Adaptative balancing techniques applied to parallel mechanisms

Tarcisio Antonio Hess Coelho [a], Renato Maia Matarazzo Orsino [b], André Garnier Coutinho [a]

[a] *Department of Mechatronics and Mechanical Systems Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil. E-mail: tarchess@usp.br*
[b] *Department of Mechanical Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil.*

SUMMARY

KEYWORDS:

0.1 Control

Dinâmica Inversa

O problema da dinâmica inversa constitui-se basicamente em calcular os esforços ativos aplicados pelos atuadores necessários para um mecanismo realizar uma dada trajetória. Ou seja, para cada instante de tempo t, conhencendo-se $\mathbb{q}_n^\#$, $\dot{\mathbb{q}}_n^\#$ e $\ddot{\mathbb{q}}_n^\#$, desaja-se determinar $\mathbb{u}_n$.

É um procedimento importante para avaliar a eficácia do balanceamento realizado, pois torna possível comparar os esforços dos atuadores em diferentes trajetórias para o mecanismo balanceado e desbalanceado, mostrando em quais casos o balanceamento é vantajoso.

Como foi visto na seção anterior, é possível calcular dos esforços dos atuadores pela seguinte expressão:

$$\mathbb{u}_n = \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{q}_n)\Big(\mathbb{M}_n(\mathbb{q}_n)\dot{\mathbb{p}}_n + \mathbb{w}_n(\mathbb{q}_n, \mathbb{p}_n) + \mathbb{z}_n(\mathbb{q}_n)\Big) \tag{1}$$

Porém, nesta expressão, $\mathbb{u}_n$ depende de $\mathbb{q}_n$, $\mathbb{p}_n$ e $\dot{\mathbb{p}}_n$. Sendo assim, para o problema da dinâmica inversa ser resolvido, é necessário determinar $\mathbb{q}_n$, $\mathbb{p}_n$ e $\dot{\mathbb{p}}_n$ dados $\mathbb{q}_n^\#$, $\dot{\mathbb{q}}_n^\#$ e $\ddot{\mathbb{q}}_n^\#$.

Para determinar $\mathbb{q}_n$ dado $\mathbb{q}_n^\#$, basta resolver as equações vinculares de posição:

$$\mathbb{h}_n(t, \mathbb{q}_n) = \mathbb{0} \tag{2}$$

Como os vínculos de posição normalmente são equações não-lineares, para configurações possíveis é comum encontrar duas ou mais soluções para dados t e $\mathbb{q}_n^\#$. Para saber qual é a solução representativa para o problema em questão, é necessário verificar qual delas é condizente com as configurações de montagem do mecanismo. No caso de soluções analíticas, basta identificar qual solução representa a configuração de montagem e utiliza-la para todos os pontos da trajetória. No caso de soluções numéricas, é necessário uma estimativa da configuração desejada para determinar $\mathbb{q}_n$ com uma dada precisão. Normalmente estima-se uma solução para $t = 0$, e para os demais instantes de tempo utiliza-se como estimativa a configuração do último instante de tempo calculado.

Com $\mathbb{q}_n$ já definido e dado $\dot{\mathbb{q}}_n^\# = \mathbb{p}_n^\#$, $\mathbb{p}_n$ pode ser determinado através dos vínculos de velocidade:

$$\psi_n(t, \mathbb{q}, \mathbb{p}) = \mathbb{0} \tag{3}$$

Os vínculos de velocidades normalmente são equações lineares em $\mathbb{p}_n$, o que torna simples determinar $\mathbb{p}_n$, dados t, $\mathbb{q}_n$ e $\mathbb{p}_n^\#$.

Com $\mathbb{q}_n$ e $\mathbb{p}_n$ já definidos e dado $\ddot{\mathbb{q}}_n^{\#} = \dot{\mathbb{p}}_n^{\#}$, $\dot{\mathbb{p}}_n$ pode ser determinado através dos vínculos de aceleração:

$$\mathbb{c}_n(t, \mathbb{q}, \mathbb{p}, \dot{\mathbb{p}}) = \mathbb{0} \tag{4}$$

Analogamente aos vínculos de velocidades, os vínculos de acelerações normalmente são equações lineares em $\dot{\mathbb{p}}_n$, o que torna simples determinar $\dot{\mathbb{p}}_n$, dados t, $\mathbb{q}_n$, $\mathbb{p}_n$ e $\dot{\mathbb{p}}^{\#}$.

Finalmente, com $\mathbb{q}_n$, $\mathbb{p}_n$ e $\dot{\mathbb{p}}_n$ determinados, a expressão (1) pode ser utilizada para o cálculo dos esforços nos atuadores.

Controle por modos deslizantes

Nesta seção será feita uma breve introdução ao controle por modos deslizantes. O tema será explorado apenas para o controle de sistemas de segunda ordem, sem incertezas paramétricas, para não fugir do escopo do capítulo.

Seja um sistema dinâmico dado pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} = u \tag{5}$$

Definimos a seguinte superfície, chamada de superfície de escorregamento:

$$s(e, \dot{e}) = -(\dot{e} + \lambda e) = 0,\ \lambda > 0 \tag{6}$$

Sendo $e = x_d - x$ o erro de controle e x_d o sinal de referência. Repare que se o sistema estiver na superfície de escorregamento, temos:

$$\dot{e} + \lambda e = 0 \Rightarrow e(t) = Ce^{-\lambda t} \tag{7}$$

Sendo assim, o erro cai exponencialmente para zero, com constante de tempo $1/\lambda$.

Para encontrar a lei de controle que leva o sistema à superfície de escorregamento, parte-se da definição de s:
$s = -(\dot{e} + \lambda e)$

Derivando no tempo:

$$\dot{s} = -(\ddot{e} + \lambda \dot{e}) = \ddot{x} - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \tag{8}$$

Substituindo (5) em (8):

$$\dot{s} = u - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \tag{9}$$

Utizando a seguinte lei de controle:

$$u = \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} - k \,\mathsf{sign}(s),\ k > 0 \tag{10}$$

Temos:

$$\dot{s} = -k \,\mathsf{sign}(s) \tag{11}$$

Supondo que o sistema começa em $s(0) = s_0 > 0$. Resolvendo a EDO para $s > 0$:

$$\dot{s} = -k \Rightarrow s = -kt + C$$

$$s(0) = s_0 \Rightarrow C = s_0$$

$$\therefore s = s_0 - kt,\ s > 0$$

Em $t = t_s = \frac{|s_0|}{k}$, s chega em zero. Resolvendo a EDO para $s(t_s) = 0$:

$$\dot{s} = 0 \Rightarrow s = C$$

$$s(t_s) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Portanto, para a solução da EDO para $s(0) = s_0 > 0$

$$s(t) = \begin{cases} s_0 - kt, & t < t_s \\ 0, & t \geq t_s \end{cases} \tag{12}$$

Resolvendo para $s(0) = s_0 < 0$, temos um resultado análogo:

$$s(t) = \begin{cases} s_0 + kt, & t < t_s \\ 0, & t \geq t_s \end{cases} \tag{13}$$

Assim, pode-se concluir que a EDO (11) converge para $s = 0$, independente da condição inicial. Portanto, temos que a lei de controle (10) faz com que o sistema representado por (5) siga o sinal de referência, pois o erro de controle converge para zero.

Controle por modos deslizantes extendido

Como foi visto na seção de modelagem, é muito conveniente utilizar coordenadas redundantes para realizar a modelagem de mecanismos paralelos. Sendo assim, propomos nesta seção uma lei de controle para sistemas descritos por coordenadas redundantes.

O modelo de um sistema mecânico multi-corpos pode ser descrito de maneira genérica pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{q}_n)\Big(\mathbb{M}_n(\mathbb{q}_n)\ddot{\mathbb{q}}_n + \mathbb{w}_n(\mathbb{q}_n, \dot{\mathbb{q}}_n) + \mathbb{z}_n(\mathbb{q}_n)\Big) = \mathbb{u}_n \\ \mathbb{A}_n\ddot{\mathbb{q}}_n + \mathbb{b}_n(\mathbb{q}_n, \dot{\mathbb{q}}_n) = \mathbb{0} \end{cases} \tag{14}$$

De maneira matricial compacta:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \\ \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \ddot{\mathbb{q}}_n = \begin{bmatrix} \mathbb{u}_n - \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n) \\ -\mathbb{b}_n \end{bmatrix} \tag{15}$$

Gostaria que $\ddot{\mathbb{q}}_n = \mathbb{v}_n$, sendo $\mathbb{v}_n$ uma entrada de controle. Para que isso aconteça, utilizamos a seguinte lei de controle:

$$\mathbb{u}_n = \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{M}_n\mathbb{v}_n + \mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n) \tag{16}$$

Como queremos que $\ddot{\mathbb{q}}_n = \mathbb{v}_n$ e $\ddot{\mathbb{q}}_n$ tem restrições, $\mathbb{v}_n$ deve respeitar as mesmas restrições, ou seja:

$$\mathbb{A}_n\mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n = \mathbb{0} \tag{17}$$

Aplicando a lei de controle (16) e a restrição (17) em (15), temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \\ \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \ddot{\mathbb{q}}_n = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{M}_n\mathbb{v}_n + \mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n) - \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n) \\ \mathbb{A}_n\mathbb{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n\mathbb{v}_n \\ \mathbb{A}_n\mathbb{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \\ \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \mathbb{v}_n$$

$$\therefore \ddot{\mathbb{q}}_n = \mathbb{v}_n \tag{18}$$

Seja $\mathbb{v}'_n$ dado pela lei de controle por modos deslizantes:

$$\mathbb{v}'_n = \ddot{\mathbb{q}}_{n,d} + \lambda\dot{\mathbb{e}}_n + k\,\mathsf{sign}(\dot{\mathbb{e}}_n + \lambda\mathbb{e}_n) \tag{19}$$

Sendo $\mathbb{e}_n = \mathbb{q}_{n,d} - \mathbb{q}_n$ o erro de controle e $\mathbb{q}_{n,d}$ o sinal de referência. Se não houvesse restrições, poderiamos fazer $\mathbb{v}_n = \mathbb{v}'_n$:

$$\ddot{\mathbb{q}}_n = \mathbb{v}_n \Rightarrow \ddot{\mathbb{e}}_n + \lambda\dot{\mathbb{e}}_n + k\,\mathsf{sign}(\dot{\mathbb{e}}_n + \lambda\mathbb{e}_n) = \mathbb{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbb{s}}_n = -k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}_n)$$

Isso garantiria que $\mathbb{e}_n \to \mathsf{0}$ quando $t \to \infty$ para quaisquer condições iniciais, como visto na seção anterior.

Como temos restrições em $\mathbb{v}_n$, procuramos $\mathbb{v}_n$ mais próximo possível de $\mathbb{v}'_n$ atraves da solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbb{v}_n}{\text{Min}} \quad & (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) \\ \text{tal que} \quad & \mathbb{A}_n\mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n = \mathbb{0} \end{aligned} \tag{20}$$

Como $\mathbb{M}_n$ é não-negativa definida, temos que $(\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) \geq \mathsf{0}$ para qualquer valor de $\mathbb{v}_n$. Aplicando a ténica dos multiplicadores de Lagrange, pode-se dizer que o seguinte problema é equivalente:

$$\underset{\mathbb{v}_n,\mathbb{\lambda}}{\text{Min}} \quad L = (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) + (\mathbb{A}_n\mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n)^\top \mathbb{\lambda} \tag{21}$$

Para solucionar o problema, impõe-se a estacionariedade da função lagrangeana:

$$\begin{aligned} \delta L = \mathsf{0} &\Rightarrow \delta\mathbb{v}_n^\top \mathbb{M}_n(\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) + (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n \delta\mathbb{v}_n + (\mathbb{A}_n\delta\mathbb{v}_n)^\top \mathbb{\lambda} + (\mathbb{A}_n\mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n)^\top \delta\mathbb{\lambda} = \mathsf{0} \\ &\Rightarrow \delta\mathbb{v}_n^\top \Big((\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_n^\top)(\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) + \mathbb{A}_n^\top \mathbb{\lambda} \Big) + \delta\mathbb{\lambda}^\top (\mathbb{A}_n\mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n) = \mathsf{0} \end{aligned}$$

Como $\mathbb{M}_n$ é simétrica e $\delta\mathbb{v}_n$ e $\delta\mathbb{\lambda}$ são arbitrários, temos:

$$\begin{cases} 2\mathbb{M}_n(\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) + \mathbb{A}_n^\top \mathbb{\lambda} = \mathbb{0} \\ \mathbb{A}_n\mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n = \mathbb{0} \end{cases} \tag{22}$$

Como $\mathbb{C}_n$ é o complemento ortogonal de $\mathbb{A}_n$, multiplicando a primeira equação de (22) por $\mathbb{C}_n^\top$, temos:

$$2\mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n(\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) + \mathbb{C}_n^\top \mathbb{A}_n^\top \mathbb{\lambda} = \mathbb{0} \Rightarrow \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n(\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) = \mathbb{0}$$

$$\therefore \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \mathbb{v}_n = \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \mathbb{v}'_n \tag{23}$$

Sendo assim, temos que a lei de controle que torna o sistema em malha fechado o mais próximo possível de $\ddot{\mathbb{q}}_n = \mathbb{v}'$, segundo o critério de otimização adotado, é:

$$\mathbb{u}_n = \mathbb{C}_n^\top (\mathbb{M}_n\mathbb{v}'_n + \mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n) \tag{24}$$

Prova que o método converge, não vai para o livro

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \ddot{\mathbb{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{\zeta}\mathbb{u} \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{u} = \mathbb{\zeta}^{-1}\mathbb{C}^T\mathbb{M}\mathbb{u}'$$

$$\mathbb{u}' = \ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})$$

$$\mathbb{s} = -\dot{\mathbb{e}} - \lambda\mathbb{e}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = -\ddot{\mathbb{e}} - \lambda\dot{\mathbb{e}} = \ddot{\mathbb{q}} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{\zeta}\mathbb{u} \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

Aplicando a lei de controle:

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})) \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})) - \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \\ -\mathbb{b} - \mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) \\ -\mathbb{b} - \mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \end{bmatrix}$$

Definindo:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger & \mathbb{A}^\dagger \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\dot{\mathbb{s}} = -(\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{b} - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}})$$

Sendo assim, se a seguinte inequao for respeitada para pelo menos $\nu^\#$ componentes de $\dot{\mathbb{s}}$, o erro vai a zero:

$$\dot{\mathbb{s}} = -(\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{b} - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \leq \mathbb{0}$$

Acknowledgments