5 Instrukcja dla ćwiczenia nr 5: Symulacja obiektu dynamicznego.

5.1 Wstęp – o symulacji systemów dynamicznych ciągłych

1. Można wyróżnić trzy sposoby podejścia do symulacji systemów – w zależności od wiedzy, jaką o systemie posiadamy:

   - Znamy wystarczająco dokładny opis ciągłego (lub dyskretnego) systemu dynamicznego równaniami różniczkowymi (lub różnicowymi – *równaniom różnicowym jest poświęcony inny przedmiot).* Przykładem może być problem 3 ciał - symulacja ruchu satelity w polu grawitacyjnym dwóch dużych mas np. Ziemi i jej księżyca - silnie nieliniowy, ale precyzyjny układ równań różniczkowych. *Symulację prostego przykładu – oscylatora harmonicznego z tłumieniem – realizowaliśmy w ćwiczeniu 3.*
   - Na symulowany proces ma wpływ wiele czynników. Dokładny opis wszystkich zależności prowadziłby do dużej komplikacji modelu, co prowadziłoby do dużego kosztu obliczeniowego symulacji. *Ten przypadek jest tematem tego ćwiczenia.*
   - Złożoność symulowanego procesu jest bardzo duża (np. przebieg notowań giełdowych). Symulacje przeprowadza się nie na bazie teoretycznych równań, lecz dużej ilości danych pomiarowych, wykorzystując np. metody statystyczne, sztuczną inteligencję itp. *Mizerny wstęp będzie na ostatnich ćwiczeniach.*

2. W praktyce, tworzenie modelu zaczynamy od opisu przybliżonym (niedokładnym, uproszczonym) równaniem różniczkowym tj. równaniem o prostej strukturze i przybliżonych parametrach. Powstaje pierwszy model teoretyczny.

3. Drugim etapem jest rozwiązanie równania i **weryfikacja** – sprawdzenie, czy otrzymane rozwiązanie spełnia wymagania jakościowe, np. poprawne warunki początkowe, spodziewany charakter przebiegów czasowych (występowanie oscylacji, monotoniczność, stabilność itp.). Jeżeli wymagania te nie są spełnione, to wracamy do punktu poprzedniego – modyfikacji rónania.

4. Trzecim etapem jest **kalibracja**. Ten etap wymaga eksperymentu w realnym systemie – konieczne są pomiary wartości tych rzeczywistych (fizycznych) zmiennych, które mają być symulowane (występują w modelu). Kalibracja polega na wyznaczeniu takich wartości parametrów modelu, dla których wyniki symulacji (tj. rozwiązania rónania różniczkowego) najmniej odbiegają od danych zmierzonych w realnym systemie.

5. Jeżeli błąd symulacji (odległość między danymi symulowanymi a zmierzonymi) przekracza tolerowaną wielkość błędu, to należy wrócić do etapu pierwszego - zmienić model, czyli rónanie różniczkowe (np. rozważyć które dotychczasowe uproszczenia należy zastąpić opisem dokładniejszym).

Celem ćwiczenia jest realizacja pierwszych etapów modelowania systemu w przypadku, gdy **jest możliwość matematycznego opisu zjawiska oraz są dostępne wyniki fizycznego eksperymentu**. Ćwiczenie obejmuje etapy:

- Konstrukcji modelu teoretycznego.
- Weryfikacji.
- Kalibracji.

Ostatni etap – walidacji – pominiemy ze względu na brak dostatecznej ilości danych empirycznych.

Modelowanym (symulowanym) zjawiskiem będzie prosty proces fizyczny – wypływ wody ze zbiornika.

5.2 Opis fizycznego obiektu i wykonanych pomiarów

- Jako zbiornik posłużył jeden z elementów sokownika SOK5SN. Opis zbiornika jest dostępny w pliku `cw5_geometria_zbiornika_v2.pdf`. Opis podobnego artykułu można znaleźć na stronie www.browin.pl
- Zbiornik ma kształt walca z rurką odpływową na dole zbiornika. Dno zbiornika nie jest płaskie – ma wybrzuszenie w kształcie stożka ściętego. Rurka wypływowa jest zamknięta zaciskiem. Zbiornik wypełniamy wodą (o temperaturze pokojowej) do wysokości h_0. W zbiorniku jest umieszczona miarka (linijka) umożliwiająca odczyt wysokości powierzchni wody (mierzonej od poziomu osi rurki odpływowej).
- W chwili czasu $t = 0$ otwieramy zacisk na rurce odpływowej i obserwujemy obniżający się poziom wody. Używając stopera zaznczamy momenty, kiedy poziom wody osiąga kolejne wartości - co 10 mm. Zmierzone dane (czas w sekundach, wysokość w metrach) są zapisane w pliku `cw5_wykres_pomiarow.m`
- Eksperyment został przeprowadzony 2 lata temu.

  Jeżeli są osoby, które mają dostęp do takiego lub podobnego zbiornika (np. sokownika), to zachęcam do samodzielnego przeprowadzenia takich pomiarów. Udostępnienie parametrów obiektu i wyników pomiarów będzie dodatkowo punktowane.

5.3 Plan ćwiczenia nr 5

1. Zbudowanie teoretycznego, uproszczonego modelu dynamiki prostego zjawiska fizycznego – równania różniczkowego opisującego swobodny wypływ wody ze zbiornika.

   Propozycja prostego modelu, w którym skorzystamy:

   - Z prawa zachowania masy:

     Jeżeli w czasie Δt poziom wody obniży się o Δh, to w tym samym czasie czoło wody w rurce wypływowej przesunie się o Δs.
     Jaka jest relacja między Δh a Δs ?

   - Z prawa zachowania energii mechanicznej:

     Ubytek energii potencjalnej wody w zbiorniku jest równy energii kinetycznej wody wypływającej. Czy prędkość wypływu wody można wyrazić za pomocą Δs?

   Po wyrugowaniu Δs i prędkości, otrzymujemy równanie różniczkowe

   $$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h} \tag{1}$$

   gdzie k jest stałą, $k = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}$ – symbole stałych zgodne z oznaczeniami przyjętymi w `cw5_geometria_zbiornika_v2.pdf`

2. Numeryczne rozwiązanie równania

   W pliku `cw5_rozw_numeryczne.m` jest skrypt rozwiązujący otrzymane równanie 4-etapową metodą Rungego-Kutty. Punkty rozwiązania rysowane są na wykresie.

3. Weryfikacja modelu.

   Kryteria oceny rozwiązania – czego oczekiwaliśmy i czy symulacja spełnia (jakościowo) te oczekiwania:

   - ???
   - ???
   - ???

4. Porównanie rozwiązania z wynikami fizycznego doświadczenia.

   W pliku `cw5_wykres_pomiarow.m` jest skrypt, który nanosi dane pomiarowe na wykres rozwiązania.

5. Szukanie źródeł błędów.

   (a) Ocena błędu numerycznego,
   Jak oszacować numeryczny błąd rozwiązania otrzymanego metodą RK4?

(b) Eliminacja błędu numerycznego – analityczne rozwiązanie równania różniczkowego.

Czy równanie (1) można rozwiązać analitycznie? Jaką metodą?

Rozwiązanie analityczne można przedstawić w dwóch postaciach:

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{k}{2}t\right)^2 \tag{2}$$

$$t(h) = \frac{2}{k}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right) \tag{3}$$

W pliku `cw5_wykres_rozw_analit.m` jest skrypt rysujący wykres rozwiązania analitycznego.

Weryfikacja rozwiązania analitycznego. Czy to rozwiązanie jest poprawne?
W jakim zakresie wysokości h? Dlaczego?

Wniosek z obserwacji wykresów: Czy głównym źródłem błędu symulacji jest błąd numerycznego rozwiązania równania, czy błąd modelu?

(c) Analiza błędu modelu

Skoro rozwiązanie numeryczne, a przede wsystkim analityczne jest znacznie oddalone od pomiarów, to główne źródło błędu jest w modelu. Są dwie możliwości (nie wyłączające się):

- niewłaściwe wartości parametrów,
- niewłaściwa struktura modelu (równania).

W punkcie 7 spróbujemy zachować równanie różniczkowe, ale zmienimy wartość jego parametru.

6. Ilościowa ocena błędu

W celu obliczenia wielkości błędu należy wybrać normę odległości pomiarów od rozwiązania analitycznego.

Jakie są tu (trzy) możliwości?

W pliku `cw5_blad_symulcji.m` jest funkcja, która dla zadanej wartości parametru k oblicza RMSE - pierwiastek ze średniego błędu kwadratowego (oraz wyprowadza na ekran błędy liczone wg dwóch pozostałych norm).

Szczegóły algorytmu są opisane w sekcji 5.3.1

7. Kalibracja modelu

(a) „Ręczna” - należy „ręcznie” zmieniać wartość parametru k modelu tak, aby błąd symulacji był najmniejszy.

Należy użyć skryptu `cw5_rozw_numeryczne.m` z innymi wartościami parametru k i dążyć do zbliżenia wykresu symulacji do danych pomiarowych. Najlepszą wartość k należy zanotować.

Takie ręczne poszukiwanie optymalnego parametru jest metodą prymitywną i nie do przyjęcia. Gdy liczba parametrów modelu m jest duża, to poszukiwania optimum trzeba prowadzić w przestrzeni $m-$wymiarowej, a to prowadzi do dużego koszt obliczeniowego.

(b) Obliczenie optymalnych wartości parametrów .

Jest to problem optymalizacji statycznej, czyli problem znalezienia argumentów funkcji, dla których funkcja ma wartość minimalną. Te zagadnienia są omawiane na wykładzie Optymalizacja.

W skrócie:

Problem znalezienia minimum funkcji f można sprowadzić do zagadnienia liniowego (czyli rozwiązania układu równań liniowych) w przypadku, gdy f jest funkcją kwadratową. Wtedy warunek konieczny ekstremum (zerowanie się pochodnej funkcji lub – w przypadku funkcji wielu zmiennych – zerowanie się wszyskich pochodnych cząstkowych względem każdej ze zmiennych) jest równaniem (lub układem równań) liniowym.

- **Pytanie zasadnicze:**
  Którą wersję zależności ($h(t)$ czy $t(h)$ – funkcje (2), (3)) i którą normę należy wybrać, aby było możliwe sprowadzenie zadania znalezienuia optymalnej wartości parametru modelu do rozwiązania równania liniowego.

  W pliku `cw5_kalibracja.m` jest skrypt obliczający optymalną wartość parametru k_{opt} Należy porównać tę wartość z zanotowaną – znalezioną „ręcznie".

- **Pytanie dodatkowe:**
  Pomiary (we wszystkich 15 punktach) obejmują przedział zmienności wysokości h od h_0 do ok. zera. Czy w całym tym zakresie obowiązuje przyjęty model?

  Uwaga: Od pewnej wysokości, z wody wyłoni się stożek. Czy fakt ten wpłynie na tempo obniżania się poziomu lustra wody?
  Jeżeli tak, to opadanie lustra wody będzie przyspieszone, czy zwolnione?

- **Do samodzielnego zrobienia:**
  - Procedury obliczania błędu oraz optymalnej wartości paramtru k należy wykonać uwzględniając tylko te pomiary, dla których cały stożek jest zanurzony.
  - Wykres symulacji otrzymanej dla nowej wartości parametru k należy dodać do wykresu symulacji poprzedniej (dla k optymalizowanego na podstawie wszystkich pomiarów).
  - Przeprowadzić analizę zauważonych różnic – szczegóły w części „Punkty sprawozdania" 5.5(f).

5.3.1 Dodatek: Opis algorytmu obliczania optymalnych parametrów modelu

Przyjmijmy ogólne oznaczenia:

x – zmienna niezależna,

y – zmienna zależna,

p – parametr funkcji,

f – funkcja jednej zmiennej z jednym parametrem $y = f(x;p)$ (parametry od zmiennych oddziela się średnikiem)

x_i – wartość zmiennej niezależnej, dla której był wykonany i-ty pomiar,

y_i – wartość zmierzona w i-tym pomiarze.

Dane są wartości x_i, $i = 1, \ldots, n$. Szukamy takiej wartości parametru p, dla której odległość punktów (x_i, y_i) od funkcji $y = f(x;p)$ jest najmniejsza.

Jeżeli zastosujemy normę średniokwadratową, to miarą błędu będzie

$$J = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i;p))^2 .$$

Szukamy

$$p_{opt} = \underset{p}{\operatorname{argmin}} J(p)$$

Jakiego typu musi być zależność y od p, aby wartość błędu J zależała od p kwadratowo?

Musi to być zależność liniowa.

Załóżmy, że $f(x;p) = p \cdot g(x)$ czyli $y = p \cdot g(x)$. Wtedy

$$J = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - pg(x_i))^2 .$$

Warunkiem koniecznym ekstremum jest zerowanie się w nim pochodnej

$$\left. \frac{dJ}{dp} \right|_{p=p_{opt}} = 0$$

Zatem

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [-2(y_i - p_{opt} \cdot g(x_i))g(x_i)] = 0,$$

Stąd wyliczamy optymalną wartość parametru p.

$$p_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i g(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} g(x_i)^2}$$

5.4 Skrypty do ćwiczenia 5

(a) `cw5_geometria_zbiornika_v2.pdf`

(b) `cw5_wykres_pomiarow.m` – skrypt rysujący wykres z wynikami eksperymentu fizycznego. Czas mierzony w sekundach, wysokość w metrach.

(c) `cw5_rozw_numeryczne.m` – skrypt rysujący wykres numerycznego rozwiązania równania różniczkowego,

(d) `cw5_rozw_analit.m` – skrypt rysujący wykres analitycznego rozwiązania równania różniczkowego,

(e) `cw5_blad_symulacji.m` – funkcja obliczająca odległość pomiarów od przebiegu symulacji modelu z parametrem k,

(f) `cw5_kalibracja.m` – skrypt obliczający optymalną wartość parametru modelu i rysujący wykres optymalnej symulacji.

5.5 Punkty sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać większość z poniższych punktów oraz odpowiedzi na pytania pojawiające się w części 5.3.

(a) Wyprowadzenie równania modelu i rozwiązania analitycznego.

(b) Jakie cechy rozwiązania równania (przebiegu symulacji) można przewidzieć?

(c) Weryfikacja rozwiązania numerycznego i analitycznego – czy przewidywania się spełniły?

(d) Jakie normy (metryki) są używane do liczenia błędu aproksymacji.

(e) Uzasadnienie wyboru funkcji i normy do wyznaczania optymalnego parametru modelu.

(f) Dalsza część weryfikacji - analiza modelu w strefie wyłaniania się stożka z wody:

   i. Jak (jakościowo i teoretycznie) wyłaniający się z wody stożek ścięty wpływa na zależność $h(t)$?

   ii. Czy przyjęcie do kalibracji pomiarów z fazy „stożka pod wodą” poprawia jakość symulacji w tym zakresie?

   iii. Przeprowadźmy symulację poza ww. zakres – będzie to ekstrapolacja.
   Czy – uwzględniając odpowiedź na pytanie 5.5(f)i. – dane pomiarowe są po właściwej (przewidzianej) stronie wykresu ekstrapolacji symulacji?
   Czy ta obserwacja może być częścią weryfikacji modelu?

(g) Jakie uproszczenia są przyjęte w zastosowanym modelu?
Gdyby błąd symulacji z optymalną wartością parametru modelu przekroczył założoną dopuszczalną granicę, to z jakich uproszczeń modelu należałoby zrezygnować?