

### Modelagem do pentágono articulado

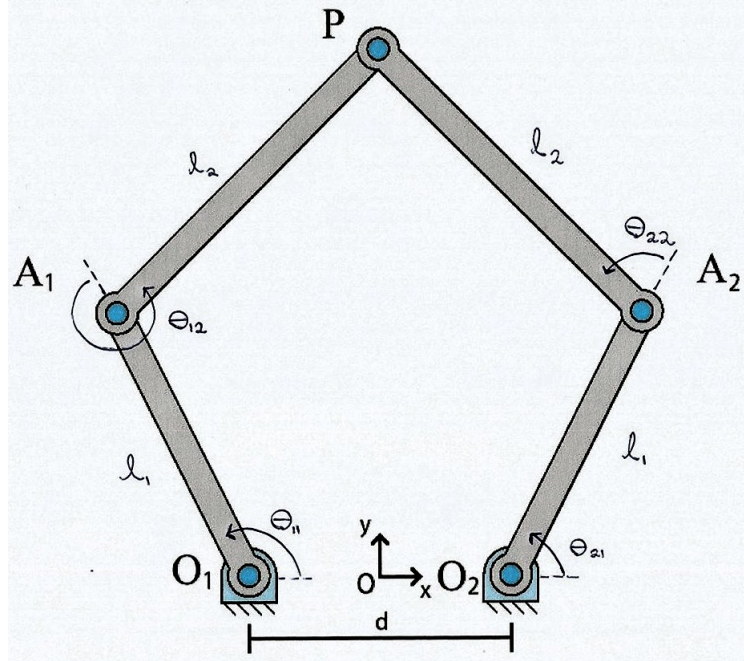


Figura 1: Robô 5R

#### Análise Cinemática:

- Cinemática de Posição

O objetivo da cinemática de posição é encontrar a relação entre as coordenadas  $X = (x_p, y_p)$ , da plataforma, e as coordenadas  $\Theta = (\theta_{11}, \theta_{21})$ , dos atuadores. Abaixo seguem as coordenadas dos pontos  $O_1$ ,  $A_1$ ,  $O_2$ ,  $A_2$ , e  $P$  em relação ao sistema de coordenadas  $O_{xy}$ :

$$\begin{array}{ll} O_1(-\frac{d}{2}, 0) & O_2(\frac{d}{2}, 0) \\ A_1(-\frac{d}{2} + l_1 c_{11}, l_1 s_{11}) & A_2(\frac{d}{2} + l_1 c_{21}, l_1 s_{21}) \\ P(x_p, y_p) & \end{array}$$

Utilizando as seguintes restrições geométricas, temos:

$$\begin{cases} \|P - A_1\|^2 = l_2^2 \\ \|P - A_2\|^2 = l_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11})^2 + (y_p - l_1 s_{11})^2 = l_2^2 \\ (x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21})^2 + (y_p - l_1 s_{21})^2 = l_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

- Cinemática Inversa

Supondo conhecidas as coordenadas  $X$ , deve-se encontrar as coordenadas  $\Theta$ . Assim, desenvolvendo a primeira equação do sistema de equações (1):

$$\begin{aligned}
(x_p + \frac{d}{2})^2 - 2(x_p + \frac{d}{2})l_1c_{11} + l_1^2c_{11}^2 + y_p^2 - 2y_pl_1s_{11} + l_1^2s_{11}^2 &= l_2^2 \\
\Rightarrow -2(x_p + \frac{d}{2})l_1c_{11} - 2y_pl_1s_{11} + (x_p + \frac{d}{2})^2 + y_p^2 + l_1^2 - l_2^2 &= 0 \\
\therefore E_1c_{11} + F_1s_{11} + G_1 &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Sendo:

$$\begin{cases} E_1 = -2(x_p + \frac{d}{2})l_1 \\ F_1 = -2y_pl_1 \\ G_1 = (x_p + \frac{d}{2})^2 + y_p^2 + l_1^2 - l_2^2 \end{cases} \tag{3}$$

Cuja solução é dada por:

$$\theta_{11} = \begin{cases} 2 \arctan \left( \frac{-F_1 + \sqrt{E_1^2 + F_1^2 - G_1^2}}{G_1 - E_1} \right), & \text{se } G_1 \neq E_1 \\ 2 \arctan \left( -\frac{E_1}{F_1} \right), & \text{se } G_1 = E_1 \end{cases} \tag{4}$$

Para a segunda equação do sistema (1), o procedimento é análogo, resultando em:

$$\theta_{21} = \begin{cases} 2 \arctan \left( \frac{-F_2 + \sqrt{E_2^2 + F_2^2 - G_2^2}}{G_2 - E_2} \right), & \text{se } G_2 \neq E_2 \\ 2 \arctan \left( -\frac{E_2}{F_2} \right), & \text{se } G_2 = E_2 \end{cases} \tag{5}$$

Sendo:

$$\begin{cases} E_2 = -2(x_p - \frac{d}{2})l_1 \\ F_2 = -2y_pl_1 \\ G_2 = (x_p - \frac{d}{2})^2 + y_p^2 + l_1^2 - l_2^2 \end{cases} \tag{6}$$

- Cinemática Direta

Supondo conhecidas as coordenadas  $\Theta$ , deve-se encontrar as coordenadas  $X$ . Podemos reescrever (1) da seguinte forma:

$$\begin{cases} (x_p - x_{c1})^2 + (y_p - y_{c1})^2 = r^2 \\ (x_p - x_{c2})^2 + (y_p - y_{c2})^2 = r^2 \end{cases}$$

Sendo:

$$\begin{cases} x_{c1} = -\frac{d}{2} + l_1c_{11} \\ x_{c2} = \frac{d}{2} + l_1c_{21} \\ y_{c1} = l_1s_{11} \\ y_{c2} = l_1s_{21} \\ r^2 = l_2^2 \end{cases} \tag{7}$$

Sendo assim, podemos enxergar (1) como a intersecção de duas circunferências de raio  $r$ . Desta maneira, pode-se dizer que a solução está contida na reta que passa pelo ponto médio dos centros das circunferências, ortogonal à reta que passa pelos dois centros.

Definindo:

$$\begin{cases} x_m = \frac{x_{c1}+x_{c2}}{2} \\ y_m = \frac{y_{c1}+y_{c2}}{2} \\ dx = x_{c2} - x_{c1} \\ dy = y_{c2} - y_{c1} \end{cases} \quad (8)$$

A equação vetorial desta reta é dada por:

$$(x_p, y_p) = (x_m, y_m) + \lambda(-dy, dx), \lambda \in \mathbb{R}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} x_p = x_m - \lambda dy \\ y_p = y_m + \lambda dx \end{cases} \quad (9)$$

Substituindo (9) na primeira equação de (1):

$$\begin{aligned} (x_m - \lambda dy - x_{c1})^2 + (y_m + \lambda dx - y_{c1})^2 &= r^2 \\ \left(\frac{dx}{2} - \lambda dy\right)^2 + \left(\frac{dy}{2} + \lambda dx\right)^2 &= r^2 \\ \frac{dx^2}{4} - \lambda dx dy + \lambda^2 dy^2 + \frac{dy^2}{4} + \lambda dx dy + \lambda^2 dx^2 &= r^2 \\ \lambda^2(dx^2 + dy^2) &= r^2 - \frac{dx^2 + dy^2}{4} \\ \therefore \lambda &= \pm \sqrt{\frac{r^2}{dx^2 + dy^2} - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Sendo assim, para montagem do mecanismo conforme a Figura 1, obtemos:

$$x_p = x_m - dy \sqrt{\frac{r^2}{dx^2 + dy^2} - \frac{1}{4}} \quad (10)$$

$$y_p = y_m + dx \sqrt{\frac{r^2}{dx^2 + dy^2} - \frac{1}{4}} \quad (11)$$

- Cinemática dos ângulos intermediários:

Supondo que a cinemática direta ou inversa já foi realizada (são conhecidos  $X$  e  $\Theta$ ), os ângulos  $\theta_{12}$  e  $\theta_{22}$  podem se definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \tan(\theta_{11} + \theta_{12}) = \frac{y_p - l_1 s_{11}}{x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11}} \\ \tan(\theta_{21} + \theta_{22}) = \frac{y_p - l_1 s_{21}}{x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21}} \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} \theta_{12} = \arctan\left(\frac{y_p - l_1 s_{11}}{x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11}}\right) - \theta_{11} \\ \theta_{22} = \arctan\left(\frac{y_p - l_1 s_{21}}{x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21}}\right) + \pi - \theta_{21} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

- Cinemática de velocidades:

Com o problema de posição resolvido, podemos facilmente resolver o problema de velocidades, o qual se torna linear.

Primeiro, reescrevemos o sistema de equações (1) como um vetor de funções nulas:

$$\Phi(X, \Theta) = 0 \quad (13)$$

Sendo:

$$\Phi(X, \Theta) = \begin{bmatrix} (x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11})^2 + (y_p - l_1 s_{11})^2 - l_2^2 \\ (x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21})^2 + (y_p - l_1 s_{21})^2 - l_2^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Depois, derivamos (13) no tempo, aplicando a regra da cadeia, e dividimos por 2, obtendo:

$$J_X \dot{X} + J_\Theta \dot{\Theta} = 0 \quad (15)$$

Sendo:

$$J_X = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \begin{bmatrix} x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11} & y_p - l_2 s_{11} \\ x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21} & y_p - l_2 s_{21} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$J_\Theta = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} l_1[(x_p + \frac{d}{2})s_{11} - y_p c_{11}] & 0 \\ 0 & l_1[(x_p - \frac{d}{2})s_{21} - y_p c_{21}] \end{bmatrix} \quad (17)$$

Desta maneira, conhecendo  $\dot{X}$  pode-se determinar  $\dot{\Theta}$  ou conhecendo  $\dot{\Theta}$  pode-se determinar  $\dot{X}$ .

Além disso, os Jacobianos  $J_X$  e  $J_\Theta$  podem ser utilizados para encontrar as singularidades cinemáticas do mecanismo. Os pontos singulares terão o determinante de  $J_X$  ou de  $J_\Theta$  nulo.

- Cinemática de acelerações:

Derivando (15) no tempo, obtemos:

$$\dot{J}_X \dot{X} + J_X \ddot{X} + \dot{J}_\Theta \dot{\Theta} + J_\Theta \ddot{\Theta} = 0 \quad (18)$$

Sendo:

$$\dot{J}_X = \begin{bmatrix} \dot{x}_p + l_1 s_{11} \dot{\theta}_{11} & \dot{y}_p - l_1 c_{11} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{x}_p + l_1 s_{21} \dot{\theta}_{21} & \dot{y}_p - l_1 c_{21} \dot{\theta}_{21} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\dot{J}_\Theta = \begin{bmatrix} l_1 [((x_p + \frac{d}{2}) \dot{\theta}_{11} - \dot{y}_p) c_{11} + (\dot{x}_p + y_p \dot{\theta}_{11}) s_{11}] & 0 \\ 0 & l_1 [((x_p - \frac{d}{2}) \dot{\theta}_{21} - \dot{y}_p) c_{21} + (\dot{x}_p + y_p \dot{\theta}_{21}) s_{21}] \end{bmatrix} \quad (20)$$

Como as coordenadas dos atuadores ( $\Theta$ ) e da plataforma ( $X$ ) e suas respectivas derivadas temporais já foram determinadas anteriormente, conhecendo  $\ddot{X}$  pode-se determinar  $\ddot{\Theta}$  ou conhecendo  $\ddot{\Theta}$  pode-se determinar  $\ddot{X}$ .

### Modelo Dinâmico:

Para encontrar as equações diferenciais de movimento do mecanismo, utilizaremos a técnica de acoplamento de sub-sistemas e as metodologia de Gibbs-Appel extendida (utilizando coordenadas generalizadas e velocidades generalizadas redundantes), ambas desenvolvidas no trabalho de Renato Orsino.

Primeiro dividimos nosso sistema em 3 sub-sistemas mais simples: 2 mecanismos seriais planos do tipo RR e um ponto com massa concentrada livre no espaço. Encontramos o modelo dinâmico de cada um separadamente, e depois utilizamos a técnica de acoplamento de sub-sistemas.

Para modelar os sub-sistemas seriais, faremos algumas definições importantes:

- $q^\#$ : vetor de  $n$  coordenadas generalizadas independentes
- $q^o$ : vetor de  $m_q$  coordenadas generalizadas redundantes
- $q$ : vetor contendo todas as coordenadas generalizadas. Usualmente  $q = \begin{bmatrix} q^\# \\ q^o \end{bmatrix}$
- $\phi(q)$ : vetor de tamanho  $m_q$  dos vínculos de posição, de modo que conhecendo  $q^\#$  seja possível determinar  $q^o$  resolvendo  $\phi(q) = 0$
- $p^\#$ : vetor de  $n$  velocidades generalizadas independentes
- $p^o$ : vetor de  $m_p$  velocidades generalizadas redundantes
- $p$ : vetor contendo todas as velocidades generalizadas. Usualmente  $p = \begin{bmatrix} p^\# \\ p^o \end{bmatrix}$

- $\Psi(q) = \frac{\partial P^\#}{\partial \dot{q}^\#}$ : Transformação linear inversível que relaciona  $\dot{q}^\#$  com  $p^\#$ , ou seja:  $p^\# = P^\#(q, \dot{q}^\#) = \Psi(q)\dot{q}^\#$ .
- $\Gamma(q) = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial p}$ : Transformação linear que relaciona  $p$  com  $\dot{q}$ , ou seja:  $\dot{q} = \dot{Q}(q, p) = \Gamma(q)p$ .
- $\Lambda(q, p)$ : vetor de tamanho  $m_q$  dos vínculos de velocidades, de modo que conhecendo  $q$  e  $p^\#$  seja possível determinar  $p^o$  resolvendo  $\Lambda(q, p) = 0$
- $\mathbb{C}(q)$ : matriz dos vínculos cinemáticos, obtida através  $\Lambda(q, p)$ . É qualquer matriz que seja complemento ortogonal (nullspace) transposto de  $\frac{\partial \Lambda}{\partial p}$ . Uma possibilidade conveniente é definir  $\mathbb{C}$  tal que  $p = \mathbb{C}(q)p^\#$ .

Na dinâmica de sistemas mecânicos multi-corpos, é muito vantajosa a utilização de coordenadas/velocidades generalizadas redundantes, pois a utilização destas diminui a complexidade da utilização dos métodos de dedução das equações de movimento (como Lagrange, Kane e Gibbs-Appell) e em contrapartida torna necessário definir  $\phi(q)$ ,  $\Lambda(q, p)$ ,  $\Psi(q)$ ,  $\Gamma(q)$  e  $\mathbb{C}(q)$ .

Nos métodos citados, é necessário o cálculo das velocidades absolutas dos centros de massa  $\vec{v}_{G_i}$  e das velocidades angulares absolutas  $\vec{\omega}_i$  de todos os corpos rígidos do sistema, em função de  $p$  e  $q$ . Sendo assim, é conveniente definir o vetor de velocidades generalizadas  $p$  como sendo todas as componentes dos  $\vec{v}_{G_i}$  e dos  $\vec{\omega}_i$ , em alguma ordem conveniente. Fazendo isso, tornamos a aplicação dos métodos extremamente simples, deixando praticamente toda a complexidade do problema no cálculo de  $\phi(q)$ ,  $\Lambda(q, p)$ ,  $\Psi(q)$ ,  $\Gamma(q)$  e  $\mathbb{C}(q)$ .

- Modelo do mecanismo RR

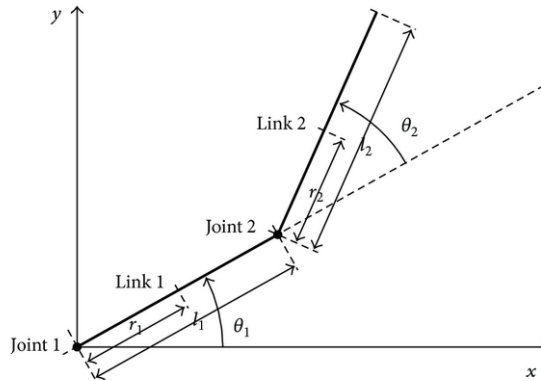


Figura 2: Robô RR

- Primeiro definimos  $n + m_q$  coordenadas  $q$ . Estas podem ser subdivididas em  $n$  coordenadas independentes  $q^\#$  e  $m_q$  coordenadas redundantes  $q^o$ .

$$q = \begin{bmatrix} q^\# \\ q^o \end{bmatrix}$$

No caso do mecanismo RR, temos:

$$q^\# = [\theta_1 \quad \theta_2]^T \quad (21)$$

$$q^o = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2]^T \quad (22)$$

Com  $n = 2$  e  $m_q = 4$ . Neste caso, as componentes de  $q^o$  são as coordenadas dos centros de massa das barras, escritas no referencial inercial  $O_{xy}$ .

ii) Depois definimos os vetores de velocidades absolutas:

$$\nu = \begin{bmatrix} \nu_\omega \\ \nu_v \end{bmatrix}$$

$$\nu_\omega = [\omega_{z1} \quad \omega_{z2}]^T \quad (23)$$

$$\nu_v = [v_{x1} \quad v_{y1} \quad v_{x2} \quad v_{y2}]^T \quad (24)$$

Sendo  $\nu_v$  as componentes das velocidades absolutas dos centros de massa das barras, escritas nas bases presas às barras, e  $\nu_\omega$  as componentes das velocidades angulares absolutas, escritas nas bases presas às barras.

iii) Definimos  $n + m_p$  coordenadas  $p$ . Estas podem ser subdivididas em  $n$  coordenadas independentes  $p^\#$  e  $m_p$  coordenadas redundantes  $p^o$ . As coordenadas  $p^\#$  podem ser subdivididas em  $n_1$  velocidades angulares  $\omega^\#$  e  $n_2$  velocidades lineares  $v^\#$ . As coordenadas  $p^o$  podem ser subdivididas em  $m_{p1}$  velocidades angulares  $\omega^o$  e  $m_{p2}$  velocidades lineares  $v^o$ .

$$p = \begin{bmatrix} p^\# \\ p^o \end{bmatrix} \quad p^\# = \begin{bmatrix} \omega^\# \\ v^\# \end{bmatrix} \quad p^o = \begin{bmatrix} \omega^o \\ v^o \end{bmatrix}$$

Como é conveniente que as velocidades generalizadas  $p$  sejam velocidades absolutas, escolhemos as componentes de  $p$  como sendo as mesmas componentes de  $\nu$ , respeitando a ordenação indicada acima.

No caso do mecanismo  $\underline{RR}$ , temos:

$$\omega^\# = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$v^\# = \emptyset \quad (26)$$

$$\omega^o = \emptyset \quad (27)$$

$$v^o = [v_{x1} \quad v_{y1} \quad v_{x2} \quad v_{y2}]^T \quad (28)$$

Com  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 0$ ,  $m_{p1} = 0$ ,  $m_{p2} = 4$  e  $m_p = m_{p1} + m_{p2} = 4$ .

- iv) Realizamos a cinemática de posição para os centros de massa das barras, de modo a relacionar as coordenadas  $q^o$  com as coordenadas  $q^\#$ . Para isso, utilizamos matrizes de transformação homogênea.

$$\begin{aligned}
[H]_{B_1/B_0} &= \begin{bmatrix} Rot(\theta_1, z_0) & \overrightarrow{[O_0O_1]_{B_0}} \\ 0_{2 \times 1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \overrightarrow{[O_1G_1]_{B_1}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
[H]_{B_2/B_1} &= \begin{bmatrix} Rot(\theta_2, z_1) & \overrightarrow{[O_1O_2]_{B_1}} \\ 0_{2 \times 1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \overrightarrow{[O_2G_2]_{B_2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{2g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
[H]_{B_2/B_0} &= [H]_{B_1/B_0} [H]_{B_2/B_1} = \begin{bmatrix} c_{1+2} & -s_{1+2} & l_1 c_1 \\ s_{1+2} & c_{1+2} & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} &= [H]_{B_1/B_0} \begin{bmatrix} \overrightarrow{[O_1G_1]_{B_1}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1g} c_1 \\ l_{1g} s_1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{29}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = [H]_{B_2/B_0} \begin{bmatrix} \overrightarrow{[O_2G_2]_{B_2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{2g} c_{1+2} \\ l_1 s_1 + l_{2g} s_{1+2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Repare que a partir das matrizes de transformação homogênea encontradas, encontramos também as seguintes matrizes de mudança de base:

$$R_1 = [I]_{B_1/B_0} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$R_2 = [I]_{B_2/B_0} = \begin{bmatrix} c_{1+2} & -s_{1+2} \\ s_{1+2} & c_{1+2} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Com a cinemática de posição, conseguimos obter  $m_q = 4$  equações v\u00ednculares de posi\u00e7\u00e3o. Sendo assim, o vetor dos v\u00ednculos de posi\u00e7\u00e3o \u00e9 dado por:

$$\phi(q) = \begin{bmatrix} x_1 - l_{1g} c_1 \\ y_1 - l_{1g} s_1 \\ x_2 - l_1 c_1 - l_{2g} c_{1+2} \\ y_2 - l_1 s_1 - l_{2g} s_{1+2} \end{bmatrix} \tag{33}$$

- v) Utilizamos as matrizes de rota\u00e7\u00e3o para calcular as velocidades angulares em fun\u00e7\u00e3o de  $q^\#$  e  $\dot{q}^\#$ :

$$[S(\vec{\omega}_1)]_{B_1} = R_1^T \dot{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\vec{\omega}_1]_{B_1} = \dot{\theta}_1 \hat{k} \tag{34}$$



$$[S(\vec{\omega}_2)]_{B_2} = R_2^T \dot{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\vec{\omega}_2]_{B_2} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \hat{k} \quad (35)$$

vi) Derivamos as equações de posição ((29) e (30)) para encontrar as velocidades dos centros de massa:

$$[\vec{v}_1]_{B_0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{1g}s_1\dot{\theta}_1 \\ l_{1g}c_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$[\vec{v}_2]_{B_0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1s_1\dot{\theta}_1 - l_{2g}s_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1c_1\dot{\theta}_1 + l_{2g}c_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (37)$$

vii) Passamos as velocidades dos centros de massa para as bases pesas nas barras:

$$\begin{aligned} [\vec{v}_1]_{B_1} &= [I]_{B_0/B_1} [\vec{v}_1]_{B_0} = R_1^T [\vec{v}_1]_{B_0} \\ [\vec{v}_2]_{B_2} &= [I]_{B_0/B_2} [\vec{v}_2]_{B_0} = R_2^T [\vec{v}_2]_{B_0} \end{aligned}$$

Definindo:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & R_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Temos:

$$\nu_v = \mathbf{R}^T \dot{q}^o \quad (39)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{1+2} & -s_{1+2} \\ 0 & 0 & s_{1+2} & c_{1+2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1g}\dot{\theta}_1 \\ l_1s_2\dot{\theta}_1 \\ (l_1c_2 + l_{2g})\dot{\theta}_1 + l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

viii) Montamos os vetores  $p^\#$  e  $p^o$  em função de  $q^\#$  e  $\dot{q}^\#$ :

$$p^\# = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} = P^\#(q^\#, \dot{q}^\#) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$p^o = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \end{bmatrix} = P^o(q^\#, \dot{q}^\#) = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1g}\dot{\theta}_1 \\ l_1s_2\dot{\theta}_1 \\ (l_1c_2 + l_{2g})\dot{\theta}_1 + l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

ix) Utilizando o fato de que  $P^\#(q^\#, \dot{q}^\#)$  e  $P^o(q^\#, \dot{q}^\#)$  são lineares em  $\dot{q}^\#$ , encontramos as transformações lineares  $\Psi(q)$  e  $\Upsilon(q)$  e o vetor dos vínculos de velocidades  $\Lambda(q, p)$ :

$$p^\# = P^\#(q^\#, \dot{q}^\#) = \frac{\partial P^\#}{\partial \dot{q}^\#} \dot{q}^\# = \Psi \dot{q}^\# \quad (43)$$

$$p^o = P^o(q^\#, \dot{q}^\#) = \frac{\partial P^o}{\partial \dot{q}^\#} \dot{q}^\# = \Upsilon \dot{q}^\# \quad (44)$$

No caso do mecanismo  $\underline{RR}$ , temos:

$$\Psi = \frac{\partial P^\#}{\partial \dot{q}^\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\Upsilon = \frac{\partial P^o}{\partial \dot{q}^\#} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_{2g} & l_{2g} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Como  $p^\#$  e  $\dot{q}^\#$  são independentes e tem o mesmo tamanho:

$$\begin{aligned} \dot{q}^\# &= \Psi^{-1} p^\# \\ \Rightarrow p^o &= \Upsilon \Psi^{-1} p^\# \\ \therefore \Lambda(q, p) &= \Upsilon \Psi^{-1} p^\# - p^o = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

x) A partir dos vínculos de velocidades, encontramos a matriz  $\mathbb{C}$  dos vínculos cinemáticos:

$$\begin{aligned} p^o &= \Upsilon \Psi^{-1} p^\# \Rightarrow p = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ \Upsilon \Psi^{-1} \end{bmatrix} p^\# \\ \therefore \mathbb{C} &= \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ \Upsilon \Psi^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 & l_{2g} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

xi) Como (39) e (43) são transformações inversíveis, encontramos a transformação linear  $\Gamma(q)$ :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}^\# \\ \dot{q}^o \end{bmatrix} = \dot{Q}(q, p) = \begin{bmatrix} \Psi^{-1}(q) p^\# \\ \mathbf{R}(q) \nu_v(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} - \omega_{z1} \\ v_{x1} c_1 - v_{y1} s_1 \\ v_{x1} s_1 + v_{y1} c_1 \\ v_{x2} c_{1+2} - v_{y2} s_{1+2} \\ v_{x2} s_{1+2} + v_{y2} c_{1+2} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\Gamma(q) = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1+2} & -s_{1+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{1+2} & c_{1+2} \end{bmatrix} \quad (50)$$

xii) Aplicamos o métodos de Gibbs-Appel extendido:

O método de Gibbs-Appell apresenta certa simularidade com o método de Lagrange, pois utiliza derivadas de uma função energia para encontrar a equações de movimento do sistema. Porém, a função energia utilizada não é a energia cinética, mas sim a energia de acelerações. A energia de acelerações para um corpo rígido é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}m(a_G \cdot a_G) + \frac{1}{2}(\dot{\omega} \cdot \mathbb{I}\dot{\omega} + 2\dot{\omega}(\omega \wedge \mathbb{I}\omega))$$

Sendo  $m$  a massa do corpo rígido,  $\mathbb{I}$  seu tensor de inércia,  $a_G$  o vetor aceleração absoluta de seu centro de massa e  $\omega$  o vetor velocidade angular absoluta.

O modelo dinâmico utilizando o método de Gibbs-Appel extendido, é dado pela seguinte expressão:

$$\mathbb{C}(q)^T(\mathbb{M}(q)\dot{p} + \mathbb{V}(q, p) + \mathbb{G}(q)) = (\Psi^T)^{-1}f_{\dot{q}^\#} \quad (51)$$

Com:

$$\mathbb{M}(q) = \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \dot{p}^2} \quad (52)$$

$$\mathbb{V}(q, p) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \dot{p}^2} \dot{p} \quad (53)$$

$$\mathbb{G}(q) = \Gamma^T \frac{\partial E_p}{\partial q} \quad (54)$$

Sendo  $E_p$  a energia potencial do sistema e  $f_{\dot{q}^\#}$  os esforços nas direções de  $\dot{q}^\#$ . No caso do mecanismo  $\underline{RR}$ , temos:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \left( m_1(\dot{v}_{x1}^2 + \dot{v}_{y1}^2) + m_2(\dot{v}_{x2}^2 + \dot{v}_{y2}^2) + J_{z1}\dot{\omega}_{z1}^2 + J_{z2}\dot{\omega}_{z2}^2 \right) \quad (55)$$

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (56)$$

Calculando as derivadas:

$$\mathbb{M}(q) = \begin{bmatrix} J_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbb{V}(q, p) = 0 \quad (58)$$

$$\mathbb{G}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g s_1 \\ m_1 g c_1 \\ m_1 g s_{1+2} \\ m_1 g c_{1+2} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Sendo assim, o modelo dinâmico para o mecanismo RR é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 & l_{2g} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1} \dot{\omega}_{z11} \\ J_{z2} \dot{\omega}_{z12} \\ m_1 \dot{v}_{x11} \\ m_1 \dot{v}_{y11} \\ m_2 \dot{v}_{x12} \\ m_2 \dot{v}_{y12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g s_1 \\ m_1 g c_1 \\ m_2 g s_{1+2} \\ m_2 g c_{1+2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Repare que o modelo não depende das coordenadas  $q^o$ . Elas foram uteis para a dedução do modelo, mas com o modelo deduzido elas não tem mais utilidade.

- Acoplamento de sub-sistemas:

Como o modelo do mecanismo RR já foi deduzido, e sabendo que o modelo de uma massa concentrada livre no espaço é dado por:

$$\begin{cases} m_p \ddot{x}_p = F_x \\ m_p \ddot{y}_p = F_y \end{cases} \quad (61)$$

Obtemos o modelo do pentagono articulado acoplando dois mecanismos RR e um ponto de massa concentrada livre no espaço.

Para fazer isso, seguimos o seguinte procedimento:

- a) Definimos as coordenadas generalizadas de cada sub-sistema e do sistema acoplado:

$$\begin{aligned} q_0 = q_0^\# &= \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} & q_1 = q_1^\# &= \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{bmatrix} & q_2 = q_2^\# &= \begin{bmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} \\ \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}^\# \\ \mathbf{q}^o \end{bmatrix} & \mathbf{q}^\# &= q_0 & \mathbf{q}^o &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- b) Definimos as velocidades generalizadas de cada sub-sistema e do sistema acoplado:

$$\begin{aligned} p_0 &= \begin{bmatrix} p_0^\# \\ p_0^o \end{bmatrix} & p_0^\# &= \begin{bmatrix} v_{px} \\ v_{py} \end{bmatrix} & p_0^o &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= \begin{bmatrix} p_1^\# \\ p_1^o \end{bmatrix} & p_1^\# &= \begin{bmatrix} \omega_{z11} \\ \omega_{z12} \end{bmatrix} & p_1^o &= [v_{x11} \quad v_{y11} \quad v_{x12} \quad v_{y12}]^T \\
p_2 &= \begin{bmatrix} p_2^\# \\ p_2^o \end{bmatrix} & p_2^\# &= \begin{bmatrix} \omega_{z21} \\ \omega_{z22} \end{bmatrix} & p_2^o &= [v_{x21} \quad v_{y21} \quad v_{x22} \quad v_{y22}]^T \\
\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\# \\ \mathbf{p}^o \end{bmatrix} & \mathbf{p}^\# &= p_0^\# & \mathbf{p}^o &= \begin{bmatrix} p_0^o \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\# \\ \mathbf{p}^o \end{bmatrix} & \mathbf{p}^\# &= p_0^\# & \mathbf{p}^o &= \begin{bmatrix} p_1^\# \\ p_2^\# \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

c) Definimos as relações em  $q$  e  $p$  de cada sub-sistema:

$$\begin{aligned}
p_0^\# &= \Psi_0 q_0^\# & p_1^\# &= \Psi_1 q_1^\# & p_2^\# &= \Psi_2 q_2^\# \\
\Psi_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \Psi_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \Psi_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
p_0 &= \mathbb{C}_0 p_0^\# & p_1 &= \mathbb{C}_1 p_1^\# & p_2 &= \mathbb{C}_2 p_2^\# \\
\mathbb{C}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbb{C}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_{12} & 0 \\ l_1 c_{12} & l_{2g} \end{bmatrix} & \mathbb{C}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_{22} & 0 \\ l_1 c_{22} & l_{2g} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Repare que:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0^\# \\ p_1^\# \\ p_2^\# \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{p}^\# \quad (62)$$

Nosso objetivo é encontrar uma matriz  $\hat{\mathbb{C}}$  tal que:

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbb{C}} \mathbf{p}^\# = \hat{\mathbb{C}} \mathbf{p}^\# \quad (63)$$

Assim teríamos uma relação linear direta entre  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}^\#$ .  
Nomeamos  $\hat{\mathbb{C}}$  de matriz de acoplamento dos sub-sistemas.

d) Encontramos  $\dim(\mathbf{q}^o)$  equações vinculares de posição:

Para o pentágono articulado, obtemos 4 equações:

$$\varphi(q_0, q_1, q_2) = \begin{bmatrix} x_p + \frac{d}{2} - l_1 c_{11} - l_2 c_{11+12} \\ y_p - l_1 s_{11} - l_2 s_{11+12} \\ x_p - \frac{d}{2} - l_1 c_{21} - l_2 c_{21+22} \\ y_p - l_1 s_{21} - l_2 s_{21+22} \end{bmatrix} = 0 \quad (64)$$

e) Derivamos  $\varphi(q_0, q_1, q_2) = 0$  no tempo, utilizando a regra da cadeia, para encontrar os vínculos de velocidades:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(q_0, q_1, q_2) &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_0} \dot{q}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \dot{q}_2 = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_0} \Psi_0^{-1} p_0^\# + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \Psi_1^{-1} p_1^\# + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \Psi_2^{-1} p_2^\# = 0 \\ \therefore \Lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p}^\#, \mathbf{p}^o) &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_0} \Psi_0^{-1} p_0^\# + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \Psi_1^{-1} p_1^\# + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \Psi_2^{-1} p_2^\# = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Para o pentágono articulado:

$$\Lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p}^\#, \mathbf{p}^o) = \begin{bmatrix} v_{px} + \omega_{z11} l_1 s_{11} + \omega_{z12} l_2 s_{11+12} \\ v_{py} - \omega_{z11} l_1 c_{11} - \omega_{z12} l_2 c_{11+12} \\ v_{px} + \omega_{z21} l_1 s_{21} + \omega_{z22} l_2 s_{21+22} \\ v_{py} - \omega_{z21} l_1 c_{21} - \omega_{z22} l_2 c_{21+22} \end{bmatrix} \quad (66)$$

f) Utilizamos a linearidade de  $\Lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p}^\#, \mathbf{p}^o)$  em  $\mathbf{p}^\#$  e  $\mathbf{p}^o$  para encontrar a matriz  $\mathbb{C}$ :

$$\Lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p}^\#, \mathbf{p}^o) = \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{p}^\#} \mathbf{p}^\# + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{p}^o} \mathbf{p}^o = 0 \quad (67)$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}^o = - \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{p}^o}^{-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{p}^\#} \mathbf{p}^\# \quad (68)$$

$$\therefore \hat{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ - \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{p}^o}^{-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{p}^\#} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Para o pentágono articulado:

$$\hat{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{s_{11+12}}{l_1 s_{12}} \\ -\frac{c_{11}}{l_2 s_{12}} & -\frac{s_{11}}{l_2 s_{12}} \\ \frac{c_{21+22}}{l_1 s_{22}} & \frac{s_{21+22}}{l_1 s_{22}} \\ -\frac{c_{21}}{l_2 s_{22}} & -\frac{s_{21}}{l_2 s_{22}} \end{bmatrix} \quad (70)$$

g) Modelo final:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{s_{11+12}}{l_1 s_{12}} \\ -\frac{c_{11}}{l_2 s_{12}} & -\frac{s_{11}}{l_2 s_{12}} \\ \frac{c_{21+22}}{l_1 s_{22}} & \frac{s_{21+22}}{l_1 s_{22}} \\ -\frac{c_{21}}{l_2 s_{22}} & -\frac{s_{21}}{l_2 s_{22}} \end{bmatrix}^T \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_{12} & 0 \\ l_1 c_{12} & l_{2g} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1} \dot{\omega}_{z11} \\ J_{z2} \dot{\omega}_{z12} \\ m_1 \dot{v}_{x11} \\ m_1 \dot{v}_{y11} \\ m_2 \dot{v}_{x12} \\ m_2 \dot{v}_{y12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g s_{11} \\ m_1 g c_{11} \\ m_2 g s_{11+12} \\ m_2 g c_{11+12} \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_{22} & 0 \\ l_1 c_{22} & l_{2g} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1} \dot{\omega}_{z21} \\ J_{z2} \dot{\omega}_{z22} \\ m_1 \dot{v}_{x21} \\ m_1 \dot{v}_{y21} \\ m_2 \dot{v}_{x22} \\ m_2 \dot{v}_{y22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g s_{21} \\ m_1 g c_{21} \\ m_2 g s_{21+22} \\ m_2 g c_{21+22} \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{21} \\ \tau_{22} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Que pode ser reescrito como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{s_{11+12}}{l_1 s_{12}} \\ -\frac{c_{11}}{l_2 s_{12}} & -\frac{s_{11}}{l_2 s_{12}} \\ 0 & 0 \\ \frac{l_{1g} c_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{l_{1g} s_{11+12}}{l_1 s_{12}} \\ \frac{C_{11+12}}{l_2 c_{12} c_{11+12} - l_{2g} c_{11}} & \frac{S_{11+12}}{l_2 c_{12} s_{11+12} - l_{2g} s_{11}} \\ \frac{l_2 s_{12}}{c_{21+22}} & \frac{l_2 s_{12}}{s_{21+22}} \\ \frac{l_1 s_{22}}{c_{21}} & \frac{l_1 s_{22}}{s_{21}} \\ -\frac{c_{21}}{l_2 s_{22}} & -\frac{s_{21}}{l_2 s_{22}} \\ 0 & 0 \\ \frac{l_{1g} c_{21+22}}{l_1 s_{22}} & \frac{l_{1g} s_{21+22}}{l_1 s_{22}} \\ \frac{C_{21+22}}{l_2 c_{22} c_{21+22} - l_{2g} c_{21}} & \frac{S_{21+22}}{l_2 c_{22} s_{21+22} - l_{2g} s_{21}} \\ \frac{l_2 c_{22} c_{21+22} - l_{2g} c_{21}}{l_2 s_{22}} & \frac{l_2 c_{22} s_{21+22} - l_{2g} s_{21}}{l_2 s_{22}} \end{pmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} m_p \dot{v}_{px} \\ m_p \dot{v}_{py} \\ J_{z1} \dot{\omega}_{z11} \\ J_{z2} \dot{\omega}_{z12} \\ m_1 \dot{v}_{x11} \\ m_1 \dot{v}_{y11} \\ m_2 \dot{v}_{x12} \\ m_2 \dot{v}_{y12} \\ J_{z1} \dot{\omega}_{z21} \\ J_{z2} \dot{\omega}_{z22} \\ m_1 \dot{v}_{x21} \\ m_1 \dot{v}_{y21} \\ m_2 \dot{v}_{x22} \\ m_2 \dot{v}_{y22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g \\ 0 \\ 0 \\ m_1 g s_{11} \\ m_1 g c_{11} \\ m_2 g s_{11+12} \\ m_2 g c_{11+12} \\ 0 \\ 0 \\ m_1 g s_{21} \\ m_1 g c_{21} \\ m_2 g s_{21+22} \\ m_2 g c_{21+22} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{c_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{c_{21+22}}{l_1 s_{22}} \\ \frac{s_{11+12}}{l_1 s_{12}} & \frac{s_{21+22}}{l_1 s_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{21} \end{bmatrix} \quad (72)$$

Supondo  $F_x = F_y = \tau_{12} = \tau_{22} = 0$

∅