Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Trabalho 6 - 1º semestre de 2012

Questão 1. (2 pontos) Calcule

$$\iint_s (\ln(1+z^8) + 2x\sin(2y))dy \wedge dz + (\cos(2y))dz \wedge dx + (z^2 - yx^2)dx \wedge dy$$

onde S é parte da superfície $z = 4 - 2x^2 - y^2$ limitada pelo plano $z = 0$, orientada com $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$. (atenção: a superfície S não é fechada).

Solução:

Seja S_1 a superfície plana que fecha a superfície S.

Como o domínio de $\vec{F}$ não apresenta singularidades na região V definida pelo interior de $S \cup S_1$, e orientando para fora a normal da superfície fechada $S \cup S_1$, pelo Teorema de Gauss:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS + \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iiint_V div(\vec{F})\, dx\, dy\, dz$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = -\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS + \iiint_V div(\vec{F})\, dx\, dy\, dz \tag{1}$$

figura1.png

Figura 1: Região V e superfícies S e S_1

A superfície S_1 pode ser facilmente parametrizada da seguinte forma:

$$\sigma(u, v) = (u, v, 0)$$

Para encontrar os valores de (u, v) em que a superfície S_1 é definida, encontramos a intersecção do plano com o parabolóide. Assim temos:

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = 4 - 2x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x^2 + y^2 = 4$$

Sendo assim, temos que a região R na qual a superfície S_1 é definida é:

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2u^2 + v^2 \leq 4\}$$

Calculando o vetor $\sigma_x \wedge \sigma_y$:

$$\sigma_x = (1, 0, 0)$$

$$\sigma_y = (0, 1, 0)$$

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = (0, 0, 1)$$

Como a normal da superfície S_1 é para baixo e $\sigma_x \wedge \sigma_y$ aponta para cima, invertemos o sinal de $\sigma_x \wedge \sigma_y$ para calcular a integral de superfície. Assim:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_R (0 + 2u\sin(2v), \cos(2v), 0 - vu^2) \cdot (0,0,-1)\, du\, dv = \iint_R vu^2\, du\, dv$$

Como a região R é simetríca em v e o integrando é uma função ímpar em v

$$\iint_R \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = 0 \tag{2}$$

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2\sin(2y) - 2\sin(2y) + 2z = 2z$$

$$\iiint_V div(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \iint_R \Big(\int_0^{4-2x^2-y^2} 2z\, dz \Big)\, dx\, dy = \iint_R \left(z^2 \Big|_0^{4-2x^2-y^2} \right) dx\, dy$$

$$= \iint_R (4 - 2x^2 - y^2)^2\, dx\, dy$$

Realizando a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases} \tag{3}$$

$$|J| = 2\sqrt{2}\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\sqrt{2}\rho(4 - 4\rho^2\cos^2\theta - 4\rho^2\sin^2\theta)^2\, d\rho\, d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho(4 - 4\rho^2)^2\, d\rho\, d\theta$$

$$2\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot 16 \int_0^1 \rho(1 - 2\rho^2 + 1\rho^4)\, d\rho = 64\sqrt{2}\pi \Big(\frac{\rho^2}{2} - 2\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^6}{6} \Big)_0^1$$

$$\therefore \iiint_R div(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3} \tag{4}$$

Substituindo (2) e (4) em (1):

$$\iint_S \vec{F}\vec{N}\, dS = -0 + \frac{64\sqrt{2}\pi}{3} = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$$

Questão 2. (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ sendo $\vec{F} = \left(e^{z^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}, x^2 + \frac{x}{x^2+y^2}, 2xze^{z^2}\right)$ e γ a intersecção de $z = x^2+y^2$ e $z = 4-x^2$, orientada de modo que a projeção no plano $0xy$ é percorrida no sentido anti-horário.

Solução:

Podemos decompor $\vec{F}$ na soma de dois campos vetoriais $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, sendo:

$$\vec{F_1} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right); \vec{F_2} = (e^{z^2}, x^2, 2xze^{z^2})$$

Calculando os rotacionais de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$:

$$Rot(\vec{F_1}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \Big(\frac{1\cdot(4x^2+y^2) - x\cdot(8x)}{(4x^2+y^2)^2} - \frac{(-1)\cdot(4x^2+y^2) - (-y)\cdot(2y)}{(4x^2+y^2)^2}\Big)\hat{k} = \vec{0}$$

$$Rot(\vec{F_2}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{z^2} & x^2 & 2xze^{z^2} \end{vmatrix} = 0\vec{i} + (2ze^{z^2} - 2ze^{z^2})\vec{j} + 2x\vec{k} = 2x\vec{k}$$

Como γ é uma curva fechada e, o domínio de $\vec{F_2}$ é simplesmente conexo, podemos utilizar o teorema de Stokes para calcular $\int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r}$, escolhendo como superfície $z = 4-x^2$ limitada por $z = x^2+y^2$, a qual chamaremos de S_2 .

Como a projeção de γ em $0xy$ é no sentido-horário, temos que a normal induzida pelo Teorema de Stokes em S_2 tem a componente na direção $\vec{k}$ positiva. Assim, parametrizando S_2:

$$\sigma(u,v) = (u, v, 4-u^2)$$

Para encontrar os valores de (u,v) em que a superfície S_2 é definida, encontramos a intersecção da calha com o parabolóide. Assim temos:

$$\begin{cases} z = 4-x^2 \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x^2+y^2 = 4$$

Sendo assim, temos que a região R_2 na qual a superfície S_2 é definida é:

$$R_2 = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 2u^2+v^2 \leq 4\}$$

Calculando o vetor $\sigma_u \wedge \sigma_v$:

$$\sigma_u = (1, 0, -2u)$$

$$\sigma_v = (0, 1, 0)$$

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (2u, 0, 1)$$

Como $\sigma_u \wedge \sigma_v$ está no mesmo sentido da normal de S_2, aplicando o Teorema de Stokes, temos:

$$\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} Rot(\vec{F_1}) \cdot \vec{N}\, dS = \iint_{R_2} (0, 0, 2u) \cdot (2u, 0, 1)\, du\, dv = \iint_{R_2} 2u\, du\, dv$$

Como a região R_2 é simetríca em u e o integrando é uma função ímpar em u:

$$\iint_{R_2} 2u\, du\, dv \ = 0 \Rightarrow \int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = 0$$

Assim, como $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r}$, temos que $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r}$.

Para calcular $\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r}$, não podemos escolher uma superfície que seja cortada pelo eixo z quando aplicarmos o Teorema de Stokes, pois $\vec{F_1}$ não é definido para pontos do tipo $(0, 0, z), z \in \mathbb{R}$.

Sendo assim, escolhemos a superfície cilindrica $2x^2 + y^2 = 4$ limitada por $z = 0$ e $z = 4 - x^2$, a qual chamaremos de S_1 sendo γ e γ_1 os bordos do cilindro. Como a projeção de γ em $0xy$ é no sentido-horário, temos que a normal induzida pelo Teorema de Stokes em S_1 aponta para dentro do cilindro, o que induz uma orientação no sentido horário para γ_1 . Assim, aplicando o Teorema de Stokes:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} Rot(\vec{F_1}) \cdot \vec{N}\, dS = 0$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_1} \vec{F_1} \cdot d\vec{r}$$

A região interna a γ_1 contém o ponto $(0, 0, 0)$, o qual é uma singularidade de $\vec{F_1}$. Então adicionamos a curva $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0), t \in [0, 2\pi]$ a qual isola a singularidade e não se cruza com γ_1.

Como γ_1 e γ_2 estão no sentido contrário ao induzido pelo Teorema de Green, para aplicar o teorema invertemos os sinais das integrais de linha. Assim, aplicando o teorema de Green:

$$-\int_{\gamma_1} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \iint_R Rot(\vec{F_1}) \cdot \hat{k}\, dx\, dy = 0$$

$$\therefore \int_{\gamma_1} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_2} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, 0 \right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t \right) dt = -2\pi$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

Questão 3. (2 pontos) Sejam $\vec{F} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, \cos(z^4)\right)$ e γ a intersecção de $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ e $z + y + 2x = 1$, orientada de modo que a projeção no plano $0xy$ é percorrida no sentido anti-horário. Um aluno utilizou o Teorema de Stokes para calcular a integral $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Obteve $Rot(\vec{F}) = 0$ e usando S a parte do plano limitado por $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ concluiu que

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S Rot(\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dS = 0.$$

No entanto o aluno errou o exercício.

(a) Comente o(s) erro(s) cometidos pelo aluno e resolva o exercício corretamente.

(b) O campo é conservativo? Justifique sua resposta.

Solução:

(a) Para calcular $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, não podemos escolher uma superfície que seja cortada pelo eixo z quando aplicamos o Teorema de Stokes, pois $\vec{F}$ não é definido para pontos do tipo $(0,0,z), z \in \mathbb{R}$. O erro do aluno consiste em escolher uma superfície que é cortada pelo eixo z.

Aqui segue a resolução correta do problema em questão:

Podemos decompor $\vec{F}$ na soma de dois campos vetoriais $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, sendo:

$$\vec{F_1} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right); \vec{F_2} = (0, 0, \cos(z^4))$$

Calculando os rotacionais de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$:

$$Rot(\vec{F_1}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1 \cdot (4x^2+y^2) - x \cdot (8x)}{(4x^2+y^2)^2} - \frac{(-1) \cdot (4x^2+y^2) - (-y) \cdot (2y)}{(4x^2+y^2)^2}\right)\hat{k} = \vec{0}$$

$$Rot(\vec{F_2}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \cos(z^4) \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Como γ é uma curva fechada e, o domínio de $\vec{F_2}$ é simplesmente conexo e, $Rot(\vec{F_2}) = \vec{0}$, temos que $\displaystyle\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = 0$.

Como o rotacional de $\vec{F_1}$ é nulo, não precisaremos nos preocupar com a integral de superfície que aparecerá no teorema de Stokes. Sendo assim, precisamos apenas escolher uma superfície S que não seja cortada pelo eixo z para podermos aplicar o teorema. Uma superfície conviente seria uma superfície cilindrica limitada inferiormente por $z = 0$ e superiormente por γ, a qual podemos achar fazendo a intersecção de $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ e $z = 1 - 2x - y$:

$$\begin{cases} z = x^2 + \frac{y^2}{4} \\ z = 1 - 2x - y \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 - 2x - y \Rightarrow x^2 + 2x + \frac{y^2}{4} + y = 1$$

$$(x+1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Seja γ_1 o outro bordo do cilindro. Como a projeção de γ em $0xy$ é no sentido-horário, temos que a normal induzida pelo Teorema de Stokes em S aponta para dentro do cilindro, o que induz uma orientação no sentido horário para γ_1 . Assim, aplicando o Teorema de Stokes:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \iint_S Rot(\vec{F_1}) \cdot \vec{N}\, dS = 0$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_1} \vec{F_1} \cdot d\vec{r}$$

A região interna a γ_1 contém o ponto $(0,0,0)$, o qual é uma singularidade de $\vec{F}$. Então adicionamos a curva $\gamma_2(t) = a(\cos t, \sin t, 0), t \in [0, 2\pi]$, com a suficientemente pequeno de modo que γ_2 não se cruze com γ_1, isolando assim a singularidade.

Como γ_1 e γ_2 estão no sentido contrário ao induzido pelo Teorema de Green, para aplicar o teorema invertemos os sinais das integrais de linha. Assim, aplicando o teorema de Green:

$$-\int_{\gamma_1} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \iint_R Rot(\vec{F_1}) \cdot \hat{k}\, dx\, dy = 0$$

$$\therefore \int_{\gamma_1} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_2} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{-a \sin t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}, \frac{a \cos t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}, 0\right) \cdot (-a \sin t, a \cos t, 0)\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = -2\pi$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

(b) O campo não é conservativo, pois no item (a) calculamos a integral de linha de $\vec{F}$ em uma curva fechada e o resultado foi dirente de zero.