

1 Wprowadzenie do układów nieliniowych - linearyzacja

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z podstawową metodą analizy systemów nieliniowych jaką jest metoda linearyzacji. Przedstawione zostaną podstawowe pojęcia takie jak punkt równowagi, jego stabilność w ujęciu lokalnym oraz najprostsze wersje twierdzenia Grobmana-Hartmana i pierwszej metody Lapunowa.

1.1 Rozważane systemy

W ramach ćwiczenia rozważane będą systemy opisane równaniem różniczkowym zwyczajnym postaci

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.1)$$

gdzie $f(\bullet)$ jest w ogólności funkcją wektorową, o wymiarze równym wymiarowi x , której argumentem jest wektor zmiennych stanu x , nieliniową względem co najmniej jednej z jego składowych.

Definicja 1.1. Funkcję $F(\bullet)$ nazwiemy nieliniową jeżeli nie posiada ona choć jednej z własności:

1. $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$
2. $F(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot F(x)$ gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$

Omawiane pojęcia będą ilustrowane dla przykładów o podanych funkcjach $f(x(t))$ przedstawionych w poniższych przykładach. Każdy z przykładów będzie kontynuowany w następnych sekcjach wraz z wprowadzeniem nowych terminów.

Przykład 1.

$$f(x(t)) = -x(t) + \varepsilon x(t)^2 \quad (1.2)$$

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Taka prawa strona określa nam nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu, o prawej stronie zależnej od parametru ε .

Przykład 2.

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} -x_1(t) \\ -x_2^2(t) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^2$. Jest to układ dwóch niezależnych od siebie równań pierwszego rzędu, z których pierwsze jest liniowe a drugie nieliniowe.

Przykład 3.

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -2 \cdot x_1(t) - 3 \cdot x_1(t)^2 - x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^2$. Jest to układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu, powstałych poprzez przekształcenie równania drugiego rzędu

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 2 \cdot y(t) + 3 \cdot y(t)^2 = 0 \quad (1.5)$$

gdzie $y(t) \in \mathbb{R}$, przekształcenia tego dokonuje się przez podstawienie (zob. poprzednie ćwiczenie)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

co po zróżniczkowaniu prowadzi do

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \quad (1.7)$$

i

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} \quad (1.8)$$

Przekształcając (1.5) można otrzymać

$$\ddot{y} = -\dot{y} - 2 \cdot y - 3 \cdot y^2$$

co po podstawieniu do (1.8), i zastosowaniu 1.6 daje układ równań

$$\dot{x} = f(x)$$

gdzie $f(x)$ jest określone przez (1.4). Przykład pochodzi z pozycji (Mitkowski, 1996, s. 101).

1.2 Punkt równowagi

Definicja 1.2. Punktem równowagi systemu (1.1) nazywana będzie taka stała funkcja czasu x_r , dla której

$$f(x_r) \equiv 0 \quad (1.9)$$

Jak można zauważyć, x_r jest szczególnym rozwiązaniem równania (1.1). Pochodna funkcji stałej jest równa zero, zaś z równości (1.9), prawa strona równania jest równa zero, więc równanie jest spełnione.

Innymi słowy punktem równowagi będzie, taki wektor liczb x_r , który jeżeli będzie warunkiem początkowym równania różniczkowego, to rozwiązanie tego równania będzie stałe w czasie. Na portrecie fazowym punkt równowagi jest punktem (nie wychodzą z niego żadne trajektorie). (zob. ?, s. 122)

Dla układów liniowych możliwe są dwa przypadki:

- Jest tylko jeden punkt równowagi i jest nim 0 (zachodzi to dla wartości własnych nie będących zerami);
- Punktów równowagi jest nieskończenie wiele (zachodzi to gdy przynajmniej jedna z wartości własnych jest zerem, zawsze jednak 0 jest punktem równowagi).

Jest to uzasadnione tym, że w przypadku systemów liniowych równość (1.9) przyjmuje postać równania liniowego

$$Ax_r = 0,$$

które jeżeli macierz jest nieosobliwa (nie ma zerowych wartości własnych) ma jedno rozwiązanie i jest nim zero 0, zaś dla macierzy osobliwych ma rozwiązań nieskończenie wiele.

Dla systemów nieliniowych możliwe są również sytuacje, gdy system będzie miał skończoną liczbę punktów równowagi lub, że zero nie będzie punktem równowagi. Dzieje się tak, ponieważ równość (1.9) w ogólności jest spełniona przez nieokreśloną liczbę argumentów.

Poniżej określone zostaną punkty równowagi systemów w rozważanych przykładach.

Przykład 1 cd.

Ponieważ spełniona musi być równość (1.9) należy więc rozwiązać poniższe równanie ze względu na x_r

$$f(x_r) = 0$$

czyli

$$-x_r + \varepsilon x_r^2 = 0$$

Równanie to posiada dwa pierwiastki, co oznacza, że system posiada dwa punkty równowagi

$$x_r = 0 \quad \vee \quad x_r = \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.10)$$

Przykład 2 cd.

Analogicznie jak w poprzednim przykładzie z równości (1.9) można obliczyć punkt równowagi, w tym jednak przypadku równość ma charakter wektorowy

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{1r} \\ -x_{2r}^2 \end{bmatrix}.$$

Istnieje tylko jedno rozwiązanie takiego układu równań - punktem równowagi jest więc:

$$\begin{cases} x_{1r} = 0 \\ x_{2r} = 0 \end{cases}$$

Przykład 3 cd.

Z równości (1.9)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2r} \\ -2 \cdot x_{1r} - 3 \cdot x_{1r}^2 - x_{2r} \end{bmatrix}.$$

Z pierwszego równania wynika, że x_{2r} musi być równe 0, więc po podstawieniu do drugiego równania

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \cdot x_{1r} - 3 \cdot x_{1r}^2 \\ (2 + 3 \cdot x_{1r}) \cdot x_{1r} &= 0 \end{aligned}$$

czyli system (1.4) posiada dwa punkty równowagi:

$$\begin{cases} x_{1r} = 0 \\ x_{2r} = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x_{1r} = -\frac{2}{3} \\ x_{2r} = 0 \end{cases}$$

1.2.1 Stabilność punktu równowagi

Jedną z istotnych własności punktu równowagi jest jego stabilność. Dla każdego niezerowego punktu równowagi za pomocą zmiany zmiennych, można sprawić, że będzie on odpowiadał zeru. Oznacza to, że dla każdego punktu równowagi, stosować można definicje stabilności i asymptotycznej stabilności poznane w poprzednim ćwiczeniu, odnoszące się do rozwiązań zerowych.

Z tych definicji wynika następujący wniosek

- Punkt równowagi nazwiemy **lokalnie asymptotycznie stabilnym**, jeżeli istnieje takie otoczenie tego punktu, że wszystkie trajektorie systemu, o warunkach początkowych znajdujących się w tym otoczeniu zbiegają do tego punktu gdy $t \rightarrow \infty$.

Mówiąc nieprecyzyjnie i traktując punkt równowagi jako stałą funkcję czasu - istnieje takie otoczenie tej funkcji, że wszystkie trajektorie, które znajdą się w tym otoczeniu stają się coraz “bliższe” tej funkcji gdy $t \rightarrow \infty$. Rozpatrując punkt równowagi na portrecie fazowym - będzie on lokalnie asymptotycznie stabilny, gdy będzie istniało pewne jego otoczenie, takie że wszystkie trajektorie, które się w nim znajdują będą zmierzać do tego punktu równowagi.

Otoczenie o którym jest mowa będzie zdefiniowanym w poprzednim ćwiczeniu **obszarem przyciągania (atrakcji)** (zob. definicja w ćwiczeniu z portretów fazowych). Formułując definicję dla punktu równowagi, jeżeli obszar atrakcji jest całą przestrzenią stanu, to punkt równowagi będzie **globalnie asymptotycznie stabilny**.

Analogicznie można przeformułować definicję stabilności (nieasymptotycznej). Jeżeli punkt równowagi nie będzie stabilny, wtedy mówimy że jest on **niestabilny**.

1.3 Linearyzacja

Z definicji różniczkowalności w sensie Frecheta w punkcie (np. Bronshtejn et al., 2004, str. 689) wiadomo, że

$$f(x) = f(x^*) + \frac{df}{dx}(x^*)(x - x^*) + o(\|x - x^*\|) \quad (1.11)$$

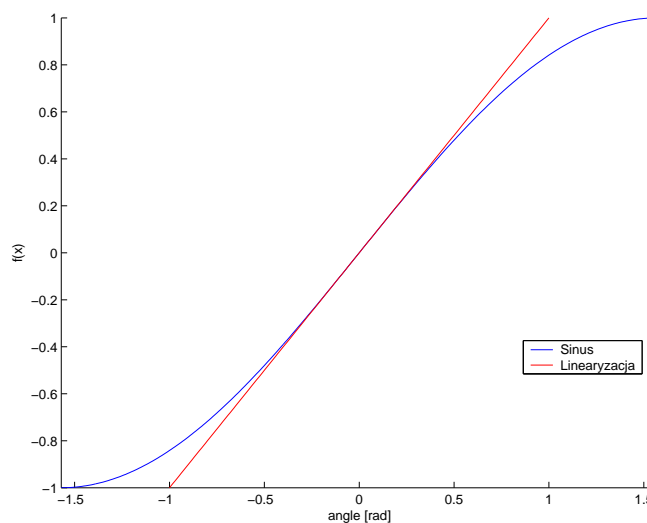
jeżeli $f(x^*) = 0$ to wtedy

$$f(x) = \frac{df}{dx}(x^*)(x - x^*) + o(\|x - x^*\|) \quad (1.12)$$

$o(s)$ jest resztą w postaci Peano, o własności $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{o(s)}{s} = 0$.

Można zauważyć, że w ten sposób uzyskane zostaje pewne przybliżenie funkcji f w otoczeniu punktu x^* . $\frac{df}{dx}(x^*)$ dla funkcji skalarnych jest pochodną funkcji w punkcie w klasycznym sensie (granica ilorazu różnicowego, współczynnikiem kierunkowym stycznej). Przybliżenie funkcji f za pomocą zależności (1.12) nazywane jest linearyzacją w punkcie.

Graficzną ilustrację linearyzacji przedstawia rysunek 1.3. Dokonano na nim linearyzacji funkcji $\sin x$ wokół punktu $x = 0$. Jak można zauważyć im dalej od punktu linearyzacji, tym różnica między linearyzacją a funkcją staje się większa.



Rysunek 1.1: Przykład linearyzacji funkcji sinus

Warto zwrócić uwagę, że przybliżenie (1.12) jest równoznaczne rozwinięciu funkcji $f(x)$ w szereg Taylora (Fichtenholtz, 1972, str. 365) w okół punktu x^* i zaniedbanie wyrazów stopnia

wyższego niż 1. W ogólności $\frac{df}{dx}(x^*) = J(x^*)$ będzie macierzą Jakobiego funkcji f w punkcie x^* , przy czym dla $x \in \mathbb{R}^n$ oraz

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

macierz Jakobiego ma postać

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Czyli w punkcie x^* będzie ona stałą macierzą. Oczywiście jest, że linearyzację można zastosować jedynie dla przybliżania funkcji różniczkowalnych.

Metodę linearyzacji można zastosować do przybliżania prawej strony równania różniczkowego (1.1) w otoczeniu punktu równowagi x_r . Wtedy

$$f(x) = J(x_r)(x - x_r) + o(\|x - x^*\|)$$

dlatego, ponieważ $f(x_r)$ jest równe 0 i możemy je pominąć. Wtedy, jeżeli $x_r = 0$ można rozpatrywać system liniowy (zob. Mitkowski, 2007, s. 124)

$$\dot{x}(t) = J(x_r)x(t)$$

Taki system nazywany jest **systemem zlinearyzowanym** lub **linearyzacją**. Dla układów o $x_r \neq 0$ należy dokonać zmiany zmiennych, aby system zlinearyzowany miał punkt równowagi w 0.

Poniżej przeprowadzona zostanie linearyzacja dla wcześniej przedstawionych przykładów.

Przykład 1

$$f(x) = -x + \varepsilon x^2$$

Więc:

$$J(x) = \frac{df}{dx}(x) = -1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot x$$

Dla zerowego punktu równowagi linearyzacja ma postać

$$\dot{x} = J(0) \cdot (x - 0) = -x$$

Zaś dla punktu równowagi $\frac{1}{\varepsilon}$

$$\dot{x} = J\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{\varepsilon}\right) = (-1 + 2) \cdot \left(x - \frac{1}{\varepsilon}\right) = x - \frac{1}{\varepsilon}$$

a po zamianie zmiennych $z = \left(x - \frac{1}{\varepsilon}\right)$

$$\dot{z} = z$$

Przykład 2

Dla prawej strony

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2^2 \end{bmatrix}$$

macierz Jakobiego ma postać

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

Dla jedyne go punktu równowagi system zlinearyzowany to

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Przykład 3

Dla prawej strony

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

Macierz Jakobiego

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - 6x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dla zerowego punktu równowagi, system zlinearyzowany to

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x$$

a dla punktu $[-\frac{2}{3} \ 0]^T$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

co po zmianie zmiennych daje układ liniowy

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} z$$

1.4 Lokalne własności układu zlinearyzowanego

Linearyzacja systemów nieliniowych w punkcie równowagi okazuje się mieć wiele interesujących własności pomocnych w analizie samych układów nieliniowych. Przedstawione tutaj zostaną w uproszczonej formie dwa najważniejsze twierdzenia związane z linearyzacją.

Twierdzenie 1 (I metoda Lapunowa). *Punkt równowagi, dla którego system zlinearyzowany jest asymptotycznie stabilny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Jeżeli zaś chociaż jedna z wartości własnych macierzy systemu zlinearyzowanego ma dodatnią część rzeczywistą to punkt równowagi jest niestabilny (zob. np. Mitkowski, 1991, s. 33).*

Twierdzenie to nie rozstrzyga o stabilności punktu równowagi, jeżeli system zlinearyzowany jest jedynie stabilny.

Twierdzenie 2 (Grobman-Hartman). *Jeżeli*

$$\det(j\omega I - J(x_r)) \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad j^2 = -1 \quad (1.13)$$

to trajektorie fazowe systemu nieliniowego w pewnym otoczeniu punktu równowagi zachowują się podobnie jak trajektorie układu zlinearyzowanego w tym punkcie w otoczeniu zera. (zob. np. Mitkowski, 2007, s. 125).

Warunek (1.13) jest równoważny temu, że macierz $J(x_r)$ nie może posiadać wartości własnych na osi urojonej, czyli nie może posiadać wartości własnych, które mają zerowe części rzeczywiste.

1.5 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych

Rozważony zostanie teraz sposób rozwiązywania równań różniczkowych - liniowych i nieliniowych w sposób numeryczny.

1.5.1 Metoda Dormanda-Prince'a (5)4 - ode45

Omawiane dotychczas metody rozwiązywania równań różniczkowych były metodami stałokrokowymi, to znaczy w przebiegu całej symulacji krok całkowania był stały, dobrany wedle uznania. Obecnie nowoczesne metody są metodami zmiennokrokowymi - same dobierają krok całkowania wraz z przebiegiem symulacji. Jedną z takich metod jest metoda Dormanda-Prince'a (5)4 zaimplementowana w Matlabie pod nazwą `ode45` (zob. (Shampine and Reichelt, 1997)). Metoda ta jest połączeniem metody 5-go rzędu wraz z estymatorem błędu rzędu 4. W ten sposób analizując różnicę pomiędzy wynikami wbudowanych metod 5-go i 4-go rzędu uzyskuje się pewne przybliżenie błędu metody. W zależności od wielkości oszacowanego błędu skraca się lub wydłuża krok dyskretyzacji tak, aby jak najdokładniejszy wynik przy najmniejszym nakładzie obliczeń. Dodatkowo, w zależności od wielkości szacowanego błędu obliczony wynik może zostać zatwierdzony lub odrzucony, i wykonany jeszcze raz z mniejszym krokiem.

Ze względu na to, że metoda oblicza rozwiązanie w chwilach, w których sama zdecyduje, potrzebne są metody obliczania wartości rozwiązania w żądanych momentach. Do tego celu służy tzw. "gęste wyjście", które opiera się na odpowiednio dokładnej interpolacji wielomianowej wartości pomiędzy obliczonymi wartościami. W metodzie `ode45` dokładność tej interpolacji to 4 rząd. Efektywnie pozwala więc ona na uzyskiwanie ciągłych rozwiązań.

Działanie metody nie będzie tu dokładnie omawiane, zainteresowani wszystkie informacje znajdą w pracach (Shampine and Reichelt, 1997) i (Hairer et al., 2000). Podane zostaną natomiast wskazówki co do ustawiania parametrów metody oraz jej używania.

Na początek przyjmijmy, że będziemy rozwiązywać funkcję zapisaną w pliku `example.m`. Chcemy wyliczyć rozwiązanie na odcinku $[0, T]$, a następnie wyliczyć wartości na w punktach odległych od siebie o dt z tego przedziału. Warunek początkowy określamy jako x_0 . Zrealizuje to poniższy fragment kodu: Powyższe wykorzystanie `ode45` wykorzystuje parametry domyślne. Zmiany parametrów metody dokonuje się dodając dodatkowy argument:

```
sol = ode45(han, [0 T], x0, opcje)
```

przygotowany za pomocą funkcji `odeset`. Będziemy tutaj rozpatrywać jedynie parametry dotyczące dokładności rozwiązania.

Na początek musimy wprowadzić pojęcia tolerancji względnej (`RelTol`) i bezwzględnej (`AbsTol`). Aby metoda `ode45` uznała wynik swoich obliczeń za zadowalający musi być spełniona następująca nierówność:

$$e(i) \leq \max(\text{RelTol} \cdot |y(i)|, \text{AbsTol}(i))$$

gdzie $e(i)$ oznacza i -ty element wektora estymowanego błędu w danym kroku, zaś $y(i)$ i -ty element wektora rozwiązania w tym samym kroku. **AbsTol** i **RelTol** w ogólności są wektorami n elementowymi, w ten sposób wprowadza się oddzielne tolerancje dla każdego elementu wektora stanu. Jeżeli ustawi się je na wartości skalarne, ta sama tolerancja będzie stosowana dla wszystkich zmiennych stanu.

Aby zmienić wartości tolerancji na przykład AT dla **AbsTol** i RT dla **RelTol** stosujemy następujący kod:

```
opcje=odeset('RelTol',RT,'AbsTol',AT)
```

Domyślne wartości to: **RelTol**= 10^{-3} i **AbsTol**= 10^{-6} .

1.6 Ćwiczenie

Zweryfikować działanie podanych twierdzeń dla rozpatrywanych przykładów:

- Zbadać i zilustrować wykresami w dziedzinie czasu (dla przykładu 1) i portretami fazowymi (dla przykładów 2 i 3) stabilność punktów równowagi;
- Na podstawie przykładu 1 zanalizować wpływ wartości ϵ na rozmiar otoczenia, w którym dynamiki systemu zlinearyzowanego i nieliniowego są podobne;
- Na podstawie przykładu 2 zweryfikować wpływ braku hiperboliczności;
- Na podstawie przykładu 3 pokazać działanie Tw. Grobmana Hartmana - porównując portret fazowy systemu nieliniowego i jego linearyzacji w obydwu punktach równowagi.

1.7 Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy umieścić skrypt realizujący ćwiczenie 1.6. Skrypt ma stosować metodę numeryczną rozwiązywania równań różniczkowych Dormanda-Prince'a 5 rzędu z estymatorem błędu 4 rzędu (ode45).

1.8 Przykładowe Zadania

Zadanie 1.1. Rozwiąż podane równanie różniczkowe:

$$\dot{x}y + 4x = 0$$

Zadanie 1.2. Dany jest system dynamiczny

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - 3x_1(t)^2 - x_2(t).\end{aligned}$$

Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

Zadanie 1.3. Wyznaczyć punkty równowagi dla obwodu Chua, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami:

$$\begin{aligned}C_1\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{R}x_1(t) + \frac{1}{R}x_2(t) - g(x_1(t)), \\ C_2\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{R}x_1(t) - \frac{1}{R}x_2(t) + x_3(t), \\ L\dot{x}_3(t) &= -x_2(t) - R_0x_3(t),\end{aligned}$$

przy czym $g(v) = g_1v + g_2v^3$.

Zadanie 1.4. Dla jakich wartości parametru ϵ zerowy punkt równowagi układu zwanego oscylatorem Van der Pola będzie niestabilny

$$\ddot{x}(t) - \epsilon (1 - x(t)^2) \dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Zadanie 1.5. Dla jakich wartości parametru a linearyzacja przestaje spełniać warunki twierdzenia Grobmana-Hartmana dla układu opisanego równaniami:

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2) x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2) x_2(t).$$

Zadanie 1.6. Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2) x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2) x_2(t),$$

będzie asymptotycznie stabilny.

Zadanie 1.7. Dany jest układ

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2^2$$

Należy:

1. znaleźć wszystkie punkty równowagi układu
2. dla każdego punktu równowagi
 - a) podać liniową aproksymację układu nieliniowego
 - b) narysować portret fazowy układu zlinearyzowanego

Zadanie 1.8. Narysować portret fazowy układu

$$\dot{x}(t) = \frac{x}{x^2 - x}$$

Zadanie 1.9. Narysować portret fazowy układu postaci

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x - x^2 - y$$

w okolicy zerowego punktu równowagi. Czy ten punkt równowagi jest lokalnie asymptotycznie stabilny?

Zadanie 1.10. (Przeciążenie sieci internetowej) Prosty model sterowania przeciążeniem sieci N komputerów połączonych za pomocą routera jest opisany równaniami:

$$\dot{x}_i = -b \frac{x_i^2}{2} + (b_{max} - b)$$

$$\dot{b} = \sum_{i=1}^N x_i - c$$

gdzie $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ oznaczają szybkość transmisji źródeł danych, $b \in \mathbb{R}$ jest aktualnym rozmiarem bufora w routerze, $b_{max} > 0$ jest maksymalnym możliwym rozmiarem bufora oraz $c > 0$ jest pojemnością łącza między komputerami a routerem. Równanie \dot{x}_i opisuje zależność, którą wykorzystują komputery do określenia, jak szybko przesłać dane przez sieć, a \dot{b} oznacza prędkość, z jaką wypełnia się bufor routera. Dla przypadku $N = 2$, $b_{max} = 1\text{Mb}$ i $c = 2\text{Mb/s}$ należy znaleźć punkty równowagi tego układu i zbadać ich stabilność.

Bibliografia

- I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Nowoczesne Kompendium Matematyki*. PWN, Warszawa, 2004.
- G. M. Fichtenholtz. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa, 1972.
- E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations: I Nonstiff problems*. Springer, 2 edition, 2000.
- W. Mitkowski. *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1991.
- W. Mitkowski. *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 1996.
- W. Mitkowski. *Równania macierzowe i ich zastosowania*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 2 edition, 2007.
- Lawrence F. Shampine and Mark W. Reichelt. The MATLAB ODE Suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(1), 1997.