Студент: Калмак Даниил
Группа: 0303
Вариант: 9
Дата: 31 мая 2022 г.

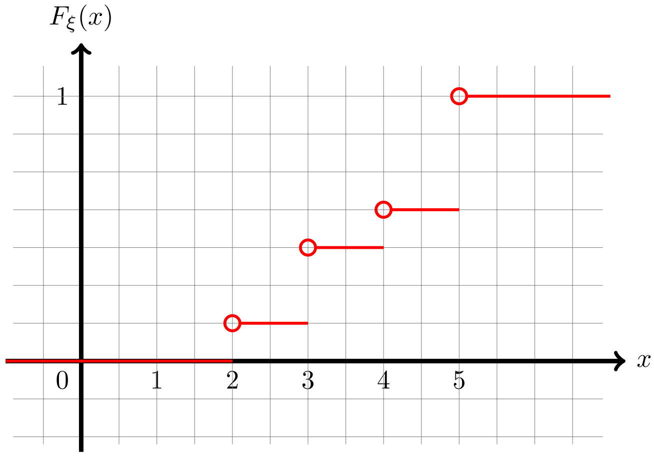
Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №2

Задание 1. *Дана функция распределения случайной величины ξ:*

x	$(-\infty, 2]$	$(2, 3]$	$(3, 4]$	$(4, 5]$	$(5, \infty)$
$F_\xi(x)$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

Вычислить $E(\xi)$, $D(\xi)$, распределение $\eta = (\xi)^4$, энтропию $H(\xi)$ и построить графики функции распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$.

Решение. Построим график функции распределения $F_\xi(x)$.



$supp\ \xi = \{2, 3, 4, 5\}$

ξ	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$

Вычислим мат. ожидание дискретной случайной величины:

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot p_i = 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{2+6+4+15}{7} = \frac{27}{7}$$

Вычислим дисперсию дискретной случайной величины:

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2$$

$$E(\xi^2) = \sum_{i=1}^{4} a_i^2 \cdot p_i = 2^2 \cdot \frac{1}{7} + 3^2 \cdot \frac{2}{7} + 4^2 \cdot \frac{1}{7} + 5^2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{4+18+16+75}{7} = \frac{113}{7}$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = \frac{113}{7} - (\frac{27}{7})^2 = \frac{791-729}{49} = \frac{62}{49}$$

Вычислим энтропию:

$$H(\xi) = -\sum_{i:p_i>0} p_i \cdot lb\ p_i = -\left(\frac{1}{7} \cdot lb\left(\frac{1}{7}\right) + \frac{2}{7} \cdot lb\left(\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{7} \cdot lb\left(\frac{1}{7}\right) + \frac{3}{7} \cdot lb\left(\frac{3}{7}\right)\right) = 1.8424$$

Вычислим распределение $\eta = (\xi)^4$:
$supp\,\xi = \{2, 3, 4, 5\}$

ξ	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$

$\text{supp}\,\eta = \{(2)^4, (3)^4, (4)^4, (5)^4\} = \{16, 81, 256, 625\}$

$P(\eta = 16) = P(\xi = 2) = \frac{1}{7}$

$P(\eta = 81) = P(\xi = 3) = \frac{2}{7}$

$P(\eta = 256) = P(\xi = 4) = \frac{1}{7}$

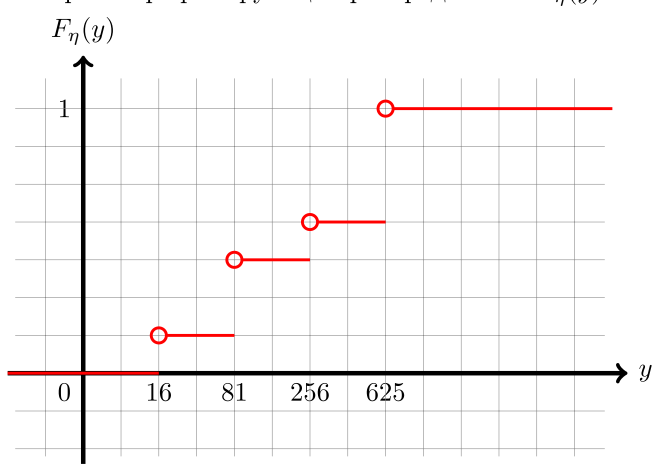
$P(\eta = 625) = P(\xi = 5) = \frac{3}{7}$

η	16	81	256	625
p_i	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$

Найдем функцию распределения $F_\eta(y)$:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0,\, y \leq 16 \\ \frac{1}{7},\, y \in (16, 81] \\ \frac{3}{7},\, y \in (81, 256] \\ \frac{4}{7},\, y \in (256, 625] \\ 1,\, y > 625 \end{cases}$$

Построим график функции распределения $F_\eta(y)$.



$\square$

Задание 2. *Дана плотность распределения абс. непр. случайной величины ξ:*

$$p(x) = \begin{cases} C|x|,\, x \in [-\pi, \pi] \\ 0,\, else \end{cases}$$

Вычислить C, $E(\xi)$, $D(\xi)$, распределение $\eta = \sin(3\xi)$, энтропию $H(\xi)$ и построить графики функции распределений $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$.

Решение. Для вычисления C используем свойство функции плотности абс. непр. случайной величины:

$$\int_{\mathbb{R}} p_\xi(x)\,dx = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}} p_\xi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} C|x|\,dx = C\left(\int_{-\pi}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right) = C\pi^2$$

$$C\pi^2 = 1$$

$$C = \frac{1}{\pi^2}$$

Подставим C в $p_\xi(x)$:

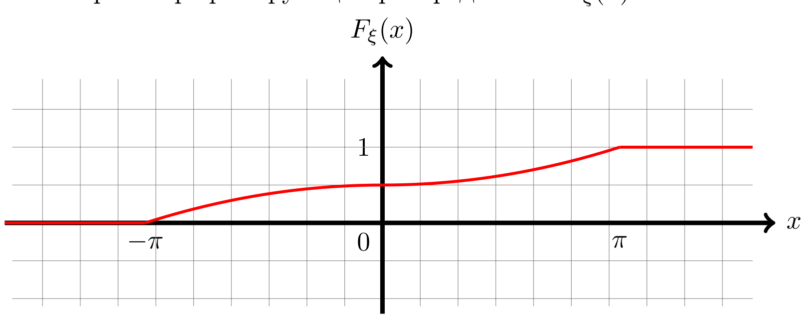
$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2}|x|,\ x \in [-\pi,\pi] \\ 0,\ else \end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F_\xi(x)$:
Найдем определенный интеграл:

$$\int_{-\pi}^{x} \frac{1}{\pi^2}|x|\,dx = \frac{x\cdot|x|}{2\cdot\pi^2} + \frac{1}{2}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x \le -\pi \\ \dfrac{x\cdot|x|}{2\cdot\pi^2} + \dfrac{1}{2},\ x \in (-\pi,\pi] \\ 1,\ x > \pi \end{cases}$$

Построим график функции распределения $F_\xi(x)$.



Вычислим мат. ожидание абс. непр. случайной величины:

$$E(\xi) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot p_\xi(x) \ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi^2}\cdot x\cdot|x|\,dx = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{0} x\cdot(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot x\,dx\right) = \frac{1}{\pi^2}\left(-\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) = 0$$

Вычислим дисперсию дискретной случайной величины:

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2$$

$$E(\xi^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2\cdot p_\xi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi^2}\cdot x^2\cdot|x|\,dx = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{0} x^2\cdot(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2\cdot x\,dx\right) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^4}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = \frac{\pi^2}{2} - (0)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

Вычислим энтропию:

$$H(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} p_\xi(x) lb\Big(p_\xi(x)\Big)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi^2}|x|\cdot lb\Big(\frac{1}{\pi^2}|x|\Big)\,dx = -\frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x)\cdot lb\Big(\frac{1}{\pi^2}(-x)\Big)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot lb\Big(\frac{1}{\pi^2}x\Big)\,dx\right)$$

1.

$$\int_{-\pi}^{0}(-x)\cdot lb\Big(\frac{1}{\pi^2}(-x)\Big)\,dx=\int_{-\pi}^{0}-\frac{x\cdot ln(-\frac{x}{\pi^2})}{ln(2)}\,dx=-\frac{1}{ln(2)}\int_{-\pi}^{0}x\cdot ln(-\frac{x}{\pi^2})\,dx$$

Сделаем замену $u=-\frac{x}{\pi^2}$ и подставим в интеграл:

$$-\frac{1}{ln(2)}\cdot\pi^4\int_{-\pi}^{0}u\cdot ln(u)\,du$$

Используя интегрирование по частям, получаем:

$$-\frac{1}{ln(2)}\cdot\pi^4\cdot\Big(\frac{u^2\cdot ln(u)}{2}-\frac{u^2}{4}\Big)\Big|_0^{\pi}$$

Сделаем обратную замену и найдем определенный интеграл:

$$-\frac{\pi^2\cdot(2\ln(\pi)+1)}{4\ln(2)}$$

2.

$$\int_{0}^{\pi}x\cdot lb\Big(\frac{1}{\pi^2}\cdot x\Big)\,dx=\int_{0}^{\pi}\frac{x\cdot ln(\frac{x}{\pi^2})}{ln(2)}\,dx=\frac{1}{ln(2)}\int_{0}^{\pi}x\cdot ln(\frac{x}{\pi^2})\,dx$$

Сделаем замену $u=\frac{x}{\pi^2}$ и подставим в интеграл:

$$\frac{1}{ln(2)}\cdot\pi^4\int_{0}^{\pi}u\cdot ln(u)\,du$$

Используя интегрирование по частям, получаем:

$$\frac{1}{ln(2)}\cdot\pi^4\cdot\Big(\frac{u^2\cdot ln(u)}{2}-\frac{u^2}{4}\Big)\Big|_0^{\pi}$$

Сделаем обратную замену и найдем определенный интеграл:

$$-\frac{\pi^2\cdot(2\ln(\pi)+1)}{4\ln(2)}$$

$$H(\xi)=-\frac{1}{\pi^2}\left(-\frac{\pi^2\cdot(2\ln(\pi)+1)}{4\ln(2)}-\frac{\pi^2\cdot(2\ln(\pi)+1)}{4\ln(2)}\right)=\frac{2ln(\pi)+1}{2ln(2)}=2.3728$$

Вычислим распределение $\eta=\sin(3\xi)$:
$supp\ \xi=[-\pi,\pi]$
$supp\ \eta=[-1,1]$
Найдем функцию распределения $F_\eta(y)$:

$$F_\eta(y)=P(\eta<y)=P(\sin(3\xi)<y)=P\left(\frac{1}{3}\cdot(2\pi\cdot n-arcsin(y)-\pi)<\xi<\frac{1}{3}\cdot(2\pi\cdot n+arcsin(y))\right)=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot(2\pi n+arcsin(y))\cdot\left|\frac{1}{3}\cdot(2\pi n+arcsin(y))\right|}{2\cdot\pi^2}+\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot(2\pi n - arcsin(y) - \pi)\cdot\left|\frac{1}{3}\cdot(2\pi n - arcsin(y) - \pi)\right|}{2\cdot\pi^2}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{(2\pi n + arcsin(y))\cdot|2\pi n + arcsin(y)| + (-2\pi n + arcsin(y) + \pi)\cdot|2\pi n - arcsin(y) - \pi|}{18\pi^2}$$

$n = -2$

Функция распределения $F_\eta(y)$:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0,\ y \le -1 \\ \dfrac{(-4\pi + arcsin(y))\cdot|-4\pi + arcsin(y)| + (4\pi + arcsin(y) + \pi)\cdot|-4\pi - arcsin(y) - \pi|}{18\pi^2},\ y \in (-1, 1] \\ 1,\ y > 1 \end{cases}$$

Построим график функции распределения $F_\eta(y)$.

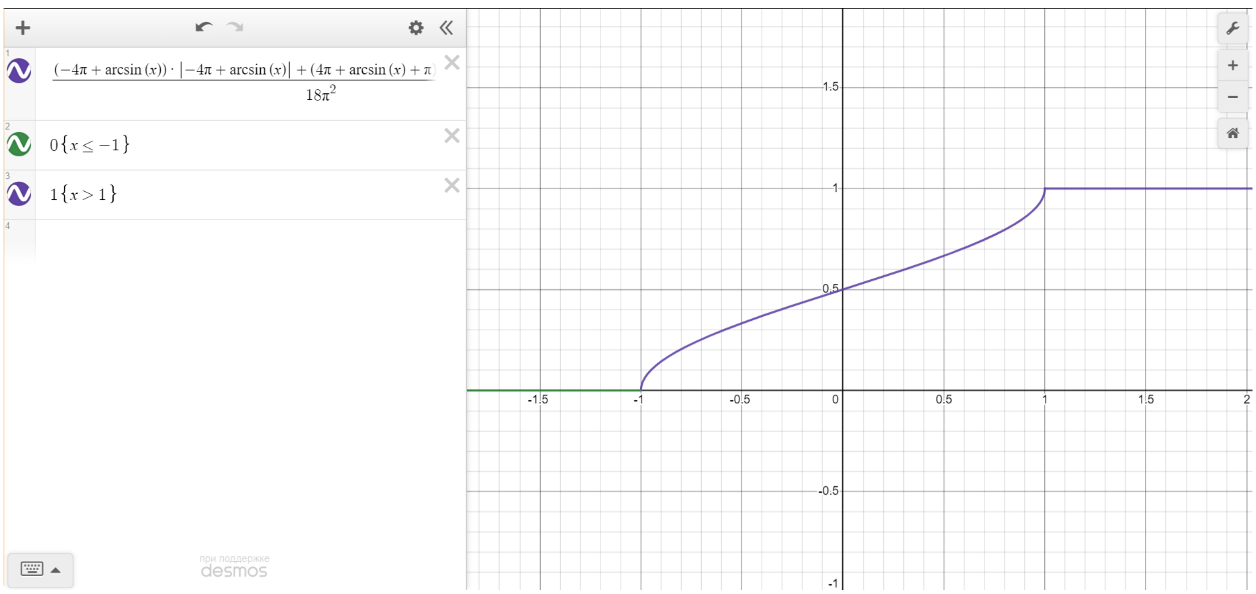


Рис. 1 – График функции распределения $F_\eta(y)$

□