

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Trabalho 6 - 1º semestre de 2015

Questão 1. (2,5 pontos) Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, com $x \geq 0$. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x, y, z) = (zx + 2, \cos(x^2), xz^2)$ através de S orientada com a normal exterior a esfera.

Solução:

Seja S_1 a superfície plana que fecha a superfície S . Como o domínio de \vec{F} não apresenta singularidades na região V definida pelo interior de $S \cup S_1$, e orientando para fora a normal da superfície fechada $S \cup S_1$, pelo Teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS + \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS &= \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz \\ \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS &= - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS + \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz \end{aligned} \quad (1)$$

A superfície S_1 pode ser facilmente parametrizada da seguinte forma:

$$\sigma(u, v) = (0, u, v)$$

Para encontrar os valores de (u, v) em que a superfície S_1 é definida, encontramos a intersecção do plano $x = 0$ com a esfera. Assim temos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2z \end{cases} \Rightarrow y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

Sendo assim, temos que a região R na qual a superfície S_1 é definida é:

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + (v - 1)^2 \leq 1\}$$

Calculando o vetor $\sigma_u \wedge \sigma_v$:

$$\sigma_u = (0, 1, 0)$$

$$\sigma_v = (0, 0, 1)$$

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (1, 0, 0)$$

Como a normal da superfície S_1 é para baixo e $\sigma_u \wedge \sigma_v$ é oposta ao eixo x , invertemos o sinal de $\sigma_u \wedge \sigma_v$ para calcular a integral de superfície. Assim:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_R (0 + 2, \cos(0), 0) \cdot (-1, 0, 0) du dv = -2 \iint_R du dv$$

Como a região R é um disco de raio 1:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = -2\pi \quad (2)$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z + 0 + 2x = z(1 + 2x)$$

Realizando a seguinte mudança para coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi + 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$|J| = \rho^2 \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \text{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_0^1 (1 + \rho \cos \phi)(1 + 2\rho \sin \phi \cos \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_0^1 (\rho^2 \sin \phi + 2\rho^3 \sin^2 \phi \cos \theta + \rho^3 \sin \phi \cos \theta + 2\rho^4 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta) \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \left(\frac{\sin \phi}{3} + \frac{\sin^2 \phi \cos \theta}{2} + \frac{\sin \phi \cos \theta}{4} + \frac{2 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta}{5} \right) d\phi \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \left(\frac{\sin \phi}{3} + \left(\frac{1 - \cos(2\phi)}{2} \right) \frac{\cos \theta}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{8} + \frac{2 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta}{5} \right) d\phi \, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos \phi}{3} + \left(\phi - \frac{\sin(2\phi)}{2} \right) \frac{\cos \theta}{4} - \frac{\cos(2\phi)}{16} + \frac{2 \sin^3 \phi \cos \theta}{5} \right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi \cos \theta}{4} \right) d\theta = \left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\pi \sin \theta}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{6} \\ &\therefore \iiint_V \text{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz = \frac{7\pi}{6} \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo (2) e (4) em (1):

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS = -2\pi + \frac{7\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

Questão 2. (3 pontos) Calcule $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + (x+e^{z^2})dz$, sendo γ a curva dada pela intersecção de $z = 5 - y^2$ e $z = x^2 + 2x + y^2 - 3$, orientada de modo que sua projeção no plano xy é percorrida no sentido anti-horário.

Sugestão: Escreva o campo \vec{F} como $\vec{F}_1 + (0, 0, x)$.

Solução:

Podemos decompor \vec{F} na soma de dois campos vetoriais \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , sendo:

$$\vec{F}_1 = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, e^{z^2} \right); \vec{F}_2 = (0, 0, x)$$

Calculando os rotacionais de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 :

$$\text{Rot}(\vec{F}_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & e^{z^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot (2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(-1) \cdot (x^2+y^2) - (-y) \cdot (2y)}{(x^2+y^2)^2} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

$$\text{Rot}(\vec{F}_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = -\vec{j}$$

Como γ é uma curva fechada e o domínio de \vec{F}_2 é simplesmente conexo, podemos utilizar o teorema de Stokes para calcular $\int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$, escolhendo como superfície $z = 5 - y^2$ limitada por $z = x^2 + 2x + y^2 - 3$, a qual chamaremos de S_2 .

Como a projeção de γ em $0xy$ é no sentido anti-horário, temos que a normal induzida pelo Teorema de Stokes em S_2 tem a componente na direção \vec{k} positiva. Assim, parametrizando S_2 :

$$\sigma(u, v) = (u, v, 5 - v^2)$$

Para encontrar os valores de (u, v) em que a superfície S_2 é definida, encontramos a intersecção da calha com o parabolóide. Assim temos:

$$\begin{cases} z = 5 - y^2 \\ z = x^2 + 2x + y^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow 5 - y^2 = x^2 + 2x + y^2 - 3 \Rightarrow (x+1)^2 + 2y^2 = 9$$

Sendo assim, temos que a região R_2 na qual a superfície S_2 é definida é:

$$R_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u+1)^2 + 2v^2 \leq 9\}$$

Calculando o vetor $\sigma_u \wedge \sigma_v$:

$$\sigma_u = (1, 0, 0)$$

$$\sigma_v = (0, 1, -2v)$$

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (0, 2v, 1)$$

Como $\sigma_u \wedge \sigma_v$ está no mesmo sentido da normal de S_2 , aplicando o Teorema de Stokes, temos:

$$\int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} \text{Rot}(\vec{F}_2) \cdot \vec{N} dS = \iint_{R_2} (0, -1, 0) \cdot (0, 2v, 1) du dv = -2 \iint_{R_2} v du dv$$

Como a região R_2 é simétrica em v e o integrando é uma função ímpar em v :

$$\iint_{R_2} v du dv = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = 0$$

Assim, como $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$, temos que $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$.

Para calcular $\int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$, não podemos escolher uma superfície que seja cortada pelo eixo z

quando aplicarmos o Teorema de Stokes, pois \vec{F}_1 não é definido para pontos do tipo $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Sendo assim, escolhemos a superfície cilíndrica $(x+1)^2 + 2y^2 = 9$ limitada por $z = 0$ e $z = 5 - y^2$, a qual chamaremos de S_1 sendo γ e γ_1 os bordos do cilindro. Como a projeção de γ em $0xy$ é no sentido anti-horário, temos que a normal induzida pelo Teorema de Stokes em S_1 aponta para dentro do cilindro, o que induz uma orientação no sentido horário para γ_1 . Assim, aplicando o Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= \iint_{S_1} \text{Rot}(\vec{F}_1) \cdot \vec{N} dS = 0 \\ \therefore \int_{\gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= - \int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

A região do plano xy interna a γ_1 contém o ponto $(0, 0, 0)$, o qual é uma singularidade de \vec{F}_1 . Então adicionamos a curva $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ a qual isola a singularidade e não se cruza com γ_1 .

Como γ_1 e γ_2 estão no sentido contrário ao induzido pelo Teorema de Green, para aplicar o teorema invertemos os sinais das integrais de linha. Assim, aplicando o teorema de Green:

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= \iint_R \text{Rot}(\vec{F}_1) \cdot \vec{k} dx dy = 0 \\ \therefore \int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= - \int_{\gamma_2} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, 1 \right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -2\pi \\ \therefore \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 2\pi \end{aligned}$$

Questão 3. (1,5 ponto) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e justifique a resposta.

Nos itens \vec{F} denota um campo qualquer definido num aberto conexo do \mathbb{R}^3 de classe C^1 .

1. Se $\text{div}(\vec{F}) = 0$, então $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = 0$, para toda S superfície fechada orientável.
2. Se \vec{F} é conservativo então $\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.
3. Se $\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ então $\text{div}(\vec{F}) = 0$.

Solução:

1. Afirmação falsa. Se \vec{F} tiver singularidades no interior de S , não é possível aplicar o Teorema de Gauss diretamente, o que torna possível a integral não ser nula. Um exemplo disso é a integral do campo $\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$ em uma esfera centrada em $(0, 0, 0)$.
2. Afirmação verdadeira. Se \vec{F} é conservativo, $\vec{F} = \nabla\phi$, logo:

$$\text{Rot}(\vec{F}) = \text{Rot}(\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \right)$$

Como \vec{F} é de classe C^1 , como $\vec{F} = \nabla\phi$, ϕ é de classe C^2 . Pelo Teorema de Clairaut-Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, sendo $f(x, y)$ de classe C^2 . Sendo assim, $\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

3. Afirmação falsa. Seja $\vec{F} = x\vec{i}$, $\text{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ e $\text{div}(\vec{F}) = 1$.