МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №1
по дисциплине «Вычислительная математика»
Тема: Особенности машинной арифметики, точность вычислений на ЭВМ.

Студент гр. 0303	___________________	Калмак Д.А.
Преподаватель	___________________	Сучков А.И.

Санкт-Петербург
2021

Цель работы.

Изучение особенностей вычислений с плавающей точкой в ЭВМ.

Основные теоретические положения.

Обычным способом аппроксимации системы действительных чисел в ЭВМ посредством конкретных математических представлений являются числа с плавающей точкой. Множество F чисел с плавающей точкой характеризуется четырьмя параметрами: основанием b, точностью t и интервалом показателей [L,M]. Каждое число с плавающей точкой, принадлежащее F, имеет значение $x = \pm\left(\frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b^2} + \cdots + \frac{d_t}{b^t}\right) b^n$, где целые числа $d_1, d_2, \ldots, d_t$ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant d_j < b$ (j=1..t) и $L \leqslant n \leqslant M$. Если для каждого ненулевого x из F справедливо $d_1 \neq 0$, то система F называется нормализованной. Целое число n называется показателем, а число $f = \sum_{j=1}^{t} \frac{d_j}{b^j}$ – дробной частью. Обычно целое число b^n хранится по той или иной схеме представления, принятой для целых чисел, например, величины со знаком, дополнения до единицы или дополнения до двух. Если принять $-N \leqslant n < N$, где $N = 2m-1$ то переходим к общепринятой терминологии, при которой t – разрядность мантиссы, m – разрядность порядка.

Величина b^{1-t} является оценкой относительной точности плавающей арифметики, которая характеризуется посредством машинного эпсилон, т.е. наименьшего числа с плавающей точкой ε, такого, что $1 + \varepsilon > 1$. Точное значение машинного эпсилон зависит не только то указанных выше параметров, но и от принятого способа округления.

Рассматриваемое множество F не является континуумом или даже бесконечным множеством. Оно содержит ровно $2\,(b-1)\,b^{t-1}\,(M-L+1)+1$ чисел, которые расположены неравномерно (равномерность расположения имеет место лишь при фиксированном показателе). В силу того, что F – конечное множество, не представляется возможным сколь-нибудь детально отобразить континуум действительных чисел.

На множестве F определены арифметические операции в соответствии с тем, как они выполняются ЭВМ. Эти операции, в свою очередь моделируются в машине посредством приближений, называемых плавающими операциями. Для плавающих операций сложения, вычитания, умножения и деления существует возможность возникновения ошибок округления, переполнения и появления машинного нуля.

Постановка задачи.

Используя готовые программы, выполнить исследования машинной арифметики и точности вычислений на ПЭВМ. Программы для удобства пользователя объединены в одном исполняемом модуле task1.exe.

Выполнение работы.

1. Исследование распределения нормализованных чисел с плавающей точкой на вещественной оси для различных значений параметров b, t, m.

Основание b = 2, разрядность мантиссы t = 1.

В зависимости от разрядности порядка m = 1, m = 2, m = 4 растет количество нормализованных чисел и соседние числа отличаются примерно в два раза. (см. рис. 1-3).

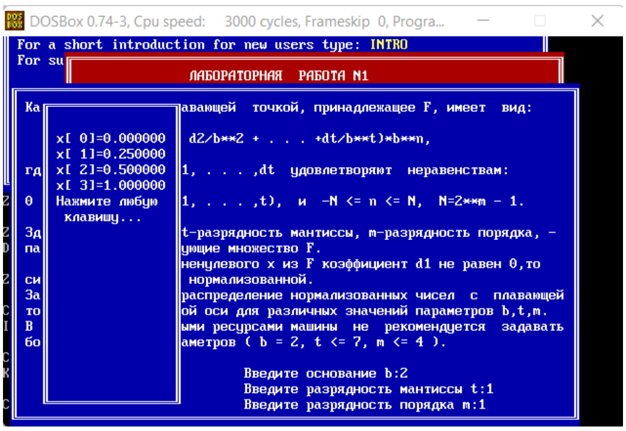

Рисунок 1

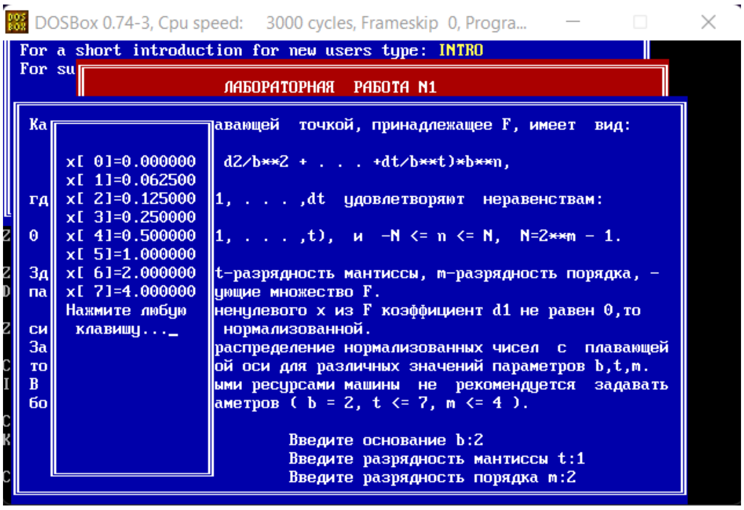

Рисунок 2

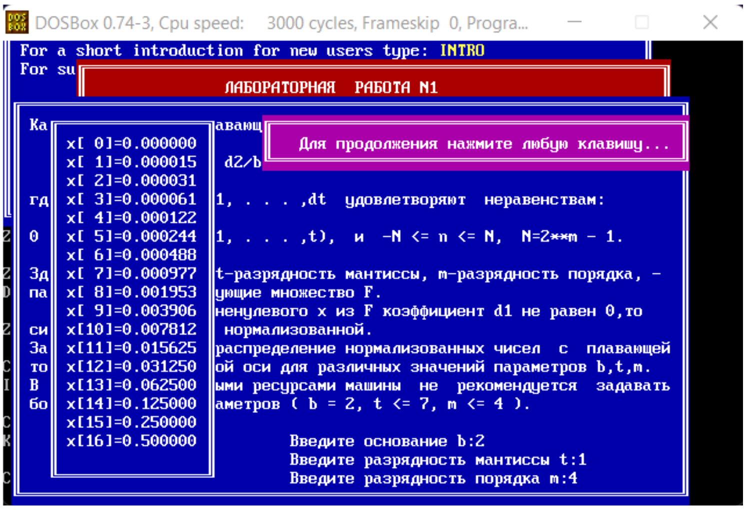

Рисунок 3

Основание b = 2, разрядность порядка m = 1.

В зависимости от разрядности мантиссы t = 1, t = 2, t = 3 растет количество нормализованных чисел и их значения увеличиваются. (см. рис. 4-6).

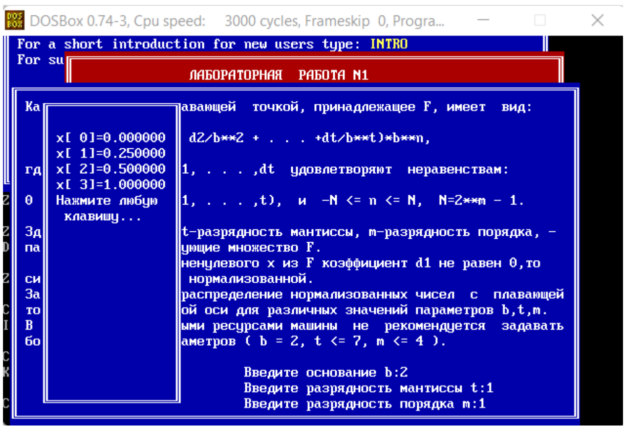

Рисунок 4

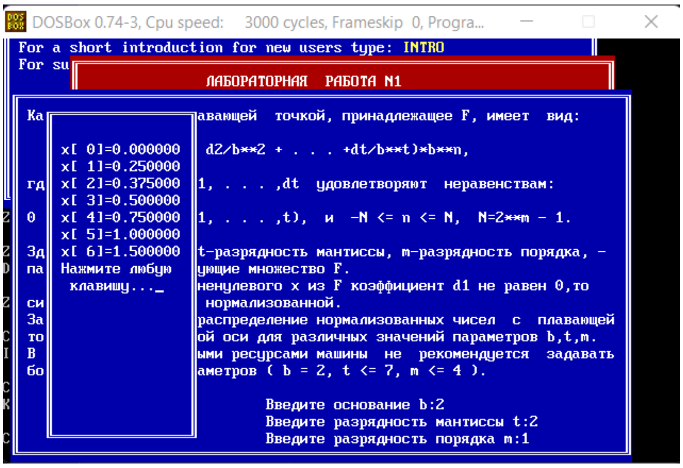

Рисунок 5

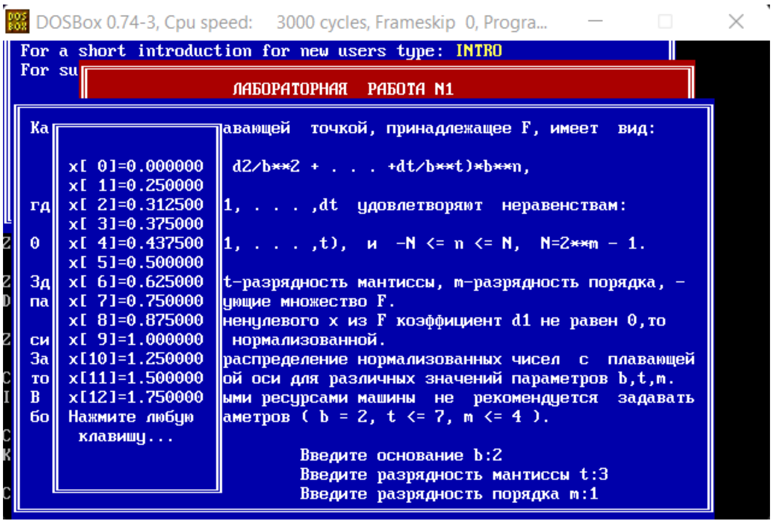

Рисунок 6

2. Вычисление значения величины машинного эпсилон ε(c) для различных значений константы c, меняющихся от 0 до 2^{15}

С ростом значений константы c растет значение величины машинного эпсилон ε прямо пропорционально. (см. табл. 1)

Таблица 1 – Результаты вычислений

c	ε
1	0.00000000000000000010
8	0.00000000000000000086
16	0.00000000000000000173
256	0.00000000000000002775
512	0.00000000000000005551

Таблица 1 – Результаты вычислений

1024	0.00000000000000011102
2048	0.00000000000000022204

Продолжение таблицы 1

Машинный эпсилон ε изменяется в геометрической прогрессии. (см. табл.2) Знаменатель геометрической прогрессии равняется двум. При маленьких значениях константы c наблюдается небольшое отклонение от пропорции. После 2^i шагов (где i = 0, 1, …) машинный эпсилон меняется. (см. рис. 7)

Таблица 2 – Результаты вычислений

c	ε
1	0.00000000000000000010
2	0.00000000000000000021
3	0.00000000000000000021
4	0.00000000000000000043
5	0.00000000000000000043
6	0.00000000000000000043
7	0.00000000000000000043
8	0.00000000000000000086
9	0.00000000000000000086
10	0.00000000000000000086
11	0.00000000000000000086
12	0.00000000000000000086
13	0.00000000000000000086
14	0.00000000000000000086
15	0.00000000000000000086

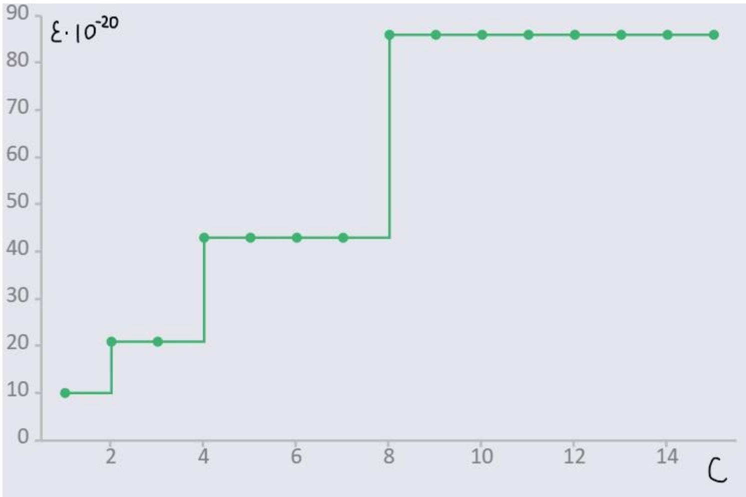

Рисунок 7 – Зависимость ε от c

3. Исследование абсолютных и относительных ошибок округления при вычислениях с плавающей точкой сумм чисел (N чисел вида 1/N) при различных значениях шага суммирования.

При суммировании на каждом этапе абсолютная ошибка увеличивалась, а относительная ошибка оставалась неизменной. (см. табл. 3) Представление чисел с плавающей точкой может быть неточным, поэтому происходит увеличение абсолютной ошибки. Поскольку относительная ошибка постоянна, следует, что увеличение абсолютной ошибки было равномерным.

Таблица 3 – Результаты исследований

N	x-dx	(x-dx)/dx
1	0.0000000000	0.000000 %
2	0.0000000000	0.000000 %
3	0.0000000596	0.000006 %
4	0.0000000000	0.000000 %
5	0.0000000596	0.000006 %
8	0.0000000000	0.000000 %
100	0.0000000224	0.000002 %
253	0.0000000778	0.000008 %

4. Исследование проявления ошибок округления, возникающих при вычислении показательной функции e^x для чисел с плавающей точкой

для двух вариантов алгоритма вычислений, а также скорости сходимости обоих вариантов.

С увеличением значения точности eps уменьшается число шагов при прохождении алгоритмов. (см. рис. 8-10). С увеличением числа с плавающей точкой значительно увеличивается число шагов разложения Тейлора, а также увеличивается отношение количества шагов разложения Тейлора к количеству шагов улучшенного алгоритма, то есть скорость сходимости намного выше у улучшенного алгоритма. Улучшенный алгоритм быстрее. (см. рис. 8, рис. 11) С увеличением числа с плавающей точки растет абсолютная и относительная погрешности. (см. рис. 8, рис. 12, рис. 13) При больших значениях аргумента происходит потеря точности (см. рис. 14)

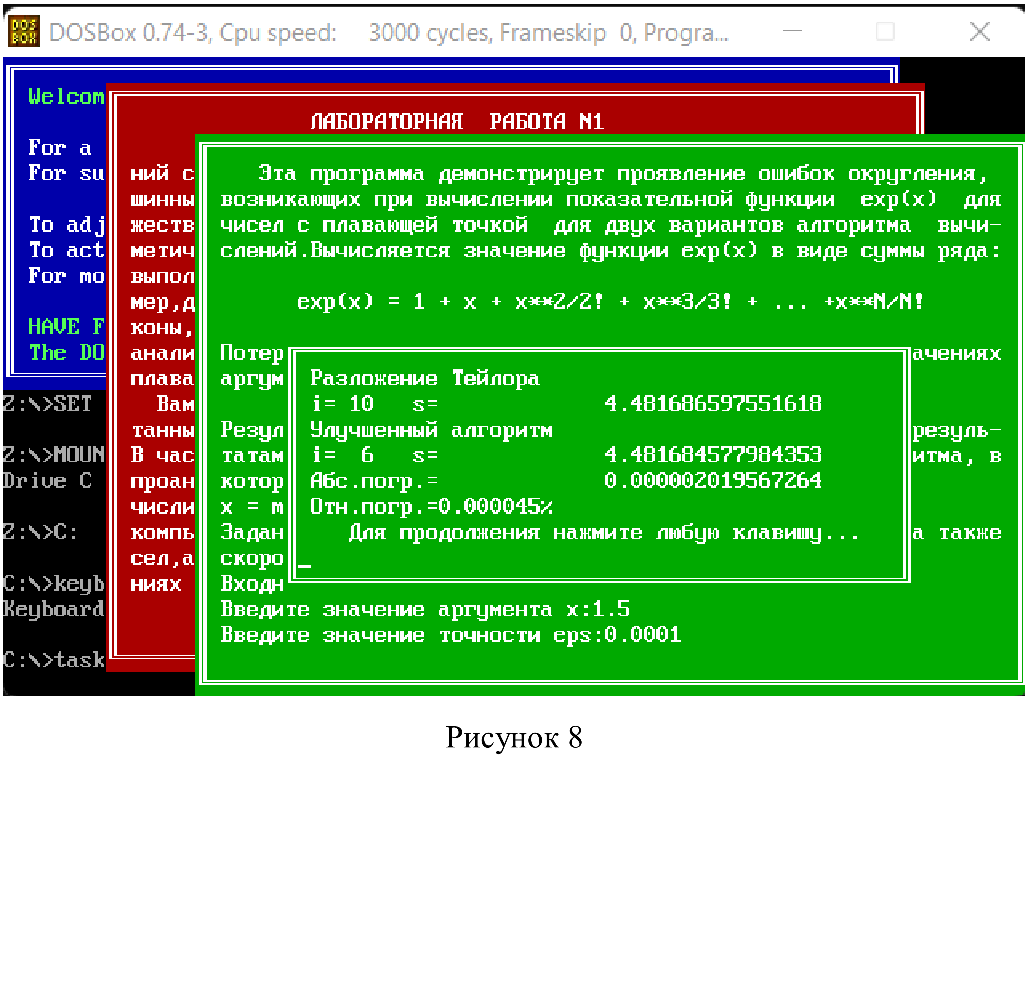

Рисунок 8

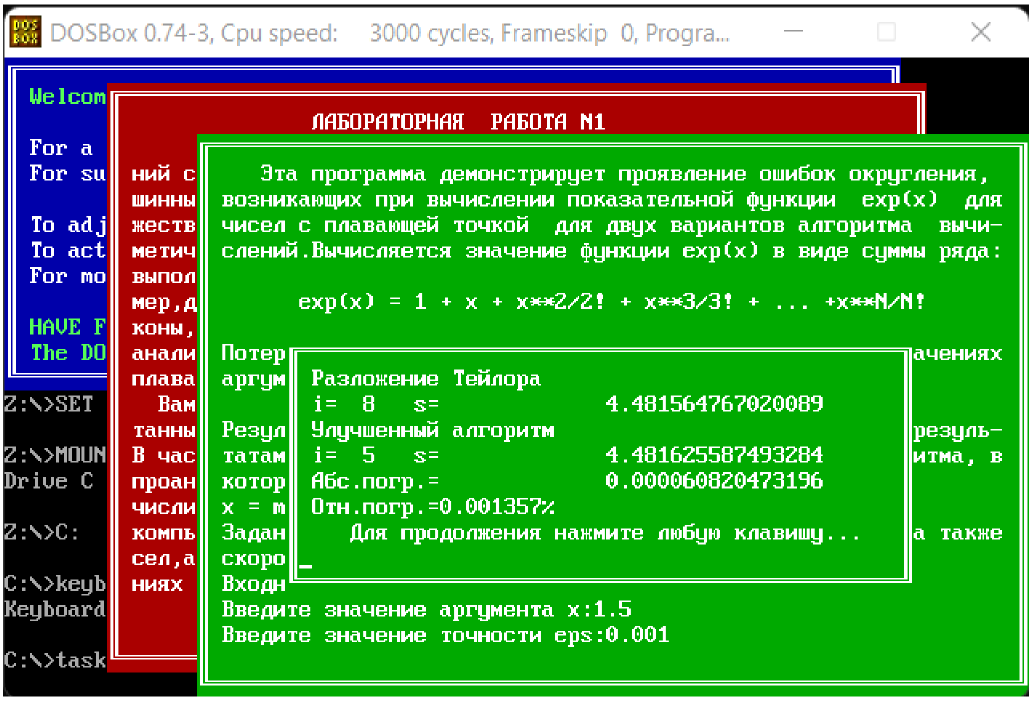

Рисунок 9 – Уменьшение числа шагов

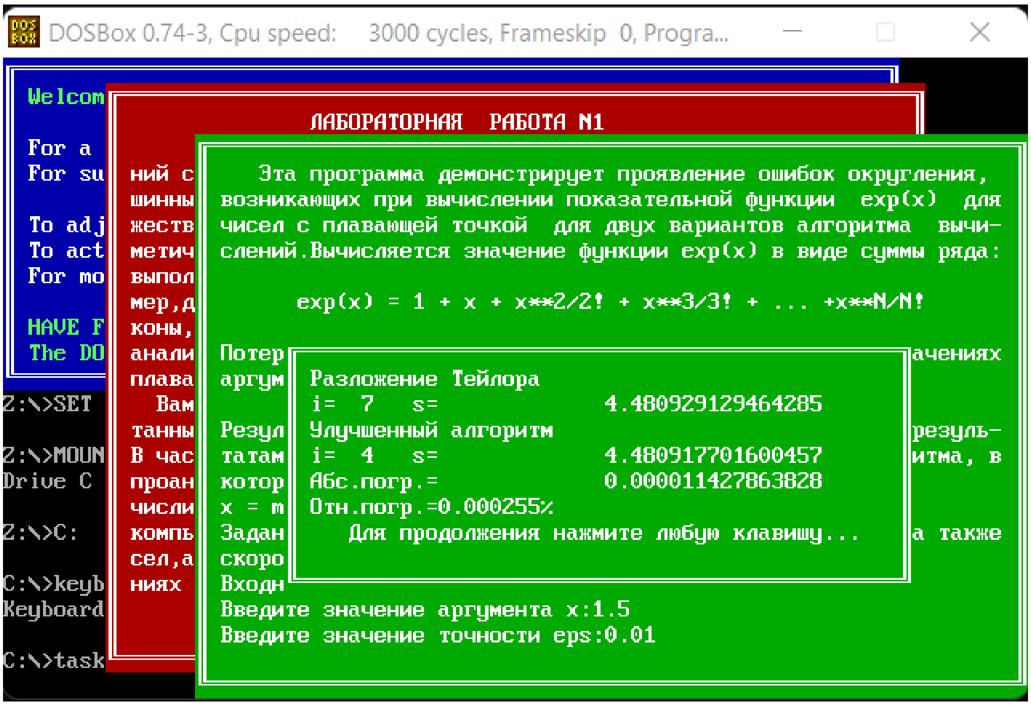

Рисунок 10 – Уменьшение числа шагов

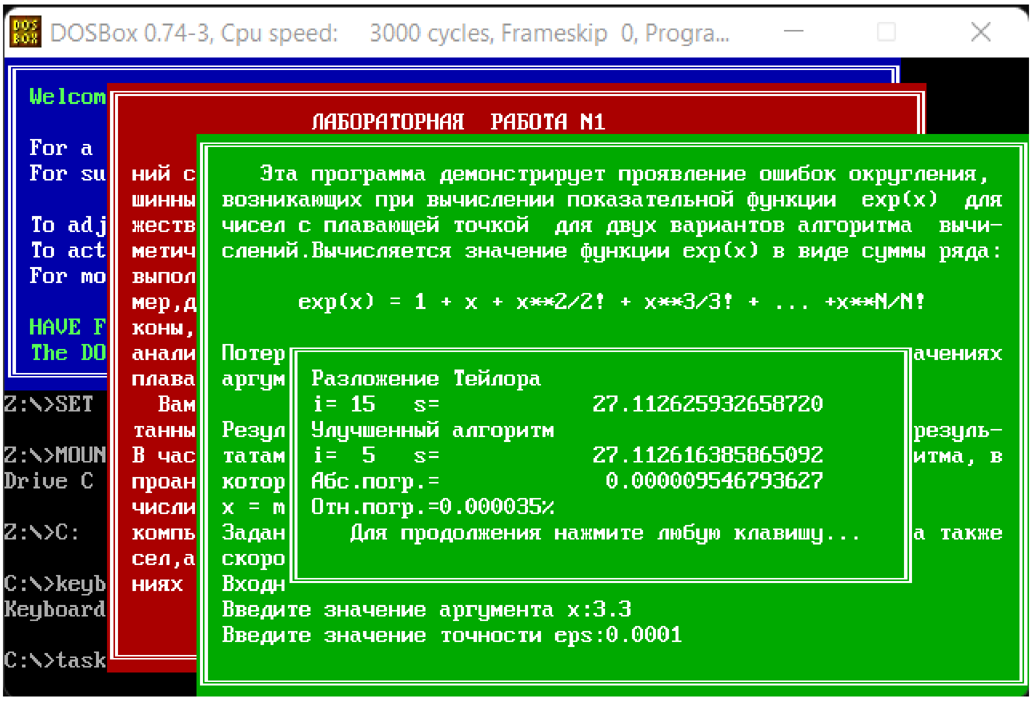

Рисунок 11 – Увеличение числа шагов

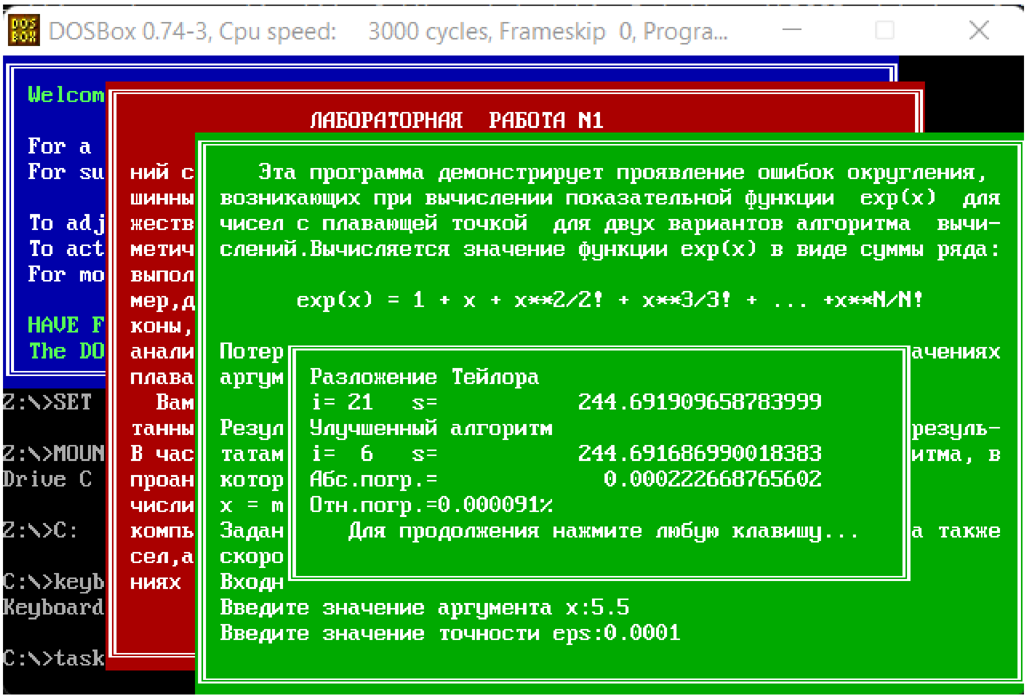

Рисунок 12 – Увеличение погрешности

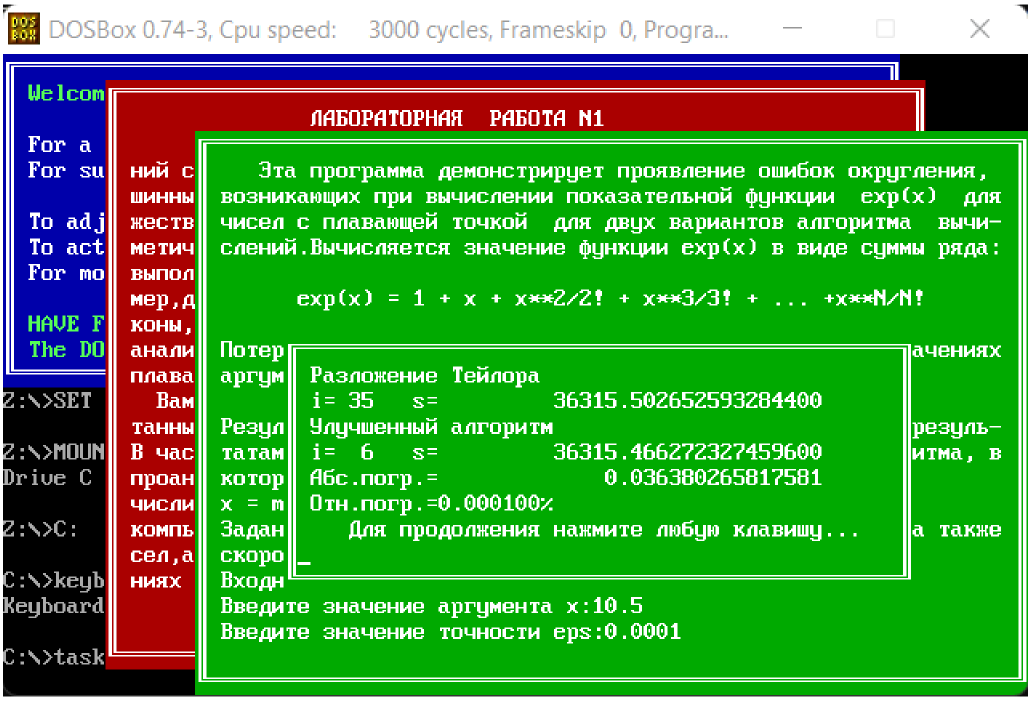

Рисунок 13 – Увеличение погрешности

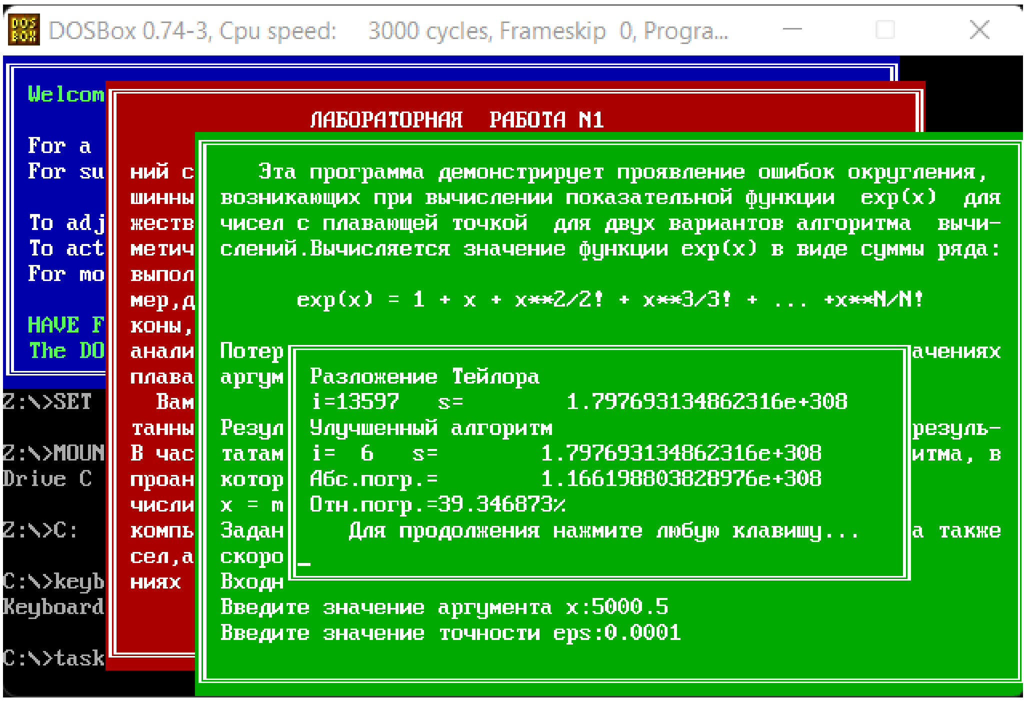

Рисунок 14 – Потеря точности

Выводы.

Таким образом, были изучены особенности вычислений с плавающей точкой в ЭВМ. Количество нормализованных чисел с плавающей точкой увеличивается с увеличением разрядности порядка и мантиссы. Распределение чисел неравномерное: с увеличением плотность чисел уменьшается. Изменение машинного эпсилон ε происходит в геометрической прогрессии со знаменателем два. Смена машинного эпсилон ε осуществляется после 2^i шага (где i = 0, 1, …). Из-за неточности представления чисел с плавающей точкой абсолютная ошибка округлений при вычислении с плавающей точкой сумм увеличивается. Абсолютная ошибка изменяется равномерно, и относительная ошибка округлений при вычислении с плавающей точкой сумм является постоянной величиной. С увеличением значения точности eps уменьшается число шагов в алгоритмах. Число шагов, а также отношение числа шагов разложения Тейлора к числу шагов улучшенного алгоритма увеличиваются с увеличением числа с плавающей точкой. Эффективность улучшенного алгоритма намного выше. С увеличением числа с плавающей точкой наблюдается рост абсолютной и относительной погрешностей, а при больших числах происходит потеря точности.