

# Aplicação de novas metodologias à modelagem e controle de mecanismos de arquitetura paralela

André Garnier Coutinho<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Departamento de Engenharia Mecatrônica e Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, Brasil. E-mail: andre.garnier.coutinho@usp.br*

## Resumo

Para realizar o projeto de um sistema de controle, é necessário primeiramente de um modelo da planta a ser controlada. O grau de fidelidade do modelo da planta, dentro das condições de operação desejadas do sistema, influi diretamente na performance do sistema em malha fechada que o projeto do controlador pode oferecer. Quanto mais rico for o modelo, mais fácil de atingir requisitos de performance mais elevados (menor tempo de resposta e menor sobressinal, por exemplo) garantindo a estabilidade do sistema.

Utilizando os métodos tradicionais de modelagem de Sistemas Mecânicos Multicorpos, é difícil e trabalhoso de se obter modelos de sistemas complexos, como mecanismos paralelos. Para contornar esse problema, é comum desprezar alguns efeitos de acoplamentos inerciais, simplificando o processo de modelagem. Porém, essa estratégia gera modelos mais pobres, o que irá limitar a performance que o sistema poderá atingir quando for feito o projeto do sistema de controle.

A solução proposta para ser possível aumentar a performance, garantindo a robustez, de um sistema de controle de mecanismos paralelos é a utilização dos novos métodos de modelagem dinâmica desenvolvidos pelo grupo de pesquisa do Prof. Doutor Tarcisio Antonio Hess Coelho, os quais são adequados para incluir todos os efeitos de dinâmica de corpos rígidos, independentemente da complexidade do sistema.

O presente projeto visa desenvolver um algoritmo que inclua todos os efeitos da dinâmica de corpos rígidos para realizar a modelagem dinâmica de mecanismos paralelos (baseado na metodologia de Orsino baseada nas equações de Gibbs-Appell e Maggi), desenvolver uma metodologia de projeto de controle robusto para mecanismos paralelos tradicionais e mecanismos com atuação redundante, e desenvolver leis de controle adequadas para sistemas descritos por coordenadas redundantes.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistemas mecânicos multicorpos, mecanismos paralelos, controle não-linear

## Nomenclatura

$a, b, \dots$	Escalares, componentes de matrizes coluna, componentes de matrizes ou índices
$A, B, \dots$	Escalares, componentes de matrizes coluna, componentes de matrizes
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$	Matrizes coluna
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$	Matrizes
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Vetores
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Tensores
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$	Pontos
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Sistemas de coordenadas
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Corpos rígidos ou referenciais
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Sistemas ou subsistemas mecânicos multicorpos

$\underline{a}$	Matriz diagonal cuja diagonal é composta pelos parâmetros $a_1, a_2, \dots, a_n$
$\mathcal{C}^s$	Classe de diferenciabilidade
$c_i$	Abreviação de $\cos(\theta_i)$
$c_{i+j}$	Abreviação de $\cos(\theta_i + \theta_j)$
$d$	Operador diferencial
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz coluna cujos elementos são a diagonal de uma matriz quadrada
$g$	Aceleração gravitacional
$[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}$	Ponto $\mathbf{p}$ escrito no sistema de coordenadas $\mathbf{B}$
$[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}}$	Ponto $\mathbf{p}$ escrito no sistema de coordenadas $\mathbf{B}$ em coordenadas homogêneas, ou seja: $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} \\ 1 \end{bmatrix}$
$s_i$	Abreviação de $\sin(\theta_i)$
$s_{i+j}$	Abreviação de $\sin(\theta_i + \theta_j)$
$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$	Vetor $\mathbf{v}$ escrito na base do sistema de coordenadas $\mathbf{B}$
$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B} \mathbf{B}}^{\mathbf{S}}$	Matriz de produto vetorial, tal que: $[\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}} = [\mathbf{v}_1]_{\mathbf{B} \mathbf{B}}^{\mathbf{S}} [\mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}}$ . É dada por: $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B} \mathbf{B}}^{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$ , sendo $v_x, v_y$ e $v_z$ as componentes de $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$
$[\mathbf{v}]^{\mathbf{D}}$	Matriz diagonal cuja diagonal é composta pelos elementos da matriz coluna $\mathbf{v}$
$\delta$	Operador variacional
$\mathbf{0}$	Matriz coluna nula ou matriz nula
$\mathbf{0}$	Vetor nulo ou tensor nulo
$\mathbb{1}$	Matriz identidade
$[\mathbb{1}]_{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j}$	Matriz de mudança de base, i.e. $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_i} = [\mathbb{1}]_{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_j}$
$[\mathbb{1}]_{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j}^{\mathbf{H}}$	Matriz de transformação homogênea, i.e. $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_i}^{\mathbf{H}} = [\mathbb{1}]_{\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j}^{\mathbf{H}} \cdot [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_j}^{\mathbf{H}}$
$\mathbf{1}$	Tensor identidade
$[\cdot]^{\mathbf{T}}$	Matriz transposta
$[\cdot]^{-1}$	Matriz inversa
$[\cdot]^{\dagger}$	Matriz pseudo-inversa
$[\emptyset]$	Matriz coluna vazia ou matriz vazia

## 1 Introdução

Há uma série de vantagens em utilizar mecanismos de cadeia cinemática paralela no lugar dos tradicionais mecanismos seriais. Dentre elas podemos citar sua grande capacidade de carga, alta precisão de posicionamento do efetuator e uma redução significativa na inércia. Outra característica marcante desse tipo de arquitetura são as altas velocidades e acelerações atingidas, as quais superam muito os valores máximos atingidos utilizando arquitetura serial. Grande parte dessas vantagens se devem à possibilidade de ter todos os motores localizados na base. Como desvantagens podemos citar o menor espaço de trabalho e modelo dinâmico muito mais complexo e difícil de se obter [7, 1].

Devido à grande dificuldade de se obter o modelo dinâmico completo de mecanismos paralelos, muitos pesquisadores preferem utilizar mecanismos seriais para realizar tarefas que exigem um grande domínio sobre a dinâmica do sistema, como plataformas robóticas voltadas à reabilitação, pois é necessário um conhecimento detalhado do comportamento dinâmico do mecanismo utilizado para poder controlar as forças de interação entre o mecanismo e o paciente [2, 3].

Atualmente novas metodologias para modelagem de dinâmica multicorpos que se mostram muito mais adequadas para aplicações em qualquer tipo de mecanismo estão sendo desenvolvidas, das quais se destaca o trabalho realizado por Renato Orsino, doutorando também orientado pelo professor Dr. Tarcísio Coelho [8, 4].

Outro assunto relevante ainda pouco estudado por pesquisadores é o controle voltado a mecanismos paralelos [7]. Como já foi dito anteriormente, devido à grande dificuldade de modelagem de sistemas complexos utilizando os métodos tradicionais, ainda são poucos os estudos de implementação de técnicas de controle em mecanismos de cadeia fechada. Sendo assim, é possível aliar as novas metodologias de modelagem desenvolvidas à implementação, adaptação e aprimoramentos de algoritmos de controle não-linear voltados a mecanismos paralelos [5]. Além disso é possível aproveitar os novos métodos desenvolvidos para explorar outro assunto ainda pouco estudado, a implementação de leis de controle utilizando variáveis redundantes [1, 6, 9, 10].

## 2 Objetivos

A proposta atual é a utilização de novos métodos de modelagem dinâmica multicorpos para implementar, adaptar e aprimorar algoritmos de controle não-linear para mecanismos paralelos. Possui diferenciação em relação a outros trabalhos desenvolvidos, pois utiliza novas metodologias para modelagem, as quais ainda são pouco difundidas, tem foco em mecanismos de cadeia fechada, os quais ainda não são tão explorados, e estuda técnicas de controle não-linear, inclusive a utilização de variáveis redundantes em sistemas de controle, fato não muito comum na literatura.

Os principais objetivos do projeto são:

- Desenvolvimento de um algoritmo para dedução das equações diferenciais de movimento de mecanismos de arquiteturas serial e paralela com vínculos de natureza holônoma (baseado na metodologia de Orsino baseada nas equações de Gibbs-Appell e Maggi) que possua as seguintes características:
  - Considere todos os efeitos da dinâmica de corpos rígidos.
  - Aplicação simples, mesmo para sistemas de alta complexidade.
  - Alto grau de automatização, de modo que possa ser facilmente implementado em softwares de manipulação simbólica.
- Desenvolvimento de metodologia de projeto de controle não-linear robusto, baseado na técnica de controle por modos deslizantes, para mecanismos de arquitetura paralela, tradicionais e com atuação redundante, com incertezas paramétricas.
- Desenvolvimento de lei de controle adequada para sistemas descritos por coordenadas redundantes, como por exemplo modelos mecanismos cuja orientação é descrita por quaternions unitários.

### 3 Metodologia do projeto

O desenvolvimento do projeto consiste basicamente em três frentes: o desenvolvimento e aprimoramento do algoritmo utilizado para modelagem dinâmica das plataformas robóticas, o desenvolvimento de uma metodologia de projeto de sistema de controle não-linear robusto para plataformas robóticas com incertezas paramétricas, e a elaboração de leis de controle adequadas a sistemas descritos por coordenadas redundantes.

O desenvolvimento do algoritmo de modelagem é feito começando pelo estudo dos métodos tracionais e da metodologia de Orsino baseada nas equações de Gibbs-Appell e Maggi de modelagem de sistemas mecânicos multicorpos, seguido pela concepção da primeira versão do algoritmo, aplicação da versão atual do algoritmo em diversas plataformas robóticas utilizando softwares de manipulação simbólicas, automatização e adição de aprimoramentos ao algoritmo, voltando às etapas de aplicação, automatização e adição de aprimoramentos iterativamente.

O desenvolvimento da metodologia de projeto de sistema de controle não-linear robusto para plataformas robótica com incertezas paramétricas inicia-se no estudo de técnicas de controle que seguem esta linha e aplicação em sistemas de menor complexidade. Depois de adquirir o domínio das leis de controle estudadas, aplicar as técnicas nos modelos de manipuladores paralelos deduzidos pelo algoritmo de modelagem desenvolvido e por fim automatizar ao máximo a metodologia de projeto desenvolvida.

O desenvolvimento de leis de controle adequadas a sistemas descritos por coordenadas redundantes é feito baseado nas leis de controle não-linear robusto estudadas, com o objetivo de realizar o controle de plataformas robóticas cuja orientação é descrita por quaternions unitários. Essa etapa do projeto exige a integração dos conhecimentos adquiridos nas áreas de modelagem e controle de plataformas robóticas, com o fim de sintetizar novas leis de controle adequadas a sistemas descritos por coordenadas redundantes.

### 4 Resultados

Esta seção pretende apresentar uma síntese dos principais resultados teóricos obtidos até o momento.

#### 4.1 Algoritmo para modelagem de mecanismos seriais

Para explicar o algoritmo desenvolvido é necessário primeiro definir uma série de conceitos:

Seja  $\mathcal{B}$  um sistema mecânico serial de  $\nu^\#$  graus de liberdade. Definimos:

- $\mathcal{N}$ : referencial inercial.
- $\mathcal{N}$ : sistema de coordenadas fixo a  $\mathcal{N}$ .
- $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, \nu^\#$ :  $i$ -ésima barra do mecanismo serial.
- $\mathbf{g}_i, i = 1, \dots, \nu^\#$ : centro de massa da  $i$ -ésima barra.
- $\mathbf{x}$ : ponto no espaço fixo ao efetuador.
- $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, \nu^\#$ : sistema de coordenadas solidário a  $\mathcal{B}_i$  com origem no centro da  $i$ -ésima junta e eixos paralelos às direções principais de inércia de  $\mathcal{B}_i$ .
- $m_i$ : massa da barra  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbf{I}_i$ : tensor de inércia da barra  $\mathcal{B}_i$ .
- $\boldsymbol{\omega}_i$ : vetor velocidade angular absoluta da barra  $\mathcal{B}_i$ .
- $\mathbf{v}_i$ : vetor velocidade linear absoluta do centro de massa  $\mathbf{g}_i$ .
- $\mathbf{a}_i$ : vetor aceleração linear absoluta do centro de massa  $\mathbf{g}_i$ .

- $\omega$ : matriz coluna contendo as componentes não nulas de  $[\boldsymbol{\omega}_i]_{B_i}$ , com  $i = 1, \dots, \nu^\#$ .
- $\nu$ : matriz coluna contendo as componentes não nulas de  $[\boldsymbol{\nu}_i]_N$ , com  $i = 1, \dots, \nu^\#$ .
- $\mathbf{q}^\#$ : matriz coluna de  $\nu^\#$  coordenadas generalizadas independentes. Contém os deslocamentos angulares relativos das juntas rotativas e os deslocamentos lineares relativos das juntas prismáticas.
- $\mathbf{q}^\circ$ : matriz coluna de  $\nu_{\mathbf{q}^\circ}$  coordenadas generalizadas redundantes. Contém as coordenadas dos centros de massa das barras do mecanismo escritas no sistema N.
- $\mathbf{q}$ : matriz coluna contendo todas as coordenadas generalizadas. É definida por  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^\#^\top & \mathbf{q}^\circ^\top \end{bmatrix}^\top$
- $\mathbf{p}^\#$ : matriz coluna de  $\nu^\#$  velocidades generalizadas independentes. É dada por  $\mathbf{p}^\# = \dot{\mathbf{q}}^\#$ .
- $\mathbf{p}^\circ$ : matriz coluna de  $\nu_{\mathbf{p}^\circ}$  velocidades generalizadas redundantes. É definida por  $\mathbf{p}^\circ = \begin{bmatrix} \omega^\top & \nu^\top \end{bmatrix}^\top$
- $\mathbf{p}$ : matriz coluna contendo todas as velocidades generalizadas. É definida por  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\#^\top & \mathbf{p}^\circ^\top \end{bmatrix}^\top$
- $\underline{\mathbf{p}}^\circ(\mathbf{q}^\#, \mathbf{p}^\#)$ :  $\mathbf{p}^\circ$  escrito em função de  $\mathbf{q}^\#$  e  $\mathbf{p}^\#$ .
- $\mathbb{A}(\mathbf{q}^\#)$ : Jacobiano dos vínculos de velocidades.
- $\mathbb{C}(\mathbf{q}^\#)$ : complemento ortogonal do Jacobiano dos vínculos de velocidades. Além disso  $\mathbf{p} = \mathbb{C}(\mathbf{q}^\#)\mathbf{p}^\#$ .
- $\mathbb{M}$ : matriz de inércia desacoplada.
- $\mathbf{v}(\mathbf{p}^\#)$ : vetor dos termos giroscópicos desacoplados.
- $\mathbb{f}(\mathbf{q}^\#)$ : vetor dos esforços de atrito aplicados na direção oposta a  $\mathbf{p}$ .
- $\mathbb{g}$ : vetor dos esforços gravitacionais aplicados na direção oposta a  $\mathbf{p}$ .
- $\mathbf{u}$ : esforços ativos externos aplicados na direção de  $\mathbf{p}^\#$ .

O algoritmo é baseado na metodologia de Orsino baseada nas equações de Gibbs-Appell e Maggi para modelagem dos subsistemas seriais. O modelo para simulação dinâmica direta é dado pelo seguinte equacionamento:

$$\begin{cases} \mathbb{C}^\top(\mathbf{q}^\#) \left( \mathbb{M} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{v}(\mathbf{p}^\#) + \mathbb{f}(\mathbf{p}^\#) + \mathbb{g} \right) = \mathbf{u} \\ \mathbb{A}(\mathbf{q}^\#) \dot{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{b}}(\mathbf{q}^\#, \mathbf{p}^\#) \end{cases} \quad (1)$$

Sendo:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{p}}^\circ}{\partial \mathbf{p}^\#} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\mathbf{p}}^\circ}{\partial \mathbf{p}^\#} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{\mathbf{b}} = -\dot{\mathbb{A}}(\mathbf{q}^\#, \mathbf{p}^\#)\mathbf{p} \quad (4)$$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu^\#} \left( m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + 2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_i \wedge \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \right) \quad (5)$$

$$\mathbb{M} = \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\mathbb{p}}^2} \quad (6)$$

$$\mathbb{v} = \frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbb{p}}} - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\mathbb{p}}^2} \dot{\mathbb{p}} \quad (7)$$

Aqui seguem as etapas do algoritmo para dedução do modelo dinâmico de um subsistema serial acompanhado de um exemplo de aplicação no mecanismo RR:

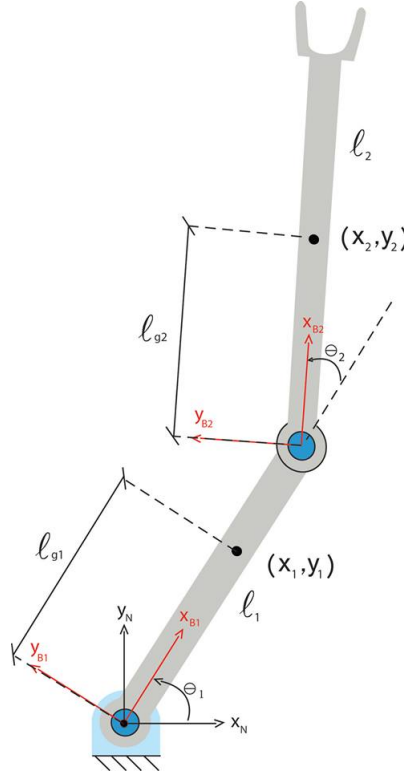


Figure 1: Mecanismo RR

1) Definição das coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q}^\# = [\theta_1 \quad \theta_2] \quad (8)$$

$$\mathbf{q}^\circ = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2] \quad (9)$$

2) Definição das velocidades generalizadas:

$$\mathbf{p}^\# = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2] \quad (10)$$

$$\mathbf{p}^\circ = [\omega_{z1} \quad \omega_{z2} \quad v_{x1} \quad v_{y1} \quad v_{x2} \quad v_{y2}] \quad (11)$$

3) Cinemática de posição dos centros de massa e do efetuador utilizando matrizes de transformação homogênea:

$$[g_1]_{B_1}^H = [l_{g1} \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (12)$$

$$[g_2]_{B_2}^H = [l_{g2} \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (13)$$

$$[x]_{B_2}^H = [l_2 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (14)$$

$$[\mathbb{1}]_{N|B_1}^H = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[\mathbb{1}]_{B_1|B_2}^H = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[\mathbb{1}]_{N|B_2}^H = [\mathbb{1}]_{N|B_1}^H [\mathbb{1}]_{B_1|B_2}^H = \begin{bmatrix} c_{1+2} & -s_{1+2} & 0 & l_1 c_1 \\ s_{1+2} & c_{1+2} & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[g_1]_N^H = [\mathbb{1}]_{N|B_1}^H [g_1]_{B_1}^H = \begin{bmatrix} l_{g1} c_1 \\ l_{g1} s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[g_2]_N^H = [\mathbb{1}]_{N|B_2}^H [g_2]_{B_2}^H = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{g2} c_{1+2} \\ l_1 s_1 + l_{g2} s_{1+2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[x]_N^H = [\mathbb{1}]_{N|B_2}^H [x]_{B_2}^H = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{1+2} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{1+2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

4) Cinemática de velocidades dos centros de massa:

$$[v_1]_N = \frac{d}{dt} [g_1]_N = \begin{bmatrix} -l_{g1} s_1 \dot{\theta}_1 \\ l_{g1} c_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[\underline{\mathbf{v}}_2]_N = \frac{d}{dt} [\underline{\mathbf{g}}_2]_N = \begin{bmatrix} -l_1 \mathbf{s}_1 \dot{\theta}_1 - l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 \mathbf{c}_1 \dot{\theta}_1 + l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

5) Cinemática de velocidades angulares das barras:

$$[\underline{\boldsymbol{\omega}}_1]_{B_1|B_1}^S = [\underline{\mathbb{1}}]_{N|B_1}^T \frac{d}{dt} [\underline{\mathbb{1}}]_{N|B_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\underline{\boldsymbol{\omega}}_1]_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[\underline{\boldsymbol{\omega}}_2]_{B_2|B_2}^S = [\underline{\mathbb{1}}]_{N|B_2}^T \frac{d}{dt} [\underline{\mathbb{1}}]_{N|B_2} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\underline{\boldsymbol{\omega}}_2]_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

6) Montar o vetor  $\underline{\mathbb{p}}^\circ(\mathbf{q}^\#, \mathbf{p}^\#)$  e calcular  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{b}$  através das equações (2), (3) e (4):

$$\underline{\mathbb{p}}^\circ(\mathbf{q}^\#, \mathbf{p}^\#) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ -l_{g1} \mathbf{s}_1 \dot{\theta}_1 \\ l_{g1} \mathbf{c}_1 \dot{\theta}_1 \\ -l_1 \mathbf{s}_1 \dot{\theta}_1 - l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 \mathbf{c}_1 \dot{\theta}_1 + l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \underline{\mathbb{p}}^\circ}{\partial \mathbf{p}^\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -l_{g1} \mathbf{s}_1 & 0 \\ l_{g1} \mathbf{c}_1 & 0 \\ -l_1 \mathbf{s}_1 - l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} & -l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} \\ l_1 \mathbf{s}_1 + l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} & l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -l_{g1} \mathbf{s}_1 & 0 \\ l_{g1} \mathbf{c}_1 & 0 \\ -l_1 \mathbf{s}_1 - l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} & -l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} \\ l_1 \mathbf{s}_1 + l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} & l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{g1} \mathbf{s}_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{g1} \mathbf{c}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -l_1 \mathbf{s}_1 - l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} & -l_{g2} \mathbf{s}_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ l_1 \mathbf{s}_1 + l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} & l_{g2} \mathbf{c}_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (28)$$



$$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{g1}c_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_{g1}s_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_1c_1\dot{\theta}_1^2 + l_{g2}c_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1s_1\dot{\theta}_1^2 + l_{g2}s_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

7) Calcular a energia de acelerações  $S$ :

$$S = \frac{1}{2} \left( m_1(\dot{v}_{x1}^2 + \dot{v}_{y1}^2) + m_2(\dot{v}_{x2}^2 + \dot{v}_{y2}^2) + J_{z1}\dot{\omega}_{z1}^2 + J_{z2}\dot{\omega}_{z2}^2 \right) \quad (30)$$

8) Obter  $\mathbb{M}$  e  $\mathbb{v}$  utilizando as equações (6) e (7):

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{z1} & J_{z2} & m_1 & m_1 & m_2 & m_2 \end{bmatrix}^D \quad (31)$$

$$\mathbb{v} = \mathbb{0} \quad (32)$$

9) Montar os vetores  $\mathbb{f}$ ,  $\mathbb{g}$  e  $\mathbb{u}$ :

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} c_1\dot{\theta}_1 + \gamma_1 \text{sign}(\dot{\theta}_1) \\ c_2\dot{\theta}_2 + \gamma_2 \text{sign}(\dot{\theta}_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbb{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_1g \\ 0 \\ m_2g \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbb{u} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Sendo assim, a partir da equação (1), temos que o modelo para simulação dinâmica direta do mecanismo RR é dado por:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -l_{g1}s_1 & 0 \\ l_{g1}c_1 & 0 \\ -l_1s_1 - l_{g2}s_{1+2} & -l_{g2}s_{1+2} \\ l_1s_1 + l_{g2}c_{1+2} & l_{g2}c_{1+2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{z1} \\ J_{z2} \\ m_1 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_2 \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_{z1} \\ \dot{\omega}_{z2} \\ \dot{v}_{x1} \\ \dot{v}_{y1} \\ \dot{v}_{x2} \\ \dot{v}_{y2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1\dot{\theta}_1 + \gamma_1 \text{sign}(\dot{\theta}_1) \\ c_2\dot{\theta}_2 + \gamma_2 \text{sign}(\dot{\theta}_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_1g \\ 0 \\ m_2g \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{g1}s_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{g1}c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -l_1s_1 - l_{g2}s_{1+2} & -l_{g2}s_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ l_1s_1 + l_{g2}c_{1+2} & l_{g2}c_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_{z1} \\ \dot{\omega}_{z2} \\ \dot{v}_{x1} \\ \dot{v}_{y1} \\ \dot{v}_{x2} \\ \dot{v}_{y2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{g1}c_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_{g1}s_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_1c_1\dot{\theta}_1^2 + l_{g2}c_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1s_1\dot{\theta}_1^2 + l_{g2}s_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{bmatrix}$$

#### 4.2 Algoritmo para modelagem de mecanismos paralelos

Para realizar a modelagem de mecanismos paralelos a partir de subsistemas seriais já deduzidos, é necessário introduzir mais alguns conceitos:

Sejam  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$   $n+1$  subsistemas mecânicos e  $\mathcal{M}$  um sistema mecânico de  $\nu^\#$  graus de liberdade gerado pelo acoplamento dos subsistemas citados. Definimos:

- $\mathbf{q}_r$ : matriz coluna de coordenadas generalizadas que descrevem a orientação da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ . Normalmente é dada pelas componentes um quaternion unitário, i.e.  $\mathbf{q}_r = [q_i \ q_j \ q_k \ q_r]^T$  com  $\mathbf{q}_r^T \cdot \mathbf{q}_r = [1]$ .
- $\mathbf{q}_t$ : matriz coluna de coordenadas generalizadas que descrevem a posição da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ .
- $\mathbf{q}_0$ : matriz coluna de todas as coordenadas generalizadas da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ . É definida como  $\mathbf{q}_0 = [\mathbf{q}_r^T \ \mathbf{q}_t^T]^T$ .
- $\mathbf{q}_j^\#, j = 1, \dots, n$ : matriz coluna de coordenadas generalizadas independentes do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbf{q}^\varnothing$ : matriz coluna de coordenadas generalizadas redundantes não pertencentes à plataforma/efetuador. Definida como  $\mathbf{q}^\varnothing = [\mathbf{q}_1^\#^T \ \dots \ \mathbf{q}_n^\#^T]^T$ .
- $\mathbf{q}$ : matriz coluna contendo todas as coordenadas generalizadas do sistema  $\mathcal{M}$ . Definida como  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_0^T \ \mathbf{q}^\varnothing^T]^T$ .
- $\overline{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$ : matriz coluna dos vínculos de posição entre subsistemas. As equações vínculares são dadas por  $\overline{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ .
- $\mathbb{P}_r$ : matriz coluna de velocidades generalizadas relativas à velocidade angular da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ . Respeita  $\mathbb{P}_r = \mathbb{D}(\mathbf{q}_r)\dot{\mathbf{q}}_r$ , sendo  $\mathbb{D}(\mathbf{q}_r)$  uma matriz de posto cheio com número de colunas maior ou igual ou número de linhas tal que  $\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbb{D}^\dagger(\mathbf{q}_r)\mathbb{P}_r$ .

- $\mathbb{p}_t$ : matriz coluna de velocidades generalizadas relativas à velocidade do centro de massa de  $\mathcal{B}_0$ . É dada por  $\mathbb{p}_t = \dot{\mathbf{q}}_t$ .
- $\mathbb{p}_0^\#$ : matriz coluna de todas as velocidades generalizadas independentes da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ . É definida como  $\mathbb{p}_0^\# = [\mathbb{p}_r^\top \quad \mathbb{p}_t^\top]^\top$ .
- $\mathbb{p}_0^\circ$ : matriz coluna de velocidades generalizadas redundantes da plataforma/efetuador  $\mathcal{B}_0$ . É dada por  $\mathbb{p}_0^\circ = \dot{\mathbf{q}}_r$ .
- $\mathbb{p}_j^\#, j = 1, \dots, n$ : matriz coluna de velocidades generalizadas independentes do subsistema  $\mathcal{B}_j$ . É definida por  $\mathbb{p}_j^\# = \dot{\mathbf{q}}_j^\#$ .
- $\mathbb{p}_j^\circ, j = 1, \dots, n$ : matriz coluna de velocidades generalizadas redundantes do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbb{p}_j, j = 0, \dots, n$ : matriz coluna de velocidades generalizadas do subsistema  $\mathcal{B}_j$ . É definida por  $\mathbb{p}_j = [\mathbb{p}_j^\#^\top \quad \mathbb{p}_j^\circ^\top]^\top$ .
- $\mathbb{p}^\#$ : matriz coluna de  $\nu^\#$  velocidades generalizadas independentes de  $\mathcal{M}$ . É dada por  $\mathbb{p}^\# = \mathbb{p}_0^\#$ .
- $\mathbb{p}^\circ$ : matriz coluna de velocidades generalizadas redundantes de  $\mathcal{M}$ . É definida por  $\mathbb{p}^\circ = [\mathbb{p}_0^\circ^\top \quad \mathbb{p}_1^\top \quad \dots \quad \mathbb{p}_n^\top]^\top$ .
- $\mathbb{p}$ : matriz coluna contendo todas as velocidades generalizadas de  $\mathcal{M}$ . É definida por  $\mathbb{p} = [\mathbb{p}^\#^\top \quad \mathbb{p}^\circ^\top]^\top$ .
- $\mathbb{p}$ : matriz coluna definida como  $\mathbb{p} = [\mathbb{p}^\#^\top \quad \mathbb{p}^\circ^\top]^\top$ , sendo  $\mathbb{p}^\# = \mathbb{p}_0^\#$  e  $\mathbb{p}^\circ = \dot{\mathbf{q}}^\circ = [\mathbb{p}_1^\#^\top \quad \dots \quad \mathbb{p}_n^\#^\top]^\top$ .
- $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbb{p})$ :  $\dot{\mathbf{q}}$  escrita em função de  $\mathbf{q}$  e  $\mathbb{p}$ .
- $\bar{\omega}(\mathbf{q}, \mathbb{p})$ : matriz coluna dos vínculos de orientação entre subsistemas. As equações vínculares são dadas por  $\bar{\omega}(\mathbf{q}, \mathbb{p}) = \mathbb{0}$ .
- $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbb{p})$ : matriz coluna de todos os vínculos de velocidades entre subsistemas. As equações vínculares são dadas por  $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbb{p}) = \mathbb{0}$ .
- $\mathbb{A}_j(\mathbf{q}), j = 0, \dots, n$ : Jacobiano dos vínculos de velocidades do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbb{C}_j(\mathbf{q}), j = 0, \dots, n$ : complemento ortogonal do Jacobiano dos vínculos de velocidades do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbb{M}_j, j = 0, \dots, n$ : matriz de inércia desacoplada do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbf{v}_j(\mathbb{p}), j = 0, \dots, n$ : matriz coluna dos termos giroscópicos desacoplados do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbb{f}_j(\mathbf{q}), j = 0, \dots, n$ : matriz coluna dos esforços de atrito do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbb{g}_j, j = 0, \dots, n$ : matriz coluna dos esforços gravitacionais do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .
- $\mathbf{u}_j, j = 0, \dots, n$ : matriz coluna dos esforços ativos externos do subsistema  $\mathcal{B}_j$ .

O modelo para simulação dinâmica direta é dado pelo seguinte equacionamento:

$$\begin{cases} \mathbb{C}^\top(\mathbf{q}) \left( \mathbb{M} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{v}(\mathbb{p}) + \mathbb{f}(\mathbb{p}) + \mathbb{g} \right) = \check{\mathbb{C}}^\top(\mathbf{q}) \mathbf{u} \\ \mathbb{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{p}} = \mathbb{b}(\mathbf{q}, \mathbb{p}) \end{cases} \quad (37)$$

Sendo:

$$\underline{\dot{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^\dagger \mathfrak{p}_r \\ \mathfrak{p}_t \\ \mathfrak{p}_1^\# \\ \vdots \\ \mathfrak{p}_n^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^\dagger & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_r \\ \mathfrak{p}_t \\ \mathfrak{p}_1^\# \\ \vdots \\ \mathfrak{p}_n^\# \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}^\dagger & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbb{1} \end{bmatrix} \mathfrak{p} \quad (38)$$

$$\overline{\mathfrak{p}} = \left[ \frac{\partial \overline{\mathfrak{q}}}{\partial \mathfrak{q}} \cdot \underline{\dot{\mathfrak{q}}} \right]_{\overline{\omega}} \quad (39)$$

$$\check{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ -\frac{\partial \overline{\mathfrak{p}}}{\partial \mathfrak{p}^\circ}{}^\dagger \frac{\partial \overline{\mathfrak{p}}}{\partial \mathfrak{p}^\#} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{C}_n \end{bmatrix} \check{\mathbb{C}} \quad (41)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{A}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \overline{\mathfrak{p}}}{\partial \mathfrak{p}} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathfrak{b} = -\dot{\mathbb{A}}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})\mathfrak{p} \quad (43)$$

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{M}_n \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{v}_0^\mathsf{T} \quad \mathfrak{v}_1^\mathsf{T} \quad \dots \quad \mathfrak{v}_n^\mathsf{T}]^\mathsf{T} \quad (45)$$

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{f}_0^\mathsf{T} \quad \mathfrak{f}_1^\mathsf{T} \quad \dots \quad \mathfrak{f}_n^\mathsf{T}]^\mathsf{T} \quad (46)$$

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}_0^\mathsf{T} \quad \mathfrak{g}_1^\mathsf{T} \quad \dots \quad \mathfrak{g}_n^\mathsf{T}]^\mathsf{T} \quad (47)$$

$$\mathfrak{u} = [\mathfrak{u}_0^\mathsf{T} \quad \mathfrak{u}_1^\mathsf{T} \quad \dots \quad \mathfrak{u}_n^\mathsf{T}]^\mathsf{T} \quad (48)$$

Aqui seguem as etapas do algoritmo para dedução do modelo dinâmico de um mecanismo paralelo acompanhado de um exemplo de aplicação, a dedução do modelo dinâmico do mecanismo 5R (pentágono articulado) a partir do acoplamento dos modelos de 2 mecanismos RR e uma massa pontual (efetuador).

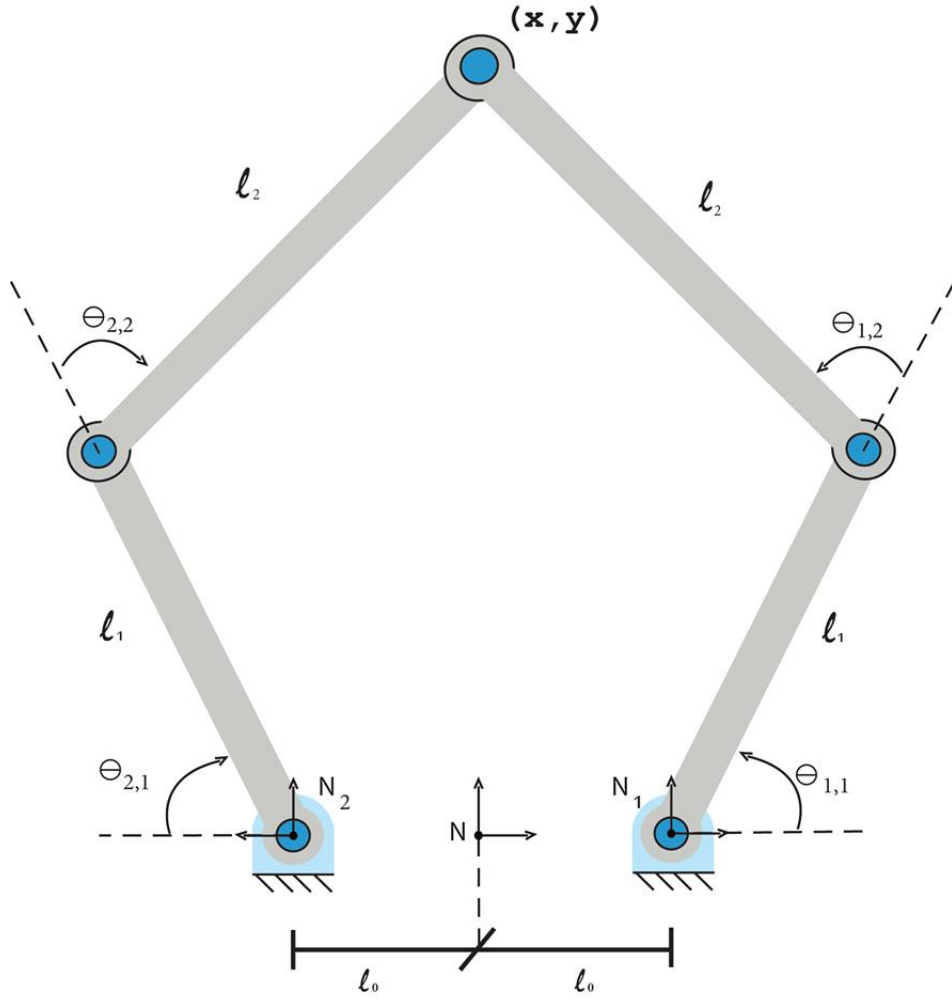


Figure 2: Mecanismo 5R

O modelo do mecanismo RR é dado pela equação (36). O modelo da massa pontual é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_0 \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_0 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Etapas do algoritmo:

1) Definição das coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q}_r = [\emptyset] \quad (50)$$

$$\mathbf{q}_t = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \quad (51)$$

$$\mathfrak{q}_1^\# = [\theta_{1,1} \quad \theta_{1,2}]^\top \quad (52)$$

$$\mathfrak{q}_2^\# = [\theta_{2,1} \quad \theta_{2,2}]^\top \quad (53)$$

2) Definição das velocidades generalizadas:

$$\mathfrak{p}_r = [\emptyset] \quad (54)$$

$$\mathfrak{p}_t = \dot{\mathfrak{q}}_t = [\dot{x} \quad \dot{y}]^\top \quad (55)$$

$$\mathfrak{p}_1^\circ = [\omega_{1,z1} \quad \omega_{1,z2} \quad v_{1,x1} \quad v_{1,y1} \quad v_{1,x2} \quad v_{1,y2}]^\top \quad (56)$$

$$\mathfrak{p}_2^\circ = [\omega_{2,z1} \quad \omega_{2,z2} \quad v_{2,x1} \quad v_{2,y1} \quad v_{2,x2} \quad v_{2,y2}]^\top \quad (57)$$

3) Definição dos vínculos de posição entre subsistemas utilizando matrizes de transformação homogênea:

$$[\mathbb{1}]_{N|N_1}^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$[\mathbb{1}]_{N|N_2}^H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$[\mathbf{x}_0]_N = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$[\mathbf{x}_1]_{N_1} = \begin{bmatrix} l_1 c_{1,1} + l_2 c_{1,1+2} \\ l_1 s_{1,1} + l_2 s_{1,1+2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$[\mathbf{x}_2]_{N_2} = \begin{bmatrix} l_1 c_{2,1} + l_2 c_{2,1+2} \\ l_1 s_{2,1} + l_2 s_{2,1+2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$[\mathbf{x}_1]_N^H = [\mathbb{1}]_{N|N_1}^H [\mathbf{x}_1]_{N_1}^H = \begin{bmatrix} l_0 + l_1 \mathbf{c}_{1,1} + l_2 \mathbf{c}_{1,1+2} \\ l_1 \mathbf{s}_{1,1} + l_2 \mathbf{s}_{1,1+2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$[\mathbf{x}_2]_N^H = [\mathbb{1}]_{N|N_2}^H [\mathbf{x}_2]_{N_2}^H = \begin{bmatrix} -l_0 - l_1 \mathbf{c}_{2,1} - l_2 \mathbf{c}_{2,1+2} \\ l_1 \mathbf{s}_{2,1} + l_2 \mathbf{s}_{2,1+2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Vínculos de posição:

$$\begin{cases} [\mathbf{x}_0]_N = [\mathbf{x}_1]_N \\ [\mathbf{x}_0]_N = [\mathbf{x}_2]_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = l_0 + l_1 \mathbf{c}_{1,1} + l_2 \mathbf{c}_{1,1+2} \\ y = l_1 \mathbf{s}_{1,1} + l_2 \mathbf{s}_{1,1+2} \\ x = -l_0 - l_1 \mathbf{c}_{2,1} - l_2 \mathbf{c}_{2,1+2} \\ y = l_1 \mathbf{s}_{2,1} + l_2 \mathbf{s}_{2,1+2} \end{cases} \quad (65)$$

$$\therefore \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x - l_0 - l_1 \mathbf{c}_{1,1} - l_2 \mathbf{c}_{1,1+2} \\ y - l_1 \mathbf{s}_{1,1} - l_2 \mathbf{s}_{1,1+2} \\ x + l_0 + l_1 \mathbf{c}_{2,1} + l_2 \mathbf{c}_{2,1+2} \\ y - l_1 \mathbf{s}_{2,1} - l_2 \mathbf{s}_{2,1+2} \end{bmatrix} = \mathbb{0} \quad (66)$$

4) Definição dos vínculos de orientação entre subsistemas:

$$\bar{\omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = [\emptyset] \quad (67)$$

Nesse exemplo não há vínculos de orientação entre subsistemas.

5) Cálculo dos Jacobianos dos vínculos de posição e definição dos vínculos de velocidades através de (39):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 \mathbf{s}_{1,1} + l_2 \mathbf{s}_{1+2} & l_2 \mathbf{s}_{1+2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 \mathbf{c}_{1,1} - l_2 \mathbf{c}_{1+2} & -l_2 \mathbf{c}_{1+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -l_1 \mathbf{s}_{2,1} - l_2 \mathbf{s}_{2+2} & -l_2 \mathbf{s}_{2+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -l_1 \mathbf{c}_{2,1} - l_2 \mathbf{c}_{2+2} & -l_2 \mathbf{c}_{2+2} \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta}_{1,1} \quad \dot{\theta}_{1,2} \quad \dot{\theta}_{2,1} \quad \dot{\theta}_{2,2}]^T \quad (69)$$

$$\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 \mathbf{s}_{1,1} + l_2 \mathbf{s}_{1+2} & l_2 \mathbf{s}_{1+2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 \mathbf{c}_{1,1} - l_2 \mathbf{c}_{1+2} & -l_2 \mathbf{c}_{1+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -l_1 \mathbf{s}_{2,1} - l_2 \mathbf{s}_{2+2} & -l_2 \mathbf{s}_{2+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -l_1 \mathbf{c}_{2,1} - l_2 \mathbf{c}_{2+2} & -l_2 \mathbf{c}_{2+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_{1,1} \\ \dot{\theta}_{1,2} \\ \dot{\theta}_{2,1} \\ \dot{\theta}_{2,2} \end{bmatrix} = \mathbb{0} \quad (70)$$

6) Cálculo de  $\check{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{b}$  através de (40), (41), (42) e (43):

$$\check{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c_{1,1+2}}{l_1 s_{1,2}} & \frac{s_{1,1+2}}{l_1 s_{1,2}} \\ -\frac{l_1 c_{1,1} + l_2 c_{1,1+2}}{l_1 l_2 s_{1,2}} & -\frac{l_1 s_{1,1} + l_2 s_{1,1+2}}{l_1 l_2 s_{1,2}} \\ -\frac{c_{2,1+2}}{l_1 s_{2,2}} & -\frac{s_{2,1+2}}{l_1 s_{2,2}} \\ \frac{l_1 c_{2,1} + l_2 c_{2,1+2}}{l_1 l_2 s_{2,2}} & -\frac{l_1 s_{2,1} + l_2 s_{2,1+2}}{l_1 l_2 s_{2,2}} \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c_{1,1+2}}{l_1 s_{1,2}} & \frac{s_{1,1+2}}{l_1 s_{1,2}} \\ -\frac{l_1 c_{1,1} + l_2 c_{1,1+2}}{l_1 l_2 s_{1,2}} & -\frac{l_1 s_{1,1} + l_2 s_{1,1+2}}{l_1 l_2 s_{1,2}} \\ \frac{c_{1,1+2}}{l_1 s_{1,2}} & \frac{s_{1,1+2}}{l_1 s_{1,2}} \\ -\frac{l_2 s_{1,2}}{l_{g1} s_{1,1} c_{1,1+2}} & -\frac{l_2 s_{1,2}}{l_{g1} s_{1,1} s_{1,1+2}} \\ \frac{l_1 s_{1,2}}{l_{g1} c_{1,1} c_{1,1+2}} & \frac{l_1 s_{1,2}}{l_{g1} c_{1,1} s_{1,1+2}} \\ -\frac{l_2 s_{1,1} c_{1,1+2} - l_{g2} c_{1,1} s_{1,1+2}}{l_2 s_{1,2}} & -\frac{(l_2 - l_{g2}) s_{1,1} s_{1,1+2}}{l_2 s_{1,2}} \\ \frac{l_2 s_{1,2}}{(l_2 - l_{g2}) c_{1,1} c_{1,1+2}} & -\frac{l_2 s_{1,2}}{l_2 c_{1,1} s_{1,1+2} - l_{g2} s_{1,1} c_{1,1+2}} \\ \frac{l_2 s_{1,2}}{c_{2,1+2}} & \frac{l_2 s_{1,2}}{s_{2,1+2}} \\ -\frac{l_1 s_{2,2}}{l_1 c_{2,1} + l_2 c_{2,1+2}} & -\frac{l_1 s_{2,2}}{l_1 s_{2,1} + l_2 s_{2,1+2}} \\ \frac{l_1 l_2 s_{2,2}}{c_{2,1+2}} & \frac{l_1 l_2 s_{2,2}}{s_{2,1+2}} \\ -\frac{l_1 s_{2,2}}{c_{2,1}} & -\frac{l_1 s_{2,2}}{s_{2,1}} \\ \frac{l_2 s_{2,2}}{l_{g1} s_{2,1} c_{2,1+2}} & -\frac{l_2 s_{2,2}}{l_{g1} s_{2,1} s_{2,1+2}} \\ \frac{l_1 s_{2,2}}{l_{g1} c_{2,1} c_{2,1+2}} & \frac{l_1 s_{2,2}}{l_{g1} c_{2,1} s_{2,1+2}} \\ -\frac{l_1 s_{2,2}}{l_2 s_{2,1} c_{2,1+2} - l_{g2} c_{2,1} s_{2,1+2}} & -\frac{(l_2 - l_{g2}) s_{2,1} s_{2,1+2}}{(l_2 - l_{g2}) s_{2,1} s_{2,1+2}} \\ \frac{l_2 s_{2,2}}{(l_2 - l_{g2}) c_{2,1} c_{2,1+2}} & -\frac{l_2 s_{2,2}}{l_2 c_{2,1} s_{2,1+2} - l_{g2} s_{2,1} c_{2,1+2}} \\ \frac{l_2 s_{2,2}}{l_2 s_{2,2}} & \frac{l_2 s_{2,2}}{l_2 s_{2,2}} \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_{g1} s_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{g1} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 s_1 - l_{g2} s_{1+2} & -l_{g2} s_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 c_1 + l_{g2} c_{1+2} & l_{g2} c_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{g1} s_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{g1} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_1 s_1 - l_{g2} s_{1+2} & -l_{g2} s_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 c_1 + l_{g2} c_{1+2} & l_{g2} c_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & l_1 s_{1,1} + l_2 s_{1+2} & l_2 s_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 c_{1,1} - l_2 c_{1+2} & -l_2 c_{1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_1 s_{2,1} - l_2 s_{2+2} & -l_2 s_{2+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_1 c_{2,1} - l_2 c_{2+2} & -l_2 c_{2+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(73)

$$\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{g1}c_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 \\ l_{g1}s_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 \\ l_1c_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 + l_{g2}c_{1,1+2}(\dot{\theta}_{1,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \\ l_1s_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 + l_{g2}s_{1,1+2}(\dot{\theta}_{1,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \\ 0 \\ 0 \\ l_{g1}c_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 \\ l_{g1}s_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 \\ l_2c_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 + l_{g2}c_{2,1+2}(\dot{\theta}_{2,1} + \dot{\theta}_{2,2})^2 \\ l_2s_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 + l_{g2}s_{2,1+2}(\dot{\theta}_{2,1} + \dot{\theta}_{2,2})^2 \\ -l_1c_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 - l_2c_{1,1+2}(\dot{\theta}_{1,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \\ -l_1s_{1,1}\dot{\theta}_{1,1}^2 - l_2s_{1,1+2}(\dot{\theta}_{1,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \\ l_1c_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 + l_2c_{2,1+2}(\dot{\theta}_{2,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \\ -l_1s_{2,1}\dot{\theta}_{2,1}^2 - l_2s_{2,1+2}(\dot{\theta}_{2,1} + \dot{\theta}_{1,2})^2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

7) Obter  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbb{f}$ ,  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{u}$  através de (44), (45), (46), (47) e (48):

$$\mathbb{M} = [m_0 \quad m_0 \quad 0 \quad 0 \quad J_{z1} \quad J_{z2} \quad m_1 \quad m_1 \quad m_2 \quad m_2 \quad 0 \quad 0 \quad J_{z1} \quad J_{z2} \quad m_1 \quad m_1 \quad m_2 \quad m_2]^D \quad (75)$$

$$\mathbf{v} = \mathbb{0} \quad (76)$$

$$\mathbf{g} = [0 \quad m_0g \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad m_1g \quad 0 \quad m_2g \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad m_1g \quad 0 \quad m_2g]^T \quad (77)$$

$$\mathbf{u} = [0 \quad 0 \quad \tau_{1,1} \quad \tau_{1,2} \quad \tau_{2,1} \quad \tau_{2,2}]^T \quad (78)$$

$$\mathbb{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1\dot{\theta}_{1,1} + \gamma_1 \text{sign}(\dot{\theta}_{1,1}) \\ c_2\dot{\theta}_{1,2} + \gamma_2 \text{sign}(\dot{\theta}_{1,2}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1\dot{\theta}_{2,1} + \gamma_1 \text{sign}(\dot{\theta}_{2,1}) \\ c_2\dot{\theta}_{2,2} + \gamma_2 \text{sign}(\dot{\theta}_{2,2}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

#### 4.3 Modelo dinâmico acoplado

Para as deduções que serão feitas nas próximas subseções, é conveniente reescrever o modelo do mecanismo da seguinte maneira:

$$\mathbb{M}^\#(\mathfrak{q})\dot{\mathfrak{p}}^\# + \mathfrak{v}^\#(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{f}^\#(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{g}^\#(\mathfrak{q}) = \mathbb{Z}^\mathsf{T}(\mathfrak{q})\mathfrak{u}^\star \quad (80)$$

Esse modelo é obtido utilizando a propriedade da matriz  $\mathbb{C}$  deduzida de que  $\mathfrak{p} = \mathbb{C}(\mathfrak{q})\mathfrak{p}^\#$ . Sendo assim:

$$\mathbb{M}^\# = \mathbb{C}^\mathsf{T} \mathbb{M} \mathbb{C} \quad (81)$$

$$\mathfrak{v}^\# = \mathbb{C}^\mathsf{T} (\mathbb{M} \dot{\mathbb{C}} \mathfrak{p}^\# + \mathfrak{v}) \quad (82)$$

$$\mathfrak{f}^\# = \mathbb{C}^\mathsf{T} \mathfrak{f} \quad (83)$$

$$\mathfrak{g}^\# = \mathbb{C}^\mathsf{T} \mathfrak{g} \quad (84)$$

Além disso, a matriz coluna  $\mathfrak{u}^\star$  é definida de modo que suas componentes sejam apenas as componentes não nulas de  $\mathfrak{u}$ . Sendo assim,  $\mathbb{Z}$  é definida da seguinte maneira:

$$\mathbb{Z} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{u}^\star}^\mathsf{T} \check{\mathbb{C}} \quad (85)$$

$\mathfrak{u}^\star$  são os esforços ativos aplicados na direção de  $\dot{\mathfrak{q}}^\star$ , sendo  $\mathfrak{q}^\star$  uma matriz coluna de deslocamentos relativos das juntas atuadas. Pode-se provar que:

$$\dot{\mathfrak{q}}^\star = \mathbb{Z} \mathfrak{p}^\# \quad (86)$$

#### 4.4 Inclusão da dinâmica dos atuadores

Para incluir a dinâmica de atuadores do tipo motor DC com redutor acoplado nos modelos de manipuladores seriais e plataformas paralelas, definimos os parâmetros do modelo do sistema motor-redutor:

- $L[H]$ : indutância da armadura.
- $R[\Omega]$ : resistência da armadura.
- $k_w[V \cdot s/rad]$ : constante de força contra-eletromotriz.
- $k_t[N \cdot m/A]$ : constante de torque.
- $J_m[kg \cdot m^2]$ : Momento de inércia do sistema motor-redutor medido em relação ao eixo de saída do redutor.
- $c_m[kg \cdot m^2/s]$ : Coeficiente de atrito viscoso do sistema motor-redutor medido em relação ao eixo de saída do redutor.
- $\gamma_m[N \cdot m]$ : Coeficiente de atrito seco do sistema motor-redutor medido em relação ao eixo de saída do redutor.
- $r$ : relação de redução.

- $\eta$ : eficiência do redutor

O modelo dinâmico do sistema motor-redutor é dado por:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + k_w r \dot{\theta} = v \\ J_m \ddot{\theta} + c_m \dot{\theta} + \gamma_m \text{sign}(\dot{\theta}) = \eta r k_t i - \tau_{ext} \end{cases} \quad (87)$$

Sendo  $i$  a corrente da armadura,  $v$  a tensão de entrada,  $\theta$  o deslocamento angular do eixo do redutor, e  $\tau_{ext}$  o torque externo aplicado pelo mecanismo em que eixo de saída do redutor está acoplado.

Seja  $\nu^*$  o número de juntas atuadas de um mecanismo  $\mathcal{M}$ . Cada um dos  $\nu^*$  motores do sistema é modelado por (87), sendo assim, podemos reescrever (87) de maneira matricial:

$$\begin{cases} \underline{L} \frac{d\mathfrak{i}}{dt} + \underline{R}\mathfrak{i} + \underline{k_w} r \dot{\mathfrak{q}}^* = \mathfrak{v} \\ \underline{J_m} \ddot{\mathfrak{q}}^* + \underline{c_m} \dot{\mathfrak{q}}^* + \underline{\gamma_m} \text{sign}(\dot{\mathfrak{q}}^*) = \underline{\eta r k_t} \mathfrak{i} - \mathfrak{u}^* \end{cases} \quad (88)$$

Isolando  $\mathfrak{u}^*$  e substituindo em (80), temos:

$$\mathbb{M}^\#(\mathfrak{q})\dot{\mathfrak{p}}^\# + \mathfrak{v}^\#(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathbb{F}^\#(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{g}^\#(\mathfrak{q}) = \mathbb{Z}^\top(\mathfrak{q})(\underline{\eta r k_t} \mathfrak{i} - \underline{J_m} \ddot{\mathfrak{q}}^* - \underline{c_m} \dot{\mathfrak{q}}^* - \underline{\gamma_m} \text{sign}(\dot{\mathfrak{q}}^*)) \quad (89)$$

Aplicando (86) em (89), podemos reescrever (89) da seguinte maneira:

$$\mathbb{M}^{\#'}(\mathfrak{q})\dot{\mathfrak{p}}^\# + \mathfrak{v}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathbb{F}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{g}^\#(\mathfrak{q}) = \mathbb{Z}^\top(\mathfrak{q})\underline{\eta r k_t} \mathfrak{i} \quad (90)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}^{\#'} = \mathbb{M}^\# + \mathbb{Z}^\top \underline{J_m} \mathbb{Z} \quad (91)$$

$$\mathfrak{v}^{\#'} = \mathfrak{v}^\# + \mathbb{Z}^\top \underline{J_m} \dot{\mathfrak{p}}^\# \quad (92)$$

$$\mathbb{F}^{\#'} = \mathbb{F}^\# + \mathbb{Z}^\top \underline{c_m} \mathbb{Z} \mathfrak{p}^\# + \mathbb{Z}^\top \underline{\gamma_m} \text{sign}(\mathbb{Z} \mathfrak{p}^\#) \quad (93)$$

Portanto, o modelo do mecanismo  $\mathcal{M}$  considerando a dinâmica dos atuadores é dado por:

$$\begin{cases} \underline{L} \frac{d\mathfrak{i}}{dt} + \underline{R}\mathfrak{i} + \underline{k_w} r \mathbb{Z}(\mathfrak{q}) \mathfrak{p}^\# = \mathfrak{v} \\ \mathbb{M}^{\#'}(\mathfrak{q})\dot{\mathfrak{p}}^\# + \mathfrak{v}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathbb{F}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) + \mathfrak{g}^\#(\mathfrak{q}) = \mathbb{Z}^\top(\mathfrak{q})\underline{\eta r k_t} \mathfrak{i} \end{cases} \quad (94)$$

#### 4.5 Modelo utilizado no projeto de controle

Partindo do modelo (94), apresentado na subseção anterior, serão utilizados alguns artifícios matemáticos a fim de obter um modelo mais conveniente para a realização do projeto de controle.

A entrada do sistema é a matriz coluna  $\mathfrak{v}$ , cujas componentes são de tensões aplicadas nos motores. Como a saída do sistema é a posição e orientação da plataforma, é conveniente que a entrada do sistema

apareça na segunda equação matricial de (94). Para que isso seja possível, isolamos  $\frac{d\mathfrak{g}}{dt}$  na primeira equação de (94) e subtuimos na derivada temporal da segunda equação:

$$\mathbb{M}^{\#'}(\mathfrak{q})\ddot{\mathfrak{p}}^{\#} + \dot{\mathbb{M}}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})\dot{\mathfrak{p}}^{\#} + \dot{\mathfrak{v}}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, \dot{\mathfrak{p}}) + \dot{\mathfrak{f}}^{\#'}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}, \dot{\mathfrak{p}}) + \dot{\mathfrak{g}}^{\#}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) = \dot{\mathbb{Z}}^{\mathsf{T}}(\mathfrak{q})\underline{\eta rk_t \mathfrak{g}} + \mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\mathfrak{q})\underline{(\eta rk_t/L)}(\mathfrak{v} - \underline{R\mathfrak{g}} - \underline{k_w r}\mathbb{Z}(\mathfrak{q})\mathfrak{p}^{\#}) \quad (95)$$

$$\therefore \mathbb{M}^{\#'}\ddot{\mathfrak{p}}^{\#} + \dot{\mathbb{M}}^{\#'}\dot{\mathfrak{p}}^{\#} + \dot{\mathfrak{v}}^{\#'} + \dot{\mathfrak{f}}^{\#'} + \dot{\mathfrak{g}}^{\#} + (\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(R/L) - \dot{\mathbb{Z}}^{\mathsf{T}})\underline{\eta rk_t \mathfrak{g}} + \mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta r^2 k_t k_w/L})\mathbb{Z}\mathfrak{p}^{\#} = \mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})\mathfrak{v} \quad (96)$$

Ainda não é possível isolar  $\mathfrak{v}$  em (96), pois é possível que o mecanismo  $\mathcal{M}$  tenha atuação redundante, o que implica que poderão existir mais incógnitas que equações e consequentemente infinitas soluções para  $\mathfrak{v}$ . Dentro de todas as soluções para  $\mathfrak{v}$  será escolhida aquela que minimiza  $\mathfrak{v}^{\mathsf{T}}\mathbb{Q}\mathfrak{v}$ , sendo  $\mathbb{Q}$  uma matriz simétrica positiva definida, ou seja:

$$\begin{aligned} \underset{\mathfrak{v}}{\text{Min}} \quad & \mathfrak{v}^{\mathsf{T}}\mathbb{Q}\mathfrak{v} \\ \text{tal que} \quad & \mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' \end{aligned} \quad (97)$$

Sendo:

$$\mathfrak{v}' = \ddot{\mathfrak{p}}^{\#} + \dot{\mathbb{M}}^{\#'}\dot{\mathfrak{p}}^{\#} + \dot{\mathfrak{v}}^{\#'} + \dot{\mathfrak{f}}^{\#'} + \dot{\mathfrak{g}}^{\#} + (\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(R/L) - \dot{\mathbb{Z}}^{\mathsf{T}})\underline{\eta rk_t \mathfrak{g}} + \mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta r^2 k_t k_w/L})\mathbb{Z}\mathfrak{p}^{\#} \quad (98)$$

Aplicando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, pode-se dizer que o seguinte problema é equivalente:

$$\underset{\mathfrak{v}, \lambda}{\text{Min}} \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{v}^{\mathsf{T}}\mathbb{Q}\mathfrak{v} + (\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})\mathfrak{v} - \mathfrak{v}')^{\mathsf{T}}\lambda \quad (99)$$

Para solucionar o problema, impõe-se a estacionariedade da função lagrangeana:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{L} = 0 & \Rightarrow \delta \mathfrak{v}^{\mathsf{T}}\mathbb{Q}\mathfrak{v} + \mathfrak{v}^{\mathsf{T}}\mathbb{Q}\delta \mathfrak{v} + (\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})\delta \mathfrak{v})^{\mathsf{T}}\lambda + (\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})\mathfrak{v} - \mathfrak{v}')^{\mathsf{T}}\delta \lambda = 0 \\ & \Rightarrow \delta \mathfrak{v}^{\mathsf{T}}\left((\mathbb{Q} + \mathbb{Q}^{\mathsf{T}})\mathfrak{v} + \underline{(\eta rk_t/L)}\mathbb{Z}\lambda\right) + \delta \lambda^{\mathsf{T}}(\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})\mathfrak{v} - \mathfrak{v}') = 0 \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{Q}$  é simétrica e  $\delta \mathfrak{v}$  e  $\delta \lambda$  são arbitrários, temos:

$$\begin{cases} 2\mathbb{Q}\mathfrak{v} + \underline{(\eta rk_t/L)}\mathbb{Z}\lambda = 0 \\ \mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})\mathfrak{v} - \mathfrak{v}' = 0 \end{cases} \quad (100)$$

Seja  $\Psi$  um complemento ortogonal de  $\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})$ . Multiplicando a primeira equação de (100) por  $\Psi^{\mathsf{T}}$ , temos:

$$\begin{cases} 2\Psi^{\mathsf{T}}\mathbb{Q}\mathfrak{v} + \Psi^{\mathsf{T}}\underline{(\eta rk_t/L)}\mathbb{Z}\lambda = 2\Psi^{\mathsf{T}}\mathbb{Q}\mathfrak{v} = 0 \\ \mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})\mathfrak{v} - \mathfrak{v}' = 0 \end{cases} \quad (101)$$

$$\therefore \left[\frac{\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})}{\Psi^{\mathsf{T}}\mathbb{Q}}\right]\mathfrak{v} = \begin{bmatrix} \mathfrak{v}' \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathfrak{v} = \left[\frac{\mathbb{Z}^{\mathsf{T}}(\underline{\eta rk_t/L})}{\Psi^{\mathsf{T}}\mathbb{Q}}\right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathfrak{v}' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Seja  $\mathbb{A}$  um matriz tal que:

$$\mathfrak{v} = \mathbb{A}\mathfrak{v}' \quad (103)$$

Ou seja:

$$\left[ \frac{\mathbb{Z}^\top (\eta r k_t / L)}{\Psi^\top \mathbb{Q}} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}' \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{A} \mathbf{u}' \quad (104)$$

No caso de não haver atuação redundante:

$$\mathbb{A} = (\mathbb{Z}^\top (\eta r k_t / L))^{-1} \quad (105)$$

Substituindo (98) em (103), temos:

$$\mathbb{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{p}}^\# + \mathbb{h}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{i}) = \mathbf{u} \quad (106)$$

Sendo:

$$\mathbb{H} = \mathbb{A} \mathbb{M}^{\#'} \quad (107)$$

$$\mathbb{h} = \mathbb{A}(\dot{\mathbf{M}}^{\#'} \dot{\mathbf{p}}^\# + \dot{\mathbf{v}}^{\#'} + \dot{\mathbf{f}}^{\#'} + \dot{\mathbf{g}}^\# + (\mathbb{Z}^\top (R/L) - \dot{\mathbb{Z}}^\top) \eta r k_t \mathbf{i} + \mathbb{Z}^\top (\eta r^2 k_t k_w / L) \mathbb{Z} \mathbf{p}^\#) \quad (108)$$

Para o caso da orientação da plataforma de  $\mathcal{M}$  não ser descrita por coordenadas redundantes, temos  $\mathbf{p}^\# = \dot{\mathbf{q}}_0$ , o que leva ao seguinte modelo para o sistema a ser controlado:

$$\begin{cases} \underline{L} \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \underline{R} \mathbf{i} + \underline{k_w r} \mathbb{Z}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{u} \\ \mathbb{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbb{h}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{i}) = \mathbf{u} \end{cases} \quad (109)$$

Para o caso da orientação da plataforma de  $\mathcal{M}$  ser descrita por coordenadas redundantes, temos:

$$\mathbf{p}^\# = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} \dot{\mathbf{q}}_r \\ \dot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{D} & \mathbb{0} \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_r \\ \dot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} = \mathbb{D}' \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (110)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}^\# = \mathbb{D}' \ddot{\mathbf{q}}_0 + 2\dot{\mathbb{D}}' \dot{\mathbf{q}}_0 + \ddot{\mathbb{D}}' \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (111)$$

Substituindo (111) em (106), temos:

$$\mathbb{H}'(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbb{h}'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{i}) = \mathbf{u} \quad (112)$$

Sendo:

$$\mathbb{H}' = \mathbb{H} \mathbb{D}' \quad (113)$$

$$\mathbb{h}' = \mathbb{H}(2\dot{\mathbb{D}}' \dot{\mathbf{q}}_0 + \ddot{\mathbb{D}}' \dot{\mathbf{q}}_0) + \mathbb{h} \quad (114)$$

O que leva ao seguinte modelo para o sistema a ser controlado:

$$\begin{cases} \underline{L} \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \underline{R} \mathbf{i} + \underline{k_w r} \mathbb{Z}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{u} \\ \mathbb{H}'(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbb{h}'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{i}) = \mathbf{u} \\ \mathbb{A}'(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbb{b}'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \end{cases} \quad (115)$$

Sendo  $\mathbb{A}'(\mathbf{q})$  o jacobiano das equações vinculares que relacionam as componentes  $\mathbf{q}_0$ , e  $\mathbb{b}'(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})$  dado por:

$$\mathbb{b}' = -2\dot{\mathbb{A}}' \dot{\mathbf{q}}_0 - \ddot{\mathbb{A}}' \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (116)$$

Vale observar que  $\mathbb{A}'^\top$  é complemento ortogonal de  $\mathbb{D}'$ , e como  $\mathbb{H}$  não é singular, também é complemento ortogonal de  $\mathbb{H}'$ .

#### 4.6 Projeto do Controlador

Esta subseção é destinada ao projeto de controladores não-lineares robustos, destinados ao controle de posição e orientação de plataformas paralelas descritas pelos modelos (109) e (115), utilizando a técnica de controle por modos deslizantes.

Sejam  $\underline{k}_p$  e  $\underline{k}_v$  matrizes diagonais positivas definidas,  $\mathbf{q}_0^\diamond$  uma matriz coluna de sinais referência, e  $\mathbf{s}$  uma matriz coluna dada por:

$$\mathbf{s} = -(\ddot{\mathbf{e}} + \underline{k}_v \dot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p \mathbf{e}) \quad (117)$$

Sendo:

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_0^\diamond - \mathbf{q}_0 \quad (118)$$

Seja  $V(\mathbf{s})$  um função de Lyapunov dada por:

$$V(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad (119)$$

Pela teoria de estabilidade de Lyapunov, se  $\dot{V} < 0 \ \forall \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{s}$  converge para  $\mathbf{0}$  independentemente das condições iniciais do sistema. Para que isso seja possível, é imposta a seguinte condição:

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \leq -\varkappa \mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s}) \quad (120)$$

Sendo  $\varkappa$  uma constante positiva. Repare que  $\mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s})$  é a soma dos módulos das componentes de  $\mathbf{s}$ , o que implica que  $-\varkappa \mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s}) < 0 \ \forall \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ . Repare também que se  $\dot{\mathbf{s}} = -\varkappa \text{sign}(\mathbf{s})$ , (120) é satisfeita e cada componente de  $\mathbf{s}$  respeita a EDO  $\dot{s}_i = -\varkappa \text{sign}(s_i)$ , a qual converge para zero em um tempo finito de  $t = \frac{|s_i(0)|}{\varkappa}$ . Sendo assim, pode-se dizer que se (120) for satisfeita,  $\mathbf{s}$  converge para zero em tempo finito e, a partir desse momento, o erro de controle  $\mathbf{e}$  converge assintoticamente para zero.

O projeto do controlador é feito utilizando a condição (120), a qual é conhecida como condição de escorregamento. Assim, derivando (117), temos:

$$\dot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{q}}_0 - (\ddot{\mathbf{q}}_0^\diamond + \underline{k}_v \dot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p \mathbf{e}) \quad (121)$$

Substituindo (121) em (120), temos:

$$\mathbf{s}^T (\ddot{\mathbf{q}}_0 - (\ddot{\mathbf{q}}_0^\diamond + \underline{k}_v \dot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p \mathbf{e}) + \varkappa \text{sign}(\mathbf{s})) \leq 0 \quad (122)$$

A partir de agora o projeto do controlador será dividido em dois casos:

i)  $\mathbf{q}_0$  é um conjunto de coordenadas independentes

Nesse caso, o modelo do sistema é dado por (109), ou seja:

$$\begin{cases} \underline{L} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \underline{R} \dot{\mathbf{q}} + \underline{k}_w r \mathbb{Z}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{u} \\ \mathbb{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbb{h}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{i}) = \mathbf{u} \end{cases}$$

Isolando  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  na segunda equação de (109) e substituindo em (122), temos:

$$\mathbf{s}^T (\mathbb{H}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbb{h}) - (\ddot{\mathbf{q}}_0^\diamond + \underline{k}_v \dot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p \mathbf{e}) + \varkappa \text{sign}(\mathbf{s})) \leq 0 \quad (123)$$

Para satisfazer (123), é utilizada a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{h}} + \hat{\mathbb{H}}(\ddot{\mathbf{q}}_0^\diamond + \underline{k}_v\ddot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p\dot{\mathbf{e}} - \underline{k}\text{sign}(\mathbf{s})) \quad (124)$$

Sendo  $\hat{\mathbf{h}}$  e  $\hat{\mathbb{H}}$  estimadores de  $\mathbf{h}$  e  $\mathbb{H}$ , respectivamente. Substituindo (124) em (123), temos:

$$\mathbf{s}^\top (\delta + \Delta(\ddot{\mathbf{q}}_0^\diamond + \underline{k}_v\ddot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p\dot{\mathbf{e}}) + \varkappa \text{sign}(\mathbf{s}) - (\Delta + \mathbb{1})\underline{k}\text{sign}(\mathbf{s})) \leq 0 \quad (125)$$

Sendo:

$$\delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{i}) = \mathbb{H}^{-1}(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}) \quad (126)$$

$$\Delta(\mathbf{q}) = \mathbb{H}^{-1}\hat{\mathbb{H}} - \mathbb{1} \quad (127)$$

Pode-se dizer que (125) é sempre satisfeita se:

$$(\Delta + \mathbb{1}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq |\delta + \Delta(\ddot{\mathbf{q}}_0^\diamond + \underline{k}_v\ddot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p\dot{\mathbf{e}}) + \varkappa \text{sign}(\mathbf{s})| \quad (128)$$

Aplicando a desigualdade triangular em cada componente do lado esquerdo de (128), temos:

$$|\delta + \Delta(\ddot{\mathbf{q}}_0^\diamond + \underline{k}_v\ddot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p\dot{\mathbf{e}}) + \varkappa \text{sign}(\mathbf{s})| \leq |\delta|_{\max} + |\Delta|_{\max}|\ddot{\mathbf{q}}_0^\diamond + \underline{k}_v\ddot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p\dot{\mathbf{e}}| + \text{diag}(\varkappa\mathbb{1}) \quad (129)$$

Portanto, se a seguinte inequação matricial for respeitada:

$$(\Delta + \mathbb{1}) \cdot \text{diag}(\underline{k}) \geq |\delta|_{\max} + |\Delta|_{\max}|\ddot{\mathbf{q}}_0^\diamond + \underline{k}_v\ddot{\mathbf{e}} + \underline{k}_p\dot{\mathbf{e}}| + \text{diag}(\varkappa\mathbb{1}) \quad (130)$$

(125) será respeitada, o que garante que a condição de escorregamento (120) seja respeitada e consequentemente garante a convergência do erro de controle  $\mathbf{e}$  para zero.

Uma possível solução para (130), válida apenas se o somatório de cada uma das linhas de  $|\Delta|_{\max}$  for menor do que 1, é dada por:

$$k = \max_{1 \leq i \leq \nu_0} \left( \frac{|\delta_i|_{\max} + \varkappa}{1 - \sum_{j=1}^{\nu_0} |\Delta_{i,j}|_{\max}} \right) + \sum_{\kappa=1}^{\nu_0} \max_{1 \leq i \leq \nu_0} \left( \frac{|\Delta_{i,\kappa}|_{\max}}{1 - \sum_{j=1}^{\nu_0} |\Delta_{i,j}|_{\max}} \right) \quad (131)$$

#### 4.7 Controle por modos deslizantes

Nesta subseção será feita uma breve introdução ao controle por modos deslizantes. Esta técnica de controle não-linear robusto é a base para o desenvolvimento da metodologia de projeto de controle para mecanismos paralelos e para o desenvolvimento de leis de controle adequadas para sistemas descritos por coordenadas redundantes. Nesta introdução, o tema será explorado apenas para o controle de sistemas de segunda ordem, sem incertezas paramétricas.

Seja um sistema dinâmico dado pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{u} \quad (132)$$

Definimos a seguinte superfície, chamada de superfície de escorregamento:

$$s(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = -(\dot{\mathbf{e}} + \lambda \mathbf{e}) = 0, \lambda > 0 \quad (133)$$

Sendo  $e = x_d - x$  o erro de controle e  $x_d$  o sinal de referência. Repare que se o sistema estiver na superfície de escorregamento, temos:

$$\dot{e} + \lambda e = 0 \Rightarrow e(t) = C e^{-\lambda t} \quad (134)$$

Sendo assim, o erro cai exponencialmente para zero, com constante de tempo  $1/\lambda$ .

Para encontrar a lei de controle que leva o sistema à superfície de escorregamento, parte-se da definição de  $s$ :

$$s = -(\dot{e} + \lambda e)$$

Derivando no tempo:

$$\dot{s} = -(\ddot{e} + \lambda \dot{e}) = \ddot{x} - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \quad (135)$$

Substituindo (132) em (135):

$$\dot{s} = u - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \quad (136)$$

Utizando a seguinte lei de controle:

$$u = \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} - k \operatorname{sign}(s), \quad k > 0 \quad (137)$$

Temos:

$$\dot{s} = -k \operatorname{sign}(s) \quad (138)$$

Supondo que o sistema começa em  $s(0) = s_0 > 0$ . Resolvendo a EDO para  $s > 0$ :

$$\dot{s} = -k \Rightarrow s = -kt + c$$

$$s(0) = s_0 \Rightarrow c = s_0$$

$$\therefore s = s_0 - kt, \quad s > 0$$

Em  $t = t_s = \frac{|s_0|}{k}$ ,  $s$  chega em zero. Resolvendo a EDO para  $s(t_s) = 0$ :

$$\dot{s} = 0 \Rightarrow s = c$$

$$s(t_s) = 0 \Rightarrow c = 0$$

Portanto, para a solução da EDO para  $s(0) = s_0 > 0$  é

$$s(t) = \begin{cases} s_0 - kt, & t < t_s \\ 0, & t \geq t_s \end{cases} \quad (139)$$

Resolvendo para  $s(0) = s_0 < 0$ , temos um resultado análogo:

$$s(t) = \begin{cases} s_0 + kt, & t < t_s \\ 0, & t \geq t_s \end{cases} \quad (140)$$

Assim, pode-se concluir que a EDO (138) converge para  $s = 0$ , independente da condição inicial. Portanto, temos que a lei de controle (137) faz com que o sistema representado por (132) siga o sinal de referência, pois o erro de controle converge para zero.



#### 4.8 Controle por modos deslizantes estendido

Esta subseção tem o intuito de apresentar o desenvolvimento da lei de controle adequada para sistemas descritos por coordenadas redundantes desenvolvida.

Seja o modelo de um sistema mecânico multi-corpos descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \mathbb{C}^T(\mathbf{q}) \left( \mathbb{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{w}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{z}(\mathbf{q}) \right) = \mathbf{u} \\ \mathbb{A}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (141)$$

De maneira matricial compacta:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} - \mathbb{C}^T(\mathbf{w} + \mathbf{z}) \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} \quad (142)$$

Gostaria que  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$ , sendo  $\mathbf{v}$  uma entrada de controle. Para que isso aconteça, utilizamos a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{u} = \mathbb{C}^T(\mathbb{M}\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z}) \quad (143)$$

Como queremos que  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}$  tem restrições,  $\mathbf{v}$  deve respeitar as mesmas restrições, ou seja:

$$\mathbb{A}\mathbf{v} + \mathbb{b} = \mathbf{0} \quad (144)$$

Aplicando a lei de controle (143) e a restrição (144) em (142), temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T(\mathbb{M}\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{z}) - \mathbb{C}^T(\mathbf{w} + \mathbf{z}) \\ \mathbb{A}\mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \mathbf{v} \\ \mathbb{A}\mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Como  $\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T \mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}$  é não singular:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (145)$$

Seja  $\mathbf{v}'$  dado pela lei de controle por modos deslizantes:

$$\mathbf{v}' = \ddot{\mathbf{q}}_{n,d} + \lambda \dot{\mathbf{e}} + k \text{sign}(\dot{\mathbf{e}} + \lambda \mathbf{e}) \quad (146)$$

Sendo  $\mathbf{e} = \mathbf{q}_{n,d} - \mathbf{q}$  o erro de controle e  $\mathbf{q}_{n,d}$  o sinal de referência. Se não houvesse restrições, poderíamos fazer  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$  :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \Rightarrow \ddot{\mathbf{e}} + \lambda \dot{\mathbf{e}} + k \text{sign}(\dot{\mathbf{e}} + \lambda \mathbf{e}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{s}} = -k \text{sign}(\mathbf{s})$$

Isso garantiria que  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$  quando  $t \rightarrow \infty$  para quaisquer condições iniciais, como visto na seção anterior.

Como temos restrições em  $\mathbf{v}$ , procuramos  $\mathbf{v}$  mais próximo possível de  $\mathbf{v}'$  através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{v}} \quad & (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^T \mathbb{M}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \\ \text{tal que} \quad & \mathbb{A}\mathbf{v} + \mathbb{b} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (147)$$

Como  $\mathbb{M}$  é não-negativa definida, temos que  $(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^T \mathbb{M}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \geq 0$  para qualquer valor de  $\mathbf{v}$ .

Aplicando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, pode-se dizer que o seguinte problema é equivalente:

$$\text{Min}_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}} \quad L = (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^T \mathbb{M}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (\mathbb{A}\mathbf{v} + \mathbb{b})^T \boldsymbol{\lambda} \quad (148)$$

Para solucionar o problema, impõe-se a estacionariedade da função lagrangeana:

$$\begin{aligned}\delta L = 0 &\Rightarrow \delta \mathbf{v}^T \mathbb{M}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^T \mathbb{M} \delta \mathbf{v} + (\mathbb{A} \delta \mathbf{v})^T \boldsymbol{\lambda} + (\mathbb{A} \mathbf{v} + \mathbb{b})^T \delta \boldsymbol{\lambda} = 0 \\ &\Rightarrow \delta \mathbf{v}^T \left( (\mathbb{M} + \mathbb{M}^T)(\mathbf{v} - \mathbf{v}') + \mathbb{A}^T \boldsymbol{\lambda} \right) + \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbb{A} \mathbf{v} + \mathbb{b}) = 0\end{aligned}$$

Como  $\mathbb{M}$  é simétrica e  $\delta \mathbf{v}$  e  $\delta \boldsymbol{\lambda}$  são arbitrários, temos:

$$\begin{cases} 2\mathbb{M}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') + \mathbb{A}^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \\ \mathbb{A} \mathbf{v} + \mathbb{b} = 0 \end{cases} \quad (149)$$

Como  $\mathbb{C}$  é o complemento ortogonal de  $\mathbb{A}$ , multiplicando a primeira equação de (149) por  $\mathbb{C}^T$ , temos:

$$\begin{aligned}2\mathbb{C}^T \mathbb{M}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') + \mathbb{C}^T \mathbb{A}^T \boldsymbol{\lambda} &= 0 \Rightarrow \mathbb{C}^T \mathbb{M}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = 0 \\ \therefore \mathbb{C}^T \mathbb{M} \mathbf{v} &= \mathbb{C}^T \mathbb{M} \mathbf{v}'\end{aligned} \quad (150)$$

Sendo assim, temos que a lei de controle que torna o sistema em malha fechado o mais próximo possível de  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}'$ , segundo o critério de otimização adotado, é:

$$\mathbf{u} = \mathbb{C}^T (\mathbb{M} \mathbf{v}' + \mathbf{w} + \mathbf{z}) \quad (151)$$

## 5 Publicações

A partir dos resultados obtidos no trabalho de formatura realizado na graduação, foi escrito um artigo denominado "Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies" [3], o qual foi escrito pelo aluno em coautoria com Eng. Guilherme Martinho Dobrianskyj e seu orientador, Prof. Dr. Tarcísio Antônio Hess Coelho. Foi aceito e apresentado no BioRob 2014 (IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics) na seção de posters, no dia 15 de agosto de 2014. O artigo pode ser acessado por <http://dx.doi.org/10.1109/BIO ROB.2014.6913880>.

Um capítulo do livro *Dynamic balancing of mechanisms and synthesizing of parallel robots* (editado pelo Prof. Dr. Dan Zhang da Universidade do Instituto de Tecnologia de Ontario e a ser publicado pela editora Springer), denominado "Dynamic modelling and control of balanced parallel mechanisms" foi escrito em coautoria com o aluno de doutorado direto Renato M. M. Orsino e com o Prof. Dr. Tarcísio Antonio Hess Coelho. Este capítulo de livro trata do uso de uma metodologia de modelagem modular para o balanceamento adaptativo e desenvolvimento de algoritmos de controle para mecanismos robóticos paralelos. Encontra-se, atualmente, em fase de revisão pelos editores.

## 6 Disciplinas de pós-graduação

Ao longo do programa o aluno já cumpriu 40 créditos, tendo cursado 5 disciplinas de pós-graduação:

- PME-5004 — Complementos de Matemática I
- PMR-5010 — Elementos Finitos em Sistemas Multifísicos: Fundamentos
- PMR-5215 — Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos
- PMR-5238 — Análise e Síntese de Mecanismo Planos e Tridimensionais
- PMR-5211 — Mecânica dos Sólidos Experimental

Ressalta-se que em todas o aluno obteve conceito A, demonstrando bom aproveitamento.

Além disso, pretende-se cursar a seguinte disciplina no primeiro quadrimestre de 2015:

- PMR-5234 — Técnicas de Ultra-Som e suas aplicações na Indústria e na Medicina

## 7 Cronograma de Atividades do Projeto

Serão realizados os seguintes passos para a realização da proposta:

- (1) Cumprimentos dos créditos de pós-graduação.
- (2) Pesquisa e revisão bibliográfica da literatura para o desenvolvimento teórico.
- (3) Estudo dos aprimoramentos dos métodos de Lagrange, Kane e Gibbs-Appell, desenvolvidos no grupo de pesquisa do professor Dr. Tarcísio Coelho.
- (4) Elaboração de algoritmo de modelagem dinâmica multicorpos baseados nos aprimoramentos dos métodos estudados.
- (5) Aplicação do algoritmo desenvolvido em diferentes mecanismos.
- (6) Simulação da dinâmica inversa para os mecanismos escolhidos.
- (7) Estudo de técnicas de controle não-linear.
- (8) Desenvolvimento de metodologia de projeto de controlador não-linear robusto, voltada à mecanismos paralelos com incertezas paramétricas.
- (9) Simulação da dinâmica direta utilizando as técnicas de controle estudadas.
- (10) Desenvolvimento de leis de controle que permitam o controle de mecanismos descritos por modelos com coordenadas redundantes.
- (11) Simulação da dinâmica direita utilizando as técnicas de controle com variáveis redundantes.
- (12) Comparação e análise dos resultados obtidos utilizando as leis de controles implementadas em simulação.
- (13) Avaliação geral dos resultados.
- (14) Preparo da dissertação.

Aqui segue um cronograma estimado para realização das atividades propostas:

## References

- [1] Rynaldo Z. H. de Almeida. Modelagem dinâmica e controle e robô manipulador de arquitetura paralela assimétrica de três graus de liberdade. *Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- [2] André G. Coutinho and Guilherme M. Dobriankyj. Plataforma robótica para reabilitação do membro superior humano. *Tese (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos*, 2013.
- [3] Guilherme M. Dobriankyj, André G. Coutinho and Tarcísio A. Hess Coelho. Development of a controller for a 3-DOF robotic platform for user interaction in rehabilitation therapies. *Biomedical Robotics and Biomechatronics (2014 5th IEEE RAS & EMBS International Conference on)*, 1(1):819 – 824, 2014.
- [4] Renato M. M. Orsino and Tarcísio A. Hess Coelho. Metodologia para Análise e Síntese de Mecanismos. *Material de apoio para as disciplinas PMR2430 e PMR2331 - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*, 2013.
- [5] J.J. Craig. *Introduction to robotics: mechanics and control*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: control engineering. Pearson/Prentice Hall, 2005.

Table 1: Cronograma – Planejamento de Atividades por quadrimestre

Ativ./Quad.	1º/14	2º/14	3º/14	1º/15	2º/15	3º/15
(1)	■		■	■		
(2)	■					
(3)	■	■				
(4)		■	■			
(5)		■	■	■		
(6)				■		
(7)		■				
(8)			■			
(9)				■		
(10)			■	■		
(11)				■	■	
(12)					■	■
(13)					■	■
(14)					■	■

- [6] Elzbieta Jarzebowska. Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(12):e118 – e131, 2009.
- [7] J.P. Merlet. Still a long way to go on the road for parallel mechanisms. In *ASME DETC Conference, Montreal, 2002*, 2002.
- [8] Renato M. M. Orsino and Tarcisio A. Hess Coelho. A contribution for developing more efficient dynamic modelling algorithms of parallel robots. *International Journal of Mechanisms and Robotic Systems*, 1(1):15 – 34, 2013.
- [9] Zubizarreta, A. and Cabanes, I. and Marcos, M. and Pinto, C. and Portillo, E. Extended CTC control for parallel robots. *Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA), 2010 IEEE Conference on*, 2010.
- [10] Bloch, A.M. and Reyhanoglu, M. and McClamroch, N.H. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 1992.