Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Trabalho 6 - 1º semestre de 2015

Questão 1. (2,5 pontos) Seja S a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=2z$, com $x \geq 0$. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z)=(zx+2, cos(x^2), xz^2)$ através de S orientada com a normal exterior a esfera.

Solução:

Seja S_1 a superfície plana que fecha a superfície S. Como o domínio de $\vec{F}$ não apresenta singularidades na região V definida pelo interior de $S \cup S_1$, e orientando para fora a normal da superfície fechada $S \cup S_1$, pelo Teorema de Gauss:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS + \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iiint_V div(\vec{F})\,dx\,dy\,dz$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = -\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS + \iiint_V div(\vec{F})\,dx\,dy\,dz \tag{1}$$

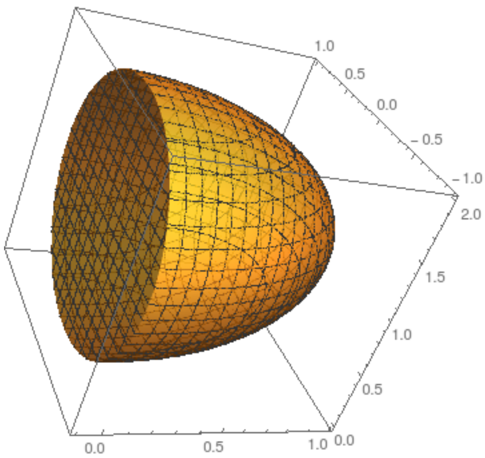

Figura 1: Região V e superfícies S e S_1

A superfície S_1 pode ser facilmente parametrizada da seguinte forma:

$$\sigma(u,v) = (0,u,v)$$

Para encontrar os valores de (u,v) em que a superfície S_1 é definida, encontramos a intersecção do plano $x=0$ com a esfera. Assim temos:

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2+z^2=2z \end{cases} \Rightarrow y^2+(z-1)^2=1$$

Sendo assim, temos que a região R na qual a superfície S_1 é definida é:

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + (v-1)^2 \leq 1\}$$

Calculando o vetor $\sigma_u \wedge \sigma_v$:

$$\sigma_u = (0, 1, 0)$$
$$\sigma_v = (0, 0, 1)$$
$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (1, 0, 0)$$

Como a normal da superfície S_1 é para baixo e $\sigma_u \wedge \sigma_v$ é oposta ao eixo x, invertemos o sinal de $\sigma_u \wedge \sigma_v$ para calcular a integral de superfície. Assim:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_R (0 + 2, \cos(0), 0) \cdot (-1, 0, 0)\, du\, dv = -2 \iint_R du\, dv$$

Como a região R é um disco de raio 1:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = -2\pi \tag{2}$$

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z + 0 + 2x = z(1 + 2x)$$

Realizando a seguinte mudança para coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi + 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$|J| = \rho^2 \sin\phi$$

$$\iiint_V div(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^1 (1 + \rho\cos\phi)(1 + 2\rho \sin\phi\cos\theta)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^1 (\rho^2 \sin\phi + 2\rho^3 \sin^2\phi\cos\theta + \rho^3 \sin\phi\cos\theta + 2\rho^4 \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta)\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin\phi}{3} + \frac{\sin^2\phi\cos\theta}{2} + \frac{\sin\phi\cos\theta}{4} + \frac{2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta}{5}\Big)\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \Big(\frac{\sin\phi}{3} + \Big(\frac{1 - \cos(2\phi)}{2}\Big)\frac{\cos\theta}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{8} + \frac{2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta}{5}\Big)\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-\frac{\cos\phi}{3} + \Big(\phi - \frac{\sin(2\phi)}{2}\Big)\frac{\cos\theta}{4} - \frac{\cos(2\phi)}{16} + \frac{2}{5}\frac{\sin^3\phi\cos\theta}{3}\Big)_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{2}{3} + \frac{\pi\cos\theta}{4}\Big)\, d\theta = \Big(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi\sin\theta}{4}\Big)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \iiint_V div(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \frac{7\pi}{6} \tag{4}$$

Substituindo (2) e (4) em (1):

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = -2\pi + \frac{7\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

Questão 2. (3 pontos) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + (x+e^{z^2})dz$, sendo γ a curva dada pela intersecção de $z = 5 - y^2$ e $z = x^2 + 2x + y^2 - 3$, orientada de modo que sua projeção no plano xy é percorrida no sentido anti-horário.

Sugestão: Escreva o campo $\vec{F}$ como $\vec{F_1} + (0, 0, x)$.

Solução:

Podemos decompor $\vec{F}$ na soma de dois campos vetoriais $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, sendo:

$$\vec{F_1} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, e^{z^2}\right); \vec{F_2} = (0, 0, x)$$

Calculando os rotacionais de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$:

$$Rot(\vec{F_1}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & e^{z^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(-1)\cdot(x^2+y^2) - (-y)\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

$$Rot(\vec{F_2}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = -\vec{j}$$

Como γ é uma curva fechada e o domínio de $\vec{F_2}$ é simplesmente conexo, podemos utilizar o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r}$, escolhendo como superfície $z = 5 - y^2$ limitada por $z = x^2 + 2x + y^2 - 3$, a qual chamaremos de S_2 .

Como a projeção de γ em $0xy$ é no sentido anti-horário, temos que a normal induzida pelo Teorema de Stokes em S_2 tem a componente na direção $\vec{k}$ positiva. Assim, parametrizando S_2:

$$\sigma(u, v) = (u, v, 5 - v^2)$$

Para encontrar os valores de (u, v) em que a superfície S_2 é definida, encontramos a intersecção da calha com o parabolóide. Assim temos:

$$\begin{cases} z = 5 - y^2 \\ z = x^2 + 2x + y^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow 5 - y^2 = x^2 + 2x + y^2 - 3 \Rightarrow (x+1)^2 + 2y^2 = 9$$

Sendo assim, temos que a região R_2 na qual a superfície S_2 é definida é:

$$R_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u+1)^2 + 2v^2 \leq 9\}$$

Calculando o vetor $\sigma_u \wedge \sigma_v$:

$$\sigma_u = (1, 0, 0)$$

$$\sigma_v = (0, 1, -2v)$$

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (0, 2v, 1)$$

Como $\sigma_u \wedge \sigma_v$ está no mesmo sentido da normal de S_2, aplicando o Teorema de Stokes, temos:

$$\int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} Rot(\vec{F_2})\cdot \vec{N}\, dS = \iint_{R_2} (0,-1,0)\cdot(0,2v,1)\, du\, dv = -2\iint_{R_2} v\, du\, dv$$

Como a região R_2 é simetríca em v e o integrando é uma função ímpar em v:

$$\iint_{R_2} v\, du\, dv \ = 0 \Rightarrow \int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r} = 0$$

Assim, como $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r}$, temos que $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r}$.

Para calcular $\int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r}$, não podemos escolher uma superfície que seja cortada pelo eixo z quando aplicarmos o Teorema de Stokes, pois $\vec{F_1}$ não é definido para pontos do tipo $(0,0,z), z\in\mathbb{R}$.

Sendo assim, escolhemos a superfície cilindrica $(x+1)^2 + 2y^2 = 9$ limitada por $z=0$ e $z = 5-y^2$, a qual chamaremos de S_1 sendo γ e γ_1 os bordos do cilindro. Como a projeção de γ em $0xy$ é no sentido anti-horário, temos que a normal induzida pelo Teorema de Stokes em S_1 aponta para dentro do cilindro, o que induz uma orientação no sentido horário para γ_1. Assim, aplicando o Teorema de Stokes:

$$\int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} Rot(\vec{F_1})\cdot \vec{N}\, dS = 0$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_1} \vec{F_1}\cdot d\vec{r}$$

A região do plano xy interna a γ_1 contém o ponto $(0,0,0)$, o qual é uma singularidade de $\vec{F_1}$. Então adicionamos a curva $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0), t\in[0,2\pi]$ a qual isola a singularidade e não se cruza com γ_1.

Como γ_1 e γ_2 estão no sentido contrário ao induzido pelo Teorema de Green, para aplicar o teorema invertemos os sinais das integrais de linha. Assim, aplicando o teorema de Green:

$$-\int_{\gamma_1} \vec{F_1}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = \iint_R Rot(\vec{F_1})\cdot \vec{k}\, dx\, dy = 0$$

$$\therefore \int_{\gamma_1} \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_2} \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \Big(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, 1\Big)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \Big(\sin^2 t + \cos^2 t\Big)\, dt = -2\pi$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi$$

Questão 3. (1,5 ponto) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e justifique a resposta.

Nos itens $\vec{F}$ denota um campo qualquer definido num aberto conexo do $\mathbb{R}^3$ de classe C^1.

1. Se $div(\vec{F}) = 0$, então $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = 0$, para toda S superfície fechada orientável.
2. Se $\vec{F}$ é conservativo então $Rot(\vec{F}) = \vec{0}$.
3. Se $Rot(\vec{F}) = \vec{0}$ então $div(\vec{F}) = 0$.

Solução:

1. Afirmação falsa. Se $\vec{F}$ tiver singularidades no interior de S, não é possível aplicar o Teorema de Gauss diretamente, o que torna possível a integral não ser nula. Um exemplo disso é a integral do campo $\dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$ em uma esfera centrada em $(0, 0, 0)$.
2. Afirmação verdadeira. Se $\vec{F}$ é convervativo, $\vec{F} = \nabla\phi$, logo:

$$Rot(\vec{F}) = Rot(\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)$$

   Como $\vec{F}$ é de classe C^1, como $\vec{F} = \nabla\phi$, ϕ é de classe C^2. Pelo Teorema de Clairaut-Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, sendo $f(x, y)$ de classe C^2. Sendo assim, $Rot(\vec{F}) = \vec{0}$.
3. Afirmação falsa. Seja $\vec{F} = x\vec{i}$, $Rot(\vec{F}) = \vec{0}$ e $div(\vec{F}) = 1$.