

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2014 - 13/10/2014

Turma A

Questão 1:

- a) (1,0 ponto) Seja $f(x) = \frac{1}{1+2x^3}$. Calcule $f^{(30)}(0)$.
- b) Obtenha uma expressão para a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n}$
- c) Encontre um valor para a soma do item b), quando $x = \frac{1}{2}$.

Solução:

- a) Sabe-se que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $|x| < 1$ (soma da PG). Sendo assim:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2x^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^3)^n, | -2x^3 | < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

Sabe-se que para uma série de potências positivas $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, a_k é dado pelo coeficiente de Taylor: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Como a série encontrada foi expandida em torno de $x_0 = 0$, temos que: $a_{30} = \frac{f^{(30)}(0)}{30!}$, o qual é coeficiente de x^{30} .

O termo geral da série obtida é dado por $\bar{a}_n = (-1)^n 2^n x^{3n}$.

Para $n = 10$, temos $\bar{a}_{10} = 2^{10} x^{30}$, o que significa que o coeficiente de x^{30} na série é 2^{10} .

Sendo assim, temos: $\frac{f^{(30)}(0)}{30!} = 2^{10}$

$$\therefore f^{(30)} = 2^{10} 30!$$

- b) Deseja-se encontrar uma expressão para $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n}$.

Pode-se observar que há uma certa semelhança entre os termos gerais desta série e da série do exercício anterior. Repare que derivando em x , multiplicando por x , derivando

mais uma vez e multiplicando por x mais uma vez, chegamos na mesma expressão. Sendo assim:

$$\frac{1}{1+2x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Derivando em x :

$$\begin{aligned} \frac{-2 \cdot 3x^2}{(1+2x^3)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 3n x^{3n-1}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \Rightarrow \frac{-6x^3}{(1+2x^3)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 3n x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Derivando mais uma vez:

$$\begin{aligned} \frac{-6[(3x^2)(1+2x^3)^2 - x^3 \cdot 2(1+2x^3)6x^2]}{(1+2x^3)^4} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n-1}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \frac{-6[3x^2 - 6x^5]}{(1+2x^3)^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n-1}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \therefore \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n} &= \frac{-18x^3(1-2x^3)}{(1+2x^3)^3}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

c) Como $x = \frac{1}{2}$ está dentro do intervalo de convergência da série do item b), temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 9n^2}{4^n} = \frac{-18 \cdot \frac{1}{8}(1 - 2 \cdot \frac{1}{8})}{(1 + 2 \cdot \frac{1}{8})^3} = -\frac{3^3 4}{5^3} = -\frac{108}{125}$$

Questão 2:

a) (1,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 3, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a1) Encontre uma série numérica cuja soma seja igual a $\int_0^{1/6} f(x) dx$.

a2) Encontre um valor aproximado para $\int_0^{1/6} f(x) dx$, com erro, em módulo, menor que 10^{-4} .

b) (1,5 pontos) Sabendo que a série de Fourier de senos de $g(x) = x(\pi - x)$, em $[0, \pi]$ é

$$\frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \dots \right),$$

calcule $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^6$.

Solução:

a1) Sabe-se que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sendo assim:

$$e^{3x} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \frac{e^{3x} - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!}, \forall x \neq 0$$

Para $x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!} = 3$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Assim:

$$\int_0^{x'} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n \cdot n!} \Big|_0^{x'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x')^n}{n \cdot n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x' = 1/6$:

$$\int_0^{1/6} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

a2) Deseja-se calcular $\int_0^{1/6} f(x) dx$ com $erro < \varepsilon = 10^{-4}$. Do item anterior, sabe-se que:

$$\int_0^{1/6} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!} \simeq \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

O erro da aproximação é dado por:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

Rapare que se não tivéssemos $n \cdot n!$ multiplicando 2^n , teríamos a soma de uma PG de razão $1/2$, a qual é fácil de calcular o valor exato da soma.

Repare também que o termo $\frac{1}{n \cdot n!}$ é sempre decrescente, ou seja:

$$\frac{1}{n \cdot n!} \leq \frac{1}{(k+1) \cdot (k+1)!}, \forall n \geq k+1$$

Sendo assim:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!} \leq \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

$$\therefore 2^k (k+1)(k+1)! > \frac{1}{\varepsilon} = 10^4$$

Para $k = 5$:

$$2^k (k+1)(k+1)! = 32 \cdot 6 \cdot 720 = 192 \cdot 720 > 10^4$$

Portanto:

$$\int_0^{1/6} f(x) dx \simeq \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

Com $erro < 10^{-4}$.

Questão 3: (3,0 pontos) Calcule a massa do sólido dado por:

$$u^2 + v^2 + w^2 \geq 1$$

$$u \geq \sqrt{3v^2 + 3w^2}$$

$$u \leq 4$$

tal que $w \geq 0$ e com densidade $\delta(u, v, w) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$

Solução:

O sólido está compreendido na região interna ao cone, exterior à esfera e inferior ao plano, conforme visto na figura abaixo:

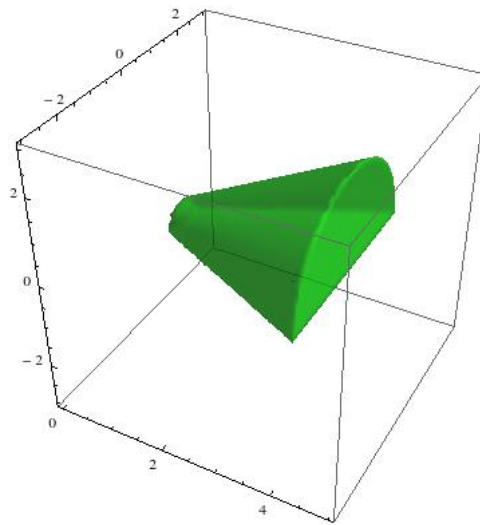


Figura 1: Esboço do sólido

A massa do sólido pode ser calculada por:

$$Massa = \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u, v, w) du dv dw$$

Faz-se a mudança para coordenadas esféricas e as regiões ficam descritas por:

$$\begin{cases} u = \rho \cdot \cos \phi \\ v = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\ w = \rho \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \\ |J(\rho, \theta, \phi)| = \rho^2 \cdot \sin \phi \end{cases}$$

Assim o domínio de integração em coordenadas esféricas fica:

$$D_{\rho, \theta, \phi} = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq \rho \leq \frac{4}{\cos \phi} \text{ e } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \right\}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\text{Massa} &= \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u, v, w) \, du \, dv \, dw = \iiint_{D_{\rho,\theta,\phi}} \delta(\rho, \theta, \phi) \cdot |J(\rho, \theta, \phi)| \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_1^{\frac{4}{\cos \phi}} \frac{\rho^2 \, \text{sen } \phi}{\rho} \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 \, \text{sen } \phi \Big|_1^{\frac{4}{\cos \phi}} \, d\phi \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 16 \frac{\text{sen } \phi}{\cos^2 \phi} - \text{sen } \phi \, d\phi \\
&= 8\pi \frac{1}{\cos \phi} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2} \cos \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 8\pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \\
M &= \frac{67\pi\sqrt{3} - 102\pi}{12}
\end{aligned}$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1a. Prova - 1o. Semestre 2014 - 01/04/2010

Turma B

Questão 1:(4,0 pontos)

- (a) Calcule $\int_0^3 \int_{\ln(x+1)}^{\ln 4} \cos(y - e^y) dy dx$.
- (b) Calcule $\iint_R \frac{(y-2x)^8}{(y+x)^5} dx dy$, onde R é a região limitada pelas retas $y = 2x$, $y = 2+2x$, $y = 2-x$ e $y = 3-x$

Solução:

- (a) Esboçando o domínio de integração, teremos:

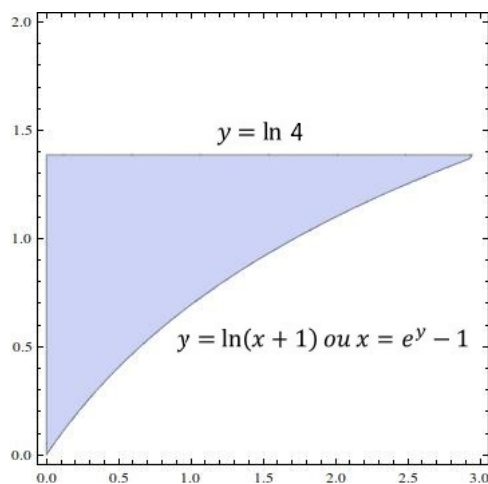


Figura 2: Domínio de integração

Não é possível encontrar uma primitiva em y para a função do integrando. Para calcular a integral é necessário inverter a ordem de integração. Baseado na imagem acima, o domínio pode ser expresso, também, por:

$$D(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq e^y - 1, 0 \leq y \leq \ln 4\}$$

A integral será calculada por:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\ln 4} \int_0^{e^y-1} \cos(y - e^y) dx dy \\ &= \int_0^{\ln 4} (e^y - 1) \cos(y - e^y) dy \\ &= -\sin(y - e^y) \Big|_0^{\ln 4} \\ &= -\sin(\ln 4 - 4) + \sin(-1) \end{aligned}$$

(b) O domínio de integração é exibido abaixo

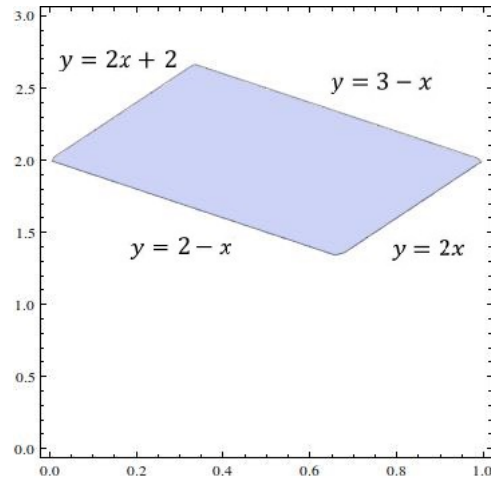


Figura 3: Domínio de integração

Faz-se a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = y - 2x \\ v = y + x \end{cases}$$

O jacobiano da transformação é dado por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \Rightarrow |J| = \frac{1}{3}$$

O domínio de integração é exibido abaixo

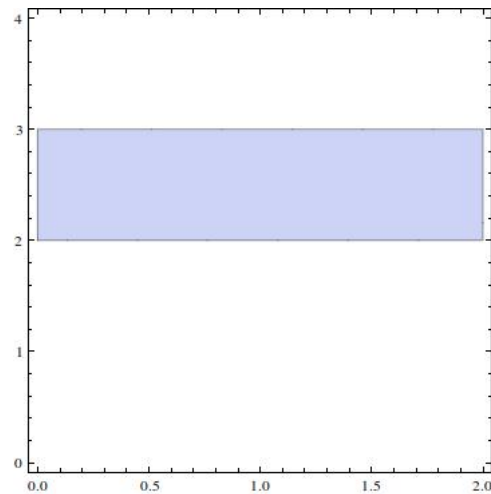


Figura 4: Domínio de integração após mudança

E passa a ser dado por:

$$D(u, v) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq 2, 2 \leq v \leq 3\}$$

A integral a ser calculada passa a ser:

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \int_2^3 \frac{1}{3} \frac{u^8}{v^5} dv du \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^2 \int_2^3 u^8 \cdot v^{-5} dv du \\
 &= -\frac{1}{12} \int_0^2 v^{-4} \Big|_2^3 u^8 du \\
 &= \frac{65}{15552} \frac{u^9}{9} \Big|_0^2 \\
 &= \frac{520}{2187}
 \end{aligned}$$

Questão 2 (3,0 pontos) Calcule a integral

$$\int \int \int_E xz \, dx \, dy \, dz$$

sobre a região $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \text{ e } z \geq \sqrt{x^2 + (y-4)^2}, x \geq 0\}$

Solução:

O sólido descrito pela região E está compreendido na região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

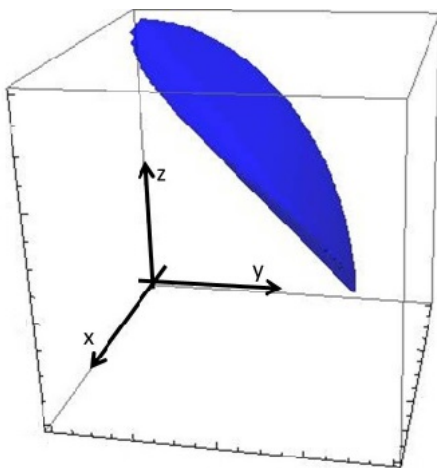


Figura 5: Região E

Portanto:

$$\begin{aligned} \int \int \int_E xz \, dx \, dy \, dz &= \int \int_R \left(\int_{\sqrt{x^2 + (y-4)^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} xz \, dz \right) dx \, dy = \int \int_R x \frac{z^2}{2} \Big|_{\sqrt{x^2 + (y-4)^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int \int_R x(-2x^2 - 2y^2 + 8y) \, dx \, dy = - \int \int_R x(x^2 + y^2 - 4y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Sendo R a projeção do sólido E no plano xy .

Realizando a intersecção das 2 superfícies que delimitam o sólido, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z^2 = x^2 + (y-4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + (y-4)^2 = 16 \\ z^2 = x^2 + (y-4)^2 \end{cases}$$

A projeção no plano xy desta intersecção é dada por:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + (y-4)^2 = 16 &\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 8y + 16 = 16 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 8y \\ \therefore x^2 + y^2 &= 4y \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Sendo assim, a região R é dada por:

$$R = \{(x, y) : x^2 + (y - 2)^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

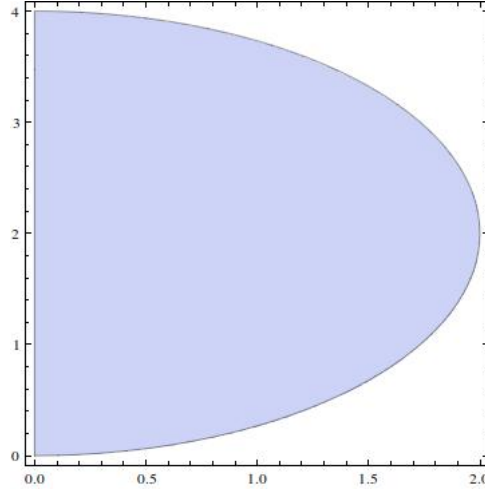


Figura 6: Região R

Realizando uma mudança de coordenadas para coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ |\det J| = \rho \end{cases}$$

Substituindo a mudança na equação da fronteira de R :

$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow \rho^2 = 4\rho \sin \theta \Rightarrow \rho = 4 \sin \theta$$

Sendo assim, a região R pode ser escrita em coordenadas polares da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho \leq 4 \sin \theta \\ 0 &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Aplicando a mudança na integral, temos:

$$\begin{aligned} & - \int \int_R x(x^2 + y^2 - 4y) dx dy = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \sin \theta} \rho \cos \theta (\rho^2 - 4\rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \sin \theta} (\rho^4 \cos \theta - 4\rho^3 \sin \theta \cos \theta) d\rho d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^5}{5} \Big|_0^{4 \sin \theta} \cos \theta - 4 \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{4 \sin \theta} \sin \theta \cos \theta \right) d\theta \\ &= 4^5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

Realizando a seguinte mudança de variáveis: $u = \sin \theta \Rightarrow du = \cos \theta d\theta$, temos:

$$= \frac{4^5}{20} \int_0^1 u^5 du = \frac{4^5}{20} \frac{u^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{4^5}{20 \cdot 6} = \frac{256}{30}$$

Questão 3: (3,0 pontos) Calcule a massa do sólido dado por:

$$u^2 + v^2 + w^2 \geq 1$$

$$u \geq \sqrt{3v^2 + 3w^2}$$

$$u \leq 6$$

tal que $w \geq 0$ e com densidade $\delta(u, v, w) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$

Solução:

O sólido está compreendido na região interna ao cone, exterior à esfera e inferior ao plano, conforme visto na figura abaixo:

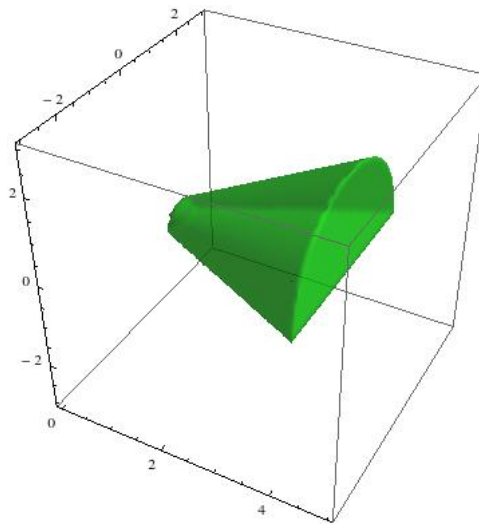


Figura 7: Esboço do sólido

A massa do sólido pode ser calculada por:

$$Massa = \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u, v, w) du dv dw$$

Faz-se a mudança para coordenadas esféricas e as regiões ficam descritas por:

$$\begin{cases} u = \rho \cdot \cos \phi \\ v = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\ w = \rho \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \\ |J(\rho, \theta, \phi)| = \rho^2 \cdot \sin \phi \end{cases}$$

Assim o domínio de integração em coordenadas esféricas fica:

$$D_{\rho, \theta, \phi} = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq \rho \leq \frac{6}{\cos \phi} \text{ e } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \right\}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\text{Massa} &= \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u, v, w) \, du \, dv \, dw = \iiint_{D_{\rho,\theta,\phi}} \delta(\rho, \theta, \phi) \cdot |J(\rho, \theta, \phi)| \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_1^{\frac{6}{\cos \phi}} \frac{\rho^2 \, \text{sen } \phi}{\rho} \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 \, \text{sen } \phi \Big|_1^{\frac{6}{\cos \phi}} \, d\phi \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 36 \frac{\text{sen } \phi}{\cos^2 \phi} - \text{sen } \phi \, d\phi \\
&= 18\pi \frac{1}{\cos \phi} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2} \cos \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 18\pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \\
M &= \frac{49\pi\sqrt{3} - 74\pi}{4}
\end{aligned}$$