# Adaptative balancing techniques applied to parallel mechanisms

Tarcisio Antonio Hess Coelho [a], Renato Maia Matarazzo Orsino [b], André Garnier Coutinho [a]

[a] *Department of Mechatronics and Mechanical Systems Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil. E-mail: tarchess@usp.br*
[b] *Department of Mechanical Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil.*

**SUMMARY**

KEYWORDS:

## 1 Introduction and literature review

### *1.1 Dynamic Models*

Modelo do mecanismo RR

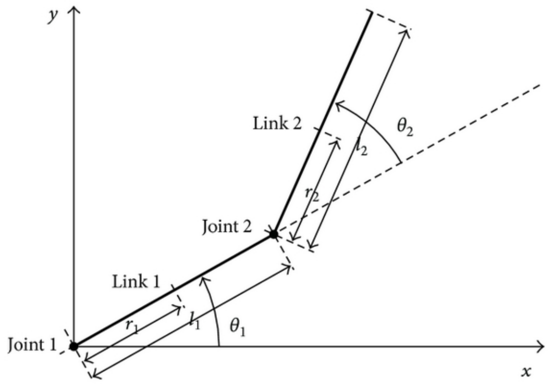


Figure 1: Robô RR

i) Primeiro definimos $\nu_q$ coordenadas $\mathbb{q}$. Estas podem ser subdivididas em $\nu^\#$ coordenadas independentes $\mathbb{q}^\#$ e $\nu_q^\circ$ coordenadas redudantes $\mathbb{q}^\circ$.

$$\mathbb{q} = \begin{bmatrix} \mathbb{q}^\# \\ \mathbb{q}^\circ \end{bmatrix}$$

No caso do mecanismo *RR*, temos:

$$\mathbb{q}^\# = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

$$\mathbb{q}^\circ = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

Com $\nu^\# = 2$ e $\nu_q^\circ = 4$. Neste caso, as componentes de $\mathbb{q}^\circ$ são as coordenadas dos centros de massa das barras, escritas no referencial inercial $O_{xy}$.

ii) Depois definimos os vetores de velocidades absolutas:

$$\mathbb{w} = \begin{bmatrix} \mathbb{w}_\omega \\ \mathbb{w}_v \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{w}_\omega = \begin{bmatrix} \omega_{z1} & \omega_{z2} \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

$$\mathbb{w}_v = \begin{bmatrix} v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2} \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

Sendo $\mathbb{w}_v$ as componentes das velocidades absolutas dos centros de massa das barras, escritas nas bases presas s barras, e $\mathbb{w}_\omega$ as componentes das velocidades angulares absolutas, escritas nas bases presas s barras.

iii) Definimos $\nu_p$ coordenadas $\mathbb{p}$. Estas podem ser subdivididas em $\nu^\#$ coordenadas independentes $\mathbb{p}^\#$ e $\nu_p^\circ$ coordenadas redudantes $\mathbb{p}^\circ$. As coordenadas $\mathbb{p}^\#$ podem ser subdivididas em $\nu_\omega^\#$ velocidades angulares $\mathbb{\omega}^\#$ e $\nu_v^\#$ velocidades lineares $\mathbb{v}^\#$. As coordenadas $\mathbb{p}^\circ$ podem ser subdivididas em $\nu_\omega^\circ$ velocidades angulares $\mathbb{\omega}^\circ$ e $\nu_v^\circ$ velocidades lineares $\mathbb{v}^\circ$.

$$\mathbb{p} = \begin{bmatrix} \mathbb{p}^\# \\ \mathbb{p}^\circ \end{bmatrix} \qquad \mathbb{p}^\# = \begin{bmatrix} \mathbb{\omega}^\# \\ \mathbb{v}^\# \end{bmatrix} \qquad \mathbb{p}^\circ = \begin{bmatrix} \mathbb{\omega}^\circ \\ \mathbb{v}^\circ \end{bmatrix}$$

Como é conveniente que as velocidades generalizadas $\mathbb{p}$ sejam velocidades absolutas, escolhemos as componentes de $\mathbb{p}$ como sendo as mesmas componentes de $\mathbb{w}$, respeitando a ordenação indicada acima.

No caso do mecanismo $\underline{RR}$, temos:

$$\mathbb{\omega}^\# = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbb{v}^\# = \emptyset \tag{6}$$

$$\mathbb{\omega}^\circ = \emptyset \tag{7}$$

$$\mathbb{v}^\circ = \begin{bmatrix} v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2} \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

Com $\nu_\omega^\# = 2$, $\nu_v^\# = 0$, $\nu_\omega^\circ = 0$, $\nu_v^\circ = 4$ e $\nu_p^\circ = \nu_\omega^\circ + \nu_v^\circ = 4$.

iv) Realizamos a cinemtica de posição para os centros de massa das barras, de modo a relacionar as coordenadas $\mathbb{q}^\circ$ com as coordenadas $\mathbb{q}^\#$. Para isso, utilizamos matrizes de transformação homogênea.

$$[\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_0|\mathtt{B}_1} = \begin{bmatrix} Rot(\theta_1, z_0) & [\overrightarrow{\mathtt{O}_0\mathtt{O}_1}]_{\mathtt{B}_0} \\ \mathbb{0}_{2x1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_1 & -\mathsf{s}_1 & 0 \\ \mathsf{s}_1 & \mathsf{c}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} [\overrightarrow{\mathtt{O}_1\mathtt{G}_1}]_{\mathtt{B}_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_1|\mathtt{B}_2} = \begin{bmatrix} Rot(\theta_2, z_1) & [\overrightarrow{\mathtt{O}_1\mathtt{O}_2}]_{\mathtt{B}_1} \\ \mathbb{0}_{2x1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_2 & -\mathsf{s}_2 & l_1 \\ \mathsf{s}_2 & \mathsf{c}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} [\overrightarrow{\mathtt{O}_2\mathtt{G}_2}]_{\mathtt{B}_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{2g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_0|\mathtt{B}_2} = [\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_0|\mathtt{B}_1}[\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_1|\mathtt{B}_2} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_{1+2} & -\mathsf{s}_{1+2} & l_1\mathsf{c}_1 \\ \mathsf{s}_{1+2} & \mathsf{c}_{1+2} & l_1\mathsf{s}_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_0|\mathtt{B}_1} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{\mathtt{O}_1\mathtt{G}_1}]_{\mathtt{B}_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1g}\mathsf{c}_1 \\ l_{1g}\mathsf{s}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_0|\mathtt{B}_2} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{\mathtt{O}_2\mathtt{G}_2}]_{\mathtt{B}_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\mathsf{c}_1 + l_{2g}\mathsf{c}_{1+2} \\ l_1\mathsf{s}_1 + l_{2g}\mathsf{s}_{1+2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Repare que a partir das matrizes de transformação homognea encontradas, encontramos tambm as seguintes matrizes de mudança de base:

$$\mathbb{R}_1 = [\mathbf{1}]_{\mathtt{B}_0|\mathtt{B}_1} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_1 & -\mathsf{s}_1 \\ \mathsf{s}_1 & \mathsf{c}_1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbb{R}_2 = [\mathbf{1}]_{\mathtt{B}_0|\mathtt{B}_2} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_{1+2} & -\mathsf{s}_{1+2} \\ \mathsf{s}_{1+2} & \mathsf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Com a cinemtica de posição, conseguimos obter $\nu_q^\circ = 4$ equações vinculares de posição. Sendo assim, o vetor dos vínculos de posição  dado por:

$$\mathbb{\phi}(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} x_1 - l_{1g}\mathsf{c}_1 \\ y_1 - l_{1g}\mathsf{s}_1 \\ x_2 - l_1\mathsf{c}_1 - l_{2g}\mathsf{c}_{1+2} \\ y_2 - l_1\mathsf{s}_1 - l_{2g}\mathsf{s}_{1+2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

v) Utilizamos as matrizes de rotação para calcular as velocidades angulares em função de $\mathbb{q}^\#$ e $\dot{\mathbb{q}}^\#$:

$$[\boldsymbol{\omega}_1]^{\mathsf{S}}_{\mathtt{B}_1|\mathtt{B}_1} = \mathbb{R}_1^T\dot{\mathbb{R}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\boldsymbol{\omega}_1]_{\mathtt{B}_1} = \dot{\theta}_1\hat{k} \tag{14}$$

$$[\boldsymbol{\omega}_2]^{\mathsf{S}}_{\mathtt{B}_2|\mathtt{B}_2} = \mathbb{R}_2^T\dot{\mathbb{R}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\boldsymbol{\omega}_2]_{\mathtt{B}_2} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\hat{k} \tag{15}$$

vi) Derivamos as equações de posição ((29) e (30)) para encontrar as velocidades dos centros de massa:

$$[\boldsymbol{v}_1]_{\mathrm{B}_0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{1g}\mathsf{s}_1\dot{\theta}_1 \\ l_{1g}\mathsf{c}_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$[\boldsymbol{v}_2]_{\mathrm{B}_0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\mathsf{s}_1\dot{\theta}_1 - l_{2g}\mathsf{s}_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1\mathsf{c}_1\dot{\theta}_1 + l_{2g}\mathsf{c}_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \tag{17}$$

vii) Passamos as velocidades dos centros de massa para as bases pesas nas barras:

$$[\boldsymbol{v}_1]_{\mathrm{B}_1} = [\mathbf{1}]_{\mathrm{B}_1 \mid \mathrm{B}_0}[\boldsymbol{v}_1]_{\mathrm{B}_0} = \mathbb{R}_1^T[\boldsymbol{v}_1]_{\mathrm{B}_0}$$
$$[\boldsymbol{v}_2]_{\mathrm{B}_2} = [\mathbf{1}]_{\mathrm{B}_2 \mid \mathrm{B}_0}[\boldsymbol{v}_2]_{\mathrm{B}_0} = \mathbb{R}_2^T[\boldsymbol{v}_2]_{\mathrm{B}_0}$$

Definindo:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0_{2x2} \\ 0_{2x2} & R_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Temos:

$$\nu_v = \boldsymbol{R}^T\dot{q}^o \tag{19}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{1+2} & -s_{1+2} \\ 0 & 0 & s_{1+2} & c_{1+2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1g}\dot{\theta}_1 \\ l_1 s_2\dot{\theta}_1 \\ (l_1c_2 + l_{2g})\dot{\theta}_1 + l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

viii) Montamos os vetores $p^{\#}$ e $p^o$ em função de $q^{\#}$ e $\dot{q}^{\#}$:

$$p^{\#} = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} = P^{\#}(q^{\#}, \dot{q}^{\#}) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$p^o = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \end{bmatrix} = P^o(q^{\#}, \dot{q}^{\#}) = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1g}\dot{\theta}_1 \\ l_1 s_2\dot{\theta}_1 \\ (l_1c_2 + l_{2g})\dot{\theta}_1 + l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

ix) Utilizando o fato de que $P^{\#}(q^{\#}, \dot{q}^{\#})$ e $P^o(q^{\#}, \dot{q}^{\#})$ so lineares em $\dot{q}^{\#}$, encontramos as transformações lineares $\Psi(q)$ e $\Upsilon(q)$ e o vetor dos vínculos de velocidades $\Lambda(q, p)$:

$$p^{\#} = P^{\#}(q^{\#}, \dot{q}^{\#}) = \frac{\partial P^{\#}}{\partial \dot{q}^{\#}}\dot{q}^{\#} = \Psi\dot{q}^{\#} \tag{23}$$

$$p^o = P^o(q^\#, \dot{q}^\#) = \frac{\partial P^o}{\partial \dot{q}^\#}\dot{q}^\# = \Upsilon \dot{q}^\# \tag{24}$$

No caso do mecanismo $\underline{RR}$, temos:

$$\Psi = \frac{\partial P^\#}{\partial \dot{q}^\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\Upsilon = \frac{\partial P^o}{\partial \dot{q}^\#} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_{2g} & l_{2g} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Como $p^\#$ e $\dot{q}^\#$ so independentes e tem o mesmo tamanho:

$$\dot{q}^\# = \Psi^{-1} p^\#$$
$$\Rightarrow p^o = \Upsilon \Psi^{-1} p^\#$$

$$\therefore \Lambda(q,p) = \Upsilon \Psi^{-1} p^\# - p^o = 0 \tag{27}$$

x) A partir dos vínculos de velocidades, encontramos a matriz $\mathbb{C}$ dos vínculos cinemáticos:

$$p^o = \Upsilon \Psi^{-1} p^\# \Rightarrow p = \begin{bmatrix} I_{nxn} \\ \Upsilon \Psi^{-1} \end{bmatrix} p^\#$$

$$\therefore \mathbb{C} = \begin{bmatrix} I_{nxn} \\ \Upsilon \Psi^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 & l_{2g} \end{bmatrix} \tag{28}$$

xi) Como (39) e (43) so transformações inversíveis, encontramos a transformação linear $\Gamma(q)$:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}^\# \\ \dot{q}^o \end{bmatrix} = \dot{Q}(q,p) = \begin{bmatrix} \Psi^{-1}(q) p^\# \\ \boldsymbol{R}(q)\nu_v(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} - \omega_{z1} \\ v_{x1}c_1 - v_{y1}s_1 \\ v_{x1}s_1 + v_{y1}c_1 \\ v_{x2}c_{1+2} - v_{y2}s_{1+2} \\ v_{x2}s_{1+2} + v_{y2}c_{1+2} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\Gamma(q) = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1+2} & -s_{1+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{1+2} & c_{1+2} \end{bmatrix} \tag{30}$$

xii) Aplicamos o mtodos de Gibbs-Appel extendido:

O mtodo de Gibbs-Appell apresenta certa simularidade com o mtodo de Lagrange, pois utiliza derivadas de uma função energia para encontrar a equações de movimento do sistema. Porém, a função energia utilizada no  a energia cintica, mas sim a energia de acelerações. A energia de acelerações para um corpo rígido é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2}m(a_G \cdot a_G) + \frac{1}{2}(\dot{\omega} \cdot \mathbb{I}\dot{\omega} + 2\dot{\omega}(\omega \wedge \mathbb{I}\omega))$$

Sendo $m$ a massa do corpo rígido, $\mathbb{I}$ seu tensor de inércia, $a_G$ o vetor aceleração absoluta de seu centro de massa e $\omega$ o vetor velocidade angular absoluta.

O modelo dinmico utilizando o mtodo de Gibbs-Appel extendido,  dado pela seguinte expresso:

$$\mathbb{C}(q)^T(\mathbb{M}(q)\dot{p} + \mathbb{V}(q,p) + \mathbb{G}(q)) = (\Psi^T)^{-1} f_{\dot{q}^\#} \tag{31}$$

Com:

$$\mathbb{M}(q) = \frac{\partial^2 \mathbb{S}}{\partial \dot{p}^2} \tag{32}$$

$$\mathbb{V}(q,p) = \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial^2 \mathbb{S}}{\partial \dot{p}^2}\dot{p} \tag{33}$$

$$\mathbb{G}(q) = \Gamma^T \frac{\partial E_p}{\partial q} \tag{34}$$

Sendo $E_p$ a energia potencial do sistema e $f_{\dot{q}^\#}$ os esforços nas direções de $\dot{q}^\#$.
No caso do mecanismo $\underline{RR}$, temos:

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2}\Big(m_1(\dot{v}_{x1}^2 + \dot{v}_{y1}^2) + m_2(\dot{v}_{x2}^2 + \dot{v}_{y2}^2) + J_{z1}\dot{\omega}_{z1}^2 + +J_{z2}\dot{\omega}_{z2}^2\Big) \tag{35}$$

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{36}$$

Calculando as derivadas:

$$\mathbb{M}(q) = \begin{bmatrix} J_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\mathbb{V}(q,p) = 0 \tag{38}$$

$$\mathbb{G}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g s_1 \\ m_1 g c_1 \\ m_1 g s_{1+2} \\ m_1 g c_{1+2} \end{bmatrix} \tag{39}$$

Sendo assim, o modelo dinmico para o mecanismo <u>RR</u>  dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 & l_{2g} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1}\dot{\omega}_{z11} \\ J_{z2}\dot{\omega}_{z12} \\ m_1 \dot{v}_{x11} \\ m_1 \dot{v}_{y11} \\ m_2 \dot{v}_{x12} \\ m_2 \dot{v}_{y12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g s_1 \\ m_1 g c_1 \\ m_2 g s_{1+2} \\ m_2 g c_{1+2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \tag{40}$$

Repare que o modelo no depende das coordenadas $q^o$. Elas foram uteis para a dedução do modelo, mas com o modelo deduzido elas no tem mais utilidade.

- Massa pontual:

$$\mathbb{q}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\mathbb{p}_n = \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_n \dot{p}_{n,1} \\ M_n \dot{p}_{n,2} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ f_{n,2} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{43}$$

Que pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} M_n & 0 \\ 0 & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ f_{n,2} \end{bmatrix}$$

- RR:

$$\mathbb{q}_n = \begin{bmatrix} \theta_{1\,n} \\ \theta_{2\,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$\mathbb{p}_n = \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \\ p_{n,3} \\ p_{n,4} \\ p_{n,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1 \mathsf{s}_{n,2} & 0 \\ l_{g2} + l_1 \mathsf{c}_{n,2} & l_{g2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} \tag{45}$$

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1 \mathrm{s}_{n,2} & 0 \\ l_1 \mathrm{c}_{n,2} & l_{g2} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1}\dot{p}_{n,1} \\ J_{z2}\dot{p}_{n,2} \\ m_1\dot{p}_{n,3} \\ m_2\dot{p}_{n,4} \\ m_2\dot{p}_{n,5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_1 p_{n,2} p_{n,5} \\ m_1 p_{n,2} p_{n,4} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \mathrm{c}_{n,1} \\ m_2 \mathrm{s}_{n,1+2} \\ m_2 \mathrm{c}_{n,1+2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} l_{g1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ l_1 \mathrm{s}_{n,2} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ l_1 \mathrm{c}_{n,2} & l_{g2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{n,1} \\ \dot{p}_{n,2} \\ \dot{p}_{n,3} \\ \dot{p}_{n,4} \\ \dot{p}_{n,5} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \mathrm{c}_{n,2} p_{n,1}(-p_{n,1} + p_{n,2}) \\ l_1 \mathrm{s}_{n,2} p_{n,1}(p_{n,1} - p_{n,2}) \end{bmatrix}
\end{cases}
\tag{46}
$$

Que pode ser reescrito como:

$$
\begin{bmatrix} J_{z1} + J_{z2} + m_1 l_{g1}^2 + m_2(l_1^2 + 2 l_1 l_{g2} \mathrm{c}_{n,2} + l_{g2}^2) & J_{z2} + m_2 l_{g2}(l_1 \mathrm{c}_{n,2} + l_{g2}) \\ J_{z2} + m_2 l_{g2}(l_1 \mathrm{c}_{n,2} + l_{g2}) & J_{z2} + m_2 l_{g2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{g2} \mathrm{s}_{n,2} \dot{q}_{n,2}^2 - 2 m_2 l_1 l_{g2} \mathrm{s}_{n,2} \dot{q}_{n,1} \dot{q}_{n,2} \\ m_2 l_1 l_{g2} \mathrm{s}_{n,2} \dot{q}_{n,1}^2 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} m_1 l_{g1} \mathrm{c}_{n,1} + m_2(l_{g2} \mathrm{c}_{n,1+2} + l_1 \mathrm{c}_{n,1}) \\ m_2 l_{g2} \mathrm{c}_{n,1+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix}
$$

- RR (0) com 2 massas acopladas (1 e 2):

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{q}_{0,1} \\ \dot{q}_{0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{0,1} \\ p_{0,2} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1 \mathrm{s}_{0,2} & 0 \\ l_1 \mathrm{c}_{0,2} & l_{g2} \\ -L_1 \mathrm{s}_{0,1} & 0 \\ L_1 \mathrm{c}_{0,1} & 0 \\ -l_1 \mathrm{s}_{0,1} & -L_2 \mathrm{s}_{0,1} \\ l_1 \mathrm{c}_{0,1} & L_2 \mathrm{c}_{0,1} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1}\dot{p}_{0,1} \\ J_{z2}\dot{p}_{0,2} \\ m_1\dot{p}_{0,3} \\ m_2\dot{p}_{0,4} \\ m_2\dot{p}_{0,5} \\ M_1\dot{p}_{1,1} \\ M_1\dot{p}_{1,2} \\ M_2\dot{p}_{2,1} \\ M_2\dot{p}_{2,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_1 p_{0,2} p_{0,5} \\ m_1 p_{0,2} p_{0,4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \mathrm{c}_{0,1} \\ m_2 \mathrm{s}_{0,1+2} \\ m_2 \mathrm{c}_{0,1+2} \\ 0 \\ M_1 \\ 0 \\ M_2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} u_{0,1} \\ u_{0,2} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} l_{g1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 \mathrm{s}_{i,2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 \mathrm{c}_{i,2} & l_{g2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 \mathrm{s}_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1 \mathrm{c}_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_1 \mathrm{s}_{0,1} & L_2 \mathrm{s}_{0,1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 \mathrm{c}_{0,1} & -L_2 \mathrm{c}_{0,1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{0,1} \\ \dot{p}_{0,2} \\ \dot{p}_{0,3} \\ \dot{p}_{0,4} \\ \dot{p}_{0,5} \\ \dot{p}_{1,1} \\ \dot{p}_{1,2} \\ \dot{p}_{2,1} \\ \dot{p}_{2,1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \mathrm{c}_{0,2} p_{0,1}(-p_{0,1} + p_{0,2}) \\ l_1 \mathrm{s}_{0,2} p_{0,1}(p_{0,1} - p_{0,2}) \\ L_1 \mathrm{c}_{0,1} p_{0,1}^2 \\ L_1 \mathrm{s}_{0,1} p_{0,1}^2 \\ l_1 \mathrm{c}_{0,1} p_{0,1}^2 + L_1 \mathrm{c}_{0,1+2} p_{0,2}^2 \\ l_1 \mathrm{s}_{0,1} p_{0,1}^2 + L_1 \mathrm{s}_{0,1+2} p_{0,2}^2 \end{bmatrix}
\end{cases}
\tag{47}
$$

Que pode ser reescrito como:

$$\mathbb{M}^{\#}\ddot{\mathbb{q}}_0 + \mathbb{v}^{\#} + \mathbb{g}^{\#} = \mathbb{u}_0 \tag{48}$$

Sendo:

$$\mathbb{M}^{\#}_{1,1} = J_{z1} + J_{z2} + M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2 + m_1 l_{g1}^2 + m_2 l_{g2}^2 + (M_2 + m_2) l_1^2 + 2 l_1 \mathsf{c}_{0,2}(L_2 M_2 + m_2 l_{g2}) \tag{49}$$

$$\mathbb{M}^{\#}_{1,2} = \mathbb{M}^{\#}_{2,1} = J_{z2} + M_2 L_2 (l_1 \mathsf{c}_{0,2} + L_2) + m_2 l_{g2}(l_1 \mathsf{c}_{0,2} + l_{g2}) \tag{50}$$

$$\mathbb{M}^{\#}_{2,2} = J_{z2} + M_2 L_2^2 + m_2 l_{g2}^2 \tag{51}$$

$$\mathbb{v}^{\#}_1 = -(M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) l_1 \mathsf{s}_{0,2} \dot{q}_{0,2}(2\dot{q}_{0,1} + \dot{q}_{0,2}) \tag{52}$$

$$\mathbb{v}^{\#}_2 = (M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) l_1 \mathsf{s}_{0,2} \dot{q}_{0,1}^2 \tag{53}$$

$$\mathbb{g}^{\#}_1 = g(M_1 L_1 \mathsf{c}_{0,1} + m_1 l_{g1} \mathsf{c}_{0,1} + (M_2 + m_2) l_1 \mathsf{c}_{0,1} + (M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) \mathsf{c}_{0,1+2}) \tag{54}$$

$$\mathbb{g}^{\#}_2 = g(M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) \mathsf{c}_{0,1+2} \tag{55}$$

- RR balanceado:

Escolhendo $L_1$ e $L_2$ de modo que $\mathbb{g}^{\#} = \mathbb{0}$:

$$\begin{cases} L_1 = -\frac{M_2 l_1 + m_1 l_{g1} + m_2 l_2}{M_1} \\ L_2 = -\frac{m_2 l_{g2}}{M_2} \end{cases} \tag{56}$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$\mathbb{M}^{\#}_{1,1} = J_{z1} + J_{z2} + m_1 l_{g2}^2 + l_1^2 (M_2 + m_2) + \frac{m_2^2 l_{g2}^2}{M_2} + \frac{(m_1 l_{g1} + (M_2 + m_2) l_1)^2}{M_1} \tag{57}$$

$$\mathbb{M}^{\#}_{1,2} = \mathbb{M}^{\#}_{2,1} = \mathbb{M}^{\#}_{2,2} = J_{z2} + \frac{m_2 (M_2 + m_2) l_{g2}^2}{M_2} \tag{58}$$

$$\mathbb{v}_1^{\#} = 0 \tag{59}$$

$$\mathbb{v}_2^{\#} = 0 \tag{60}$$

$$\mathbb{g}_1^{\#} = 0 \tag{61}$$

$$\mathbb{g}_2^{\#} = 0 \tag{62}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} J_{z1} + J_{z2} + m_1 l_{g2}^2 + l_1^2 (M_2 + m_2) + \frac{m_2^2 l_{g2}^2}{M_2} + \frac{(m_1 l_{g1} + (M_2+m_2) l_1)^2}{M_1} & J_{z2} + \frac{m_2 (M_2+m_2) l_{g2}^2}{M_2} \\ J_{z2} + \frac{m_2 (M_2+m_2) l_{g2}^2}{M_2} & J_{z2} + \frac{m_2 (M_2+m_2) l_{g2}^2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix} \tag{63}$$

- 5R balanceado:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\mathsf{c}_{1,1+2}}{l_1 \mathsf{s}_{1,2}} & \frac{\mathsf{s}_{1,1+2}}{l_1 \mathsf{s}_{1,2}} \\ -\frac{l_1 \mathsf{c}_{1,1} + l_2 \mathsf{c}_{1,1+2}}{l_1 l_2 \mathsf{s}_{1,2}} & -\frac{l_1 \mathsf{s}_{1,1} + l_2 \mathsf{s}_{1,1+2}}{l_1 l_2 \mathsf{s}_{1,2}} \\ \frac{\mathsf{c}_{2,1+2}}{l_1 \mathsf{s}_{2,2}} & \frac{\mathsf{s}_{2,1+2}}{l_1 \mathsf{s}_{2,2}} \\ -\frac{l_1 \mathsf{c}_{2,1} + l_2 \mathsf{c}_{2,1+2}}{l_1 l_2 \mathsf{s}_{2,2}} & -\frac{l_1 \mathsf{s}_{2,1} + l_2 \mathsf{s}_{2,1+2}}{l_1 l_2 \mathsf{s}_{2,2}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{M}_{1,1}^{\#} & \mathbb{M}_{1,2}^{\#} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{M}_{1,2}^{\#} & \mathbb{M}_{1,2}^{\#} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{M}_{1,1}^{\#} & \mathbb{M}_{1,2}^{\#} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{M}_{1,2}^{\#} & \mathbb{M}_{1,2}^{\#} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{0,1} \\ \ddot{q}_{0,2} \\ \ddot{q}_{1,1} \\ \ddot{q}_{1,2} \\ \ddot{q}_{2,1} \\ \ddot{q}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathsf{c}_{1,1+2}}{l_1 \mathsf{s}_{1,2}} & \frac{\mathsf{s}_{1,1+2}}{l_1 \mathsf{s}_{1,2}} \\ \frac{\mathsf{c}_{2,1+2}}{l_1 \mathsf{s}_{2,2}} & \frac{\mathsf{s}_{2,1+2}}{l_1 \mathsf{s}_{2,2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 \mathsf{s}_{1,1} + l_2 \mathsf{s}_{1,1+2} & l_2 \mathsf{s}_{1,1+2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 \mathsf{c}_{1,1} - l_2 \mathsf{c}_{1,1+2} & -l_2 \mathsf{c}_{1,1+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & l_1 \mathsf{s}_{2,1} + l_2 \mathsf{s}_{2,1+2} & l_2 \mathsf{s}_{2,1+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -l_1 \mathsf{c}_{2,1} - l_2 \mathsf{c}_{2,1+2} & -l_2 \mathsf{c}_{2,1+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{0,1} \\ \ddot{q}_{0,2} \\ \ddot{q}_{1,1} \\ \ddot{q}_{1,2} \\ \ddot{q}_{2,1} \\ \ddot{q}_{2,2} \end{bmatrix} = \\ -\begin{bmatrix} l_1 \mathsf{c}_{1,1} \dot{q}_{1,1}^2 + l_2 \mathsf{c}_{1,1+2} (\dot{q}_{1,1} + \dot{q}_{1,2})^2 \\ l_1 \mathsf{s}_{1,1} \dot{q}_{1,1}^2 + l_2 \mathsf{s}_{1,1+2} (\dot{q}_{1,1} + \dot{q}_{1,2})^2 \\ l_1 \mathsf{c}_{2,1} \dot{q}_{2,1}^2 + l_2 \mathsf{c}_{2,1+2} (\dot{q}_{2,1} + \dot{q}_{2,2})^2 \\ l_1 \mathsf{s}_{2,1} \dot{q}_{2,1}^2 + l_2 \mathsf{s}_{2,1+2} (\dot{q}_{2,1} + \dot{q}_{2,2})^2 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{64}$$

## Acknowledgments