Студент: Калмак Даниил
Группа: 0303
Вариант: 9
Дата: 24 марта 2022 г.

Теория вероятностей и математическая статистика

Индивидуальное домашнее задание №1

Задание 1. *Из колоды 54 карты надо удалить два джокера. Определить вероятность того, что для этого потребуется проверить не более 1/5 колоды.*

Решение. Пусть A - событие, что было удалено два джокера и для этого потребовалось проверить не более 1/5 колоды.

1/5 колоды равна $\dfrac{54}{5} = 10.8$, то есть проверять можно не более 10 карт.

Число расположений двух джокеров в 54-ех картах - число сочетаний $\binom{54}{2} = \frac{54!}{2!(54-2)!} = \dfrac{54 \cdot 53}{2} = 1431$

Число расположений двух джокеров в 10-и картах, то есть проверяемых - число сочетаний $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$

Тогда вероятность того, что для удаления двух джокеров потребуется не более 1/5 колоды, будет отношение числа расположений двух джокеров в 10-и картах к числу расположений двух джокеров в 54-ех картах:

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{45}{1431} \approx 0.0314$

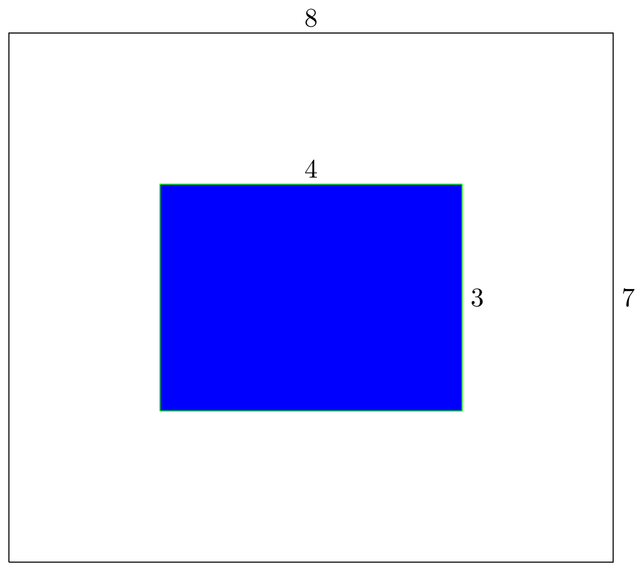
□

Задание 2. *На плоскости расчерчена прямоугольная сетка, величина ячейки 8 на 7 ед. Определить вероятность того, что монета диаметра 4, наугад брошенная на плоскость, не пересечет ни одной прямой.*

Решение. Для этой задачи рассмотрим одну ячейку. Пусть A - событие, что монета диаметра 4, наугад брошенная в ячейку, не пересечет ни одну сторону.

Самое крайнее положение, которое может принимать монета, это касание сторон ячейки. Достигаться это будет, когда расстояние от хотя бы одной стороны ячейки до центра монеты будет равно радиусу монеты, ведь если расстояние будет меньше, то монета пересечет сторону ячейки, две стороны ячейки монета будет касаться в углу прямоугольника, когда от верхней или нижней стороны и боковой стороны расстояние до центра будет равно радиусу монеты.

Образовывается внутри ячейки (прямоугольника) еще один прямоугольник, у которого стороны - это граничные положения центра монеты: от каждой стороны расстояние, равное радиусу монеты, то есть $\dfrac{4}{2} = 2$. Прямоугольник получается таких размеров, что длина ячейки сокращается на два радиуса и ширина сокращается на два радиуса.



Вероятностью события A будет отношение площади внутреннего прямоугольника, в котором может находиться центр монеты, чтобы монета не пересекла сторону ячейки, к площади всей ячейки:

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{(8-2-2)\cdot(7-2-2)}{8\cdot 7} \approx 0.2143$

$\square$

Задание 3. *В 1-м ящике 18 белых и 10 черных шаров; во 2-м 10 бел. и 10 чер.; в 3-м 16 бел. и 18 чер. Наугад выбирают один ящик. Из него достали 2 шара. Все оказались белыми. Определить вероятность того, что они из 1-го ящика.*

Решение. Пусть A - событие, что достали два шара и все оказались белыми.

Всего три ящика. Вероятность выбора каждого одинаковая и равна $\mathbb{P}(H1) = \mathbb{P}(H2) = \mathbb{P}(H3) = \dfrac{1}{3}$

Найдем вероятности события A при каждом ящике.

В первом ящике 18 белых и 10 черных шаров. Вероятностью события A будет отношение числа случаев, когда вынуты два белых шара к числу способов взять два шара из 28-ми шаров.

Число случаев, когда вынуты два белых шара - число сочетаний $\binom{18}{2} = \frac{18!}{2!(18-2)!} = \dfrac{18\cdot 17}{2}$

Число способов взять два шара из 28-ми шаров - число сочетаний $\binom{28}{2} = \frac{28!}{2!(28-2)!} = \dfrac{28\cdot 27}{2}$

$$\mathbb{P}(A|H1) = \frac{\dfrac{18\cdot 17}{2}}{\dfrac{28\cdot 27}{2}} = \frac{17}{42}$$

Аналогично для второго и третьего ящика. Во втором ящике 10 белых и 10 черных шаров. Вероятностью события A будет отношение числа случаев, когда вынуты два белых шара к числу способов взять два шара из 20-ти шаров.

Число случаев, когда вынуты два белых шара - число сочетаний $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \dfrac{10\cdot 9}{2}$

Число способов взять два шара из 20-ти шаров - число сочетаний $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \dfrac{20\cdot 19}{2}$

$$\mathbb{P}(A|H2) = \frac{\dfrac{10\cdot 9}{2}}{\dfrac{20\cdot 19}{2}} = \frac{9}{38}$$

В третьем ящике 16 белых и 18 черных шаров. Вероятностью события A будет отношение числа случаев, когда вынуты два белых шара к числу способов взять два шара из 34-ех шаров.

Число случаев, когда вынуты два белых шара - число сочетаний $\binom{16}{2} = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \dfrac{16 \cdot 15}{2}$

Число способов взять два шара из 34-ех шаров - число сочетаний $\binom{34}{2} = \frac{34!}{2!(34-2)!} = \dfrac{34 \cdot 33}{2}$

$$\mathbb{P}(A|H3) = \dfrac{\dfrac{16 \cdot 15}{2}}{\dfrac{34 \cdot 33}{2}} = \frac{40}{187}$$

Найдем вероятность события A:
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H1) \cdot \mathbb{P}(A|H1) + \mathbb{P}(H2) \cdot \mathbb{P}(A|H2) + \mathbb{P}(H3) \cdot \mathbb{P}(A|H3)$
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{3} \cdot (\dfrac{17}{42} + \dfrac{9}{38} + \dfrac{40}{187})$

Найдем вероятность, что два белых шара были достаны из первого ящика, эта вероятность и будет искомой:
$\mathbb{P}(H1|A) = \dfrac{\mathbb{P}(H1) \cdot \mathbb{P}(A|H1)}{\mathbb{P}(A)}$
$\mathbb{P}(H1|A) = \dfrac{\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{17}{42}}{\dfrac{1}{3} \cdot (\dfrac{17}{42} + \dfrac{9}{38} + \dfrac{40}{187})} \approx 0.4731$

$\square$

Задание 4. *Цепь состоит из двух систем цепочек, связанных параллельно. Первая система состоит из трех одинаковых участков, соединенных последовательно. Каждый из участков состоит из двух цепочек по 25 звеньев каждая, соединенных параллельно. Вторая система представляет собой цепочку в 75 звеньев. Определить вероятность разрыва данной цепи, если вероятность разрыва каждого звена равна 0, 09 и разрыв звеньев происходит независимо.*

Решение. Пусть A, B и C - события, что соответственно первый, второй и третий участок цепочки, который состоит из двух цепочек по 25 звеньев, соединенных параллельно, не разорван. D - событие, что цепочка, состоящая из 75 звеньев, не разорвана.

Обозначим вероятность разрыва каждого звена за $p = 0.09$, тогда вероятность того, что звено не разорвется, будет равна $1 - p = 0.91$

Рассмотрим событие A. Событие не произойдет только в случае, когда обе параллельные цепочки будут разорваны, поэтому найдем вероятность события A с помощью противоположного события.

$A1$ - событие, когда разорвется первая цепочка первого участка цепочки, а $A2$ - событие, когда разорвется вторая цепочка. Они должны произойти одновременно, чтобы событие A не выполнилось, это и будет событие $\bar{A}$.

Вероятность события A:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A1) \cdot \mathbb{P}(A2)$$

В цепочке 25 звеньев, тогда, чтобы цепочка не была разорвана, все звенья не должны быть разорваны вследствие последовательного соединения. Вероятность такого события равна $(1-p)^{25}$. Тогда вероятность события $A1$:

$$\mathbb{P}(A1) = 1 - (1-p)^{25}$$

Аналогично вероятность события $A2$ равна

$$\mathbb{P}(A2) = 1 - (1-p)^{25}$$

Отсюда вероятность события A равна

$$\mathbb{P}(A) = 1 - (1 - (1-p)^{25})^2$$

Аналогично вероятность события B:

$$\mathbb{P}(B) = 1 - (1 - (1-p)^{25})^2$$

вероятность события C:

$$\mathbb{P}(C) = 1 - (1 - (1-p)^{25})^2$$

Первая система цепочек состоит из трех участков, соединенных последовательно, поэтому, чтобы первая система цепочек не была разорвана, все три участка не должны быть разорваны одновременно.

$$\mathbb{P}(ABC) = (1 - (1 - (1-p)^{25})^2)^3$$

Рассмотрим событие D. 75 звеньев соединены последовательно, поэтому цепочка не разорвется только тогда, когда эти 75 звеньев не будут разорваны одновременно.

$$\mathbb{P}(D) = (1-p)^{75}$$

Искомое событие E - разорвется цепь, которая состоит из двух систем цепочек, которые были рассмотрены выше. Поскольку системы цепочек соединены параллельно, разрыв цепи произойдет только в том случае, когда разорвутся обе системы. $\mathbb{P}(ABC)$ - вероятность, что первая система не разорвется, тогда ее разрыв - обратное событие $\overline{ABC}$.

$$\mathbb{P}(\overline{ABC}) = 1 - \mathbb{P}(ABC) = 1 - (1 - (1 - (1-p)^{25})^2)^3$$

$\mathbb{P}(D)$ - вероятность, что вторая система не разорвется, тогда ее разрыв - обратное событие $\bar{D}$.

$$\mathbb{P}(\bar{D}) = 1 - \mathbb{P}(D) = 1 - (1-p)^{75}$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\overline{ABC}) \cdot \mathbb{P}(\bar{D})$$

$$\mathbb{P}(E) = (1 - (1 - (1 - (1-p)^{25})^2)^3) \cdot (1 - (1-p)^{75})$$

$$\mathbb{P}(E) = (1 - (1 - (1 - (1-0.09)^{25})^2)^3) \cdot (1 - (1-0.09)^{75}) \approx 0.9933$$

$\square$

Задание 5. *Вероятность успеха в схеме Бернулли равна 1/3. Проводится 2000 испытаний. Написать точную формулу и вычислить приближенно вер-ть того, что число успехов равно 699.*

Решение. Вероятность успеха $p = \dfrac{1}{3}$

Количество испытаний $n = 2000$

Число успехов $k = 699$

$np = \dfrac{2000}{3} \approx 667$, $np \geq 10$ Таким образом, для приближения будем использовать локальную формулу Муавра-Лапласса.

Точная формула:

$$\mathbb{P}(\mu_n = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(\mu_n = 699) = \binom{2000}{699} \cdot (\frac{1}{3})^k \cdot (\frac{2}{3})^{2000-699}$$

Формула приближенных вычислений:

$$\mathbb{P}(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\dfrac{x_{n,k}^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \cdot \varphi(x_{n,k}),\ x_{n,k} = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

$$x_{n,k} = \frac{699 - 2000 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{2000 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{97}{20 \cdot \sqrt{10}} \approx 1.53$$

$$\varphi(1.53) \approx 0.1238$$

$$\mathbb{P}(699) \approx \frac{1}{\sqrt{2000 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \cdot 0.1238 \approx 0.0059$$

$\square$