МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: Симплексный метод

Студент гр. 0303	________________	Калмак Д.А.
Преподаватель	________________	Мальцева Н.В.

Санкт-Петербург
2023

Цели работы.

1. Решение задачи линейного программирования симплекс методом с помощью стандартной программы.
2. Решение задачи линейного программирования графически.
3. Сравнение результатов решения задачи обоими способами.

Задание.

Вариант 20. Рассматривается следующая задача линейного программирования. Найти минимум линейной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $f = c[1]*x[1] + c[2]*x[2] + \ldots + c[n]*x[n]$, где *c[i]* - постоянные коэффициенты на множестве заданном набором линейных ограничений:

$$a[1,1] * x[1] + \ldots + a[1,n] * x[n] \geq b[1]$$

…

$$a[m,1] * x[1] + \ldots + a[m,n] * x[n] \geq b[m]$$

$$x[1] \geq 0, \ldots, x[n] \geq 0,$$

где a[i, j], b[i] - постоянные коэффициенты.

В матричной форме ограничения записываются следующим образом:

$$AX \geq B, X \geq 0$$

Целевая функция может быть представлена в виде скалярного произведения:

$$f = (C, X)$$

Основные теоретические положения.

Симплексный метод решения задачи линейного программирования состоит из двух этапов:

1. Поиск крайней точки допустимого множества,
2. Поиск оптимальной точки путем направленного перебора крайних точек.

Крайняя точка не существует, если в таблице существует строка, все элементы которой неположительны, а последний элемент - отрицательный.

Крайняя точка найдена, если все элементы вектора-столбца B больше нуля.

Чтобы найти крайнюю точку, надо:

1. Выбрать строку i, в которой b[i] < 0;
2. Выбрать столбец s, в котором a[i,s]>=0;
3. В столбце s задать номер строки r разрешающего элемента так, чтобы отрицательное отношение b[r]/a[r,s] было максимальным .
4. Поменять местами имена координат в таблице из строки r и столбца s;
5. Рассматривая элемент a[r,s] как разрешающий, необходимо преобразовать таблицу по формулам:

   ARS:= a[r,s];

   z1[r,s]:= 1/ARS;

   z1[r,j]:= -z[r,j]/ARS , j<>s;

   z1[i,s]:= z[i,s]/ARS , i<>r;

   z1[i,j]:= (z[i,j]*ARS - z[i,s]*z[r,j])/ARS , i<>r,j<>s;

   z:=z1,

   где под z и z1 понимается соответственно первоначальное и преобразованное значение таблицы (кроме левого столбца и верхней строки).

Оптимальная точка найдена, если все элементы вектор-строки C >= 0 (при этом все элементы вектор-столбца B >= 0).

Оптимальная точка не существует, если в таблице есть столбец j, в котором c[j] < 0 , а все a[i,j]>0 при любом i.

Чтобы найти оптимальную точку, надо:

1. Выбрать столбец s, в котором c[s] < 0;
2. В столбце s задать номер строки r разрешающего элемента так, чтобы отрицательное отношение b[r]/a[r,s] было максимальным ;
3. Поменять местами имена координат в таблице из строки r и столбца s;
4. Рассматривая элемент a[r,s] как разрешающий , необходимо преобразовать таблицу по формулам (см.выше).

Координаты оптимальной точки определяются следующим образом:

1. Если x[j] находится на i-м месте левого столбца, то его значение равно b[i];
2. Если x[i] находится на j-м месте верхней строки, то его значение равно 0.

Выполнение работы.

Найти минимум линейной функции $f(x_1, x_2)$: $f = x_1 - 2x_2$ при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2x_2 \geq -5 \\ -x_1 - x_2 \geq -7 \\ -x_1 + x_2 \geq -3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 \geq -5 \\ y_3 = -x_1 - x_2 \geq -7 \\ y_4 = -x_1 + x_2 \geq -3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решим графическим методом данную задачу. Решение представлено на рис. 1. По условиям найдено допустимое множество X. Отобразим целевую функцию f = const, где сначала f = 0. Двигаем нашу функцию в направлении антиградиента, который получен из коэффициентов целевой функции. Минимум функция достигает на отрезке, заключенном между точками (1, 3) и (3, 4), на котором функция принимает значение равное -5.

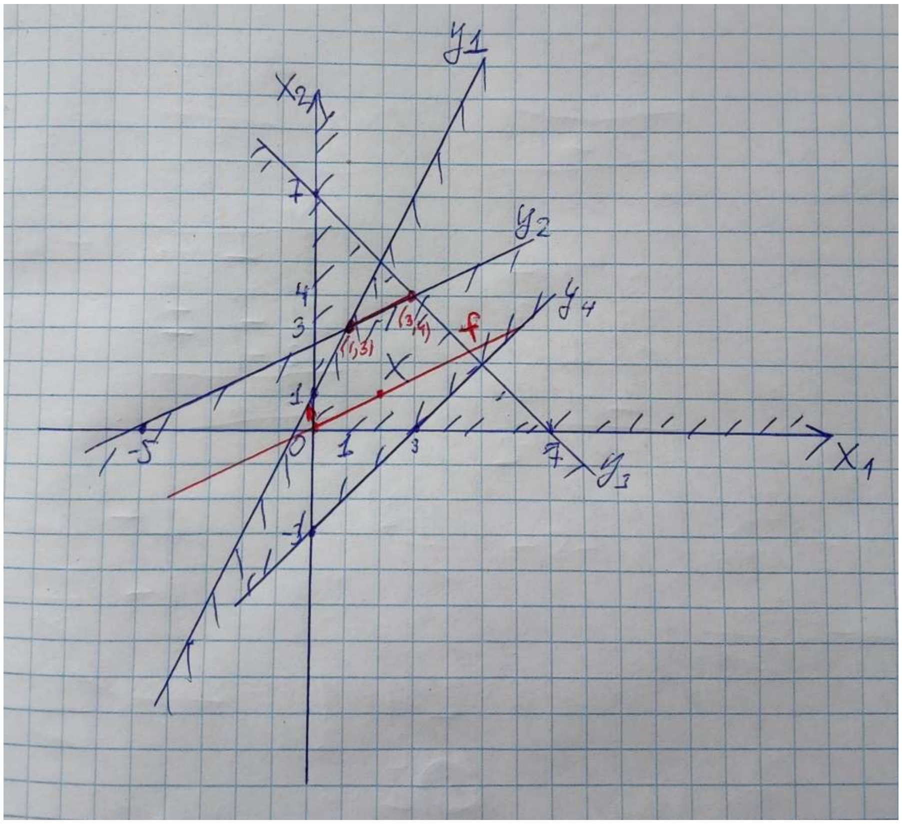
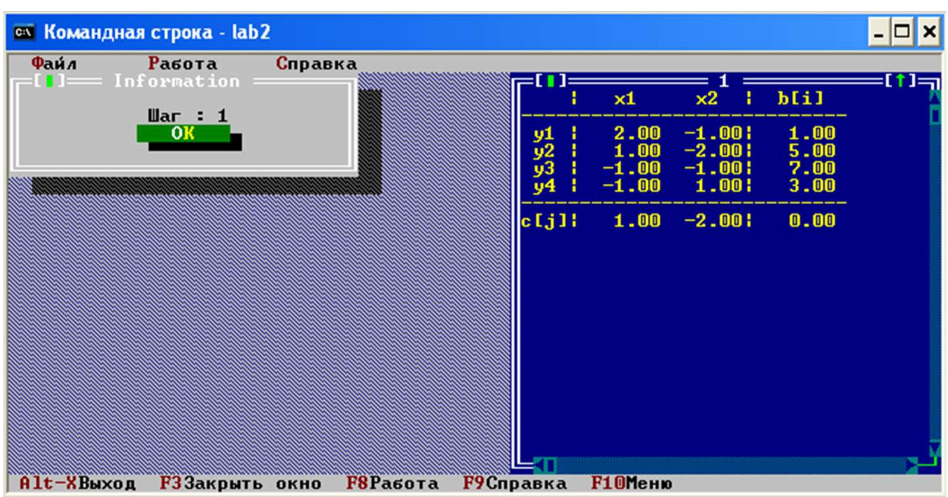
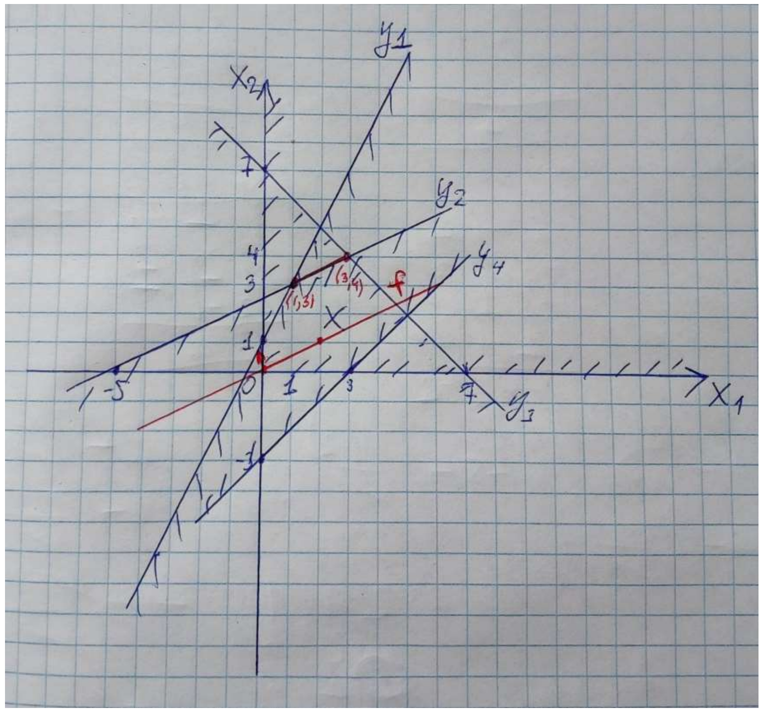


Рисунок 1 – Графическое решение

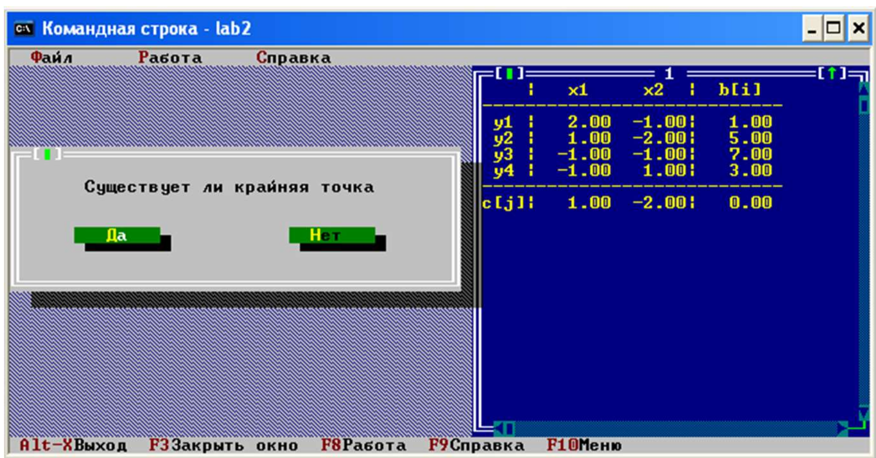
Рассмотрим решение с помощью программы.



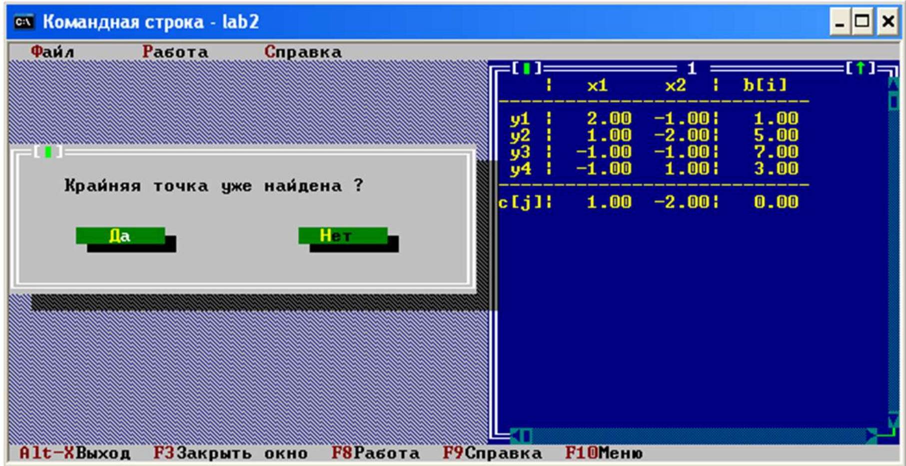
Работа программы начинается с точки (0, 0). Значение функции f равно 0.



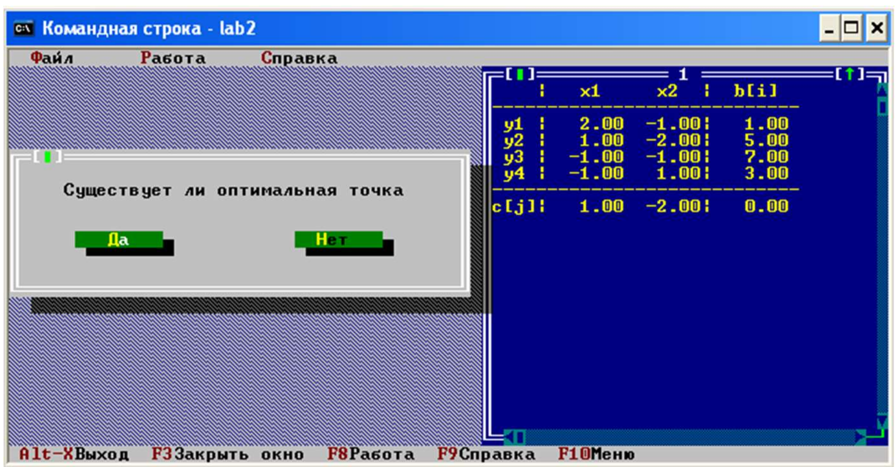
Отображение первого шага на графическом решении.



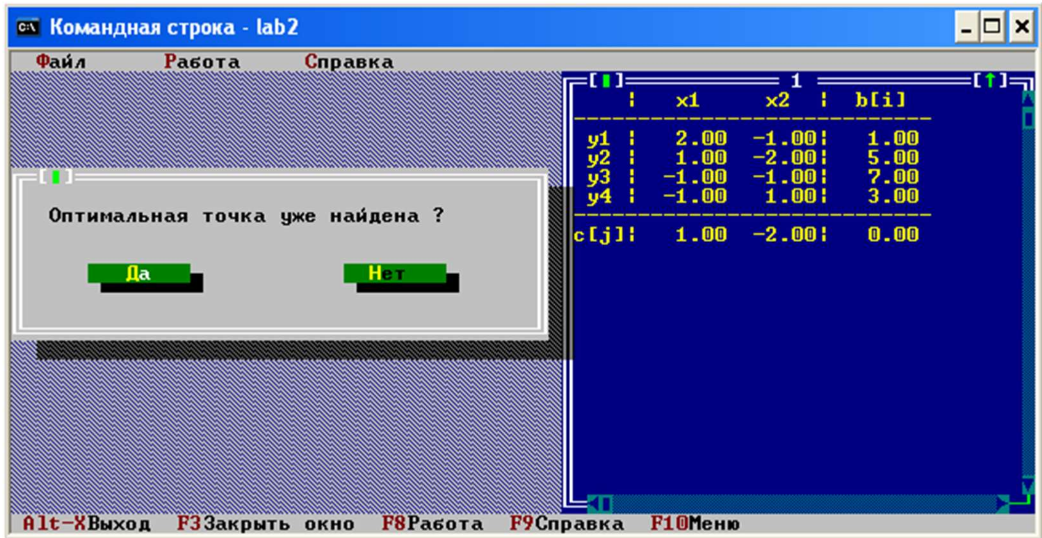
Крайняя точка не существует, если в таблице существует строка, все элементы которой неположительны, а последний элемент - отрицательный. Такого нет, поэтому крайняя точка существует.



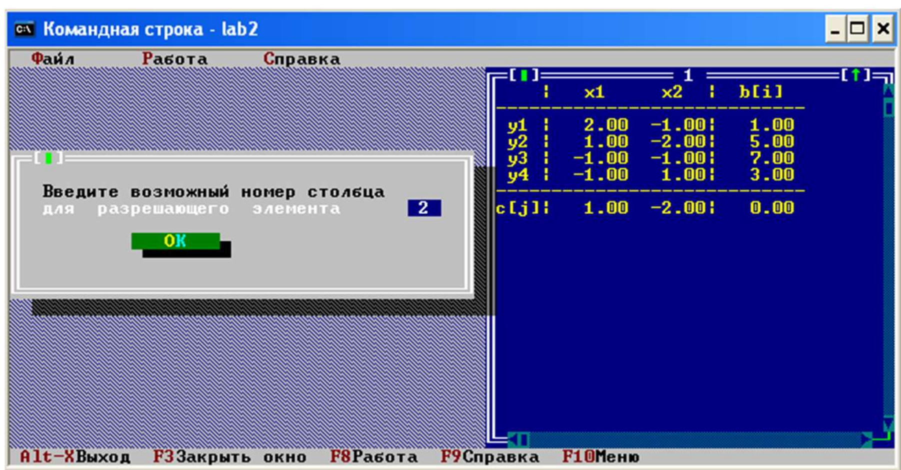
Крайняя точка найдена, если все элементы вектора-столбца B больше нуля. Такое условие выполняется, поэтому крайняя точка найдена. Координаты точки: если x[j] находится на i-м месте левого столбца, то его значение равно b[i], если x[i] находится на j-м месте верхней строки, то его значение равно 0. Тогда $x_1 = 0, x_2 = 0$.

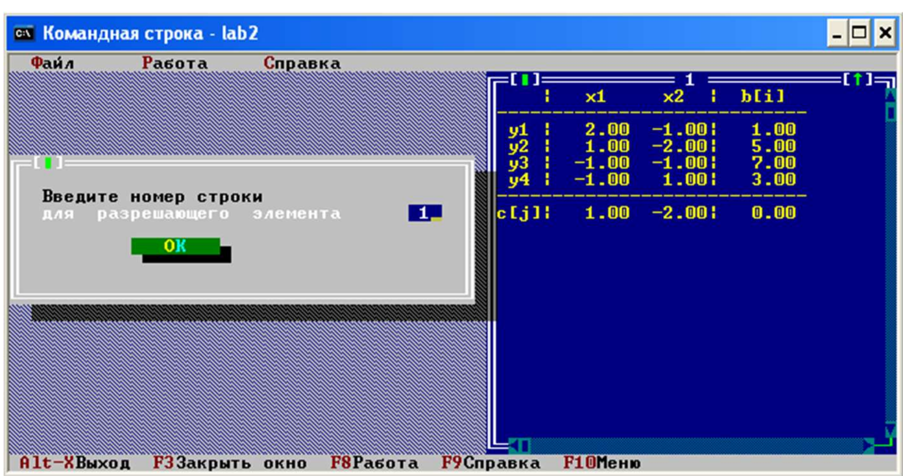


Оптимальная точка не существует, если в таблице есть столбец j, в котором c[j] < 0 , а все a[i,j]>0 при любом i. Такого нет, поэтому оптимальная точка существует.

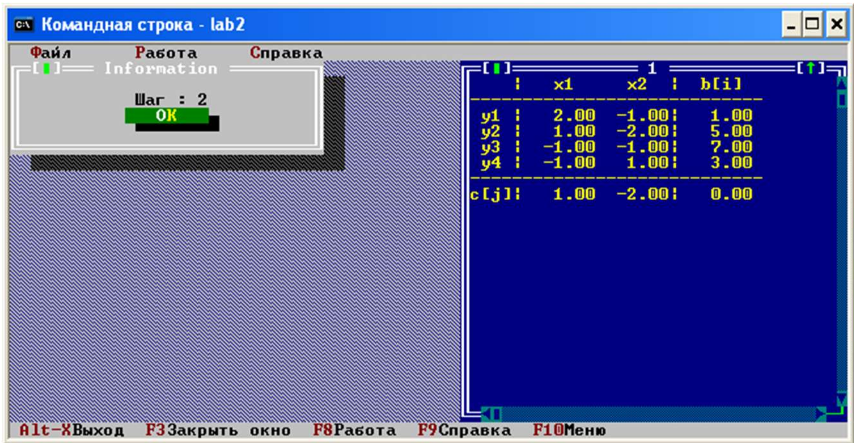


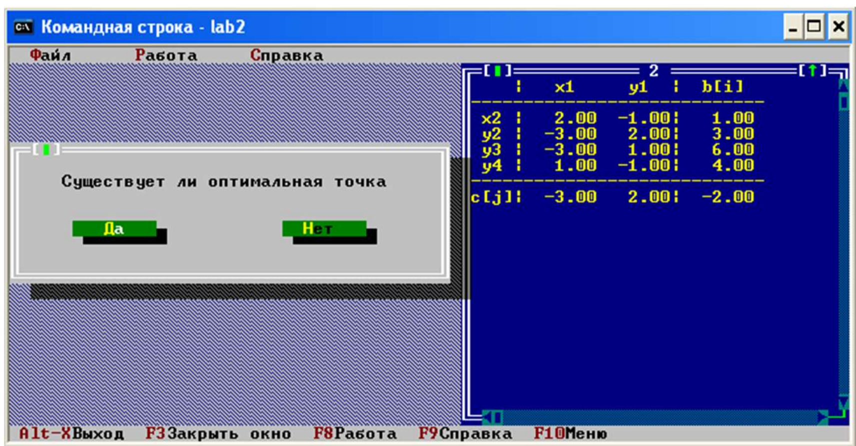
Оптимальная точка найдена, если все элементы вектор-строки C >= 0 (при этом все элементы вектор-столбца B >= 0). Такого нет, поэтому оптимальная точка не найдена.



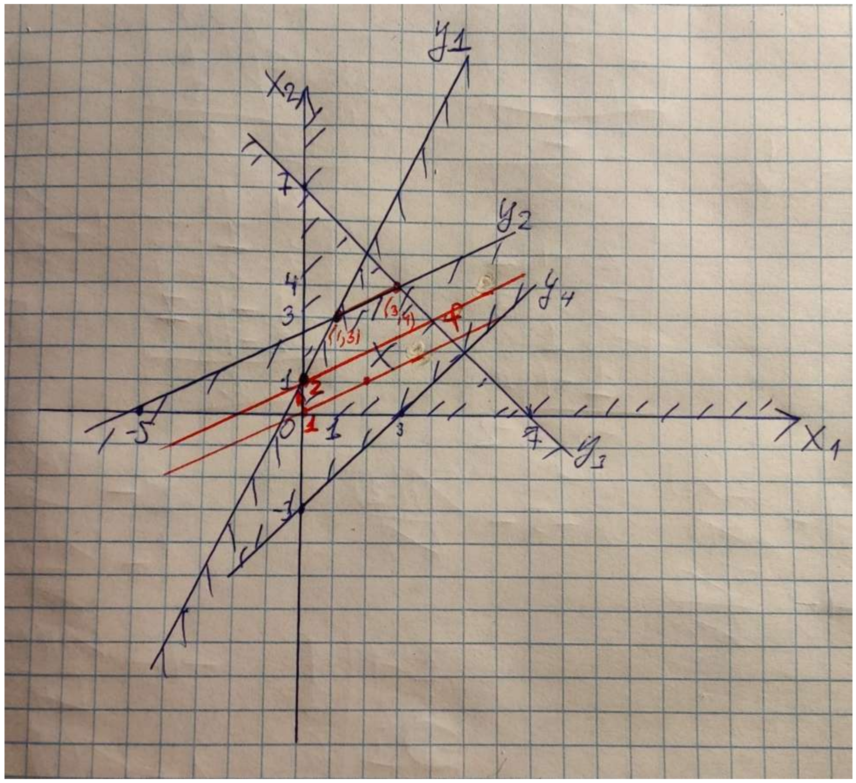


Необходимо выбрать столбец s, в котором c[s] < 0. Выбираем s = 2. Необходимо в столбце s задать номер строки r разрешающего элемента так, чтобы отрицательное отношение b[r]/a[r,s] было максимальным. Выбираем r = 1.

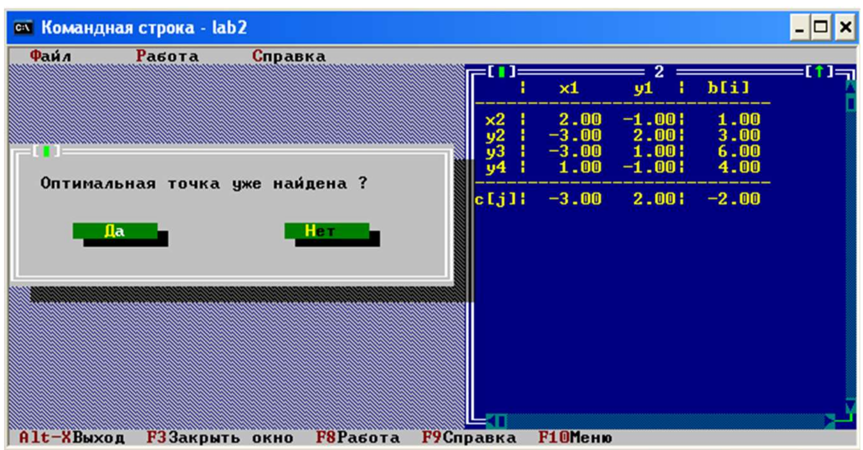




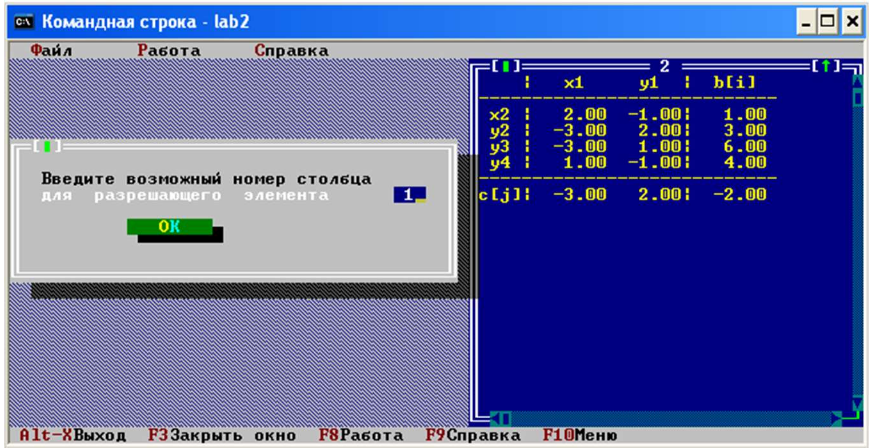
Находимся в точке (0, 1). Оптимальная точка не существует, если в таблице есть столбец j, в котором c[j] < 0 , а все a[i,j]>0 при любом i. Такого нет, поэтому оптимальная точка существует.

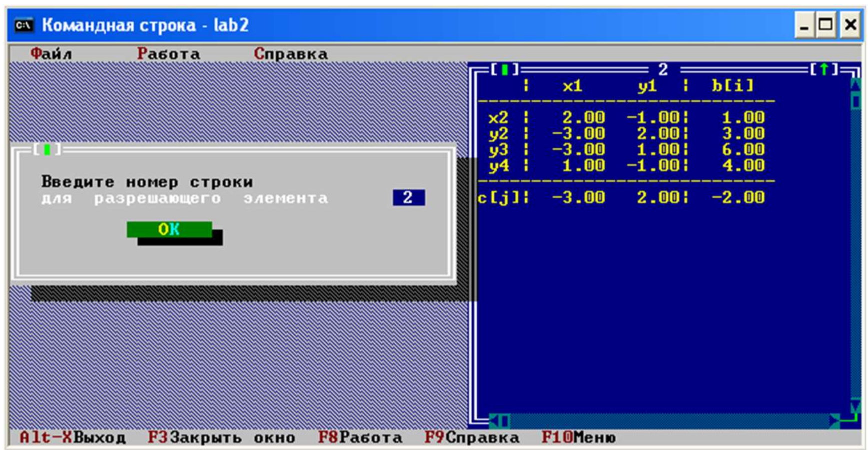


Отображение второго шага на графическом решении.

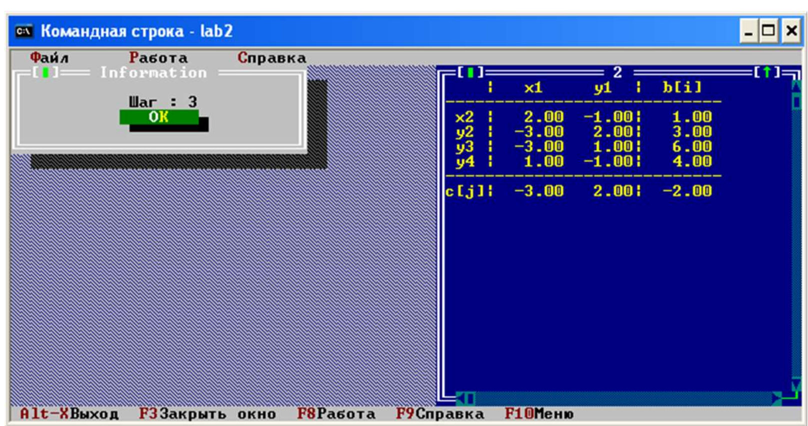


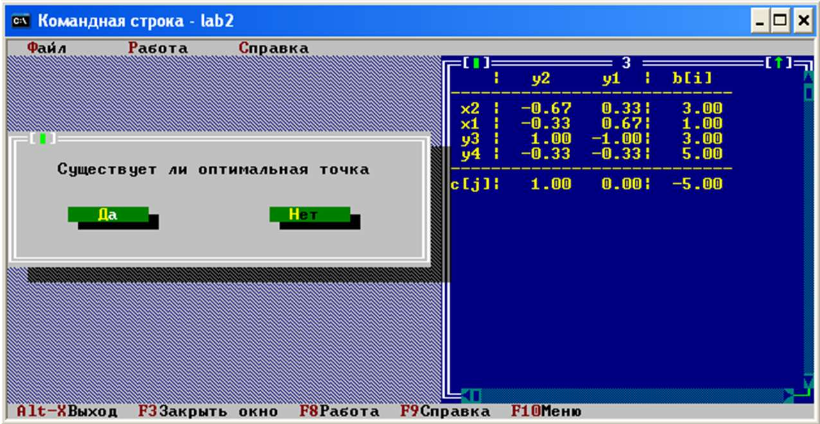
Оптимальная точка найдена, если все элементы вектор-строки C >= 0 (при этом все элементы вектор-столбца B >= 0). Такого нет, поэтому оптимальная точка не найдена.



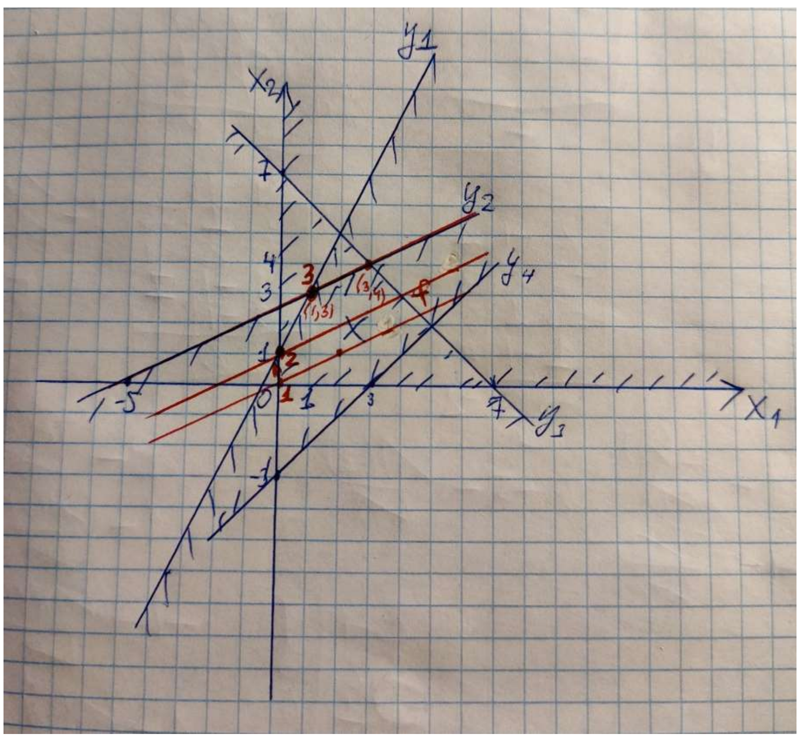


Необходимо выбрать столбец s, в котором c[s] < 0. Выбираем s = 1. Необходимо в столбце s задать номер строки r разрешающего элемента так, чтобы отрицательное отношение b[r]/a[r,s] было максимальным. Выбираем r = 2.

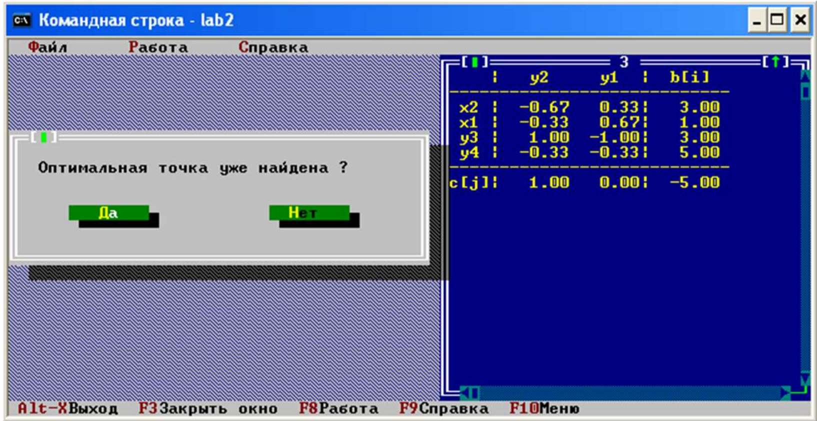




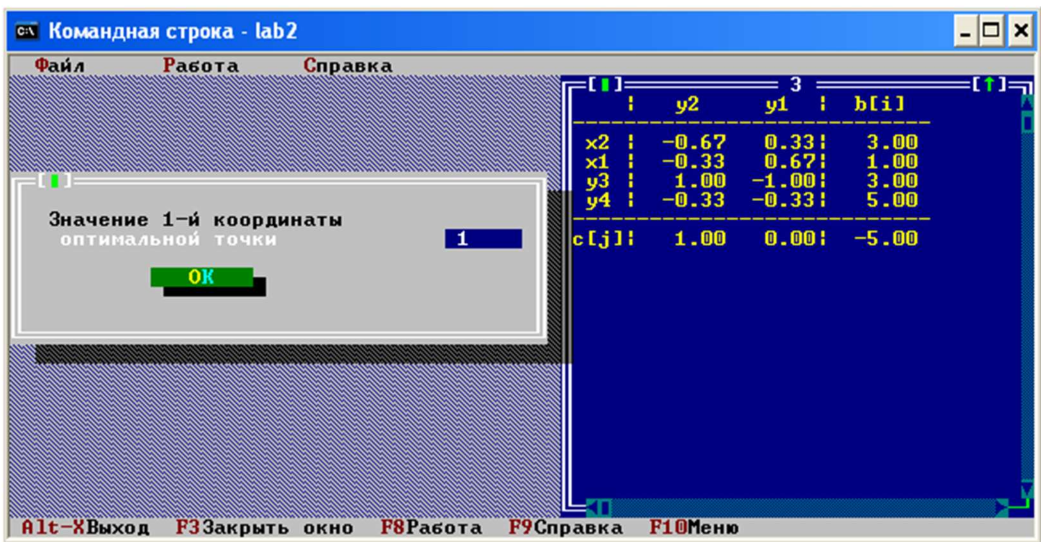
Находимся в точке (1, 3). Оптимальная точка не существует, если в таблице есть столбец j, в котором c[j] < 0 , а все a[i,j]>0 при любом i. Такого нет, поэтому оптимальная точка существует.

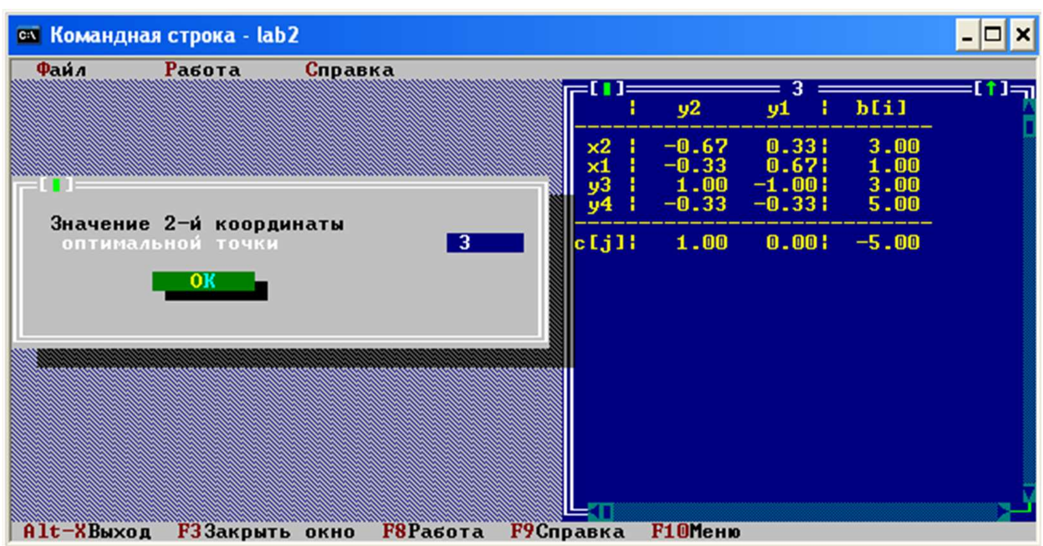


Отображение третьего шага на графическом решении.

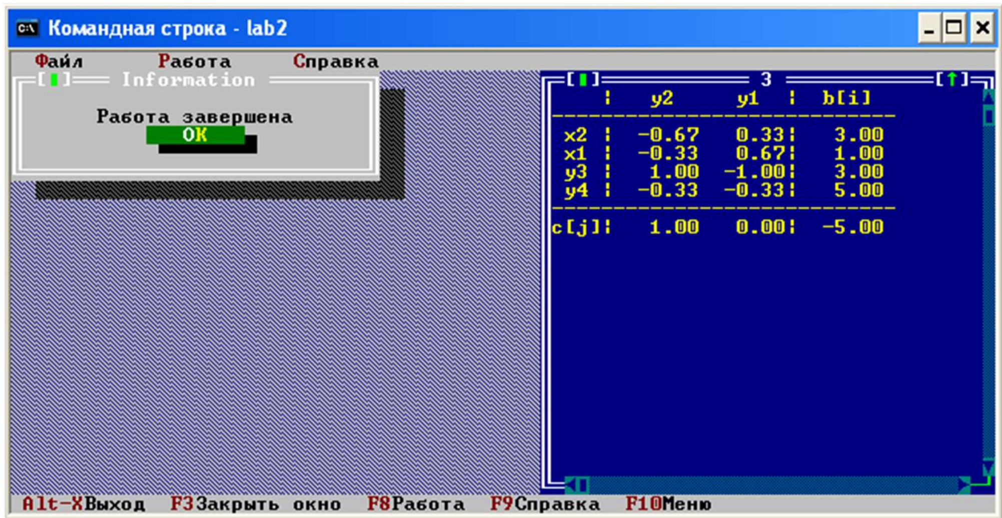


Оптимальная точка найдена, если все элементы вектор-строки C >= 0 (при этом все элементы вектор-столбца B >= 0). Такое условие выполняется, поэтому оптимальная точка найдена.





Координаты точки: если x[j] находится на i-м месте левого столбца, то его значение равно b[i], если x[i] находится на j-м месте верхней строки, то его значение равно 0. Тогда $x_1 = 1, x_2 = 3$. Значение функции в этой точке $f(x_1, x_2) = -5$.



Работа программы завершена. Протокол работы программы представлен на рис. 2.

```
 Шаг 1:
    |   x1      x2   |  b[i]
----------------------------
 y1 |   2.00   -1.00|   1.00
 y2 |   1.00   -2.00|   5.00
 y3 |  -1.00   -1.00|   7.00
 y4 |  -1.00    1.00|   3.00
----------------------------
c[j]|   1.00   -2.00|   0.00

 Шаг 2:
    |   x1      y1   |  b[i]
----------------------------
 x2 |   2.00   -1.00|   1.00
 y2 |  -3.00    2.00|   3.00
 y3 |  -3.00    1.00|   6.00
 y4 |   1.00   -1.00|   4.00
----------------------------
c[j]|  -3.00    2.00|  -2.00

 Шаг 3:
    |   y2      y1   |  b[i]
----------------------------
 x2 |  -0.67    0.33|   3.00
 x1 |  -0.33    0.67|   1.00
 y3 |   1.00   -1.00|   3.00
 y4 |  -0.33   -0.33|   5.00
----------------------------
c[j]|   1.00    0.00|  -5.00

 Координаты оптимальной точки :
 x1=   1.00
 x2=   3.00

 Общее число ошибок : 0
```

Рисунок 2 – Протокол работы программы

Получилось, что с помощью графического метода было получено, что минимум линейной функции $f(x_1, x_2)$: $f = x_1$-$2x_2$ достигает на отрезке, заключенном между точками (1, 3) и (3, 4), на котором функция принимает значение равное -5. С помощью программы было получено, что минимум линейной функции $f(x_1, x_2)$: $f = x_1$-$2x_2$ достигается в точке (1, 3), в которой функция принимает значение равное -5. Графическое решение является полным, а решение с помощью программы является неполным, получена только одна граничная точка отрезка. В ходе программы, в которой используется симплексный метод, не было разветвлений для решений, что говорит, что о том, что мы с помощью симплесного метода получаем не всегда полное решение.

Вывод.

Таким образом, была решена задача линейного программирования симплекс методом с помощью стандартной программы, а также графически. Результаты оказались разные: с помощью графического метода решением является отрезок, а с помощью симплекс метода только одна его граничная точка. В данной задаче стоит применять графический метод.