

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2014 - 13/10/2014

Turma A

1ª Questão:

- a) (1,0 ponto) Seja $f(x) = \frac{1}{1+2x^3}$. Calcule $f^{(30)}(0)$.
- b) Obtenha uma expressão para a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n}$
- c) Encontre um valor para a soma do item b), quando $x = \frac{1}{2}$.

Solução:

- a) Sabe-se que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $|x| < 1$ (soma da PG). Sendo assim:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2x^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^3)^n, | -2x^3 | < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

Sabe-se que para uma série de potências positivas $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, a_k é dado pelo coeficiente de Taylor: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Como a série encontrada foi expandida em torno de $x_0 = 0$, temos que: $a_{30} = \frac{f^{(30)}(0)}{30!}$, o qual é coeficiente de x^{30} .

O termo geral da série obtida é dado por $\bar{a}_n = (-1)^n 2^n x^{3n}$.

Para $n = 10$, temos $\bar{a}_{10} = 2^{10} x^{30}$, o que significa que o coeficiente de x^{30} na série é 2^{10} .

Sendo assim, temos: $\frac{f^{(30)}(0)}{30!} = 2^{10}$

$$\therefore f^{(30)} = 2^{10} 30!$$

- b) Deseja-se encontrar uma expressão para $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n}$.

Pode-se observar que há uma certa semelhança entre os termos gerais desta série e da série do exercício anterior. Repare que derivando em x , multiplicando por x , derivando

mais uma vez e multiplicando por x mais uma vez, chegamos na mesma expressão. Sendo assim:

$$\frac{1}{1+2x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Derivando em x :

$$\begin{aligned} \frac{-2 \cdot 3x^2}{(1+2x^3)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 3n x^{3n-1}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \Rightarrow \frac{-6x^3}{(1+2x^3)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 3n x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Derivando mais uma vez:

$$\begin{aligned} \frac{-6[(3x^2)(1+2x^3)^2 - x^3 \cdot 2(1+2x^3)6x^2]}{(1+2x^3)^4} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n-1}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \frac{-6[3x^2 - 6x^5]}{(1+2x^3)^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n-1}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \therefore \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n} &= \frac{-18x^3(1-2x^3)}{(1+2x^3)^3}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

c) Como $x = \frac{1}{2}$ está dentro do intervalo de convergência da série do item b), temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 9n^2}{4^n} = \frac{-18 \cdot \frac{1}{8}(1 - 2 \cdot \frac{1}{8})}{(1 + 2 \cdot \frac{1}{8})^3} = -\frac{3^3 4}{5^3} = -\frac{108}{125}$$

2ª Questão:

a) (1,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 3, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a1) Encontre uma série numérica cuja soma seja igual a $\int_0^{1/6} f(x) dx$.

a2) Encontre um valor aproximado para $\int_0^{1/6} f(x) dx$, com erro, em módulo, menor que 10^{-4} .

b) (1,5 pontos) Sabendo que a série de Fourier de senos de $g(x) = x(\pi - x)$, em $[0, \pi]$ é

$$\frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \dots \right),$$

calcule $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^6$.

Solução:

a1) Sabe-se que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sendo assim:

$$e^{3x} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \frac{e^{3x} - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!}, \forall x \neq 0$$

Para $x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!} = 3$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Assim:

$$\int_0^{x'} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n \cdot n!} \Big|_0^{x'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x')^n}{n \cdot n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x' = 1/6$:

$$\int_0^{1/6} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

a2) Deseja-se calcular $\int_0^{1/6} f(x) dx$ com $erro < \varepsilon = 10^{-4}$. Do item anterior, sabe-se que:

$$\int_0^{1/6} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!} \simeq \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

O erro da aproximação é dado por:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

Rapare que se não tivéssemos $n \cdot n!$ multiplicando 2^n , teríamos a soma de uma PG de razão $1/2$, a qual é fácil de calcular o valor exato da soma.

Rapare também que o termo $\frac{1}{n \cdot n!}$ é sempre decrescente, ou seja:

$$\frac{1}{n \cdot n!} \leq \frac{1}{(k+1) \cdot (k+1)!}, \forall n \geq k+1$$

Sendo assim:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!} \leq \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

$$\therefore 2^k (k+1)(k+1)! > \frac{1}{\varepsilon} = 10^4$$

Para $k = 5$:

$$2^5 (k+1)(k+1)! = 32 \cdot 6 \cdot 720 = 192 \cdot 720 > 10^4$$

Portanto:

$$\int_0^{1/6} f(x) dx \simeq \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

Com $erro < 10^{-4}$.

- b) Seja $\tilde{g}(x)$ a extensão ímpar de $g(x)$. A série de Fourier de $\tilde{g}(x)$ é a série de senos de $g(x)$. Sabe-se que os coeficientes da série de Fourier de $\tilde{g}(x)$ são:

$$\begin{aligned}a_0 &= a_n = 0 \\b_{2n} &= 0 \\b_{2n+1} &= \frac{8}{\pi(2n+1)^3}\end{aligned}$$

Aplicando a identidade de Parseval:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^2(x) dx \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^2(x) dx\end{aligned}$$

Como $\tilde{g}(x)$ é ímpar, $\tilde{g}^2(x)$ é par. Além disso, como $\tilde{g}(x)$ é extensão ímpar de $g(x)$, $\tilde{g}(x) = g(x)$ para $x \in [0, \pi]$. Assim, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2n+1)^6} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g^2(x) dx$$

.

$$\int_0^{\pi} g^2(x) dx = \int_0^{\pi} x^2 \pi^2 - 2\pi x^3 + x^4 dx = \left(\frac{\pi^2 x^3}{3} - \frac{2\pi x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right)_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{30}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^5}{30} = \frac{\pi^6}{960}$$

3ª Questão:

a) (2,0 pontos) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ 2|x|, & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Encontre a série de Fourier de f .

b) (1,5 pontos) Se $S(x)$ é a soma da série encontrada em a), esboce o gráfico de S no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$, calcule $S\left(39\frac{\pi}{2}\right)$ e $S\left(1223\frac{\pi}{8}\right)$.

Solução:

a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x dx = \frac{2}{\pi} x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos(nx) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(nx) dx &= \frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{n} dx = \frac{\pi \sin(\frac{n\pi}{2})}{2n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi \sin(\frac{n\pi}{2})}{2n} + \frac{(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{n^2} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n} + \frac{4(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0 \quad (\text{função ímpar})$$

$$\therefore S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n} + \frac{4(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{\pi n^2} \right) \cos(nx)$$

b) Pelo teorema da convergência da série de Fourier, $S(x)$ converge para:

- Para $x \in (-\pi, \pi)$:
 - $f(x)$, onde $f(x)$ é contínua
 - A média dos limites laterais, onde $f(x)$ é descontínua

- $\frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$, para $x = \pi$ ou $x = -\pi$
- Para $x \notin [-\pi, \pi]$: repete-se periodicamente.

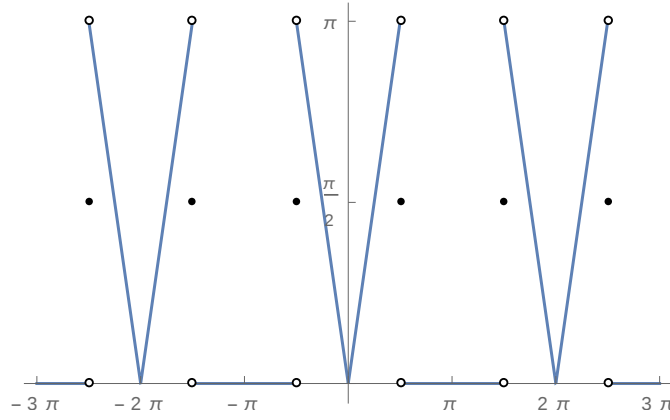


Figura 1: Série de Fourier de $f(x)$ para $x \in [-3\pi, 3\pi]$

Sendo assim:

$$S\left(\frac{39\pi}{2}\right) = S\left(17\pi + \frac{\pi}{2}\right) = S\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = \frac{1}{2}(\pi + 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$S\left(1223 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = S\left(152\pi + \frac{7\pi}{8}\right) = S\left(\frac{7\pi}{8}\right) = f\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 0$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2014 - 13/10/2014

Turma B

1ª Questão:

- a) (1,0 ponto) Seja $f(x) = \frac{1}{1+2x^3}$. Calcule $f^{(30)}(0)$.
- b) Obtenha uma expressão para a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n}$
- c) Encontre um valor para a soma do item b), quando $x = \frac{1}{2}$.

Solução:

- a) Sabe-se que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $|x| < 1$ (soma da PG). Sendo assim:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2x^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^3)^n, | -2x^3 | < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

Sabe-se que para uma série de potências positivas $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, a_k é dado pelo coeficiente de Taylor: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Como a série encontrada foi expandida em torno de $x_0 = 0$, temos que: $a_{30} = \frac{f^{(30)}(0)}{30!}$, o qual é coeficiente de x^{30} .

O termo geral da série obtida é dado por $\bar{a}_n = (-1)^n 2^n x^{3n}$.

Para $n = 10$, temos $\bar{a}_{10} = 2^{10} x^{30}$, o que significa que o coeficiente de x^{30} na série é 2^{10} .

Sendo assim, temos: $\frac{f^{(30)}(0)}{30!} = 2^{10}$

$$\therefore f^{(30)} = 2^{10} 30!$$

- b) Deseja-se encontrar uma expressão para $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n}$.

Pode-se observar que há uma certa semelhança entre os termos gerais desta série e da série do exercício anterior. Repare que derivando em x , multiplicando por x , derivando

mais uma vez e multiplicando por x mais uma vez, chegamos na mesma expressão. Sendo assim:

$$\frac{1}{1+2x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Derivando em x :

$$\begin{aligned} \frac{-2 \cdot 3x^2}{(1+2x^3)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 3n x^{3n-1}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \Rightarrow \frac{-6x^3}{(1+2x^3)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 3n x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Derivando mais uma vez:

$$\begin{aligned} \frac{-6[(3x^2)(1+2x^3)^2 - x^3 \cdot 2(1+2x^3)6x^2]}{(1+2x^3)^4} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n-1}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \frac{-6[3x^2 - 6x^5]}{(1+2x^3)^3} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n-1}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \therefore \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 9n^2 x^{3n} &= \frac{-18x^3(1-2x^3)}{(1+2x^3)^3}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

c) Como $x = \frac{1}{2}$ está dentro do intervalo de convergência da série do item b), temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 9n^2}{4^n} = \frac{-18 \cdot \frac{1}{8}(1 - 2 \cdot \frac{1}{8})}{(1 + 2 \cdot \frac{1}{8})^3} = -\frac{3^3 4}{5^3} = -\frac{108}{125}$$

2ª Questão:

a) (1,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 3, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a1) Encontre uma série numérica cuja soma seja igual a $\int_0^{1/6} f(x) dx$.

a2) Encontre um valor aproximado para $\int_0^{1/6} f(x) dx$, com erro, em módulo, menor que 10^{-4} .

b) (1,5 pontos) Sabendo que a série de Fourier de senos de $g(x) = x(\pi - x)$, em $[0, \pi]$ é

$$\frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \dots \right),$$

calcule $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^6$.

Solução:

a1) Sabe-se que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sendo assim:

$$e^{3x} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \frac{e^{3x} - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!}, \forall x \neq 0$$

Para $x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!} = 3$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Assim:

$$\int_0^{x'} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n \cdot n!} \Big|_0^{x'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x')^n}{n \cdot n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x' = 1/6$:

$$\int_0^{1/6} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

a2) Deseja-se calcular $\int_0^{1/6} f(x) dx$ com $erro < \varepsilon = 10^{-4}$. Do item anterior, sabe-se que:

$$\int_0^{1/6} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!} \simeq \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

O erro da aproximação é dado por:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

Rapare que se não tivéssemos $n \cdot n!$ multiplicando 2^n , teríamos a soma de uma PG de razão $1/2$, a qual é fácil de calcular o valor exato da soma.

Rapare também que o termo $\frac{1}{n \cdot n!}$ é sempre decrescente, ou seja:

$$\frac{1}{n \cdot n!} \leq \frac{1}{(k+1) \cdot (k+1)!}, \forall n \geq k+1$$

Sendo assim:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n n \cdot n!} \leq \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

$$\therefore 2^k (k+1)(k+1)! > \frac{1}{\varepsilon} = 10^4$$

Para $k = 5$:

$$2^k (k+1)(k+1)! = 32 \cdot 6 \cdot 720 = 192 \cdot 720 > 10^4$$

Portanto:

$$\int_0^{1/6} f(x) dx \simeq \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2^n n \cdot n!}$$

Com $erro < 10^{-4}$.

- b) Seja $\tilde{g}(x)$ a extensão ímpar de $g(x)$. A série de Fourier de $\tilde{g}(x)$ é a série de senos de $g(x)$. Sabe-se que os coeficientes da série de Fourier de $\tilde{g}(x)$ são:

$$\begin{aligned}a_0 &= a_n = 0 \\b_{2n} &= 0 \\b_{2n+1} &= \frac{8}{\pi(2n+1)^3}\end{aligned}$$

Aplicando a identidade de Parseval:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^2(x) dx \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^2(x) dx\end{aligned}$$

Como $\tilde{g}(x)$ é ímpar, $\tilde{g}^2(x)$ é par. Além disso, como $\tilde{g}(x)$ é extensão ímpar de $g(x)$, $\tilde{g}(x) = g(x)$ para $x \in [0, \pi]$. Assim, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2n+1)^6} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g^2(x) dx$$

.

$$\int_0^{\pi} g^2(x) dx = \int_0^{\pi} x^2 \pi^2 - 2\pi x^3 + x^4 dx = \left(\frac{\pi^2 x^3}{3} - \frac{2\pi x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right)_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{30}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^5}{30} = \frac{\pi^6}{960}$$

3ª Questão:

a) (2,0 pontos) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ 2|x|, & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Encontre a série de Fourier de f .

b) (1,5 pontos) Se $S(x)$ é a soma da série encontrada em a), esboce o gráfico de S no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$, calcule $S\left(39\frac{\pi}{2}\right)$ e $S\left(1223\frac{\pi}{8}\right)$.

Solução:

a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x dx = \frac{2}{\pi} x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos(nx) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(nx) dx &= \frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{n} dx = \frac{\pi \sin(\frac{n\pi}{2})}{2n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi \sin(\frac{n\pi}{2})}{2n} + \frac{(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{n^2} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n} + \frac{4(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0 \quad (\text{função ímpar})$$

$$\therefore S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n} + \frac{4(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{\pi n^2} \right) \cos(nx)$$

b) Pelo teorema da convergência da série de Fourier, $S(x)$ converge para:

- Para $x \in (-\pi, \pi)$:
 - $f(x)$, onde $f(x)$ é contínua
 - A média dos limites laterais, onde $f(x)$ é descontínua

- $\frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$, para $x = \pi$ ou $x = -\pi$
- Para $x \notin [-\pi, \pi]$: repete-se periodicamente.

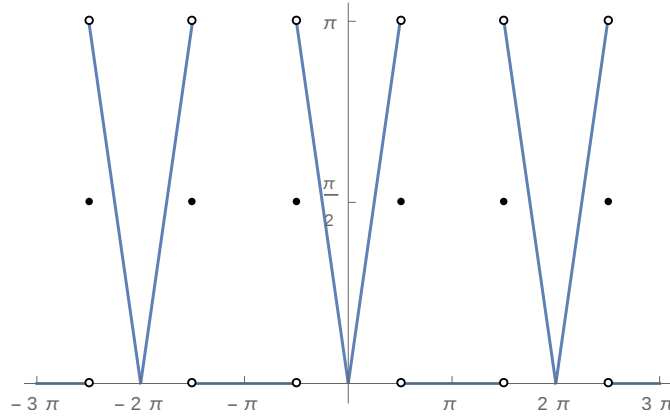


Figura 2: Série de Fourier de $f(x)$ para $x \in [-3\pi, 3\pi]$

Sendo assim:

$$S\left(\frac{39\pi}{2}\right) = S\left(17\pi + \frac{\pi}{2}\right) = S\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = \frac{1}{2}(\pi + 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$S\left(1223 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = S\left(152\pi + \frac{7\pi}{8}\right) = S\left(\frac{7\pi}{8}\right) = f\left(\frac{7\pi}{8}\right) = 0$$