

Adaptative balancing techniques applied to parallel mechanisms

Tarcisio Antonio Hess Coelho^a, Renato Maia Matarazzo Orsino^b, André Garnier Coutinho^a

^a *Department of Mechatronics and Mechanical Systems Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil. E-mail: tarchess@usp.br*

^b *Department of Mechanical Engineering, Escola Politecnica, University of Sao Paulo, Brazil.*

SUMMARY

KEYWORDS:

1 Introduction and literature review

1.1 Dynamic Models

ℜ Modelo do mecanismo RR

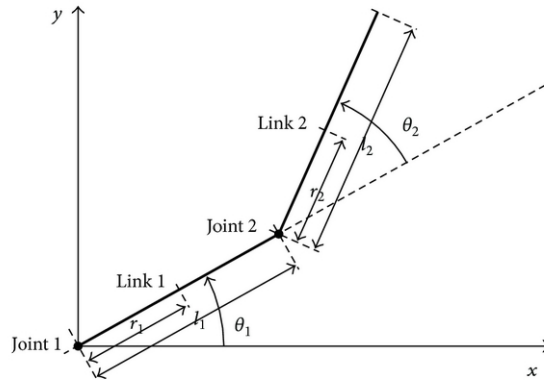


Figure 1: Robô RR

- i) Primeiro definimos ν_q coordenadas q . Estas podem ser subdivididas em $\nu^\#$ coordenadas independentes $q^\#$ e ν_q° coordenadas redundantes q° .

$$q = \begin{bmatrix} q^\# \\ q^\circ \end{bmatrix}$$

No caso do mecanismo RR, temos:

$$q^\# = [\theta_1 \quad \theta_2]^T \quad (1)$$

$$q^\circ = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2]^T \quad (2)$$

Com $\nu^\# = 2$ e $\nu_q^\circ = 4$. Neste caso, as componentes de q° são as coordenadas dos centros de massa das barras, escritas no referencial inercial O_{xy} .

ii) Depois definimos os vetores de velocidades absolutas:

$$\mathbb{w} = \begin{bmatrix} \mathbb{w}_\omega \\ \mathbb{w}_v \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{w}_\omega = [\omega_{z1} \quad \omega_{z2}]^T \quad (3)$$

$$\mathbb{w}_v = [v_{x1} \quad v_{y1} \quad v_{x2} \quad v_{y2}]^T \quad (4)$$

Sendo \mathbb{w}_v as componentes das velocidades absolutas dos centros de massa das barras, escritas nas bases presas s barras, e \mathbb{w}_ω as componentes das velocidades angulares absolutas, escritas nas bases presas s barras.

iii) Definimos ν_p coordenadas \mathbb{p} . Estas podem ser subdivididas em $\nu^\#$ coordenadas independentes $\mathbb{p}^\#$ e ν_p° coordenadas redudantes \mathbb{p}° . As coordenadas $\mathbb{p}^\#$ podem ser subdivididas em $\nu_\omega^\#$ velocidades angulares $\omega^\#$ e $\nu_v^\#$ velocidades lineares $\mathbb{v}^\#$. As coordenadas \mathbb{p}° podem ser subdivididas em ν_ω° velocidades angulares ω° e ν_v° velocidades lineares \mathbb{v}° .

$$\mathbb{p} = \begin{bmatrix} \mathbb{p}^\# \\ \mathbb{p}^\circ \end{bmatrix} \quad \mathbb{p}^\# = \begin{bmatrix} \omega^\# \\ \mathbb{v}^\# \end{bmatrix} \quad \mathbb{p}^\circ = \begin{bmatrix} \omega^\circ \\ \mathbb{v}^\circ \end{bmatrix}$$

Como é conveniente que as velocidades generalizadas \mathbb{p} sejam velocidades absolutas, escolhemos as componentes de \mathbb{p} como sendo as mesmas componentes de \mathbb{w} , respeitando a ordenação indicada acima.

No caso do mecanismo \underline{RR} , temos:

$$\omega^\# = \begin{bmatrix} \omega_{z1} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbb{v}^\# = \emptyset \quad (6)$$

$$\omega^\circ = \emptyset \quad (7)$$

$$\mathbb{v}^\circ = [v_{x1} \quad v_{y1} \quad v_{x2} \quad v_{y2}]^T \quad (8)$$

Com $\nu_\omega^\# = 2$, $\nu_v^\# = 0$, $\nu_\omega^\circ = 0$, $\nu_v^\circ = 4$ e $\nu_p^\circ = \nu_\omega^\circ + \nu_v^\circ = 4$.

- iv) Realizamos a cinemática de posição para os centros de massa das barras, de modo a relacionar as coordenadas q° com as coordenadas $q^\#$. Para isso, utilizamos matrizes de transformação homogênea.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{H}]_{B_0|B_1} &= \begin{bmatrix} Rot(\theta_1, z_0) & \overrightarrow{[0_0 0_1]_{B_0}} \\ \mathbb{O}_{2 \times 1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \overrightarrow{[0_1 G_1]_{B_1}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
[\mathbf{H}]_{B_1|B_2} &= \begin{bmatrix} Rot(\theta_2, z_1) & \overrightarrow{[0_1 0_2]_{B_1}} \\ \mathbb{O}_{2 \times 1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \overrightarrow{[0_2 G_2]_{B_2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{2g} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
[\mathbf{H}]_{B_0|B_2} &= [\mathbf{H}]_{B_0|B_1} [\mathbf{H}]_{B_1|B_2} = \begin{bmatrix} c_{1+2} & -s_{1+2} & l_1 c_1 \\ s_{1+2} & c_{1+2} & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{H}]_{B_0|B_1} \begin{bmatrix} \overrightarrow{[0_1 G_1]_{B_1}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1g} c_1 \\ l_{1g} s_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{H}]_{B_0|B_2} \begin{bmatrix} \overrightarrow{[0_2 G_2]_{B_2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{2g} c_{1+2} \\ l_1 s_1 + l_{2g} s_{1+2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Repare que a partir das matrizes de transformação homogênea encontradas, encontramos também as seguintes matrizes de mudança de base:

$$\mathbb{R}_1 = [\mathbf{1}]_{B_0|B_1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbb{R}_2 = [\mathbf{1}]_{B_0|B_2} = \begin{bmatrix} c_{1+2} & -s_{1+2} \\ s_{1+2} & c_{1+2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Com a cinemática de posição, conseguimos obter $\nu_q^\circ = 4$ equações vinculares de posição. Sendo assim, o vetor dos vínculos de posição dado por:

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} x_1 - l_{1g} c_1 \\ y_1 - l_{1g} s_1 \\ x_2 - l_1 c_1 - l_{2g} c_{1+2} \\ y_2 - l_1 s_1 - l_{2g} s_{1+2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

- v) Utilizamos as matrizes de rotação para calcular as velocidades angulares em função de $q^\#$ e $\dot{q}^\#$:

$$[\omega_1]_{B_1|B_1}^S = \mathbb{R}_1^T \dot{\mathbb{R}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\omega_1]_{B_1} = \dot{\theta}_1 \hat{k} \quad (14)$$

$$[\omega_2]_{B_2|B_2}^S = \mathbb{R}_2^T \dot{\mathbb{R}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\omega_2]_{B_2} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \hat{k} \quad (15)$$

vi) Derivamos as equações de posição ((29) e (30)) para encontrar as velocidades dos centros de massa:

$$[\mathbf{v}_1]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{1g}s_1\dot{\theta}_1 \\ l_{1g}c_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[\mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1s_1\dot{\theta}_1 - l_{2g}s_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1c_1\dot{\theta}_1 + l_{2g}c_{1+2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (17)$$

vii) Passamos as velocidades dos centros de massa para as bases presas nas barras:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1]_{\mathbf{B}_1} &= [\mathbf{1}]_{\mathbf{B}_1 | \mathbf{B}_0} [\mathbf{v}_1]_{\mathbf{B}_0} = \mathbb{R}_1^T [\mathbf{v}_1]_{\mathbf{B}_0} \\ [\mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}_2} &= [\mathbf{1}]_{\mathbf{B}_2 | \mathbf{B}_0} [\mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}_0} = \mathbb{R}_2^T [\mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}_0} \end{aligned}$$

Definindo:

$$\mathbb{R}_\diamond = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_1 & \mathbb{0}_{2 \times 2} \\ \mathbb{0}_{2 \times 2} & \mathbb{R}_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Temos:

$$\mathbf{w}_v = \mathbb{R}_\diamond^T \dot{\mathbf{q}}^\circ \quad (19)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{1+2} & -s_{1+2} \\ 0 & 0 & s_{1+2} & c_{1+2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1g}\dot{\theta}_1 \\ l_1s_2\dot{\theta}_1 \\ (l_1c_2 + l_{2g})\dot{\theta}_1 + l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

viii) Montamos os vetores $\mathbf{p}^\#$ e \mathbf{p}° em função de $\mathbf{q}^\#$ e $\dot{\mathbf{q}}^\#$:

$$\mathbf{p}^\# = \begin{bmatrix} \omega_{z_1} \\ \omega_{z_2} \end{bmatrix} = \mathbb{p}_\star^\#(\mathbf{q}^\#, \dot{\mathbf{q}}^\#) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{p}^\circ = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \end{bmatrix} = \mathbb{p}_\star^\circ(\mathbf{q}^\#, \dot{\mathbf{q}}^\#) = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{1g}\dot{\theta}_1 \\ l_1s_2\dot{\theta}_1 \\ (l_1c_2 + l_{2g})\dot{\theta}_1 + l_{2g}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

ix) Utilizando o fato de que $\mathbb{p}_\star^\#(\mathbf{q}^\#, \dot{\mathbf{q}}^\#)$ e $\mathbb{p}_\star^\circ(\mathbf{q}^\#, \dot{\mathbf{q}}^\#)$ são lineares em $\dot{\mathbf{q}}^\#$, encontramos as transformações lineares $\Psi(\mathbf{q})$ e $\mathbb{V}(\mathbf{q})$ e o vetor dos vínculos de velocidades $\Lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p})$:

$$\mathbf{p}^\# = \mathbb{p}_\star^\#(\mathbf{q}^\#, \dot{\mathbf{q}}^\#) = \frac{\partial \mathbb{p}_\star^\#}{\partial \dot{\mathbf{q}}^\#} \dot{\mathbf{q}}^\# = \Psi \dot{\mathbf{q}}^\# \quad (23)$$

$$\mathbb{p}^\circ = \mathbb{p}_\star^\circ(\mathfrak{q}^\#, \dot{\mathfrak{q}}^\#) = \frac{\partial \mathbb{p}_\star^\circ}{\partial \dot{\mathfrak{q}}^\#} \dot{\mathfrak{q}}^\# = \mathbb{V} \dot{\mathfrak{q}}^\# \quad (24)$$

No caso do mecanismo \underline{RR} , temos:

$$\Psi = \frac{\partial \mathbb{p}_\star^\#}{\partial \dot{\mathfrak{q}}^\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbb{V} = \frac{\partial \mathbb{p}_\star^\circ}{\partial \dot{\mathfrak{q}}^\#} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 + l_{2g} & l_{2g} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Como $\mathbb{p}^\#$ e $\dot{\mathfrak{q}}^\#$ são independentes e tem o mesmo tamanho:

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{q}}^\# &= \Psi^{-1} \mathbb{p}^\# \\ \Rightarrow \mathbb{p}^\circ &= \mathbb{V} \Psi^{-1} \mathbb{p}^\# \end{aligned}$$

$$\therefore \Lambda(\mathfrak{q}, \mathbb{p}) = \mathbb{V} \Psi^{-1} \mathbb{p}^\# - \mathbb{p}^\circ = 0 \quad (27)$$

x) A partir de $\Lambda(\mathfrak{q}, \mathbb{p})$, encontramos o jacobiano \mathbb{A} dos vínculos de velocidade e a matriz \mathbb{C} dos vínculos cinemáticos:

$$\Lambda(\mathfrak{q}, \mathbb{p}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V} \Psi^{-1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \mathbb{p}$$

$$\mathbb{A} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbb{p}} = \begin{bmatrix} \mathbb{V} \Psi^{-1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ l_1 s_2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ l_1 c_2 & l_{2g} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\Lambda(\mathfrak{q}, \mathbb{p}) = 0 \Rightarrow \mathbb{p}^\circ = \mathbb{V} \Psi^{-1} \mathbb{p}^\# \Rightarrow \mathbb{p} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{V} \Psi^{-1} \end{bmatrix} \mathbb{p}^\#$$

$$\therefore \mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{V} \Psi^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_1 s_2 & 0 \\ l_1 c_2 & l_{2g} \end{bmatrix} \quad (29)$$

xi) Como (19) e (23) são transformações inversíveis, encontramos a transformação linear $\mathbb{F}(\mathbf{q})$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^\# \\ \dot{\mathbf{q}}^\circ \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{q}}_\star(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \Psi^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p}^\# \\ \mathbb{R}_\diamond(\mathbf{q}) \mathbf{w}_v(\mathbf{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{z_1} \\ \omega_{z_2} - \omega_{z_1} \\ v_{x_1} \mathbf{c}_1 - v_{y_1} \mathbf{s}_1 \\ v_{x_1} \mathbf{s}_1 + v_{y_1} \mathbf{c}_1 \\ v_{x_2} \mathbf{c}_{1+2} - v_{y_2} \mathbf{s}_{1+2} \\ v_{x_2} \mathbf{s}_{1+2} + v_{y_2} \mathbf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbb{F}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_\star}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{c}_1 & -\mathbf{s}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{c}_{1+2} & -\mathbf{s}_{1+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{s}_{1+2} & \mathbf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

xii) Aplicamos o mtodos de Gibbs-Appel extendido:

O mtodo de Gibbs-Appell apresenta certa simularidade com o mtodo de Lagrange, pois utiliza derivadas de uma função energia para encontrar a equações de movimento do sistema. Porém, a função energia utilizada no a energia cintica, mas sim a energia de acelerações. A energia de acelerações para um corpo rígido é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} m(\mathbf{a}_G \cdot \mathbf{a}_G) + \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + 2\dot{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}))$$

Sendo m a massa do corpo rígido, \mathbf{I} seu tensor de inércia, \mathbf{a}_G o vetor aceleração absoluta de seu centro de massa e $\boldsymbol{\omega}$ o vetor velocidade angular absoluta.

O modelo dinmico utilizando o mtodo de Gibbs-Appel extendido, dado pela seguinte expresso:

$$\mathbb{C}(\mathbf{q})^T (\mathbb{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})) = (\Psi^T)^{-1} \mathbb{f}_{\mathbf{q}^\#} \quad (32)$$

Com:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) = \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \dot{\mathbf{p}}^2} \quad (33)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} - \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \dot{\mathbf{p}}^2} \dot{\mathbf{p}} \quad (34)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbb{F}^T \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} \quad (35)$$

Sendo E_p a energia potencial do sistema e $\mathbb{f}_{\mathbf{q}^\#}$ os esforços nas direções de $\dot{\mathbf{q}}^\#$.

Como já calculamos os vetores de velocidades absolutas dos centros de massa e de velocidades angulares absolutas, escritos em bases presas s barras, as acelerações absolutas dos centros de massa so dadas por:

$$[\mathbf{a}_i]_{\mathbf{B}_i} = \frac{d}{dt}[\mathbf{v}_i]_{\mathbf{B}_i} + [\boldsymbol{\omega}_i]_{\mathbf{B}_i}^S |_{\mathbf{B}_i} [\mathbf{v}_i]_{\mathbf{B}_i}$$

Como o mecanismo plano:

$$[\mathbf{a}_i]_{\mathbf{B}_i} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{x_i} \\ \dot{v}_{y_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_i} \\ \omega_{z_i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{x_i} - \omega_{z_i} v_{y_i} \\ \dot{v}_{y_i} + \omega_{z_i} v_{x_i} \end{bmatrix}$$

No caso do mecanismo RR, temos:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \left(m_1 ((\dot{v}_{x_1} - \omega_{z_1} v_{y_1})^2 + (\dot{v}_{y_1} + \omega_{z_1} v_{x_1})^2) + m_2 ((\dot{v}_{x_2} - \omega_{z_2} v_{y_2})^2 + (\dot{v}_{y_2} + \omega_{z_2} v_{x_2})^2) + J_{z_1} \dot{\omega}_{z_1}^2 + J_{z_2} \dot{\omega}_{z_2}^2 \right) \quad (36)$$

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (37)$$

Calculando as derivadas:

$$\mathbb{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_{z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{z_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 \omega_{z_1} v_{y_1} \\ m_1 \omega_{z_1} v_{x_1} \\ -m_2 \omega_{z_2} v_{y_2} \\ m_2 \omega_{z_2} v_{x_2} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{g} = g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \mathbf{s}_1 \\ m_1 \mathbf{c}_1 \\ m_2 \mathbf{s}_{1+2} \\ m_2 \mathbf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Sendo assim, o modelo dinâmico para o mecanismo RR dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ l_{1g} & 0 \\ l_{1s2} & 0 \\ l_{1c2} & l_{2g} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z_1} \dot{\omega}_{z_1} \\ J_{z_2} \dot{\omega}_{z_2} \\ m_1 \dot{v}_{x_1} \\ m_1 \dot{v}_{y_1} \\ m_2 \dot{v}_{x_2} \\ m_2 \dot{v}_{y_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 \omega_{z_1} v_{y_1} \\ m_1 \omega_{z_1} v_{x_1} \\ -m_2 \omega_{z_2} v_{y_2} \\ m_2 \omega_{z_2} v_{x_2} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \mathbf{s}_1 \\ m_1 \mathbf{c}_1 \\ m_2 \mathbf{s}_{1+2} \\ m_2 \mathbf{c}_{1+2} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Repare que o modelo não depende das coordenadas \mathbf{q}° . Elas foram úteis para a dedução do modelo, mas com o modelo deduzido elas não têm mais utilidade.

- Massa pontual:

$$\mathbb{Q}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbb{P}_n = \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_n \dot{p}_{n,1} \\ M_n \dot{p}_{n,2} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ f_{n,2} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (44)$$

Que pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} M_n & 0 \\ 0 & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ f_{n,2} \end{bmatrix}$$

- RR:

$$\mathbb{Q}_n = \begin{bmatrix} \theta_{1n} \\ \theta_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbb{P}_n = \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \\ p_{n,3} \\ p_{n,4} \\ p_{n,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1 s_{n,2} & 0 \\ l_{g2} + l_1 c_{n,2} & l_{g2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n,1} \\ p_{n,2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1 s_{n,2} & 0 \\ l_1 c_{n,2} & l_{g2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} J_{z1} \dot{p}_{n,1} \\ J_{z2} \dot{p}_{n,2} \\ m_1 \dot{p}_{n,3} \\ m_2 \dot{p}_{n,4} \\ m_2 \dot{p}_{n,5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_1 p_{n,2} p_{n,5} \\ m_1 p_{n,2} p_{n,4} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 c_{n,1} \\ m_2 s_{n,1+2} \\ m_2 c_{n,1+2} \end{bmatrix} \end{cases} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} l_{g1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ l_1 s_{n,2} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ l_1 c_{n,2} & l_{g2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{n,1} \\ \dot{p}_{n,2} \\ \dot{p}_{n,3} \\ \dot{p}_{n,4} \\ \dot{p}_{n,5} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 c_{n,2} p_{n,1} (-p_{n,1} + p_{n,2}) \\ l_1 s_{n,2} p_{n,1} (p_{n,1} - p_{n,2}) \end{bmatrix}$$

Que pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} J_{z1} + J_{z2} + m_1 l_{g1}^2 + m_2 (l_1^2 + 2l_1 l_{g2} c_{n,2} + l_{g2}^2) & J_{z2} + m_2 l_{g2} (l_1 c_{n,2} + l_{g2}) \\ J_{z2} + m_2 l_{g2} (l_1 c_{n,2} + l_{g2}) & J_{z2} + m_2 l_{g2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{g2} s_{n,2} \dot{q}_{n,2}^2 - 2m_2 l_1 l_{g2} s_{n,2} \dot{q}_{n,1} \dot{q}_{n,2} \\ m_2 l_1 l_{g2} s_{n,2} \dot{q}_{n,1}^2 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} m_1 l_{g1} c_{n,1} + m_2 (l_{g2} c_{n,1+2} + l_1 c_{n,1}) \\ m_2 l_{g2} c_{n,1+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- RR (0) com 2 massas acopladas (1 e 2):

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{q}_{0,1} \\ \dot{q}_{0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{0,1} \\ p_{0,2} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ l_{g1} & 0 \\ l_1 s_{0,2} & 0 \\ l_1 c_{0,2} & l_{g2} \\ -L_1 s_{0,1} & 0 \\ L_1 c_{0,1} & 0 \\ -l_1 s_{0,1} & -L_2 s_{0,1} \\ l_1 c_{0,1} & L_2 c_{0,1} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} J_{z1} \dot{p}_{0,1} \\ J_{z2} \dot{p}_{0,2} \\ m_1 \dot{p}_{0,3} \\ m_2 \dot{p}_{0,4} \\ m_2 \dot{p}_{0,5} \\ M_1 \dot{p}_{1,1} \\ M_1 \dot{p}_{1,2} \\ M_2 \dot{p}_{2,1} \\ M_2 \dot{p}_{2,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_1 p_{0,2} p_{0,5} \\ m_1 p_{0,2} p_{0,4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 c_{0,1} \\ m_2 s_{0,1+2} \\ m_2 c_{0,1+2} \\ 0 \\ M_1 \\ 0 \\ M_2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} u_{0,1} \\ u_{0,2} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} l_{g1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 s_{i,2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 c_{i,2} & l_{g2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 s_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1 c_{0,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_1 s_{0,1} & L_2 s_{0,1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l_1 c_{0,1} & -L_2 c_{0,1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{0,1} \\ \dot{p}_{0,2} \\ \dot{p}_{0,3} \\ \dot{p}_{0,4} \\ \dot{p}_{0,5} \\ \dot{p}_{1,1} \\ \dot{p}_{1,2} \\ \dot{p}_{2,1} \\ \dot{p}_{2,1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 c_{0,2} p_{0,1} (-p_{0,1} + p_{0,2}) \\ l_1 s_{0,2} p_{0,1} (p_{0,1} - p_{0,2}) \\ L_1 c_{0,1} p_{0,1}^2 \\ L_1 s_{0,1} p_{0,1}^2 \\ l_1 c_{0,1} p_{0,1}^2 + L_1 c_{0,1+2} p_{0,2}^2 \\ l_1 s_{0,1} p_{0,1}^2 + L_1 s_{0,1+2} p_{0,2}^2 \end{bmatrix}$$

Que pode ser reescrito como:

$$\mathbb{M}^\# \ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{v}^\# + \mathbf{g}^\# = \mathbf{u}_0 \quad (49)$$

Sendo:

$$\mathbb{M}_{1,1}^\# = J_{z1} + J_{z2} + M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2 + m_1 l_{g1}^2 + m_2 l_{g2}^2 + (M_2 + m_2) l_1^2 + 2l_1 c_{0,2} (L_2 M_2 + m_2 l_{g2}) \quad (50)$$

$$\mathbb{M}_{1,2}^\# = \mathbb{M}_{2,1}^\# = J_{z2} + M_2 L_2 (l_1 c_{0,2} + L_2) + m_2 l_{g2} (l_1 c_{0,2} + l_{g2}) \quad (51)$$

$$\mathbb{M}_{2,2}^\# = J_{z2} + M_2 L_2^2 + m_2 l_{g2}^2 \quad (52)$$

$$\mathbf{v}_1^\# = -(M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) l_1 \mathbf{s}_{0,2} \dot{q}_{0,2} (2\dot{q}_{0,1} + \dot{q}_{0,2}) \quad (53)$$

$$\mathbf{v}_2^\# = (M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) l_1 \mathbf{s}_{0,2} \dot{q}_{0,1}^2 \quad (54)$$

$$\mathbf{g}_1^\# = g(M_1 L_1 \mathbf{c}_{0,1} + m_1 l_{g1} \mathbf{c}_{0,1} + (M_2 + m_2) l_1 \mathbf{c}_{0,1} + (M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) \mathbf{c}_{0,1+2}) \quad (55)$$

$$\mathbf{g}_2^\# = g(M_2 L_2 + m_2 l_{g2}) \mathbf{c}_{0,1+2} \quad (56)$$

- RR balanceado:

Escolhendo L_1 e L_2 de modo que $\mathbf{g}^\# = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} L_1 = -\frac{M_2 l_1 + m_1 l_{g1} + m_2 l_2}{M_1} \\ L_2 = -\frac{m_2 l_{g2}}{M_2} \end{cases} \quad (57)$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$\mathbb{M}_{1,1}^\# = J_{z1} + J_{z2} + m_1 l_{g2}^2 + l_1^2 (M_2 + m_2) + \frac{m_2^2 l_{g2}^2}{M_2} + \frac{(m_1 l_{g1} + (M_2 + m_2) l_1)^2}{M_1} \quad (58)$$

$$\mathbb{M}_{1,2}^\# = \mathbb{M}_{2,1}^\# = \mathbb{M}_{2,2}^\# = J_{z2} + \frac{m_2 (M_2 + m_2) l_{g2}^2}{M_2} \quad (59)$$

$$\mathbf{v}_1^\# = \mathbf{0} \quad (60)$$

$$\mathbf{v}_2^\# = \mathbf{0} \quad (61)$$

$$\mathbf{g}_1^\# = \mathbf{0} \quad (62)$$

$$\mathbf{g}_2^\# = \mathbf{0} \quad (63)$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} J_{z1} + J_{z2} + m_1 l_{g2}^2 + l_1^2 (M_2 + m_2) + \frac{m_2^2 l_{g2}^2}{M_2} + \frac{(m_1 l_{g1} + (M_2 + m_2) l_1)^2}{M_1} & J_{z2} + \frac{m_2 (M_2 + m_2) l_{g2}^2}{M_2} \\ J_{z2} + \frac{m_2 (M_2 + m_2) l_{g2}^2}{M_2} & J_{z2} + \frac{m_2 (M_2 + m_2) l_{g2}^2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{n,1} \\ \ddot{q}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \end{bmatrix} \quad (64)$$

- 5R balanceado:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c_{1,1+2}}{l_1 s_{1,2}} & \frac{s_{1,1+2}}{l_1 s_{1,2}} \\ -\frac{l_1 c_{1,1} + l_2 c_{1,1+2}}{l_1 l_2 s_{1,2}} & -\frac{l_1 s_{1,1} + l_2 s_{1,1+2}}{l_1 l_2 s_{1,2}} \\ \frac{c_{2,1+2}}{l_1 s_{2,2}} & \frac{s_{2,1+2}}{l_1 s_{2,2}} \\ -\frac{l_1 c_{2,1} + l_2 c_{2,1+2}}{l_1 l_2 s_{2,2}} & -\frac{l_1 s_{2,1} + l_2 s_{2,1+2}}{l_1 l_2 s_{2,2}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{M}_{1,1}^\# & \mathbb{M}_{1,2}^\# & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{M}_{1,2}^\# & \mathbb{M}_{1,2}^\# & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{M}_{1,1}^\# & \mathbb{M}_{1,2}^\# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{M}_{1,2}^\# & \mathbb{M}_{1,2}^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{0,1} \\ \ddot{q}_{0,2} \\ \ddot{q}_{1,1} \\ \ddot{q}_{1,2} \\ \ddot{q}_{2,1} \\ \ddot{q}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_{1,1+2}}{l_1 s_{1,2}} & \frac{s_{1,1+2}}{l_1 s_{1,2}} \\ \frac{c_{2,1+2}}{l_1 s_{2,2}} & \frac{s_{2,1+2}}{l_1 s_{2,2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{bmatrix} \right. \\
 \left. \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 s_{1,1} + l_2 s_{1,1+2} & l_2 s_{1,1+2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 c_{1,1} - l_2 c_{1,1+2} & -l_2 c_{1,1+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & l_1 s_{2,1} + l_2 s_{2,1+2} & l_2 s_{2,1+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -l_1 c_{2,1} - l_2 c_{2,1+2} & -l_2 c_{2,1+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{0,1} \\ \ddot{q}_{0,2} \\ \ddot{q}_{1,1} \\ \ddot{q}_{1,2} \\ \ddot{q}_{2,1} \\ \ddot{q}_{2,2} \end{bmatrix} = \right. \\
 \left. - \begin{bmatrix} l_1 c_{1,1} \dot{q}_{1,1}^2 + l_2 c_{1,1+2} (\dot{q}_{1,1} + \dot{q}_{1,2})^2 \\ l_1 s_{1,1} \dot{q}_{1,1}^2 + l_2 s_{1,1+2} (\dot{q}_{1,1} + \dot{q}_{1,2})^2 \\ l_1 c_{2,1} \dot{q}_{2,1}^2 + l_2 c_{2,1+2} (\dot{q}_{2,1} + \dot{q}_{2,2})^2 \\ l_1 s_{2,1} \dot{q}_{2,1}^2 + l_2 s_{2,1+2} (\dot{q}_{2,1} + \dot{q}_{2,2})^2 \end{bmatrix} \right) \quad (65)$$

Acknowledgments