**Instituto de Matemática e Estatística da USP**
**MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia**
**2a. Prova - 2o. Semestre 2014 - 13/10/2014**

**Turma A**
**Questão 1:**

a) (1,0 ponto) Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+2x^3}$. Calcule $f^{(30)}(0)$.

b) Obtenha uma expressão para a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, 2^n 9n^2 x^{3n}$

c) Encontre um valor para a soma do item $b$), quando $x = \dfrac{1}{2}$.

**Solução:**

a) Sabe-se que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $|x| < 1$ (soma da PG). Sendo assim:

$$\frac{1}{1+2x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x^3), |-2x^3| < 1$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Sabe-se que para uma série de potencias positivas $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, $a_k$ é dado pelo coeficiênte de Taylor: $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Como a série encontrada foi expandida em torno de $x_0 = 0$, temos que: $a_{30} = \dfrac{f^{(30)}(0)}{30!}$, o qual é coeficiente de $x^{30}$.

O termo geral da série obtida é dado por $\bar{a}_n = (-1)^n\, 2^n\, x^{3n}$.
Para $n = 10$, temos $\bar{a}_{10} = 2^{10}x^{30}$, o que significa que o coeficiente de $x^{30}$ na série é $2^{10}$.
Sendo assim, temos: $\dfrac{f^{(30)}(0)}{30!} = 2^{10}$

$$\therefore f^{(30)} = 2^{10}\, 30!$$

b) Deseja-se encontrar uma expressão para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, 2^n 9n^2 x^{3n}$.

Pode-se observar que há uma certa semelhança entre os termos gerais desta série e da série do exercicio anterior. Repare que derivando em x, multiplicando por x, derivando mais uma vez e multplicando por x mais uma vez, chegamos na mesma expressão. Sendo assim:

$$\frac{1}{1+2x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, x^{3n},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Derivando em x:

$$\frac{-2\cdot 3x^2}{(1+2x^3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 3n\, x^{3n-1},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{-6x^3}{(1+2x^3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 3n\, x^{3n},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Derivando mais uma vez:

$$\frac{-6[(3x^2)(1+2x^3)^2 - x^3\cdot 2(1+2x^3)6x^2]}{(1+2x^3)^4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 9n^2\, x^{3n-1},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{-6[3x^2 - 6x^5]}{(1+2x^3)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 9n^2\, x^{3n-1},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 9n^2\, x^{3n} = \frac{-18x^3(1-2x^3)}{(1+2x^3)^3},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

c) Como $x = \frac{1}{2}$ está dentro do intervalo de convergência da série do item $b$), temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 9n^2}{4^n} = \frac{-18\cdot\frac{1}{8}(1-2\cdot\frac{1}{8})}{(1+2\cdot\frac{1}{8})^3} = -\frac{3^3 4}{5^3} = -\frac{108}{125}$$

**Questão 2** (3,0 pontos) Calcule a integral

$$\int\int\int_E xz\,dx\,dy\,dz$$

sobre a região $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 36 \text{ e } z \geq \sqrt{x^2 + (y-6)^2}, x \geq 0\}$

**Solução:**

O sólido descrito pela região $E$ está compreendido na região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + (y-6)^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

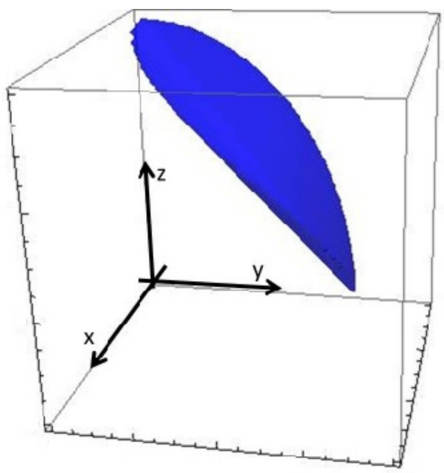


Figura 1: Região $E$

Portanto:

$$\int\int\int_E xz\,dx\,dy\,dz = \int\int_R \Big(\int_{\sqrt{x^2+(y-6)^2}}^{\sqrt{36-x^2-y^2}} xz\,dz\Big)\,dx\,dy = \int\int_R x\frac{z^2}{2}\Big|_{\sqrt{x^2+(y-6)^2}}^{\sqrt{36-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\int_R x(-2x^2 - 2y^2 + 12y)\,dx\,dy = -\int\int_R x(x^2 + y^2 - 6y)\,dx\,dy$$

Sendo $R$ a projeção do sólido $E$ no plano $xy$.

Realizando a intersecção das 2 superfícies que delimitam o sólido, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ z^2 = x^2 + (y-6)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + (y-6)^2 = 36 \\ z^2 = x^2 + (y-6)^2 \end{cases}$$

A projeção no plano $xy$ desta intersecção é dada por:

$$2x^2 + y^2 + (y-6)^2 = 36 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 12y + 36 = 36 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 12y$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 6y \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 9$$

Sendo assim, a região $R$ é dada por:

$$R = \{(x,y) : x^2 + (y-3)^2 \leq 9, x \geq 0\}$$

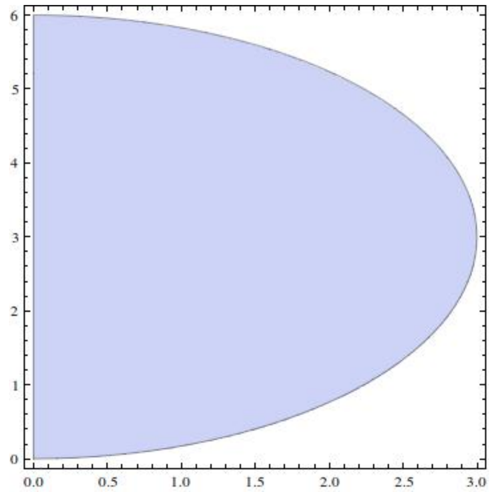


Figura 2: Região $R$

Realizando uma mudança de coordenadas para coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$|\det J| = \rho$$

Substituindo a mudança na equação da fronteira de $R$:

$$x^2 + y^2 = 6y \Rightarrow \rho^2 = 6\rho\sin\theta \Rightarrow \rho = 6\sin\theta$$

Sendo assim, a região $R$ pode ser escrita em coordenadas polares da seguinte maneira:

$$0 \leq \rho \leq 6\sin\theta$$
$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Aplicando a mudança na integral, temos:

$$-\int\int_R x(x^2+y^2-6y)\,dx\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{6\sin\theta} \rho\cos\theta(\rho^2 - 6\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{6\sin\theta}(\rho^4\cos\theta - 6\rho^3\sin\theta\cos\theta)\,d\rho\,d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^{6\sin\theta}\cos\theta - 6\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{6\sin\theta}\sin\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$= 6^5\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta\,d\theta$$

Realizando a seguinte mudança de variáveis: $u = \sin\theta \Rightarrow du = \cos\theta\,d\theta$, temos:

$$= \frac{6^5}{20}\int_0^1 u^5\,du = \frac{6^5}{20}\frac{u^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{6^4}{20} = \frac{324}{5}$$

**Questão 3:** (3,0 pontos) Calcule a massa do sólido dado por:

$$u^2 + v^2 + w^2 \geq 1$$

$$u \geq \sqrt{3v^2 + 3w^2}$$

$$u \leq 4$$

tal que $w \geq 0$ e com densidade $\delta(u,v,w) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$

**Solução:**

O sólido está compreendido na região interna ao cone, exterior à esfera e inferior ao plano, conforme visto na figura abaixo:

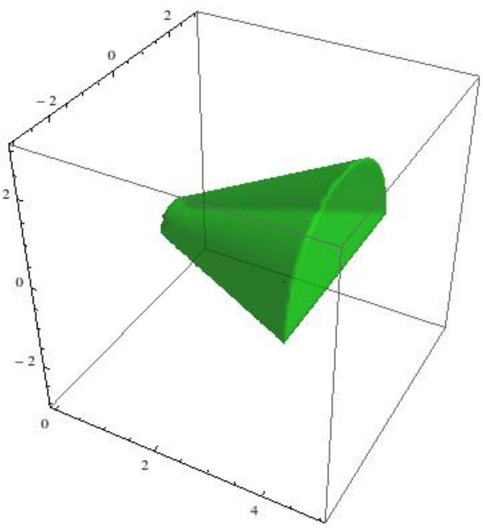


Figura 3: Esboço do sólido

A massa do sólido pode ser calculada por:

$$Massa = \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u,v,w)\, du\, dv\, dw$$

Faz-se a mudança para coordenadas esféricas e as regiões ficam descritas por:

$$\begin{cases} u = \rho \cdot \cos\phi \\ v = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\phi \\ w = \rho \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\phi \\ |J(\rho,\theta,\phi)| = \rho^2 \cdot \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

Assim o domínio de integração em coordenadas esféricas fica:

$$D_{\rho,\theta,\phi} = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \;,\; 1 \leq \rho \leq \frac{4}{\cos\phi} \;\text{ e }\; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \right\}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\text{Massa} &= \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u,v,w)\, du\, dv\, dw = \iiint_{D_{\rho,\theta,\phi}} \delta(\rho,\theta,\phi)\cdot|J(\rho,\theta,\phi)|\, d\rho\, d\theta\, d\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{1}^{\frac{4}{\cos\phi}} \frac{\rho^2\ \operatorname{sen}\phi}{\rho}\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2\ \operatorname{sen}\phi\Big|_1^{\frac{4}{\cos\phi}}\, d\phi \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 16\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^2\phi} - \ \operatorname{sen}\phi\, d\phi \\
&= 8\pi\frac{1}{\cos\phi}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2}\cos\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 8\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \\
M &= \frac{67\pi\sqrt{3} - 102\pi}{12}
\end{aligned}$$

**Instituto de Matemática e Estatística da USP**
**MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia**
**1a. Prova - 1o. Semestre 2014 - 01/04/2010**

**Turma B**
**Questão 1:**(4,0 pontos)

(a) Calcule $\displaystyle\int_0^3 \int_{\ln(x+1)}^{\ln 4} \cos(y - e^y)\, dy\, dx$.

(b) Calcule $\displaystyle\iint_R \frac{(y-2x)^8}{(y+x)^5}\, dx\, dy$, onde $R$ é a região limitada pelas retas $y = 2x$, $y = 2+2x$,$y = 2 - x$ e $y = 3 - x$

**Solução:**

(a) Esboçando o domínio de integração, teremos:

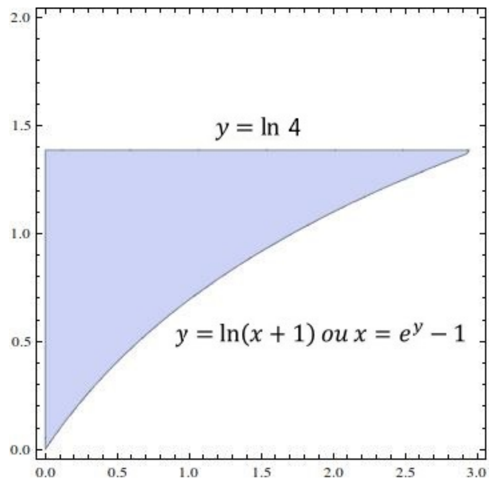


Figura 4: Domínio de integração

Não é possível encontrar uma primitiva em $y$ para a função do integrando. Para calcular a integral é necessário inverter a ordem de integração. Baseado na imagem acima, o domínio pode ser expresso, também, por:

$$D(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq e^y - 1 \ , \ 0 \leq y \leq \ln 4\}$$

A integral será calculada por:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\ln 4} \int_0^{e^y - 1} \cos(y - e^y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^{\ln 4} (e^y - 1) \cos(y - e^y)\, dy \\
&= -\sin(y - e^y)\Big|_0^{\ln 4} \\
&= -\sin(\ln 4 - 4) + \sin(-1)
\end{aligned}$$

(b) O domínio de integração é exibido abaixo

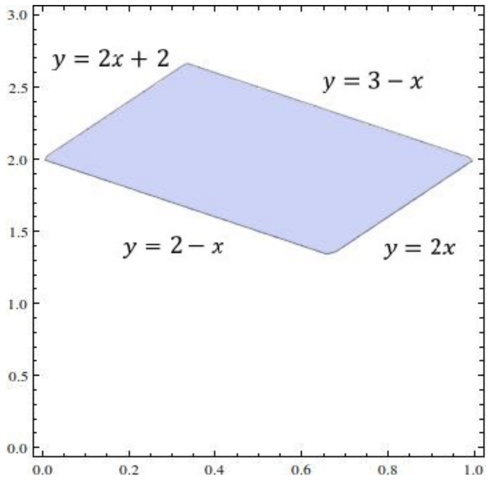


Figura 5: Domínio de integração

Faz-se a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = y - 2x \\ v = y + x \end{cases}$$

O jacobiano da transformação é dado por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \Rightarrow |J| = \frac{1}{3}$$

O domínio de integração é exibido abaixo

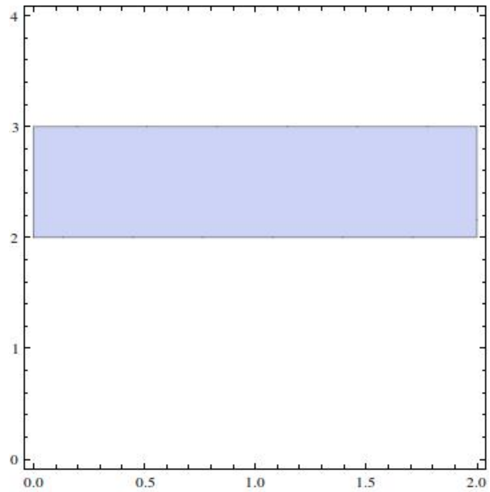

Figura 6: Domínio de integração após mudança

E passa a ser dado por:

$$D(u,v) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq 2 \ , \ 2 \leq v \leq 3\}$$

A integral a ser calculada passa a ser:

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^2\int_2^3 \frac{1}{3}\frac{u^8}{v^5}\,dv\,du \\
&= \frac{1}{3}\int_0^2\int_2^3 u^8.v^{-5}\,dv\,du \\
&= -\frac{1}{12}\int_0^2 v^{-4}\Big|_2^3 u^8\,du \\
&= \frac{65}{15552}\frac{u^9}{9}\Big|_0^2 \\
&= \frac{520}{2187}
\end{aligned}
$$

**Questão 2** (3,0 pontos) Calcule a integral

$$\int\int\int_E xz\,dx\,dy\,dz$$

sobre a região $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \text{ e } z \geq \sqrt{x^2 + (y-4)^2}, x \geq 0\}$

**Solução:**

O sólido descrito pela região $E$ está compreendido na região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

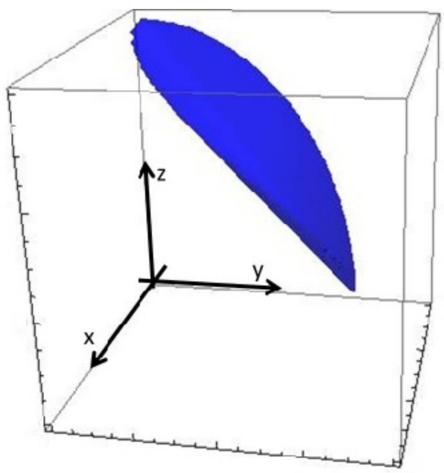


Figura 7: Região $E$

Portanto:

$$\int\int\int_E xz\,dx\,dy\,dz = \int\int_R \Big(\int_{\sqrt{x^2+(y-4)^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} xz\,dz\Big)\,dx\,dy = \int\int_R x\frac{z^2}{2}\Big|_{\sqrt{x^2+(y-4)^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\int_R x(-2x^2 - 2y^2 + 8y)\,dx\,dy = -\int\int_R x(x^2 + y^2 - 4y)\,dx\,dy$$

Sendo $R$ a projeção do sólido $E$ no plano $xy$.

Realizando a intersecção das 2 superfícies que delimitam o sólido, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z^2 = x^2 + (y-4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + (y-4)^2 = 16 \\ z^2 = x^2 + (y-4)^2 \end{cases}$$

A projeção no plano $xy$ desta intersecção é dada por:

$$2x^2 + y^2 + (y-4)^2 = 16 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 8y + 16 = 16 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 8y$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 4y \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$$

Sendo assim, a região $R$ é dada por:

$$R = \{(x,y) : x^2 + (y-2)^2 \le 4, x \ge 0\}$$

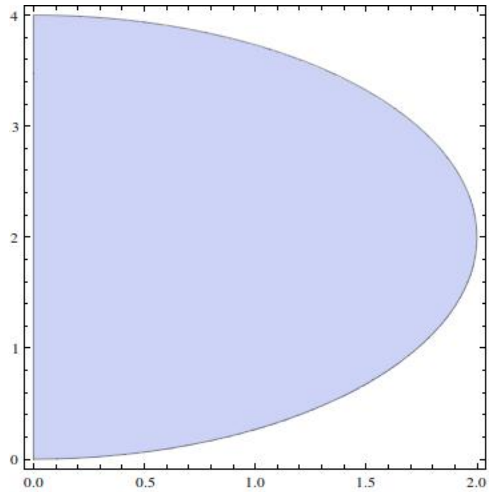


Figura 8: Região $R$

Realizando uma mudança de coordenadas para coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$|\det J| = \rho$$

Substituindo a mudança na equação da fronteira de $R$:

$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow \rho^2 = 4\rho\sin\theta \Rightarrow \rho = 4\sin\theta$$

Sendo assim, a região $R$ pode ser escrita em coordenadas polares da seguinte maneira:

$$0 \le \rho \le \ 4\sin\theta$$
$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Aplicando a mudança na integral, temos:

$$-\int\int_R x(x^2+y^2-4y)\,dx\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\sin\theta} \rho\cos\theta(\rho^2 - 4\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\sin\theta}(\rho^4\cos\theta - 4\rho^3\sin\theta\cos\theta)\,d\rho\,d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^{4\sin\theta}\cos\theta - 4\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{4\sin\theta}\sin\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$= 4^5\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta\,d\theta$$

Realizando a seguinte mudança de variáveis: $u = \sin\theta \Rightarrow du = \cos\theta\,d\theta$, temos:

$$= \frac{4^5}{20}\int_0^1 u^5\,du = \frac{4^5}{20}\frac{u^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{4^5}{20\cdot 6} = \frac{256}{30}$$

**Questão 3:** (3,0 pontos) Calcule a massa do sólido dado por:

$$u^2 + v^2 + w^2 \geq 1$$

$$u \geq \sqrt{3v^2 + 3w^2}$$

$$u \leq 6$$

tal que $w \geq 0$ e com densidade $\delta(u,v,w) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$

**Solução:**

O sólido está compreendido na região interna ao cone, exterior à esfera e inferior ao plano, conforme visto na figura abaixo:

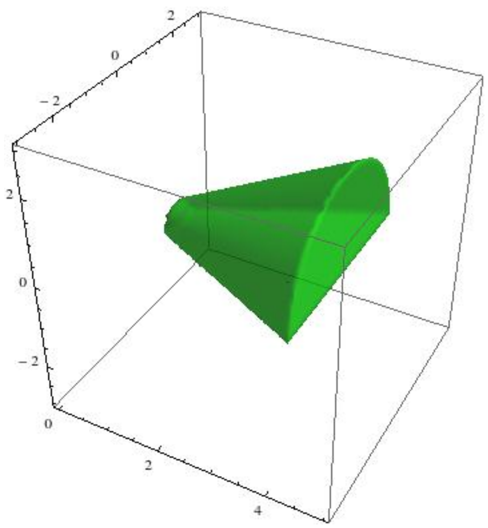


Figura 9: Esboço do sólido

A massa do sólido pode ser calculada por:

$$Massa = \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u,v,w)\, du\, dv\, dw$$

Faz-se a mudança para coordenadas esféricas e as regiões ficam descritas por:

$$\begin{cases} u = \rho \cdot \cos\phi \\ v = \rho \cdot \ \operatorname{sen}\theta \cdot \ \operatorname{sen}\phi \\ w = \rho \cdot \cos\theta \cdot \ \operatorname{sen}\phi \\ |J(\rho,\theta,\phi)| = \rho^2 \cdot \ \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

Assim o domínio de integração em coordenadas esféricas fica:

$$D_{\rho,\theta,\phi} = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \ , \ 1 \leq \rho \leq \frac{6}{\cos\phi} \ \text{ e } \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \right\}$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
\text{Massa} &= \iiint_{D_{u,v,w}} \delta(u,v,w)\,du\,dv\,dw = \iiint_{D_{\rho,\theta,\phi}} \delta(\rho,\theta,\phi)\cdot|J(\rho,\theta,\phi)|\,d\rho\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{1}^{\frac{6}{\cos\phi}} \frac{\rho^2\ \operatorname{sen}\phi}{\rho}\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \rho^2\ \operatorname{sen}\phi\Big|_{1}^{\frac{6}{\cos\phi}}\,d\phi \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} 36\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^2\phi} - \ \operatorname{sen}\phi\,d\phi \\
&= 18\pi\frac{1}{\cos\phi}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2}\cos\phi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 18\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right) \\
M &= \frac{49\pi\sqrt{3}-74\pi}{4}
\end{aligned}
$$