



| | | |
|---|---|---|
|  | <p>Akademia Górniczo-Hutnicza Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej</p> <p>Podstawy Automatyki</p> <p>Informatyka Stosowana, rok II</p> |  |
|---|---|---|

Projektowanie układów regulacji – elementy korekcyjne

1. Wstęp

Projektowanie układów regulacji można, w ogólności, traktować jako projektowanie filtrów. Z punktu widzenia filtracji, regulator PD jest filtrem górno-przepustowym, PI jest filtrem dolno-przepustowym, a PID filtrem pasmowo-przepustowym lub pasmowo-zaporowym, w zależności od parametrów regulatora.

- Filtr górno-przepustowy jest także nazywany *elementem korekcyjnym przyspieszającym fazę* (ang. *phase-lead controller*), ponieważ wnosi do układu dodatnie przesunięcie fazowe dla danego zakresu częstotliwości.
- Filtr dolno-przepustowy jest, z kolei, nazywany *elementem korekcyjnym opóźniającym fazę* (ang. *phase-lag controller*), ponieważ wnosi do układu ujemne przesunięcie fazowe dla danego zakresu częstotliwości.

Transmitancja takiego elementu korekcyjnego wygląda następująco:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + z_1}{s + p_1} \quad (1)$$

- dla $p_1 > z_1$ otrzymujemy *lead controller*
- dla $p_1 < z_1$ otrzymujemy *lag controller*

2. Element korekcyjny przyspieszający fazę

Dodanie do układu korekcji *lead* skutkuje przesunięciem wykresu linii pierwiastkowych w kierunku lewej półpłaszczyzny, co daje zwiększenie stabilności układu oraz zwiększenie prędkości odpowiedzi.

Dlaczego?

Wzór na współrzędną przecięcia asymptot linii pierwiastkowych jest dany jako:

$$\alpha = \frac{\sum(\text{bieguny}) - \sum(\text{zera})}{(\text{liczba biegunów}) - (\text{liczba zer})}$$

Gdy dodamy do układu korekcję *lead* liczba zer i biegunów się nie zmieni (dodamy jedno zero i jeden biegun), ale wartość bezwzględna bieguna jest większa niż zera (zarówno zero jak i biegun są ujemne), czyli wartość α będzie mniejsza – przesunięta bardziej w lewo.

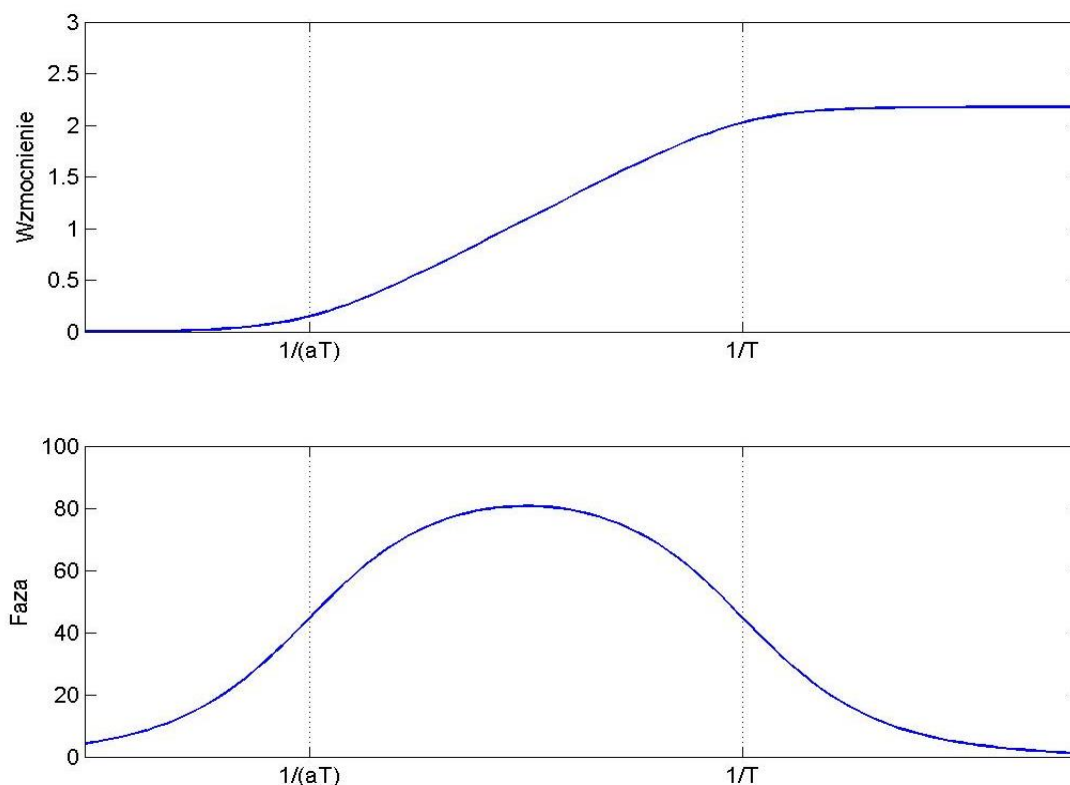
Transmitancję elementu *lead* możemy zapisać w formie wygodniejszej do analizy w dziedzinie częstotliwości:

$$G_c(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1} \quad \text{dla } a > 1 \quad (2)$$

co odpowiada wzorowi (1) dla: $p_1 = 1/T$, $z_1 = 1/aT$, $K_c = a$.

Analizując wykres Bodego elementu *lead*, widać, że wnosi on do układu dodatnie przesunięcie fazowe dla zakresu częstotliwości od $1/(aT)$ do $1/T$ (patrz rys. 1). W zależności od parametru a do układu może być dodane do 90° fazy (jeżeli potrzeba więcej, można zastosować dwa elementy *lead*). Maksymalna wartość fazy jest dodawana dla częstotliwości centralnej:

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}} \quad (3)$$

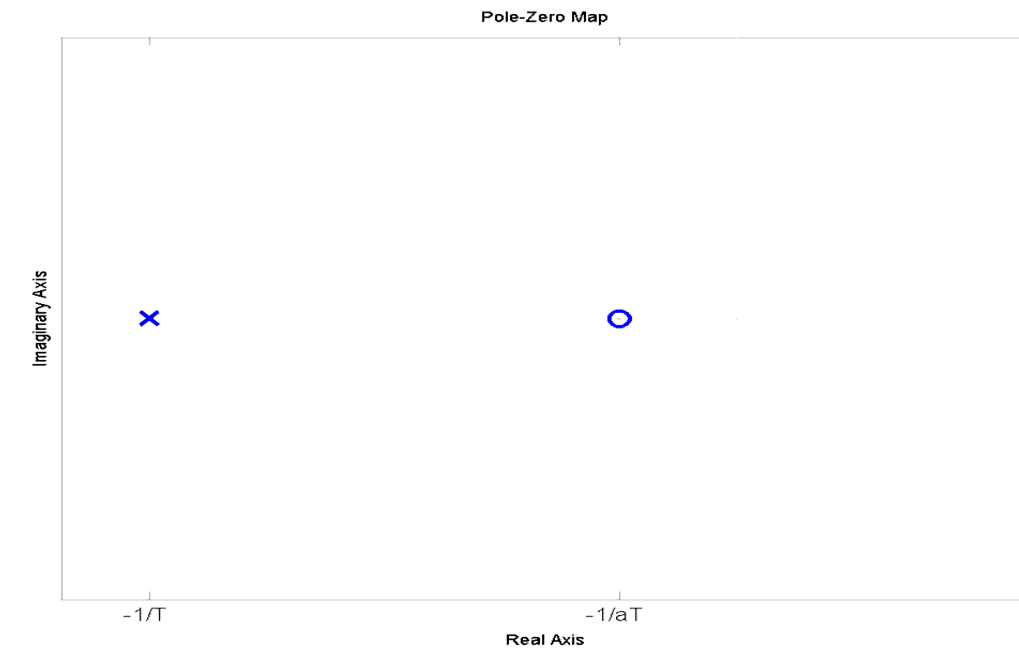


Rys. 1. Wykres Bodego kompensatora typu *lead*.

Maksymalną wartość fazy można wyliczyć z zależności:

$$\sin \phi_m = \frac{a-1}{a+1} \quad (4)$$

Dodatkowa, dodatnia wartość fazy (widoczna na wykresie fazowym z rys.1) zwiększa zapas fazy i tym samym zwiększa stabilność układu. Inny efekt widoczny jest na wykresie amplitudowym. Kompensator *lead* zwiększa wzmocnienie układu dla wysokich częstotliwości o współczynnik a , co powoduje zmniejszenie czasu narastania i czasu ustalania układu.



Rys. 2. Rozmieszczenie zera i bieguna kompensatora typu *lead*.

Projektowanie takiego regulatora polega na określeniu wartości parametru a , która zapewni nam zadany zapas fazy oraz określeniu wartości parametru T , która zapewni dodanie fazy w wymaganym miejscu na osi częstotliwości. Analizując położenie zera i bieguna kompensatora *lead* (patrz rys. 2) można sformułować następujące zalecenia projektowe:

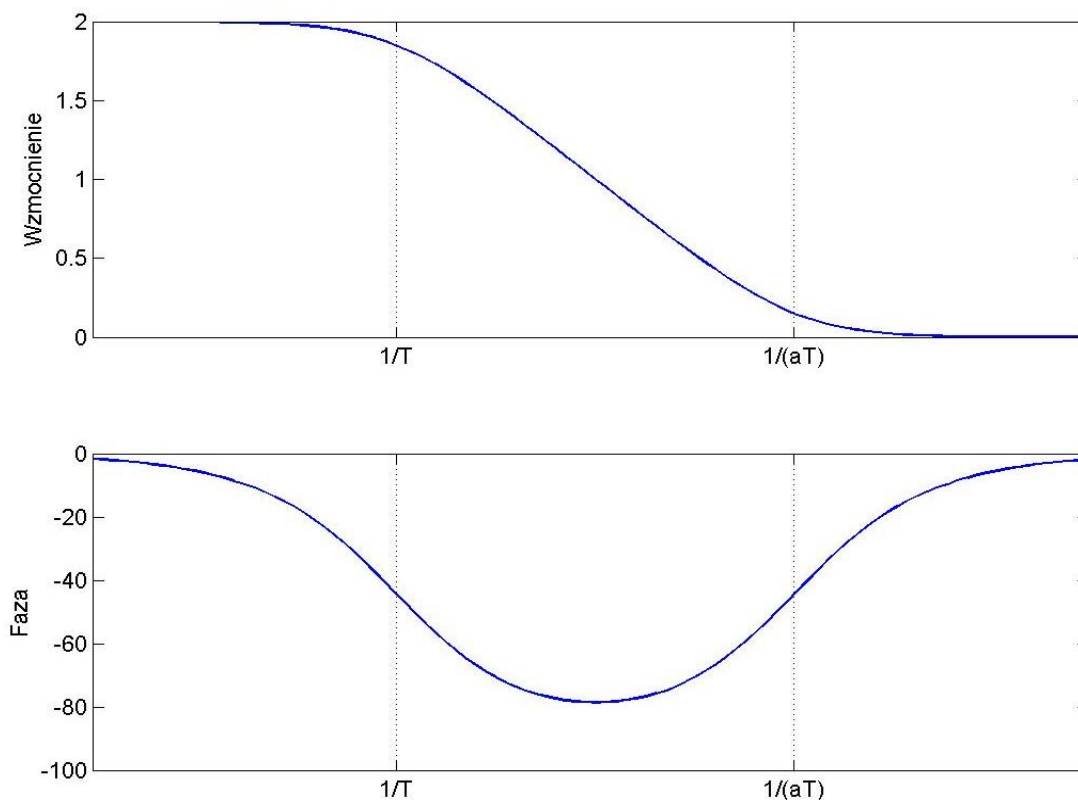
- Przesuwanie zera o współrzędnej $-1/(aT)$ w kierunku początku układu współrzędnych płaszczyzny zespolonej (w prawo) powinno poprawić czas narastania i czas ustalania układu. Jeżeli jednak zero zostanie przesunięte zbyt blisko początku układu współrzędnych może wzrosnąć przeregulowanie układu sterowania.
- Przesuwanie bieguna o współrzędnej $-1/T$ w kierunku rosnących wartości ujemnych (w lewo) powinno zmniejszyć przeregulowanie układu, lecz jeżeli wartość T będzie zbyt mała, zwiększy się także czas narastania i czas ustalania układu

3. Element korekcyjny opóźniający fazę

Transmitancję elementu *lag* możemy zapisać w formie wygodniejszej do analizy w dziedzinie częstotliwości:

$$G_c(s) = \frac{1}{a} \left(\frac{aTs + 1}{Ts + 1} \right) \quad \text{dla } a < 1 \quad (5)$$

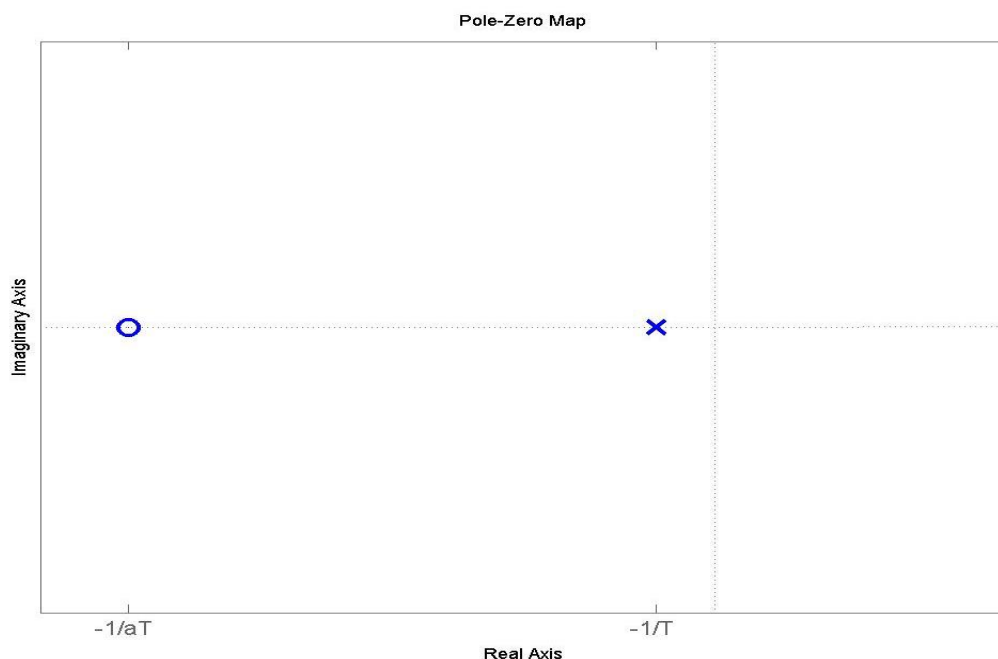
Kompensator *lag* poprawia własności układu w stanie ustalonym. Dla wysokich częstotliwości ma wzmocnienie jednostkowe, więc dla tych częstotliwości nie zmienia własności układu. Dla niskich częstotliwości wzmocnienie jest większe od 1 i wynosi z_1/p_1 . Błąd w stanie ustalonym będzie więc zmniejszony o czynnik z_1/p_1 , czyli o współczynnik $1/a$.



Rys. 3. Wykres Bodego kompensatora typu lag.

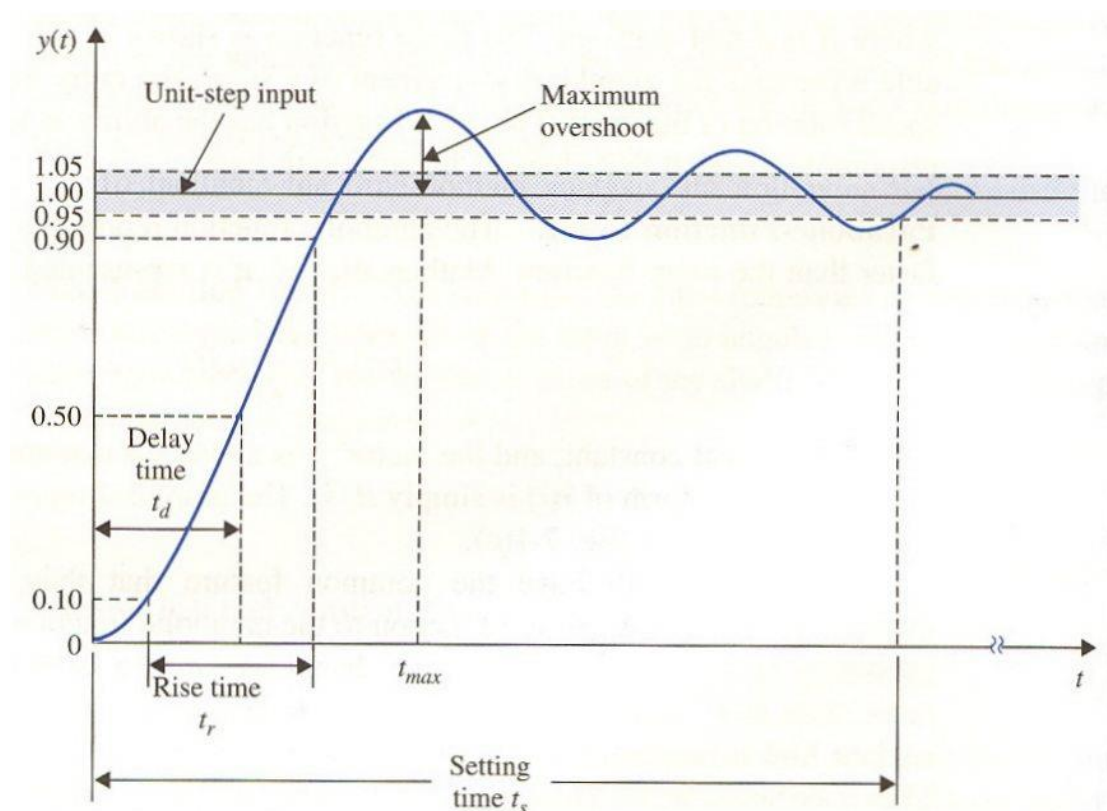
Z drugiej strony, dodanie do układu korekcji *lag* skutkuje przesunięciem wykresu linii pierwiastkowych w kierunku prawej półpłaszczyzny, co jest niepożądane, ponieważ zmniejsza stabilność układu. Z tego powodu zero i biegun tego kompensatora (patrz rys. 4) powinny być blisko siebie (zazwyczaj w pobliżu początku układu współrzędnych płaszczyzny zespolonej), aby nie wpływały znacząco na odpowiedzi przejściowe i stabilność układu.

Analizując wykres Bodego elementu *lag* (rys. 3), widać, że wnosi on do układu ujemne przesunięcie fazowe dla zakresu częstotliwości od $1/T$ do $1/(aT)$. Projektując zatem taki kompensator należy uważać aby nie obniżyć za bardzo zapasu fazy układu.



Rys. 4. Rozmieszczenie zera i bieguna kompensatora typu lag.

4. Parametry odpowiedzi skokowej



Rys. 5. Parametry odpowiedzi skokowej

Na rys. 5 przedstawione są podstawowe parametry odpowiedzi skokowej, które stanowią kryteria jakości regulacji:

- maksymalne przeregulowanie (ang. *maximum overshoot*)
- czas narastania t_r (ang. *rise time*)
- czas ustalania t_s (ang. *setting time*)

- czas opóźnienia t_d (ang. *delay time*)
- błąd w stanie ustalonym e_s (ang. *steady-state error*), nie pokazany na rysunku, to różnica między wartością zadaną a wyjściową w stanie ustalonym (dla $t \rightarrow \infty$)

5. Projektowanie kompensatora typu *lead*

Cel.

Dla obiektu o transmitancji:

$$G = \frac{10}{s(s+1)} \quad (6)$$

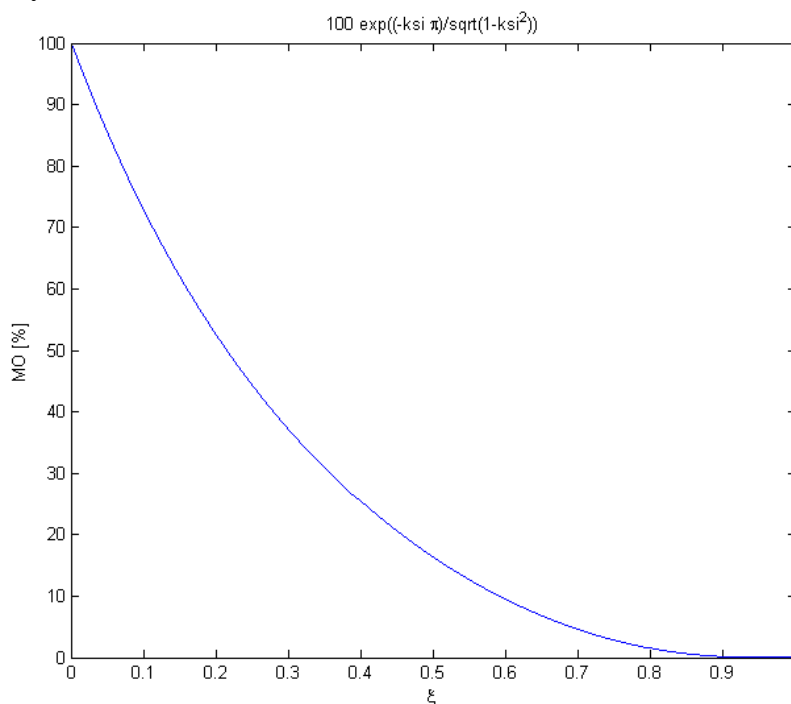
zaprojektować kompensator *lead*, taki aby maksymalne przeregulowanie układu zamkniętego było równe 25%.

Wykonanie.

Zależność przeregulowania (MO, *maximum overshoot*) i współczynnika tłumienia ξ jest wyrażona poprzez relację:

$$MO = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} [\%], \quad (7)$$

którą przedstawia Rys. 6.



Rys. 6. Zależność przeregulowania od współczynnika tłumienia

Jak to narysować w Matlabie:

```
ezplot('100*exp((-ksi*pi)/sqrt(1-ksi^2))',[0 1])
ylabel('MO [%]'), xlabel('\xi')
```

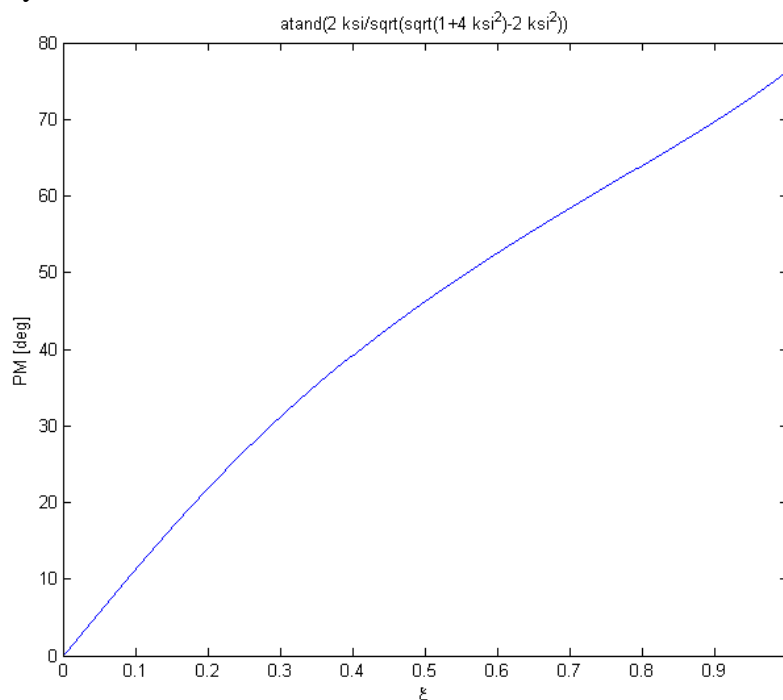


Odczytaj z wykresu wartość ξ dla zadanego MO.

Zależność zapasu fazy (PM, *phase margin*) i współczynnika tłumienia ξ jest wyrażona poprzez relację:

$$PM = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}} \right) \quad (8)$$

którą przedstawia Rys. 7.



Rys. 7. Zależność zapasu fazy od współczynnika tłumienia



Narysuj wykres zależności (8) w Matlabie. Odczytaj z wykresu wartość PM dla zadanego ξ . Taki zapas fazy powinien mieć układ po kompensacji.

Sprawdź jaki zapas fazy ma układ bez kompensacji i o ile trzeba go zwiększyć (użyj w tym celu funkcji **margin**).

Zapasz fazy, którą ma wnieść do układu kompensator możemy zatem zapisać jako:

$$\phi_m = PM_{komp} - PM_{bez_komp} \quad (9)$$

Znając wartość ϕ_m , oblicz parametry tego kompensatora:

$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} \quad (10)$$

Uwaga: do obliczania w Matlabie wartości sinus w stopniach służy funkcja **sind** (funkcja **sin** liczy sinus w radianach).

Maksymalny zapas fazy ϕ_m musi być dodany wokół częstotliwości ω_m . Kompensator typu *lead* wnosi dodatkowe wzmocnienie $-10\log(a)$ wokół częstotliwości ω_m . Zatem z wykresu Bodego układu bez kompensacji należy odczytać częstotliwość ω_m , dla której amplituda wynosi $-10\log(a)$.

Znając wartość ω_m , oblicz drugi parametr kompensatora *lead* (T) wg wzoru (3).

Mając oba parametry (a , T) utwórz kompensator *lead*:

$$G_c(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$$

Narysuj wykresy Bodego (**margin**) układu otwartego oraz odpowiedzi skokowe układu zamkniętego bez kompensacji i z kompensacją. Porównaj te odpowiedzi. Czy założenia projektowe zostały spełnione?