Primena fazi logike u obradi slika

Jelena Mrdak, mi15021
Tijana Jevtić

1. januar 2019

Sadržaj

1 FCM

Fuzzy C-means (FCM) je jedan od najpopularnijih algoritama za fazi klasterovanje. U ovom poglavlju ćemo ga najpre detaljno opisati, a zatim ćemo ga iskoristiti za binarizaciju slike.

Cilj ovog algoritma je da skup $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ particioniše na k delova (klastera) po nekom kriterijumu. Preciznije, kriterijum je minimizacija sledeće funkcije:

$$F(X, \bar{w}, \bar{c}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} w_{ij}^m \left\| x_i - c_j \right\|^2,$$

gde $w_{ij} \in [0, 1]$ predstavlja pripadnost tačke x_i j-tom klasteru i $\sum_{j=1}^{k} w_{ij} = 1$, dok je c_j centroid j-tog klastera. Parametar m predstavlja faktor fazifikacije i on se zadaje unapred. U nastavku ćemo preciznije odrediti ove koeficijente. Sada ćemo samo ukratko opisati korake algoritma.

FCM je veoma sličan algoritmu k-means i sastoji se iz sledećih koraka:

- Izabrati broj klastera k.
- Svakoj tački x_i dodeliti koeficijente $w_{ij} \in [0, 1], j = 1, 2, ..., k$.
- Ponavljati sve dok ne dođe do konvergencije:
  - Izračunati centroide za svaki klaster.
  - Ažurirati koeficijente.
- Tačku x_i dodeliti klasteru kom najviše pripada, tj. r-tom klasteru, gde je $w_{ir} = \max_j w_{ij}$.

Teorema 1.1. *Funkcija $F(X, \bar{w}, \bar{c})$ dostiže minimum za:*

$$c_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_{ij}^m \cdot x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_{ij}^m} \tag{1}$$

i

$$w_{ij} = \frac{1}{\sum\limits_{u=1}^{k} \left(\frac{\|x_i - c_j\|}{\|x_i - c_u\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \tag{2}$$

Dokaz. Kako treba odrediti ekstremum funkcije uz ograničenje, koristićemo Lagranžove množioce. Odredićemo ekstremum sledeće funkcije:

$$J(X, \bar{w}, \bar{c}, \bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} w_{ij}^m \|x_i - c_j\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{k} w_{ij} - 1 \Big).$$

Potrebno je zadovoljiti sledeće uslove:

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 0, 1 \le j \le k \tag{3}$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}} = 0, 1 \le i \le n, 1 \le j \le k \tag{4}$$

Rešavanjem (3) dobijamo (1). Iz (4) imamo

$$m w_{ij}^{m-1} \|x_i - c_j\|^2 - \lambda_i = 0,$$

odnosno

$$w_{ij} = \left(\frac{\lambda_i}{m \|x_i - c_j\|^2} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \tag{5}$$

Koristeći početni uslov

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{u=1}^{k} w_{iu} \\
&= \sum_{u=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i}{m \|x_i - c_u\|^2} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\
&= \sum_{u=1}^{k} \left(\frac{m \|x_i - c_u\|^2}{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{1-m}} \\
&= \sum_{u=1}^{k} \frac{(m \|x_i - c_u\|^2)^{\frac{1}{1-m}}}{\lambda_i^{\frac{1}{1-m}}} \\
&= \frac{1}{\lambda_i^{\frac{1}{1-m}}} \sum_{u=1}^{k} (m \|x_i - c_u\|^2)^{\frac{1}{1-m}},
\end{aligned}$$

zaključujemo da je

$$\lambda_i = \left(\sum_{u=1}^{k} (m \left\| x_i - c_u \right\|^2)^{\frac{1}{1-m}} \right)^{1-m}.$$

Konačno, zamenjujući poslednju jednakost u (5), dobijamo (2). Ovime smo dokazali da se ekstremum dostiže za date vrednosti. Dokaz da je u pitanju minimum ćemo ovde preskočiti. $\square$