

1 Dyskretne systemy dynamiczne

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z istotnymi własnościami systemów dyskretnych w czasie oraz konsekwencjami wynikającymi z dyskretnego podejścia do systemów dynamicznych.

1.1 Równanie różnicowe jako model systemu dynamicznego

Jednym z modeli określającym zachowanie się systemu dynamicznego jest równanie różnicowe

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{1.1}$$

przy czym $k = 0, 1, 2, \dots$. Równanie to, określa nam wartość zmiennej x w następnej iteracji w sposób rekurencyjny w oparciu o wartość zmiennej x i wejścia u w obecnej iteracji. Innymi słowy, rozwiązaniem równania różniczkowego jest ciąg o indeksach i , zadany w sposób rekurencyjny.

Rozwiązanie jawne równania różnicowego (1.1) wyraża się wzorem (zob. np. Kaczorek, 1977)

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

Uwaga 1.1. Przy wykorzystaniu zmiany zmiennych, jak przy korzystaniu z postaci Jordana, macierz A można wyrazić w sposób

$$A = PJP^{-1}$$

Wykorzystywane było to przy obliczaniu e^{At} . Warto zwrócić uwagę, że

$$\begin{aligned}A^n &= (PJP^{-1})^n = \\ &= \underbrace{(PJP^{-1}) \cdot (PJP^{-1}) \cdot \dots \cdot (PJP^{-1})}_{n \text{ razy}} = \\ &= PJ^n P^{-1}\end{aligned}$$

Dodatkowo przy wykorzystywaniu powyższych zależności należy zwrócić uwagę na następujące związki:

1. Jeżeli macierz Jordana J zawiera klatki Jordana o wymiarze $m > 1$ tzn. klatki o postaci:

$$J_m = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

to ich potęgi wyrażają się wzorem (wynika to z dwumianu Newtona)

$$J_m^s = \begin{cases} \lambda^s I + s\lambda^{s-1}N_m + \binom{s}{2}\lambda^{s-2}N_m^2 + \dots + \binom{s}{s-1}\lambda N_m^{s-1} + N_m^s & \text{dla } s < m \\ \lambda^{s-m} \left(\lambda^m I + m\lambda^{m-1}N_m + \binom{m}{2}\lambda^{m-2}N_m^2 + \dots + \binom{m}{m-1}\lambda N_m^{m-1} \right) & \text{dla } s \geq m \end{cases}$$

przy czym N_m to tzw. macierz nilpotentna o wymiarze m , której elementy n_{ij} są równe

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j + 1 \\ 0 & \text{gdy } i \neq j + 1 \end{cases}$$

tzn. wszystkie elementy poza tymi bezpośrednio nad główną są równe jeden a pozostałe zero. W przypadku potęgi macierzy N_m^s , przy $s < m$ jej elementy te przyjmują postać

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j + s \\ 0 & \text{gdy } i \neq j + s \end{cases}$$

zaś dla $s \geq m$ macierz N_m^s jest macierzą zerową.

Na przykład

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

2. Jeżeli wśród wartości własnych macierzy występują pary sprzężone zespolonych wartości własnych o rzeczywistych kłatkach Jordana postaci

$$J_* = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

to ich potęgi wyrażają się wzorem (wynika to ze wzoru de Moivre'a i postaci trygonometrycznej liczby zespolonej)

$$J_*^n = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^n \begin{bmatrix} \cos n\phi & \sin n\phi \\ -\sin n\phi & \cos n\phi \end{bmatrix}$$

przy czym ϕ jest rozwiązaniem równania

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{b}{a}$$

lub równoważnie układu równań

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \phi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^n = 2^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \cos n\frac{\pi}{4} & \sin n\frac{\pi}{4} \\ -\sin n\frac{\pi}{4} & \cos n\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

jest tak ponieważ rozwiązaniem równania $\operatorname{tg} \phi = 1$ jest $\phi = \frac{\pi}{4}$.

1.1.1 Równania różnicowe wyższych rzędów

Innym popularnym modelem systemu dyskretnego analogicznym jest skalarne równanie różnicowe (rekurencyjne) rzędu n tzn.

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_0u(k) \quad (1.2)$$

z warunkami początkowymi

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad \dots, \quad y(n-1) = y_{n-1} \quad (1.3)$$

Jest ono równoważne równaniu macierzowemu (1.1) z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

i warunkami początkowymi

$$x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ciekawym szczególnym przypadkiem równania różnicowego jest autonomiczne równanie rzędu 2

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0 \quad (1.4)$$

Można je łatwo rozwiązać analizując jego równanie charakterystyczne postaci

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

którego pierwiastki z_1 i z_2 określają nam postać rozwiązania ogólnego:

1. Jeżeli $z_1 \neq z_2$ i są one rzeczywiste to rozwiązanie ogólne ma postać

$$y(k) = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$$

2. Jeżeli $z_1 = z_2$ to rozwiązanie ogólne ma postać

$$y(k) = c_1 z_1^k + c_2 k z_1^k$$

3. Jeżeli $z_1 = z_2^*$ (są liczbami sprzężonymi) to rozwiązanie ma postać

$$y(k) = c_1 |z_1|^k \cos k\phi + c_2 |z_1|^k \sin k\phi$$

przy czym $|z_1|$ oznacza moduł z liczby zespolonej z_1 zaś ϕ to jej argument tzn.

$$|z_1| = \sqrt{\operatorname{Re} z_1^2 + \operatorname{Im} z_1^2}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{Im} z_1}{\operatorname{Re} z_1}$$

Parametry c_1 i c_2 wyznaczamy z wykorzystaniem warunków początkowych.

Uwaga 1.2. Równania różnicowe można wykorzystać np. do obliczania wyższych potęg macierzy 2×2 . Wykorzystujemy do tego tw. Hamiltona-Cayleya. Niech macierz A ma wielomian charakterystyczny

$$W(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

z twierdzenia Hamiltona-Cayleya (zob. Turowicz, 1995, s. 131) wiemy, że

$$A^2 + a_1 A + a_0 I = 0$$

czyli dla A^n mamy co następuje (pomnożyliśmy obie strony równania przez A^n)

$$A^{n+2} + a_1 A^{n+1} + a_0 A^n = 0$$

Wprowadźmy teraz oznaczenie

$$Y(k) = A^k$$

mamy więc równanie rekurencyjne

$$Y(k+2) + a_1 Y(k+1) + a_2 Y(k) = 0$$

w którym zmienna jest macierzą. Rozwiązujemy te równania tak samo jak zwykle równania rekurencyjne, z tym że stałe są macierzami tj. (dla przypadku rzeczywistego)

$$Y(n) = \lambda_1^n C_1 + \lambda_2^n C_n$$

Warto zauważyć, że wielomian charakterystyczny tego równania jest taki sam jak macierzy, więc jego pierwiastki to wartości własne macierzy A . Warunkami początkowymi dla tego równania są

$$Y(0) = I, \quad Y(1) = A$$

1.2 Stabilność systemów dyskretnych

Rozważania w tej sekcji dotyczą przypadku, gdy $u(k) = 0$, $\forall k = 0, 1, \dots$ czyli innymi słowy gdy system (1.1) jest autonomiczny.

1.2.1 Asymptotyczna stabilność

Liniowy dyskretny system dynamiczny, nazwiemy **asymptotycznie stabilnym**, jeżeli dla każdego $x(0)$, $x(k) = A^k x(0) \rightarrow 0$ gdy $k \rightarrow \infty$.

Twierdzenie 1. *Liniowy dyskretny system dynamiczny, opisany równaniem różnicowym (1.1), jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy gdy wartości własne macierzy A leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej o środku w zerze.*

Zastosowanie twierdzeń o lokalizacji pierwiastków wielomianu dla systemów dyskretnych

Niech $W(\lambda)$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy A , oraz niech

$$\lambda = \frac{z+1}{z-1} \tag{1.5}$$

Można dokonać podstawienia (1.5) do $W(\lambda)$, otrzymamy funkcję wymierną $W(z) = \frac{L(z)}{M(z)}$, której licznik i mianownik będą wielomianami. Wartości własne macierzy A znajdują się w kole jednostkowym wtedy i tylko wtedy gdy pierwiastki wielomianu $L(z)$ będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie zespolonej. Do weryfikacji czy pierwiastki wielomianu leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej można zastosować np. kryterium Hurwitza (zob. Mitkowski, 2007, s. 134).

1.3 Własności dynamiki dyskretniej

W liniowych systemach dyskretnych występują pewne zjawiska dynamiczne, które albo nie mają odpowiedników w zachowaniach systemów ciągłych, lub też mają odpowiedniki dopiero w systemach wyższych rzędów. Na przykład, dyskretny system pierwszego rzędu, może generować rozwiązania okresowe lub oscylacyjne, co w systemach ciągłych występuje dopiero w drugim rzędzie.

1.3.1 Analiza liniowego równania różnicowego przy $n = 1$

Należy przeanalizować zachowanie się następującego systemu dyskretnego

$$x(k+1) = \lambda x(k)$$

w zależności od wartości parametru λ , należy rozpatrywać:

- $\lambda < -1$
- $\lambda = -1$
- $\lambda \in (-1; 0)$
- $\lambda = 0$
- $\lambda \in (0; 1)$
- $\lambda = 1$
- $\lambda > 1$

Porównać wyniki z rozwiązaniami równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$\dot{y} = \alpha y$$

dla różnych wartości parametru α .

1.3.2 Równanie różnicowe z osobliwą macierzą A

Rozważany jest dyskretny układ autonomiczny opisany równaniem różnicowym

$$x(i+1) = Ax(i) \tag{1.6}$$

Wartość x w k -tym kroku wynosi

$$x(k) = A^k x(0)$$

niech wartości własne macierzy A będą wszystkie równe zero. W takim przypadku wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n$$

Znane jest twierdzenie Hamiltona-Cayleya (zob. Turowicz, 1995, s. 131), które mówi, że każda macierz spełnia swój wielomian charakterystyczny. W tym przypadku oznacza to, że

$$A^n = 0$$

Oznacza to, że wartość x w n -tym kroku jest równa

$$x(n) = A^n x(0) = 0$$

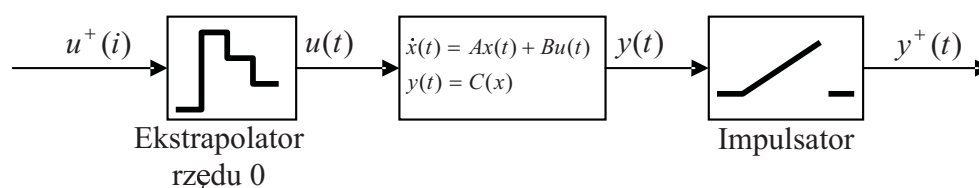
niezależnie od wartości $x(0)$. Innymi słowy, rozwiązanie równania różnicowego (1.6), z macierzą A o zerowych wartościach własnych staje się zerem w co najwyżej n krokach, niezależnie od warunku początkowego. Zjawisko to znalazło zastosowanie w sterowaniu przy tzw. regulatorze dead-beat. Regulator ten, ma za zadanie umieścić wartości własne dyskretnego systemu zamkniętego w zerze, tak aby stan systemu osiągnął zero w liczbie kroków mniejszej bądź równej rzędowi systemu.

1.4 Układ dyskretno ciągły

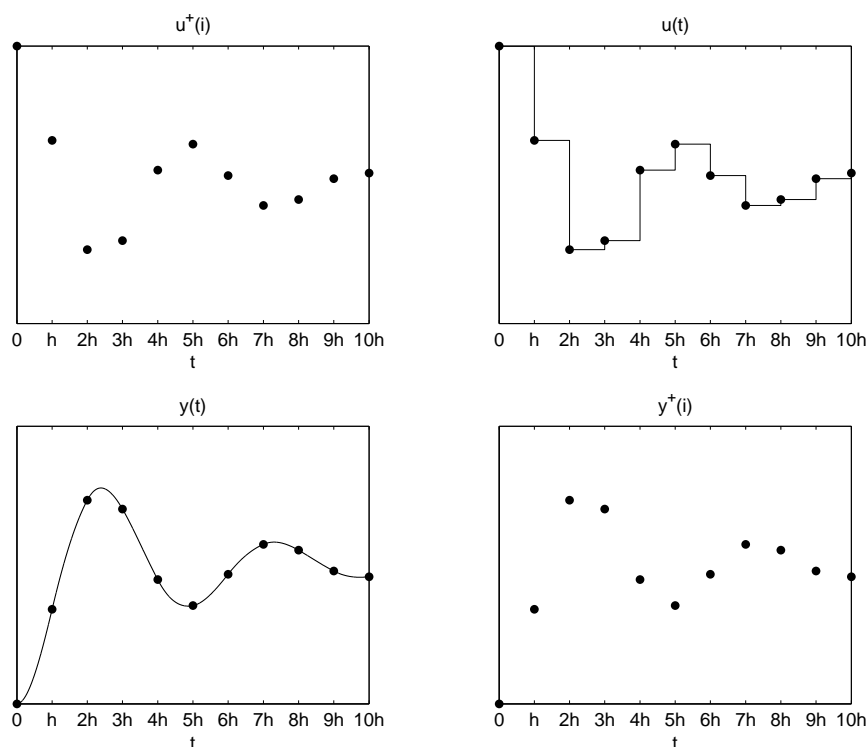
Przetwornik cyfrowo-analogowy (ekstrapolator rzędu zerowego) działa w następujący sposób: na wejście przetwornika podawany jest ciąg elementów $u^+(i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, a na wyjściu otrzymujemy funkcję $u(t) = u^+(i)$ dla $t \in [ih, (i+1)h)$, ogólnie $h > 0$ jest okresem pracy przetwornika (okresem próbkowania). Na wyjściu z przetwornika analogowo-cyfrowego (impulsatora) mamy ciąg elementów $y^+(i) = y(ih)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $h > 0$ (okres pracy impulsatora).

Połączenie szeregowo ekstrapolatora, systemu ciągłego w czasie i impulsatora jest pokazane na rys. 1.1 i stanowi układ dyskretno ciągły (przy pracy synchronicznej ekstrapolatora i impulsatora z okresem $h > 0$).

Uwaga 1.3. Ekstrapolator rzędu zerowego w Matlabie występuje jako *zero-order hold*. W literaturze można również spotkać skrót od angielskiej nazwy tj. *“zoh”*.



Rysunek 1.1: Układ dyskretno-ciągły



Rysunek 1.2: Sygnały w układzie dyskretno-ciągłym

Rozważamy przypadek szczególny, a mianowicie liniowy dynamiczny układ stacjonarny z czasem ciągłym

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C(x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $t \geq 0$, a A , B i C są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach.

W tym przypadku zależność $y^+(i)$ od $u^+(i)$ (zob. rysunek 1.1) można opisać następującym równaniem rekurencyjnym (różnicowym)

$$\begin{aligned} x^+(i+1) &= A^+x^+(i) + B^+u^+(i) \\ y^+(i) &= C^+x^+(i) \end{aligned} \quad (1.8)$$

gdzie $x^+(i) = x(ih)$, $u^+(i) = u(ih)$, $y(i) = y(ih)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, przy czym $h > 0$ oznacza okres próbkowania, A^+ , B^+ i C^+ są macierzami rzeczywistymi określonymi następującymi zależnościami

$$\begin{aligned} A^+ &= e^{hA} \\ B^+ &= \int_0^h e^{tA} B dt \\ C^+ &= C \end{aligned} \quad (1.9)$$

Na rysunku 1.2 pokazano przykładowe przebiegi sygnałów w układzie dyskretno ciągłym.

Wyprowadzenie zależności (1.9)

Macierze A^+ i B^+ otrzymujemy z rozwiązania równania różniczkowego (1.7), o postaci

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

po podstawieniu $t = (i+1)h$ i $t_0 = ih$ oraz $u(t) = u^+(i)$ na odcinkach $t \in [ih, (i+1)h)$, mamy

$$x((i+1)h) = e^{((i+1)h-ih)A}x(ih) + \int_{ih}^{(i+1)h} e^{((i+1)h-\tau)A}Bd\tau u(ih) = \underbrace{e^{hA}}_{A^+}x^+(i) + \underbrace{\int_0^h e^{tA}Bdt}_{B^+}u^+(i)$$

1.5 Przykłady systemów dyskretnych

Podane powyżej przykłady zastosowania systemów dyskretnych nie wyczerpują tematyki. Równania różnicowe wykorzystywane są do opisu zjawisk w biologii, ekonomii, socjologii i wielu innych dziedzinach wiedzy.

Podamy teraz kilka przykładów systemów dynamicznych, które mają charakter dyskretny.

1.5.1 Kapitalizacja odsetek

Zysk z lokaty lub konta oszczędnościowego zależy od oprocentowania i kapitalizacji. Kapitalizacja to częstotliwość dopisywania odsetek do kapitału zgromadzonego na rachunku bankowym. Dwie lokaty o takim samym oprocentowaniu, ale innej kapitalizacji przyniosą zupełnie inny zysk.

W systemach bankowych na lokacie terminowej odsetki dopisywane są do kapitału w momencie wygasania depozytu. Jeśli założymy lokatę n miesięczną, to po czasie n miesięcy bank obliczy należne odsetki i wypłaci oszczędności wraz z wypracowanym zyskiem.

W przypadku oprocentowania składanego wartość końcowa kapitału, otrzymanego w wyniku kapitalizacji odsetek dla zainwestowanego kapitału, można wyrazić wzorem:

$$K = K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn},$$

gdzie:

- K_0 - kapitał początkowy,

- K - kapitał końcowy,
- m - liczba kapitalizacji w roku,
- n - czas trwania inwestycji (zakładamy, że jest wielokrotnością okresów kapitalizacji),
- r - nominalna stopa procentowa.

1.5.2 Metoda Newtona-Raphsona (Metoda Stycznych)

Metoda Newtona-Raphsona to iteracyjny algorytm wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastków funkcji.

Założmy, że $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalną funkcją z wartościami rzeczywistymi na przedziale $[a, b]$. Zadaniem jest znalezienie takiego $x^* \in [a, b]$, które spełnia równanie

$$f(x^*) = 0$$

W przedziale poszukiwań pierwiastka funkcja musi spełniać następujące warunki:

- funkcja f oraz jej pierwsza pochodna są ciągłe i określone w badanym przedziale,
- wewnątrz $[a, b]$ znajduje się dokładnie jeden pierwiastek,
- funkcja f na krańcach przedziału $[a, b]$ przyjmuje różne znaki,
- pierwsza pochodna ma stały znak w badanym przedziale.

W pierwszym kroku metoda pobiera od użytkownika punkt startowy x_0 , z którego następnie wyprowadzona jest styczna do punktu $f(x_0)$. Odcięta punktu przecięcia stycznej z osią OX jest pierwszym przybliżeniem miejsca zerowego funkcji. W sposób iteracyjny możemy zapisać tę zależność w następujący sposób:

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$$

Rozwiązując podaną zależność ze względu na x_n otrzymujemy wzór rekurencyjny na kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji f :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

W metodzie Newtona-Raphsona oblicza się kolejne wartości przybliżeń miejsc zerowych funkcji, aż do momentu gdy ich wynik będzie spełniał zadane kryterium dokładności. W praktyce stosowane są następujące kryteria zakończenia obliczeń algorytmu:

1. $|f(x_n)| \leq \epsilon$ - wartość funkcji w wyznaczonym miejscu jest bliska zeru z dokładnością ϵ ,
2. $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ - odległość pomiędzy kolejnymi przybliżeniami rozwiązaniami nie zmienia się więcej niż o zadaną dokładność ϵ ,
3. przekroczono maksymalną ilość iteracji.

1.6 Modelowanie układów dyskretnych w Simulinku

Elementy systemów dyskretnych znajdują się w zakładce Simulink→Discrete. Istotnymi będą *Zero order hold* i *Discrete State space* należy w nich wpisać rozpatrywaną wartość kroku dyskretyzacji h np. 1.

Wejście dla układu wybrać z zakładki Simulink →Sources

Ustawienia symulacji tak jak we wcześniejszych ćwiczeniach.

Bloczek impulsator nie występuje w Simulinku i nie jest też do niczego potrzebny! Wykresy trajektorii układów dyskretnych w simulinku mają charakter wykresów schodkowych.

Ważne! Krok całkowania dla solvera w simulinku nie jest krokiem dyskretyzacji dla systemów dyskretnych - służy on tylko i wyłącznie do aproksymacji systemu ciągłego dlatego musi on być odpowiednio mały ($1e-2$ powinno wystarczyć)

Ważne! Przy ustawianiu solvera w simulinku należy ustawić Mode na 'single tasking' (pole wyboru obok wartości kroku)

1.7 Sprawozdanie

Do sprawozdania należy wykonać następujące zadania:

1. Przeprowadzić analizę równania liniowego jak w sekcji 1.3.1
2. Zamodelować w simulinku układ dyskretno ciągły i pokazać, że w chwilach ih układ ciągły z wejściem poprzez 'zoh' i układ dyskretny mu równoważny przyjmują te same wartości. Aby utworzyć model należy bloczek wejścia połączyć z odpowiednim członem 'zoh' z którego wyjście należy podać na układ ciągły z macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -I & -N \end{bmatrix},$$

gdzie I to liczba liter w imieniu a N liczba liter w nazwisku studenta,

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Dla podanych macierzy wyznacz układ dyskretny z macierzami A^+ , B^+ i C^+ wyjścia z systemów zapisać do przestrzeni roboczej i porównać.

3. Zamodelować kapitalizację odsetek na koncie bankowym i udowodnić następujące twierdzenie przy pomocy odpowiednich wykresów: "W praktyce im częściej bank dopisuje odsetki do salda lokaty, tym lepiej dla klienta".
4. Zaimplementować metodę Newton-Raphson, która wykorzystuje wszystkie warunki stopu. Przetestować działanie zaimplementowanego algorytmu dla wielomianu:

$$W(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12,$$

w zależności od wybranych punktów początkowych i dokładności ϵ . Wytlumacz dlaczego dla $x_0 = -1$ otrzymany wynik nie spełnia warunków działania algorytmu.

1.8 Przykładowe zadania

Zadanie 1.1. Narysować rozwiązanie równania różnicowego

$$x(k+1) = \lambda_i x(k)$$

dla $i = 1, 2, 3$ gdzie

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1$$

przy czym $x(0) = 1$ i $k \geq 0$.

Zadanie 1.2. Narysować rozwiązanie równania różnicowego

$$x(k+1) = -x(k) + u_i(k)$$

dla $i = 1, 2, 3$ gdzie

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = -1$$

przy czym $x(0) = 1$ i $k \geq 0$.

Zadanie 1.3. Obliczyć A^n dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 1.4. Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniami

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t),$$

podłączono ekstrapolator rzędu zerowego na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1$ s. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu.

Zadanie 1.5. Dla jakich wartości parametrów k_1 i k_2 system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_2 & k_1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie asymptotycznie stabilny. Zaznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie $k_1 \times k_2$.

Zadanie 1.6. Dla jakich wartości parametru k_1 system dynamiczny

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 \\ -k_1 & -k_1 \end{bmatrix} x(k)$$

będzie niestabilny.

Zadanie 1.7. Wyznaczyć rozwiązanie następującego równania różnicowego (rekurencyjnego)

$$x(k+2) + 2x(k+1) - 3x(k) = 0, \quad x(0) = 2, x(1) = -2.$$

Zadanie 1.8. Dany jest układ dyskretny

$$x(k+1) = Ax(k), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

przy czym $k = 1, 2, \dots$. Wyznaczyć $x(n)$.

Zadanie 1.9. Do ciągłego systemu dynamicznego opisanego równaniem

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t),$$

podłączono ekstrapolator pierwszego rzędu na wejściu i impulsator na wyjściu, przy czym pracują one synchronicznie z okresem próbkowania $h = 1$ s. Wyliczyć parametry systemu dyskretnego odpowiadające takiemu połączeniu. W układzie podtrzymującym pierwszego rzędu (ang. *first-order hold*) rekonstrukcja sygnału na podstawie ciągu elementów $u^+(i)$ odbywa się w następujący sposób:

$$u(t) = \frac{u^+(i) - u^+(i-1)}{h} (t - ih) + u^+(i), \quad ih \leq t < (i+1)h.$$

Bibliografia

- T. Kaczorek. *Teoria układów automatycznej regulacji*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1977.
- W. Mitkowski. *Równania macierzowe i ich zastosowania*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 2 edition, 2007.
- A. Turowicz. *Teoria macierzy*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo Dydaktyczne AGH, Kraków, 5 edition, 1995.