Студент: Калмак Даниил
Группа: 0303
Вариант: 9
Дата: 12 мая 2022 г.

Теория вероятностей и математическая статистика

Индивидуальное домашнее задание №4

Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 1. *Определить матрицу вероятностей перехода за два шага.*

Решение. Для определения матрицы вероятностей перехода за два шага необходимо матрицу возвести в квадрат.

$$P_2 = (P_1)^2$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 14 & 35 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 14 & 35 & 29 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 24 & 18 & 34 & 0 & 0 & 24 \\ 45 & 10 & 2 & 9 & 25 & 0 & 9 \\ 45 & 13 & 0 & 8 & 21 & 4 & 9 \\ 0 & 28 & 22 & 27 & 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 14 & 35 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 14 & 35 & 29 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 24 & 18 & 34 & 0 & 0 & 24 \\ 45 & 10 & 2 & 9 & 25 & 0 & 9 \\ 45 & 13 & 0 & 8 & 21 & 4 & 9 \\ 0 & 28 & 22 & 27 & 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$$

□

Задание 2. *Выделить классы сообщающихся состояний.*

Решение. Граф цепи Маркова представлен на рис. 1. (без умножения на $\frac{1}{10}$)

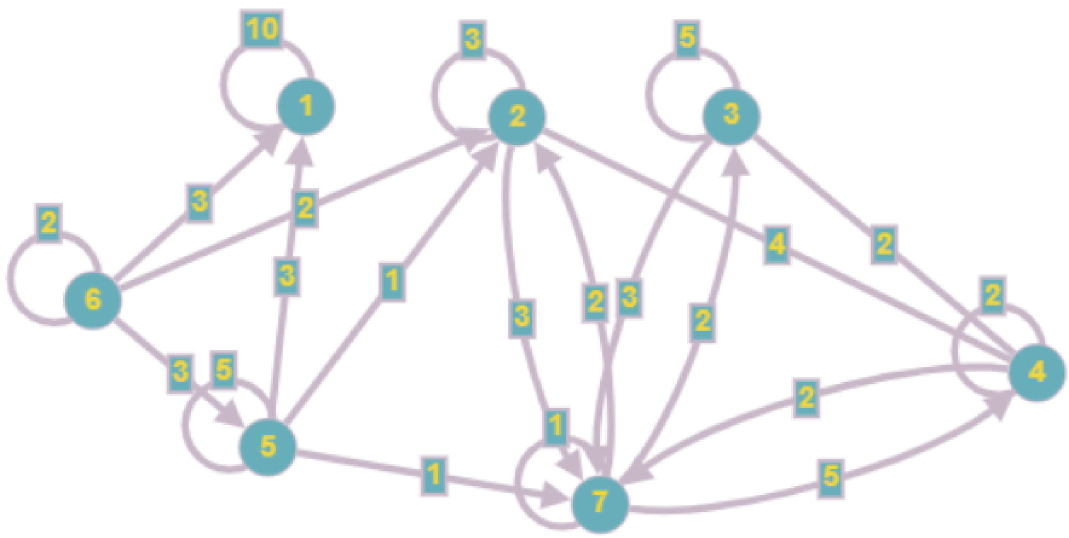

Рис. 1 – Граф цепи Маркова

Сообщающимися состояниями называют состояния, при которых i достигается из j и j достигается из i.

Такому условию удовлетворяют пары: 2 и 3 (за два шага), 2 и 4, 2 и 7, 3 и 4, 3 и 7, 4 и 7.

Класс сообщающихся состояний. Внутри класса все состояния сообщающиеся. Два состояния из различных классов не сообщаются друг с другом.

Класс сообщающихся состояний $\{2, \quad 3, \quad 4, \quad 7\}$

□

Задание 3. *Есть ли невозвратные состояния?*

Решение. Да, состояния 5 и 6, вероятности того, что мы вернемся в эти состояния, не равны 1. □

Задание 4. *Найти период в каждом из классов.*

Решение. Класс сообщающихся состояний $\{2, \quad 3, \quad 4, \quad 7\}$

$$P = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Период $T = gcd(s : p_{ii}^{(s)} > 0)$
$T = gcd(1,1,1,1) = 1$

$\square$

Задание 5. *Вычислить финальные вероятности в каждом классе.*

Решение. Класс сообщающихся состояний $\{2, \quad 3, \quad 4, \quad 7\}$

$$P = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{'} = P^T$$

Решим систему:

$$\begin{cases} (P^{'} - E)x^T = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} p_1^*, & p_2^*, & p_3^*, & p_4^* \end{pmatrix}$$

Домножим обе части первого уравнения на 10:

$$(10P^{'} - 10E)x^T = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -8 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем x^T:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -7 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Финальные вероятности:

$$x^T = \begin{pmatrix} \frac{188}{769} \\ \frac{166}{769} \\ \frac{243}{769} \\ \frac{172}{769} \end{pmatrix}$$

$\square$