Escola Politécnica da USP
IC2014 - Grupo de pesquisa em Robótica e suas aplicações

Dinâmica

Algumas definições importantes:

Seja $\mho$ um sistema mecânico de n graus de liberdade. Para encontrar as equações diferenciais de movimento do sistema, é conveniente fazer as seguintes definições:

- $q^\#$: vetor de n coordenadas generalizadas independentes
- q^o: vetor de m_q coordenadas generalizadas redundandes
- q: vetor contendo todas as coordenadas generalizadas. Usualmente $q = \begin{bmatrix} q^\# \\ q^o \end{bmatrix}$
- $\phi(q)$: vetor de tamanho m_q dos vínculos de posição, de modo que conhecendo $q^\#$ seja possível determinar q^o resolvendo $\phi(q) = 0$
- $p^\#$: vetor de n velocidades generalizadas independentes
- p^o: vetor de m_p velocidades generalizadas redundandes
- p: vetor contendo todas as velocidades generalizadas. Usualmente $p = \begin{bmatrix} p^\# \\ p^o \end{bmatrix}$
- $\Lambda(q,p)$: vetor de tamanho m_q dos vínculos de velocidades, de modo que conhecendo q e $p^\#$ seja possível determinar p^o resolvendo $\Lambda(q,p) = 0$
- f_q vetor de $n + m_q$ esforços ativos dos atuadores na direção q (f_{q_i} está na direção de $q_i, i = 1, 2, ..., n + m_q$)
- f_p vetor de $n + m_p$ esforços ativos dos atuadores na direção p (f_{p_i} está na direção de $p_i, i = 1, 2, ..., n + m_p$)
- F_q vetor de $n + m_q$ esforços ativos dos atuadores na direção $q^\#$ (f_{q_i} está na direção de $q_i, i = 1, 2, ..., n$)
- F_p vetor de $n + m_p$ esforços ativos dos atuadores na direção $p^\#$ (f_{p_i} está na direção de $p_i, i = 1, 2, ..., n$)

Na dinâmica de sistemas mecânicos multi-corpos, é muito vantajosa a utilização de coordenadas/velocidades generalizadas redundantes, pois a utilização destas diminui a complexidade da utilização dos métodos de dedução das equações de movimento (como Lagrange, Kane e Gibbs-Appell) e em contrapartida aumenta a complexidade da cinemática (pois torna necessário definir $\phi(q)$ e $\Lambda(q,p)$).

Nos métodos citados, é necessário o cálculo das velocidades absolutas dos centros de massa $\vec{v}_{G_i}$ e das velocidades angulares absolutas $\vec{\omega}_i$ de todos os corpos rígidos do sistema, em função de p e q. Sendo assim, é conveniente definir o vetor de velocidades generalizadas p como sendo todas as componentes dos $\vec{v}_{G_i}$ e dos $\vec{\omega}_i$, em alguma ordem conveniente. Fazendo isso, tornamos a apliação dos métodos extremamente simples, deixando praticamente toda a complexidade do problema no cálculo de $\phi(q)$ e $\Lambda(q, p)$.

Aqui seguem sugestões de escolhas de coordenadas q e p:

- Para mecanismo seriais:
  - Escolher $q^{\#}$ como sendo as coordenadas relativas das juntas atuadas (ângulos de giro para juntas ativas de rotação e deslocamentos lineares para juntas ativas prismáticas) e q^o como sendo as coordenadas dos centros de massa das barras do mecanismos em relação a um referencial inercial.
  - Escolher p como sendo todas as componentes de $[\vec{v}_{G_i}]_{B_i}$ e dos $[\vec{\omega}_i]_{B_i}$, $i = 1, 2, ..., n$, sendo B_i um sistema de coordenadas cartesianos preso na i-ésima barra, cujos eixos são paralelos às direções principais da i-ésima barra. As coordenadas $p^{\#}$ serão as componentes de p análogas a $\dot{q}^{\#}$, com a diferença que serão velocidades absolutas.

Exemplo 1

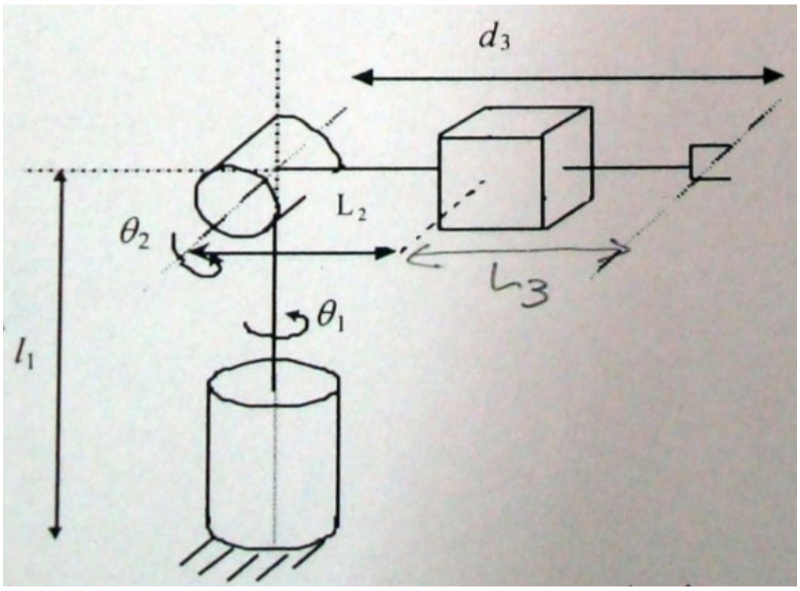

Figura 1: Robô <u>RRP</u>

- Primeiro definimos $n + m_q$ coordenadas q. Estas podem ser subdivididas em n coordenadas independentes $q^{\#}$ e m_q coordenadas redudantes q^o.

$$q = \begin{bmatrix} q^{\#} \\ q^o \end{bmatrix}$$

No caso do mecanismo $\underline{RRP}$, temos:

$$q^{\#} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & d_3 \end{bmatrix}^T$$

$$q^o = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}^T$$

Com $n = 3$ e $m_q = 9$. Neste caso, as componentes de q^o são as coordenadas dos centros de massa das barras, escritas no referencial canônico.

- Depois definimos $n + m_p$ coordenadas p. Estas podem ser subdivididas em n coordenadas independentes $p^{\#}$ e m_p coordenadas redudantes p^o. As coordenadas $p^{\#}$ podem ser subdividas em n_1 velocidades angulares $\omega^{\#}$ e n_2 velocidades lineares $v^{\#}$. As coordenadas p^o podem ser subdividas em m_{p1} velocidades angulares ω^o e m_{p2} velocidades lineares v^o.

$$p = \begin{bmatrix} p^{\#} \\ p^o \end{bmatrix} \qquad p^{\#} = \begin{bmatrix} \omega^{\#} \\ v^{\#} \end{bmatrix} \qquad p^o = \begin{bmatrix} \omega^o \\ v^o \end{bmatrix}$$

No caso do mecanismo $\underline{RRP}$, temos:

$$\omega^{\#} = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{x2} \end{bmatrix}$$

$$v^{\#} = \begin{bmatrix} v_{y3} \end{bmatrix}$$

$$\omega^o = \begin{bmatrix} \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{y2} & \omega_{z2} & \omega_{x3} & \omega_{y3} & \omega_{z3} \end{bmatrix}^T$$

$$v^o = \begin{bmatrix} v_{x1} & v_{y1} & v_{z1} & v_{x2} & v_{y2} & v_{z2} & v_{x3} & v_{z3} \end{bmatrix}^T$$

Com $m_{p1} = 7$, $m_{p2} = 8$ e $m_p = m_{p1} + m_{p2} = 15$, sendo $v^{\#}$ e v^o as componentes das velocidades absolutas dos centros de massa das barras, escritas nas bases presas às barras, e $\omega^{\#}$ e ω^o as componentes das velocidades angulares absolutas, escritas nas bases presas às barras.

- Para mecanismos paralelos:

  - Escolher q como sendo as coordenadas relativas das juntas atuadas, as coordenadas dos centros de massa das barras do mecanismos em relação a um referencial inercial, os deslocamentos angulares ou lineares (relativos ou absolutos) das juntas passivas não conectadas diretamente à plataforma, e as coordenadas do centro de massa e orientação da plataforma em relação a um referencial inercial. Se fizer sentido e for conveniente, podem ser escolhidas n coordenadas dentro destas para formarem as coordenadas $q^{\#}$.

- Escolher p como sendo todas as componentes das velocidades absolutas dos centros de massa e das velocidades angulares de todos os corpos rígidos do sistema. As coordenadas $p^{\#}$ serão as componentes não nulas da velocidade absoluta do centros de massa e das velocidades angulares absolutas da plataforma.

Exemplo 2

Exemplo de mecanismo paralelo

-

-

Quanto ao cálculo do vetor $\phi(q)$ dos vínculos de posição, realizamos o seguinte procedimento:

- Para mecanismos seriais:
  - Basta utilizar matrizes de transformação homogênea para relacionar as coordenadas dos centros de massa das barras (em relação a uma base fixa) com os deslocamentos angulares ou lineares das juntas ativas.

Exemplo 3

- Realizamos a cinemática de posição para os centros de massa das barras, de modo a relacionar as coordenadas q^o com as coordenadas $q^\#$. Para isso, utilizamos matrizes de transformação homogênea.

$$[H]_{B_1/can} = \begin{bmatrix} Rot(\theta_1, z_0) & [\overrightarrow{O_0O_1}]_{can} \\ 0_{3x1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} [\overrightarrow{O_1G_1}]_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{1g} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[H]_{B_2/B_1} = \begin{bmatrix} Rot(\theta_2, x_1) & [\overrightarrow{O_1O_2}]_{B_1} \\ 0_{3x1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & s_2 & c_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} [\overrightarrow{O_2G_2}]_{B_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{2g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[H]_{B_3/B_2} = \begin{bmatrix} I_{3x3} & [\overrightarrow{O_2O_3}]_{B_2} \\ 0_{3x1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} [\overrightarrow{O_3G_3}]_{B_3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_3 - l_3 + l_{3g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[H]_{B_2/can} = [H]_{B_1/can}[H]_{B_2/B_1} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2s_1 & s_1s_2 & 0 \\ s_1 & c_1c_2 & -c_1s_2 & 0 \\ 0 & s_2 & c_2 & h + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[H]_{B_3/can} = [H]_{B_2/can}[H]_{B_3/B_2} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2s_1 & s_1s_2 & -c_2s_1l_2 \\ s_1 & c_1c_2 & -c_1s_2 & c_1c_2l_2 \\ 0 & s_2 & c_2 & h + l_1 + s_2l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = [H]_{B_1/can} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{O_1G_1}]_{B_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h + l_{1\mathrm{g}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = [H]_{B_2/can} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{O_2G_2}]_{B_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 s_1 l_{2g} \\ c_1 c_2 l_{2g} \\ h + l_1 + s_2 l_{2g} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = [H]_{B_3/can} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{O_3G_3}]_{B_3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 s_1 (l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3) \\ c_1 c_2 (l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3) \\ h + l_1 + s_2 (l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Repare que a partir das matrizes de transformação homogênea encontradas, encontramos também as seguintes matrizes de mudança de base:

$$R_1 = [I]_{B_1/can} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = [I]_{B_2/can} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 s_1 & s_1 s_2 \\ s_1 & c_1 c_2 & -c_1 s_2 \\ 0 & s_2 & c_2 \end{bmatrix} = R_3 = [I]_{B_3/can}$$

Com a cinemática de posição, conseguimos obter $m_q = 9$ equações vínculares de posição. Sendo assim, o vetor dos vínculos de posição é dado por:

$$\phi(q) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 - h - l_{1g} \\ x_2 + c_2 s_1 l_{2g} \\ y_2 - c_1 c_2 l_{2g} \\ z_2 - h - l_1 - s_2 l_{2g} \\ x_3 + c_2 s_1 (l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3) \\ y_3 - c_1 c_2 (l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3) \\ z_3 - h - l_1 - s_2 (l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3) \end{bmatrix}$$

- Para mecanismos paralelos:
  - Utilizar matrizes de transformação homogênea para relacionar as coordenadas dos centros de massa das barras (em relação a uma base fixa) com os deslocamentos angulares e/ou lineares das juntas ativas e passivas
  - Utilizar equações de loop fechado e/ou equações que relacionem diretamente as coordenadas atuadas com as coordenadas da plataforma para completar as m_q equações viculares.

Exemplo 4

Exemplo de mecanismo paralelo

-

-

Quanto ao cálculo do vetor $\Lambda(q,p)$ dos vínculos de velocidades, realizamos o seguinte procedimento:

- Para mecanismos seriais:
  - Utilizar as matrizes de rotação para o cálculo das velocidades angulares nas bases presas às barras
  - Derivar as coordenadas dos centros de massa para encontrar os vetores velocidade absoluta na base canônica
  - Utilizar as matrizes de rotação para mudar os vetores velocidade absoluta para as bases presas às barras
  - Montar os vetores $p^\#$ em função de $q^\#$ e $\dot{q}^\#$ ($P^\#(q^\#,\dot{q}^\#)$) e p^o em função de $q^\#$ e $\dot{q}^\#$ ($P^o(q^\#,\dot{q}^\#)$)
  - Utilizar a linearidade de $P^\#(q^\#,\dot{q}^\#)$ e $P^o(q^\#,\dot{q}^\#)$ em relação a $\dot{q}^\#$ para encontrar os vínculos de velocidades

  Exemplo 5

  - Utilizamos as matrizes de rotação para calcular as velocidades angulares em função de $q^\#$ e $\dot{q}^\#$:

$$[S(\vec{\omega}_1)]_{B_1} = R_1^T\dot{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\vec{\omega}_1]_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$[S(\vec{\omega}_2)]_{B_2} = R_2^T\dot{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -c_2\dot{\theta}_1 & s_2\dot{\theta}_1 \\ c_2\dot{\theta}_1 & 0 & -\dot{\theta}_2 \\ -s_2\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\vec{\omega}_1]_{B_2} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ s_2\dot{\theta}_1 \\ c_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$[S(\vec{\omega}_3)]_{B_3} = R_3^T\dot{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -c_2\dot{\theta}_1 & s_2\dot{\theta}_1 \\ c_2\dot{\theta}_1 & 0 & -\dot{\theta}_2 \\ -s_2\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\vec{\omega}_3]_{B_3} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ s_2\dot{\theta}_1 \\ c_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

  - Derivamos as equações de posição para encontrar as velocidades dos centros de massa:

$$[\vec{v}_1]_{can} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{v}_2]_{can} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{2g}(\dot{\theta}_2 s_1 s_2 - \dot{\theta}_1 c_1 c_2) \\ -l_{2g}(\dot{\theta}_1 s_1 c_2 - \dot{\theta}_2 c_1 s_2) \\ l_{2g}\dot{\theta}_2 c_2 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{v}_3]_{can} = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{d}_3 s_1 c_2 - (d_3 + l_{3g} + l_2 - l_3)(\dot{\theta}_1 c_1 c_2 - \dot{\theta}_2 s_1 s_2) \\ \dot{d}_3 c_1 c_2 - (d_3 + l_{3g} + l_2 - l_3)(\dot{\theta}_1 s_1 c_2 - \dot{\theta}_2 c_1 s_2) \\ \dot{\theta}_2 c_2 (d_3 + l_{3g} + l_2 - l_3) + \dot{d}_3 s_2 \end{bmatrix}$$

- Passamos as velocidades dos centros de massa para as bases pesas nas barras:

$$[\vec{v}_1]_{B_1} = [I]_{can/B_1}[\vec{v}_1]_{can} = R_1^T[\vec{v}_1]_{can} = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$[\vec{v}_2]_{B_2} = [I]_{can/B_2}[\vec{v}_2]_{can} = R_2^T[\vec{v}_2]_{can} = \begin{bmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 l_{2g}\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{v}_3]_{B_3} = [I]_{can/B_3}[\vec{v}_3]_{can} = R_3^T[\vec{v}_3]_{can} = \begin{bmatrix} v_{x3} \\ v_{y3} \\ v_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2(l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3)\dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_3 \\ (l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3)\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

- Montamos os vetores $p^{\#}$ e p^o em função de $q^{\#}$ e $\dot{q}^{\#}$:

$$p^{\#} = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{x2} \\ v_{y3} \end{bmatrix} = P^{\#}(q^{\#}, \dot{q}^{\#}) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$$p^o = \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \\ \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \\ v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \\ v_{x3} \\ v_{z3} \end{bmatrix} = P^o(q^{\#}, \dot{q}^{\#}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_2\dot{\theta}_1 \\ c_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ s_2\dot{\theta}_1 \\ c_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -c_2 l_{2g}\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ l_{2g}\dot{\theta}_2 \\ -c_2(l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3)\dot{\theta}_1 \\ (l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3)\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

- Utilizando o fato de que $P^{\#}(q^{\#}, \dot{q}^{\#})$ e $P^o(q^{\#}, \dot{q}^{\#})$ são lineares em $\dot{q}^{\#}$, encontramos o vetor dos vínculos de velocidade:

$$p^{\#} = P^{\#}(q^{\#}, \dot{q}^{\#}) = \frac{\partial P^{\#}}{\partial \dot{q}^{\#}}\dot{q}^{\#} = \Psi \dot{q}^{\#}$$

$$p^o = P^o(q^{\#}, \dot{q}^{\#}) = \frac{\partial P^o}{\partial \dot{q}^{\#}}\dot{q}^{\#} = \Upsilon \dot{q}^{\#}$$

No caso do mecanismo $\underline{RRP}$, temos:

$$\Psi = \frac{\partial P^{\#}}{\partial \dot{q}^{\#}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon = \frac{\partial P^o}{\partial \dot{q}^\#} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -l_{2g}c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{2g} & 0 \\ -(l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3)c_2 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $p^\#$ e $\dot{q}^\#$ são independentes e tem o mesmo tamanho:

$$\dot{q}^\# = \Psi^{-1} p^\#$$

$$\Rightarrow p^o = \Upsilon \Psi^{-1} p^\#$$

$$\therefore \Lambda(q, p) = p^o - \Upsilon \Psi^{-1} p^\# = 0$$

$$\Lambda(q, p) = \begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{y2} - s_2\omega_{z1} \\ \omega_{z2} - c_2\omega_{z1} \\ \omega_{x3} - \omega_{x2} \\ \omega_{y3} - s_2\omega_{z1} \\ \omega_{z3} - c_2\omega_{z1} \\ v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} + l_{2g}c_2\omega_{z1} \\ v_{y2} \\ v_{z2} - l_{2g}\omega_{x2} \\ v_{x3} + (l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3)c_2\omega_{z1} \\ v_{z3} - (l_2 - l_3 + l_{3g} + d_3)\omega_{x2} \end{bmatrix}$$

- Para mecanismos paralelos:
  - Utilizar as matrizes de rotação para o cálculo das velocidades angulares nas bases presas às barras
  - Derivar as coordenadas dos centros de massa para encontrar os vetores velocidade absoluta na base canônica
  - Utilizar as matrizes de rotação para mudar os vetores velocidade absoluta para as bases presas às barras

- Montar o vetor p em função de q e $\dot{q}$ ($P(q,\dot{q})$)
- Eliminar $\dot{q}$ do sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} p \\ \dot{\phi}(q,\dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(q,\dot{q}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Eliminar as equações redundantes do sistema

Exemplo 6

Exemplo de mecanismo paralelo

-
-
-
-
-
-

Método de Gibbs-Appell:

O método de Gibbs-Appell apresenta certa simularidade com o método de Lagrange, pois utiliza derivadas de uma função energia para encontrar a equações de movimento do sistema. Porém, a função energia utilizada não é a energia cinética, mas sim a energia de acelerações. A energia de acelerações para um corpo rígido é dada pela seguinte expressão:

$$S = \frac{1}{2}m(a_G \cdot a_G) + \frac{1}{2}(\dot{\omega} \cdot \mathbb{I}\dot{\omega} + 2\dot{\omega}(\omega \wedge \mathbb{I}\omega) + (\omega \cdot \omega)(\omega \cdot \mathbb{I}\omega))$$

Sendo m a massa do corpo rígido, $\mathbb{I}$ seu tensor de inércia, a_G o vetor aceleração absoluta de seu centro de massa e ω o vetor velocidade angular absoluta.