Sprawozdanie z laboratorium nr 3
Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych

Emilia Mączka, Marcin Sawczuk, Daniel Warloch, Weronika Wisz

1 Czy równanie jest stabilne?

Do sprawdzenia stabilności równania potrzebujemy znaleźć wartości własne równania charakterystycznego macierzy stanu. Najpierw przekształcamy równanie 2. rzędu $ay'' + by' + cy = 0$ z warunkami początkowymi $y(0) = 1, y'(0) = 2$ na układ równań 1. rzędu.

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix}$$

Dla współczynników równania $a = 1, b = 1/2, c = 1$, korzystając z funkcji $lambda = eig(A)$ otrzymujemy wartości własne równe:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.5 + 0.5i \\ \lambda_2 = -0.5 - 0.5i \end{cases}$$

Wartości własne leżą w lewej półpłaszczyźnie układu współrzędnych (mają części rzeczywiste ujemne), wniosek: **równanie jest stabilne**.

2 Jaka jest graniczna (pod względem stabilności rozwiązania) długość kroku metody Eulera.

Obserwując zachowanie wykresów (korzystamy z pliku cw3_Euler.m) dla różnych kroków h można zauważyć:

- $h < 2$ rozwiązanie numeryczne stabilne, błąd nie rośnie,
- $h = 2$ granica stabilności, rozwiązanie oscyluje, ale błąd nie rośnie,
- $h > 2$ rozwiązanie nie jest stabilne, bład rośnie.

Na podstawie wykresów wnioskujemy, że **graniczna długość kroku metody Eulera (pod względem stabilności rozwiązania) to h=2**.

3 Czy jest zgodność tej wartości z wartością odczytaną z wykresu obszaru stabilności absolutnej? Krótkie uzasadnienie.

Do sprawdzenia zgodności naszej obserwacji (czy h=2 jest graniczną długością (pod względem stabilności rozwiązania) kroku metody Eulera?), korzystamy z poznanego na wykładnie wielomianu stabilności absolutnej:

$$\pi(z, h\lambda) = \rho(z) + h\lambda\sigma(z)$$

Metoda będzie absolutnie stabilna dla kroku h, jeżeli dla każdej wartości własnej λ macierzy A, spełnione będzie:

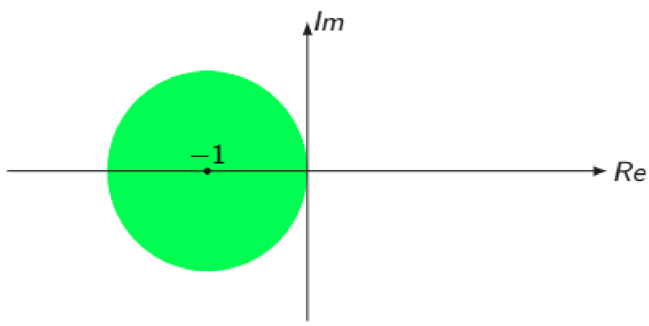
$$\pi(z, h\lambda) = 0 \Rightarrow |z| < 1$$

Dla metody Eulera wielomian stabilności wygląda następująco:

$$\pi(z, h\lambda) = z - (1 + h\lambda)$$

Po przekształceniach otrzymujemy warunek stabilności dla metody Eulera, podstawiamy wartości własne naszego równania:

$$|1 + h\lambda| < 1 \qquad |1 + h(-0.5 \pm 0.5i)| < 1$$



Rysunek 1: Obszar stabilności absolutnej jawnej metody Eulera

Analizując to równanie i wykres dochodzimy do wniosku, że dla $h = 2$ jesteśmy na granicy stabilności. Iloczyn kroku $h = 2$ i wartości własnych $\lambda_{1,2} = (-0.5 \pm 0.5i)$ to $\pm i$, czyli znajduje się na granicy koła jednostkowego definiującego obszar stabilnosci dla metody Eulera. Dla $h > 2$ wychodzimy poza obszar stabilności, dlatego nie mamy już pewności, że błąd naszego rozwiązania nie bedzie rósł. Tak też się dzieje w obserwowanym przykładzie, poza obszarem

stabilności absolutnej, błąd rośnie (ale nie jest to zasada, może się zdarzyć, że znajdziemy dobre rozwiązanie poza obszarem stabilności). Dla $h < 2$ znajdujemy się w obszarze stabilności absolutnej, błąd rozwiązania nie rośnie.
To jaka jest graniczna długość kroku metody Eulera zależy od wartości własnych macierzy stanu, więc dla innych równań może mieć ona różną wartość.

4 Jak szybko maleje błąd metody Eulera gdy krok zmniejszamy o połowę? Czy ta relacja zmienia się ze zmianą kroku? Jak? Czym to tłumaczyć?

Dla metody Eulera, gdy zmniejszymy krok h o połowę, to jednocześnie błąd maleje dwukrotnie - zachowuje się jak O(h). Przy coraz mniejszym kroku obliczeń otrzymujemy lepsze wyniki. Na początku jest to zależność wykładnicza, z czasem przechodzi w liniową (w okolicy h = 0.5). Np.:
RMSE = 0.4782 dla h = 1,
RMSE = 0.1722 dla h = 0.5,
RMSE = 0.0756 dla h = 0.25, poniżej zachowują się liniowo.
W pewnym momencie jednak musimy dojść do tak małego kroku, że wyniki stają się niewiarygodne, liczby nie są poprawnie reprezentowane.

5 Jak szybko maleje błąd metody RK4 gdy krok zmniejszamy o połowę? Czy ta relacja zmienia się ze zmianą kroku? Jak? Czym to tłumaczyć?

Dla metody Rungego-Kutty 4 zmniejszenie kroku powoduje wykładnicze zmniejszanie się błędu (nawet 25-krotne, później ten iloraz jest coraz mniejszy), ta relacja nie zmienia się. Błąd lokalny to $O(h^5)$, a całkowity jeden rząd mniejszy. Tak duża potęga sprawia, że błąd bardzo szybko maleje, już przy h=1 jest niemal zerowy. Np.:
RMSE = 0.0023 dla h = 1,
RMSE = 0.000127 dla h = 0.5,
RMSE = 0.0000075 dla h = 0.25,
Podobnie jak w metodzie Eulera, gdy zastosujemy zbyt mały krok, nasze wyniki będą "przekłamane", przedstawiane liczby okażą się numerycznie niepoprawne.

6 Jaki jest koszt obliczeniowy jednego kroku metody Eulera, a jaki RK4?

O czasie rozwiązania decyduje to, ile razy tą funkcję prawej strony równania różniczkowego(tu: sprowadza się do mnożenia przez macierz A) trzeba policzyć.

```
% petla iteracji metody Eulera:
for i=1:n-1
  y_E(:,i+1) = y_E(:,i) + h*A*y_E(:,i);
end
```

Rysunek 2: Metoda Eulera

W Metodzie Eulera na jeden krok przypada jedna kosztowna operacja - wykonujemy jednokrotnie mnożenie przez macierz A.

```
% petla iteracji 4-etapowej metody Rungego-Kutty:
for i=1:n-1
  yn = y_RK(:,i);
  k1 = h*A*yn;
  k2 = h*A*(yn+k1/2);
  k3 = h*A*(yn+k2/2);
  k4 = h*A*(yn+k3);
  y_RK(:,i+1) = yn + (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
```

Rysunek 3: Metoda Rungego-Kutty

W Metodzie Rungego-Kutty na jeden krok przypadają 4 kosztowne operacje - wykonujemy 4 razy mnożenie przez macierz A.

Krok Metody Rungego-Kutty jest 4-krotnie "droższy" niż Metody Eulera.

7 Dla której metody koszt obliczeniowy liczony dla całego przedziału rozwiązania jest mniejszy (gdy dokładność rozwiązań obydwiema metodami jest na tym samym poziomie)?

W celu odpowiedzi na pytanie stworzyliśmy program, który oblicza czas rozwiązania oraz błąd obu metod dla kilku różnych wartości kroku h tych że metod. Przy podobnym czasie rozwiązania obiema metodami różnica między błędami jest znacząca. Przy zmniejszaniu kroku różnica między błędami się powiększa. Na podstawie tego można wywnioskować, iż dla tej samej dokładności metoda Rungego-Kutty ma mniejszy koszt obliczeniowy przy tej samej dokładności dla obu metod.

Krok metody	Czas wykonania M. Eulera	Błąd M. Eulera	Czas wykonania M. RK	Błąd M. RK
h = 4.000000	Euler = 0.002009	Euler błąd = 1.309196e+04	RK = 0.004899	RK błąd = 1.371669e+01
h = 2.000000	Euler = 0.002608	Euler błąd = 3.532142e+00	RK = 0.005305	RK błąd = 2.937355e-02
h = 1.000000	Euler = 0.002975	Euler błąd = 2.678308e-01	RK = 0.005582	RK błąd = 1.293317e-03
h = 0.500000	Euler = 0.003344	Euler błąd = 9.543068e-02	RK = 0.005981	RK błąd = 7.015456e-05
h = 0.250000	Euler = 0.005191	Euler błąd = 4.163687e-02	RK = 0.007695	RK błąd = 4.109911e-06
h = 0.062500	Euler = 0.007055	Euler błąd = 9.508177e-03	RK = 0.010274	RK błąd = 1.531577e-08
h = 0.031250	Euler = 0.010841	Euler błąd = 4.686995e-03	RK = 0.014165	RK błąd = 9.498030e-10
h = 0.016129	Euler = 0.017552	Euler błąd = 2.402718e-03	RK = 0.021558	RK błąd = 6.714775e-11
h = 0.010000	Euler = 0.028272	Euler błąd = 1.485613e-03	RK = 0.034037	RK błąd = 9.907138e-12
h = 0.001000	Euler = 0.126251	Euler błąd = 1.479676e-04	RK = 0.152968	RK błąd = 1.348538e-15
h = 0.000100	Euler = 0.960039	Euler błąd = 1.479086e-05	RK = 1.241516	RK błąd = 2.216983e-15

Rysunek 4: Wynik działania programu

8 Czy wykonane eksperymenty wykazały jakiekolwiek zalety metody adaptacyjnej?

Tak. Eksperyment wykazał kilka zalet metody adaptacyjnej**(Rungego-Kutty RK45)**, główną z nich jest to, że dała ona znacząco dokładniejszy wynik w porównaniu do pozostałych metod **(Euler, RK4)**. Drugą ważną zaletą tej metody jest to iż bardzo dobrze radzi sobie z układami o zmiennej dynamice (poprzez zmniejszenie wartości kroków na odcinkach tego wymagających (odcinki o dużej zmienności wartości)).

9 Czy dokładność tol zadawana dla metody adaptacyjnej odnosi się do błędu lokalnego czy globalnego (rozwiązania równanie)?

Odnosi się ona do **błędu lokalnego.**

Po każdej z iteracji, algorytm w oparciu o aktualną wartość błędu przybliżenia decyduje, jak powinien zmodyfikować wartość kroku w następnej iteracji aby uzyskać jak najdokładniejszy wynik (najmniejszy błąd) w rozsądnym czasie.