Adaptative balancing techniques applied to parallel mechanisms

Tarcisio Antonio Hess Coelho [a], Renato Maia Matarazzo Orsino [b], André Garnier Coutinho [a]

[a] *Department of Mechatronics and Mechanical Systems Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil. E-mail: tarchess@usp.br*
[b] *Department of Mechanical Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil.*

SUMMARY

KEYWORDS:

1 Introduction and literature review

1.1 Dynamic Models

- Massa pontual:

$$\mathbb{q}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbb{p}_n = \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_n \dot{p}_{n,1} \\ M_n \dot{p}_{n,2} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ f_{n,2} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3}$$

Que pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} M_n & 0 \\ 0 & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ f_{n,2} \end{bmatrix}$$

- RR:

$$\mathbb{q}_n = \begin{bmatrix} \theta_{1\,n} \\ \theta_{2\,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbb{p}_n = \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \\ p_{n,3} \\ p_{n,4} \\ p_{n,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1 \mathsf{s}_{n,2} & 0 \\ l_{g2} + l_1 \mathsf{c}_{n,2} & l_{g2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1\mathsf{s}_{n,2} & 0 \\ l_1\mathsf{c}_{n,2} & l_{g2} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1}\dot{p}_{n,1} \\ J_{z2}\dot{p}_{n,2} \\ m_1\dot{p}_{n,3} \\ m_2\dot{p}_{n,4} \\ m_2\dot{p}_{n,5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_1 p_{n,2} p_{n,5} \\ m_1 p_{n,2} p_{n,4} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1\mathsf{c}_{n,1} \\ m_2\mathsf{s}_{n,1+2} \\ m_2\mathsf{c}_{n,1+2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} l_{g1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ l_1\mathsf{s}_{n,2} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ l_1\mathsf{c}_{n,2} & l_{g2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{n,1} \\ \dot{p}_{n,2} \\ \dot{p}_{n,3} \\ \dot{p}_{n,4} \\ \dot{p}_{n,5} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\mathsf{c}_{n,2} p_{n,1}(-p_{n,1} + p_{n,2}) \\ l_1\mathsf{s}_{n,2} p_{n,1}(p_{n,1} - p_{n,2}) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right. \tag{6}
$$

Que pode ser reescrito como:

$$
\begin{bmatrix} J_{z1} + J_{z2} + m_1 l_{g1}^2 + m_2(l_1^2 + 2 l_1 l_{g2}\mathsf{c}_{n,2} + l_{g2}^2) & J_{z2} + m_2 l_{g2}(l_1\mathsf{c}_{n,2} + l_{g2}) \\ J_{z2} + m_2 l_{g2}(l_1\mathsf{c}_{n,2} + l_{g2}) & J_{z2} + m_2 l_{g2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{g2}\mathsf{s}_{n,2}\dot{q}_{n,2}^2 - 2 m_2 l_1 l_{g2}\mathsf{s}_{n,2}\dot{q}_{n,1}\dot{q}_{n,2} \\ m_2 l_1 l_{g2}\mathsf{s}_{n,2}\dot{q}_{n,1}^2 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} m_1 l_{g1}\mathsf{c}_{n,1} + m_2(l_{g2}\mathsf{c}_{n,1+2} + l_1\mathsf{c}_{n,1}) \\ m_2 l_{g2}\mathsf{c}_{n,1+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix}
$$

- RR (0) com 2 massas acopladas (1 e 2):

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \dot{q}_{0,1} \\ \dot{q}_{0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{0,1} \\ p_{0,2} \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1\mathsf{s}_{0,2} & 0 \\ l_1\mathsf{c}_{0,2} & l_{g2} \\ -L_1\mathsf{s}_{0,1} & 0 \\ L_1\mathsf{c}_{0,1} & 0 \\ -l_1\mathsf{s}_{0,1} & -L_2\mathsf{s}_{0,1} \\ l_1\mathsf{c}_{0,1} & L_2\mathsf{c}_{0,1} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1}\dot{p}_{0,1} \\ J_{z2}\dot{p}_{0,2} \\ m_1\dot{p}_{0,3} \\ m_2\dot{p}_{0,4} \\ m_2\dot{p}_{0,5} \\ M_1\dot{p}_{1,1} \\ M_1\dot{p}_{1,2} \\ M_2\dot{p}_{2,1} \\ M_2\dot{p}_{2,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_1 p_{0,2} p_{0,5} \\ m_1 p_{0,2} p_{0,4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1\mathsf{c}_{0,1} \\ m_2\mathsf{s}_{0,1+2} \\ m_2\mathsf{c}_{0,1+2} \\ 0 \\ M_1 \\ 0 \\ M_2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} u_{0,1} \\ u_{0,2} \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} l_{g1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1\mathsf{s}_{i,2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1\mathsf{c}_{i,2} & l_{g2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1\mathsf{s}_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1\mathsf{c}_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_1\mathsf{s}_{0,1} & L_2\mathsf{s}_{0,1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1\mathsf{c}_{0,1} & -L_2\mathsf{c}_{0,1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{0,1} \\ \dot{p}_{0,2} \\ \dot{p}_{0,3} \\ \dot{p}_{0,4} \\ \dot{p}_{0,5} \\ \dot{p}_{1,1} \\ \dot{p}_{1,2} \\ \dot{p}_{2,1} \\ \dot{p}_{2,1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\mathsf{c}_{0,2} p_{0,1}(-p_{0,1} + p_{0,2}) \\ l_1\mathsf{s}_{0,2} p_{0,1}(p_{0,1} - p_{0,2}) \\ L_1\mathsf{c}_{0,1} p_{0,1}^2 \\ L_1\mathsf{s}_{0,1} p_{0,1}^2 \\ l_1\mathsf{c}_{0,1} p_{0,1}^2 + L_1\mathsf{c}_{0,1+2} p_{0,2}^2 \\ l_1\mathsf{s}_{0,1} p_{0,1}^2 + L_1\mathsf{s}_{0,1+2} p_{0,2}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right. \tag{7}
$$

Que pode ser reescrito como:

$$\mathbb{M}^{\#}\ddot{\mathbb{q}}_0 + \mathbb{v}^{\#} + \mathbb{g}^{\#} = \mathbb{u}_0 \tag{8}$$

Sendo:

$$\mathbb{M}^{\#}_{1,1} = J_{z1} + J_{z2} + M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2 + m_1 l_{g1}^2 + m_2 l_{g2}^2 + (M_2 + m_2) l_1^2 + 2 l_1 \mathsf{c}_{0,2}(L_2 M_2 + m_2 l_{g2}) \tag{9}$$

$$\mathbb{M}^{\#}_{1,2} = \mathbb{M}^{\#}_{2,1} = J_{z2} + M_2 L_2(l_1 \mathsf{c}_{0,2} + L_2) + m_2 l_{g2}(l_1 \mathsf{c}_{0,2} + l_{g2}) \tag{10}$$

$$\mathbb{M}^{\#}_{2,2} = J_{z2} + M_2 L_2^2 + m_2 l_{g2}^2 \tag{11}$$

$$\mathbb{v}^{\#}_1 = -(M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) l_1 \mathsf{s}_{0,2} \dot{q}_{0,2}(2\dot{q}_{0,1} + \dot{q}_{0,2}) \tag{12}$$

$$\mathbb{v}^{\#}_2 = (M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) l_1 \mathsf{s}_{0,2} \dot{q}_{0,1}^2 \tag{13}$$

$$\mathbb{g}^{\#}_1 = g(M_1 L_1 \mathsf{c}_{0,1} + m_1 l_{g1} \mathsf{c}_{0,1} + (M_2 + m_2) l_1 \mathsf{c}_{0,1} + (M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) \mathsf{c}_{0,1+2}) \tag{14}$$

$$\mathbb{g}^{\#}_2 = g(M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) \mathsf{c}_{0,1+2} \tag{15}$$

- RR balanceado:

Escolhendo L_1 e L_2 de modo que $\mathbb{g}^{\#} = \mathbb{0}$:

$$\begin{cases} L_1 = -\frac{M_2 l_1 + m_1 l_{g1} + m_2 l_2}{M_1} \\ L_2 = -\frac{m_2 l_{g2}}{M_2} \end{cases} \tag{16}$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} J_{z1} + J_{z_2} + m_1 l_{g2}^2 + l_1^2(M_2 + m_2) + \frac{m_2^2 l_{g2}^2}{M_2} + \frac{(m_1 l_{g1} + (M_2 + m_2) l_1)^2}{M_1} & J_{z2} + \frac{m_2(M_2+m_2) l_{g2}^2}{M_2} \\ J_{z2} + \frac{m_2(M_2+m_2) l_{g2}^2}{M_2} & J_{z2} + \frac{m_2(M_2+m_2) l_{g2}^2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Acknowledgments