**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**

**ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)**

**Кафедра МО ЭВМ**

**ОТЧЕТ**

**по лабораторной работе №1**

**по дисциплине «Методы оптимизации»**

**Тема: Методы безусловной минимизации функций**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 0303 |  | Калмак Д.А. |
| Преподаватель |  | Мальцева Н.В. |

Санкт-Петербург

2023

**Цели работы.**

1. Решение задачи безусловной минимизации функций с помощью стандартной программы.
2. Исследование и объяснение полученных результатов.

**Задание.**

Вариант 11. Минимизировать функцию F(x1,x2,a) = (x2 - x12)2  + a(x1 - 1)2 с точностью до 10-5  ( abs ( F(x1k,x2k,a) - F(x1\*,x2\*,a) ) < 10-5 ) методом наискорейшего спуска, методом Давидона-Флетчера-Пауэлла и методом Бройдена-Флетчера-Шанно. Оценить скорость и порядок сходимости методов. Провести сравнительный анализ эффективности методов в зависимости от параметров: начальной точки, параметра а>0.

**Основные теоретические положения.**

1. Метод наискорейшего спуска

На луче x , направленном по антиградиенту, введем функцию одной переменной и определим α­­k как . Такой выбор α­­k обеспечивает достижение наименьшего значения функции вдоль заданного направления. Такой выбор требует решения на любом шаге одномерной задачи минимизации ψ (α).

1. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла

Метод заключается в построении релаксационной последовательности по следующему правилу:

Длина шага *αk* выбирается так же, как в методе наискорейшего спуска:

Как правило, начальное значение *H*0 = *I*.

1. Метод Бройдена-Флетчера-Шанно

.

Если уточнять обратную матрицу, т.е.  то:

Оценки методов будут происходить по следующим параметрам:

* Порядок сходимости: , где .

Методу наискорейшего спуска соответствует первый порядок.

* Скорость сходимости:

Линейная сходимость: || *(xk*+1) -  *(x*∗)|| ≤ *q*|| *(xk)*−  *(x*∗)||*,* соответствует методу наискорейшего спуска для квадратичных функций.

Сверхлинейная сходимость: || *(xk*+1) -  *(x*∗)|| ≤ *qk*|| *(xk)*−  *(x*∗)||*,qk*→0 соответствует методам Давидона-Флетчера-Пауэлла и Бройдена-Флетчера-Шанно.

**Выполнение работы.**

Построим график исследуемой функции. (см. рис. 1-2)

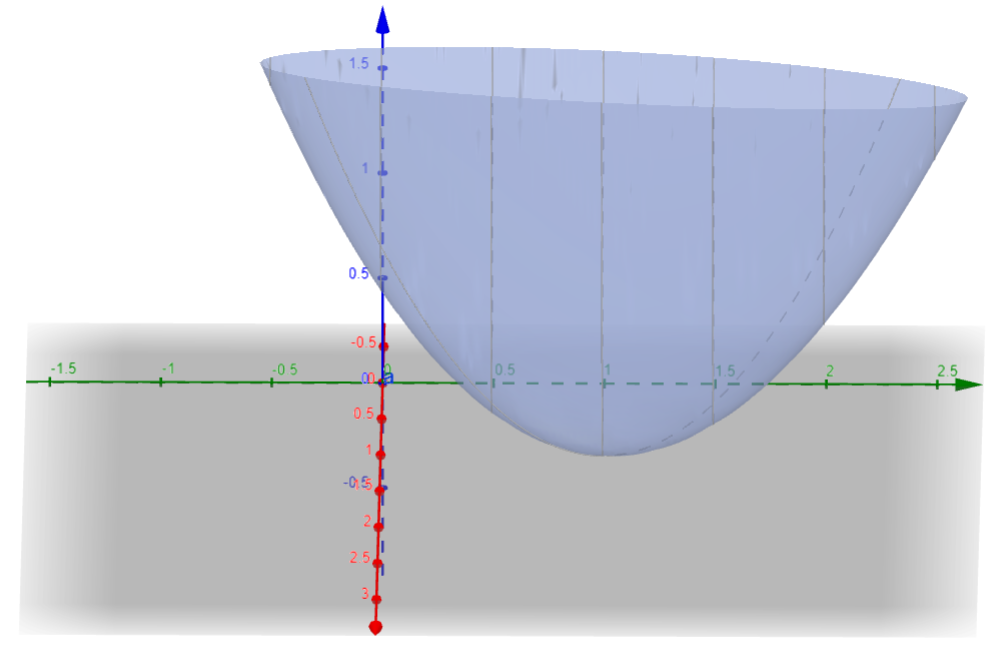


Рисунок 1 – График исследуемой функции

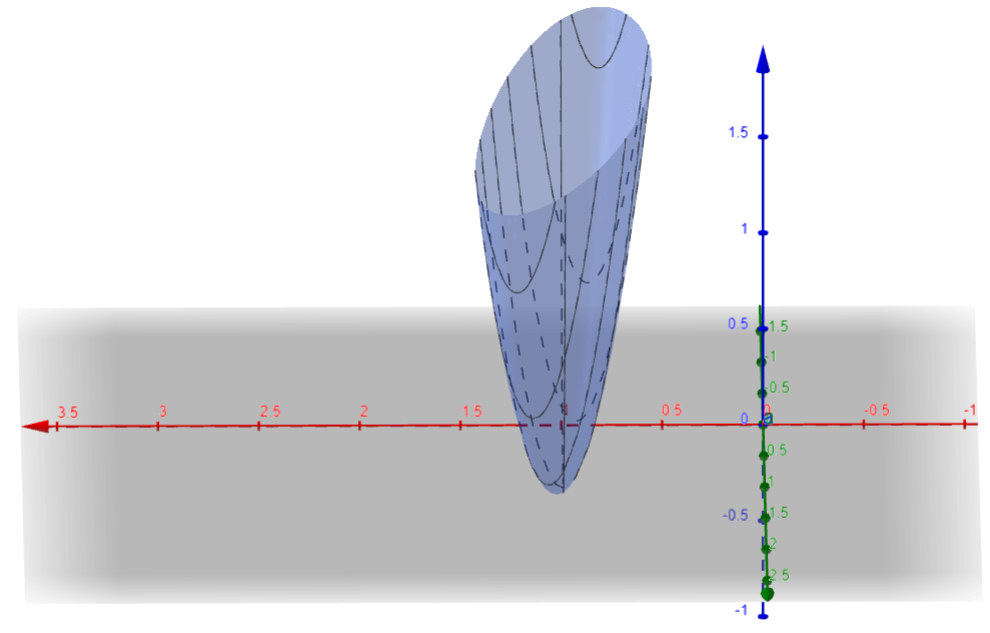


Рисунок 2 – График исследуемой функции

По графику видно, что точка минимума находится в координатах (1, 1) и значение исследуемой функции в этой точке 0. Аналитически получаются те же результаты. Параметр a при этом на точку минимума не влияет.

Поскольку необходимо исследовать эффективность методов в зависимости от начальной точки и параметра a, были выбраны следующие начальные точки по мере отдаления от точки минимума: (3, 3), (7, 10). Параметр a > 0, поэтому возьмем по мере увеличения следующие значения: 0.1, 1, 10.

Результаты работы программы:

1. Метод наискорейшего спуска

Начальная точка (3, 3):

a = 0.1 сходится за 319 шагов

a = 1 сходится за 27 шагов

a = 10 сходится за 5 шагов

Начальная точка (7, 10):

a = 0.1 сходится за 459 шагов

a = 1 сходится за 71 шагов

a = 10 сходится за 6 шагов

1. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла

Начальная точка (3, 3):

a = 0.1 сходится за 14 шагов

a = 1 сходится за 10 шагов

a = 10 сходится за 4 шага

Начальная точка (7, 10):

a = 0.1 сходится за 18 шагов

a = 1 сходится за 12 шагов

a = 10 сходится за 6 шагов

1. Метод Бройдена-Флетчера-Шанно

Начальная точка (3, 3):

a = 0.1 сходится за 14 шагов

a = 1 сходится за 10 шагов

a = 10 сходится за 4 шага

Начальная точка (7, 10):

a = 0.1 сходится за 18 шагов

a = 1 сходится за 12 шагов

a = 10 сходится за 6 шагов

Протоколы работы программы представлены в таблицах 1-18, в которые включены оценки скорости сходимости и порядка сходимости. Метод наискорейшего спуска представлен в табл. 1-6, метод Давидона-Флетчера-Пауэлла в табл. 7-12, метод Бройдена-Флетчера-Шанно в табл. 13-18.

Таблица 1 – Метод наискорейшего спуска при начальной точке (3, 3) и a = 0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 310 | 0,988774 | 0,977716 | 0,0000126040 | 17 | 1,0013 | 0,0000126040 | 0,9721 |
| 311 | 0,989065 | 0,977706 | 0,0000122528 | 12 | 1,0063 | 0,0000122528 | 0,9721 |
| 312 | 0,989087 | 0,978335 | 0,0000119109 | 16 | 1,0013 | 0,0000119109 | 0,9721 |
| 313 | 0,989370 | 0,978325 | 0,0000115787 | 13 | 1,0063 | 0,0000115787 | 0,9721 |
| 314 | 0,989391 | 0,978936 | 0,0000112558 | 17 | 1,0013 | 0,0000112558 | 0,9721 |
| 315 | 0,989666 | 0,978926 | 0,0000109421 | 13 | 1,0062 | 0,0000109421 | 0,9722 |
| 316 | 0,989687 | 0,979519 | 0,0000106374 | 18 | 1,0013 | 0,0000106374 | 0,9722 |
| 317 | 0,989954 | 0,979510 | 0,0000103413 | 12 | 1,0062 | 0,0000103413 | 0,9722 |
| 318 | 0,989974 | 0,980086 | 0,0000100535 | 18 | 1,0013 | 0,0000100535 | 0,9722 |
| 319 | 0,990233 | 0,980077 | 0,0000097737 | 12 |  | 0,0000097737 |  |

Таблица 2 – Метод наискорейшего спуска при начальной точке (3, 3) и a = 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 18 | 1,028150 | 1,049874 | 0,0008445552 | 19 | 1,0132 | 0,0008445552 | 0,6097 |
| 19 | 1,020672 | 1,051130 | 0,0005149135 | 13 | 1,1590 | 0,0005149135 | 0,6097 |
| 20 | 1,017169 | 1,030257 | 0,0003139279 | 20 | 1,0114 | 0,0003139279 | 0,6079 |
| 21 | 1,012570 | 1,031029 | 0,0001908507 | 13 | 1,1361 | 0,0001908507 | 0,6074 |
| 22 | 1,010434 | 1,018322 | 0,0001159262 | 19 | 1,0101 | 0,0001159262 | 0,6063 |
| 23 | 1,007623 | 1,018794 | 0,0000702914 | 12 | 1,1188 | 0,0000702914 | 0,6061 |
| 24 | 1,006326 | 1,011084 | 0,0000426036 | 20 | 1,0090 | 0,0000426036 | 0,6054 |
| 25 | 1,004615 | 1,011372 | 0,0000257943 | 13 | 1,1053 | 0,0000257943 | 0,6055 |
| 26 | 1,003830 | 1,006703 | 0,0000156172 | 22 | 1,0081 | 0,0000156172 | 0,6050 |
| 27 | 1,002793 | 1,006878 | 0,0000094491 | 13 |  | 0,0000094491 |  |

Таблица 3 – Метод наискорейшего спуска при начальной точке (3, 3) и a = 10

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1 | 1,370048 | 3,174638 | 3,0531370477 | 10 | -2,2954 | 3,0531370477 | 0,0752 |
| 2 | 1,136995 | 1,087726 | 0,2297143196 | 17 | 1,2546 | 0,2297143196 | 0,0318 |
| 3 | 1,015208 | 1,101325 | 0,0073082057 | 11 | 2,5084 | 0,0073082057 | 0,0161 |
| 4 | 1,003062 | 1,001221 | 0,0001178657 | 18 | 1,1284 | 0,0001178657 | 0,0148 |
| 5 | 1,000233 | 1,001565 | 0,0000017497 | 12 |  | 0,0000017497 |  |

Таблица 4 – Метод наискорейшего спуска при начальной точке (7, 10) и a = 0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 450 | 0,989095 | 0,977745 | 0,0000122095 | 13 | 1,0046 | 0,0000122095 | 0,9780 |
| 451 | 0,989074 | 0,978221 | 0,0000119404 | 17 | 1,0014 | 0,0000119404 | 0,9780 |
| 452 | 0,989336 | 0,978233 | 0,0000116773 | 14 | 1,0046 | 0,0000116773 | 0,9780 |
| 453 | 0,989314 | 0,978698 | 0,0000114204 | 16 | 1,0014 | 0,0000114204 | 0,9780 |
| 454 | 0,989570 | 0,978710 | 0,0000111690 | 13 | 1,0045 | 0,0000111690 | 0,9780 |
| 455 | 0,989549 | 0,979165 | 0,0000109232 | 16 | 1,0014 | 0,0000109232 | 0,9780 |
| 456 | 0,989800 | 0,979176 | 0,0000106829 | 13 | 1,0045 | 0,0000106829 | 0,9780 |
| 457 | 0,989779 | 0,979620 | 0,0000104480 | 15 | 1,0014 | 0,0000104480 | 0,9780 |
| 458 | 0,990024 | 0,979632 | 0,0000102183 | 13 | 1,0045 | 0,0000102183 | 0,9780 |
| 459 | 0,990004 | 0,980066 | 0,0000099939 | 17 |  | 0,0000099939 |  |

Таблица 5 – Метод наискорейшего спуска при начальной точке (7, 10) и a = 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 62 | 0,994742 | 0,988590 | 0,0000284971 | 15 | 1,0110 | 0,0000284971 | 0,8806 |
| 63 | 0,995668 | 0,988839 | 0,0000250954 | 15 | 1,0178 | 0,0000250954 | 0,8808 |
| 64 | 0,995369 | 0,989948 | 0,0000221035 | 15 | 1,0107 | 0,0000221035 | 0,8808 |
| 65 | 0,996184 | 0,990167 | 0,0000194692 | 14 | 1,0172 | 0,0000194692 | 0,8809 |
| 66 | 0,995921 | 0,991143 | 0,0000171506 | 15 | 1,0104 | 0,0000171506 | 0,8809 |
| 67 | 0,996638 | 0,991336 | 0,0000151088 | 14 | 1,0168 | 0,0000151088 | 0,8810 |
| 68 | 0,996406 | 0,992196 | 0,0000133113 | 15 | 1,0101 | 0,0000133113 | 0,8811 |
| 69 | 0,997037 | 0,992366 | 0,0000117281 | 14 | 1,0163 | 0,0000117281 | 0,8811 |
| 70 | 0,996834 | 0,993123 | 0,0000103340 | 15 | 1,0098 | 0,0000103340 | 0,8812 |
| 71 | 0,997389 | 0,993272 | 0,0000091059 | 14 |  | 0,0000091059 |  |

Таблица 6 – Метод наискорейшего спуска при начальной точке (7, 10) и a = 10

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1 | 2,692363 | 10,277224 | 37,8121659050 | 9 | -0,6161 | 37,8121659050 | 0,0127 |
| 2 | 0,843775 | 1,196391 | 0,4787380736 | 21 | 1,3190 | 0,4787380736 | 0,0378 |
| 3 | 1,024618 | 1,159578 | 0,0181024810 | 11 | 2,6500 | 0,0181024810 | 0,0297 |
| 4 | 0,994818 | 1,006054 | 0,0005371987 | 17 | 1,0982 | 0,0005371987 | 0,0320 |
| 5 | 1,000745 | 1,004903 | 0,0000171954 | 11 | 1,6386 | 0,0000171954 | 0,0170 |
| 6 | 0,999873 | 1,000109 | 0,0000002924 | 18 |  | 0,0000002924 |  |

Таблица 7 – Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла при начальной точке (3, 3) и a=0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 5 | -1,282946 | 1,726817 | 0,5277236518 | 11 | 0,7403 | 0,5277236518 | 0,7142 |
| 6 | -0,856907 | 0,555120 | 0,3769122588 | 24 | 0,8735 | 0,3769122588 | 0,8045 |
| 7 | -0,714915 | 0,606750 | 0,3032415867 | 14 | 0,9217 | 0,3032415867 | 0,6511 |
| 8 | -0,338536 | -0,020624 | 0,1974552092 | 22 | -1,9851 | 0,1974552092 | 0,0147 |
| 9 | 0,836336 | 0,684205 | 0,0029112350 | 21 | 1,0102 | 0,0029112350 | 0,9607 |
| 10 | 0,833398 | 0,689956 | 0,0027967435 | 17 | 1,0195 | 0,0027967435 | 0,9685 |
| 11 | 0,841104 | 0,693892 | 0,0027087731 | 16 | 2,3451 | 0,0027087731 | 0,1539 |
| 12 | 0,970214 | 0,923197 | 0,0004170149 | 26 | 1,0036 | 0,0004170149 | 0,3238 |
| 13 | 0,963542 | 0,926953 | 0,0001350497 | 12 | 2,6698 | 0,0001350497 | 0,0057 |
| 14 | 0,999823 | 0,998768 | 0,0000007735 | 27 |  | 0,0000007735 |  |

Таблица 8 – Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла при начальной точке (3, 3) и a=1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1 | -1,705416 | 3,742960 | 8,0156938341 | 12 | 0,9645 | 8,0156938341 | 0,9649 |
| 2 | -1,764265 | 3,418212 | 7,7345398171 | 15 | 0,9674 | 7,7345398171 | 0,9626 |
| 3 | -1,588086 | 3,386281 | 7,4451405743 | 11 | 0,5545 | 7,4451405743 | 0,3260 |
| 4 | -0,439871 | -0,401693 | 2,4274684962 | 22 | 0,2101 | 2,4274684962 | 0,1480 |
| 5 | 0,599796 | -0,086543 | 0,3593455229 | 16 | -1,3489 | 0,3593455229 | 0,5109 |
| 6 | 0,572423 | 0,299647 | 0,1836074206 | 16 | 1,4867 | 0,1836074206 | 0,6633 |
| 7 | 0,718421 | 0,309991 | 0,1217796036 | 16 | 13,3121 | 0,1217796036 | 0,0131 |
| 8 | 1,010819 | 0,983231 | 0,0016011580 | 20 | 1,1505 | 0,0016011580 | 0,0132 |
| 9 | 0,995754 | 0,989773 | 0,0000211002 | 14 | 2,2392 | 0,0000211002 | 0,0005 |
| 10 | 0,999960 | 1,000012 | 0,0000000103 | 21 |  | 0,0000000103 |  |

Таблица 9 – Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла при начальной точке (3, 3) и a=10

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1 | 1,370048 | 3,174638 | 3,0531370477 | 10 | -3,0186 | 3,0531370477 | 0,0345 |
| 2 | 1,088816 | 1,023216 | 0,1052264738 | 17 | 1,4093 | 0,1052264738 | 0,0079 |
| 3 | 1,005106 | 1,034159 | 0,0008329358 | 10 | 3,1837 | 0,0008329358 | 0,0000 |
| 4 | 0,999978 | 1,000003 | 0,0000000071 | 19 |  | 0,0000000071 |  |

Таблица 10 – Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла при начальной точке (7, 10) и a = 0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 9 | -1,427863 | 2,117248 | 0,5956070998 | 11 | 0,7058 | 0,5956070998 | 0,7255 |
| 10 | -0,990419 | 0,791383 | 0,4321051667 | 25 | 0,9017 | 0,4321051667 | 0,8214 |
| 11 | -0,862030 | 0,833743 | 0,3549324581 | 13 | 0,8836 | 0,3549324581 | 0,6714 |
| 12 | -0,471853 | 0,075432 | 0,2383068113 | 22 | 0,7270 | 0,2383068113 | 0,7234 |
| 13 | -0,254432 | 0,187302 | 0,1723824328 | 17 | 0,8825 | 0,1723824328 | 0,5440 |
| 14 | 0,078167 | -0,087658 | 0,0937700571 | 19 | -7,5354 | 0,0937700571 | 0,0010 |
| 15 | 1,029157 | 1,062600 | 0,0000968206 | 23 | 1,0012 | 0,0000968206 | 0,9413 |
| 16 | 1,029999 | 1,061965 | 0,0000911332 | 12 | 1,0330 | 0,0000911332 | 0,9134 |
| 17 | 1,026433 | 1,057221 | 0,0000832442 | 20 | 2,3574 | 0,0000832442 | 0,0033 |
| 18 | 1,000835 | 1,001221 | 0,0000002710 | 27 |  | 0,0000002710 |  |

Таблица 11 – Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла при начальной точке (7, 10) и a = 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 3 | -3,122014 | 10,414180 | 17,4361661850 | 10 | 0,4919 | 17,4361661850 | 0,5317 |
| 4 | -1,847694 | 2,336655 | 9,2699727849 | 24 | 0,8580 | 9,2699727849 | 0,6274 |
| 5 | -1,258893 | 2,429545 | 5,8161722028 | 12 | 0,7014 | 5,8161722028 | 0,4216 |
| 6 | -0,459102 | -0,357711 | 2,4521553612 | 21 | 0,1669 | 2,4521553612 | 0,1350 |
| 7 | 0,608312 | -0,051410 | 0,3310423256 | 16 | -1,8947 | 0,3310423256 | 0,5279 |
| 8 | 0,582821 | 0,312656 | 0,1747684450 | 17 | 1,4319 | 0,1747684450 | 0,6685 |
| 9 | 0,723451 | 0,322510 | 0,1168285822 | 14 | 12,5216 | 0,1168285822 | 0,0136 |
| 10 | 1,010692 | 0,983063 | 0,0015914819 | 21 | 1,1471 | 0,0015914819 | 0,0137 |
| 11 | 0,995675 | 0,989593 | 0,0000218571 | 14 | 2,2887 | 0,0000218571 | 0,0003 |
| 12 | 0,999967 | 1,000011 | 0,0000000072 | 22 |  | 0,0000000072 |  |

Таблица 12 – Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла при начальной точке (7, 10) и a = 10

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1 | 2,692363 | 10,277224 | 37,8121659050 | 9 | 0,4905 | 37,8121659050 | 0,4453 |
| 2 | 2,235332 | 3,740287 | 16,8390385300 | 20 | 0,9466 | 16,8390385300 | 0,2894 |
| 3 | 1,482769 | 3,792903 | 4,8724485656 | 10 | -3,1448 | 4,8724485656 | 0,0041 |
| 4 | 1,035738 | 0,987783 | 0,0199914094 | 17 | 1,5398 | 0,0199914094 | 0,0015 |
| 5 | 0,999035 | 0,993630 | 0,0000290337 | 11 | 2,7386 | 0,0000290337 | 0,0000 |
| 6 | 0,999999 | 1,000000 | 0,0000000000 | 19 |  | 0,0000000000 |  |

Таблица 13 – Метод Бройдена-Флетчера-Шанно при начальной точке (3, 3) и a=0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 5 | -1,282960 | 1,726859 | 0,5277309812 | 11 | 0,7403 | 0,5277309812 | 0,7142 |
| 6 | -0,856953 | 0,555199 | 0,3769293357 | 24 | 0,8735 | 0,3769293357 | 0,8046 |
| 7 | -0,714955 | 0,606828 | 0,3032593417 | 14 | 0,9217 | 0,3032593417 | 0,6512 |
| 8 | -0,338623 | -0,020566 | 0,1974785273 | 22 | -1,9851 | 0,1974785273 | 0,0147 |
| 9 | 0,836337 | 0,684217 | 0,0029108956 | 20 | 1,0102 | 0,0029108956 | 0,9607 |
| 10 | 0,833405 | 0,689974 | 0,0027964671 | 15 | 1,0194 | 0,0027964671 | 0,9686 |
| 11 | 0,841094 | 0,693890 | 0,0027086771 | 17 | 2,3446 | 0,0027086771 | 0,1540 |
| 12 | 0,970192 | 0,923153 | 0,0004171755 | 22 | 1,0036 | 0,0004171755 | 0,3241 |
| 13 | 0,963521 | 0,926910 | 0,0001352124 | 12 | 2,6786 | 0,0001352124 | 0,0055 |
| 14 | 0,999828 | 0,998793 | 0,0000007500 | 26 |  | 0,0000007500 |  |

Таблица 14 – Метод Бройдена-Флетчера-Шанно при начальной точке (3, 3) и a=1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1 | -1,705416 | 3,742960 | 8,0156938341 | 12 | 0,9645 | 8,0156938341 | 0,9649 |
| 2 | -1,764272 | 3,418171 | 7,7345394527 | 16 | 0,9674 | 7,7345394527 | 0,9626 |
| 3 | -1,588068 | 3,386246 | 7,4450861514 | 11 | 0,5545 | 7,4450861514 | 0,3260 |
| 4 | -0,439877 | -0,401675 | 2,4274671396 | 21 | 0,2101 | 2,4274671396 | 0,1480 |
| 5 | 0,599790 | -0,086532 | 0,3593341899 | 16 | -1,3490 | 0,3593341899 | 0,5110 |
| 6 | 0,572421 | 0,299642 | 0,1836093338 | 16 | 1,4868 | 0,1836093338 | 0,6633 |
| 7 | 0,718419 | 0,309987 | 0,1217811963 | 16 | 13,3121 | 0,1217811963 | 0,0131 |
| 8 | 1,010819 | 0,983229 | 0,0016013857 | 20 | 1,1505 | 0,0016013857 | 0,0132 |
| 9 | 0,995754 | 0,989772 | 0,0000211051 | 14 | 2,2392 | 0,0000211051 | 0,0005 |
| 10 | 0,999960 | 1,000012 | 0,0000000103 | 23 |  | 0,0000000103 |  |

Таблица 15 – Метод Бройдена-Флетчера-Шанно при начальной точке (3, 3) и a=10

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1 | 1,370048 | 3,174638 | 3,0531370477 | 10 | -3,0186 | 3,0531370477 | 0,0345 |
| 2 | 1,088817 | 1,023221 | 0,1052266640 | 18 | 1,4093 | 0,1052266640 | 0,0079 |
| 3 | 1,005106 | 1,034163 | 0,0008331254 | 10 | 3,1838 | 0,0008331254 | 0,0000 |
| 4 | 0,999978 | 1,000003 | 0,0000000071 | 19 |  | 0,0000000071 |  |

Таблица 16 – Метод Бройдена-Флетчера-Шанно при начальной точке (7, 10) и a=0.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 9 | -1,424502 | 2,107666 | 0,5939770049 | 11 | 0,7063 | 0,5939770049 | 0,7251 |
| 10 | -0,987062 | 0,784974 | 0,4306825298 | 25 | 0,9011 | 0,4306825298 | 0,8210 |
| 11 | -0,858359 | 0,827539 | 0,3535869076 | 13 | 0,8848 | 0,3535869076 | 0,6710 |
| 12 | -0,468530 | 0,072598 | 0,2372442972 | 23 | 0,7247 | 0,2372442972 | 0,7223 |
| 13 | -0,249946 | 0,185469 | 0,1713644771 | 17 | 0,8805 | 0,1713644771 | 0,5423 |
| 14 | 0,082265 | -0,086558 | 0,0929334714 | 19 | -6,9286 | 0,0929334714 | 0,0016 |
| 15 | 1,036678 | 1,079008 | 0,0001530697 | 23 | 1,0011 | 0,0001530697 | 0,9421 |
| 16 | 1,037735 | 1,078239 | 0,0001442019 | 13 | 1,0401 | 0,0001442019 | 0,9053 |
| 17 | 1,032877 | 1,071574 | 0,0001305488 | 22 | 2,3754 | 0,0001305488 | 0,0046 |
| 18 | 1,001321 | 1,001991 | 0,0000005998 | 18 |  | 0,0000005998 |  |

Таблица 17 – Метод Бройдена-Флетчера-Шанно при начальной точке (7, 10) и a=1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 3 | -3,122014 | 10,414179 | 17,4361657130 | 10 | 0,4919 | 17,4361657130 | 0,5317 |
| 4 | -1,847722 | 2,336747 | 9,2701534364 | 25 | 0,8580 | 9,2701534364 | 0,6274 |
| 5 | -1,258909 | 2,429638 | 5,8163335542 | 12 | 0,7014 | 5,8163335542 | 0,4216 |
| 6 | -0,459128 | -0,357675 | 2,4522155877 | 20 | 0,1669 | 2,4522155877 | 0,1350 |
| 7 | 0,608310 | -0,051381 | 0,3310171942 | 16 | -1,8955 | 0,3310171942 | 0,5280 |
| 8 | 0,582822 | 0,312700 | 0,1747657891 | 16 | 1,4317 | 0,1747657891 | 0,6684 |
| 9 | 0,723437 | 0,322536 | 0,1168178367 | 14 | 12,5123 | 0,1168178367 | 0,0137 |
| 10 | 1,010698 | 0,983005 | 0,0015971551 | 21 | 1,1467 | 0,0015971551 | 0,0138 |
| 11 | 0,995656 | 0,989548 | 0,0000220499 | 14 | 2,2849 | 0,0000220499 | 0,0003 |
| 12 | 0,999966 | 1,000011 | 0,0000000073 | 22 |  | 0,0000000073 |  |

Таблица 18 – Метод Бройдена-Флетчера-Шанно при начальной точке (7, 10) и a=10

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер шага |  |  |  | Число вычислений f на каждом шаге |  |  |  |
| 1 | 2,692363 | 10,277224 | 37,8121659050 | 9 | 0,4905 | 37,8121659050 | 0,4453 |
| 2 | 2,235337 | 3,740367 | 16,8390414660 | 19 | 0,9466 | 16,8390414660 | 0,2894 |
| 3 | 1,482782 | 3,792981 | 4,8727006745 | 10 | -3,1445 | 4,8727006745 | 0,0041 |
| 4 | 1,035723 | 0,987714 | 0,0199881071 | 19 | 1,5368 | 0,0199881071 | 0,0015 |
| 5 | 0,999025 | 0,993564 | 0,0000296419 | 11 | 2,7442 | 0,0000296419 | 0,0000 |
| 6 | 0,999999 | 1,000000 | 0,0000000000 | 19 |  | 0,0000000000 |  |

Исходя из полученных данных, можно сказать, что у метода наискорейшего спуска порядок стремится к единице, то есть это метод первого порядка, а скорость сходимости является линейной и q лежит в промежутке от 0 до 1 с максимальным значением 0.9780. У метода Давидона-Флетчера-Пауэлла порядок принимает конечные значения больше двух, при этом скорость сходимости стремится к 0, что говорит о сверхлинейной скорости. У метода Бройдена-Флетчера-Шанно работа идентичная методу Давидона-Флетчера-Пауэлла, также ведет себя порядок и скорость сходимости стремится к нулю, что говорит о сверхлинейной скорости. Сводная таблица результатов работы программы представлена в табл. 19.

Таблица 19 - Сводная таблица результатов работы программы

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Параметр для сравнения | Метод наискорейшего спуска | Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла | Метод Бройдена-Флетчера-Шанно |
| Порядок сходимости |  | В конце >2 | В конце >2 |
| Скорость сходимости | Линейная | Сверхлинейная | Сверхлинейная |
| Начальная точка (3, 3) a = 0.1 число шагов | 319 | 14 | 14 |
| Начальная точка (3, 3) a = 1 число шагов | 27 | 10 | 10 |
| Начальная точка (3, 3) a = 10  число шагов | 5 | 4 | 4 |
| Начальная точка (7, 10) a = 0.1  число шагов | 459 | 18 | 18 |
| Начальная точка (7, 10) a = 1  Число шагов | 71 | 12 | 12 |
| Начальная точка (7, 10) a = 10  число шагов | 6 | 6 | 6 |

Метод наискорейшего спуска имеет первый порядок сходимости, квазиньютоновые методы - Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла и Метод Бройдена-Флетчера-Шанно - имеют одинаковый порядок сходимости. У метода наискорейшего спуска скорость сходимости линейная, а у квазиньютоновых методов сверхлинейная. Такие характеристики соответствуют теории. У всех трех методов прослеживается зависимость от выбора начальной точки: чем дальше от точки минимума, тем больше шагов необходимо пройти. Также прослеживается зависимость от выбора параметра a: чем больше параметр a, тем меньшее число шагов необходимо сделать. Если выбирать из этих трех методов наиболее оптимальный, то стоит выбирать или метод Давидона-Флетчера-Пауэлла, или метод Бройдена-Флетчера-Шанно. Они показывают меньшее число шагов для выполнения, причем одинаковое, или в редком случае то же число шагов, что и метод наискорейшего спуска.

**Вывод.**

Таким образом, была минимизирована функция тремя методами: методом наискорейшего спуска, методом Давидона-Флетчера-Пауэлла и методом Бройдена-Флетчера-Шанно. Был проведен анализ эффективности методов в зависимости от начальной точки и параметра a, а также произведена оценка скорости и порядка сходимости методов. Оптимальным решением является использование методов Давидона-Флетчера-Пауэлла и Бройдена-Флетчера-Шанно.