Sprawozdanie z laboratorium nr 5
Symulacja obiektu dynamicznego

Emilia Mączka, Marcin Sawczuk, Daniel Warloch, Weronika Wisz

Spis treści

1 Wyprowadzenie równania modelu i rozwiązania analitycznego.

1.1 Wyprowadzenie równania modelu.

Z prawa zachowania masy:
Zmiana masy wody w zbiorniku jest równa masie wody, która wypłynęła przez rurkę.

$$\Delta m = \rho \Delta h \frac{D^2}{4}$$

$$\Delta m = \rho \Delta s \frac{d^2}{4}$$

$$\rho \Delta h \frac{D^2}{4} = \rho \Delta s \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta s} = \frac{d^2}{D^2}$$

Z prawa zachowania energii mechanicznej:
Ubytek energii potencjalnej wody w zbiorniku jest równy energii kinetycznej wody wypływającej.

$$\Delta mgh = \frac{\Delta m V^2}{2}$$

$$V^2 = 2gh$$

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{2gh} \quad | \cdot \frac{\Delta h}{\Delta s}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta h}{\Delta s}\sqrt{2gh}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}$$

Z powyższych przekształceń otrzymujemy równanie:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -k\sqrt{h} \text{ ,gdzie } k = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}$$

Symbole stałych zgodne z oznaczeniami przyjętymi w cw5_geometria_zbiornika_v2.pdf oraz cw5_Instrukcja_2020_v6.pdf

1.2 Rozwiązanie analityczne

$$\frac{\delta h}{\delta t} = -k\sqrt{h}$$

$$\delta t = \frac{\delta h}{-k\sqrt{h}}$$

$$t + C = -\frac{2\sqrt{h}}{k}$$

$$h = (-\frac{tk}{2} + C)^2$$

Znajdując wartość C na podstawie pierwszego rozwiązania h_0:

$$h_0 = (-\frac{k \cdot 0}{2} + C)^2 \Rightarrow C = \sqrt{h_0}$$

Możemy obliczyc kolejne wartości h:

$$h = (\sqrt{h_0} - \frac{tk}{2})^2$$

2 Jakie cechy rozwiązania równania (przebiegu symulacji) można przewidzieć?

Przyjęty przez nas model jest uproszczony, nie uwzgędnia on wszystkich aspektów rzeczywistego zjawiska. Nieuwzględnione są w nim między innymi lepkość (właściwość płynów i plastycznych ciał stałych charakteryzująca ich tarcie wewnętrzne), przez co prędkość obniżania wody przez nasz model prawdopodobnie będzie większa od rzeczywistej. Znaczącym uproszczeniem jest również pominięcie stożka w podstawie zbiornika. Możemy przewidywać, że w momencie kiedy woda w zbiorniku zejdzie poniżej wysokości stożka, powierzchnia tafli jest zmniejszona i woda będzie wypływać szybciej.

3 Weryfikacja rozwiązania numerycznego i analitycznego – czy przewidywania się spełniły?

Przewidywania się sprawdziły. Równania nie uwzględniły niektórych kwestii, tj. pominięty został stożek oraz lepkość płynów. W wyniku można by się spodziewać, iż początkowy wolny spadek poziomy wody przyspieszy w momencie gdy dotrze do poziomu, na którym znajduje się stożek, gdyż ilość wody jaka musi opuścić naczynie, by obniżyć wysokość słupa cieczy jest mniejsza. Tak się nie dzieje. Nierealna jest sytuacja, iż po osiągnięciu 0, poziom wody znow wzrośnie. Ulepszenie modelu i dopasowanie do naszych wymagań sprawi jednak, że przestanie być uniwersalny.

4 Jakie normy (metryki) są używane do liczenia błędu aproksymacji.

Do liczenia błędu aproksymacji stosowane są normy:

- RSME (Root Mean Square Error) - minimalizacja błędu, będącego pierwiastkiem z sumy kwadratów obciązenia, pokazuje czy nie wsytępują duże błędy
- MAE (Mean Absolute Error) - suma wartości bezwzględnych różnic, wskazuje średni błąd aproksymacji; powinna być jak najmniejsza,
- Maksymalna wartość bezwzględna błędu

5 Uzasadnienie wyboru funkcji i normy do wyznaczania optymalnego parametru modelu.

Aby nasza funkcja symulowała rzeczywisty model musimy znaleźć odpowiednie k. Funkcją z której łatwo będzie ją wyznaczyć jest

$$t(h) = \frac{2}{k}(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}),$$

a normą

$$J = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (y_i - x_i)^2},$$

gdyż po podstawieniu $x = \frac{2}{k}$ i wstawieniu tego do normy RMSE otrzymujemy równanie

$$J = \sqrt{\frac{1}{n}\sum \Big(t - x(\sqrt{h_0} - \sqrt{h})\Big)^2},$$

gdzie mamy pod pierwiastkiem zależność kwadratową. Pochodną funkcji kwadratowej jest funkcja liniowa, z której bardzo łatwo jest wyliczyć miejsce zerowe. Dla nas taka zależność będzie oznaczać, że możemy w łatwy sposób wyliczyć optymalną wartość parametru x(a potem k) dla której funkcja J przyjmuje minimum.
Rozwiązując powyższe zadanie otrzymujemy:

$$k = 2\frac{\sum(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_i})^2}{\sum t(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_i})}.$$

6 Dalsza część weryfikacji - analiza modelu w strefie wyłaniania się stożka z wody:

6.1 Jak (jakościowo i teoretycznie) wyłaniający się z wody stożek ścięty wpływa na zależność h(t)?

Zgodnie z naszym równaniem

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{k}{2}t\right)^2$$

zachodzi zależność

$$h(t) \sim k^2$$

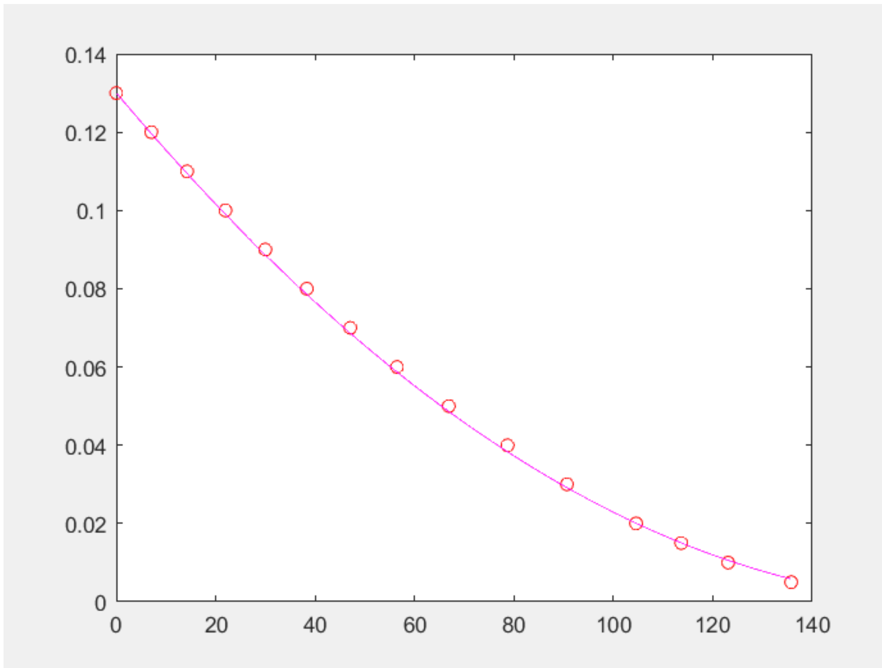
gdzie

$$k = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}$$

w związku z tym prawdziwa jest także zależność

$$h(t) \sim \frac{1}{D^4}$$

Po wyłonieniu się stożka powierzchnia tafli wody się zmniejsza. Zgodnie z powyższą zależnością tempo opadania poziomu wody powinno się zwiększyć.

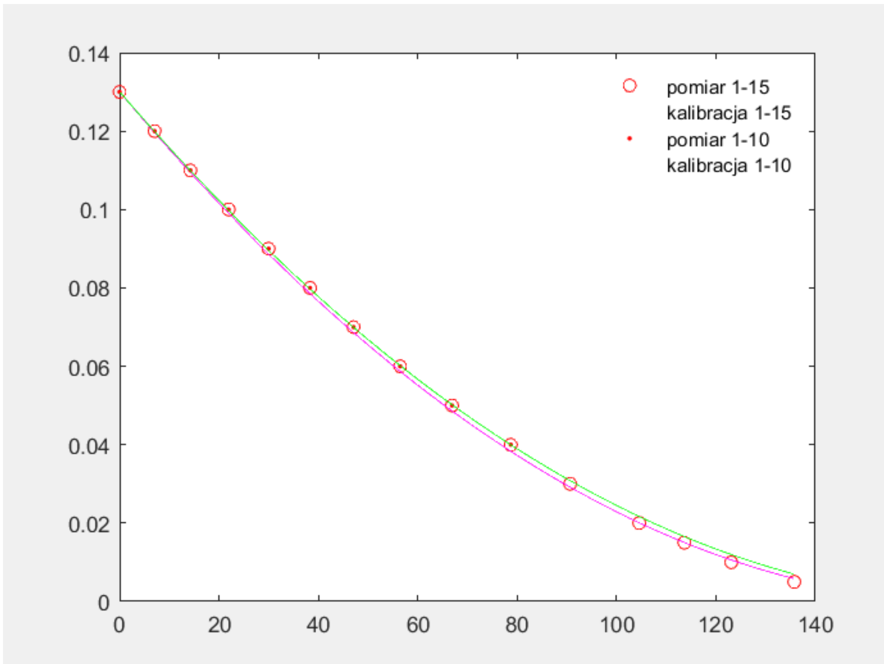


Rysunek 1: Wykres naszej funkcji z naniesionymi zmierzonymi punktami.

Wykres potwierdza nasze przypuszczenia, zmierzone wartości poziomu wody po wyłonieniu się stożka szybciej maleją.

Na podstawie powyższych dywagacji możemy sądzić, że aby poprawnie zasymulować nasz model nie możemy używać tylko jednej funkcji, gdyż nasze pomiary są opisane dwoma tj. spadkiem bez wynurzonego oraz z wynurzonym stożkiem.

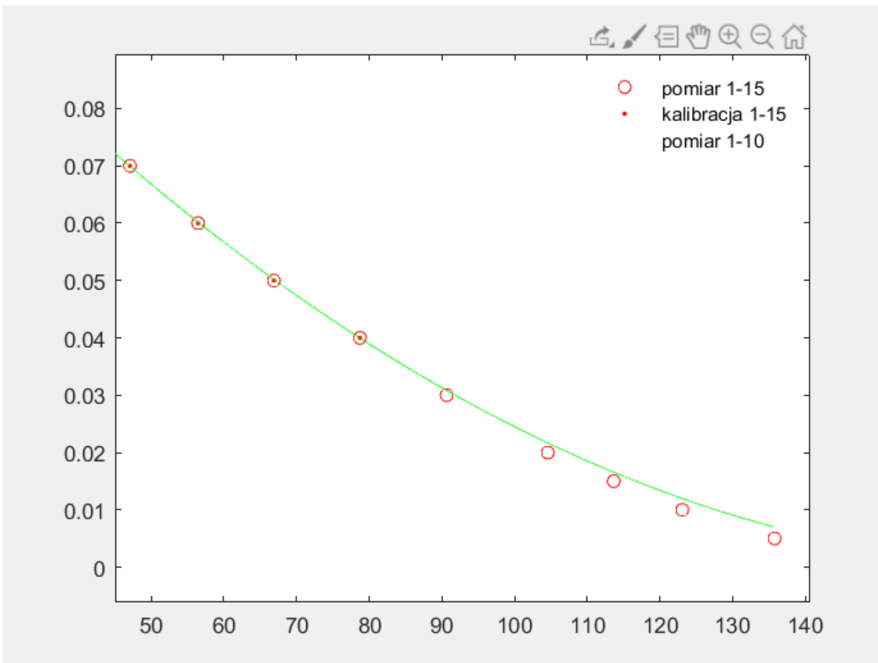
6.2 Czy przyjęcie do kalibracji pomiarów z fazy „stożka pod wodą” poprawia jakość symulacji w tym zakresie?



Rysunek 2: Wykres naszej funkcji pierwotnej z naniesionymi zmierzonymi punktami oraz funkcji używającej tylko punktów powyżej stożka.

Używając tylko punktów, gdy stożek jest zanużony, sprawiamy że nasza funkcja przechodzi dokładnie przez te pukty, a po wynurzenie się stożka błąd jest "systematyczny" - rośnie regularnie.

6.3 Przeprowadźmy symulację poza ww. zakres – będzie to ekstrapolacja. Czy uwzględniając odpowiedź na pytanie 6.1 – dane pomiarowe są po właściwej (przewidzianej) stronie wykresu ekstrapolacji symulacji? Czy ta obserwacja może być częścią weryfikacji modelu?



Rysunek 3: Wykres funkcji używającej tylko punktów powyżej stożka z naniesionymi zmierzonymi punktami.

Wykres przy użyciu ekstrapolacji przebiega zgodnie z naszą odpowiedzią w punkcie 6.1. Ekstrapolując funkcję używającą punktów powyżej stożka, symulujemy dalszy spadek w identyczny sposób. Jednak zmiana powierzchni tafli wody wpływa na szybszy spadek jej wysokości. Zgodnie z tym dokładne zmierzone punkty powinny szybciej opadać - co widać dokładnie na wykresie - są poniżej naszej ekstrapolowanej funkcji.

Ta obserwacja jest częścią weryfikacji modelu, gdyż gdyby ekstrapolowany wykres przebiegał poniżej naszych zmierzonych punktów oznaczałoby to niepoprawnie zmierzone wartości poziomu wody, które należałoby zmierzyć ponownie.

7 Jakie uproszczenia są przyjęte w zastosowanym modelu? Gdyby błąd symulacji z optymalną wartością parametru modelu przekroczył założoną dopuszczalną granicę, to z jakich uproszczeń modelu należałoby zrezygnować?

Tworząc nasz model przyjęliśmy m.in. uproszczenia:

1. zbiornik nie zawiera stożka
2. płyn jest cieczą idealną
3. stałe warunki otoczenia(temperatura, ciśnienie itp.)

W przypadku przekroczenia przez błąd dopuszczalnej granicy powinniśmy w naszym modelu w kolejności uwzględnić:

1. wpływ kształtu stożka na rozkład cieczy w zbiorniku
2. zmienności temperatury
3. ciśnienie otoczenia
4. lepkość cieczy
5. tarcie w zbiorniku
6. napięcie powierzchniowe cieczy

8 Z prawa zachowania masy: Jeżeli w czasie Δt poziom wody obniży się o Δh, to w tym samym czasie czoło wody w rurce wypływowej przesunie się o Δs. Jaka jest relacja między Δh a Δs ?

Na początku wyprowadzamy wzór na zależność pomiędzy zmianą wysokości (h) wody w zbiorniku, a przesunięciem się (s) czoła wody w rurce. W tym celu wyrazimy masę na dwa różne sposoby, a potem połączymy to w całość i wyprowadzimy wzór na relację.

Najpierw wzór ogólny:

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

Krok 1:
za zmianę objętości przyjmiemy zmianę ilości wody w dużym zbiorniku:

$$\triangle V = \triangle h \frac{D^2}{4}$$

Wtedy, zmiana masy wygląda jako:

$$\Delta m = \rho \triangle h \frac{D^2}{4}$$

Krok 2:
za zmianę objętości przyjmiemy ilość wody która wypłynęła przez rurkę (przedział czasowy jest bardzo mały, więc możemy przybliżyć objętość wody która wyciekła, jako objętością walca)

$$\Delta V = \Delta s \frac{d^2}{4}$$

Wtedy, zmiana masy wygląda jako:

$$\Delta m = \rho \Delta s \frac{d^2}{4}$$

Ze względu na to, że oba wzory opisują to samo, możemy przyrównać ich do siebie. Wtedy:

$$\rho \Delta s \frac{d^2}{4} = \rho \triangle h \frac{D^2}{4}$$

$$\Delta s d^2 = \triangle h D^2$$

$$\frac{d^2}{D^2} = \frac{\triangle h}{\triangle s}$$

9 Z prawa zachowania energii mechanicznej: Ubytek energii potencjalnej wody w zbiorniku jest równy energii kinetycznej wody wypływającej. Czy prędkość wypływu wody można wyrazić za pomocą ∆s?

Prędkość wypływu wody jest to stosunek zmiany położenia czoła wody w rurce wypływowej do czasu w którym to nastąpiło. Możemy wyrazić ją wzorem:

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Korzystamy z prawa zachowania energii mechanicznej:

$$\Delta mgh = \frac{\Delta mV^2}{2}$$

Następnie podstawiając do tego równania prędkość wypływu wody i korzystając z równania wyprowadzonego z prawa zachowania masy (wszystkie obliczenia wykonane w punkcie 1 tego sprawozdania), otrzymujemy:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -k\sqrt{h} \text{ , gdzie } k = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}$$

10 Weryfikacja modelu. Kryteria oceny rozwiązania – czego oczekiwaliśmy i czy symulacja spełnia (jakościowo) te oczekiwania

Kryteria oceny rozwiązania:

1. **Błąd pomiarów -** nieodłączny czynnik procesu pomiarowego. W naszym przypadku występuje podczas obliczania czasu w jakim woda spadła na określony poziom, pomiary nie są idealne, ale nie jest to błąd znaczący.
2. **Błąd rozwiązania analitycznego -** przy rozwiązywaniu równania analitycznego możemy popełnić błąd obliczeniowy lub stosować np. przybliżenia. Zakładamy, że poprawnie rozwiązaliśmy wyprowadzone równanie i nie jest to błąd znaczący.
3. **Błąd modelu -** ponieważ nasz model nie uwzględnia wszystkich aspektów rzeczywistego zjawiska (lepkości płynów, stożka znajdującego się na dnie zbiornika) jest to błąd największy i powinniśmy go zminimalizować.

Symulacja nie spełnia naszych oczekiwań, znacząco odbiega od przebiegu rzeczywistego zjawiska. Głównym źródłem błędu jest tutaj źle dobrany model.

11 Szukanie źródeł błędów. Ocena błędu numerycznego, Jak oszacować numeryczny błąd rozwiązania otrzymanego metodą RK4?

W symulacji spotykamy się z błędem modelu. Jest on nie do końca adekwatny do realnej sytuacji, nie uwzględnia wystającego stożka i lepkości płynu.
Błąd globalny metody Rungego-Kutty IV wynosi $O(h^4)$, szacujemy go z góry. Jednakże zmieniając krok można zauważyć minimalną zmianę wykresu, uzasadnione więc wydaje się stwierdzenie, że ten rodzaj błędu nie ma wpływu znaczącego na nasze rozwiązanie. Błąd numeryczny jest niewielki.

12 Eliminacja błęd numerycznego – analityczne rozwiązanie równania różniczkowego. Czy równanie można rozwiązać analitycznie? Jaką metodą?

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

Powyższe równanie można rozwiązać analitycznie poprzez rozwiązanie równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych:

$$\int \frac{dh}{dt} = k \int dt$$

$$2\sqrt{h} + C = kt$$

$$h = \left(C - \frac{k}{2}t\right)^2$$

Otrzymujemy:

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{k}{2}t\right)^2$$

$$t(h) = \frac{2}{k}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right)^2$$

Powyższe równanie implementujemy i otrzymujemy wykres. Jest on jednak nierealistyczny - po osiągnięciu 0 funkcja zaczyna rosnąć, co nie ma sensu w odniesieniu do badanej sytuacji, wymagana jest korekta modelu.

13 Weryfikacja rozwiązania analitycznego.

13.1 Czy to rozwiązanie jest poprawne? W jakim zakresie wysokości h? Dlaczego?

Rozwiązanie analityczne używając $k = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g}$ dla naszego modelu nie jest poprawne. Powodem tego jest wynużający się stożek zmieniający powierzchnię tafli wody, co zaburza k, w związku z czym symulacja znacząco odbiega od rzeczywistych pomiarów. Nasze rozwiązanie jest odpowiednie dla modelu o stałej powierzchni tafli wody.

13.2 Wniosek z obserwacji wykresów: Czy głównym źródłem błędu symulacji jest błąd numerycznego rozwiązania równania, czy błąd modelu?

Głównym źródłem błędu symulacji jest błąd modelu, gdyż w naszym rozwiązaniu nie uwzględniamy wynużenia stożka, który powoduje zmniejszenie się tafli wody, a to z kolei powoduje szybszy spadek poziomu wody. Błąd numeryczny również istnieje, lecz jest on w powrównaniu z błędem modelu znikomy, przy zmianie kroku wykres nie przybliżył się zbytnio do prawidłowego rozwiązania.

14 Ilościowa ocena błędu. W celu obliczenia wielkości błędu należy wybrać normę odległości pomiarów od rozwiązania analitycznego. Jakie są tu (trzy) możliwości?

1. Średnia sumy wartości bezwzględnych (MAE - Mean Absolute Error)

$$J = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - x|$$

2. Pierwiastek ze średniego błędu kwadratowego (RMSE - Root Mean Squared Error)

$$J = \sqrt{\frac{1}{n}\sum \left(y_i - x_i\right)^2}$$

3. Maksymalna wartość bezwzględna błędu

$$J = \max\left(|y_i - x_i|\right)$$

15 Pytanie zasadnicze: Którą wersję zależności i którą normę należy wybrać, aby było możliwe sprowadzenie zadania znalezienia optymalnej wartości parametru modelu do rozwiązania równania liniowego.

Jako naszą funkcję wybieramy:

$$t(h) = \frac{2}{k}(\sqrt{h_0} - \sqrt{h})$$

a normę RMSE:

$$J = \sqrt{\frac{1}{n}\sum \left(y_i - x_i\right)^2}$$

po wstawieniu funkcji do normy otrzymujemy równanie

$$J = \sqrt{\frac{1}{n}\sum \left(t - x(\sqrt{h_0} - \sqrt{h})\right)^2}$$

16 Pytania dodatkowe:

16.1 Pomiary (we wszystkich 15 punktach) obejmują przedział zmienności wysokości h od h0 do ok. zera. Czy w całym tym zakresie obowiązuje przyjęty model?

Przyjęty model nie obowiązuje na całym zakresie, który przyjeliśmy, gdyż od wysokości h_s nasz model powinien także uwzględniać stożek, który zmienia powierzchnię tafli wody w przedziale od h_s do zera, która wpływa na tempo wypływania wody z zbiornika.

16.2 Od pewnej wysokości, z wody wyłoni się stożek. Czy fakt ten wpłynie na tempo obniżania się poziomu lustra wody? Jeżeli tak, to opadanie lustra wody będzie przyspieszone, czy zwolnione?

Tak, ten fakt wpływa znacząco na prędkość opadania lustra wody. Ponieważ zmniejsza się obiętość wody przypadająca na każdy przekrój zbiornika w funkcji wysokości dla $h \in [0, h_s]$. Z tego wynika iż tempo opadania lustra wody w tym przedziale będzie przyspieszone.

17 Do samodzielnego zrobienia:

17.1 Procedury obliczania błędu oraz optymalnej wartości parametru k należy wykonać uwzględniając tylko te pomiary, dla których cały stożek jest zanurzony.

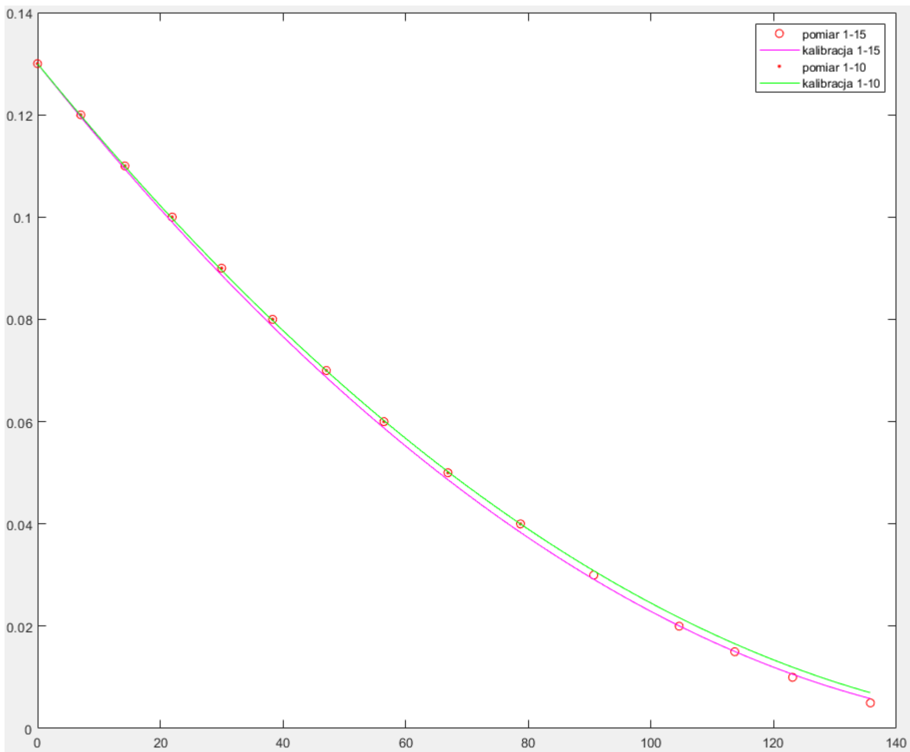
17.1.1 Wartości parametrów optymalnych wyliczonych dla wszystkich 15 pkt pomiarowych

- $k_{opt} = 0.0042$
- $J_{opt} = 1.5592$
- $RMSE_{opt} = 1.2487$

17.1.2 Wartości parametrów optymalnych wyliczonych dla pkt pomiarowych znajdujących się ponad stożkiem

- $k_{opt10} = 0.0041$
- $J_{opt10} = 0.0323$
- $RMSE_{opt10} = 0.1796$

17.2 Wykres symulacji otrzymanej dla nowej wartości parametru k należy dodać do wykresu symulacji poprzedniej (dla k optymalizowanego na podstawie wszystkich pomiarów).



Rysunek 4: Wykres naszej funkcji pierwotnej z naniesionymi zmierzonymi punktami oraz funkcji używającej tylko punktów powyżej stożka.