Adaptative balancing techniques applied to parallel mechanisms

Tarcisio Antonio Hess Coelho [a], Renato Maia Matarazzo Orsino [b], André Garnier Coutinho [a]

[a] *Department of Mechatronics and Mechanical Systems Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil. E-mail: tarchess@usp.br*
[b] *Department of Mechanical Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil.*

SUMMARY

KEYWORDS:

1 Introduction and literature review

1.1 Dynamic Models

Algumas definies importantes:

Seja $\mathscr{B}$ um sistema mecnico de $\nu^{\#}$ graus de liberdade. Para encontrar as equaes diferenciais de movimento do sistema, conveniente fazer as seguintes definies:

- $\mathbb{q}^{\#}$: vetor de $\nu^{\#}$ coordenadas generalizadas independentes
- $\mathbb{q}^{\circ}$: vetor de m_q coordenadas generalizadas redundandes
- $\mathbb{q}$: vetor contendo todas as coordenadas generalizadas. Usualmente $\mathbb{q} = \begin{bmatrix} \mathbb{q}^{\#} \\ \mathbb{q}^{\circ} \end{bmatrix}$
- $\mathbb{\phi}(\mathbb{q})$: vetor de tamanho ν_q° dos vnculos de posio, de modo que conhecendo $\mathbb{q}^{\#}$ seja possvel determinar $\mathbb{q}^{\circ}$ resolvendo $\mathbb{\phi}(\mathbb{q}) = \mathbb{0}$
- $\mathbb{p}^{\#}$: vetor de $\nu^{\#}$ velocidades generalizadas independentes
- $\mathbb{p}^{\circ}$: vetor de ν_p° velocidades generalizadas redundandes
- $\mathbb{p}$: vetor contendo todas as velocidades generalizadas. Usualmente $\mathbb{p} = \begin{bmatrix} \mathbb{p}^{\#} \\ \mathbb{p}^{\circ} \end{bmatrix}$
- $\mathbb{\Lambda}(\mathbb{q}, \mathbb{p})$: vetor de tamanho ν_p° dos vnculos de velocidades, de modo que conhecendo $\mathbb{q}$ e $\mathbb{p}^{\#}$ seja possvel determinar $\mathbb{p}^{\circ}$ resolvendo $\mathbb{\Lambda}(\mathbb{q}, \mathbb{p}) = \mathbb{0}$
- $\mathbb{A}(\mathbb{q})$: Jacobiano dos vnculos de velocidades, ou seja: $\mathbb{A} = \frac{\partial \mathbb{\Lambda}}{\partial \mathbb{p}}$. Como $\mathbb{\Lambda}(\mathbb{q}, \mathbb{p})$ é linear em $\mathbb{p}$, os vinculos de velocidades podem ser reescritos como sendo $\mathbb{\Lambda}(\mathbb{q}, \mathbb{p}) = \mathbb{A}(\mathbb{q})\mathbb{p} = \mathbb{0}$
- $\mathbb{C}(\mathbb{q})$: Complemento ortogonal de $\mathbb{A}(\mathbb{q})$. Usualmente calcula-se $\mathbb{C}$ tal que: $\mathbb{p} = \mathbb{C}(\mathbb{q})\mathbb{p}^{\#}$, o que garante que $\mathbb{C}$ seja complemento ortogonal de $\mathbb{A}$ e a torna util para a cinemtica.
- $\mathbb{f}_{\dot{\mathbb{q}}^{\#}}$: vetor de $\nu^{\#}$ esforços ativos dos atuadores na direção $\dot{\mathbb{q}}^{\#}$ ($f_{\dot{\mathbb{q}}^{\#}\,i}$ está na direção de $\dot{q}_i^{\#}, i = 1, 2, ..., \nu^{\#}$)
- $\mathbb{f}_{\mathbb{p}^{\#}}$: vetor de $\nu^{\#}$ esforços ativos dos atuadores na direção $\mathbb{p}^{\#}$ ($f_{\mathbb{p}^{\#}\,i}$ está na direção de $p_i^{\#}, i = 1, 2, ..., \nu^{\#}$)
- $\mathbb{f}_{\dot{\mathbb{q}}}$: vetor de ν_q esforços ativos dos atuadores na direção $\dot{\mathbb{q}}$ ($f_{\dot{\mathbb{q}}\,i}$ está na direção de $\dot{q}_i, i = 1, 2, ..., \nu_q$)

- $\mathbb{f}_{\mathbb{p}}$: vetor de ν_p esforços ativos dos atuadores na direção $\mathbb{p}$ ($f_{\mathbb{p}\,i}$ está na direção de $p_i^{\#}, i = 1, 2, ..., \nu_p$)
- $\mathbb{\Psi}(\mathbb{q})$: Transformao linear inversvel que relaciona $\mathbb{p}^{\#}$ com $\dot{\mathbb{q}}^{\#}$, ou seja: $\mathbb{p}^{\#} = \mathbb{\Psi}(\mathbb{q})\dot{\mathbb{q}}^{\#}$. Consequentemente $\mathbb{\Psi}(\mathbb{q})^{\top}\mathbb{f}_{\mathbb{p}^{\#}} = \mathbb{f}_{\dot{\mathbb{q}}^{\#}}$
- $\mathbb{\Upsilon}(\mathbb{q})$: Transformao linear que relaciona $\mathbb{p}^{\circ}$ com $\dot{\mathbb{q}}^{\#}$, ou seja: $\mathbb{p}^{\circ} = \mathbb{\Upsilon}(\mathbb{q})\dot{\mathbb{q}}^{\#}$
- $\mathbb{\Gamma}(\mathbb{q})$: Transformao linear que relaciona $\dot{\mathbb{q}}$ com $\mathbb{p}$, ou seja: $\dot{\mathbb{q}} = \mathbb{\Gamma}(\mathbb{q})\mathbb{p}$. Consequentemente $\mathbb{f}_{\mathbb{p}} = \mathbb{\Gamma}(\mathbb{q})^{\top}\mathbb{f}_{\dot{\mathbb{q}}}$

Na dinmica de sistemas mecnicos multi-corpos, muito vantajosa a utilizao de coordenadas/velocidades generalizadas redundantes, pois a utilizao destas diminui a complexidade da utilizao dos mtodos de deduo das equaes de movimento (como Lagrange, Kane e Gibbs-Appell) e em contrapartida aumenta a complexidade da cinemtica (pois torna necessrio definir $\phi(q)$ e $\mathit{\Lambda}(q, p)$).

Nos mtodos citados, necessrio o clculo das velocidades absolutas dos centros de massa $\vec{v}_{G_i}$ e das velocidades angulares absolutas $\vec{\omega}_i$ de todos os corpos rgidos do sistema, em funo de p e q. Sendo assim, conveniente definir o vetor de velocidades generalizadas p como sendo todas as componentes dos $\vec{v}_{G_i}$ e dos $\vec{\omega}_i$, em alguma ordem conveniente. Fazendo isso, tornamos a apliao dos mtodos extremamente simples, deixando praticamente toda a complexidade do problema no clculo de $\phi(q)$ e $\mathit{\Lambda}(q, p)$.

Aqui segue um algoritmo, baseado no método Orsino, de como encontrar o modelo dinâmico de qualquer mecanismo serial.

Para a dinâmica direta, o modelo assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{q}}^{\#} = \mathbb{\Psi}^{-1}(\mathbb{q}^{\#})\mathbb{p}^{\#} \\ \Big(\mathbb{C}(\mathbb{q}^{\#})\mathbb{\Psi}(\mathbb{q}^{\#})\Big)^{\top}\Big(\mathbb{M}\dot{\mathbb{p}} + \mathbb{v}(\mathbb{q}^{\#}, \mathbb{p}) + \mathbb{g}(\mathbb{q}^{\#})\Big) = \mathbb{f}_{\dot{\mathbb{q}}^{\#}} \\ \mathbb{A}(\mathbb{q}^{\#})\dot{\mathbb{p}} + \mathbb{b}(\mathbb{q}^{\#}, \mathbb{p}) = \mathbb{0} \end{cases} \tag{1}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & (\mathbb{C}\mathbb{\Psi})^{\top}\mathbb{M} \\ \mathbb{0} & \mathbb{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbb{q}}^{\#} \\ \dot{\mathbb{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{\Psi}^{-1}\mathbb{p}^{\#} \\ \mathbb{f}_{\dot{\mathbb{q}}^{\#}} - (\mathbb{C}\mathbb{\Psi})^{\top}(\mathbb{v} + \mathbb{g}) \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Para a dinâmica inversa:

$$\begin{cases} \mathbb{p} = \Big(\mathbb{C}(\mathbb{q}^{\#})\mathbb{\Psi}(\mathbb{q}^{\#})\Big)\dot{\mathbb{q}}^{\#} \\ \dot{\mathbb{p}} = \Big(\dfrac{\mathsf{d}(\mathbb{C}\mathbb{\Psi})}{\mathsf{d}t}(\mathbb{q}^{\#}, \dot{\mathbb{q}}^{\#})\Big)\dot{\mathbb{q}}^{\#} + \Big(\mathbb{C}(\mathbb{q}^{\#})\mathbb{\Psi}(\mathbb{q}^{\#})\Big)\ddot{\mathbb{q}}^{\#} \\ \Big(\mathbb{C}(\mathbb{q}^{\#})\mathbb{\Psi}(\mathbb{q}^{\#})\Big)^{\top}\Big(\mathbb{M}\dot{\mathbb{p}} + \mathbb{v}(\mathbb{q}^{\#}, \mathbb{p}) + \mathbb{g}(\mathbb{q}^{\#})\Big) = \mathbb{f}_{\dot{\mathbb{q}}^{\#}} \end{cases} \tag{3}$$

As matrizes $\mathbb{\Psi}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{b}$ são encontradas atraves da cinemática, enquanto $\mathbb{M}$, $\mathbb{v}$ e $\mathbb{g}$ necessitam de considerações dinâmicas.

O procedimento consiste nas seguintes etapas:

i) Definição das coordenadas generalizadas $\mathbb{q}$

ii) Definição das velocidades absolutas $\mathbb{w}$

iii) Definição das velocidades generalizadas $\mathbb{p}$

iv) Cinemática de posio dos centros de massa

v) Cinemática de velocidades angulares

vi) Cinemática de velocidades dos centros de massa

vii) Encontrar $\mathbb{p}$ em funo de $\mathbb{q}^{\#}$ e $\dot{\mathbb{q}}^{\#}$

viii) Definir as transformações lineares $\mathbb{\Psi}$, $\mathbb{\Upsilon}$ e o vnculos de velocidades generalizadas $\mathbb{\Lambda}$

Modelo do mecanismo <u>RR</u>

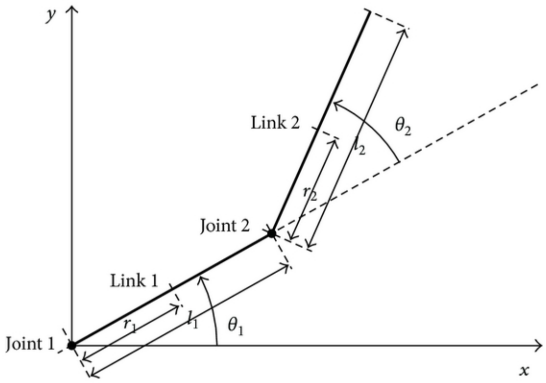

Figure 1: Robô <u>RR</u>

i) Primeiro definimos ν_q coordenadas $\mathbb{q}$. Estas podem ser subdivididas em $\nu^{\#}$ coordenadas independentes $\mathbb{q}^{\#}$ e ν_q° coordenadas redudantes $\mathbb{q}^{\circ}$.

$$\mathbb{q} = \begin{bmatrix} \mathbb{q}^{\#} \\ \mathbb{q}^{\circ} \end{bmatrix}$$

No caso do mecanismo <u>*RR*</u>, temos:

$$\mathbb{q}^{\#} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

$$\mathbb{q}^{\circ} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

Com $\nu^{\#} = 2$ e $\nu_q^{\circ} = 4$. Neste caso, as componentes de $\mathbb{q}^{\circ}$ são as coordenadas dos centros de massa das barras, escritas no referencial inercial O_{xy}.

ii) Depois definimos os vetores de velocidades absolutas:

$$\mathbb{w} = \begin{bmatrix} \mathbb{w}_{\omega} \\ \mathbb{w}_{v} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{w}_{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{z_1} & \omega_{z_2} \end{bmatrix}^T \tag{6}$$

$$\mathbb{w}_v = \begin{bmatrix} v_{x_1} & v_{y_1} & v_{x_2} & v_{y_2} \end{bmatrix}^T \tag{7}$$

Sendo $\mathbb{w}_v$ as componentes das velocidades absolutas dos centros de massa das barras, escritas nas bases presas s barras, e $\mathbb{w}_\omega$ as componentes das velocidades angulares absolutas, escritas nas bases presas s barras.

iii) Definimos ν_p coordenadas $\mathbb{p}$. Estas podem ser subdivididas em $\nu^\#$ coordenadas independentes $\mathbb{p}^\#$ e ν_p° coordenadas redudantes $\mathbb{p}^\circ$. As coordenadas $\mathbb{p}^\#$ podem ser subdividas em $\nu_\omega^\#$ velocidades angulares $\mathbb{\omega}^\#$ e $\nu_v^\#$ velocidades lineares $\mathbb{v}^\#$. As coordenadas $\mathbb{p}^\circ$ podem ser subdividas em ν_ω° velocidades angulares $\mathbb{\omega}^\circ$ e ν_v° velocidades lineares $\mathbb{v}^\circ$.

$$\mathbb{p} = \begin{bmatrix} \mathbb{p}^\# \\ \mathbb{p}^\circ \end{bmatrix} \qquad \mathbb{p}^\# = \begin{bmatrix} \mathbb{\omega}^\# \\ \mathbb{v}^\# \end{bmatrix} \qquad \mathbb{p}^\circ = \begin{bmatrix} \mathbb{\omega}^\circ \\ \mathbb{v}^\circ \end{bmatrix}$$

Como é conveniente que as velocidades generalizadas $\mathbb{p}$ sejam velocidades absolutas, escolhemos as componentes de $\mathbb{p}$ como sendo as mesmas componentes de $\mathbb{w}$, respeitando a ordenação indicada acima.

No caso do mecanismo $\underline{RR}$, temos:

$$\mathbb{\omega}^\# = \begin{bmatrix} \omega_{z_1} \\ \omega_{z_2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbb{v}^\# = \emptyset \tag{9}$$

$$\mathbb{\omega}^\circ = \emptyset \tag{10}$$

$$\mathbb{v}^\circ = \begin{bmatrix} v_{x_1} & v_{y_1} & v_{x_2} & v_{y_2} \end{bmatrix}^T \tag{11}$$

Com $\nu_\omega^\# = 2$, $\nu_v^\# = 0$, $\nu_\omega^\circ = 0$, $\nu_v^\circ = 4$ e $\nu_p^\circ = \nu_\omega^\circ + \nu_v^\circ = 4$.

iv) Realizamos a cinemtica de posição para os centros de massa das barras, de modo a relacionar as coordenadas $\mathbb{q}^\circ$ com as coordenadas $\mathbb{q}^\#$. Para isso, utilizamos matrizes de transformação homogênea.

$$[\boldsymbol{H}]_{\mathsf{B}_0 \mid \mathsf{B}_1} = \begin{bmatrix} Rot(\theta_1, z_0) & [\overrightarrow{\mathsf{O}_0\mathsf{O}_1}]_{\mathsf{B}_0} \\ \mathbb{0}_{2x1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_1 & -\mathsf{s}_1 & 0 \\ \mathsf{s}_1 & \mathsf{c}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} [\overrightarrow{\mathsf{O}_1\mathsf{G}_1}]_{\mathsf{B}_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{H}]_{\mathsf{B}_1 \mid \mathsf{B}_2} = \begin{bmatrix} Rot(\theta_2, z_1) & [\overrightarrow{\mathsf{O}_1\mathsf{O}_2}]_{\mathsf{B}_1} \\ \mathbb{0}_{2x1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_2 & -\mathsf{s}_2 & l_1 \\ \mathsf{s}_2 & \mathsf{c}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} [\overrightarrow{\mathsf{O}_2\mathsf{G}_2}]_{\mathsf{B}_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{2g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_0 | \mathtt{B}_2} = [\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_0 | \mathtt{B}_1}[\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_1 | \mathtt{B}_2} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_{1+2} & -\mathsf{s}_{1+2} & l_1\mathsf{c}_1 \\ \mathsf{s}_{1+2} & \mathsf{c}_{1+2} & l_1\mathsf{s}_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_0 | \mathtt{B}_1} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{\mathtt{O}_1\mathtt{G}_1}]_{\mathtt{B}_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1g}\mathsf{c}_1 \\ l_{1g}\mathsf{s}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{H}]_{\mathtt{B}_0 | \mathtt{B}_2} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{\mathtt{O}_2\mathtt{G}_2}]_{\mathtt{B}_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\mathsf{c}_1 + l_{2g}\mathsf{c}_{1+2} \\ l_1\mathsf{s}_1 + l_{2g}\mathsf{s}_{1+2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Repare que a partir das matrizes de transformação homognea encontradas, encontramos tambm as seguintes matrizes de mudança de base:

$$\mathbb{R}_1 = [\mathbf{1}]_{\mathtt{B}_0 | \mathtt{B}_1} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_1 & -\mathsf{s}_1 \\ \mathsf{s}_1 & \mathsf{c}_1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\mathbb{R}_2 = [\mathbf{1}]_{\mathtt{B}_0 | \mathtt{B}_2} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_{1+2} & -\mathsf{s}_{1+2} \\ \mathsf{s}_{1+2} & \mathsf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Com a cinemtica de posição, conseguimos obter $\nu_q^\circ = 4$ equações vinculares de posição. Sendo assim, o vetor dos vínculos de posição dado por:

$$\phi(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} x_1 - l_{1g}\mathsf{c}_1 \\ y_1 - l_{1g}\mathsf{s}_1 \\ x_2 - l_1\mathsf{c}_1 - l_{2g}\mathsf{c}_{1+2} \\ y_2 - l_1\mathsf{s}_1 - l_{2g}\mathsf{s}_{1+2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

v) Utilizamos as matrizes de rotação para calcular as velocidades angulares em função de $\mathbb{q}^\#$ e $\dot{\mathbb{q}}^\#$:

$$[\boldsymbol{\omega}_1]^{\mathsf{S}}_{\mathtt{B}_1 | \mathtt{B}_1} = \mathbb{R}_1^T\dot{\mathbb{R}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\boldsymbol{\omega}_1]_{\mathtt{B}_1} = \dot{\theta}_1\hat{k} \tag{17}$$

$$[\boldsymbol{\omega}_2]^{\mathsf{S}}_{\mathtt{B}_2 | \mathtt{B}_2} = \mathbb{R}_2^T\dot{\mathbb{R}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\boldsymbol{\omega}_2]_{\mathtt{B}_2} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\hat{k} \tag{18}$$

vi) Derivamos as equações de posição ((29) e (30)) para encontrar as velocidades dos centros de massa:

$$[\boldsymbol{v}_1]_{\mathtt{B}_0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{1g}\mathsf{s}_1\dot{\theta}_1 \\ l_{1g}\mathsf{c}_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$[\boldsymbol{v}_2]_{\mathtt{B}_0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\mathsf{s}_1\dot{\theta}_1 - l_{2g}\mathsf{s}_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1\mathsf{c}_1\dot{\theta}_1 + l_{2g}\mathsf{c}_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \tag{20}$$

vii) Passamos as velocidades dos centros de massa para as bases presas nas barras:

$$[\boldsymbol{v}_1]_{\mathrm{B}_1} = [\mathbf{1}]_{\mathrm{B}_1 | \mathrm{B}_0}[\boldsymbol{v}_1]_{\mathrm{B}_0} = \mathbb{R}_1^T[\boldsymbol{v}_1]_{\mathrm{B}_0}$$
$$[\boldsymbol{v}_2]_{\mathrm{B}_2} = [\mathbf{1}]_{\mathrm{B}_2 | \mathrm{B}_0}[\boldsymbol{v}_2]_{\mathrm{B}_0} = \mathbb{R}_2^T[\boldsymbol{v}_2]_{\mathrm{B}_0}$$

Definindo:

$$\mathbb{R}_\Diamond = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_1 & \mathbb{0}_{2x2} \\ \mathbb{0}_{2x2} & \mathbb{R}_2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Temos:

$$\mathbb{w}_v = \mathbb{R}_\Diamond^T \dot{\mathbb{q}}^\circ \tag{22}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{c}_1 & -\mathsf{s}_1 & 0 & 0 \\ \mathsf{s}_1 & \mathsf{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{c}_{1+2} & -\mathsf{s}_{1+2} \\ 0 & 0 & \mathsf{s}_{1+2} & \mathsf{c}_{1+2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1g}\dot{\theta}_1 \\ l_1\mathsf{s}_2\dot{\theta}_1 \\ (l_1\mathsf{c}_2 + l_{2g})\dot{\theta}_1 + l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

viii) Montamos os vetores $\mathbb{p}^\#$ e $\mathbb{p}^\circ$ em função de $\mathbb{q}^\#$ e $\dot{\mathbb{q}}^\#$:

$$\mathbb{p}^\# = \begin{bmatrix} \omega_{z_1} \\ \omega_{z_2} \end{bmatrix} = \mathbb{p}_\star^\#(\mathbb{q}^\#, \dot{\mathbb{q}}^\#) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\mathbb{p}^\circ = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \end{bmatrix} = \mathbb{p}_\star^\circ(\mathbb{q}^\#, \dot{\mathbb{q}}^\#) = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1g}\dot{\theta}_1 \\ l_1\mathsf{s}_2\dot{\theta}_1 \\ (l_1\mathsf{c}_2 + l_{2g})\dot{\theta}_1 + l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

ix) Utilizando o fato de que $\mathbb{p}_\star^\#(\mathbb{q}^\#, \dot{\mathbb{q}}^\#)$ e $\mathbb{p}_\star^\circ(\mathbb{q}^\#, \dot{\mathbb{q}}^\#)$ são lineares em $\dot{\mathbb{q}}^\#$, encontramos as transformações lineares $\Psi(\mathbb{q})$ e $\Upsilon(\mathbb{q})$ e o vetor dos vínculos de velocidades $\mathbb{A}(\mathbb{q}, \mathbb{p})$:

$$\mathbb{p}^\# = \mathbb{p}_\star^\#(\mathbb{q}^\#, \dot{\mathbb{q}}^\#) = \frac{\partial \mathbb{p}_\star^\#}{\partial \dot{\mathbb{q}}^\#}\dot{\mathbb{q}}^\# = \Psi\dot{\mathbb{q}}^\# \tag{26}$$

$$\mathbb{p}^\circ = \mathbb{p}_\star^\circ(\mathbb{q}^\#, \dot{\mathbb{q}}^\#) = \frac{\partial \mathbb{p}_\star^\circ}{\partial \dot{\mathbb{q}}^\#}\dot{\mathbb{q}}^\# = \Upsilon\dot{\mathbb{q}}^\# \tag{27}$$

No caso do mecanismo <u>*RR*</u>, temos:

$$\Psi = \frac{\partial \mathbb{p}_\star^\#}{\partial \dot{\mathbb{q}}^\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\Upsilon = \frac{\partial \mathbb{p}_\star^\circ}{\partial \dot{\mathbb{q}}^\#} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1\mathsf{s}_2 & 0 \\ l_1\mathsf{c}_2 + l_{2g} & l_{2g} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Como $\mathbb{p}^{\#}$ e $\dot{\mathbb{q}}^{\#}$ são independentes e tem o mesmo tamanho:

$$\dot{\mathbb{q}}^{\#} = \mathbb{\Psi}^{-1}\mathbb{p}^{\#}$$
$$\Rightarrow \mathbb{p}^{\circ} = \mathbb{\Upsilon}\mathbb{\Psi}^{-1}\mathbb{p}^{\#}$$

$$\therefore \mathbb{A}(\mathbb{q},\mathbb{p}) = \mathbb{\Upsilon}\mathbb{\Psi}^{-1}\mathbb{p}^{\#} - \mathbb{p}^{\circ} = 0 \tag{30}$$

x) A partir de $\mathbb{A}(\mathbb{q},\mathbb{p})$, encontramos o jacobiano $\mathbb{A}$ dos vínculos de velocidade e a matriz $\mathbb{C}$ dos vínculos cinemáticos:

$$\mathbb{A}(\mathbb{q},\mathbb{p}) = \begin{bmatrix} \mathbb{\Upsilon}\mathbb{\Psi}^{-1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \mathbb{p}$$

$$\mathbb{A} = \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \mathbb{p}} = \begin{bmatrix} \mathbb{\Upsilon}\mathbb{\Psi}^{-1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ l_1 s_2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ l_1 c_2 & l_{2g} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$\mathbb{A}(\mathbb{q},\mathbb{p}) = 0 \Rightarrow \mathbb{p}^{\circ} = \mathbb{\Upsilon}\mathbb{\Psi}^{-1}\mathbb{p}^{\#} \Rightarrow \mathbb{p} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{\Upsilon}\mathbb{\Psi}^{-1} \end{bmatrix} \mathbb{p}^{\#}$$

$$\therefore \mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{\Upsilon}\mathbb{\Psi}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 & l_{2g} \end{bmatrix} \tag{32}$$

xi) Como (19) e (23) são transformações inversíveis, encontramos a transformação linear $\mathbb{\Gamma}(\mathbb{q})$:

$$\dot{\mathbb{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbb{q}}^{\#} \\ \dot{\mathbb{q}}^{\circ} \end{bmatrix} = \dot{\mathbb{q}}_{\star}(\mathbb{q},\mathbb{p}) = \begin{bmatrix} \mathbb{\Psi}^{-1}(\mathbb{q})\mathbb{p}^{\#} \\ \mathbb{R}_{\lozenge}(\mathbb{q})\mathbb{w}_v(\mathbb{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{z_1} \\ \omega_{z_2} - \omega_{z_1} \\ v_{x_1}\,\mathsf{c}_1 - v_{y_1}\,\mathsf{s}_1 \\ v_{x_1}\,\mathsf{s}_1 + v_{y_1}\,\mathsf{c}_1 \\ v_{x_2}\,\mathsf{c}_{1+2} - v_{y_2}\,\mathsf{s}_{1+2} \\ v_{x_2}\,\mathsf{s}_{1+2} + v_{y_2}\,\mathsf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\mathbb{\Gamma}(\mathbb{q}) = \frac{\partial \dot{\mathbb{q}}_{\star}}{\partial \mathbb{p}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{c}_1 & -\mathsf{s}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{s}_1 & \mathsf{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{c}_{1+2} & -\mathsf{s}_{1+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathsf{s}_{1+2} & \mathsf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \tag{34}$$

xii) Aplicamos o mtodos de Gibbs-Appel extendido:

O mtodo de Gibbs-Appell apresenta certa simularidade com o mtodo de Lagrange, pois utiliza derivadas de uma função energia para encontrar a equações de movimento do sistema. Porém, a função energia utilizada no a energia cintica, mas sim a energia de acelerações. A energia de acelerações para um corpo rígido é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{a}_{\mathsf{G}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathsf{G}}) + \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + 2\dot{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}))$$

Sendo m a massa do corpo rígido, $\boldsymbol{I}$ seu tensor de inércia, $\boldsymbol{a}_{\mathsf{G}}$ o vetor aceleração absoluta de seu centro de massa e $\boldsymbol{\omega}$ o vetor velocidade angular absoluta.

O modelo dinmico utilizando o mtodo de Gibbs-Appel extendido, dado pela seguinte expresso:

$$\mathbb{C}(\mathbb{q})^T(\mathbb{M}(\mathbb{q})\dot{\mathbb{p}} + \mathbb{v}(\mathbb{q}, \mathbb{p}) + \mathbb{g}(\mathbb{q})) = (\mathbb{\Psi}^T)^{-1}\mathbb{f}_{\dot{\mathbb{q}}^\#} \tag{35}$$

Com:

$$\mathbb{M}(\mathbb{q}) = \frac{\partial^2 \mathbb{S}}{\partial \dot{\mathbb{p}}^2} \tag{36}$$

$$\mathbb{v}(\mathbb{q}, \mathbb{p}) = \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial \dot{\mathbb{p}}} - \frac{\partial^2 \mathbb{S}}{\partial \dot{\mathbb{p}}^2}\dot{\mathbb{p}} \tag{37}$$

$$\mathbb{g}(\mathbb{q}) = \mathbb{\Gamma}^T \frac{\partial E_p}{\partial \mathbb{q}} \tag{38}$$

Sendo E_p a energia potencial do sistema e $\mathbb{f}_{\dot{\mathbb{q}}^\#}$ os esforços nas direções de $\dot{\mathbb{q}}^\#$.

Como já calculamos os vetores de velocidades absolutas dos centros de massa e de velocidades angulares absolutas, escritos em bases presas s barras, as acelerações absolutas dos centros de massa so dadas por:

$$[\boldsymbol{a}_i]_{\mathsf{B}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{v}_i]_{\mathsf{B}_i} + [\boldsymbol{\omega}_i]^{\mathsf{S}}_{\mathsf{B}_i \mid \mathsf{B}_i}[\boldsymbol{v}_i]_{\mathsf{B}_i}$$

Como o mecanismo plano:

$$[\boldsymbol{a}_i]_{\mathsf{B}_i} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{x_i} \\ \dot{v}_{y_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_i} \\ \omega_{z_i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{x_i} - \omega_{z_i} v_{y_i} \\ \dot{v}_{y_i} + \omega_{z_i} v_{x_i} \end{bmatrix}$$

No caso do mecanismo <u>RR</u>, temos:

$$\mathbb{S} = \frac{1}{2}\Big(m_1((\dot{v}_{x_1} - \omega_{z_1}v_{y_1})^2 + (\dot{v}_{y_1} + \omega_{z_1}v_{x_1})^2) + m_2((\dot{v}_{x_2} - \omega_{z_2}v_{y_2})^2 + (\dot{v}_{y_2} + \omega_{z_2}v_{x_2})^2) + J_{z_1}\dot{\omega}_{z_1}^2 + J_{z_2}\dot{\omega}_{z_2}^2\Big) \tag{39}$$

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{40}$$

Calculando as derivadas:

$$\mathbb{M}(\mathbb{q}) = \begin{bmatrix} J_{z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{z_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\mathbb{v}(\mathbb{q}, \mathbb{p}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1\omega_{z_1}v_{y_1} \\ m_1\omega_{z_1}v_{x_1} \\ -m_2\omega_{z_2}v_{y_2} \\ m_2\omega_{z_2}v_{x_2} \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$\mathbb{g} = g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1\mathsf{s}_1 \\ m_1\mathsf{c}_1 \\ m_2\mathsf{s}_{1+2} \\ m_2\mathsf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Sendo assim, o modelo dinmico para o mecanismo <u>RR</u> dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1\mathsf{s}_2 & 0 \\ l_1\mathsf{c}_2 & l_{2g} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z_1}\dot{\omega}_{z_1} \\ J_{z_2}\dot{\omega}_{z_2} \\ m_1\dot{v}_{x_1} \\ m_1\dot{v}_{y_1} \\ m_2\dot{v}_{x_2} \\ m_2\dot{v}_{y_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1\omega_{z_1}v_{y_1} \\ m_1\omega_{z_1}v_{x_1} \\ -m_2\omega_{z_2}v_{y_2} \\ m_2\omega_{z_2}v_{x_2} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1\mathsf{s}_1 \\ m_1\mathsf{c}_1 \\ m_1\mathsf{s}_{1+2} \\ m_1\mathsf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Repare que o modelo no depende das coordenadas $\mathbb{q}^\circ$. Elas foram uteis para a dedução do modelo, mas com o modelo deduzido elas no tem mais utilidade.
Para realizar simulaes dinmicas diretas do mecanismo, so necessrias mais 2 equaes matriciais:

$$\dot{\mathbb{q}}^\# = \dot{\mathbb{q}}^\#_\star(\mathbb{q}^\#, \mathbb{p}) \tag{45}$$

$$\mathbb{A}\dot{\mathbb{p}} = -\mathbb{b} \tag{46}$$

A primeira obtida a partir da equao (?) ($\dot{\mathbb{q}}^\# = \Psi^{-1}\mathbb{p}^\#$), e a segunda derivando a equao (?):

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Big(\mathbb{A}\mathbb{p}\Big) = \mathbb{0} \Rightarrow \mathbb{A}\dot{\mathbb{p}} + \dot{\mathbb{A}}\mathbb{p} = \mathbb{0}$$

$$\therefore \mathbb{b}(\mathbb{q}, \mathbb{p}) = \dot{\mathbb{A}}\mathbb{p} \tag{47}$$

Para o mecanismo $\underline{RR}$:

$$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \mathsf{c}_2 \omega_{z_1}(-\omega_{z_1} + \omega_{z_2}) \\ l_1 \mathsf{c}_2 \omega_{z_1}(\omega_{z_1} - \omega_{z_2}) \end{bmatrix} \tag{48}$$

- Massa pontual:

$$\mathbb{q}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$\mathbb{p}_n = \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_n \dot{p}_{n,1} \\ M_n \dot{p}_{n,2} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ f_{n,2} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{51}$$

Que pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} M_n & 0 \\ 0 & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ f_{n,2} \end{bmatrix}$$

- RR:

$$\mathbb{q}_n = \begin{bmatrix} \theta_{1\,n} \\ \theta_{2\,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$\mathbb{p}_n = \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \\ p_{n,3} \\ p_{n,4} \\ p_{n,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1 \mathsf{s}_{n,2} & 0 \\ l_{g2} + l_1 \mathsf{c}_{n,2} & l_{g2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1 \mathsf{s}_{n,2} & 0 \\ l_1 \mathsf{c}_{n,2} & l_{g2} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1} \dot{p}_{n,1} \\ J_{z2} \dot{p}_{n,2} \\ m_1 \dot{p}_{n,3} \\ m_2 \dot{p}_{n,4} \\ m_2 \dot{p}_{n,5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_1 p_{n,2} p_{n,5} \\ m_1 p_{n,2} p_{n,4} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \mathsf{c}_{n,1} \\ m_2 \mathsf{s}_{n,1+2} \\ m_2 \mathsf{c}_{n,1+2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} l_{g1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ l_1 \mathsf{s}_{n,2} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ l_1 \mathsf{c}_{n,2} & l_{g2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{n,1} \\ \dot{p}_{n,2} \\ \dot{p}_{n,3} \\ \dot{p}_{n,4} \\ \dot{p}_{n,5} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \mathsf{c}_{n,2} p_{n,1}(-p_{n,1} + p_{n,2}) \\ l_1 \mathsf{s}_{n,2} p_{n,1}(p_{n,1} - p_{n,2}) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{54}$$

Que pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} J_{z1}+J_{z2}+m_1l_{g1}^2+m_2(l_1^2+2l_1l_{g2}\mathsf{c}_{n,2}+l_{g2}^2) & J_{z2}+m_2l_{g2}(l_1\mathsf{c}_{n,2}+l_{g2}) \\ J_{z2}+m_2l_{g2}(l_1\mathsf{c}_{n,2}+l_{g2}) & J_{z2}+m_2l_{g2}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_{n,1}\\ \ddot{q}_{n,2}\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} -m_2l_1l_{g2}\mathsf{s}_{n,2}\dot{q}_{n,2}^2-2m_2l_1l_{g2}\mathsf{s}_{n,2}\dot{q}_{n,1}\dot{q}_{n,2} \\ m_2l_1l_{g2}\mathsf{s}_{n,2}\dot{q}_{n,1}^2\end{bmatrix}+g\begin{bmatrix} m_1l_{g1}\mathsf{c}_{n,1}+m_2(l_{g2}\mathsf{c}_{n,1+2}+l_1\mathsf{c}_{n,1}) \\ m_2l_{g2}\mathsf{c}_{n,1+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{n,1}\\ u_{n,2}\end{bmatrix}$$

- RR (0) com 2 massas acopladas (1 e 2):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix}\dot{q}_{0,1}\\ \dot{q}_{0,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{0,1}\\ p_{0,2}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ l_{g1} & 0\\ l_1\mathsf{s}_{0,2} & 0\\ l_1\mathsf{c}_{0,2} & l_{g2}\\ -L_1\mathsf{s}_{0,1} & 0\\ L_1\mathsf{c}_{0,1} & 0\\ -l_1\mathsf{s}_{0,1} & -L_2\mathsf{s}_{0,1}\\ l_1\mathsf{c}_{0,1} & L_2\mathsf{c}_{0,1}\end{bmatrix}^T\left\{\begin{bmatrix}J_{z1}\dot{p}_{0,1}\\ J_{z2}\dot{p}_{0,2}\\ m_1\dot{p}_{0,3}\\ m_2\dot{p}_{0,4}\\ m_2\dot{p}_{0,5}\\ M_1\dot{p}_{1,1}\\ M_1\dot{p}_{1,2}\\ M_2\dot{p}_{2,1}\\ M_2\dot{p}_{2,1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -m_1p_{0,2}p_{0,5}\\ m_1p_{0,2}p_{0,4}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+g\begin{bmatrix}0\\ 0\\ m_1\mathsf{c}_{0,1}\\ m_2\mathsf{s}_{0,1+2}\\ m_2\mathsf{c}_{0,1+2}\\ 0\\ M_1\\ 0\\ M_2\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}u_{0,1}\\ u_{0,2}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} l_{g1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ l_1\mathsf{s}_{i,2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ l_1\mathsf{c}_{i,2} & l_{g2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ L_1\mathsf{s}_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -L_1\mathsf{c}_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ l_1\mathsf{s}_{0,1} & L_2\mathsf{s}_{0,1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -l_1\mathsf{c}_{0,1} & -L_2\mathsf{c}_{0,1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{p}_{0,1}\\ \dot{p}_{0,2}\\ \dot{p}_{0,3}\\ \dot{p}_{0,4}\\ \dot{p}_{0,5}\\ \dot{p}_{1,1}\\ \dot{p}_{1,2}\\ \dot{p}_{2,1}\\ \dot{p}_{2,1}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\ l_1\mathsf{c}_{0,2}p_{0,1}(-p_{0,1}+p_{0,2})\\ l_1\mathsf{s}_{0,2}p_{0,1}(p_{0,1}-p_{0,2})\\ L_1\mathsf{c}_{0,1}p_{0,1}^2\\ L_1\mathsf{s}_{0,1}p_{0,1}^2\\ l_1\mathsf{c}_{0,1}p_{0,1}^2+L_1\mathsf{c}_{0,1+2}p_{0,2}^2\\ l_1\mathsf{s}_{0,1}p_{0,1}^2+L_1\mathsf{s}_{0,1+2}p_{0,2}^2\end{bmatrix}\end{cases} \tag{55}$$

Que pode ser reescrito como:

$$\mathbb{M}^{\#}\ddot{\mathbb{q}}_0+\mathbb{v}^{\#}+\mathbb{g}^{\#}=\mathbb{u}_0 \tag{56}$$

Sendo:

$$\mathbb{M}^{\#}_{1,1}=J_{z1}+J_{z2}+M_1L_1^2+M_2L_2^2+m_1l_{g1}^2+m_2l_{g2}^2+(M_2+m_2)l_1^2+2l_1\mathsf{c}_{0,2}(L_2M_2+m_2l_{g2}) \tag{57}$$

$$\mathbb{M}^{\#}_{1,2}=\mathbb{M}^{\#}_{2,1}=J_{z2}+M_2L_2(l_1\mathsf{c}_{0,2}+L_2)+m_2l_{g2}(l_1\mathsf{c}_{0,2}+l_{g2}) \tag{58}$$

$$\mathbb{M}^{\#}_{2,2}=J_{z2}+M_2L_2^2+m_2l_{g2}^2 \tag{59}$$

$$\mathbb{v}_1^\# = -(M_2L_2 + m_2l_{g2})l_1\mathsf{s}_{0,2}\dot{q}_{0,2}(2\dot{q}_{0,1} + \dot{q}_{0,2}) \tag{60}$$

$$\mathbb{v}_2^\# = (M_2L_2 + m_2l_{g2})l_1\mathsf{s}_{0,2}\dot{q}_{0,1}^2 \tag{61}$$

$$\mathbb{g}_1^\# = g(M_1L_1\mathsf{c}_{0,1} + m_1l_{g1}\mathsf{c}_{0,1} + (M_2 + m_2)l_1\mathsf{c}_{0,1} + (M_2L_2 + m_2l_{g2})\mathsf{c}_{0,1+2}) \tag{62}$$

$$\mathbb{g}_2^\# = g(M_2L_2 + m_2l_{g2})\mathsf{c}_{0,1+2} \tag{63}$$

- RR balanceado:

  Escolhendo L_1 e L_2 de modo que $\mathbb{g}^\# = \mathbb{0}$:

$$\begin{cases} L_1 = -\frac{M_2l_1+m_1l_{g1}+m_2l_2}{M_1} \\ L_2 = -\frac{m_2l_{g2}}{M_2} \end{cases} \tag{64}$$

  Obtemos o seguinte sistema:

$$\mathbb{M}_{1,1}^\# = J_{z1} + J_{z2} + m_1l_{g2}^2 + l_1^2(M_2 + m_2) + \frac{m_2^2l_{g2}^2}{M_2} + \frac{(m_1l_{g1} + (M_2 + m_2)l_1)^2}{M_1} \tag{65}$$

$$\mathbb{M}_{1,2}^\# = \mathbb{M}_{2,1}^\# = \mathbb{M}_{2,2}^\# = J_{z2} + \frac{m_2(M_2 + m_2)l_{g2}^2}{M_2} \tag{66}$$

$$\mathbb{v}_1^\# = 0 \tag{67}$$

$$\mathbb{v}_2^\# = 0 \tag{68}$$

$$\mathbb{g}_1^\# = 0 \tag{69}$$

$$\mathbb{g}_2^\# = 0 \tag{70}$$

  Ou seja:

$$\begin{bmatrix} J_{z1} + J_{z2} + m_1l_{g2}^2 + l_1^2(M_2 + m_2) + \frac{m_2^2l_{g2}^2}{M_2} + \frac{(m_1l_{g1}+(M_2+m_2)l_1)^2}{M_1} & J_{z2} + \frac{m_2(M_2+m_2)l_{g2}^2}{M_2} \\ J_{z2} + \frac{m_2(M_2+m_2)l_{g2}^2}{M_2} & J_{z2} + \frac{m_2(M_2+m_2)l_{g2}^2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix} \tag{71}$$

- 5R balanceado:

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\mathsf{c}_{1,1+2}}{l_1\mathsf{s}_{1,2}} & \frac{\mathsf{s}_{1,1+2}}{l_1\mathsf{s}_{1,2}} \\ -\frac{l_1\mathsf{c}_{1,1}+l_2\mathsf{c}_{1,1+2}}{l_1l_2\mathsf{s}_{1,2}} & -\frac{l_1\mathsf{s}_{1,1}+l_2\mathsf{s}_{1,1+2}}{l_1l_2\mathsf{s}_{1,2}} \\ \frac{\mathsf{c}_{2,1+2}}{l_1\mathsf{s}_{2,2}} & \frac{\mathsf{s}_{2,1+2}}{l_1\mathsf{s}_{2,2}} \\ -\frac{l_1\mathsf{c}_{2,1}+l_2\mathsf{c}_{2,1+2}}{l_1l_2\mathsf{s}_{2,2}} & -\frac{l_1\mathsf{s}_{2,1}+l_2\mathsf{s}_{2,1+2}}{l_1l_2\mathsf{s}_{2,2}} \end{bmatrix}^T
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{M}^{\#}_{1,1} & \mathbb{M}^{\#}_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{M}^{\#}_{1,2} & \mathbb{M}^{\#}_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{M}^{\#}_{1,1} & \mathbb{M}^{\#}_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{M}^{\#}_{1,2} & \mathbb{M}^{\#}_{1,2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{q}_{0,1} \\ \ddot{q}_{0,2} \\ \ddot{q}_{1,1} \\ \ddot{q}_{1,2} \\ \ddot{q}_{2,1} \\ \ddot{q}_{2,2} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \frac{\mathsf{c}_{1,1+2}}{l_1\mathsf{s}_{1,2}} & \frac{\mathsf{s}_{1,1+2}}{l_1\mathsf{s}_{1,2}} \\ \frac{\mathsf{c}_{2,1+2}}{l_1\mathsf{s}_{2,2}} & \frac{\mathsf{s}_{2,1+2}}{l_1\mathsf{s}_{2,2}} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1\mathsf{s}_{1,1}+l_2\mathsf{s}_{1,1+2} & l_2\mathsf{s}_{1,1+2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1\mathsf{c}_{1,1}-l_2\mathsf{c}_{1,1+2} & -l_2\mathsf{c}_{1,1+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & l_1\mathsf{s}_{2,1}+l_2\mathsf{s}_{2,1+2} & l_2\mathsf{s}_{2,1+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -l_1\mathsf{c}_{2,1}-l_2\mathsf{c}_{2,1+2} & -l_2\mathsf{c}_{2,1+2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{q}_{0,1} \\ \ddot{q}_{0,2} \\ \ddot{q}_{1,1} \\ \ddot{q}_{1,2} \\ \ddot{q}_{2,1} \\ \ddot{q}_{2,2} \end{bmatrix} = \\
-\begin{bmatrix} l_1\mathsf{c}_{1,1}\dot{q}_{1,1}^2 + l_2\mathsf{c}_{1,1+2}(\dot{q}_{1,1}+\dot{q}_{1,2})^2 \\ l_1\mathsf{s}_{1,1}\dot{q}_{1,1}^2 + l_2\mathsf{s}_{1,1+2}(\dot{q}_{1,1}+\dot{q}_{1,2})^2 \\ l_1\mathsf{c}_{2,1}\dot{q}_{2,1}^2 + l_2\mathsf{c}_{2,1+2}(\dot{q}_{2,1}+\dot{q}_{2,2})^2 \\ l_1\mathsf{s}_{2,1}\dot{q}_{2,1}^2 + l_2\mathsf{s}_{2,1+2}(\dot{q}_{2,1}+\dot{q}_{2,2})^2 \end{bmatrix}
\end{cases}
\tag{72}
$$

1.2 Control

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \ddot{\mathbb{q}} = \begin{bmatrix} \varsigma\mathbb{u} \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{u} = \varsigma^{-1}\mathbb{C}^T\mathbb{M}\mathbb{u}'$$

$$\mathbb{u}' = \ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})$$

$$\mathbb{s} = -\dot{\mathbb{e}} - \lambda\mathbb{e}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = -\ddot{\mathbb{e}} - \lambda\dot{\mathbb{e}} = \ddot{\mathbb{q}} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varsigma\mathbb{u} \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

Aplicando a lei de controle:

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})) \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})) - \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \\ -\mathbb{b} - \mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) \\ -\mathbb{b} - \mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \end{bmatrix}$$

Definindo:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger & \mathbb{A}^\dagger \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\dot{\mathbb{s}} = -(\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{b} - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}})$$

Sendo assim, se a seguinte inequao for respeitada para pelo menos $\nu^\#$ componentes de $\dot{\mathbb{s}}$, o erro vai a zero:

$$\dot{\mathbb{s}} = -(\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{b} - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \leq \mathbb{0}$$

Acknowledgments