

**Instituto de Matemática e Estatística da USP**  
**MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia**  
**Trabalho 6 - 1º semestre de 2015**

**Questão 1.** (2,5 pontos) Seja  $S$  a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ , com  $x \geq 0$ . Calcule o fluxo do campo  $\vec{F}(x, y, z) = (zx + 2, \cos(x^2), xz^2)$  através de  $S$  orientada com a normal exterior a esfera.

**Solução:**

Seja  $S_1$  a superfície plana que fecha a superfície  $S$ . Como o domínio de  $\vec{F}$  não apresenta singularidades na região  $V$  definida pelo interior de  $S \cup S_1$ , e orientando para fora a normal da superfície fechada  $S \cup S_1$ , pelo Teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS &= \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS &= - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS + \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz \end{aligned} \quad (1)$$

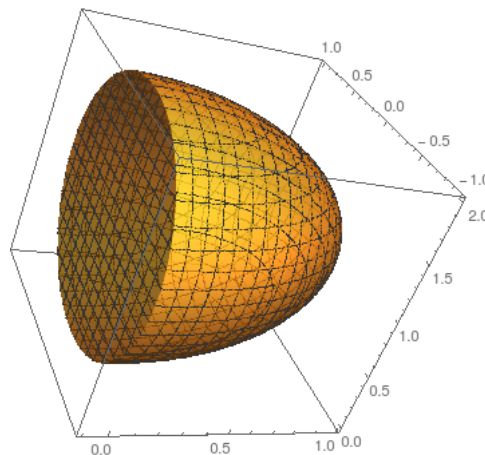


Figura 1: Região  $V$  e superfícies  $S$  e  $S_1$

A superfície  $S_1$  pode ser facilmente parametrizada da seguinte forma:

$$\sigma(u, v) = (0, u, v)$$

Para encontrar os valores de  $(u, v)$  em que a superfície  $S_1$  é definida, encontramos a intersecção do plano  $x = 0$  com a esfera. Assim temos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2z \end{cases} \Rightarrow y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

Sendo assim, temos que a região  $R$  na qual a superfície  $S_1$  é definida é:

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + (v - 1)^2 \leq 1\}$$

Calculando o vetor  $\sigma_u \wedge \sigma_v$ :

$$\sigma_u = (0, 1, 0)$$

$$\sigma_v = (0, 0, 1)$$

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (1, 0, 0)$$

Como a normal da superfície  $S_1$  é para baixo e  $\sigma_u \wedge \sigma_v$  é oposta ao eixo  $x$ , invertamos o sinal de  $\sigma_u \wedge \sigma_v$  para calcular a integral de superfície. Assim:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_R (0 + 2, \cos(0), 0) \cdot (-1, 0, 0) du dv = -2 \iint_R du dv$$

Como a região  $R$  é um disco de raio 1:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = -2\pi \quad (2)$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z + 0 + 2x = z(1 + 2x)$$

Realizando a seguinte mudança para coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi + 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$|J| = \rho^2 \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \text{div}(\vec{F}) dx dy dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_0^1 (1 + \rho \cos \phi)(1 + 2\rho \sin \phi \cos \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_0^1 (\rho^2 \sin \phi + 2\rho^3 \sin^2 \phi \cos \theta + \rho^3 \sin \phi \cos \theta + 2\rho^4 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta) d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \left( \frac{\sin \phi}{3} + \frac{\sin^2 \phi \cos \theta}{2} + \frac{\sin \phi \cos \theta}{4} + \frac{2 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta}{5} \right) d\phi d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \left( \frac{\sin \phi}{3} + \left( \frac{1 - \cos(2\phi)}{2} \right) \frac{\cos \theta}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{8} + \frac{2 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta}{5} \right) d\phi d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( -\frac{\cos \phi}{3} + \left( \phi - \frac{\sin(2\phi)}{2} \right) \frac{\cos \theta}{4} - \frac{\cos(2\phi)}{16} + \frac{2 \sin^3 \phi \cos \theta}{5 \cdot 3} \right)_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2}{3} + \frac{\pi \cos \theta}{4} \right) d\theta = \left( \frac{2\theta}{3} + \frac{\pi \sin \theta}{4} \right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\therefore \iiint_V \text{div}(\vec{F}) dx dy dz = \frac{7\pi}{6} \quad (4)$$

Substituindo (??) e (??) em (??):

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = -2\pi + \frac{7\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

**Questão 2.** (3 pontos) Calcule  $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + (x+e^{z^2})dz$ , sendo  $\gamma$  a curva dada pela intersecção de  $z = 5 - y^2$  e  $z = x^2 + 2x + y^2 - 3$ , orientada de modo que sua projeção no plano  $xy$  é percorrida no sentido anti-horário.

Sugestão: Escreva o campo  $\vec{F}$  como  $\vec{F}_1 + (0, 0, x)$ .

**Solução:**

Podemos decompor  $\vec{F}$  na soma de dois campos vetoriais  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , sendo:

$$\vec{F}_1 = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, e^{z^2} \right); \vec{F}_2 = (0, 0, x)$$

Calculando os rotacionais de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ :

$$\text{Rot}(\vec{F}_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & e^{z^2} \end{vmatrix} = \left( \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot (2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(-1) \cdot (x^2+y^2) - (-y) \cdot (2y)}{(x^2+y^2)^2} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

$$\text{Rot}(\vec{F}_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = -\vec{j}$$

Como  $\gamma$  é uma curva fechada e o domínio de  $\vec{F}_2$  é simplesmente conexo, podemos utilizar o teorema de Stokes para calcular  $\int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$ , escolhendo como superfície  $z = 5 - y^2$  limitada por  $z = x^2 + 2x + y^2 - 3$ , a qual chamaremos de  $S_2$ .

Como a projeção de  $\gamma$  em  $0xy$  é no sentido anti-horário, temos que a normal induzida pelo Teorema de Stokes em  $S_2$  tem a componente na direção  $\vec{k}$  positiva. Assim, parametrizando  $S_2$ :

$$\sigma(u, v) = (u, v, 5 - v^2)$$

Para encontrar os valores de  $(u, v)$  em que a superfície  $S_2$  é definida, encontramos a intersecção da calha com o parabolóide. Assim temos:

$$\begin{cases} z = 5 - y^2 \\ z = x^2 + 2x + y^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow 5 - y^2 = x^2 + 2x + y^2 - 3 \Rightarrow (x+1)^2 + 2y^2 = 9$$

Sendo assim, temos que a região  $R_2$  na qual a superfície  $S_2$  é definida é:

$$R_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u+1)^2 + 2v^2 \leq 9\}$$

Calculando o vetor  $\sigma_u \wedge \sigma_v$ :

$$\sigma_u = (1, 0, 0)$$

$$\sigma_v = (0, 1, -2v)$$

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (0, 2v, 1)$$

Como  $\sigma_u \wedge \sigma_v$  está no mesmo sentido da normal de  $S_2$ , aplicando o Teorema de Stokes, temos:

$$\int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} \text{Rot}(\vec{F}_2) \cdot \vec{N} dS = \iint_{R_2} (0, -1, 0) \cdot (0, 2v, 1) du dv = -2 \iint_{R_2} v du dv$$

Como a região  $R_2$  é simétrica em  $v$  e o integrando é uma função ímpar em  $v$ :

$$\iint_{R_2} v du dv = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = 0$$

Assim, como  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$ , temos que  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$ .

Para calcular  $\int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$ , não podemos escolher uma superfície que seja cortada pelo eixo  $z$

quando aplicarmos o Teorema de Stokes, pois  $\vec{F}_1$  não é definido para pontos do tipo  $(0, 0, z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

Sendo assim, escolhemos a superfície cilíndrica  $(x+1)^2 + 2y^2 = 9$  limitada por  $z = 0$  e  $z = 5 - y^2$ , a qual chamaremos de  $S_1$  sendo  $\gamma$  e  $\gamma_1$  os bordos do cilindro. Como a projeção de  $\gamma$  em  $0xy$  é no sentido anti-horário, temos que a normal induzida pelo Teorema de Stokes em  $S_1$  aponta para dentro do cilindro, o que induz uma orientação no sentido horário para  $\gamma_1$ . Assim, aplicando o Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= \iint_{S_1} \text{Rot}(\vec{F}_1) \cdot \vec{N} dS = 0 \\ \therefore \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= - \int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

A região do plano  $xy$  interna a  $\gamma_1$  contém o ponto  $(0, 0, 0)$ , o qual é uma singularidade de  $\vec{F}_1$ . Então adicionamos a curva  $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  a qual isola a singularidade e não se cruza com  $\gamma_1$ .

Como  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  estão no sentido contrário ao induzido pelo Teorema de Green, para aplicar o teorema invertemos os sinais das integrais de linha. Assim, aplicando o teorema de Green:

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= \iint_R \text{Rot}(\vec{F}_1) \cdot \vec{k} dx dy = 0 \\ \therefore \int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= - \int_{\gamma_2} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = - \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, 1 \right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -2\pi \\ \therefore \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 2\pi \end{aligned}$$

**Questão 3.** (1,5 ponto) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e justifique a resposta.

Nos itens  $\vec{F}$  denota um campo qualquer definido num aberto conexo do  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$ .

1. Se  $\text{div}(\vec{F}) = 0$ , então  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = 0$ , para toda  $S$  superfície fechada orientável.
2. Se  $\vec{F}$  é conservativo então  $\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ .
3. Se  $\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$  então  $\text{div}(\vec{F}) = 0$ .

**Solução:**

1. Afirmação falsa. Se  $\vec{F}$  tiver singularidades no interior de  $S$ , não é possível aplicar o Teorema de Gauss diretamente, o que torna possível a integral não ser nula. Um exemplo disso é a integral do campo  $\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$  em uma esfera centrada em  $(0, 0, 0)$ .
2. Afirmação verdadeira. Se  $\vec{F}$  é conservativo,  $\vec{F} = \nabla\phi$ , logo:

$$\text{Rot}(\vec{F}) = \text{Rot}(\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \right)$$

Como  $\vec{F}$  é de classe  $C^1$ , como  $\vec{F} = \nabla\phi$ ,  $\phi$  é de classe  $C^2$ . Pelo Teorema de Clairaut-Schwarz,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ , sendo  $f(x, y)$  de classe  $C^2$ . Sendo assim,  $\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ .

3. Afirmação falsa. Seja  $\vec{F} = x\vec{i}$ ,  $\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$  e  $\text{div}(\vec{F}) = 1$ .