Escola Politécnica da USP
PMR5014 - Controle Não Linear Aplicado a Sist. Mecânicos e Mecatrônicos

Modelagem do pentágono articulado

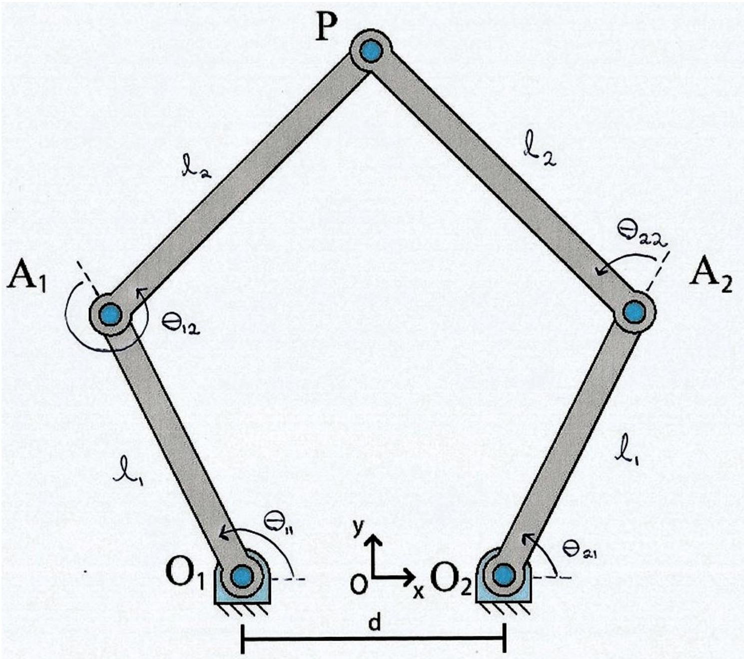

Figura 1: Robô 5R

Análise Cinemática:

- Cinemática de Posição

O objetivo da cinemática de posição é encontrar a relação entre as coordenadas $X = (x_p, y_p)$, da plataforma, e as coordenadas $\Theta = (\theta_{11}, \theta_{21})$, dos atuadores. Abaixo seguem as coordenadas dos pontos O_1, A_1, O_2, A_2, e P em relação ao sistema de coordenadas O_{xy}:

$O_1(-\frac{d}{2}, 0)$ $\qquad$ $O_2(\frac{d}{2}, 0)$
$A_1(-\frac{d}{2} + l_1c_{11}, l_1s_{11})$ $\qquad$ $A_2(\frac{d}{2} + l_1c_{21}, l_1s_{21})$
$P(x_p, y_p)$

Utilizando as seguintes restrições geométricas, temos:

$$\begin{cases} ||P - A_1||^2 = l_2^2 \\ ||P - A_2||^2 = l_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_p + \frac{d}{2} - l_1c_{11})^2 + (y_p - l_1s_{11})^2 = l_2^2 \\ (x_p - \frac{d}{2} - l_1c_{21})^2 + (y_p - l_1s_{21})^2 = l_2^2 \end{cases} \tag{1}$$

- Cinemática Inversa

Supondo conhecidas as coordenadas X, deve-se encontrar as coordenadas Θ. Assim, desenvolvendo a primeira equação do sistema de equações (1):

$$(x_p + \frac{d}{2})^2 - 2(x_p + \frac{d}{2})l_1c_{11} + l_1^2c_{11}^2 + y_p^2 - 2y_pl_1s_{11} + l_1^2s_{11}^2 = l_2^2$$
$$\Rightarrow -2(x_p + \frac{d}{2})l_1c_{11} - 2y_pl_1s_{11} + (x_p + \frac{d}{2})^2 + y_p^2 + l_1^2 - l_2^2 = 0$$
$$\therefore E_1c_{11} + F_1s_{11} + G_1 = 0 \tag{2}$$

Sendo:

$$\begin{cases} E_1 = -2(x_p + \frac{d}{2})l_1 \\ F_1 = -2y_pl_1 \\ G_1 = (x_p + \frac{d}{2})^2 + y_p^2 + l_1^2 - l_2^2 \end{cases} \tag{3}$$

Cuja solução é dada por:

$$\theta_{11} = \begin{cases} 2\arctan\left(\frac{-F_1+\sqrt{E_1^2+F_1^2-G_1^2}}{G_1-E_1}\right), & \text{se } G_1 \neq E_1 \\ 2\arctan\left(-\frac{E_1}{F_1}\right), & \text{se } G_1 = E_1 \end{cases} \tag{4}$$

Para a segunda equação do sistema (1), o procedimento é análogo, resultando em:

$$\theta_{21} = \begin{cases} 2\arctan\left(\frac{-F_2-\sqrt{E_2^2+F_2^2-G_2^2}}{G_2-E_2}\right), & \text{se } G_2 \neq E_2 \\ 2\arctan\left(-\frac{E_2}{F_2}\right), & \text{se } G_2 = E_2 \end{cases} \tag{5}$$

Sendo:

$$\begin{cases} E_2 = -2(x_p - \frac{d}{2})l_1 \\ F_2 = -2y_pl_1 \\ G_2 = (x_p - \frac{d}{2})^2 + y_p^2 + l_1^2 - l_2^2 \end{cases} \tag{6}$$

- Cinemática Direta

Supondo conhecidas as coordenadas Θ, deve-se encontrar as coordenadas X. Podemos reescrever (1) da seguinte forma:

$$\begin{cases} (x_p - x_{c1})^2 + (y_p - y_{c1})^2 = r^2 \\ (x_p - x_{c2})^2 + (y_p - y_{c2})^2 = r^2 \end{cases}$$

Sendo:

$$\begin{cases} x_{c1} = -\frac{d}{2} + l_1c_{11} \\ x_{c2} = \frac{d}{2} + l_1c_{21} \\ y_{c1} = l_1s_{11} \\ y_{c2} = l_1s_{21} \\ r^2 = l_2^2 \end{cases} \tag{7}$$

Sendo assim, podemos enxergar (1) como a intersecção de duas circunferências de raio r. Desta maneira, pode-se dizer que a solução está contida na reta que passa pelo ponto médio dos centros das circunferências, ortogonal à reta que passa pelos dois centros.

Definindo:

$$\begin{cases} x_m = \frac{x_{c1}+x_{c2}}{2} \\ y_m = \frac{y_{c1}+y_{c2}}{2} \\ dx = x_{c2} - x_{c1} \\ dy = y_{c2} - y_{c1} \end{cases} \tag{8}$$

A equação vetorial desta reta é dada por:

$$(x_p, y_p) = (x_m, y_m) + \lambda(-dy, dx), \lambda \in \mathbb{R}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} x_p = x_m - \lambda dy \\ y_p = y_m + \lambda dx \end{cases} \tag{9}$$

Substituindo (9) na primeira equação de (1):

$$\begin{gathered} (x_m - \lambda dy - x_{c1})^2 + (y_m + \lambda dx - y_{c1})^2 = r^2 \\ \left(\frac{dx}{2} - \lambda dy\right)^2 + \left(\frac{dy}{2} + \lambda dx\right)^2 = r^2 \\ \frac{dx^2}{4} - \lambda dxdy + \lambda^2 dy^2 + \frac{dy^2}{4} + \lambda dxdy + \lambda^2 dx^2 = r^2 \\ \lambda^2(dx^2 + dy^2) = r^2 - \frac{dx^2 + dy^2}{4} \\ \therefore \lambda = \pm\sqrt{\frac{r^2}{dx^2 + dy^2} - \frac{1}{4}} \end{gathered}$$

Sendo assim, para montagem do mecanismo conforme a Figura 1, obtemos:

$$x_p = x_m - dy\sqrt{\frac{r^2}{dx^2 + dy^2} - \frac{1}{4}} \tag{10}$$

$$y_p = y_m + dx\sqrt{\frac{r^2}{dx^2 + dy^2} - \frac{1}{4}} \tag{11}$$

- Cinemática dos ângulos intermediários:

  Supondo que a cinemática direta ou inversa já foi realizada (são conhecidos X e Θ), os ângulos θ_{12} e θ_{22} podem se definidos da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \tan(\theta_{11}+\theta_{12}) = \frac{y_p - l_1 s_{11}}{x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11}} \\ \tan(\theta_{21}+\theta_{22}) = \frac{y_p - l_1 s_{21}}{x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21}} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \theta_{12} = \arctan(\frac{y_p - l_1 s_{11}}{x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11}}) - \theta_{11} \\ \theta_{22} = \arctan(\frac{y_p - l_1 s_{21}}{x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21}}) + \pi - \theta_{21} \end{cases} \tag{12}$$

- Cinemática de velocidades:

Com o problema de posição resolvido, podemos facilmente resolver o problema de velocidades, o qual se torna linear.

Primeiro, reescrevemos o sistema de equações (1) como um vetor de funções nulas:

$$\Phi(X, \Theta) = 0 \tag{13}$$

Sendo:

$$\Phi(X, \Theta) = \begin{bmatrix} (x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11})^2 + (y_p - l_1 s_{11})^2 - l_2^2 \\ (x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21})^2 + (y_p - l_1 s_{21})^2 - l_2^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Depois, derivamos (13) no tempo, aplicando a regra da cadeia, e dividimos por 2, obtendo:

$$J_X \dot{X} + J_\Theta \dot{\Theta} = 0 \tag{15}$$

Sendo:

$$J_X = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \begin{bmatrix} x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11} & y_p - l_2 s_{11} \\ x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21} & y_p - l_2 s_{21} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$J_\Theta = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} l_1[(x_p + \frac{d}{2}) s_{11} - y_p c_{11}] & 0 \\ 0 & l_1[(x_p - \frac{d}{2}) s_{21} - y_p c_{21}] \end{bmatrix} \tag{17}$$

Desta maneira, conhecendo $\dot{X}$ pode-se determinar $\dot{\Theta}$ ou conhecendo $\dot{\Theta}$ pode-se determinar $\dot{X}$.

Além disso, os Jacobianos J_X e J_Θ podem ser utilizados para encontrar as singularidades cinemáticas do mecanismo. Os pontos singulares terão o determinante de J_X ou de J_Θ nulo.

- Cinemática de acelerações:

  Derivando (15) no tempo, obtemos:

$$\dot{J}_X\dot{X} + J_X\ddot{X} + \dot{J}_\Theta\dot{\Theta} + J_\Theta\ddot{\Theta} = 0 \tag{18}$$

  Sendo:

$$\dot{J}_X = \begin{bmatrix} \dot{x}_p + l_1 s_{11}\dot{\theta}_{11} & \dot{y}_p - l_1 c_{11}\dot{\theta}_{11} \\ \dot{x}_p + l_1 s_{21}\dot{\theta}_{21} & \dot{y}_p - l_1 c_{21}\dot{\theta}_{21} \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\dot{J}_\Theta = \begin{bmatrix} l_1[((x_p + \frac{d}{2})\dot{\theta}_{11} - \dot{y}_p)c_{11} + (\dot{x}_p + y_p\dot{\theta}_{11})s_{11}] & 0 \\ 0 & l_1[((x_p - \frac{d}{2})\dot{\theta}_{21} - \dot{y}_p)c_{21} + (\dot{x}_p + y_p\dot{\theta}_{21})s_{21}] \end{bmatrix} \tag{20}$$

  Como as coordenadas dos atuadores (Θ) e da plataforma (X) e suas respectivas derivadas temporais já foram determinadas anteriormente, conhencendo $\ddot{X}$ pode-se determinar $\ddot{\Theta}$ ou conhencendo $\ddot{\Theta}$ pode-se determinar $\ddot{X}$.

Modelo Dinâmico:

Para encontrar as equações diferenciais de movimento do mecanismo, utilizaremos a técnica de acoplamento de sub-sistemas e as metodologia de Gibss-Appel extendida (utilizando coordenadas generalizadas e velocidades generalizadas redundantes), ambas desenvolvidas no trabalho de Renato Orsino.

Primeiro dividimos nosso sistema em 3 sub-sistemas mais simples: 2 mecanismos seriais planos do tipo $\underline{\text{R}}$R e um ponto com massa concetrada livre no espaço. Encontramos o modelo dinâmico de cada um separadamente, e depois utilizamos a técnica de acoplamento de sub-sistemas.

Para modelar os sub-sistemas seriais, faremos algumas definições importantes:

- $q^\#$: vetor de n coordenadas generalizadas independentes
- q^o: vetor de m_q coordenadas generalizadas redundandes
- q: vetor contendo todas as coordenadas generalizadas. Usualmente $q = \begin{bmatrix} q^\# \\ q^o \end{bmatrix}$
- $\phi(q)$: vetor de tamanho m_q dos vínculos de posição, de modo que conhecendo $q^\#$ seja possível determinar q^o resolvendo $\phi(q) = 0$
- $p^\#$: vetor de n velocidades generalizadas independentes
- p^o: vetor de m_p velocidades generalizadas redundandes
- p: vetor contendo todas as velocidades generalizadas. Usualmente $p = \begin{bmatrix} p^\# \\ p^o \end{bmatrix}$

- $\Psi(q) = \frac{\partial P^{\#}}{\partial \dot{q}^{\#}}$: Transformação linear inversível que relaciona $\dot{q}^{\#}$ com $p^{\#}$, ou seja: $p^{\#} = P^{\#}(q, \dot{q}^{\#}) = \Psi(q)\dot{q}^{\#}$.

- $\Gamma(q) = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial p}$: Transformação linear que relaciona p com $\dot{q}$, ou seja: $\dot{q} = \dot{Q}(q, p) = \Gamma(q)p$.

- $\Lambda(q, p)$: vetor de tamanho m_q dos vínculos de velocidades, de modo que conhecendo q e $p^{\#}$ seja possível determinar p^o resolvendo $\Lambda(q, p) = 0$

- $\mathbb{C}(q)$: matriz dos vínculos cinemáticos, obtida através $\Lambda(q, p)$. É qualquer matriz que seja complemento ortogonal (nullspace) transposto de $\frac{\partial \Lambda}{\partial p}$. Uma possibilidade conveniente é definir $\mathbb{C}$ tal que $p = \mathbb{C}(q)p^{\#}$.

Na dinâmica de sistemas mecânicos multi-corpos, é muito vantajosa a utilização de coordenadas/velocidades generalizadas redundantes, pois a utilização destas diminui a complexidade da utilização dos métodos de dedução das equações de movimento (como Lagrange, Kane e Gibbs-Appell) e em contrapartida torna necessário definir $\phi(q)$, $\Lambda(q, p)$, $\Psi(q)$, $\Gamma(q)$ e $\mathbb{C}(q)$.

Nos métodos citados, é necessário o cálculo das velocidades absolutas dos centros de massa $\vec{v}_{G_i}$ e das velocidades angulares absolutas $\vec{\omega}_i$ de todos os corpos rígidos do sistema, em função de p e q. Sendo assim, é conveniente definir o vetor de velocidades generalizadas p como sendo todas as componentes dos $\vec{v}_{G_i}$ e dos $\vec{\omega}_i$, em alguma ordem conveniente. Fazendo isso, tornamos a apliação dos métodos extremamente simples, deixando praticamente toda a complexidade do problema no cálculo de $\phi(q)$, $\Lambda(q, p)$, $\Psi(q)$, $\Gamma(q)$ e $\mathbb{C}(q)$.

- Modelo do mecanismo <u>RR</u>

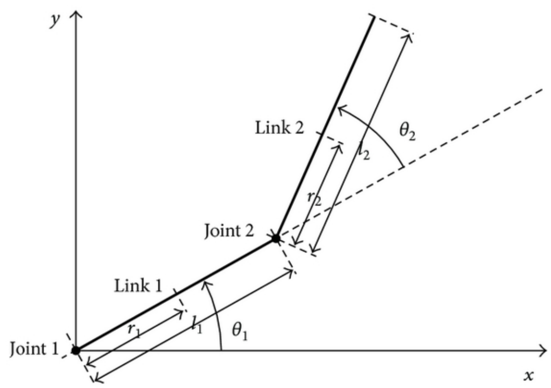

Figura 2: Robô <u>RR</u>

i) Primeiro definimos $n + m_q$ coordenadas q. Estas podem ser subdivididas em n coordenadas independentes $q^{\#}$ e m_q coordenadas redudantes q^o.

$$q = \begin{bmatrix} q^{\#} \\ q^o \end{bmatrix}$$

No caso do mecanismo <u>*RR*</u>, temos:

$$q^{\#} = \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{bmatrix}^T \tag{21}$$

$$q^{o} = \begin{bmatrix}x_1 & y_1 & x_2 & y_2\end{bmatrix}^T \tag{22}$$

Com $n = 2$ e $m_q = 4$. Neste caso, as componentes de q^o são as coordenadas dos centros de massa das barras, escritas no referencial inercial O_{xy}.

ii) Depois definimos os vetores de velocidades absolutas:

$$\nu = \begin{bmatrix}\nu_\omega \\ \nu_v\end{bmatrix}$$

$$\nu_\omega = \begin{bmatrix}\omega_{z1} & \omega_{z2}\end{bmatrix}^T \tag{23}$$

$$\nu_v = \begin{bmatrix}v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2}\end{bmatrix}^T \tag{24}$$

Sendo ν_v as componentes das velocidades absolutas dos centros de massa das barras, escritas nas bases presas às barras, e ν_ω as componentes das velocidades angulares absolutas, escritas nas bases presas às barras.

iii) Definimos $n + m_p$ coordenadas p. Estas podem ser subdivididas em n coordenadas independentes $p^{\#}$ e m_p coordenadas redudantes p^o. As coordenadas $p^{\#}$ podem ser subdividas em n_1 velocidades angulares $\omega^{\#}$ e n_2 velocidades lineares $v^{\#}$. As coordenadas p^o podem ser subdividas em m_{p1} velocidades angulares ω^o e m_{p2} velocidades lineares v^o.

$$p = \begin{bmatrix}p^{\#} \\ p^o\end{bmatrix} \qquad p^{\#} = \begin{bmatrix}\omega^{\#} \\ v^{\#}\end{bmatrix} \qquad p^o = \begin{bmatrix}\omega^o \\ v^o\end{bmatrix}$$

Como é conveniente que as velocidades generalizadas p sejam velocidades absolutas, escolhemos as componentes de p como sendo as mesmas componentes de ν, respeitando a ordenação indicada acima.

No caso do mecanismo <u>RR</u>, temos:

$$\omega^{\#} = \begin{bmatrix}\omega_{z1} \\ \omega_{z2}\end{bmatrix} \tag{25}$$

$$v^{\#} = \emptyset \tag{26}$$

$$\omega^{o} = \emptyset \tag{27}$$

$$v^{o} = \begin{bmatrix}v_{x1} & v_{y1} & v_{x2} & v_{y2}\end{bmatrix}^T \tag{28}$$

Com $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, $m_{p1} = 0$, $m_{p2} = 4$ e $m_p = m_{p1} + m_{p2} = 4$.

iv) Realizamos a cinemática de posição para os centros de massa das barras, de modo a relacionar as coordenadas q^o com as coordenadas $q^\#$. Para isso, utilizamos matrizes de transformação homogênea.

$$[H]_{B_1/B_0} = \begin{bmatrix} Rot(\theta_1, z_0) & [\overrightarrow{O_0O_1}]_{B_0} \\ 0_{2x1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} [\overrightarrow{O_1G_1}]_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[H]_{B_2/B_1} = \begin{bmatrix} Rot(\theta_2, z_1) & [\overrightarrow{O_1O_2}]_{B_1} \\ 0_{2x1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} [\overrightarrow{O_2G_2}]_{B_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{2g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[H]_{B_2/B_0} = [H]_{B_1/B_0}[H]_{B_2/B_1} = \begin{bmatrix} c_{1+2} & -s_{1+2} & l_1c_1 \\ s_{1+2} & c_{1+2} & l_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = [H]_{B_1/B_0} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{O_1G_1}]_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1g}c_1 \\ l_{1g}s_1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = [H]_{B_2/B_0} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{O_2G_2}]_{B_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_{2g}c_{1+2} \\ l_1s_1 + l_{2g}s_{1+2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Repare que a partir das matrizes de transformação homogênea encontradas, encontramos também as seguintes matrizes de mudança de base:

$$R_1 = [I]_{B_1/B_0} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$R_2 = [I]_{B_2/B_0} = \begin{bmatrix} c_{1+2} & -s_{1+2} \\ s_{1+2} & c_{1+2} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Com a cinemática de posição, conseguimos obter $m_q = 4$ equações vínculares de posição. Sendo assim, o vetor dos vínculos de posição é dado por:

$$\phi(q) = \begin{bmatrix} x_1 - l_{1g}c_1 \\ y_1 - l_{1g}c_2 \\ x_2 - l_1c_1 - l_{2g}c_{1+2} \\ y_2 - l_1s_1 - l_{2g}s_{1+2} \end{bmatrix} \tag{33}$$

v) Utilizamos as matrizes de rotação para calcular as velocidades angulares em função de $q^\#$ e $\dot{q}^\#$:

$$[S(\vec{\omega}_1)]_{B_1} = R_1^T \dot{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\vec{\omega}_1]_{B_1} = \dot{\theta}_1 \hat{k} \tag{34}$$

$$[S(\vec{\omega}_2)]_{B_2} = R_2^T \dot{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\vec{\omega}_2]_{B_2} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\hat{k} \tag{35}$$

vi) Derivamos as equações de posição ((29) e (30)) para encontrar as velocidades dos centros de massa:

$$[\vec{v}_1]_{B_0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{1g} s_1 \dot{\theta}_1 \\ l_{1g} c_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$[\vec{v}_2]_{B_0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_{2g} s_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_{2g} c_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \tag{37}$$

vii) Passamos as velocidades dos centros de massa para as bases pesas nas barras:

$$[\vec{v}_1]_{B_1} = [I]_{B_0/B_1}[\vec{v}_1]_{B_0} = R_1^T [\vec{v}_1]_{B_0}$$
$$[\vec{v}_2]_{B_2} = [I]_{B_0/B_2}[\vec{v}_2]_{B_0} = R_2^T [\vec{v}_2]_{B_0}$$

Definindo:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0_{2x2} \\ 0_{2x2} & R_2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Temos:

$$\nu_v = \mathbf{R}^T \dot{q}^o \tag{39}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{1+2} & -s_{1+2} \\ 0 & 0 & s_{1+2} & c_{1+2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1g}\dot{\theta}_1 \\ l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ (l_1 c_2 + l_{2g})\dot{\theta}_1 + l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

viii) Montamos os vetores $p^\#$ e p^o em função de $q^\#$ e $\dot{q}^\#$:

$$p^\# = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} = P^\#(q^\#, \dot{q}^\#) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$p^o = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \end{bmatrix} = P^o(q^\#, \dot{q}^\#) = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1g}\dot{\theta}_1 \\ l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ (l_1 c_2 + l_{2g})\dot{\theta}_1 + l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

ix) Utilizando o fato de que $P^\#(q^\#, \dot{q}^\#)$ e $P^o(q^\#, \dot{q}^\#)$ são lineares em $\dot{q}^\#$, encontramos as transformações lineares $\Psi(q)$ e $\Upsilon(q)$ e o vetor dos vínculos de velocidades $\Lambda(q, p)$:

$$p^\# = P^\#(q^\#, \dot{q}^\#) = \frac{\partial P^\#}{\partial \dot{q}^\#}\dot{q}^\# = \Psi \dot{q}^\# \tag{43}$$

$$p^o = P^o(q^\#, \dot{q}^\#) = \frac{\partial P^o}{\partial \dot{q}^\#}\dot{q}^\# = \Upsilon \dot{q}^\# \tag{44}$$

No caso do mecanismo $\underline{RR}$, temos:

$$\Psi = \frac{\partial P^\#}{\partial \dot{q}^\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{45}$$

$$\Upsilon = \frac{\partial P^o}{\partial \dot{q}^\#} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_{2g} & l_{2g} \end{bmatrix} \tag{46}$$

Como $p^\#$ e $\dot{q}^\#$ são independentes e tem o mesmo tamanho:

$$\begin{aligned} \dot{q}^\# &= \Psi^{-1} p^\# \\ \Rightarrow p^o &= \Upsilon \Psi^{-1} p^\# \\ \therefore \Lambda(q,p) &= \Upsilon \Psi^{-1} p^\# - p^o = 0 \end{aligned} \tag{47}$$

x) A partir dos vínculos de velocidades, encontramos a matriz $\mathbb{C}$ dos vínculos cinemáticos:

$$p^o = \Upsilon \Psi^{-1} p^\# \Rightarrow p = \begin{bmatrix} I_{nxn} \\ \Upsilon \Psi^{-1} \end{bmatrix} p^\#$$

$$\therefore \mathbb{C} = \begin{bmatrix} I_{nxn} \\ \Upsilon \Psi^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 & l_{2g} \end{bmatrix} \tag{48}$$

xi) Como (39) e (43) são transformações inversíveis, encontramos a transformação linear $\Gamma(q)$:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}^\# \\ \dot{q}^o \end{bmatrix} = \dot{Q}(q,p) = \begin{bmatrix} \Psi^{-1}(q) p^\# \\ \mathbf{R}(q) \nu_v(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} - \omega_{z1} \\ v_{x1} c_1 - v_{y1} s_1 \\ v_{x1} s_1 + v_{y1} c_1 \\ v_{x2} c_{1+2} - v_{y2} s_{1+2} \\ v_{x2} s_{1+2} + v_{y2} c_{1+2} \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$\Gamma(q) = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1+2} & -s_{1+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{1+2} & c_{1+2} \end{bmatrix} \tag{50}$$

xii) Aplicamos o métodos de Gibbs-Appel extendido:

O método de Gibbs-Appell apresenta certa simularidade com o método de Lagrange, pois utiliza derivadas de uma função energia para encontrar a equações de movimento do sistema. Porém, a função energia utilizada não é a energia cinética, mas sim a energia de acelerações. A energia de acelerações para um corpo rígido é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}m(a_G \cdot a_G) + \frac{1}{2}(\dot{\omega} \cdot \mathbb{I}\dot{\omega} + 2\dot{\omega}(\omega \wedge \mathbb{I}\omega))$$

Sendo m a massa do corpo rígido, $\mathbb{I}$ seu tensor de inércia, a_G o vetor aceleração absoluta de seu centro de massa e ω o vetor velocidade angular absoluta.

O modelo dinâmico utilizando o método de Gibbs-Appel extendido, é dado pela seguinte expressão:

$$\mathbb{C}(q)^T(\mathbb{M}(q)\dot{p} + \mathbb{V}(q,p) + \mathbb{G}(q)) = (\Psi^T)^{-1} f_{\dot{q}^\#} \tag{51}$$

Com:

$$\mathbb{M}(q) = \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \dot{p}^2} \tag{52}$$

$$\mathbb{V}(q,p) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \dot{p}^2}\dot{p} \tag{53}$$

$$\mathbb{G}(q) = \Gamma^T \frac{\partial E_p}{\partial q} \tag{54}$$

Sendo E_p a energia potencial do sistema e $f_{\dot{q}^\#}$ os esforços nas direções de $\dot{q}^\#$.
No caso do mecanismo $\underline{RR}$, temos:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\Big(m_1(\dot{v}_{x1}^2 + \dot{v}_{y1}^2) + m_2(\dot{v}_{x2}^2 + \dot{v}_{y2}^2) + J_{z1}\dot{\omega}_{z1}^2 + +J_{z2}\dot{\omega}_{z2}^2\Big) \tag{55}$$

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{56}$$

Calculando as derivadas:

$$\mathbb{M}(q) = \begin{bmatrix} J_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{57}$$

$$\mathbb{V}(q,p) = 0 \tag{58}$$

$$\mathbb{G}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g s_1 \\ m_1 g c_1 \\ m_1 g s_{1+2} \\ m_1 g c_{1+2} \end{bmatrix} \tag{59}$$

Sendo assim, o modelo dinâmico para o mecanismo RR é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 & l_{2g} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1}\dot{\omega}_{z11} \\ J_{z2}\dot{\omega}_{z12} \\ m_1 \dot{v}_{x11} \\ m_1 \dot{v}_{y11} \\ m_2 \dot{v}_{x12} \\ m_2 \dot{v}_{y12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g s_1 \\ m_1 g c_1 \\ m_2 g s_{1+2} \\ m_2 g c_{1+2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \tag{60}$$

Repare que o modelo não depende das coordenadas q^o. Elas foram uteis para a dedução do modelo, mas com o modelo deduzido elas não tem mais utilidade.

- Acoplamento de sub-sistemas:

Como o modelo do mecanismo RR já foi deduzido, e sabendo que o modelo de uma massa concetrada livre no espaço é dado por:

$$\begin{cases} m_p \ddot{x}_p = F_x \\ m_p \ddot{y}_p = F_y \end{cases} \tag{61}$$

Obtemos o modelo do pentagono articulado acoplando dois mecanismos RR e um ponto de massa concentrada livre no espaço.

Para fazer isso, seguimos o seguinte procedimento:

a) Definimos as coordenadas generalizadas de cada sub-sistema e do sistema acoplado:

$$q_0 = q_0^{\#} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \qquad q_1 = q_1^{\#} = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{bmatrix} \qquad q_2 = q_2^{\#} = \begin{bmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{q} = \begin{bmatrix} \mathsf{q}^{\#} \\ \mathsf{q}^{o} \end{bmatrix} \qquad \mathsf{q}^{\#} = q_0 \qquad \mathsf{q}^{o} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

b) Definimos as velocidades generalizadas de cada sub-sistema e do sistema acoplado:

$$p_0 = \begin{bmatrix} p_0^{\#} \\ p_0^{o} \end{bmatrix} \qquad p_0^{\#} = \begin{bmatrix} v_{px} \\ v_{py} \end{bmatrix} \qquad p_0^{o} = \emptyset$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_1^{\#} \\ p_1^{o} \end{bmatrix} \qquad p_1^{\#} = \begin{bmatrix} \omega_{z11} \\ \omega_{z12} \end{bmatrix} \qquad p_1^{o} = \begin{bmatrix} v_{x11} & v_{y11} & v_{x12} & v_{y12} \end{bmatrix}^T$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} p_2^{\#} \\ p_2^{o} \end{bmatrix} \qquad p_2^{\#} = \begin{bmatrix} \omega_{z21} \\ \omega_{z22} \end{bmatrix} \qquad p_2^{o} = \begin{bmatrix} v_{x21} & v_{y21} & v_{x22} & v_{y22} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathsf{p} = \begin{bmatrix} \mathsf{p}^{\#} \\ \mathsf{p}^{o} \end{bmatrix} \qquad \mathsf{p}^{\#} = p_0^{\#} \qquad \mathsf{p}^{o} = \begin{bmatrix} p_0^{o} \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{p} = \begin{bmatrix} \mathfrak{p}^{\#} \\ \mathfrak{p}^{o} \end{bmatrix} \qquad \mathfrak{p}^{\#} = p_0^{\#} \qquad \mathfrak{p}^{o} = \begin{bmatrix} p_1^{\#} \\ p_2^{\#} \end{bmatrix}$$

c) Definimos as relações em q e p de cada sub-sistema:

$$p_0^{\#} = \Psi_0 q_0^{\#} \qquad p_1^{\#} = \Psi_1 q_1^{\#} \qquad p_2^{\#} = \Psi_2 q_2^{\#}$$

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Psi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Psi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = \mathbb{C}_0 p_0^{\#} \qquad p_1 = \mathbb{C}_1 p_1^{\#} \qquad p_2 = \mathbb{C}_2 p_2^{\#}$$

$$\mathbb{C}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_{12} & 0 \\ l_1 c_{12} & l_{2g} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_{22} & 0 \\ l_1 c_{22} & l_{2g} \end{bmatrix}$$

Repare que:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^{\#} \\ p_1^{\#} \\ p_2^{\#} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathsf{p} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{C}_2 \end{bmatrix} \mathfrak{p} \tag{62}$$

Nosso objetivo é encontrar uma matriz $\hat{\mathbb{C}}$ tal que:

$$\mathfrak{p} = \hat{\mathbb{C}} \mathfrak{p}^{\#} = \hat{\mathbb{C}} \mathsf{p}^{\#} \tag{63}$$

Assim teriamos uma relação linear direta entre p e $\mathsf{p}^{\#}$.
Nomeamos $\hat{\mathbb{C}}$ de matriz de acoplamento dos sub-sistemas.

d) Encontramos $\dim(\mathsf{q}^o)$ equações vinculares de posição:

Para o pentágono articulado, obtemos 4 equações:

$$\varphi(q_0, q_1, q_2) = \begin{bmatrix} x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11} - l_2 c_{11+12} \\ y_p - l_1 s_{11} - l_2 s_{11+12} \\ x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21} - l_2 c_{21+22} \\ y_p - l_1 s_{21} - l_2 s_{21+22} \end{bmatrix} = 0 \tag{64}$$

e) Derivamos $\varphi(q_0, q_1, q_2) = 0$ no tempo, utilizando a regra da cadeia, para encontrar os vínculos de velocidades:

$$\frac{d}{dt}\varphi(q_0, q_1, q_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_0}\dot{q}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\dot{q}_2 =$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_0}\Psi_0^{-1} p_0^{\#} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\Psi_1^{-1} p_1^{\#} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\Psi_2^{-1} p_2^{\#} = 0$$

$$\therefore \Lambda(\mathsf{q}, \mathfrak{p}^{\#}, \mathfrak{p}^{o}) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_0}\Psi_0^{-1} p_0^{\#} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\Psi_1^{-1} p_1^{\#} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\Psi_2^{-1} p_2^{\#} = 0 \tag{65}$$

Para o pentágono articulado:

$$\Lambda(\mathsf{q}, \mathfrak{p}^{\#}, \mathfrak{p}^{o}) = \begin{bmatrix} v_{px} + \omega_{z11} l_1 s_{11} + \omega_{z12} l_2 s_{11+12} \\ v_{py} - \omega_{z11} l_1 c_{11} - \omega_{z12} l_2 c_{11+12} \\ v_{px} + \omega_{z21} l_1 s_{21} + \omega_{z22} l_2 s_{21+22} \\ v_{py} - \omega_{z21} l_1 c_{21} - \omega_{z22} l_2 c_{21+22} \end{bmatrix} \tag{66}$$

f) Utilizamos a linearidade de $\Lambda(\mathsf{q}, \mathfrak{p}^{\#}, \mathfrak{p}^{o})$ em $\mathfrak{p}^{\#}$ e $\mathfrak{p}^{o}$ para encontrar a matriz $\mathbb{C}$:

$$\Lambda(\mathsf{q}, \mathfrak{p}^{\#}, \mathfrak{p}^{o}) = \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{p}^{\#}}\mathfrak{p}^{\#} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{p}^{o}}\mathfrak{p}^{o} = 0 \tag{67}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{p}^{o} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{p}^{o}}^{-1}\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{p}^{\#}}\mathfrak{p}^{\#} \tag{68}$$

$$\therefore \hat{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} I_{2x2} \\ -\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{p}^{o}}^{-1}\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{p}^{\#}} \end{bmatrix} \tag{69}$$

Para o pentágono articulado:

$$\hat{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{s_{11+12}}{l_1 s_{12}} \\ -\frac{c_{11}}{l_2 s_{12}} & -\frac{s_{11}}{l_2 s_{12}} \\ \frac{c_{21+22}}{l_1 s_{22}} & \frac{s_{21+22}}{l_1 s_{22}} \\ -\frac{c_{21}}{l_2 s_{22}} & -\frac{s_{21}}{l_2 s_{22}} \end{bmatrix} \tag{70}$$

g) Modelo final:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{s_{11+12}}{l_1 s_{12}} \\ -\frac{c_{11}}{l_2 s_{12}} & -\frac{s_{11}}{l_2 s_{12}} \\ \frac{c_{21+22}}{l_1 s_{22}} & \frac{s_{21+22}}{l_1 s_{22}} \\ -\frac{c_{21}}{l_2 s_{22}} & -\frac{s_{21}}{l_2 s_{22}} \end{bmatrix}^T
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} m_p \dot{v}_{px} \\ m_p \dot{v}_{py} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_{12} & 0 \\ l_1 c_{12} & l_{2g} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1}\dot{\omega}_{z11} \\ J_{z2}\dot{\omega}_{z12} \\ m_1 \dot{v}_{x11} \\ m_1 \dot{v}_{y11} \\ m_2 \dot{v}_{x12} \\ m_2 \dot{v}_{y12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g s_{11} \\ m_1 g c_{11} \\ m_2 g s_{11+12} \\ m_2 g c_{11+12} \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_{22} & 0 \\ l_1 c_{22} & l_{2g} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1}\dot{\omega}_{z21} \\ J_{z2}\dot{\omega}_{z22} \\ m_1 \dot{v}_{x21} \\ m_1 \dot{v}_{y21} \\ m_2 \dot{v}_{x22} \\ m_2 \dot{v}_{y22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g s_{21} \\ m_1 g c_{21} \\ m_2 g s_{21+22} \\ m_2 g c_{21+22} \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{21} \\ \tau_{22} \end{bmatrix}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{71}
$$

Que pode ser reescrito como:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{s_{11+12}}{l_1 s_{12}} \\ -\frac{c_{11}}{l_2 s_{12}} & -\frac{s_{11}}{l_2 s_{12}} \\ 0 & 0 \\ \frac{l_{1g} c_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{l_{1g} s_{11+12}}{l_1 s_{12}} \\ c_{11+12} & s_{11+12} \\ \frac{l_2 c_{12} c_{11+12} - l_{2g} c_{11}}{l_2 s_{12}} & \frac{l_2 c_{12} s_{11+12} - l_{2g} s_{11}}{l_2 s_{12}} \\ \frac{c_{21+22}}{l_1 s_{22}} & \frac{s_{21+22}}{l_1 s_{22}} \\ -\frac{c_{21}}{l_2 s_{22}} & -\frac{s_{21}}{l_2 s_{22}} \\ 0 & 0 \\ \frac{l_{1g} c_{21+22}}{l_1 s_{22}} & \frac{l_{1g} s_{21+22}}{l_1 s_{22}} \\ c_{21+22} & s_{21+22} \\ \frac{l_2 c_{22} c_{21+22} - l_{2g} c_{21}}{l_2 s_{22}} & \frac{l_2 c_{22} s_{21+22} - l_{2g} s_{21}}{l_2 s_{22}} \end{pmatrix}^T
\left\{ \begin{bmatrix} m_p \dot{v}_{px} \\ m_p \dot{v}_{py} \\ J_{z1}\dot{\omega}_{z11} \\ J_{z2}\dot{\omega}_{z12} \\ m_1 \dot{v}_{x11} \\ m_1 \dot{v}_{y11} \\ m_2 \dot{v}_{x12} \\ m_2 \dot{v}_{y12} \\ J_{z1}\dot{\omega}_{z21} \\ J_{z2}\dot{\omega}_{z22} \\ m_1 \dot{v}_{x21} \\ m_1 \dot{v}_{y21} \\ m_2 \dot{v}_{x22} \\ m_2 \dot{v}_{y22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g \\ 0 \\ 0 \\ m_1 g s_{11} \\ m_1 g c_{11} \\ m_2 g s_{11+12} \\ m_2 g c_{11+12} \\ 0 \\ 0 \\ m_1 g s_{21} \\ m_1 g c_{21} \\ m_2 g s_{21+22} \\ m_2 g c_{21+22} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{c_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{c_{21+22}}{l_1 s_{22}} \\ \frac{s_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{s_{21+22}}{l_1 s_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{21} \end{bmatrix} \tag{72}
$$

Supondo $F_x = F_y = \tau_{12} = \tau_{22} = 0$