Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2015 - 07/04/2015

Turma A
1ª Questão:

a) (1,5) Calcule a área de um laço da rosácea cuja equação em coordenadas polares é $r(\theta) = \cos 5\theta$.

b) (2,0) Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{x+y-1}{(x+y+1)^4}\, dx\, dy$, sendo D a região do plano limitada por:

$$x+y-1 = x-y+1,\ x+y-1 = 2(x-y+1),\ x-y+1 = 1,\ x-y+1 = 2.$$

Solução:

a) O laço da rosácea em questão apresenta o seguinte formato:

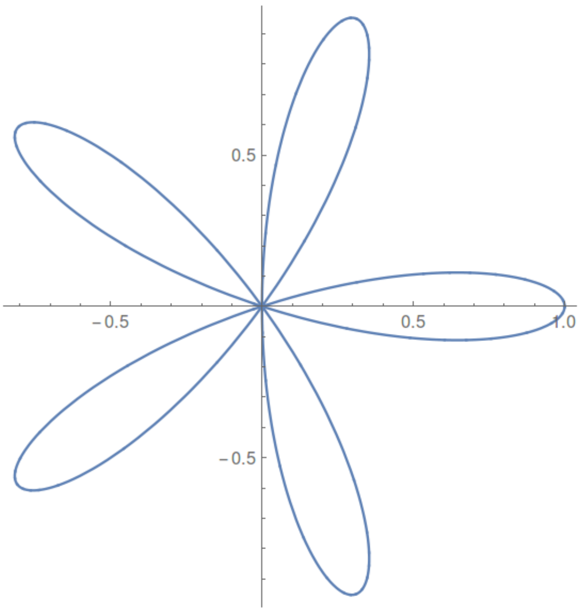

Figura 1: Laço da rosácea

Como cada laço começa e termina em $r = 0$ e $r \geq 0 \Rightarrow \cos 5\theta \geq 0$, deve existir um laço em $-\frac{\pi}{2} \leq 5\theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{10} \leq \theta \leq \frac{\pi}{10}$. Logo, a área de um laço da rosácea é dada por:

$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \int_0^{\cos 5\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^{\cos 5\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \cos^2(5\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \frac{1+\cos(10\theta)}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(10\theta)}{10}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{20}$$

b) O domínio de integração é exibido abaixo

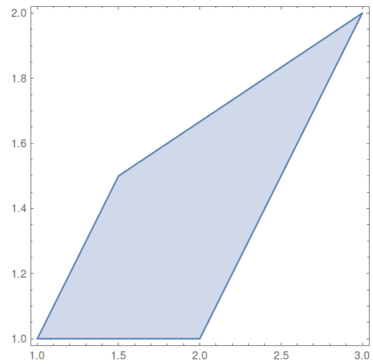

Figura 2: Domínio de integração

Faz-se a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = x + y - 1 \\ v = x - y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} + 1 \end{cases}$$

O jacobiano da transformação é dado por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

O novo domínio de integração é exibido abaixo

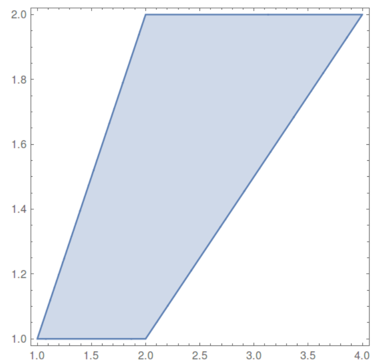

Figura 3: Domínio de integração após mudança

E passa a ser dado por:

$$D(u,v) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | v \leq u \leq 2v \ , \ 1 \leq v \leq 2\}$$

A integral a ser calculada passa a ser:

$$\int_1^2 \int_v^{2v} \frac{u}{v^4} \cdot \frac{1}{2} \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{u^2}{2} \Big|_v^{2v} \frac{1}{v^4} \, dv = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{4v^2 - v^2}{v^4} \, dv = \frac{3}{4} \int_1^2 \frac{1}{v^2} \, dv = \frac{3}{4} \cdot \frac{v^{-1}}{-1} \Big|_1^2 = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{3}{8}$$

2ª Questão:

a) (2,0) Calcule a massa da curva cujo traço é a parte da elipse $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ no primeiro quadrante com densidade $\delta(x,y)=xy$.

b) (1,5) Inverta a ordem de integração e calcule a integral iterada: $\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^4 y\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx\,dy$.

Solução:

a) Devemos calcular a integral

$$\int_\gamma \delta(x,y,z)\,ds$$

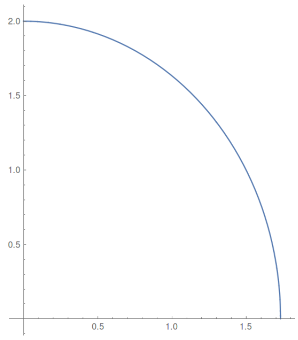

Figura 4: Curva $\gamma(t)$

Parametrizando a curva em questão:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \begin{cases} x(t)=\sqrt{3}\cos t \\ y(t)=2\ \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\therefore \gamma(t)=(\sqrt{3}\cos t, 2\ \operatorname{sen} t), t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\gamma'(t)=(-\sqrt{3}\ \operatorname{sen} t, 2\cos t)$$

$$||\gamma'(t)||=\sqrt{3\ \operatorname{sen}^2 t+4\cos^2 t}=\sqrt{1+\cos^2 t}$$

Utilizando a definição de integral de linha de uma função escalar:

$$\int_\gamma \delta(x,y)\,ds=\int_{t_i}^{t_f}\delta(\gamma(t))||\gamma'(t)||\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{3}\ \ \operatorname{sen} t\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt$$

Utilizando a seguinte mudança de váriavel: $u=1+\cos^2 t \Rightarrow du=-2\cos t\ \operatorname{sen} t\ dt$, temos:

$$=-\sqrt{3}\int_1^0\sqrt{u}\,du=\sqrt{3}\int_0^1\sqrt{u}\,du=\sqrt{3}\,\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Para inverter os extremos de integração, primeiro esboçamos o domínio de integração.

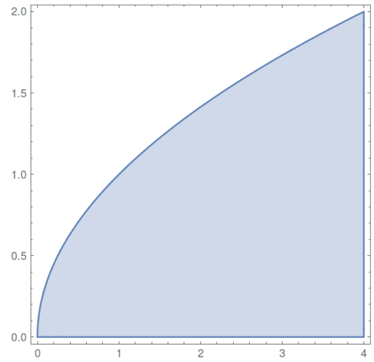

Figura 5: Domínio de integração

A partir do esboço, pode-se perceber que o domínio de integração pode ser reescrito como $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq \sqrt{x},\, 0 \leq x \leq 4\}$. Assim, temos:

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, dx\, dy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^4 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$$

Utilizando a seguinte mudança de váriavel: $u = 1 + 1 + x^2 \Rightarrow du = 2x\ dx$, temos:

$$= \frac{1}{4}\int_1^{17} \frac{\ln(u)}{u}\, du$$

Integrando por partes, temos:

$$\int \frac{\ln(u)}{u}\, du = \ln^2 u - \int \frac{\ln(u)}{u}\, du \therefore \int \frac{\ln(u)}{u}\, du = \frac{\ln^2 u}{2} + C$$

$$\therefore \frac{1}{4}\int_1^{17} \frac{\ln(u)}{u}\, du = \frac{1}{8}\ln^2 u\Big|_1^{17} = \frac{\ln^2(17)}{8}$$

3ª Questão: (3,0)

Calcule a massa do sólido que é parte da bola $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$, acima do cone $z = \sqrt{\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)}$ e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, com densidade $\delta(x,y,z) = z$.

Solução:

Devemos calcular a integral

$$\iiint_{D_{xyz}} z \, dx \, dy \, dz \tag{1}$$

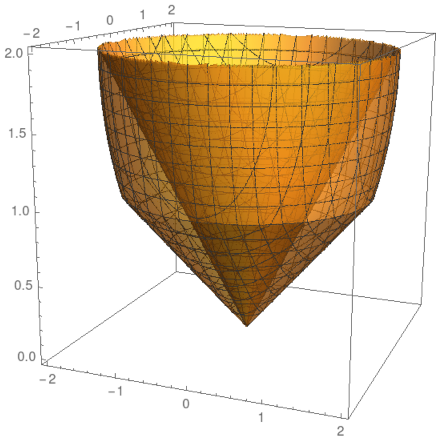

Figura 6: Região $D_{xyz} = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4,\ z \geq \sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)} \text{ e } z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$

Realizamos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \rho \ \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \ \operatorname{sen}\phi \ \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \tag{2}$$

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right| = \left\|\begin{matrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho \ \operatorname{sen}\phi \ \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi \ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi \ \operatorname{sen}\theta & \rho \ \operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho \ \operatorname{sen}\phi & 0 \end{matrix}\right\| = \rho^2 \ \operatorname{sen}\phi \tag{3}$$

Aplicando (2) à equação da esfera:

$$\rho^2 = 4\rho\cos\phi \therefore \rho = 4\cos\phi \tag{4}$$

Aplicando (2) à equação do cone de baixo :

$$\rho^2\cos^2\phi = \frac{1}{3}\rho^2 \ \operatorname{sen}^2\phi \Rightarrow \tan^2\phi = 3 \therefore \phi = \frac{\pi}{3} \tag{5}$$

Aplicando (2) à equação do cone de cima :

$$\rho^2\cos^2\phi = \rho^2 \ \operatorname{sen}^2\phi \Rightarrow \tan^2\phi = 1 \therefore \phi = \frac{\pi}{4} \tag{6}$$

Assim podemos facilmente descrever D em coordenadas esféricas.

Calculando a integral :

$$\iiint_{D_{xyz}} z\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{4\cos\phi} \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \ \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{4\cos\phi} \ \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{4^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^5\phi \ \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

Fazendo a seguinte mudaça de variável: $u = \cos\phi \Rightarrow du = -\ \operatorname{sen}\phi\, d\phi$, temos:

$$= -4^3 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} u^5\, du\, d\theta = 4^3 \int_0^{2\pi} \frac{u^6}{6}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\theta = \frac{4^3}{6}\Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{64}\Big) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4^3}{6} \cdot \frac{7}{64} \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2015 - 07/04/2015

Turma B
1ª Questão:

a) (1,5) Calcule a área de um laço da rosácea cuja equação em coordenadas polares é $r(\theta) = \cos 5\theta$.

b) (2,0) Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{x+y-1}{(x+y+1)^5}\, dx\, dy$, sendo D a região do plano limitada por:

$$x + y - 1 = x - y + 1,\ x + y - 1 = 2(x - y + 1),\ x - y + 1 = 1,\ x - y + 1 = 2.$$

Solução:

a) O laço da rosácea em questão apresenta o seguinte formato:

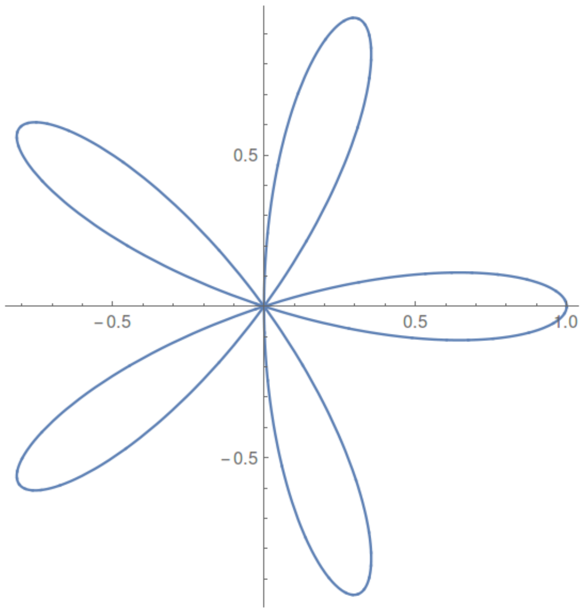

Figura 7: Laço da rosácea

Como cada laço começa e termina em $r = 0$ e $r \geq 0 \Rightarrow \cos 5\theta \geq 0$, deve existir um laço em $-\frac{\pi}{2} \leq 5\theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{10} \leq \theta \leq \frac{\pi}{10}$. Logo, a área de um laço da rosácea é dada por:

$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \int_{0}^{\cos 5\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\cos 5\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \cos^2(5\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \frac{1+\cos(10\theta)}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(10\theta)}{10}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{20}$$

b) O domínio de integração é exibido abaixo

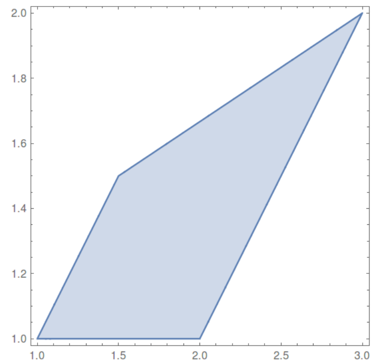

Figura 8: Domínio de integração

Faz-se a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = x + y - 1 \\ v = x - y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} + 1 \end{cases}$$

O jacobiano da transformação é dado por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

O novo domínio de integração é exibido abaixo

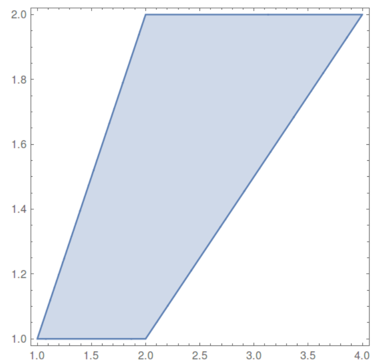

Figura 9: Domínio de integração após mudança

E passa a ser dado por:

$$D(u, v) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | v \leq u \leq 2v \ , \ 1 \leq v \leq 2\}$$

A integral a ser calculada passa a ser:

$$\int_1^2 \int_v^{2v} \frac{u}{v^5} \cdot \frac{1}{2} \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{u^2}{2} \Big|_v^{2v} \frac{1}{v^5} \, dv = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{4v^2 - v^2}{v^5} \, dv = \frac{3}{4} \int_1^2 \frac{1}{v^3} \, dv = \frac{3}{4} \cdot \frac{v^{-2}}{-2} \Big|_1^2 = -\frac{3}{8} \Big(\frac{1}{4} - 1\Big) = \frac{9}{32}$$

2ª Questão:

a) (2,0) Calcule a massa da curva cujo traço é a parte da elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ no primeiro quadrante com densidade $\delta(x, y) = xy$.

b) (1,5) Inverta a ordem de integração e calcule a integral iterada: $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2}\, dx\, dy$.

Solução:

a) Devemos calcular a integral

$$\int_\gamma \delta(x, y, z)\, ds$$

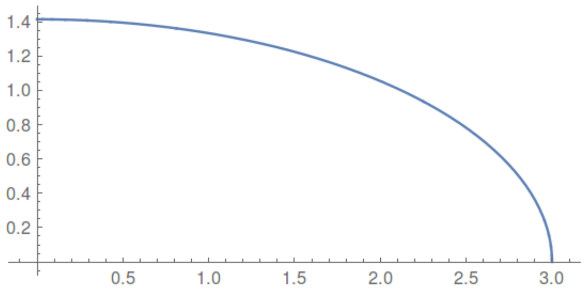

Figura 10: Curva $\gamma(t)$

Parametrizando a curva em questão:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\ \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\therefore \gamma(t) = (3\cos t, \sqrt{2}\ \operatorname{sen} t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\gamma'(t) = (-3\ \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t)$$

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{9\ \operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2 + 7\ \operatorname{sen}^2 t}$$

Utilizando a definição de integral de linha de uma função escalar:

$$\int_\gamma \delta(x, y)\, ds = \int_{t_i}^{t_f} \delta(\gamma(t))||\gamma'(t)||\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{2}\ \operatorname{sen} t\cos t\sqrt{2 + 7\ \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

Utilizando a seguinte mudança de váriavel: $u = 2 + 7\ \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow du = 14\ \operatorname{sen} t\cos t\ dt$, temos:

$$= \frac{3\sqrt{2}}{14}\int_2^9 \sqrt{u}\, du = \frac{3\sqrt{2}}{14} \cdot \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_2^9 = \frac{\sqrt{2}}{7}\left(27 - 2\sqrt{2}\right)$$

b) Para inverter os extremos de integração, primeiro esboçamos o domínio de integração.

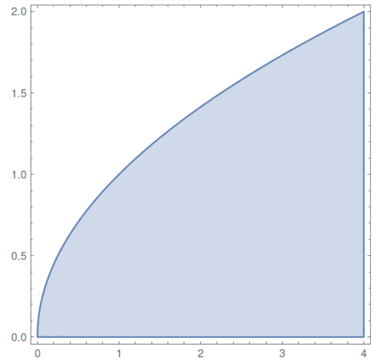

Figura 11: Domínio de integração

A partir do esboço, pode-se perceber que o domínio de integração pode ser reescrito como $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq \sqrt{x},\, 0 \leq x \leq 4\}$. Assim, temos:

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, dx\, dy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^4 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$$

Utilizando a seguinte mudança de váriavel: $u = 1 + 1 + x^2 \Rightarrow du = 2x\ dx$, temos:

$$= \frac{1}{4}\int_1^{17} \frac{\ln(u)}{u}\, du$$

Integrando por partes, temos:

$$\int \frac{\ln(u)}{u}\, du = \ln^2 u - \int \frac{\ln(u)}{u}\, du \therefore \int \frac{\ln(u)}{u}\, du = \frac{\ln^2 u}{2} + C$$

$$\therefore \frac{1}{4}\int_1^{17} \frac{\ln(u)}{u}\, du = \frac{1}{8}\ln^2 u\Big|_1^{17} = \frac{\ln^2(17)}{8}$$

3ª Questão: (3,0)

Calcule a massa do sólido que é parte da bola $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$, acima do cone $z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$ e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, com densidade $\delta(x,y,z) = z$.

Solução:

Devemos calcular a integral

$$\iiint_{D_{xyz}} z\,dx\,dy\,dz \tag{7}$$

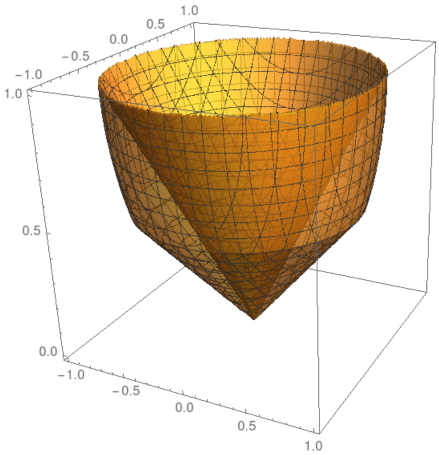

Figura 12: Região $D_{xyz} = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)} \text{ e } z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$

Realizamos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \tag{8}$$

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right| = \left\|\begin{matrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\operatorname{sen}\phi & 0 \end{matrix}\right\| = \rho^2\operatorname{sen}\phi \tag{9}$$

Aplicando (8) à equação da esfera:

$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi \therefore \rho = 2\cos\phi \tag{10}$$

Aplicando (8) à equação do cone de baixo :

$$\rho^2\cos^2\phi = \frac{1}{3}\rho^2\operatorname{sen}^2\phi \Rightarrow \tan^2\phi = 3 \therefore \phi = \frac{\pi}{3} \tag{11}$$

Aplicando (8) à equação do cone de cima :

$$\rho^2\cos^2\phi = \rho^2\operatorname{sen}^2\phi \Rightarrow \tan^2\phi = 1 \therefore \phi = \frac{\pi}{4} \tag{12}$$

Assim podemos facilmente descrever D em coordenadas esféricas.

Calculando a integral :

$$\iiint_{D_{xyz}} z\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\cos\phi} \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \ \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2\cos\phi} \ \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{2^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^5\phi \ \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

Fazendo a seguinte mudaça de variável: $u = \cos\phi \Rightarrow du = -\ \operatorname{sen}\phi\, d\phi$, temos:

$$= -4 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} u^5\ du\, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \frac{u^6}{6}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\theta = \frac{4}{6}\Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{64}\Big) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{64} \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{48}$$