Escola Politécnica da USP
IC2014 - Grupo de pesquisa em Robótica e suas aplicações

Cinemática 3D - Parte I

Considerações Algelinísticas:

- Matrizes de transformações lineares:

$$[T(u)]_C = [T]_{B/C}[u]_B$$

- Composição de transformações lineares:

$$[T(u)]_D = [T]_{C/D}[T]_{B/C}[u]_B$$
$$\therefore [T]_{B/D} = [T]_{C/D}[T]_{B/C}$$

- Mudança de base:

$$[u]_C = [I]_{B/C}[u]_B$$

- Se as bases forem ortonormais:

$$[I]_{C/B} = [I]^t_{B/C} = [I]^{-1}_{B/C}$$

- Construção da matriz de mudança de base:

$$[I]_{B/can} = \left[[\hat{\imath}']_{can} | [\hat{\jmath}']_{can} | [\hat{k}']_{can} \right]$$

  Sendo $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ os versores da base canônica e $\{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$ os versores da base B.

Cinemática de posição

- Matrizes de rotação em torno dos eixos x, y e z:

$$[I]_{B/can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} = R(\theta, x)$$

$$[I]_{B/can} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(\theta, z)$$

$$[I]_{B/can} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} = R(\theta, y)$$

- Matrizes de transformação homogênea:

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ 1 \end{bmatrix} = [H]_{B/C} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ 1 \end{bmatrix}$$

i) Rotação pura:

$$[H]_{B/C} = \begin{bmatrix} [I]_{B/C} & 0_{3x1} \\ 0_{1x3} & 1 \end{bmatrix}$$

ii) Translação pura:

$$[H]_{B/C} = \begin{bmatrix} I_{3x3} & \vec{d}_C \\ 0_{1x3} & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$

iii) Translação seguida de rotação:

$$[H]_{B/C} = \begin{bmatrix} I_{3x3} & \vec{d}_C \\ 0_{1x3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I]_{B/C} & 0_{3x1} \\ 0_{1x3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I]_{B/C} & \vec{d}_C \\ 0_{1x3} & 1 \end{bmatrix}$$

Vetor que equações de posição:

$$\Phi(X, \Theta) = 0$$

As matrizes de transformação homogêneas são utilizadas para encontrarmos a relação das coordenadas Θ dos atuadores com as coordenadas cartesianas X da plataforma (ou garra). Essas relações são dadas de forma genérica como um vetor de funções nulas $\Phi(X, \Theta) = 0$.

Exemplo 1

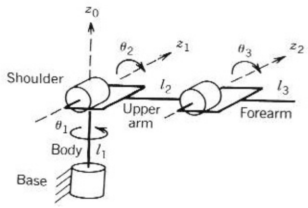

Figura 1: Mecanismo RRR

Primeiro definimos um vetor Θ de coordenadas dos atuadores e um vetor X das coordenadas da garra escritas no referencial inercial canônico:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

Depois disso, utilizamos as matrizes de transformação homogênea para estabelecer a relação das coordenadas X com as coordenadas Θ:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & s_2 & c_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -s_3 & l_2 \\ 0 & s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 c_{23} & s_1 s_{23} & -l_2 s_1 c_2 \\ s_1 & c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & l_2 c_1 c_2 \\ 0 & s_{23} & c_{23} & h + l_1 + l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ h + l_1 + l_2 s_2 + l_3 s_{23} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Repare neste caso conseguimos isolar as coordenadas X em função das coordenadas Θ, ou seja: $X = f(\Theta)$. Sendo assim, o vetor de equações de posição é dado por $\Phi = X - f(\Theta)$.

Cinemática de velocidades

$$\frac{d}{dt}\Phi(X(t), \Theta(t)) = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial X}\dot{X} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}\dot{\Theta} = 0$$
$$\therefore J_X \dot{X} + J_\Theta \dot{\Theta} = 0$$

Como J_X e J_Θ são funções apenas de X e Θ, tendo resolvido o problema de posição, o problema de velocidades torna-se um sistema linear.

Exemplo 2

O cinemática de velocidades para o mecanismo descrito no exemplo 1 é feita da seguinte maneira:

$$J_X = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}(X - f(\Theta)) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_\Theta = \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = \frac{\partial}{\partial \Theta}(X - f(\Theta)) = -\frac{\partial f}{\partial \Theta} = -\begin{bmatrix} -c_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) & s_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) & l_3s_1s_{23} \\ -s_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) & -c_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) & -l_3c_1s_{23} \\ 0 & l_2c_2 + l_3c_{23} & l_3c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) & s_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) & l_3s_1s_{23} \\ -s_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) & -c_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) & -l_3c_1s_{23} \\ 0 & l_2c_2 + l_3c_{23} & l_3c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Cinemática de acelerações

$$\frac{d}{dt}(J_X \dot{X} + J_\Theta \dot{\Theta}) = 0$$
$$\therefore \dot{J}_X \dot{X} + J_X \ddot{X} + \dot{J}_\Theta \dot{\Theta} + J_\Theta \ddot{\Theta} = 0$$

Como $\dot{J}_X$ e $\dot{J}_\Theta$ são funções apenas de $X, \Theta, \dot{X}$ e $\dot{\Theta}$, tendo resolvido os problemas de posição e velocidades, o problema de acelerações torna-se um sistema linear.

Exemplo 3

O cinemática de acelerações para o mecanismo descrito no exemplo 1 é feita da seguinte maneira:

$$\dot{J}_X = 0$$

$$\dot{J}_\Theta =$$

$$\begin{bmatrix} s_1(l_2c_2+l_3c_{23}) & c_1(l_2s_2+l_3s_{23}) & l_3c_1s_{23} \\ -c_1(l_2c_2+l_3c_{23}) & s_1(l_2s_2+l_3s_{23}) & l_3s_1s_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{\theta}_1+$$

$$\begin{bmatrix} c_1(l_2s_2+l_3s_{23}) & s_1(l_2c_2+l_3c_{23}) & l_3s_1c_{23} \\ s_1(l_2s_2+l_3s_{23}) & -c_1(l_2c_2+l_3c_{23}) & -l_3c_1c_{23} \\ 0 & -l_2s_2-l_3s_{23} & -l_3s_{23} \end{bmatrix}\dot{\theta}_2+$$

$$\begin{bmatrix} l_3c_1s_{23} & l_3s_1c_{23} & l_3s_1c_{23} \\ l_3s_1s_{23} & -l_3c_1c_{23} & -l_3c_1c_{23} \\ 0 & -l_3s_{23} & -l_3s_{23} \end{bmatrix}\dot{\theta}_3$$

Cinemática 3D - Parte II

Considerações Algelinísticas:

- Produto vetorial como um operador linear:

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ \omega_x v_y - \omega_y v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

  Ou seja, definindo:

$$S(\vec{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

  Temos:

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v} = S(\vec{\omega})\vec{v}$$

- Mudança de base para matrizes de operadores lineares:

$$[T]_B = [I]_{C/B}[T]_C[I]_{B/C}$$

Cinemática de velocidades angulares

Como já foi visto anteriormente:

$$[I]_{B/can} = \Big[[\hat{i}']_{can}|[\hat{j}']_{can}|[\hat{k}']_{can}\Big]$$

Sendo $\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$ os versores da base canônica e $\{\hat{i}',\hat{j}',\hat{k}'\}$ os versores da base B.

Derivando no tempo:

$$[\dot{I}]_{B/can} = \Big[[\vec{\omega}]_{can} \wedge [\hat{i}']_{can} | [\vec{\omega}]_{can} \wedge [\hat{j}']_{can} | [\vec{\omega}]_{can} \wedge [\hat{k}']_{can}\Big]$$

$$= \Big[[S(\vec{\omega})]_{can}[\hat{i}']_{can} | [S(\vec{\omega})]_{can}[\hat{j}']_{can} | [S(\vec{\omega})]_{can}[\hat{k}']_{can}\Big]$$

$$= [S(\vec{\omega})]_{can}\Big[[\hat{i}']_{can} | [\hat{j}']_{can} | [\hat{k}']_{can}\Big] = [S(\vec{\omega})]_{can}[I]_{B/can}$$

$$\therefore [S(\vec{\omega})]_{can} = [\dot{I}]_{B/can}[I]^t_{B/can}$$

Como $S(\vec{\omega})$ é um operador linear, podemos facilmente encontrar $[S(\vec{\omega})]_B$, se desejarmos:

$$[S(\vec{\omega})]_B = [I]^t_{B/can}[S(\vec{\omega})]_{can}[I]_{B/can} = [I]^t_{B/can}[\dot{I}]_{B/can}[I]^t_{B/can}[I]_{B/can}$$

$$\therefore [S(\vec{\omega})]_B = [I]^t_{B/can}[\dot{I}]_{B/can}$$

Exemplo 4

Dertermine $[\vec{\omega}]_B$ da barra 3 do mecanismo do exemplo 1, sendo B a base presa à barra 3.

Como já foi calculado anteriormente:

$$[I]_{B/can} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1c_{23} & s_1s_{23} \\ s_1 & c_1c_{23} & -c_1s_{23} \\ 0 & s_{23} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Derivando no tempo:

$$[\dot{I}]_{B/can} = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1c_{23} & c_1s_{23} \\ c_1 & -s_1c_{23} & s_1s_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 0 & s_1s_{23} & s_1c_{23} \\ 0 & -c_1s_{23} & -c_1c_{23} \\ 0 & c_{23} & -s_{23} \end{bmatrix}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)$$

$$[S(\vec{\omega})]_B = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1c_{23} & c_1c_{23} & s_{23} \\ s_1s_{23} & -c_1s_{23} & c_{23} \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -s_1 & -c_1c_{23} & c_1s_{23} \\ c_1 & -s_1c_{23} & s_1s_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 0 & s_1s_{23} & s_1c_{23} \\ 0 & -c_1s_{23} & -c_1c_{23} \\ 0 & c_{23} & -s_{23} \end{bmatrix}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\right\}$$

$$[S(\vec{\omega})]_B = \begin{bmatrix} 0 & -c_{23} & s_{23} \\ c_{23} & 0 & 0 \\ -s_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)$$

$$\therefore [\vec{\omega}]_B = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \\ s_{23}\dot{\theta}_1 \\ c_{23}\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$