Primena fazi logike u obradi slika

Jelena Mrdak, mi15021
Tijana Jevtić

5. januar 2019

Sadržaj

1 FCM

Fuzzy C-means (FCM) je jedan od najpopularnijih algoritama za fazi klasterovanje. U ovom poglavlju ćemo ga najpre detaljno opisati, a zatim ćemo ga iskoristiti za binarizaciju slike.

Cilj ovog algoritma je da skup $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ particioniše na k delova (klastera) po nekom kriterijumu. Preciznije, kriterijum je minimizacija sledeće funkcije:

$$F(\bar{w}, \bar{c}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} w_{ij}^{m} \left\| x_i - c_j \right\|^2 ,$$

gde $w_{ij} \in [0, 1]$ predstavlja pripadnost tačke x_i j-tom klasteru i $\sum_{j=1}^{k} w_{ij} = 1$, dok je c_j centroid j-tog klastera. Realni parametar $m > 1$ predstavlja faktor fazifikacije i on se zadaje unapred. U nastavku ćemo preciznije odrediti ove koeficijente. Sada ćemo samo ukratko opisati korake algoritma.

FCM je veoma sličan algoritmu k-means i sastoji se iz sledećih koraka:

- Izabrati broj klastera k.
- Svakoj tački x_i dodeliti koeficijente $w_{ij} \in [0, 1], j = 1, 2, ..., k$.
- Ponavljati sve dok ne dođe do konvergencije:
  - Izračunati centroide za svaki klaster.
  - Ažurirati koeficijente.

- Tačku x_i dodeliti klasteru kom najviše pripada, tj. r-tom klasteru, gde je $w_{ir} = \max\limits_{j} w_{ij}$.

Teorema 1.1. *Potrebni uslovi za minimizator* $(\bar{w}^*, \bar{c}^*)$ *funkcije* $F(\bar{w}, \bar{c})$ *su:*

$$c_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_{ij}^m \cdot x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_{ij}^m} \tag{1}$$

i

$$w_{ij} = \frac{1}{\sum\limits_{u=1}^{k} \left(\frac{\|x_i - c_j\|}{\|x_i - c_u\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \tag{2}$$

Dokaz. Pronaći ćemo potencijalne tačke lokalnih uslovnih ekstremuma. Koristićemo Lagranževe množioce. Posmatraćemo pomoćnu funkciju:

$$J(\bar{w}, \bar{c}, \bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} w_{ij}^m \|x_i - c_j\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{k} w_{ij} - 1 \right).$$

Tačke koje tražimo moraju da zadovoljavaju uslov $\nabla J = \mathbf{0}$. Dakle,

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 0, 1 \leq j \leq k \tag{3}$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}} = 0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k \tag{4}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_i} = 0, 1 \leq i \leq n \tag{5}$$

Rešavanjem (3) dobijamo (1). Iz (4) imamo

$$m w_{ij}^{m-1} \|x_i - c_j\|^2 - \lambda_i = 0,$$

odnosno

$$w_{ij} = \left(\frac{\lambda_i}{m \|x_i - c_j\|^2} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \tag{6}$$

Iz (5) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{u=1}^{k} w_{iu} \\
&= \sum_{u=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i}{m \left\| x_i - c_u \right\|^2} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\
&= \sum_{u=1}^{k} \left(\frac{m \left\| x_i - c_u \right\|^2}{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{1-m}} \\
&= \sum_{u=1}^{k} \frac{(m \left\| x_i - c_u \right\|^2)^{\frac{1}{1-m}}}{\lambda_i^{\frac{1}{1-m}}} \\
&= \frac{1}{\lambda_i^{\frac{1}{1-m}}} \sum_{u=1}^{k} (m \left\| x_i - c_u \right\|^2)^{\frac{1}{1-m}},
\end{aligned}
$$

pa zaključujemo da je

$$
\lambda_i = \left(\sum_{u=1}^{k} (m \left\| x_i - c_u \right\|^2)^{\frac{1}{1-m}} \right)^{1-m}.
$$

Konačno, zamenjujući poslednju jednakost u (6), dobijamo (2). □

FCM algoritam za određivanje minimizatora funkcije F je iteracija kroz potrebne uslove.

1.1 Binarizacija slike

Ispod je prikazan kod za binarizaciju slike koji koristi FCM algoritam. Napominjemo da se zbog čitljivosti koda u ovom delu nismo odlučili za efikasnu implementaciju. O tome će biti više reči u narednoj sekciji.

```
#include <iostream>
#include <opencv2/highgui/highgui.hpp>

int main(int argc, const char *argv[])
{
  if (argc != 2) {
    std::cerr << "Usage: ./binarization path_to_img" << std::endl;
    return 1;
  }

  // read image
  cv::Mat img = cv::imread(argv[1], cv::IMREAD_GRAYSCALE);
  cv::Mat img_binary = cv::Mat(img.rows, img.cols, CV_8UC1,
   ↪ cv::Scalar(255));
```

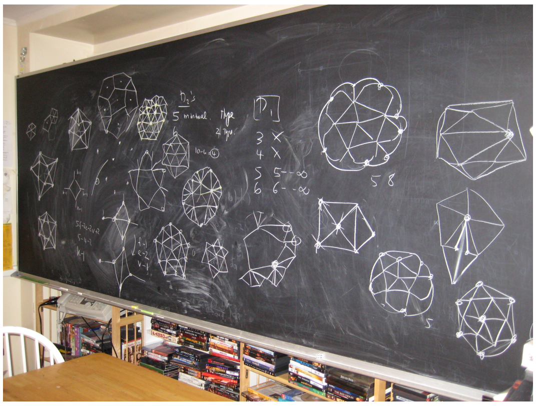
```
// weights
std::vector<std::vector<float>> w1(img.rows,
 ↪  std::vector<float>(img.cols, 0));
std::vector<std::vector<float>> w2(img.rows,
 ↪  std::vector<float>(img.cols, 0));
// fuzzification factor
double m = 2;
// centroids
std::pair<float, float> c;

// init weights
for (int i = 0; i < img.rows; i++) {
  for (int j = 0; j < img.cols; j++) {
    w1[i][j] = img.at<unsigned char>(i,j)/255.0;
    w2[i][j] = 1 - w1[i][j];
  }
}

// stopping criteria
float eps = 0;

do {
  // calculate centroids
  std::pair<float, float> c1_fraction{0,0};
  std::pair<float, float> c2_fraction{0,0};

  for (int i = 0; i < img.rows; i++) {
    for (int j = 0; j < img.cols; j++) {
      c1_fraction.first += std::pow(w1[i][j], m)*img.at<unsigned
       ↪  char>(i,j);
      c1_fraction.second += std::pow(w1[i][j], m);
      c2_fraction.first += std::pow(w2[i][j], m)*img.at<unsigned
       ↪  char>(i,j);
      c2_fraction.second += std::pow(w2[i][j], m);
    }
  }

  auto old_c = c;
  c = {c1_fraction.first/c1_fraction.second,
   ↪  c2_fraction.first/c2_fraction.second};
  eps = (old_c.first-c.first)*(old_c.first-c.first) +
   ↪  (old_c.second-c.second)*(old_c.second-c.second);

  // update weights
  for (int i = 0; i < img.rows; i++) {
```

```
      for (int j = 0; j < img.cols; j++) {
        float d1 = std::abs(img.at<unsigned char>(i,j)-c.first);
        float d2 = std::abs(img.at<unsigned char>(i,j)-c.second);
        w1[i][j] = 1/(std::pow(d1/d1, 2/(m-1)) + std::pow(d1/d2, 2/(m-1)));
        w2[i][j] = 1/(std::pow(d2/d1, 2/(m-1)) + std::pow(d2/d2, 2/(m-1)));
      }
    }

  } while(eps > 1);

  // cluster pixels based on weights
  for (int i = 0; i < img_binary.rows; i++) {
    for (int j = 0; j < img_binary.cols; j++) {
      img_binary.at<unsigned char>(i,j) = (w1[i][j] > w2[i][j]) ? 255 : 0;
    }
  }

  // show and save binary image
  namedWindow("Display window", cv::WINDOW_AUTOSIZE);
  imshow("Display window", img_binary);
  cv::waitKey(0);
  imwrite("fcm.png", img_binary);

    return 0;
}
```

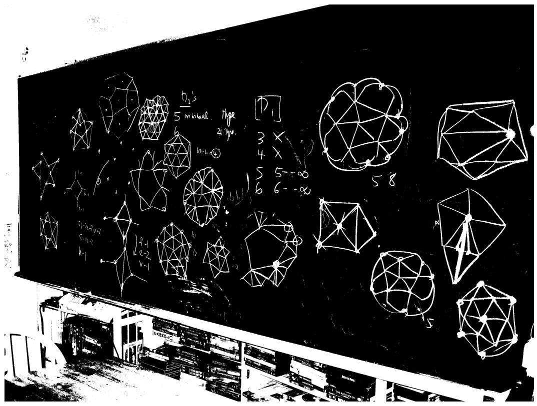
Rezultat izvršavanja algoritma je prikazan ispod.

Slika 1: input

Slika 2: output



Slika 3: input



Slika 4: output

1.2 FCM i k-means

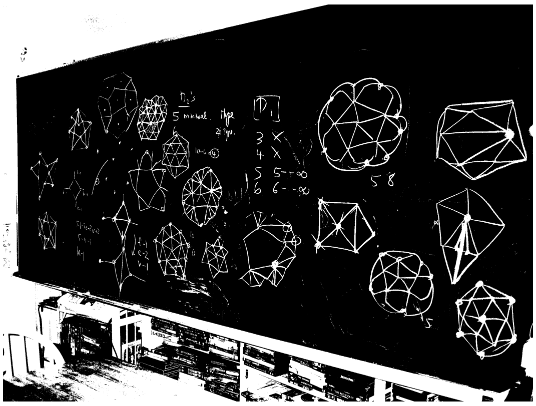
U ovom odeljku ćemo uporediti rezultate algoritama FCM i k-means, kao i vremena njihovih izvršavanja.

Napomena 1.1. Koristićemo efikasniju implementaciju FCM algoritma od one date u sekciji 1.1.

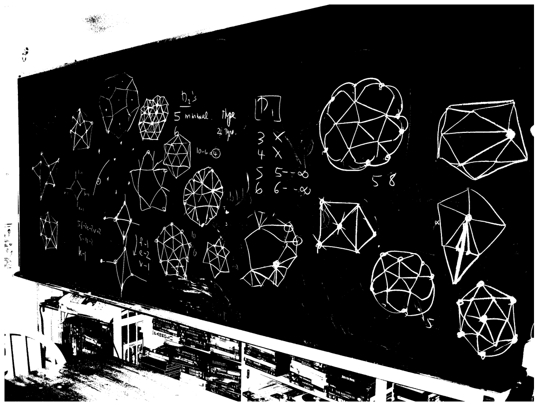
Na sledećim slikama su prikazani rezultati.

Slika 5: FCM output
Broj iteracija: 7

Slika 6: k-means output
Broj iteracija: 6



Slika 7: FCM output
Broj iteracija: 7



Slika 8: k-means output
Broj iteracija: 7

Možemo primetiti da su slike 5 i 6 identične, dok se slike 7 i 8 neznatno razlikuju. Međutim, vremena izvršavanja se primetno razlikuju. U Tabeli 1 su prikazana vremena (u sekundama) potrebna da algoritmi obrade Sliku 1 500, 1000 i 1500 puta. Slično, u Tabeli 2 su prikazana vremena potrebna da se obradi Slika 3 50, 100 i 150 puta.

broj izvršavanja	FCM	k-means
500	4	21
1000	8	42
1500	12	63

Tabela 1: Input Slika 1

broj izvršavanja	FCM	k-means
50	8	44
100	17	89
150	25	133

Tabela 2: Input Slika 3

Prikazaćemo još dva testa urađena na dve nove slike.

broj izvršavanja	FCM	k-means
100	15	119
150	22	179
200	31	238

Tabela 3:

broj izvršavanja	FCM	k-means
1000	3	36
1500	5	53
2000	6	71

Tabela 4:

Na osnovu podataka iz tabela, zaključujemo:

test	k-means/FCM
1	5
2	5
3	8
4	12

Tabela 5: Koliko puta je FCM brži od k-means

Treba napomenuti da su ovi rezultati okvirni, jer u velikoj meri zavise od implementacije samih algoritama. Naime, za centoride u k-means algoritmu je korišćen celobrojni tip

(int), dok je centroide u FCM algoritmu korišćen realni tip (float). U oba slučaja su se algoritmi zaustavljali kad je promena u centroidima bila manja od jedan. Dakle, već tu može doći do razlike u broju iteracija. Međutim, i dalje očekujemo da će FCM biti brži od k-means.
Takođe, ističemo da FCM koristi više memorije nego k-means.