Całka Riemanna

Niech dana będzie funkcja ograniczona $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. ***Sumą częściową*** (Riemanna) nazywa się liczbę

$$R_{f,P(q_1,\ldots,q_n)} = \sum_{i=1}^{n} f(q_i) \cdot \Delta p_i.$$

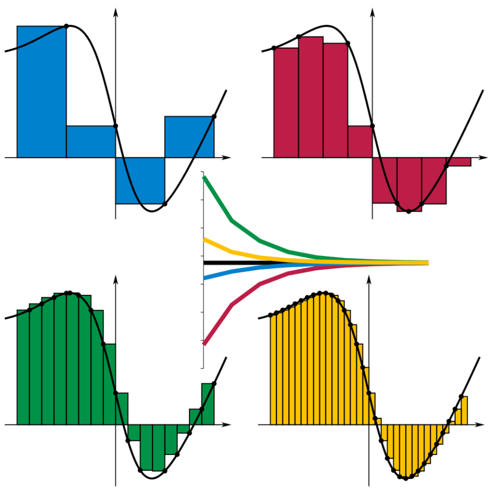
Funkcję f nazywa się ***całkowalną w sensie Riemanna*** lub krótko ***R-całkowalną***, jeśli dla dowolnego ciągu normalnego (P^k) podziałów przedziału $[a,b]$, istnieje (niezależna od wyboru punktów pośrednich) granica

$$R_f = \lim_{k\to\infty} R_{f,P^k(q_1^k,\ldots,q_{n_k}^k)}$$

nazywana wtedy **całką Riemanna** tej funkcji. Równoważnie: jeżeli istnieje taka liczba R_f, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba rzeczywista $\delta > 0$, że dla dowolnego podziału $P(q_1,\ldots,q_n)$ o średnicy $\operatorname{diam}\ P(q_1,\ldots,q_n) < \delta$; bądź też w języku rozdrobnień: że dla dowolnej liczby rzeczywistej $S(t_1,\ldots,t_m)$ przedziału$[a,b]$, że dla każdego podziału $P(q_1,\ldots,q_n)$ rozdrabniającego $S(t_1,\ldots,t_m)$ zachodzi

$$\left|R_{f,P(q_1,\ldots,q_n)} - R_f\right| < \varepsilon.$$

Funkcję f nazywa się wtedy całkowalną w ***sensie Riemanna (R-całkowalną)***, a liczbę R_f jej **całką Riemanna**.



Rysunek 1: Przykład sum Riemanna przy wyborze punktu pośredniego w prawym końcu podprzedziału (niebieski), w wartości minimalnej (czerwony) i maksymalnej (zielony) funkcji w podprzedziale i lewego końca podprzedziału (żółty). Wartość wszystkich czterech przypadków zbliża się do 3,76 przy powiększaniu liczby podprzedziałów od 2 do 10 (w domyśle, również nieograniczenie).