

1 Dynamika systemów nieliniowych

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z istotnymi ze względów poznawczych zjawiskami występującymi w systemach nieliniowych. Omówione zostaną pojęcia cyklu granicznego, stabilności strukturalnej i chaosu.

1.1 Cykle graniczne

Interesującym fenomenem występującym w systemach nieliniowych od drugiego rzędu wzwyż jest cykl graniczny. Pod pojęciem cyklu granicznego, rozumiana będzie trajektoria zamknięta w przestrzeni stanu. Jednocześnie oznacza to, że jest to rozwiązanie okresowe systemu. Stabilność tej trajektorii może być określona w jeden z następujących sposobów:

- może ona być stabilna w sensie Lapunowa zgodnie z definicją, analogicznie jak punkt równowagi;
- może ona być asymptotycznie stabilna - inne trajektorie będą się do niej zbliżać (upodabniać) wraz z $t \rightarrow \infty$;
- może ona być niestabilna - inne trajektorie będą się do niej zbliżać jedynie jeśli $t \rightarrow -\infty$ (będzie odpychać inne trajektorie);
- wreszcie przyjmując, że cykl graniczny rozdziela płaszczyznę fazową na obszar zamknięty cyklem i obszar na zewnątrz cyklu zachodzić może tzw. stabilność jednostronna - trajektorie z jednego z tych obszarów będą zmierzać do cyklu, natomiast trajektorie z drugiego będą się od niego oddalać

Najprostszym sposobem określenia obecności cyklu jest analiza portretu fazowego - niestety nie jest to podejście pozbawione wad. Po pierwsze umożliwia ono w zasadzie jedynie analizę asymptotycznie stabilnych cykli granicznych. Wiąże się to z tym, że dostępne jest jedynie pewne przybliżenie portretu fazowego - nawet przy bardzo wnikliwej analizie numerycznej uzyskanie wykresu zamkniętej niestabilnej trajektorii jest prawie niemożliwe. Inną wadą jest to, że w przypadku analizy systemów nieliniowych możliwe jest, że dynamika zacznie „zwalniać” w pewnym obszarze, co pomimo długiego czasu symulacji może zasugerować uznanie istnienia cyklu w sytuacji gdy system bardzo powoli zmierza do asymptotycznie stabilnego punktu równowagi.

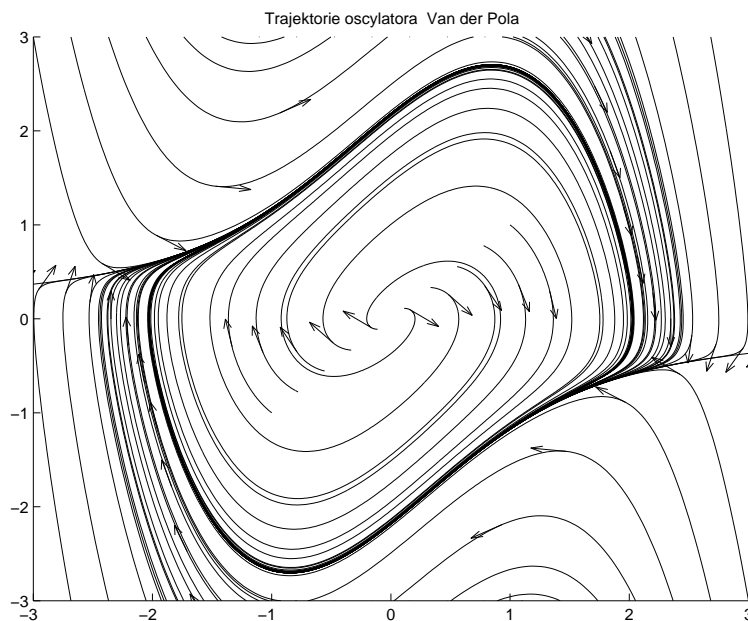
Jeżeli jednak, system posiada asymptotycznie stabilny cykl graniczny portret fazowy może okazać się bardzo pomocny.

Przykład 1. Oscylator Van der Pola

Rozważany jest system:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ x_2(1 - x_1^2) \end{bmatrix}$$

Oryginalnie wywodzi się on z teorii obwodów nieliniowych, gdzie przy badaniu oscylatora RLC opornik zastąpiono triodą. W ostatnich latach oscylator Van der Pol’a stosowany również jest do modelowania dynamiki serca. Na rysunku 1.1 przedstawiony jest portret fazowy systemu. Jak można zauważyć obserwowany jest asymptotycznie stabilny cykl graniczny. (zob. Mitkowski, 2000, s. 71, Mitkowski, 2007, s. 123) Do uzyskania portretu przyjęto ε równe 1.



Rysunek 1.1: Portret fazowy oscylatora Van der Pola

1.2 Stabilność strukturalna

Ogólnie przy analizie systemów dynamicznych, ważną rolę odgrywa pojęcie stabilności strukturalnej. Ponieważ własność ta odgrywa dużą rolę przy badaniu cykli granicznych oraz dziwnej dynamiki zostanie ono tutaj przybliżone. Przyjęta zostanie następująca definicja. (zob. Mitkowski, 2000, s. 71)

Definicja 1.1. System opisany zależnym od parametru μ równaniem różniczkowym:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (1.1)$$

nazywany jest **strukturalnie stabilnym**, jeżeli istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego δ takiego, że $\|\mu - \delta\| < \varepsilon$, w systemie

$$\dot{x} = f(x, \delta)$$

nie zachodzą nowe jakościowo zjawiska względem systemu (1.1).

Innymi słowy oznacza to, że system jest strukturalnie stabilny, jeżeli przy niewielkiej zmianie parametrów zachodzą niewielkie zmiany w trajektoriach.

Warto zwrócić uwagę, na ścisły związek strukturalnej stabilności z metodą linearyzacji. Jeżeli w punkcie równowagi wartości własne jego linearyzacji mają zerowe części rzeczywiste - niewielka zmiana parametrów może sprawić, że części rzeczywiste staną się dodatnie lub ujemne - co sprawi, że linearyzacja będzie miała zupełnie inny charakter. Można ten związek uznać za „zdrowo rozsądkowe” uzasadnienie założeń twierdzenia Grobmana-Hartmana.

Ze stabilnością strukturalną ściśle wiążą się pojęcie **bifurkacji** (Kapitaniak and Wojewoda, 1994). Bifurkacją nazywa się zjawisko, polegające na tym, że pod wpływem zmiany parametru następują jakościowe zmiany trajektorii. Punktem bifurkacji jest wartość parametru, dla której system traci strukturalną stabilność. Przykładami bifurkacji są:

- bifurkacja typu „widły”, na skutek której pojawiają się nowe punkty równowagi (np. gdy równanie $f(x, \mu) = 0$ przy zmianie μ zaczyna mieć dodatkowe rozwiązania rzeczywiste);
- bifurkacja transkrytyczna, na skutek której jeden punkt równowagi traci stabilność a drugi zyskuje

Inną bifurkacją, istotną z punktu widzenia analizy cykli granicznych, jest bifurkacja Hopfa. Polega ona na utracie stabilności punktu równowagi i jednoczesnym pojawieniu się cyklu granicznego. Zilustrowana zostanie ona na przykładzie.

Przykład 2. Bifurkacja Hopfa (zob. Kapitaniak and Wojewoda, 1994)

Rozważany jest system:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2\end{aligned}$$

przy $a \in \mathbb{R}$. Punktem równowagi systemu jest 0. Linearyzacja w okół tego punktu prowadzi do macierzy

$$J(0,0) = A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

czyli z pierwszej metody Lapunowa, wiemy że dla $a < 0$ punkt równowagi jest asymptotycznie stabilny, zaś dla $a > 0$ niestabilny. Dla $a = 0$ macierz A i w konsekwencji punkt równowagi traci hiperboliczność. Można podejrzewać, że dla $a = 0$ nastąpi bifurkacja Hopfa. Analiza pokazuje, że przy $a = 0$ system jest jeszcze asymptotycznie stabilny, zaś dla $a > 0$ pojawia się stabilny cykl graniczny. Ilustrują to rysunki 1.2 - 1.4.

1.3 Systemy chaotyczne i system Lorenza

Systemy o dynamice chaotycznej charakteryzują się następującymi własnościami:

- występują w nich potoki trajektorii niestabilnych ograniczonych (podobnie, jak potok górski);
- dynamika jest bardzo wrażliwa na małe zmiany parametrów układu.

W układach o dynamice chaotycznej przewidywanie jest możliwe jedynie w niedużym horyzoncie czasowym, mimo że układ jest w pełni deterministyczny. Trajektorie startujące blisko siebie po krótkim czasie stają się praktycznie dowolnie odległe. Pomiar jest zawsze obarczony pewnym błędem. Dokładna znajomość warunku początkowego nie jest możliwa praktycznie, czyli przewidywania, co do zachowania się układu mogą znacząco różnić się od rzeczywistości (w systemach stabilnych, trajektorie o mało różniących się od siebie warunkach początkowych również niewiele się od siebie różnią w chwilach późniejszych). Jak dynamika chaotyczna może występować w nieliniowych systemach ciągłych w czasie rzędów 3 lub wyższych. Poniżej przedstawiony zostanie historycznie znaczący system Lorenza, na przykładzie którego zilustrowane zostaną własności układów chaotycznych

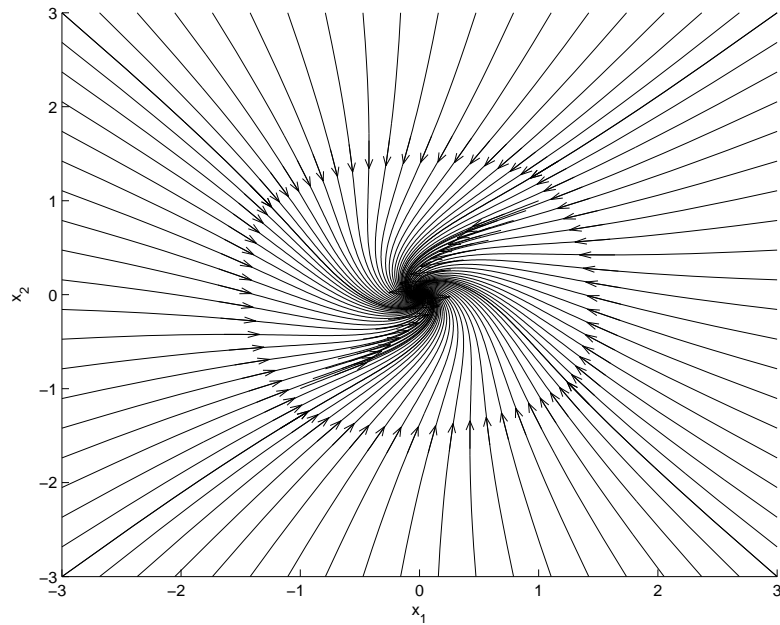
System Lorenza opisują równania

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2\end{aligned}\tag{1.2}$$

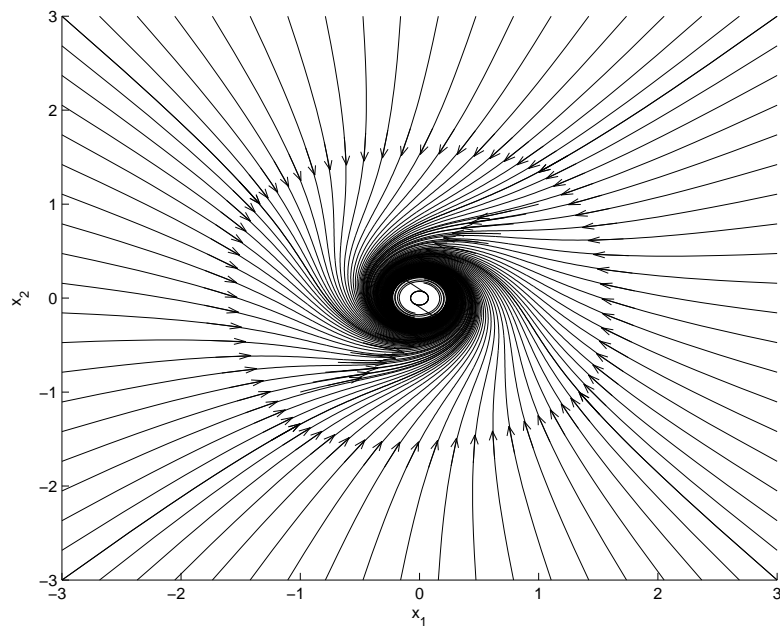
Zachowania chaotyczne występują między innymi dla parametrów $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ i $r = 28$. Dla takich też dokonano symulacji.

Rys historyczny

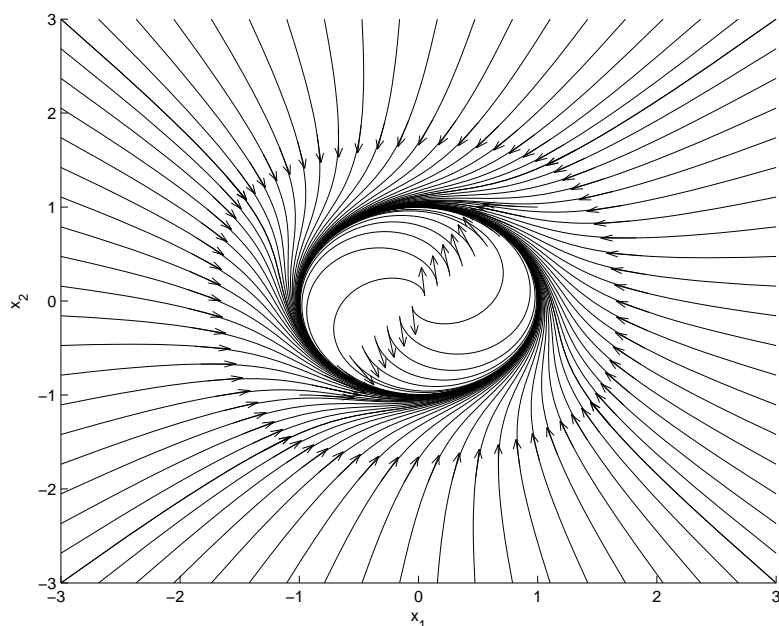
Edward Lorenz z Massachusetts Institute of Technology z zamiłowania był matematykiem, natomiast z wykształcenia meteorologiem. W swojej pracy naukowej zajmował się prognozowaniem pogody przy użyciu komputerów. Zjawiska meteorologiczne bardzo silnie zależą od tak zwanego zjawiska konwekcji - czyli unoszenie powietrza. Między innymi chmury burzowe powstają



Rysunek 1.2: Bifurkacja Hopfa $a < 0$



Rysunek 1.3: Bifurkacja Hopfa $a = 0$. Występuje zjawisko wspomniane przy omawianiu metod symulacyjnych - zerowy punkt równowagi asymptotycznie stabilny, ale w jego otoczeniu bardzo powolny ruch trajektorii fazowych.

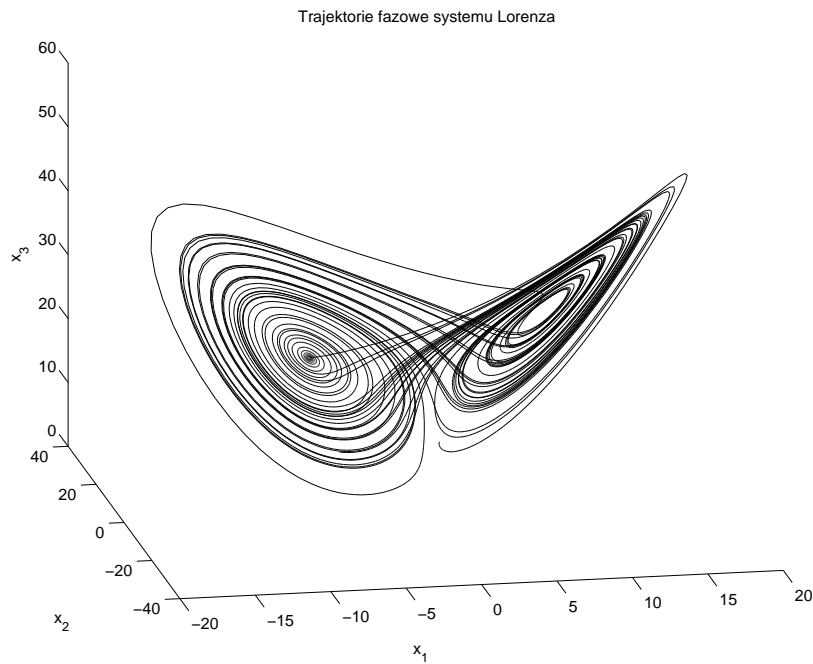
Rysunek 1.4: Bifurkacja Hopfa $a > 0$

w wyniku konwekcji i dlatego występują burze w gorące parne dni. Rozróżnia się konwekcję stacjonarną i niestacjonarną. W konwekcji stacjonarnej ogrzane powietrze porusza się łagodnie do góry, natomiast w konwekcji niestacjonarnej ruch ten jest dużo bardziej złożony a także taka konwekcja jest bardziej istotna dla pogody. Badania nad tym zjawiskiem były prowadzone od dawna. W 1900 roku Henri Benard odkrył, że komórki konwekcyjne mają budowę podobną do plastra miodu. W 1962 Lord Rayleigh wyprowadził podstawową teorię rozpoczęcia konwekcji. W 1962 roku B. Saltzman wypisał równania dla prostego rodzaju konwekcji. Lorenza zaciekały te równania i postanowił dalej je badać oraz upraszczać. Zauważył, że tak naprawdę to tylko trzy zmienne stanu odgrywają znaczącą rolę. W wyniku uproszczeń, z zachowaniem istotnych własności modelu wyjściowego, otrzymał układ równań (1.2), dzisiaj nazywany systemem Lorenza (Stewart, 2001).

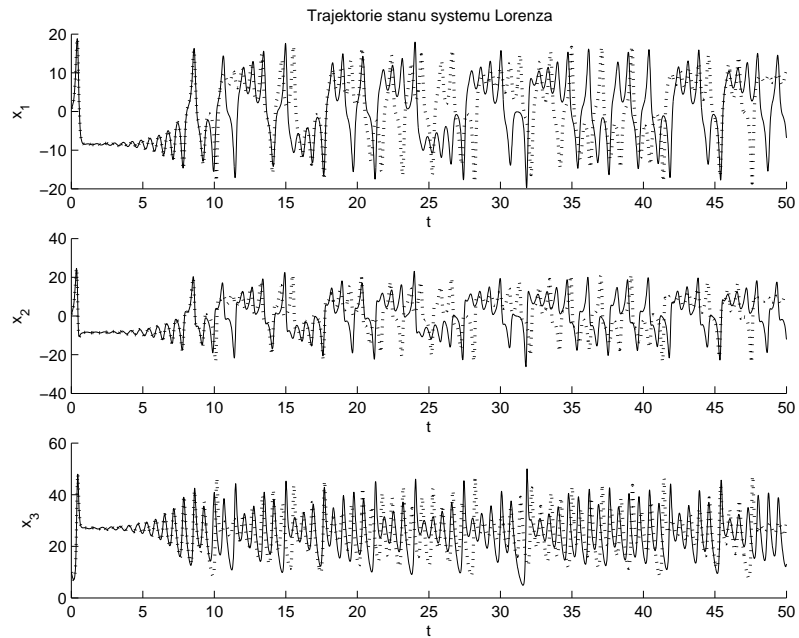
Efekt motyla

Równania, które podał Lorenz były przez niego także rozwiązywane numerycznie za pomocą komputera: Royal McBee LGP-300 (komputer zbudowany jeszcze przy użyciu lamp elektronowych, jedna iteracja zajmowała sekundę). Podczas rozwiązywania układów równań Lorenz otrzymywał wyniki w postaci cyfr. Lorenz zauważył, że wprowadzenie warunków początkowych, które różnią się od poprzednich o bardzo niewiele, np. 0,0001 powoduje, że otrzymywał zupełnie inne i różne od siebie rozwiązania. Nieprzewidywalność pogody znalazła swoje odbicie w modelu Lorenza. Okazało się bowiem, że niewielkie zaburzenie parametrów modelu- interpretowanych w rzeczywistości np. jako trzepot skrzydeł motyla - powoduje, że układ zachowuje się w sposób całkowicie odmienny. Trzepot skrzydeł motyla może zmienić pogodę w bardzo odległym miejscu na ziemi. Ten właśnie efekt Lorenz nazwał „efektem motyla” (rysunek 1.6).

Jak można zauważyć, „efekt motyla” to właśnie wspomniana wcześniej wrażliwość na warunki początkowe. Obserwując dokładnie rysunek 1.6 można zauważyć, że trajektorie stanu są do siebie podobne przez pewien krótki okres czasu, a następnie rozbieżności powiększają się. Można, więc wnioskować, że przewidywanie zachowania się układu chaotycznego jest możliwe tylko dla najbliższej przyszłości. Ważne jest, aby podkreślić, że na rysunkach 1.5 i 1.6 prezentowane jest numeryczne rozwiązanie równań Lorenza- rozwiązanie dokładne mogłoby wyglądać nieco inaczej, jednak własności byłyby zachowane.



Rysunek 1.5: Przykładowa trajektoria fazowa równań Lorentza



Rysunek 1.6: Przykładowa trajektoria fazowa równań Lorentza - „Efekt motyla” - różnica pomiędzy warunkami początkowymi rzędu 0.1%

Dziwny atraktor

Jak można zaobserwować na rysunku 1.5 zachowanie się dynamiki systemu Lorenza jest zdecydowanie inne od spotykanego w systemach drugiego rzędu. Przeprowadzając dokładną analizę systemu można ustalić pewne fakty.

System posiada trzy punkty równowagi:

$$x_{(1)}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{(2)}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{-b+br} \\ \sqrt{-b+br} \\ -1+r \end{bmatrix} \quad x_{(3)}^* = \begin{bmatrix} -\sqrt{-b+br} \\ -\sqrt{-b+br} \\ -1+r \end{bmatrix}$$

Macierz Jakobiego systemu ma postać:

$$J(x) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{bmatrix}$$

zaś linearyzacje w punktach równowagi mają wartości własne (po podstawieniu przyjętych wartości b , r i σ) :

- w punkcie $x_{(1)}^*$: $\lambda_1 = -22.8277$, $\lambda_2 = 11.8277$, $\lambda_3 = -2.66667$
- w punktach $x_{(2)}^*$ i $x_{(3)}^*$ identycznie : $\lambda_1 = -13.8546$, $\lambda_2 = 0.0939556 + 10.1945j$, $\lambda_3 = 0.0939556 - 10.1945j$

Wnioskiem z I metody Lapunowa jest więc (ponieważ każda linearyzacja ma przynajmniej jedną dodatnią wartość własną), że wszystkie punkty równowagi są niestabilne. Trajektorie systemu nie dążą jednak do nieskończoności co więcej, można wykazać (zob. Grabowski, 1999, str. 171), że wszystkie trajektorie fazowe systemu ostatecznie znajdują się w kuli:

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 38)^2 \leq \left(\frac{152}{\sqrt{15}} \right)^2 \approx 1540.2667 \right\}$$

W systemach rzędu drugiego trajektorie mogły zdążać jedynie do asymptotycznie stabilnego punktu równowagi lub cyklu granicznego. W systemie Lorenza punkty równowagi są niestabilne, zaś cykl graniczny nie występuje. Występuje za to wspomniany dziwny atraktor. Bardzo ogólnie można opisać zachowanie się trajektorii w następujący sposób. Trajektorja oddalająca się od punktu równowagi $x_{(2)}^*$ w sposób oscylacyjny (wartości własne zespolone, obowiązuje podobieństwo z linearyzacją), w pewnym momencie znajdzie się w takim otoczeniu punktu $x_{(1)}^*$ aby zostać przyciągnięta przez część odpowiadającą ujemnym wartościom własnym. Trajektorja ta przez to znajdzie się na tyle blisko punktu $x_{(3)}^*$, aby po kilkukrotnym okrążeniu go, znaleźć się ponownie blisko punktu $x_{(2)}^*$ itd. Tak w dużym przybliżeniu, bazując na linearyzacji opisać można dynamikę dziwnego atraktora.

Innym wartym zainteresowania systemem elektrycznym jest obwód elektryczny Chuy (zob. Mitkowski, 2007, s.186 oraz literatura tam cytowana)

1.4 Sprawozdanie

W ramach sprawozdania należy:

1. Zamodelować Oscylator Van der Pol'a i system Lorenza w Matlabie (w dowolny sposób)
2. Przeanalizować zachowanie się trajektorii Oscylatora Van der Pol'a przy zmianach parametru ε

3. Zamodelować system

$$\dot{x} = ax - x^3$$

Znaleźć punkty równowagi tego systemu. Wykonać wykres przedstawiający wartości punktów równowagi w funkcji parametru a . Zbadać stabilność punktów równowagi systemu w zależności od parametru a (posłużyć się I metodą Lapunowa), zilustrować wyniki symulacyjnie.

4. Wykonać portrety fazowe systemu Lorenza, przedstawiające interesujące trajektorie.

Bibliografia

- P. Grabowski. *Stabilność układów Lurie*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 1999.
- T. Kapitaniak and W. Wojewoda. *Bifurkacje i chaos*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 1994.
- W. Mitkowski. *Systemy dynamiczne – Materiały uzupełniające do wykładu*. Wydawnictwa Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH, Kraków, 2000.
- W. Mitkowski. *Równania macierzowe i ich zastosowania*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 2 edition, 2007.
- I. Stewart. *Czy Bóg gra w kości? - nowa matematyka chaosu*. PWN, Warszawa, 2001.