МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3

по дисциплине «Методы оптимизации»

Тема: Решение прямой и двойственной задачи

Студент гр. 0303	________________	Калмак Д.А.
Преподаватель	________________	Мальцева Н.В.

Санкт-Петербург

2023

Цели работы.

1. Постановка задачи линейного программирования и её решение с помощью стандартной программы.
2. Исследование прямой и двойственной задачи.

Задание.

Вариант 5. Для изготовления двух видов продукции P1, P2 используют три вида сырья: S1, S2, S3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в табл. 1. Прибыль от единицы продукции первого вида составляет 50 р., второго вида – 40 р.

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Таблица 1 - Данные

Виды сырья	**Запас сырья**	**Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции**	
		P1	**P2**
S1	20	2	5
S2	40	8	5
S3	30	5	6

Основные теоретические положения.

Если исходная задача линейного программирования представлена в виде: найти минимум функции $f = (c, x)$ на множестве

$$X = \{x \in R^n : Ax \geq B, x \geq 0\}, \qquad (3.1)$$

то двойственная задача линейного программирования может быть сформулирована следующим образом:

найти максимум функции (B, λ) на множестве $\lambda = \{\lambda \in R^m : A^T \lambda \leq c, \lambda \geq 0\}$ где A^T - матрица, транспонированная к A. Двойственная к двойственной задаче есть исходная задача.

Известно, что если существует решение исходной задачи, то существует решение и двойственной задачи, причем значения экстремумов совпадают. При этом координаты экстремальной точки для двойственной задачи являются коэффициентами чувствительности результата в исходной задаче по коэффициентам вектора B.

Рассмотрим видоизмененную исходную задачу:

Найти $min(c, x)$ на множестве $\{x : x \geq 0, Ax \geq B + \varepsilon e_i\}$, где $\varepsilon > 0$,

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} i$$

Если исходная задача имеет единственное решение , то при малых $\varepsilon > 0$ и видоизмененная задача имеет решение ; причем если α_ε^i -значение минимума , то существует

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\alpha_{\varepsilon}^{i}-\alpha_{0}^{i}\right)/\varepsilon \overset{Df}{=} \beta_{i}$ Оказывается, что β есть i-я координата оптимальной точки для двойственной задачи.

Выполнение работы.

По заданной содержательной постановке задачи поставим задачу формально, а именно приведем к виду 3.1:

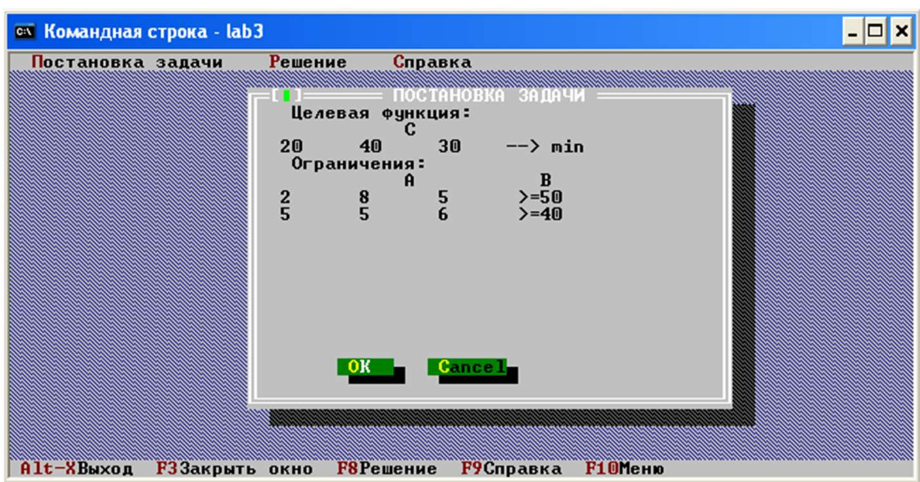
Найти минимум $f = (c, x)$, где $c = (20, 40, 30)$. Целевая функция принимает вид: $f = 20x_1 + 40x_2 + 30x_3$.

Ограничения имеют следующий вид $X = \{x \in R^n : Ax \geq B, x \geq 0\}$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix}$. Получаем систему ограничений:

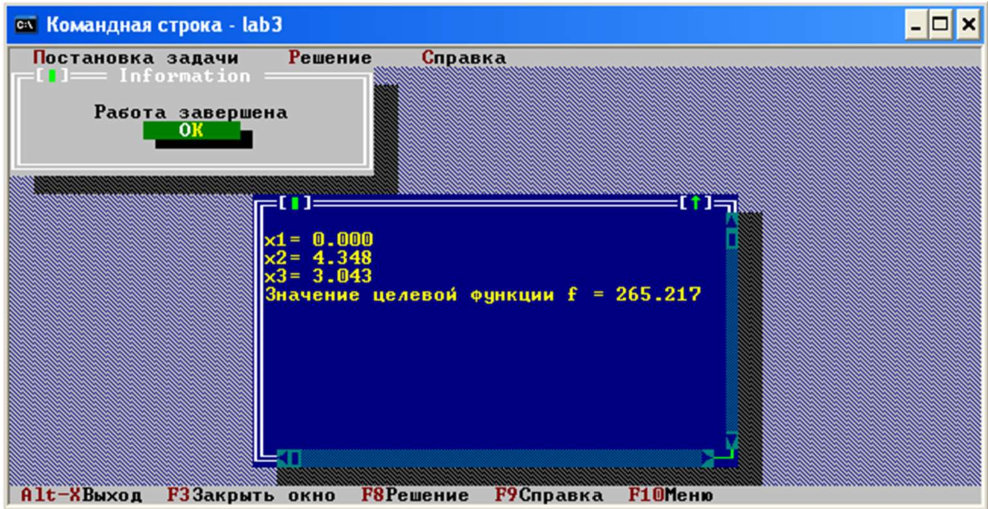
$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 50 \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Необходимо минимизировать функцию: $f = 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 \rightarrow min$

Введем данные и поставим задачу в программе:



Получим решение с помощью программы:



Поставим двойственную задачу:

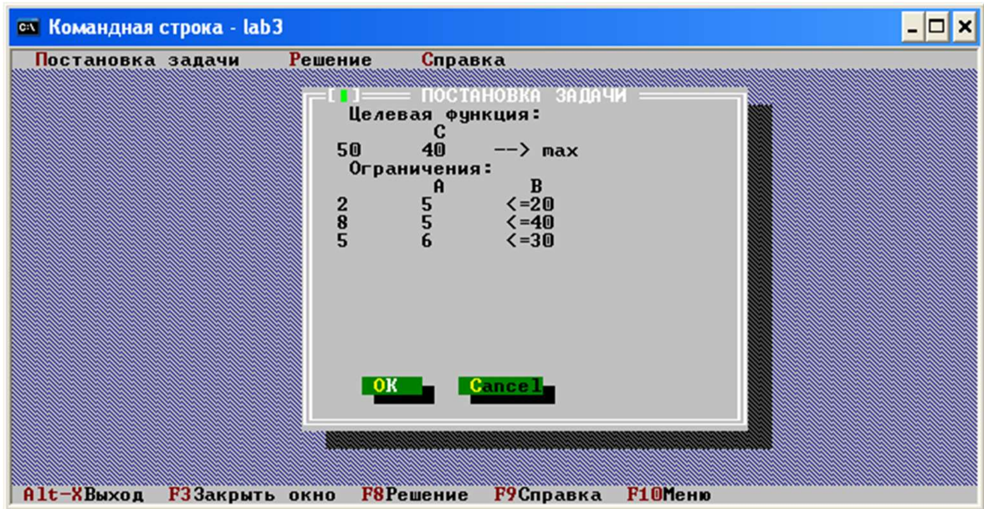
Найти максимум $f = (B, \lambda)$, где $B = (50, 40)$. Целевая функция принимает вид: $f = 50\lambda_1 + 40\lambda_2$.

Ограничения имеют следующий вид $\lambda = \{\lambda \in R^m : A^T \lambda \le c, \lambda \ge 0\}$, где $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$. Получаем систему ограничений:

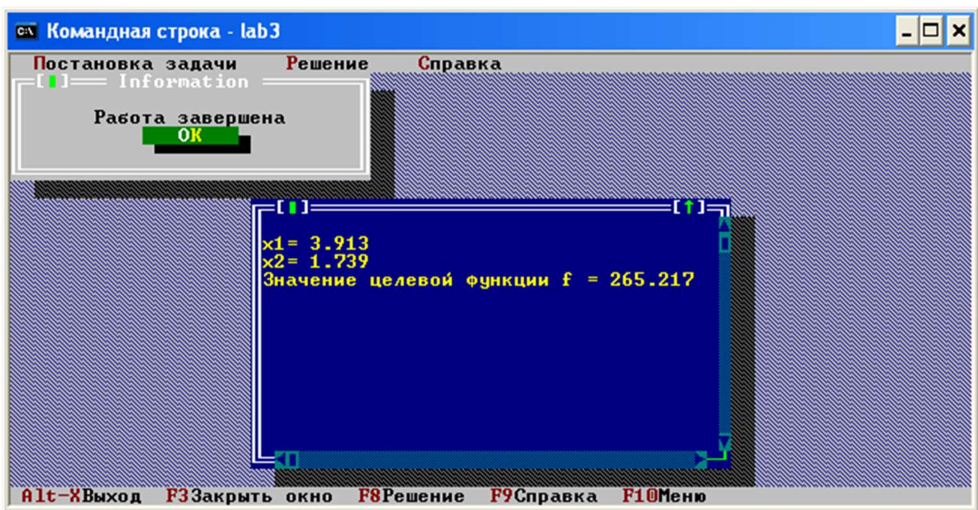
$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \le 20 \\ 8\lambda_1 + 5\lambda_2 \le 40 \\ 5\lambda_1 + 6\lambda_2 \le 30 \\ \lambda_1 \ge 0 \\ \lambda_2 \ge 0 \end{cases}$$

Необходимо максимизировать функцию: $f = 50\lambda_1 + 40\lambda_2 \to max$.

Введем данные и поставим задачу в программе:



Получим решение с помощью программы:



Определим коэффициенты чувствительности исходной задачи по координатам правой части ограничений (вектора B). Для этого:

Найдем $min(c,x)$ на множестве $\{x : x \geq 0, \mathrm{A}x \geq \mathrm{B} + \varepsilon e_i\}$, где $\varepsilon > 0$,

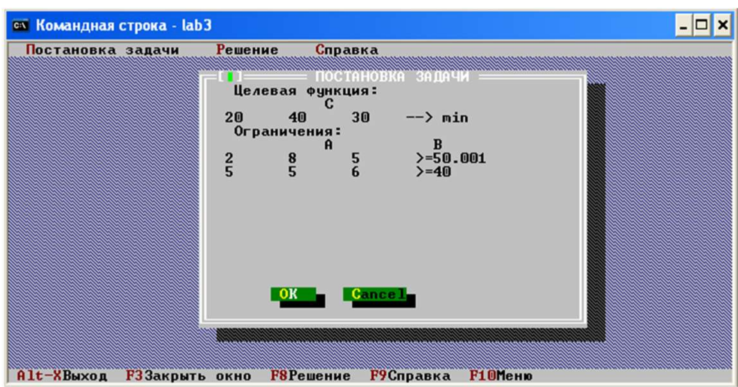
$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} i$$

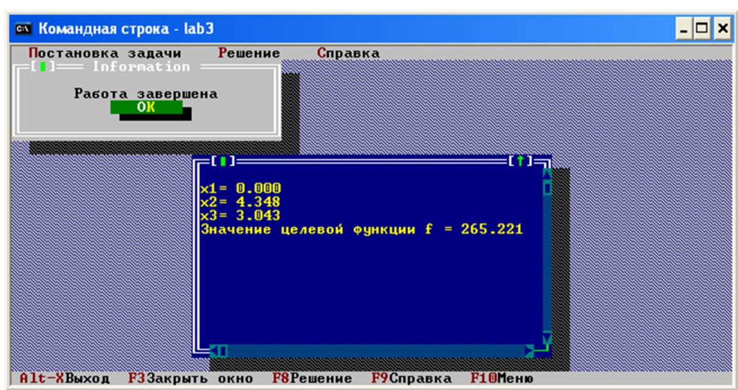
, ответ - $\varphi_i(\varepsilon)$;

Коэффициент чувствительности вычислим по формуле $\tilde{x}_i = (\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0))/\varepsilon$

i = 1

$$B = \begin{pmatrix} 50 + 0.001 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50.001 \\ 40 \end{pmatrix}$$





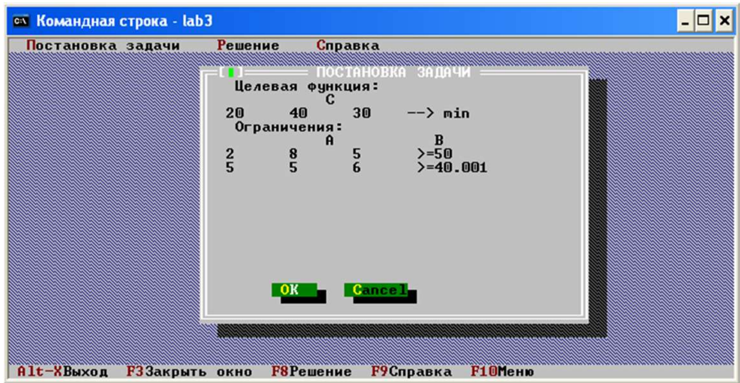
$$\varphi_1 = 265.221$$

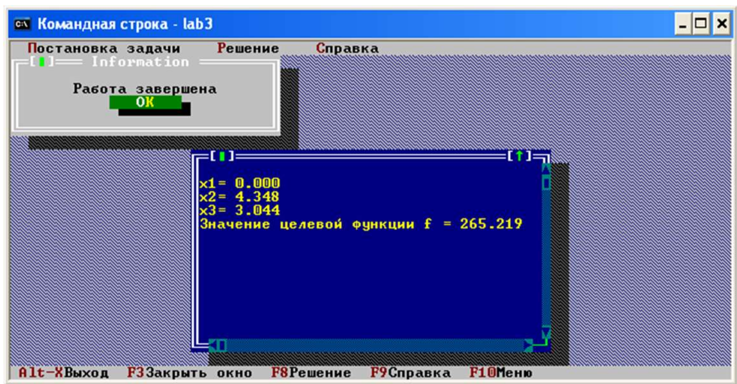
$$\bar{x}_1 = \frac{265.221 - 265.217}{0.001} = 4$$

В двойственной задаче $\lambda_1 = 3.913$, что примерно равно $\bar{x}_1$.

i = 2

$$B = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 + 0.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40.001 \end{pmatrix}$$





$$\varphi_2 = 265.219$$

$$\bar{x}_2 = \frac{265.219 - 265.217}{0.001} = 2$$

В двойственной задаче $\lambda_2 = 1.739$, что примерно равно $\bar{x}_2$.

Получилось, что коэффициенты чувствительности исходной задачи примерно равны решению двойственной задачи.

Повторим определение коэффициентов чувствительности исходной задачи, но по коэффициентам целевой функции – компонентам вектора C. Для этого:

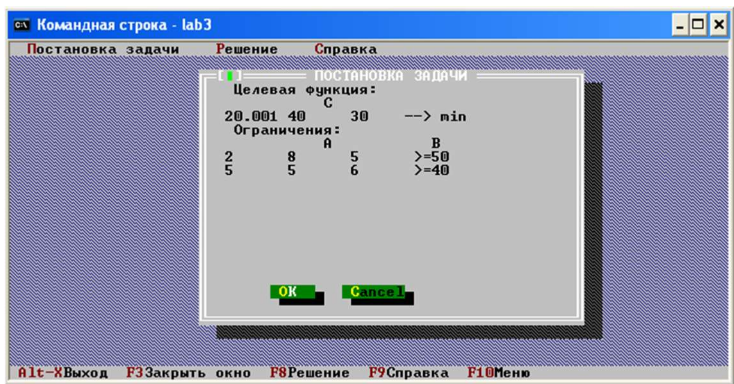
Найдем $min(c + \varepsilon e_i, x)$ на множестве $X = \{x \in R^n : Ax \geq B, x \geq 0\}$, где $\varepsilon > 0$,

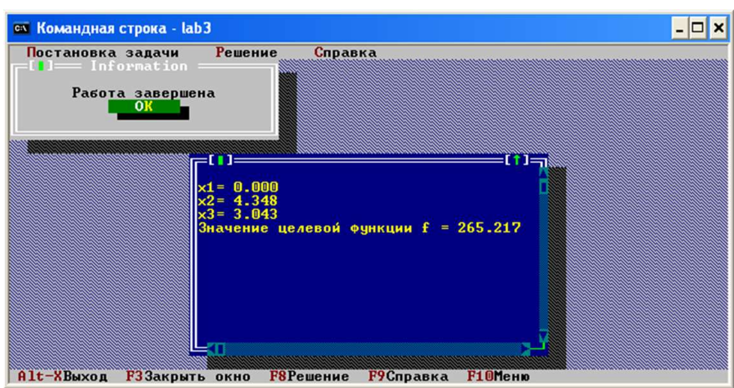
$$e_i = \begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$
, ответ - $\varphi_i(\varepsilon)$;

Коэффициент чувствительности вычислим по формуле $\tilde{x}_i = (\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0))/\varepsilon$

i = 1

$$c = (20 + 0.001, 40, 30) = (20.001, 40, 30)$$





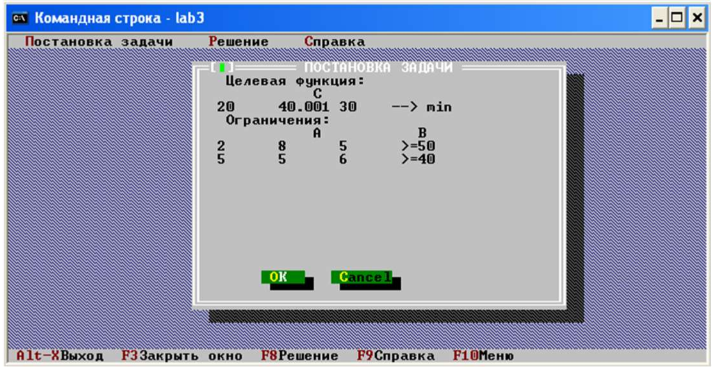
$$\varphi_1 = 265.217$$

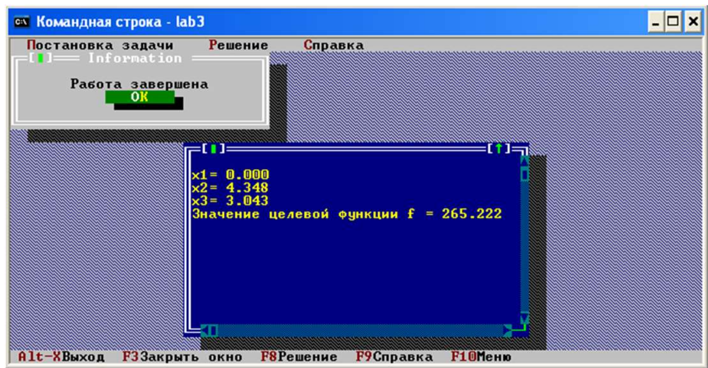
$$\bar{x}_1 = \frac{265.217 - 265.217}{0.001} = 0$$

В исходной задаче $x_1 = 0.000$, что равно $\bar{x}_1$.

i = 2

$$c = (20, 40 + 0.001, 30) = (20, 40.001, 30)$$





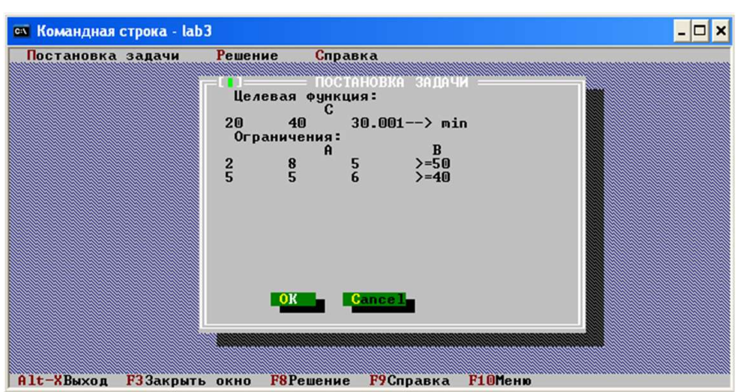
$$\varphi_2 = 265.222$$

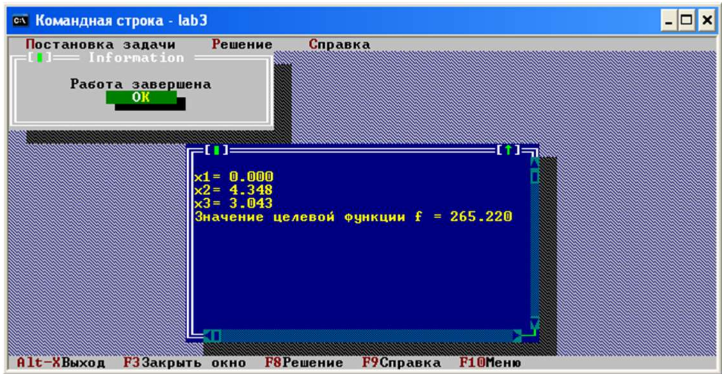
$$\bar{x}_2 = \frac{265.222 - 265.217}{0.001} = 5$$

В исходной задаче $x_2 = 4.348$, что не совсем равно $\bar{x}_2$, однако программа показывает значение целевой функции до тысячных и превышение на 15 %, что не совсем большая разница.

i = 3

$$c = (20, 40, 30 + 0.001) = (20, 40, 30.001)$$





$$\varphi_3 = 265.220$$

$$\bar{x}_3 = \frac{265.220 - 265.217}{0.001} = 3$$

В исходной задаче $x_3 = 3.043$, что примерно равно $\bar{x}_3$.

Получилось, что коэффициенты чувствительности исходной задачи при изменении коэффициентов целевой функции – компонент вектора C примерно равны решению исходной задачи.

Протокол работы программы с исходной задачей представлен на рис. 1-6, протокол работы программы с двойственной задачей представлен на рис. 7.

```
 Решение задачи линейного программирования
 -------------------------------------------

 Целевая функция:
  20      40      30      --> min
 Ограничения:
  2       8       5       >=50
  5       5       6       >=40
 Решение:
 -------
x1= 0.000
x2= 4.348
x3= 3.043
Значение целевой функции f = 265.217
```

Рисунок 1 – Исходная задача

```
 Решение задачи линейного программирования
 -------------------------------------------

 Целевая функция:
  20      40      30      --> min
 Ограничения:
  2       8       5       >=50.001
  5       5       6       >=40
 Решение:
 -------
x1= 0.000
x2= 4.348
x3= 3.043
Значение целевой функции f = 265.221
```

Рисунок 2 – Исходная задача с $b_1 = 50.001$

```
 Решение задачи линейного программирования
 ------------------------------------------

 Целевая функция:
  20     40     30     --> min
 Ограничения:
  2      8      5      >=50
  5      5      6      >=40.001
 Решение:
 -------
x1= 0.000
x2= 4.348
x3= 3.044
Значение целевой функции f = 265.219
```

Рисунок 3 – Исходная задача с $b_2 = 40.001$

```
 Решение задачи линейного программирования
 ------------------------------------------

 Целевая функция:
  20.001 40     30     --> min
 Ограничения:
  2      8      5      >=50
  5      5      6      >=40
 Решение:
 -------
x1= 0.000
x2= 4.348
x3= 3.043
Значение целевой функции f = 265.217
```

Рисунок 4 –Исходная задача с $c_1 = 20.001$

```
 Решение задачи линейного программирования
 ------------------------------------------

 Целевая функция:
  20     40.001 30     --> min
 Ограничения:
  2      8      5      >=50
  5      5      6      >=40
 Решение:
 -------
x1= 0.000
x2= 4.348
x3= 3.043
Значение целевой функции f = 265.222
```

Рисунок 5 –Исходная задача с $c_2 = 40.001$

```
 Решение задачи линейного программирования
 -----------------------------------------

 Целевая функция:
  20     40     30.001 --> min
 Ограничения:
  2      8      5      >=50
  5      5      6      >=40
 Решение:
 -------
x1= 0.000
x2= 4.348
x3= 3.043
Значение целевой функции f = 265.220
```

Рисунок 6 –Исходная задача с $c_3 = 30.001$

```
 Решение задачи линейного программирования
 -----------------------------------------

 Целевая функция:
  50     40     --> max
 Ограничения:
  2      5      <=20
  8      5      <=40
  5      6      <=30
 Решение:
 -------
x1= 3.913
x2= 1.739
Значение целевой функции f = 265.217
```

Рисунок 7 – Двойственная задача

Вывод.

Таким образом, была поставлена задача линейного программирования и решена с помощью стандартной программы. Проведено исследование прямой и двойственной задач, из которого можно сказать, что значения экстремумов прямой и двойственной задач совпадают, а координаты экстремальной точки для двойственной задачи являются коэффициентами чувствительности результата в прямой задаче по коэффициентам вектора B.