Adaptative balancing techniques applied to parallel mechanisms

Tarcisio Antonio Hess Coelho [a], Renato Maia Matarazzo Orsino [b], André Garnier Coutinho [a]

[a] *Department of Mechatronics and Mechanical Systems Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil. E-mail: tarchess@usp.br*
[b] *Department of Mechanical Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil.*

SUMMARY

KEYWORDS:

0.1 Inverse Dynamics and Control

Dinâmica Inversa

O problema da dinâmica inversa constitui-se basicamente em calcular os esforços ativos aplicados pelos atuadores necessários para um mecanismo realizar uma dada trajetória.

É um procedimento importante para avaliar a eficácia do balanceamento realizado, pois torna possível comparar os esforços dos atuadores em diferentes trajetórias para o mecanismo balanceado e desbalanceado, mostrando em quais casos o balanceamento é vantajoso.

Primeiramente, devemos fazer algumas definições:

- $\mathbb{q}_n^\#$: vetor de coordenadas generalizadas independentes. É um sub-vetor de $\mathbb{q}_n$, contendo $\nu^\#(\mathcal{S}_n)$ elementos de $\mathbb{q}_n$ independentes;
- $\mathbb{u}_n$: vetor de $\nu^\#(\mathcal{S}_n)$ entradas de controle independentes. Cada elemento $u_{n,k}$ de $\mathbb{u}_n$ atua na direção da velocidade generalizada independente $\dot{q}_{n,k}^\#$.
- $\mathbb{h}_n$: vetor dos vínculos cinemáticos de posição. Como $h_{n,r}$ foi definido anteriormente, podemos definir:

$$\mathbb{h}_n = [h_{n,r}] \qquad \text{for} \qquad r \in \{1, 2, \ldots, \nu_q(\mathcal{S}_n) - \nu^\#(\mathcal{S}_n)\} \tag{1}$$

- ψ_n: vetor dos vínculos cinemáticos de velocidades. Como $\psi_{n,r}$ foi definido anteriormente, podemos definir:

$$\psi_n = [\psi_{n,r}] \qquad \text{for} \qquad r \in \{1, 2, \ldots, \nu_p(\mathcal{S}_n) - \nu^\#(\mathcal{S}_n)\} \tag{2}$$

Feitas as definições acima, pode-se dizer o objetivo da dinâmica inversa é: para cada instante de tempo t, conhencendo-se $\mathbb{q}_n^\#$, $\dot{\mathbb{q}}_n^\#$ e $\ddot{\mathbb{q}}_n^\#$, determinar $\mathbb{u}_n$.

Como foi visto na seção 2-1, a equação (**??**) nos mostra que:

$$\mathbb{C}_n^\mathsf{T}\,(\mathbb{f}_n + \mathbb{g}_n - \mathbb{M}_n\,\dot{\mathbb{p}}_n) = \mathbb{0}$$

Usualmente é possível decompor os esforços ativos $\mathbb{f}_n$ em duas parcelas: $\mathbb{f}'_n$, os esforços ativos provenientes dos atuadores, e $-\mathbb{z}_n$, os esforços ativos provevientes da força peso.

$$\mathbb{f}_n(\mathbb{q}_n) = \mathbb{f}'_n - \mathbb{z}_n(\mathbb{q}_n) \tag{3}$$

Supondo que a decomposição acima seja possível e não haja atuação redundante, temos que $\mathbb{f}'_n$ contém apenas $\nu^{\#}(\mathscr{S}_n)$ elementos não nulos. Supondo também $\mathbb{C}_n^{\mathsf{T}}\mathbb{f}'_n$ contenha apenas os elemementos não nulos de $\mathbb{f}'_n$, o que é muito comum, temos que:

$$\mathbb{u}_n = \mathbb{C}_n^{\mathsf{T}}\mathbb{f}'_n \tag{4}$$

Além disso, definimos:

$$\mathbb{w}_n(\mathbb{q}_n, \mathbb{p}_n) = -\mathbb{g}_n(\mathbb{q}_n, \mathbb{p}_n) \tag{5}$$

Substituindo (3), (4), e (5) em (??), é possível calcular dos esforços dos atuadores pela seguinte expressão:

$$\mathbb{u}_n = \mathbb{C}_n^{\mathsf{T}}(\mathbb{q}_n)\Big(\mathbb{M}_n(\mathbb{q}_n)\dot{\mathbb{p}}_n + \mathbb{w}_n(\mathbb{q}_n, \mathbb{p}_n) + \mathbb{z}_n(\mathbb{q}_n)\Big) \tag{6}$$

Porém, nesta expressão, $\mathbb{u}_n$ depende de $\mathbb{q}_n$, $\mathbb{p}_n$ e $\dot{\mathbb{p}}_n$. Sendo assim, para o problema da dinâmica inversa ser resolvido, é necessário determinar $\mathbb{q}_n$, $\mathbb{p}_n$ e $\dot{\mathbb{p}}_n$ dados $\mathbb{q}_n^{\#}$, $\dot{\mathbb{q}}_n^{\#}$ e $\ddot{\mathbb{q}}_n^{\#}$.

Para determinar $\mathbb{q}_n$ dado $\mathbb{q}_n^{\#}$, basta resolver as equações vinculares de posição:

$$\mathbb{h}_n(t, \mathbb{q}_n) = \mathbb{0} \tag{7}$$

Como os vínculos de posição normalmente são equações não-lineares, para configurações possíveis é comum encontrar duas ou mais soluções para dados t e $\mathbb{q}_n^{\#}$. Para saber qual é a solução representativa para o problema em questão, é necessário verificar qual delas é condizente com as configurações de montagem do mecanismo. No caso de soluções analíticas, basta identificar qual solução representa a configuração de montagem e utiliza-la para todos os pontos da trajetória. No caso de soluções numéricas, é necessário uma estimativa da configuração desejada para determinar $\mathbb{q}_n$ com uma dada precisão. Normalmente estima-se uma solução para $t = \mathsf{0}$, e para os demais instantes de tempo utiliza-se como estimativa a configuração do último instante de tempo calculado.

Com $\mathbb{q}_n$ já definido e dado $\dot{\mathbb{q}}_n^{\#} = \mathbb{p}_n^{\#}$, $\mathbb{p}_n$ pode ser determinado através dos vínculos de velocidade:

$$\mathbb{\psi}_n(t, \mathbb{q}, \mathbb{p}) = \mathbb{0} \tag{8}$$

Os vínculos de velocidades normalmente são equações lineares em $\mathbb{p}_n$, o que torna simples determinar $\mathbb{p}_n$, dados t, $\mathbb{q}_n$ e $\mathbb{p}_n^{\#}$.

Com $\mathbb{q}_n$ e $\mathbb{p}_n$ já definidos e dado $\ddot{\mathbb{q}}_n^{\#} = \dot{\mathbb{p}}_n^{\#}$, $\dot{\mathbb{p}}_n$ pode ser determinado através dos vínculos de aceleração:

$$\mathbb{c}_n(t, \mathbb{q}, \mathbb{p}, \dot{\mathbb{p}}) = \mathbb{0} \tag{9}$$

Analogamente aos vínculos de velocidades, os vínculos de acelerações normalmente são equações lineares em $\dot{\mathbb{p}}_n$, o que torna simples determinar $\dot{\mathbb{p}}_n$, dados t, $\mathbb{q}_n$, $\mathbb{p}_n$ e $\dot{\mathbb{p}}^{\#}$.

Finalmente, com $\mathbb{q}_n$, $\mathbb{p}_n$ e $\dot{\mathbb{p}}_n$ determinados, a expressão (6) pode ser utilizada para o cálculo dos esforços nos atuadores.

Controle por modos deslizantes

Nesta seção será feita uma breve introdução ao controle por modos deslizantes. O tema será explorado apenas para o controle de sistemas de segunda ordem, sem incertezas paramétricas, para não fugir do escopo do capítulo.

Seja um sistema dinâmico dado pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} = u \tag{10}$$

Definimos a seguinte superfície, chamada de superfície de escorregamento:

$$s(e, \dot{e}) = -(\dot{e} + \lambda e) = 0,\ \lambda > 0 \tag{11}$$

Sendo $e = x_d - x$ o erro de controle e x_d o sinal de referência. Repare que se o sistema estiver na superfície de escorregamento, temos:

$$\dot{e} + \lambda e = 0 \Rightarrow e(t) = Ce^{-\lambda t} \tag{12}$$

Sendo assim, o erro cai exponencialmente para zero, com constante de tempo $1/\lambda$.

Para encontrar a lei de controle que leva o sistema à superfície de escorregamento, parte-se da definição de s:

$s = -(\dot{e} + \lambda e)$

Derivando no tempo:

$$\dot{s} = -(\ddot{e} + \lambda \dot{e}) = \ddot{x} - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \tag{13}$$

Substituindo (10) em (13):

$$\dot{s} = u - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \tag{14}$$

Utizando a seguinte lei de controle:

$$u = \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} - k\,\mathsf{sign}(s),\ k > 0 \tag{15}$$

Temos:

$$\dot{s} = -k\,\mathsf{sign}(s) \tag{16}$$

Supondo que o sistema começa em $s(0) = s_0 > 0$. Resolvendo a EDO para $s > 0$:

$$\dot{s} = -k \Rightarrow s = -kt + C$$

$$s(0) = s_0 \Rightarrow C = s_0$$

$$\therefore s = s_0 - kt,\ s > 0$$

Em $t = t_s = \frac{|s_0|}{k}$, s chega em zero. Resolvendo a EDO para $s(t_s) = 0$:

$$\dot{s} = 0 \Rightarrow s = C$$

$$s(t_s) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Portanto, para a solução da EDO para $s(0) = s_0 > 0$

$$s(t) = \begin{cases} s_0 - kt, & t < t_s \\ 0, & t \geq t_s \end{cases} \tag{17}$$

Resolvendo para $s(0) = s_0 < 0$, temos um resultado análogo:

$$s(t) = \begin{cases} s_0 + kt, & t < t_s \\ 0, & t \geq t_s \end{cases} \tag{18}$$

Assim, pode-se concluir que a EDO (16) converge para $s = 0$, independente da condição inicial. Portanto, temos que a lei de controle (15) faz com que o sistema representado por (10) siga o sinal de referência, pois o erro de controle converge para zero.

Controle por modos deslizantes extendido

Nesta seção, para tornar o texto mais legível, iremos omitir o índice n referente ao sub-sistema mecânico.

Como foi visto na seção de modelagem, é muito conveniente utilizar coordenadas redundantes para realizar a modelagem de mecanismos paralelos. Sendo assim, propomos nesta seção uma lei de controle para sistemas descritos por coordenadas redundantes. Porém, para o ponto de vista do controle, é conveniente utilizar $\dot{\mathbb{q}}$ no lugar de $\mathbb{p}$, pois muitas vezes as velocidades generalizadas $\mathbb{p}$ são não integráveis, o que impossibilita a realimentação de posição na direção destas coordenadas, então assim faremos.

Baseado nas equações (6) e (**??**), seja o modelo de um sistema mecânico multi-corpos descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \mathbb{C}^{\mathsf{T}}(\mathbb{q})\Big(\mathbb{M}(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{w}(\mathbb{q},\dot{\mathbb{q}}) + \mathbb{z}(\mathbb{q})\Big) = \mathbb{u} \\ \mathbb{A}(\mathbb{q})\ddot{\mathbb{q}} + \mathbb{b}(\mathbb{q},\dot{\mathbb{q}}) = \mathbb{0} \end{cases} \tag{19}$$

De maneira matricial compacta:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \ddot{\mathbb{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{u} - \mathbb{C}^{\mathsf{T}}(\mathbb{w} + \mathbb{z}) \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} \tag{20}$$

Gostaria que $\ddot{\mathbb{q}} = \mathbb{v}$, sendo $\mathbb{v}$ uma entrada de controle. Para que isso aconteça, utilizamos a seguinte lei de controle:

$$\mathbb{u} = \mathbb{C}^{\mathsf{T}}(\mathbb{M}\mathbb{v} + \mathbb{w} + \mathbb{z}) \tag{21}$$

Como queremos que $\ddot{\mathbb{q}} = \mathbb{v}$ e $\ddot{\mathbb{q}}$ tem restrições, $\mathbb{v}$ deve respeitar as mesmas restrições, ou seja:

$$\mathbb{A}\mathbb{v} + \mathbb{b} = \mathbb{0} \tag{22}$$

Aplicando a lei de controle (21) e a restrição (22) em (20), temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \ddot{\mathbb{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{\mathsf{T}}(\mathbb{M}\mathbb{v} + \mathbb{w} + \mathbb{z}) - \mathbb{C}^{\mathsf{T}}(\mathbb{w} + \mathbb{z}) \\ \mathbb{A}\mathbb{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{M}\mathbb{v} \\ \mathbb{A}\mathbb{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{\mathsf{T}}\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \mathbb{v}$$

$$\therefore \ddot{\mathbb{q}} = \mathbb{v} \tag{23}$$

Seja $\mathbb{v}'$ dado pela lei de controle por modos deslizantes:

$$\mathbb{v}' = \ddot{\mathbb{q}}_{n,d} + \lambda\dot{\mathbb{e}} + k\,\mathsf{sign}(\dot{\mathbb{e}} + \lambda\mathbb{e}) \tag{24}$$

Sendo $\mathbb{e} = \mathbb{q}_{n,d} - \mathbb{q}$ o erro de controle e $\mathbb{q}_{n,d}$ o sinal de referência. Se não houvesse restrições, poderiamos fazer $\mathbb{v} = \mathbb{v}'$:

$$\ddot{\mathbb{q}} = \mathbb{v} \Rightarrow \ddot{\mathbb{e}} + \lambda\dot{\mathbb{e}} + k\,\mathsf{sign}(\dot{\mathbb{e}} + \lambda\mathbb{e}) = \mathbb{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbb{s}} = -k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})$$

Isso garantiria que $\mathbb{e} \to 0$ quando $t \to \infty$ para quaisquer condições iniciais, como visto na seção anterior.

Como temos restrições em $\mathbb{v}$, procuramos $\mathbb{v}$ mais próximo possível de $\mathbb{v}'$ atraves da solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbb{v}}{\text{Min}} && (\mathbb{v} - \mathbb{v}')^{\mathsf{T}}\mathbb{M}(\mathbb{v} - \mathbb{v}') \\ &\text{tal que} && \mathbb{A}\mathbb{v} + \mathbb{b} = \mathbb{0} \end{aligned} \tag{25}$$

Como $\mathbb{M}$ é não-negativa definida, temos que $(\mathbb{v}-\mathbb{v}')^\mathsf{T}\mathbb{M}(\mathbb{v}-\mathbb{v}') \geq 0$ para qualquer valor de $\mathbb{v}$.

Aplicando a ténica dos multiplicadores de Lagrange, pode-se dizer que o seguinte problema é equivalente:

$$\underset{\mathbb{v},\mathbb{\lambda}}{\text{Min}} \quad L = (\mathbb{v}-\mathbb{v}')^\mathsf{T}\mathbb{M}(\mathbb{v}-\mathbb{v}') + (\mathbb{A}\mathbb{v}+\mathbb{b})^\mathsf{T}\mathbb{\lambda} \tag{26}$$

Para solucionar o problema, impõe-se a estacionariedade da função lagrangeana:

$$\begin{aligned}\delta L = 0 &\Rightarrow \delta\mathbb{v}^\mathsf{T}\mathbb{M}(\mathbb{v}-\mathbb{v}') + (\mathbb{v}-\mathbb{v}')^\mathsf{T}\mathbb{M}\delta\mathbb{v} + (\mathbb{A}\delta\mathbb{v})^\mathsf{T}\mathbb{\lambda} + (\mathbb{A}\mathbb{v}+\mathbb{b})^\mathsf{T}\delta\mathbb{\lambda} = 0\\ &\Rightarrow \delta\mathbb{v}^\mathsf{T}\Big((\mathbb{M}+\mathbb{M}^\mathsf{T})(\mathbb{v}-\mathbb{v}') + \mathbb{A}^\mathsf{T}\mathbb{\lambda}\Big) + \delta\mathbb{\lambda}^\mathsf{T}(\mathbb{A}\mathbb{v}+\mathbb{b}) = 0\end{aligned}$$

Como $\mathbb{M}$ é simétrica e $\delta\mathbb{v}$ e $\delta\mathbb{\lambda}$ são arbitrários, temos:

$$\begin{cases}2\mathbb{M}(\mathbb{v}-\mathbb{v}') + \mathbb{A}^\mathsf{T}\mathbb{\lambda} = \mathbb{0}\\ \mathbb{A}\mathbb{v}+\mathbb{b} = \mathbb{0}\end{cases} \tag{27}$$

Como $\mathbb{C}$ é o complemento ortogonal de $\mathbb{A}$, multiplicando a primeira equação de (27) por $\mathbb{C}^\mathsf{T}$, temos:

$$2\mathbb{C}^\mathsf{T}\mathbb{M}(\mathbb{v}-\mathbb{v}') + \mathbb{C}^\mathsf{T}\mathbb{A}^\mathsf{T}\mathbb{\lambda} = \mathbb{0} \Rightarrow \mathbb{C}^\mathsf{T}\mathbb{M}(\mathbb{v}-\mathbb{v}') = \mathbb{0}$$

$$\therefore \mathbb{C}^\mathsf{T}\mathbb{M}\mathbb{v} = \mathbb{C}^\mathsf{T}\mathbb{M}\mathbb{v}' \tag{28}$$

Sendo assim, temos que a lei de controle que torna o sistema em malha fechado o mais próximo possível de $\ddot{\mathbb{q}} = \mathbb{v}'$, segundo o critério de otimização adotado, é:

$$\mathbb{u} = \mathbb{C}^\mathsf{T}(\mathbb{M}\mathbb{v}' + \mathbb{w} + \mathbb{z}) \tag{29}$$

Prova que o método converge, não vai para o livro

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \ddot{\mathbb{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{\zeta}\mathbb{u} \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{u} = \mathbb{\zeta}^{-1}\mathbb{C}^T\mathbb{M}\mathbb{u}'$$

$$\mathbb{u}' = \ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})$$

$$\mathbb{s} = -\dot{\mathbb{e}} - \lambda\mathbb{e}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = -\ddot{\mathbb{e}} - \lambda\dot{\mathbb{e}} = \ddot{\mathbb{q}} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{\zeta}\mathbb{u} \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

Aplicando a lei de controle:

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})) \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})) - \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \\ -\mathbb{b} - \mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) \\ -\mathbb{b} - \mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \end{bmatrix}$$

Definindo:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger & \mathbb{A}^\dagger \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\dot{\mathbb{s}} = -(\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{b} - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}})$$

Sendo assim, se a seguinte inequao for respeitada para pelo menos $\nu^\#$ componentes de $\dot{\mathbb{s}}$, o erro vai a zero:

$$\dot{\mathbb{s}} = -(\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{b} - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \leq \mathbb{0}$$

Acknowledgments