MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
MAT 2455 - Trabalho 3 - 1o semestre de 2014

Nome:____ **No USP:**____________

Leia as instruções e justifique todos os cálculos

Questão 1. (3,0 pontos) Calcule $\iint_S \vec{F}.\vec{N}dS$ **onde** $\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$**e S é a parte do gráfico de** $z = 4 - x^2 - 2y^2$ **com z**≥ 0**, sendo** $\vec{N}$ **o campo de vetores unitários normais a S tal que** $\vec{N}.\vec{k} \geq 0$

Solução:

Observe que o divergente do campo vetorial $\overrightarrow{F}$ é nulo, o que sugere o uso do teorema da divergência de Gauss.

$$div\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\Big) =$$

$$\frac{3\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{x\cdot\frac{3}{2}\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}2x + y\cdot\frac{3}{2}\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}2y + z\cdot\frac{3}{2}\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}2z}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0$$

No entanto, o campo não esta definido em (0,0,0), então só poderemos usar tal teorema em uma região que não contenha esse ponto. Desse modo, consideramos:

$$V = \big\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}/\ z \geq 0,\ z \leq 4 - x - 2y, z \geq \sqrt{1-x-y}\big\}$$

As três partes da fronteira de V são as superfícies:

$$S = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}/z = 4 - x - 2y, z \geq 0\}$$

Orientada de modo que $\vec{N}\cdot\vec{k} \geq 0$

$$S_2 = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}/x + y \geq 1,\ x + 2y \leq 4, z = 0\}$$

Orientada de modo que $\vec{N_2} = -\overrightarrow{k}$

$$S_3 = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}/x + y + z = 1, z \geq 0\}$$

Orientada de modo que $\vec{N_3} = \frac{(-x,-y,-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Como o campo vetorial é horizontal em z=0, temos que $\vec{F}.\vec{N_2} = 0$ em S_2 , então:

$$\iint_{S_2} \vec{F}.\vec{N}_2 dS = 0$$

Além disso, em S_3 temos que $\vec{F}.\vec{N}_3 = -1$:

$$\vec{F}.\vec{N}_3 = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot \frac{(-x,-y,-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = -1$$

Portanto, utilizando Gauss:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N} dS + \iint_{S_2} \vec{F}\vec{N}_2 dS + \iint_{S_3} \vec{F}.\vec{N}_3 dS = \iiint_V div\vec{F}\, dx\, dy\, dz$$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N} dS = -\iint_{S_3} \vec{F}.\vec{N}_3 dS = -\iint_{S_3} (-1)\, dS = \acute{A}rea\,(S_3)$$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N} dS = 2\pi$$

MAT 2455 - Trabalho 3 - 1o semestre de 2014

Nome:____ **No USP:**____________

Justifique todos os cálculos

Questão 2. (3 pontos) Calcule

$$\iint_S \left(cos(z^2) + x^2\right)\, dy \wedge dz + (x^2 - yz)\, dz \wedge dx + (y^5 + z^2)\, dx \wedge dy$$

onde S é a parte da superfície $x^2 + z^2 = 4 + y^2$**,com** $0 \leq y \leq 2$**, orientada com** $\vec{N}$ **tal que** $\vec{N}$ **no ponto (2,0,0) é** $\vec{i}$**.**

Solução:

Como o cálculo do fluxo apresentado no enunciado não é factível utilizando a definição, utilizaremos o teorema da divergência de Gauss. Assim, tomamos a seguinte região:

$$V = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}/\ 0 \leq y \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 4 + y^2\}$$

As três partes da fronteira de V são as superfícies:

$$S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}/0 \leq y \leq 2,\ x^2 + y^2 = 4 + y^2\}$$

Orientada de modo que no ponto (2,0,0) seja $\vec{i}$

$$S_2 = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}/x + z = 4, y = 0\}$$

Orientada de modo que $\vec{N}_2 = -\overrightarrow{j}$

$$S_3 = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}/x + z = 8{,}y = 2\}$$

Orientada de modo que $\vec{N}_3 = \overrightarrow{j}$

Aplicando o teorema:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N} dS + \iint_{S_2} \vec{F}\vec{N}_2 dS + \iint_{S_3} \vec{F}.\vec{N}_3 dS = \iiint_V div\vec{F}\, dx\, dy\, dz$$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N} dS = \iiint_V div\vec{F}\, dx\, dy\, dz - \iint_{S_2} \vec{F}\vec{N}_2 dS - \iint_{S_3} \vec{F}.\vec{N}_3 dS$$

Cálculo de $\iiint_V div\vec{F}\, dx\, dy\, dz$:

O divergente do campo vetorial é $div\vec{F} = 2x + z$, então temos:

$$\iiint_V div\vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_V (2x + z)\, dx\, dy\, dz$$

Fazendo:

$$x = r.cos\,\theta,\; z = r.sen\,\theta,\; y = y$$

$$Jacobiano = r$$

Com $0 \leq r \leq \sqrt{4+y^2}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Assim:

$$\iiint_V (2x+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4+y^2}} (2r.cos\,\theta + r.sen\,\theta)\,r\,dr\,dy\,d\theta = 0$$

A intregral acima é nula pois a integral das funções $cos\,\theta$ e $sen\,\theta$ de 0 a 2π é nula .

Cálculo de $\iint_{S_2} \vec{F}\vec{N}_2 dS$:

Primeiro, parametrizamos a superfície:

$$\Gamma(u,v) = (u,0,v), \text{ com } 0 \leq u+v \leq 4$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\Gamma}{\partial v} = (0,-1,0)$$

Então:

$$\iint_{S_2} \vec{F}\vec{N}_2 dS = \iint_U -u du\,dv$$

Fazendo:

$$u = r.cos\,\theta,\; v = r.sen\,\theta$$

$$Jacobiano = r$$

Com $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Assim:

$$\iint_{S_2} \vec{F}\vec{N}_2 dS = \iint_U -u du\,dv = -\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 cos\theta\,dr\,d\theta = -4\pi$$

Cálculo de $\iint_{S_3} \vec{F}\vec{N}_3 dS$:

Primeiro, parametrizamos a superfície:

$$\Gamma(u,v) = (u,2,v), \text{ com } 0 \leq u+v \leq 8$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\Gamma}{\partial v} = (0,1,0)$$

Então:

$$\iint_{S_2} \vec{F}\vec{N}_2 dS = \iint_U (u-2v)\,du\,dv$$

Fazendo:

$$u = r.cos\,\theta, v = r.sen\,\theta$$

$$Jacobiano = r$$

Com $0 \leq r \leq 2\sqrt{2}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Assim:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{2}} (r^2 cos\theta - 2r sen\theta) r\,dr\,d\theta = 16\pi$$

Finalmente, calculamos o fluxo dado no enunciado como sendo:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N} dS = \iiint_V div\vec{F}\,dx\,dy\,dz - \iint_{S_2} \vec{F}\vec{N}_2 dS - \iint_{S_3} \vec{F}.\vec{N}_3 dS$$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N} dS = 0 - (-4\pi) - 16\pi$$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N} dS = -12\pi$$