Adaptative balancing techniques applied to parallel mechanisms

Tarcisio Antonio Hess Coelho [a], Renato Maia Matarazzo Orsino [b], André Garnier Coutinho [a]

[a] *Department of Mechatronics and Mechanical Systems Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil. E-mail: tarchess@usp.br*
[b] *Department of Mechanical Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil.*

SUMMARY

KEYWORDS:

0.1 Control

Controle por modos deslizantes

Nesta seção será feita uma breve introdução ao controle por modos deslizantes. O tema será explorado apenas para o controle de sistemas de segunda ordem, sem incertezas paramétricas, para não fugir do escopo do capítulo.

Seja um sistema dinâmico dado pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} = u \tag{1}$$

Definimos a seguinte superfície, chamada de superfície de escorregamento:

$$s(e, \dot{e}) = -(\dot{e} + \lambda e) = 0,\ \lambda > 0 \tag{2}$$

Sendo $e = x_d - x$ o erro de controle e x_d o sinal de referência. Repare que se o sistema estiver na superfície de escorregamento, temos:

$$\dot{e} + \lambda e = 0 \Rightarrow e(t) = Ce^{-\lambda t} \tag{3}$$

Sendo assim, o erro cai exponencialmente para zero, com constante de tempo $1/\lambda$.

Para encontrar a lei de controle que leva o sistema à superfície de escorregamento, parte-se da definição de s:

$$s = -(\dot{e} + \lambda e)$$

Derivando no tempo:

$$\dot{s} = -(\ddot{e} + \lambda \dot{e}) = \ddot{x} - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \tag{4}$$

Substituindo (1) em (4):

$$\dot{s} = u - \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} \tag{5}$$

Utizando a seguinte lei de controle:

$$u = \ddot{x}_d + \lambda \dot{e} - k\,\mathsf{sign}(s),\ k > 0 \tag{6}$$

Temos:

$$\dot{s} = -k\,\mathsf{sign}(s) \tag{7}$$

Supondo que o sistema começa em $s(0) = s_0 > 0$. Resolvendo a EDO para $s > 0$:

$$\dot{s} = -k \Rightarrow s = -kt + C$$
$$s(0) = s_0 \Rightarrow C = s_0$$
$$\therefore s = s_0 - kt,\ s > 0$$

Em $t = t_s = \frac{|s_0|}{k}$, s chega em zero. Resolvendo a EDO para $s(t_s) = 0$:

$$\dot{s} = 0 \Rightarrow s = C$$
$$s(t_s) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Portanto, para a solução da EDO para $s(0) = s_0 > 0$

$$s(t) = \begin{cases} s_0 - kt, & t < t_s \\ 0, & t \geq t_s \end{cases} \tag{8}$$

Resolvendo para $s(0) = s_0 < 0$, temos um resultado análogo:

$$s(t) = \begin{cases} s_0 + kt, & t < t_s \\ 0, & t \geq t_s \end{cases} \tag{9}$$

Assim, pode-se concluir que a EDO (7) converge para $s = 0$, independente da condição inicial. Portanto, temos que a lei de controle (6) faz o sistema (1) siga o sinal de refencia, pois o erro de controle converge para zero.

Controle por modos deslizantes extendido

Modelo do mecanismo:

$$\begin{cases} \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{q}_n)\Big(\mathbb{M}_n(\mathbb{q}_n)\ddot{\mathbb{q}}_n + \mathbb{w}_n(\mathbb{q}_n, \dot{\mathbb{q}}_n) + \mathbb{z}_n(\mathbb{q}_n)\Big) = \mathbb{u}_n \\ \mathbb{A}_n\ddot{\mathbb{q}}_n = -\mathbb{b}_n(\mathbb{q}_n, \dot{\mathbb{q}}_n) \end{cases}$$

De maneira matricial compacta:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top\mathbb{M}_n \\ \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \ddot{\mathbb{q}}_n = \begin{bmatrix} \mathbb{u}_n - \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n) \\ -\mathbb{b}_n \end{bmatrix}$$

Gostaria que $\ddot{\mathbb{q}}_n = \mathbb{v}_n$, sendo $\mathbb{v}_n'$ uma entrada de controle. Para que isso aconteça, utilizamos a seguinte lei de controle:

$$\mathbb{u}_n = \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{M}_n\mathbb{v}_n + \mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n)$$

Como queremos que $\ddot{\mathbb{q}}_n = \mathbb{v}_n$ e $\ddot{\mathbb{q}}_n$ tem restrições, $\mathbb{v}_n$ deve respeitar as mesmas restições, ou seja:

$$\mathbb{A}_n\mathbb{v}_n = -\mathbb{b}_n$$

Aplicando a lei de controle, temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top\mathbb{M}_n \\ \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \ddot{\mathbb{q}}_n = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{M}_n\mathbb{v}_n + \mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n) - \mathbb{C}_n^\top(\mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n) \\ \mathbb{A}_n\mathbb{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top\mathbb{M}_n\mathbb{v}_n \\ \mathbb{A}_n\mathbb{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_n^\top\mathbb{M}_n \\ \mathbb{A}_n \end{bmatrix} \mathbb{v}_n$$

$$\therefore \ddot{\mathbb{q}}_n = \mathbb{v}_n$$

Seja $\mathbb{v}'_n$ a lei de controle por modos deslizantes:

$$\mathbb{v}'_n = \ddot{\mathbb{q}}_{n,d} + \lambda \dot{\mathbb{e}}_n + k\,\mathsf{sign}(\dot{\mathbb{e}}_n + \lambda \mathbb{e}_n)$$

Sendo $\mathbb{e}_n = \mathbb{q}_{n,d} - \mathbb{q}_n$. Se não houvesse restrições, poderiamos fazer $\mathbb{v}_n = \mathbb{v}'_n$:

$$\ddot{\mathbb{q}}_n = \mathbb{v}_n \Rightarrow \ddot{\mathbb{e}}_n + \lambda \dot{\mathbb{e}}_n + k\,\mathsf{sign}(\dot{\mathbb{e}}_n + \lambda \mathbb{e}_n) = \mathbb{0}$$

Isso garantiria que $\mathbb{e}_n \to 0$ quando $t \to \infty$ para quaisquer condições iniciais.

Como temos restrições em $\mathbb{v}_n$, procuramos $\mathbb{v}_n$ mais próximo possível de $\mathbb{v}'_n$ atraves da solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbb{v}_n}{\text{Min}} \quad & (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) \\ \text{tal que} \quad & \mathbb{A}_n \mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n = \mathbb{0} \end{aligned}$$

Como $\mathbb{M}_n$ é não-negativa definida, temos que $(\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) \geq 0$ para qualquer valor de $\mathbb{v}_n$. Aplicando a ténica dos multiplicadores de Lagrange, pode-se dizer que o seguinte problema equivalente:

$$\underset{\mathbb{v}_n, \mathbb{\lambda}}{\text{Min}} \quad \mathcal{L} = (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) + (\mathbb{A}_n \mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n)^\top \mathbb{\lambda}$$

Para solucionar o problema, impõe-se a estacionariedade da função lagrangeana:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = 0 &\Rightarrow \delta \mathbb{v}_n^\top \mathbb{M}_n (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) + (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n)^\top \mathbb{M}_n \delta \mathbb{v}_n + (\mathbb{A}_n \delta \mathbb{v}_n)^\top \mathbb{\lambda} + (\mathbb{A}_n \mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n)^\top \delta \mathbb{\lambda} = 0 \\ &\Rightarrow \delta \mathbb{v}_n^\top \Big((\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_n^\top)(\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) + \mathbb{A}_n^\top \mathbb{\lambda} \Big) + \delta \mathbb{\lambda}^\top (\mathbb{A}_n \mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n) = 0 \end{aligned}$$

Como $\mathbb{M}_n$ simétrica e $\delta \mathbb{v}_n$ e $\delta \mathbb{\lambda}$ so arbitrários, temos:

$$\begin{cases} 2\mathbb{M}_n (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) + \mathbb{A}_n^\top \mathbb{\lambda} = \mathbb{0} \\ \mathbb{A}_n \mathbb{v}_n + \mathbb{b}_n = \mathbb{0} \end{cases}$$

Como $\mathbb{C}_n$ o complemento ortogonal de $\mathbb{A}_n$, multiplicando a primeira equação por $\mathbb{C}_n^\top$, temos:

$$\begin{aligned} 2\mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) + \mathbb{C}_n^\top \mathbb{A}_n^\top \mathbb{\lambda} = \mathbb{0} \\ \Rightarrow \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n (\mathbb{v}_n - \mathbb{v}'_n) = \mathbb{0} \\ \therefore \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \mathbb{v}_n = \mathbb{C}_n^\top \mathbb{M}_n \mathbb{v}'_n \end{aligned}$$

Sendo assim, temos que a lei de controle que torna o sistema em malha fechado o mais próximo possível, segundo o critério de otimização adotado, de $\ddot{\mathbb{q}}_n = \mathbb{v}'$ é:

$$\mathbb{u}_n = \mathbb{C}_n^\top (\mathbb{M}_n \mathbb{v}'_n + \mathbb{w}_n + \mathbb{z}_n)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix} \ddot{\mathbb{q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{\zeta}\mathbb{u} \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{u} = \mathbb{\zeta}^{-1}\mathbb{C}^T\mathbb{M}\mathbb{u}'$$

$$\mathbb{u}' = \ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})$$

$$\mathbb{s} = -\dot{\mathbb{e}} - \lambda\mathbb{e}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = -\ddot{\mathbb{e}} - \lambda\dot{\mathbb{e}} = \ddot{\mathbb{q}} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{\zeta}\mathbb{u} \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

Aplicando a lei de controle:

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})) \\ -\mathbb{b} \end{bmatrix} - \ddot{\mathbb{q}}_d - \lambda\dot{\mathbb{e}}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}} - k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s})) - \mathbb{C}^T\mathbb{M}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \\ -\mathbb{b} - \mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbb{s}} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) \\ -\mathbb{b} - \mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \end{bmatrix}$$

Definindo:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^T\mathbb{M} \\ \mathbb{A} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger & \mathbb{A}^\dagger \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\dot{\mathbb{s}} = -(\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{b} - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}})$$

Sendo assim, se a seguinte inequao for respeitada para pelo menos $\nu^\#$ componentes de $\dot{\mathbb{s}}$, o erro vai a zero:

$$\dot{\mathbb{s}} = -(\mathbb{C}^T\mathbb{M})^\dagger\mathbb{C}^T\mathbb{M}k\,\mathsf{sign}(\mathbb{s}) - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{b} - \mathbb{A}^\dagger\mathbb{A}(\ddot{\mathbb{q}}_d + \lambda\dot{\mathbb{e}}) \leq \mathbb{0}$$

Acknowledgments