Студент: Калмак Даниил
Группа: 0303
Вариант: 9
Дата: 17 мая 2022 г.

Теория вероятностей и математическая статистика
Индивидуальное домашнее задание №3

Случайная величина (ξ, η) имеет равномерное распределение в области:

$$D = \{(x, y) : 4x - 4y \leq 4, x \geq 1, y \leq 4\}$$

$\zeta = -\xi^3 - 1$, $\nu = [4\eta]$, $\mu = 12\xi - 12\eta$.

Задание 1. *Найти $p_{\xi,\eta}$, функции и плотности распределения компонент. Будут ли компоненты независимыми? Построить графики функций распределения $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$.*

Решение. Плотность распределения принимает вид:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in D \\ 0, & else \end{cases}$$

Вычислим c.

$$\iint\limits_D c\, dxdy = 1$$

$$\iint\limits_D dxdy = \frac{1}{c}$$

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^5 dx \int\limits_{x-1}^4 dy = \int\limits_1^5 (4 - x + 1)dx = \int\limits_1^5 (5-x)dx = 8 = \frac{1}{c}$$

$$c = \frac{1}{8}$$

.

Подставим c в $p_{\xi,\eta}(x,y)$:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & (x,y) \in D \\ 0, & else \end{cases}$$

Найдем p_ξ:

$$p_\xi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_{\xi,\eta}(x,y)\, dy = \begin{cases} \int\limits_{x-1}^4 \frac{1}{8} dy, & x \in [1,5] \\ 0, & else \end{cases} = \begin{cases} \frac{5-x}{8}, & x \in [1,5] \\ 0, & else \end{cases}$$

Найдем p_η:

$$p_\eta(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_{\xi,\eta}(x,y)\, dx = \begin{cases} \int\limits_1^{y+1} \frac{1}{8} dx, & y \in [0,4] \\ 0, & else \end{cases} = \begin{cases} \frac{y}{8}, & y \in [0,4] \\ 0, & else \end{cases}$$

Найдем функцию распределения F_ξ:

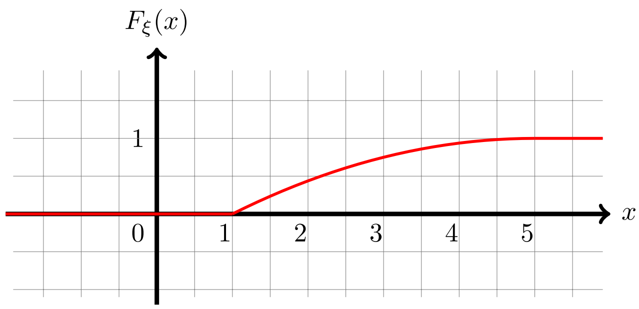
$$F_\xi(x) = \int\limits_\infty^x p_\xi(t)\, dt = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \int\limits_1^x p_\xi(t)\, dt, & x \in (1,5] \\ 1, & x > 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \int\limits_1^x \frac{5-t}{8} dt, & x \in (1,5] \\ 1, & x > 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ -\frac{x^2 - 10x + 9}{16}, & x \in (1,5] \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Найдем функцию распределения F_η:

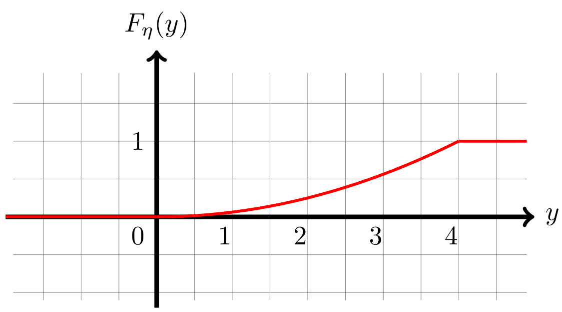
$$F_\eta(y) = \int\limits_{\infty}^{y} p_\eta(t)\,dt = \begin{cases} 0, \ \ y \le 0 \\ \int\limits_0^y p_\eta(t)\,dt, \ \ y \in (0,4] \\ 1, \ \ y > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ \ y \le 0 \\ \int\limits_0^y \frac{t}{8}dt, \ \ y \in (0,4] \\ 1, \ \ y > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ \ y \le 0 \\ \frac{y^2}{16}, \ \ y \in (0,4] \\ 1, \ \ y > 4 \end{cases}$$

Случайные величины ξ и η зависимы, т.к. $p_{\xi,\,\eta}(x,y) \ne p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$.

Построим график F_ξ.



Построим график F_η.



$\square$

Задание 2. *Найти распределения с.в. ζ и ν. Найти $E(\zeta)$, $E(\nu)$, $D(\zeta)$, $D(\nu)$. Построить графики функций распределения $F_\zeta(z)$, $F_\nu(n)$.*

Решение. $\zeta = -\xi^3 - 1 => supp\,\zeta = [-126,\,-2]$

Найдем функцию распределения F_ζ и плотность распределения p_ζ.

$$F_\zeta(z) = P(\zeta < z) = P(-\xi^3 - 1 < z) = P\Big(\xi > \sqrt[3]{-z-1}\Big) = 1 - P\Big(\xi \le \sqrt[3]{-z-1}\Big)$$

$$F_\zeta(z) = \begin{cases} 0, \ \ z \le -126 \\ 1 + \frac{(\sqrt[3]{-z-1})^2 - 10(\sqrt[3]{-z-1}) + 9}{16}, \ \ z \in (-126,\,-2] \\ 1, \ \ z > -2 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ \ z \le -126 \\ \frac{(\sqrt[3]{-z-1})^2 - 10(\sqrt[3]{-z-1}) + 25}{16}, \ \ z \in (-126,\,-2] \\ 1, \ \ z > -2 \end{cases}$$

Вычислим p_ζ:

$$\left(\frac{(\sqrt[3]{-z-1})^2-10(\sqrt[3]{-z-1}+25}{16}\right)'=\frac{1}{16}\left((\sqrt[3]{-z-1})^2-10(\sqrt[3]{-z-1})+25\right)'=\frac{1}{16}\left(\frac{10}{3(\sqrt[3]{-z-1})^2}-\frac{2}{3(\sqrt[3]{-z-1})}\right)$$

$$p_\zeta(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{10}{3(\sqrt[3]{-z-1})^2}-\dfrac{2}{3(\sqrt[3]{-z-1})}\right),\ z\in[-126,\,-2]\\ 0,\ else\end{cases}$$

Вычислим мат. ожидание ζ:

$$E(\zeta)=\int\limits_{\mathbb{R}} z\cdot p_\zeta(z)\,dz=\int\limits_{-126}^{-2} z\cdot\frac{1}{16}\left(\frac{10}{3(\sqrt[3]{-z-1})^2}-\frac{2}{3(\sqrt[3]{-z-1})}\right)dz=\frac{1}{24}\int\limits_{-126}^{-2} z\cdot\left(\frac{5}{(\sqrt[3]{z+1})^2}+\frac{1}{(\sqrt[3]{z+1})}\right)dz$$

Сделаем замену $u=z+1$ и подставим в интеграл:

$$\frac{1}{24}\int u^{2/3}+5\cdot\sqrt[3]{u}-\frac{1}{\sqrt[3]{u}}-\frac{5}{u^{2/3}}\,du=\frac{1}{24}\left(\frac{3\cdot u^{5/3}}{5}+\frac{15\cdot u^{4/3}}{4}-\frac{3\cdot u^{2/3}}{2}-15\cdot\sqrt[3]{u}\right)$$

Сделаем обратную замену и найдем определенный интеграл:

$$-\frac{4\,(-z-1)^{\frac{5}{3}}-25\,(-z-1)^{\frac{4}{3}}+10\,(-z-1)^{\frac{2}{3}}-100\sqrt[3]{-z-1}}{160}\Bigg|_{-126}^{-2}$$

$$E(\zeta)=-\frac{102}{5}$$

Вычислим дисперсию ζ:

$$D(\zeta)=E(\zeta^2)-E(\zeta)^2$$

$$E(\zeta^2)=\int\limits_{\mathbb{R}} z^2\cdot p_\zeta(z)\,dz=\int\limits_{-126}^{-2} z^2\cdot\frac{1}{16}\left(\frac{10}{3(\sqrt[3]{-z-1})^2}-\frac{2}{3(\sqrt[3]{-z-1})}\right)dz=\frac{1}{24}\int\limits_{-126}^{-2} z^2\cdot\left(\frac{5}{(\sqrt[3]{z+1})^2}+\frac{1}{(\sqrt[3]{z+1})}\right)dz$$

Сделаем замену $u=z+1$ и подставим в интеграл:

$$\frac{1}{24}\int u^{5/3}+5\cdot u^{4/3}-2\cdot u^{2/3}-10\cdot\sqrt[3]{u}+\frac{1}{\sqrt[3]{u}}+\frac{5}{u^{2/3}}\,du=\frac{1}{24}\left(\frac{3\cdot u^{8/3}}{8}+\frac{15\cdot u^{7/3}}{7}-\frac{6\cdot u^{5/3}}{5}-\frac{15\cdot u^{4/3}}{2}-\frac{3\cdot u^{3/2}}{2}+15\cdot\sqrt[3]{u}\right)$$

Сделаем обратную замену и найдем определенный интеграл:

$$\frac{\sqrt[3]{-z-1}\left(-200z^2+300z+35\,(-z-1)^{\frac{7}{3}}+112\,(-z-1)^{\frac{4}{3}}+140\sqrt[3]{-z-1}-900\right)}{2240}\Bigg|_{-126}^{-2}$$

$$E(\zeta^2)=\frac{31908}{35}$$

$$D(\zeta)=\frac{31908}{35}-(-\frac{102}{5})^2=\frac{86712}{175}=495.4971$$

$\nu=[4\eta] => supp\,\nu=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$
Найдем функцию распределения F_ν и плотность распределения p_ν.

$$F_\nu(n)=P(\nu<n)=P([4\eta]<n)=P(\eta<n/4)$$

Если n $\in[0,15]$, $P(\nu=n)=P([4\eta]=n)=P\left(\eta\in\left[\frac{n}{4},\frac{n+1}{4}\right]\right)=F_\eta\left(\frac{n+1}{4}\right)-F_\eta\left(\frac{n}{4}\right)=$

$$= \frac{(\dfrac{n+1}{4})^2}{16} - \frac{(\dfrac{n}{4})^2}{16} = \frac{2n+1}{256}$$

При $n = 16$

$$P(\nu = 16) = P([4\eta] = 16) = P\left(\eta \in \left[4, \frac{17}{4}\right]\right) = F_\eta\left(\frac{17}{4}\right) - F_\eta(4) = 1 - 1 = 0$$

ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p_i	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{256}$	$\frac{5}{256}$	$\frac{7}{256}$	$\frac{9}{256}$	$\frac{11}{256}$	$\frac{13}{256}$	$\frac{15}{256}$	$\frac{17}{256}$	$\frac{19}{256}$	$\frac{21}{256}$	$\frac{23}{256}$	$\frac{25}{256}$	$\frac{27}{256}$	$\frac{29}{256}$	$\frac{31}{256}$	0

$$F_\nu(n) = \begin{cases} 0, \ n \le 0 \\ \frac{1}{256}, \ n \in (0,1] \\ \frac{4}{256}, \ n \in (1,2] \\ \frac{9}{256}, \ n \in (2,3] \\ \frac{16}{256}, \ n \in (3,4] \\ \frac{25}{256}, \ n \in (4,5] \\ \frac{36}{256}, \ n \in (5,6] \\ \frac{49}{256}, \ n \in (6,7] \\ \frac{64}{256}, \ n \in (7,8] \\ \frac{81}{256}, \ n \in (8,9] \\ \frac{100}{256}, \ n \in (9,10] \\ \frac{121}{256}, \ n \in (10,11] \\ \frac{144}{256}, \ n \in (11,12] \\ \frac{169}{256}, \ n \in (12,13] \\ \frac{196}{256}, \ n \in (13,14] \\ \frac{225}{256}, \ n \in (14,15] \\ 1, \ n > 15 \end{cases}$$

Вычислим мат. ожидание ν:

$$E(\nu) = \sum_{i=0}^{16} a_i \cdot p_i = 0 \cdot \frac{1}{256} + 1 \cdot \frac{3}{256} + 2 \cdot \frac{5}{256} + 3\frac{7}{256} + 4 \cdot \frac{9}{256} + 5 \cdot \frac{11}{256} + 6 \cdot \frac{13}{256} + 7 \cdot \frac{15}{256} + 8 \cdot \frac{17}{256} + 9 \cdot \frac{19}{256} + 10 \cdot \frac{21}{256} + 11 \cdot \frac{23}{256} +$$

$$+12 \cdot \frac{25}{256} + 13 \cdot \frac{27}{256} + 14 \cdot \frac{29}{256} + 15 \cdot \frac{31}{256} + 16 \cdot 0 = \frac{325}{32}$$

Вычислим дисперсию $D(\nu)$:

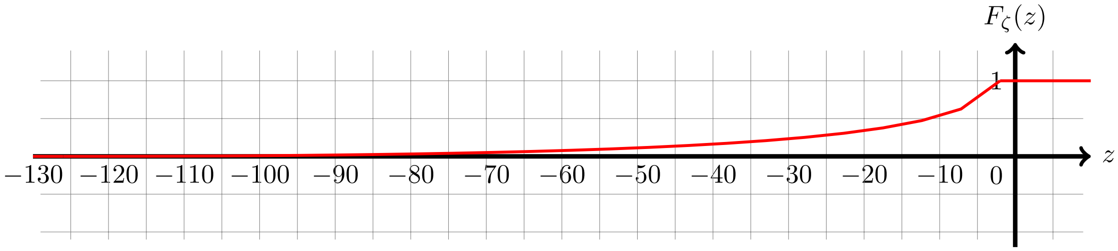
$$D(\nu) = E(\nu^2) - E(\nu)^2$$

$$E(\nu^2) = \sum_{i=0}^{16} a_i^2 \cdot p_i = 0^2 \cdot \frac{1}{256} + 1^2 \cdot \frac{3}{256} + 2^2 \cdot \frac{5}{256} + 3^2\frac{7}{256} + 4^2 \cdot \frac{9}{256} + 5^2 \cdot \frac{11}{256} + 6^2 \cdot \frac{13}{256} + 7^2 \cdot \frac{15}{256} + 8^2 \cdot \frac{17}{256} + 9^2 \cdot \frac{19}{256} +$$

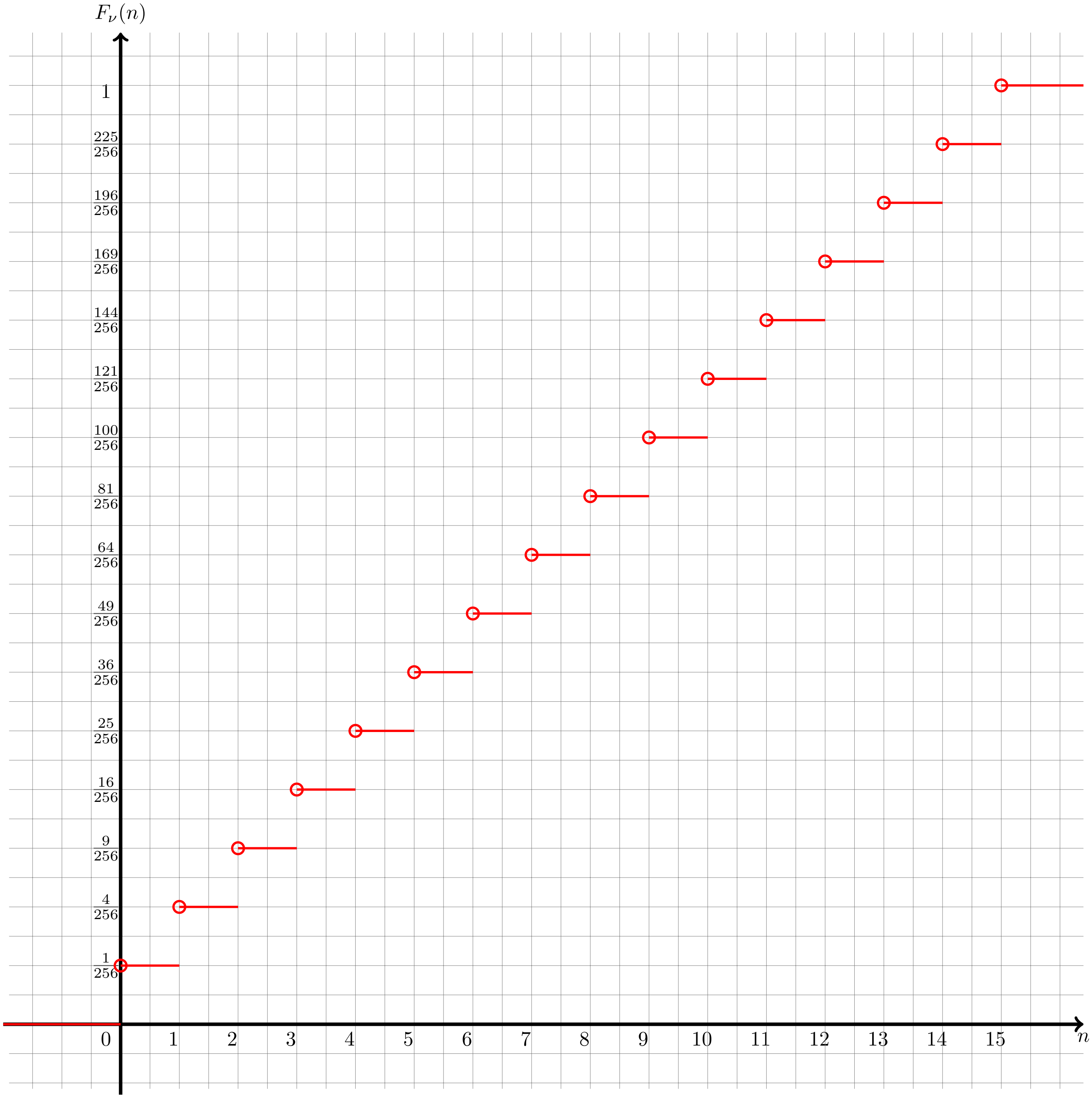
$$10^2 \cdot \frac{21}{256} + 11^2 \cdot \frac{23}{256} + 12^2 \cdot \frac{25}{256} + 13^2 \cdot \frac{27}{256} + 14^2 \cdot \frac{29}{256} + 15^2 \cdot \frac{31}{256} + 16^2 \cdot 0 = \frac{3755}{32}$$

$$D(\nu) = \frac{3755}{32} - \left(\frac{325}{32}\right)^2 = 14.1943$$

Построим график функции распределения $F_\zeta(z)$.



Построим график функции распределения $F_\nu(n)$.
График построен на следующей странице.



$\square$

Задание 3. *Вычислить вектор мат. ожиданий и ковариационные характеристики вектора (ξ, η). Найти условное распределение ξ при условии η; $E(\xi|\eta)$, $D(\xi|\eta)$. Построить матрицу корреляции R.*

Решение. Вектор мат. ожиданий вектора (ξ, η) - $E\binom{\xi}{\eta} = (E(\xi), E(\eta))^T$.

Вычислим $E(\xi)$.

$$E(\xi) = \int\limits_R x\, p_\xi(x)\; dx = \int\limits_1^5 x \cdot \frac{5-x}{8}\, dx = -\frac{x^2 \cdot (2x-15)}{48}\Bigg|_1^5 = \frac{7}{3}$$

Вычислим $E(\eta)$.

$$E(\eta) = \int\limits_R y\, p_\eta(y)\; dy = \int\limits_0^4 y \cdot \frac{y}{8}\, dy = \frac{y^3}{24}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{3}$$

$$E\binom{\xi}{\eta} = (E(\xi),\, E(\eta))^T = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)^T$$

.

Ковариация $cov(\xi,\eta) = E(\xi,\eta) - E(\xi)E(\eta)$

$$E(\xi,\eta) = \iint\limits_{R^2} x \cdot y \cdot p_{\xi,\eta}(x,y)\; dxdy = \iint\limits_{R^2} \frac{1}{8} x \cdot y\; dxdy = \int\limits_1^5 dx \int\limits_{x-1}^4 \frac{1}{8} x \cdot y\; dy = \frac{20}{3}$$

$$cov(\xi,\eta) = \frac{20}{3} - \frac{7}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{20 \cdot 3 - 56}{9} = \frac{4}{9}$$

Вычислим дисперсии $D(\xi)$ и $D(\eta)$:

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2$$

$$E(\xi^2) = \int\limits_R x^2\, p_\xi(x)\; dx = \int\limits_1^5 x^2 \cdot \frac{5-x}{8}\, dx = -\frac{x^3 \cdot (3x-20)}{96}\Bigg|_1^5 = \frac{19}{3}$$

$$D(\xi) = \frac{19}{3} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{19 \cdot 3 - 49}{9} = \frac{8}{9}$$

$$D(\eta) = E(\eta^2) - E(\eta)^2$$

$$E(\eta^2) = \int\limits_R y^2\, p_\eta(y)\; dy = \int\limits_0^4 y^2 \cdot \frac{y}{8}\, dy = \frac{y^4}{32}\Bigg|_0^4 = 8$$

$$D(\eta) = 8 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8 \cdot 9 - 64}{9} = \frac{8}{9}$$

Матрица ковариаций.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} cov(\xi,\xi) & cov(\xi,\eta) \\ cov(\eta,\xi) & cov(\eta,\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(\xi) & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & D(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

Вычислим $p_{\xi|\eta}$.

$$p_{\xi|\eta}(x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y_0)}{p_\eta(y_0)}$$

$$p_{\xi|\eta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{y_0}{8}}, \ (x, y_0) \in D \\ 0, \ else \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{y_0}, \ (x, y_0) \in D \\ 0, \ else \end{cases}$$

Вычислим $E(\xi|\eta)$.

$$E(\xi|\eta) = \int\limits_R x \, p_{\xi|\eta}(x) \, dx = \int\limits_1^{y_0+1} x \cdot \frac{1}{y_0} \, dx = \frac{y_0 + 2}{2}$$

Вычислим дисперсию $D(\xi|\eta)$:

$$D(\xi|\eta) = E(\xi^2|\eta) - E(\xi|\eta)^2$$

$$E(\xi^2|\eta) = \int\limits_R x^2 \, p_{\xi|\eta}(x) \, dx = \int\limits_1^{y_0+1} x^2 \cdot \frac{1}{y_0} \, dx = \frac{y_0^2 + 3y_0 + 3}{3}$$

$$D(\xi|\eta) = \frac{y_0^2 + 3y_0 + 3}{3} - \left(\frac{y_0 + 2}{2} \right)^2 = \frac{y_0^2}{12}$$

Корреляция $\rho(\xi, \eta) = \dfrac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D(\xi) \, D(\eta)}} = \dfrac{\frac{4}{9}}{\sqrt{\frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9}}} = \dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{9}} = \dfrac{1}{2}$.

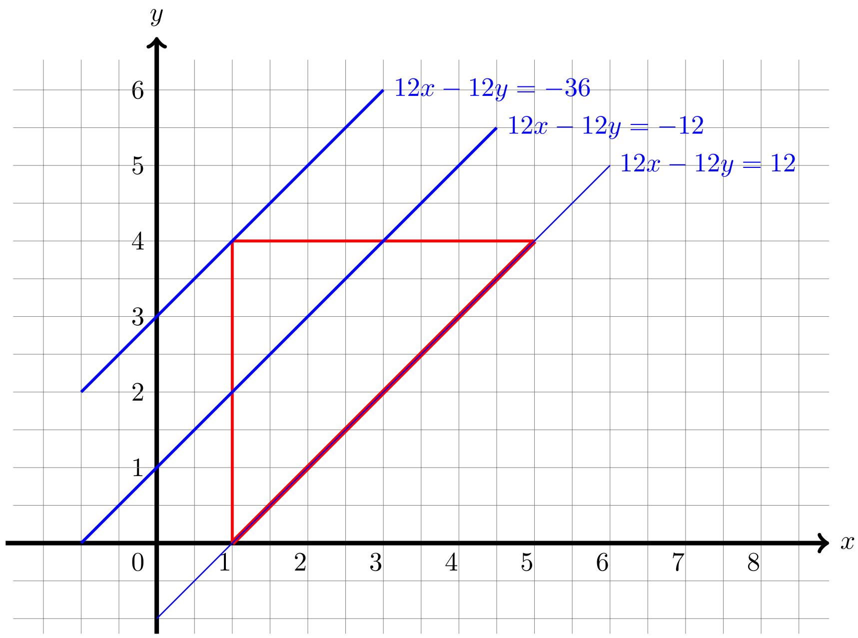
Матрица корреляции $R = \begin{pmatrix} \rho(\xi, \xi) & \rho(\xi, \eta) \\ \rho(\eta, \xi) & \rho(\eta, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{cov(\xi, \xi)}{\sqrt{D(\xi) \, D(\xi)}} & \rho(\xi, \eta) \\ \rho(\eta, \xi) & \dfrac{cov(\eta, \eta)}{\sqrt{D(\eta) \, D(\eta)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{D(\xi)}{D(\xi)} & \rho(\xi, \eta) \\ \rho(\eta, \xi) & \dfrac{D(\eta)}{D(\eta)} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & \rho(\xi, \eta) \\ \rho(\eta, \xi) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. □

Задание 4. *Найти распределение μ, $E(\mu)$ и $D(\mu)$. Построить график функции распределения $F_\mu(m)$.*

Решение. $\mu = 12\xi - 12\eta \Rightarrow supp \ \mu = [-36, 12]$

Найдем функцию распределения F_μ и плотность распределения p_μ.



$m \in [-36, 12]$, $F_\mu(m) = P(\mu < m) = P(12\xi - 12\eta < m)$

$$P(12\xi - 12\eta < m) = \int_1^{\frac{m+48}{12}} dx \int_{\frac{12x-m}{12}}^4 p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = \int_1^{\frac{m+48}{12}} dx \int_{\frac{12x-m}{12}}^4 \frac{1}{8} dy = \int_1^{\frac{m+48}{12}} \frac{m}{96} - \frac{x}{8} + \frac{1}{2} dx =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{16} + x\left(\frac{m}{96} + \frac{1}{2}\right)\right)\Bigg|_1^{\frac{m+48}{12}} = \frac{(m+36)^2}{2304}$$

$$F_\mu(m) = \frac{(m+36)^2}{2304}$$

$$F_\mu(m) = \begin{cases} 0, \ m \le -36 \\ \dfrac{(m+36)^2}{2304}, \ m \in (-36, 12] \\ 1, \ m > 12 \end{cases}$$

$$p_\mu(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{1152} + \dfrac{1}{32}, \ m \in [-36, 12] \\ 0, \ else \end{cases}$$

Вычислим мат. ожидание $E(\mu)$.

$$E(\mu) = \int\limits_R m\,p_\mu(m)\,dm = \int\limits_{-36}^{12} m\left(\frac{m}{1152} + \frac{1}{32}\right) dm = \frac{m^2 \cdot (m+54)}{3456}\Bigg|_{-36}^{12} = -4$$

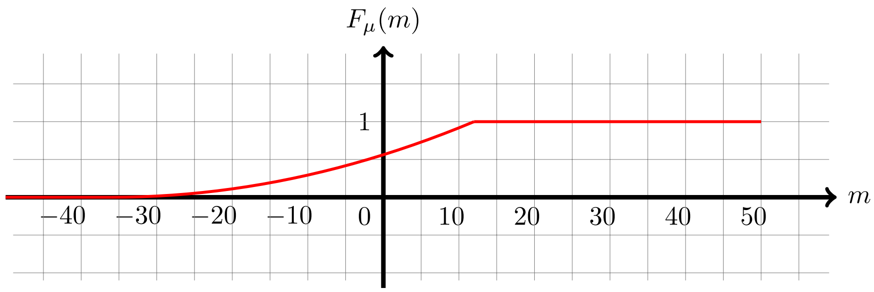
Вычислим дисперсию $D(\mu)$.

$$D(\mu) = E(\mu^2) - E(\mu)^2$$

$$E(\mu^2) = \int\limits_R m^2\, p_\mu(m)\, dm = \int\limits_{-36}^{12} m^2 \left(\frac{m}{1152} + \frac{1}{32} \right) dm = \frac{m^3 \cdot (m+48)}{4608} \Bigg|_{-36}^{12} = 144$$

$$D(\mu) = E(\mu^2) - E(\mu)^2 = 144 - (-4)^2 = 128$$

Построим график функции распределения $F_\mu(m)$.



$\square$