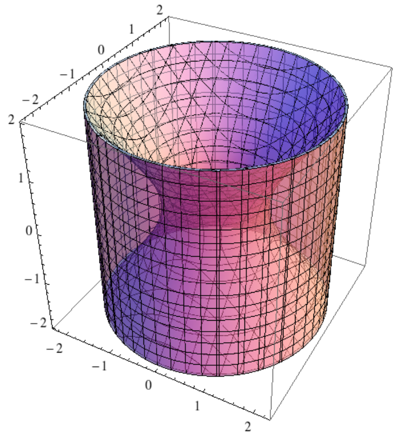

Figura 2: Região $D_{xyz} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \geq 1 + z^2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 5\}$

Realizamos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases} \tag{7}$$

$$J = \left\| \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \rho \tag{8}$$

Aplicando (7) à equação do hiperbolóide:

$$\rho^2 = 1 + z^2 = \sqrt{1 + z^2} \tag{9}$$

Aplicando (7) à equação do cilindro :

$$\rho^2 = 5 \therefore \rho = \sqrt{5} \tag{10}$$

Encontrando os valores de z em que ocorre a intersercção do elipsoide com cone elíptico ((9)) em (10)):

$$\begin{gathered} 1 + z^2 = 5 \Rightarrow z^2 = 4 \\ \therefore z = \pm 2 \end{gathered} \tag{11}$$

Assim podemos facilmente descrever D em coordenadas cilíndricas.

Calculando a integral :

$$\iiint_{D_{xyz}} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{2} \int_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{5}} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta$$

Como o sólido é simétrico em z:

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{5}} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \frac{\rho^2}{2} \Big|_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{5}} dz \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (4 - z^2) \, dz \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4z - \frac{z^3}{3}\right)_0^2 d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi}{3}$$

Questão 3. (1,5 pontos) Calcule a massa do arame cujo formato é o da curva dada pela intersecção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $2y + z = 1$, sendo a densidade $\delta(x, y, z) = \sqrt{2 + 4x^2}$.

Solução:
Devemos calcular a integral

$$\int_\gamma \delta(x, y, z)\, ds \tag{12}$$

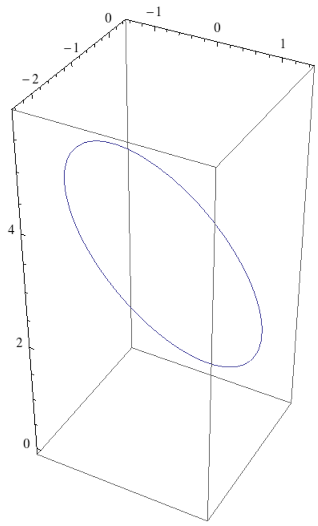

Figura 3: Curva $\gamma(t)$

Parametrizando a curva em questão:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2y \\ 1 - 2y = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2y \\ x^2 + (y+1)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t - 1 \\ z(t) = 3 - 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$$

$$\therefore \gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t - 1, 3 - 2\sqrt{2}\sin t), t \in [0, 2\pi] \tag{13}$$

$$\gamma'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, -2\sqrt{2}\cos t)$$
$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{2 + 8\cos^2 t}$$

Utilizando a definição de integral de linha de uma função escalar:

$$\int_\gamma \delta(x, y, z)\, ds = \int_{t_i}^{t_f} \delta(\gamma(t))||\gamma'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 8\cos^2 t}\sqrt{2 + 8\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} 2 + 8\cos^2 t\, dt =$$

$$2\pi + 8\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 2\pi + 4\Big(t + \sin 2t\Big)_0^{2\pi} = 10\pi$$