

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Termodinamika berkembang pesat pada pertengahan abad ke-19 melalui kontribusi tokoh seperti Carnot, Joule, Clausius, dan Kelvin, yang membangun kerangka teoritis untuk menjelaskan perilaku makroskopik sistem fisik. Sementara itu, teori kinetik gas dan konsep entropi yang dikembangkan oleh Boltzmann menghubungkan dinamika molekul dengan entropi, membentuk dasar bagi lahirnya mekanika statistik. Disiplin ini tidak hanya menjelaskan keteraturan makroskopik, tetapi juga fluktuasi spontan yang terjadi secara alami dalam sistem fisik (Pathria, 2001). Fenomena seperti pendidihan, penyebaran cahaya, dan dinamika biologis bergantung pada fluktuasi tersebut. Dengan demikian, mekanika statistik dan termodinamika bersama-sama menyediakan dasar teoritis untuk memahami kestabilan maupun ketidakstabilan struktural dalam sistem kompleks (Chandler, 1987)

Penelitian mengenai sifat termodinamik material magnetik telah menjadi inti dari fisika materi terkondensasi selama beberapa dekade, tidak hanya karena kekayaan fenomena fisika yang ditawarkannya, tetapi juga karena potensi aplikasinya dalam teknologi, mulai dari penyimpanan data hingga material komputasi. Pemahaman mendalam tentang bagaimana interaksi mikroskopis spin (momen magnetik) memengaruhi perilaku makroskopis suatu sistem saat terpapar perubahan suhu atau medan magnet adalah tujuan utama dari studi ini. Model-model teoretis, seperti model Ising, Heisenberg, dan Potts, telah terbukti sangat efektif dalam menyederhanakan kompleksitas interaksi multi-partikel, memungkinkan analisis fundamental tentang transisi fasa magnetik dan sifat-sifat kritis (Heine et al., 2021)

Transisi fasa sendiri merupakan salah satu aspek paling menarik dalam fisika statistik, di mana perubahan parameter makroskopis seperti suhu atau tekanan dapat memicu perubahan drastis pada struktur dan sifat kolektif suatu sistem, misalnya dari fase paramagnetik (tidak ada order magnetik) ke feromagnetik (order magnetik jarak jauh) pada material magnetik ataupun sebaliknya. Studi tentang transisi fasa tidak hanya mengungkap sifat-sifat fundamental materi, tetapi juga memberikan wawasan tentang universalitas perilaku sistem di dekat titik kritis, terlepas dari detail mikroskopisnya. (Tokura et al., 2019)

Secara umum, transisi fasa berkaitan dengan fenomena kerusakan simetri sistem. Untuk perubahan fase yang disebabkan oleh fluktuasi termal, sistem berada pada derajat tinggi pada temperatur tinggi karena semua ruang konfigurasi dibolehkan. Penurunan suhu akan mengurangi fluktuasi termal dan mengakibatkan sifat berada pada keadaan stabil. (Surungan dan Okabe, 2012)

Salah satu fenomena yang penting dalam perubahan fase adalah terjadinya magnetisasi spontan. Pada sistem feromagnet, ketika suhu diturunkan hingga mencapai temperatur tertentu yang disebut temperatur kritis maka akan terjadi

magnetisasi spontan. Sistem mengalami perubahan fase dari sistem paramagnetic menjadi sistem feromagnetik. Temperatur kritis T_c untuk sistem feromagnet dinamakan temperatur Curie. Fenomena ini sangat menarik untuk dikaji karena melibatkan interaksi spin, yaitu faktor mikroskopik.

Ernest Ising (1925) memperkenalkan model yang dapat menjelaskan fenomena magnetisasi spontan dari sistem feromagnetik (FM). Model Ising merupakan bentuk sederhana dari model Heisenberg untuk menyelesaikan model yang diusulkan oleh Lenz (1920) dalam mempelajari perubahan fase FM pada temperatur Curie. Model ini berisi tentang variable diskrit yang menyajikan momen magnetik dari spin atom yang bernilai $s = +/ - 1$. Spin tersebut dimodelkan dalam sebuah kisi, dimana setiap spin dapat berinteraksi dengan spin terdekatnya (nearest-neighbors). Model Ising kisi 2D adalah salah satu contoh model statistik sederhana untuk menunjukkan magnetisasi spontan pada suatu sistem.

Dalam studi ini akan dikaji model spin kubik, yaitu salah satu dari model spin diskret degna simetri polyhedral. Simetri polyhedral untuk model spin diperoleh dengan membagi sama besar sudut ruang 4π dari struktur bola (*sphere*). Ada lima kemungkinan tipe model dari struktur *polyhedral* yang dapat diperoleh yaitu: *tetrahedron*, *octahedron*, *hexahedron*, *icosahedron*, dan *dodecahedron*. Spin tersebut dimodelkan dalam suatu kisi yang saling berinteraksi seperti halnya dengan model Ising. Dengan menggunakan metode simulasi Monte Carlo, dapat dihitung parameter keteraturan (order parameter) dan memperkirakan temperatur kritis dari setiap model. Untuk penelitian ini, dikhususkan untuk mempelajari model vertex-cubic spin.

Pada penelitian sebelumnya (Surungan dan Okabe, 2008) ditelaah sistem FM pada kisi 2D, dan penelitian lainnya (Sutiono, 2013) menelaah sistem dengan struktur kisi berbeda, yaitu kisi berlapis (3D). Sistem dengan dimensi ruang yang lebih besar secara teoretik diharapkan akan memiliki temperatur kritis yang lebih tinggi karena jumlah tetangga dari masing-masing spin lebih banyak

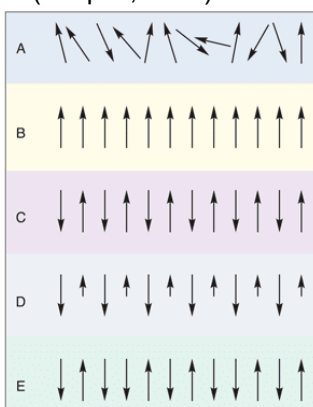
Penelitian ini secara khusus berfokus pada studi sifat termodinamika model magnetik dengan model vertex-cubic spin yang tersusun pada kisi berukuran $L \times L \times n$. Interaksi spin didefinisikan melalui produk skalar vektor spin, mirip dengan model Heisenberg yang didiskritisasi pada 8 orientasi vertex-cubic. Penelitian ini bertujuan untuk menyelidiki bagaimana transisi fasa, magnetisasi, dan sifat-sifat termodinamik lainnya seperti panas jenis, terpengaruh oleh topologi kisi dan potensi frustrasi yang ditimbulkannya. Hasilnya diharapkan dapat memberikan pemahaman lebih lanjut tentang perilaku magnetik yang tidak hanya memperkaya teori fisika statistik tetapi juga berpotensi relevan untuk pengembangan material magnetik fungsional baru di masa depan.

1.2 Teori

1.2.1 Fenomena Magnetik

Fenomena magnetik merupakan dasar dalam fisika benda terkondensasi, yang timbul dari momen magnetik atomik atau elektron. Fenomena ini mengategorikan material berdasarkan responsnya terhadap medan magnet eksternal dan orde

magnetik intrinsiknya. Paramagnetisme muncul pada material dengan elektron tidak berpasangan yang momen magnetiknya sejajar lemah dengan medan eksternal tetapi menjadi acak saat medan dihilangkan, tanpa orde jarak jauh. Sebaliknya, diamagnetisme adalah penolakan lemah terhadap medan magnet, yang ada pada semua material karena gerakan orbital elektron. Fenomena magnetik kooperatif yang paling banyak dipelajari meliputi feromagnetisme, yang ditandai oleh orde jarak jauh spontan dari momen magnetik di bawah suhu kritis (suhu Curie), menghasilkan sifat magnetik yang kuat. Antiferomagnetisme melibatkan penyelarasan momen magnetik anti-paralel pada situs-situs yang berdekatan, menghasilkan tidak ada magnetisasi makroskopik total, sedangkan ferrimagnetisme adalah varian di mana momen anti-paralel tidak sama, menghasilkan momen magnetik total. Pemahaman tentang keadaan magnetik fundamental ini sangat penting untuk menganalisis sistem magnetik yang lebih kompleks (Scepa, 2016).



Gambar 1. Klasifikasi Magnetik

(a)Paramagnetisme, (b) Feromagnetisme, (c) Anti-Feromagnetisme,
(d) Ferrimagnetisme, (e) enforced magnetism

Sumber: (Scepa, 2016)

1.2.2 Perubahan Fase

Fase adalah sebuah keadaan suatu materi dimana sifat unsur penyusunannya seragam. Contoh sederhana misalnya es, air dan uap air yang masing-masing adalah fase dari air (H_2O). Fase ditentukan oleh fungsi termodinamika, yaitu fungsi energi bebas. Fungsi termodinamika adalah fungsi dari beberapa parameter makroskopik seperti suhu dan tekanan sehingga fase unsur mikroskopis ditentukan oleh nilai parameter tersebut. Fase dapat dikarakterisasi oleh kuantitas fisik yang bervariasi. Salah satunya adalah parameter order, yang mengukur bagaimana elemen mikroskopik membuat fase makroskopik berada pada keadaan yang seragam. Parameter order berhubungan dengan kerusakan simetri dari sistem yang mengukur derajat dari asimetri dalam fase kerusakan (Nishimori & Ortiz, 2011).

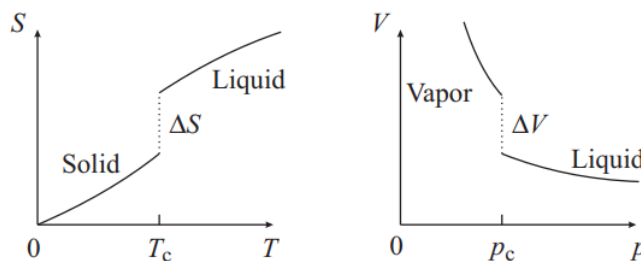
Perubahan fase adalah fenomena di mana suatu zat berubah dengan cepat dari satu keadaan termodinamika ke keadaan lain, yang disebabkan oleh perubahan parameter sistem seperti suhu, tekanan dan magnetisasi. Perubahan fase dapat disebabkan oleh fluktuasi termal dan non-termal. Namun kebanyakan yang terjadi di alam disebabkan oleh fluktuasi termal dan terjadi pada temperatur tertentu. Tipe

transisi ini biasanya disebut sebagai perubahan fase klasik (Surungan & Okabe, 2017).

Berdasarkan sifat fungsi energi bebas, fase transisi dapat dibagi menjadi dua jenis yaitu perubahan fase orde pertama (FO) dan orde kedua (SO). Pada transisi FO, turunan pertama fungsi energi bebas bersifat *discontinuous*, sedangkan pada transisi SO bersifat *continuous*. Oleh karena itu, transisi SO disebut juga fase transisi *continuous*.

1.2.2.1 Perubahan Fase Orde Pertama

Perubahan fase tersebut dapat dijelaskan secara teoritis dengan adanya diskontinuitas atau singularitas dalam fungsi yang menggambarkan sifat fisik makroskopis. Sifat-sifat ini, seperti entropi (S), volume (V), dan panas spesifik (C), dapat mewakili diskontinuitas (perubahan mendadak), puncak tajam, atau perbedaan pada titik transisi. Contoh pencairan es menunjukkan bahwa panas laten harus ditambahkan ke sistem, yang menyebabkan entropi meningkat dengan cepat. Demikian pula, ketika air mendidih menjadi uap, volume air berubah secara terputus-putus. Dalam fisika, transisi fase muncul dari persaingan antara energi internal (E) suatu sistem dan entropinya (S). Kedua kuantitas ini menentukan energi bebas sistem ($F = E - TS$). Energi (E) mendorong keteraturan dalam suatu sistem, sedangkan entropi (S) mendorong ketidakteraturan. Mengingat nilai variabel eksternal seperti suhu (T), kedua faktor ini memainkan peran utama dalam mengubah fase suatu sistem.



Gambar 2. Perubahan Fase Orde Pertama

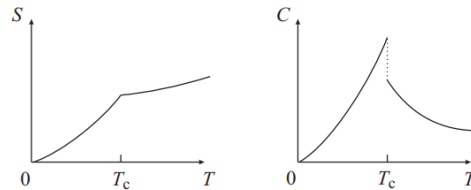
Sumber: (Nishimori & Ortiz, 2011)

Perubahan fase secara umum dikelompokkan berdasarkan sejauh mana sifat-sifat fisika menunjukkan diskontinuitas. Jika turunan pertama dari energi bebas F mengalami diskontinuitas, itu adalah transisi orde pertama. Sebaliknya, jika diskontinuitas atau divergensi baru muncul pada turunan orde kedua atau lebih tinggi dari energi bebas, transisi tersebut disebut kontinu atau orde kedua. Contoh transisi orde pertama adalah perubahan es menjadi air, yang melibatkan kalor laten dan perubahan mendadak pada entropi ($\Delta S > 0$), karena entropi adalah turunan pertama dari energi bebas ($S = -(\partial F / \partial T)_V$).

1.2.2.2 Perubahan Fase Orde Kedua

Perubahan fase orde kedua ditandai oleh entropi yang kontinu tetapi diskontinuitas pada kalor jenis C , yang merupakan turunan dari entropi. Pada banyak transisi orde kedua, kalor jenis akan menunjukkan divergensi pada suhu transisi. Contohnya

termasuk transisi λ pada helium-4 cair (menjadi superfluida) dan transisi paramagnetik-feromagnetik pada material magnetik. Uniknya, transisi Kosterlitz-Thouless pada sistem berdimensi ruang rendah adalah kasus di mana semua turunan energi bebas kontinu, namun energi bebas tetap memiliki singularitas esensial secara matematis.



Gambar 3. Perubahan Fase Orde Kedua

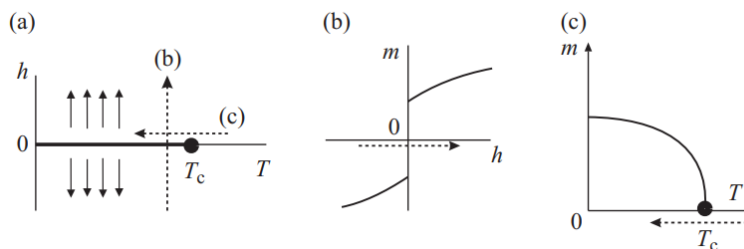
Sumber: (Nishimori & Ortiz, 2011)

Dari perspektif mekanika statistik, termodinamika berasal dari energi bebas, yang ditentukan oleh fungsi partisi Z . Fungsi partisi ini didefinisikan sebagai,

$$Z = e^{-F/k_B T} = \text{Tr} e^{-H/k_B T} \quad (1.1)$$

melibatkan konstanta Boltzmann (k_B) dan Tr (trace) mewakili jumlah dari semua derajat kebebasan yang masuk ke dalam Hamiltonian H dari sistem yang diteliti. Karena Z adalah jumlah eksponensial dari $-H/k_B T$, non-analitisitas energi bebas (yaitu, singularitas yang mendefinisikan transisi fasa) hanya dapat terjadi dalam batas termodinamika, di mana volume sistem (V) dan jumlah derajat kebebasan (N , seperti spin magnetik) menjadi tak terbatas, dengan rasio N/V tetap konstan.

Material dapat menunjukkan transisi orde pertama maupun orde kedua tergantung pada kondisinya. Sebagai ilustrasi, diagram fasa material magnetik dalam medan magnet eksternal h menunjukkan bahwa jika suhu (T) di bawah suhu kritis (T_c), magnetisasi (m) akan berubah secara tiba-tiba dari negatif ke positif saat medan magnet eksternal h dipindai dari arah negatif ke positif; ini merupakan transisi orde pertama.



Gambar 4. Perubahan Fase Magnetik

(a) diagram fasa material magnetik, (b) transisi fasa orde pertama,
(c) transisi fasa orde kedua

Sumber: (Nishimori & Ortiz, 2011)

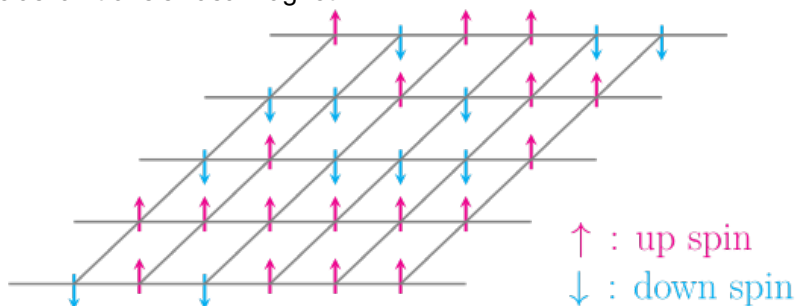
Pada $T < T_c$, bahkan saat medan eksternal mendekati nol dari arah positif ($h \rightarrow 0+$), magnetisasi hingga m masih tetap ada. Ini disebut magnetisasi spontan, yang merupakan parameter orde. Namun, jika suhu di atas T_c ($T > T_c$), magnetisasi berubah mulus pada $h = 0$ tanpa singularitas. Jika medan eksternal dijaga sangat

kecil ($h = 0 +$) dan suhu diturunkan melewati T_c , magnetisasi spontan akan berubah secara kontinu dari nol ke nilai positif, yang mengindikasikan transisi orde kedua (Nishimori dan Ortiz, 2011).

1.2.3 Model Magnetik

Perlu diketahui bahwa dalam model magnetik, spin merupakan momen magnet yang timbul akibat rotasi elektron. Dengan kata lain, model-model spin yang dikaji dalam studi ini merepresentasikan banyaknya kemungkinan cara elektron berotasi. Terdapat beberapa model spin fundamental yang sering digunakan:

- a. **Model Ising:** Ini adalah model spin paling sederhana, di mana setiap spin hanya dapat mengambil dua orientasi diskrit, biasanya direpresentasikan sebagai "atas" (+1) atau "bawah" (-1) sepanjang satu sumbu tertentu. Interaksi hanya terjadi antara spin-spin tetangga terdekat, dan energi sistem bergantung pada orientasi relatif spin-spin tersebut. Meskipun sederhana, Model Ising mampu menjelaskan transisi fasa magnetik.



Gambar 5. Ilustrasi spin pada Model Ising

Sumber:

- b. **Model Heisenberg:** Model ini merupakan generalisasi yang lebih realistis, di mana setiap spin direpresentasikan sebagai vektor tiga dimensi yang dapat menunjuk ke arah mana pun dalam ruang. Interaksi antar spin dalam Model Heisenberg didefinisikan oleh produk skalar dari vektor spin tetangga ($S_i \cdot S_j$). Hal ini menunjukkan bahwa energi minimum tercapai ketika spin-spin sejajar (interaksi feromagnetik) atau anti-sejajar (interaksi antiferomagnetik). Model Heisenberg inilah yang menjadi dasar bagi penelitian ini, di mana spin dibatasi pada 8 orientasi diskrit yang sesuai dengan simpul kubik, namun esensi interaksi vektornya tetap dipertahankan.
- c. **Model Potts:** Sebagai generalisasi dari Model Ising, Model Potts memungkinkan setiap spin untuk mengambil q keadaan diskrit yang berbeda, di mana $q \geq 2$. Jika $q = 2$, Model Potts identik dengan Model Ising. Keadaan-keadaan ini tidak selalu memiliki interpretasi spasial langsung sebagai arah, melainkan sebagai "jenis" atau "warna". Interaksi biasanya hanya terjadi jika spin tetangga berada dalam keadaan yang sama. Model Potts sangat serbaguna dan digunakan tidak hanya dalam magnetisme tetapi juga dalam pemodelan fenomena transisi fasa lainnya seperti pada kristal cair atau segregasi fasa.

Tabel 1. Perbandingan Model Spin Magnetik

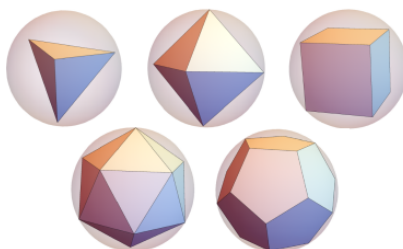
Fitur	Model Ising	Model Heisenberg	Model Potts
Orientasi Spin	Dua keadaan diskrit (+1 atau -1)	Vektor 3D (arah kontinu)	q keadaan diskrit ($q \geq 2$)
Interaksi	Antar tetangga terdekat	Produk skalar vektor spin tetangga	Spin tetangga dalam keadaan yang sama
Dimensi	Dapat diterapkan pada berbagai dimensi	Dapat diterapkan pada berbagai dimensi	Dapat diterapkan pada berbagai dimensi
Aplikasi	Feromagnetisme, transisi fasa	Sistem magnetik, titik kritis, transisi fasa	Magnetisme, transisi fasa, kristal cair, dll.
Kompleksitas	Relatif sederhana	Lebih kompleks dari Ising	Generalisasi dari Ising

1.2.4 The Platonic Solids

The Platonic Solids merujuk pada lima *polyhedral* cembung beraturan dalam tiga dimensi: tetrahedron, oktahedron, kubus, ikosahedron, dan dodekahedron. Masing-masing bentuk ini memiliki wajah yang identik, simpul dengan sudut yang sama, serta susunan sisi yang seragam. Secara matematis, hanya lima bentuk seperti itu yang memungkinkan, menjadikannya sebagai struktur geometris yang unik dan terdefinisi sempurna oleh simetri.

Salah satu ciri menarik dari *The Platonic Solids* adalah hubungan dualitasnya. Untuk setiap solid, dapat dibentuk versi “dual” dengan menempatkan simpul pada pusat setiap wajah. Misalnya, oktahedron adalah dual dari kubus, dan sebaliknya. Tetrahedron bersifat istimewa karena merupakan dual dari dirinya sendiri. Hubungan ini memperlihatkan keteraturan struktural yang sangat tinggi dan menjadikannya relevan dalam konteks geometri murni maupun fisika teoritis.

Dalam sistem fisika tiga dimensi, arah-arrah yang ditentukan oleh simpul dari *The Platonic Solids* tersebar secara merata di permukaan bola. Hal ini membuatnya ideal sebagai referensi arah dalam pengukuran atau pemodelan spasial. Simetri dan distribusi merata dari arah-arrah tersebut memungkinkan aplikasi dalam berbagai skenario eksperimen, termasuk penyusunan perangkat kuantum yang membutuhkan orientasi yang homogen dan terkontrol.

**Gambar 6.** Ilustrasi spin pada Model Ising

Sumber: (Ertaş et al., 2014)

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah :

1. Menganalisis pengaruh ukuran kisi terhadap perilaku termodinamika model spin *vertex*-kubik, khususnya dalam hal panas jenis, magnetisasi, energi internal, dan rasio momen magnetik.
2. Meneliti efek jumlah lapisan terhadap transisi fasa dalam sistem kisi berlapis, serta melihat sejauh mana penambahan lapisan mengubah sifat kritis sistem.
3. Mengidentifikasi karakteristik suhu kritis T_c dari sistem spin diskrit dengan simetri kubik, dan bagaimana T_c bergantung pada ukuran dan ketebalan sistem.
4. Menyelidiki kestabilan orde magnetik dalam sistem berlapis dengan memanfaatkan indikator numerik seperti magnetisasi kuadrat rata-rata dan rasio momen magnetik.
5. Menyediakan dasar komputasional yang relevan untuk memahami sistem nyata berdimensi menengah, seperti struktur berlapis.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai sifat-sifat termodinamik dari model magnetik kubik pada kisi kuasi tiga dimensi. Melalui pendekatan simulasi numerik dan analisis teoritis, diharapkan agar hasil penelitian ini dapat menjadi acuan penting dalam pengembangan teori medan efektif dan aplikasi material magnetik dalam teknologi canggih. Selain itu, penelitian ini diharapkan dapat menjadi dasar bagi studi lanjutan dalam fisika statistik dan material terstruktur secara kompleks.

BAB II

METODE PENELITIAN

2.1 Model Vertex-Cubic Spin

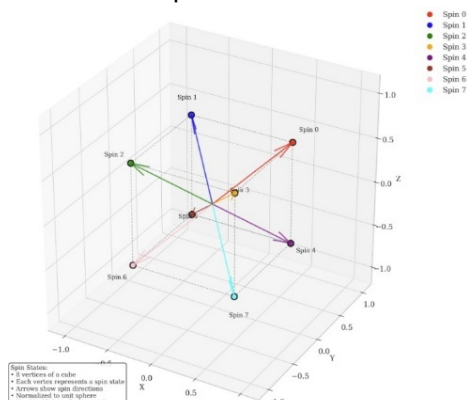
Kubik merupakan bagian dari simetri polihedral yang memiliki 8 titik sudut, 6 sisi, dan 12 rusuk. Model spin kubik adalah representasi diskrit dari orientasi spin dalam ruang tiga dimensi, di mana arah spin hanya dapat mengarah ke salah satu dari delapan simpul kubus. Simetri dari model ini mengikuti grup O_h , yaitu grup simetri kubus yang mencakup rotasi dan refleksi.

Tabel 2. Karakteristik Model Simetri Polyhedral. (Sumber: (Yunita et al., 2022))

Model	Vertices (Titik Sudut)	Faces (Sisi)	Edges (Rusuk)	Kelompok Simetri
Tetrahedron	4	4	6	S_4
Oktahedron	6	8	12	$O_h = S_4 \times C_2$
Kubik	8	6	12	O_h
Ikosahedron	12	20	30	$A_5 \times C_2$
Dodekahedron	20	12	30	$A_5 \times C_2$

Model spin ini merupakan penyederhanaan dari model Heisenberg dalam versi diskrit, di mana orientasi spin tidak kontinu, melainkan terbatas pada delapan arah tetap. Karena distribusi titik-titik pada permukaan bola satuan cukup merata dan simetris, model ini dapat menggambarkan sistem dengan anisotropi kubik, serta digunakan untuk menganalisis sistem magnetik dengan simetri ruang kubus.

Pemilihan model spin kubik relevan untuk mempelajari transisi fasa dan sifat kritis sistem tiga dimensi, terutama dalam kasus di mana pendekatan kontinu terlalu kompleks atau tidak sesuai secara fisik. Meskipun memiliki simetri yang lebih rendah dibandingkan dari beberapa model lain, model kubik sering digunakan karena kesederhanaannya dalam implementasi komputasi, dan tetap mampu menangkap aspek penting dari perilaku kolektif spin dalam sistem diskrit.



Gambar 7. Penomoran titik sudut (*vertices*) pada kubik

Sumber: (Ueda et al., 2017)

2.2 Hamiltonian Sistem

Energi total sistem (Hamiltonian) yang disimulasikan didefinisikan oleh interaksi antara spin-spin tetangga terdekat. Hamiltonian model ini adalah (Yunita et al., 2022):

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \quad (2.1)$$

di mana J adalah konstanta kopling (*coupling constant*), \vec{s}_i dan \vec{s}_j adalah vektor unit yang merepresentasikan orientasi spin pada situs i dan j , dan penjumlahan $\langle i,j \rangle$ dilakukan atas semua pasangan spin tetangga terdekat pada kisi. Dalam program ini, nilai J diasumsikan positif (ferromagnetik) dan seringkali diatur menjadi 1 untuk menyederhanakan perhitungan.

2.3 Model Kisi Berlapis

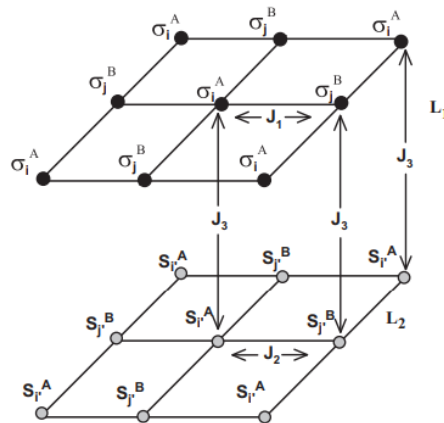
Model kisi berlapis merupakan generalisasi sistem dua dimensi (2D) menjadi sistem kuasi-tiga dimensi dengan menambahkan satu atau lebih lapisan yang tersusun paralel dalam arah ketiga (biasanya arah z). Dalam model ini, setiap lapisan tersusun dalam kisi dua dimensi, seperti persegi, dan terhubung secara vertikal melalui interaksi antarlapis. Pendekatan ini memungkinkan studi tentang pengaruh ketebalan sistem terhadap perilaku termodinamika, khususnya dalam konteks transisi fase dan fenomena kritis.

Kisi berlapis memainkan peran penting dalam memahami hubungan antara sistem dua dimensi dan tiga dimensi. Telah diketahui secara luas bahwa sistem dua dimensi, seperti model Ising klasik, tidak menunjukkan transisi orde pertama dalam rentang suhu tertentu tanpa domain, sedangkan sistem tiga dimensi memfasilitasi transisi yang lebih mendadak dan kompleks. Penggunaan struktur berlapis meningkatkan dimensionalitas sistem, memungkinkan transisi fase yang lebih robust, meskipun setiap lapisan mengalami dinamika dua dimensi secara independen.

Struktur berlapis telah dipelajari secara luas, terutama dalam konteks model Ising, Bloom-Kapell, dan Potts. Studi numerik menggunakan pendekatan seperti teori medan efektif (EFT), simulasi Monte Carlo, dan pendekatan renormalisasi telah menunjukkan bahwa jumlah lapisan secara langsung memengaruhi suhu kritis T_c dan intensitas fluktuasi energi. Sebagai contoh, (Ertaş et al., 2014) menemukan bahwa sistem Bloom-Kapell dua lapis dengan spin $3/2$ menunjukkan transisi fase yang lebih tajam daripada sistem satu lapis, dan bahwa kapasitas panas maksimum serta nilai akumulasi material pengikat bergeser ke suhu yang lebih tinggi seiring bertambahnya jumlah lapisan.

Model kisi berlapis juga menggambarkan struktur nyata dalam sistem material seperti film magnetik tipis, material dua dimensi berlapis-lapis seperti grafena, dan heterostruktur berlapis-lapis dalam sistem kuantum. Dalam konteks ini, pengaruh interaksi antarlapis menjadi krusial untuk memahami fenomena seperti anisotropi magnetik, medan spin, dan perilaku superkonduktor berlapis-lapis. Dengan demikian, pendekatan kisi berlapis memberikan dasar fisik dan komputasi yang kuat untuk mempelajari bagaimana perilaku sistem berubah seiring bertambahnya

ketebalan, membuka jalan untuk memahami transisi fase dalam sistem berdimensi menengah.



Gambar 8. Kisi Persegi Berlapis

2.4 Penyekalan Ukuran Berhingga

Percobaan pada sistem nyata dan perhitungan menarik seperti simulasi Monte Carlo menggunakan sistem berhingga. Dengan mengamati bagaimana kuantitas C, M, χ bervariasi untuk ukuran kisi yang berbeda, hal tersebut dimungkinkan untuk menghitung nilai eksponen kritis (Cardy, 1996)

Fungsi termodinamik secara umum merupakan besaran ekstensif yaitu besarnya bergantung pada ukuran sistem. Sifat ini memungkinkan penentuan temperatur dan eksponen kritis sistem melalui metode penyekalaan ukuran berhingga (Finite Size Scaling). Andaikan suatu fungsi termodinamik $f(L)$ bergantung pada ukuran sistem L sebagai berikut:

$$f(L) = Lg(L) \quad (2.2)$$

maka dapat ditunjukkan bahwa untuk sistem yang mengalami perubahan fase orde kedua, fungsi termodinamik $f(L)$ bersifat homogen tepat pada temperatur kritis; yang berarti bahwa $f(L_1) = f(L_2)$, dimana L_1 dan L_2 adalah dua ukuran berbeda dari sistem. Untuk perbandingan korelasi, fungsi penyelakaannya adalah sebagai berikut:

$$Q = f((T - T_c)L^\nu) \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) menunjukkan hubungan penyekalaan untuk besaran termodinamika Q di sekitar titik kritis. Di sini, T adalah temperatur sistem dan T_c adalah temperatur kritis tempat transisi fase orde kedua terjadi. L merepresentasikan ukuran karakteristik sistem, yang berperan penting dalam analisis ukuran terbatas, sementara ν adalah eksponen kritis yang mengatur bagaimana panjang korelasi dan besaran lainnya menyimpang di dekat T_c . Bentuk f adalah fungsi penyekalaan universal, yang menyiratkan bahwa data dari berbagai ukuran sistem dan temperatur akan "runtuh" ke dalam satu kurva ketika diplot terhadap argumen diskalakan $(T - T_c)L^\nu$

2.5 Deskripsi Program Komputasi

Penelitian ini menggunakan program komputasi yang dikembangkan secara khusus dalam bahasa pemrograman C untuk mensimulasikan sifat termodinamika model magnetik kubik pada kisi kuasi tiga dimensi. Program ini akan dikonfigurasi untuk kisi berukuran 8×8 dan akan dibandingkan hasilnya dengan kisi berukuran 16×16 , 24×24 , dan 32×32 untuk menganalisis efek ukuran sistem terhadap hasil simulasi.

Program ini dirancang untuk mensimulasikan perilaku sistem magnetik dengan spin berbentuk kubus (8 orientasi spin yang mungkin) pada kisi berlapis dua dimensi dengan kondisi batas periodik. Tujuan utamanya adalah untuk menghitung berbagai parameter termodinamika seperti energi, panas spesifik, dan parameter orde pada berbagai suhu untuk memahami transisi fase dan sifat-sifat kritis sistem.

2.5.1 Struktur dan Komponen Utama Program

Kode didalam file C terstruktur dengan beberapa fungsi utama yang saling berinteraksi untuk menjalankan simulasi Monte Carlo:

- main():** Fungsi utama yang menginisialisasi parameter simulasi (jumlah langkah Monte Carlo, rentang suhu), memanggil fungsi-fungsi inisialisasi, menjalankan loop simulasi suhu, dan mencetak hasil akhir.
- period():** Fungsi ini bertanggung jawab untuk menetapkan *Periodic Boundary Conditions* yang kita akan sebut dengan *PBC* untuk kisi dua dimensi. Ini memastikan bahwa spin di tepi kisi berinteraksi dengan spin di sisi berlawanan, mensimulasikan sistem tak terbatas.
- mset():** Mendefinisikan 8 orientasi spin yang mungkin, yang merepresentasikan simetri ikosahedron. Setiap orientasi spin direpresentasikan oleh vektor $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$ dalam ruang tiga dimensi.
- eset():** Menghitung energi interaksi (*coupling rule*) antara dua spin. Energi interaksi antara dua spin i dan j didefinisikan sebagai $E_{ij} = -(\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j)$, di mana \vec{m}_i dan \vec{m}_j adalah vektor orientasi spin.
- rset():** Menyiapkan tabel refleksi spin (rr). Fungsi ini penting untuk algoritma *Wolff*, di mana spin direfleksikan terhadap bidang tertentu untuk membentuk kluster (lampiran).
- spinset():** Menginisialisasi semua spin pada kisi ke orientasi awal tertentu (dalam kasus ini, semua spin diatur ke orientasi $isp[la] = 0$).
- sineset():** Melakukan pra-kalkulasi nilai sinus dan kosinus untuk setiap posisi kisi. Ini digunakan dalam perhitungan panjang korelasi dan parameter orde lainnya yang melibatkan komponen spasial.
- mc():** Fungsi ini mengimplementasikan loop utama simulasi Monte Carlo. Di dalamnya, program menjalankan sejumlah langkah ekuilibrasi (*nmcs1*) dan sejumlah langkah pengukuran (*nmcs2*). Program ini secara kondisional memanggil algoritma pembaruan spin, baik Metropolis (*metro()*) atau *Wolff* (*single_clus()*), berdasarkan definisi *#define update*. Dalam konfigurasi saat ini, algoritma Wolff yang digunakan.

- i. **metro()**: Mengimplementasikan algoritma Monte Carlo Metropolis. Dalam setiap langkah, sebuah spin dipilih secara acak, orientasinya diubah secara acak, dan perubahan diterima atau ditolak berdasarkan kriteria *Metropolis-Hastings* (perubahan energi dan probabilitas *Boltzmann*).
- j. **single_clus()**: Mengimplementasikan algoritma *Wolff Cluster Update*. Algoritma ini lebih efisien dalam mengatasi *critical slowing down* di dekat transisi fase. Ia bekerja dengan membangun kluster spin yang berorientasi paralel dan merefleksikannya secara bersamaan.
- k. **ranset() dan rnd()**: dua fungsi ini terletak dalam file berbeda dan dipanggil secara eksternal. Fungsi-fungsi ini adalah implementasi dari generator bilangan acak 32-bit. *ranset()* digunakan untuk menginisialisasi *seed* generator bilangan acak, sementara *rnd()* menghasilkan deret bilangan acak yang dibutuhkan untuk pemilihan spin, orientasi baru, dan keputusan probabilitas.

2.5.2 Parameter yang Diukur

Selama fase pengukuran, program mengumpulkan data untuk menghitung sifat-sifat termodinamika berikut:

- a. **Suhu (T)**: Variabel independen yang diubah selama simulasi. Suhu dikaitkan dengan parameter β melalui hubungan $1/\beta = kT^2$, di mana k adalah konstanta *Boltzmann*. Dalam konteks simulasi ini, k seringkali diatur menjadi 1.
- b. **Parameter Orde Kuadrat (M^2)**: Mengukur rata-rata kuadrat magnetisasi total sistem. Magnetisasi total (M) didefinisikan sebagai jumlah vektor spin pada seluruh kisi: $M = \sum_i \vec{s}_i$. Secara umum, $\langle M^2 \rangle$ dihitung sebagai:

$$\langle M^2 \rangle = \frac{1}{N_{mcs}} \sum_{k=1}^{N_{mcs}} \left(\sum_{i=1}^N \vec{s}_i^{(k)} \right)^2 \quad (2.4)$$

di mana N adalah jumlah spin pada kisi, dan N_{mcs} adalah jumlah langkah Monte Carlo untuk pengukuran.

- c. **Parameter Orde Pangkat Empat Rata-rata ($\langle M^4 \rangle$)**: Digunakan bersama dengan $\langle M^2 \rangle$ untuk menghitung *Binder Cumulant*, sebuah indikator kuat untuk transisi fase orde kedua, yang didefinisikan sebagai (Jufrin, 2015):

$$U_L = \frac{\langle M^4 \rangle}{\langle M^2 \rangle^2} \quad (2.5)$$

- d. **Parameter orde jarak menengah dan jarak jauh (fg_2, fg_4)**: Berdasarkan implementasi dalam kode, fg_2 berkaitan dengan korelasi antara spin yang terpisah sejauh setengah ukuran kisi ($L/2$) baik dalam arah x maupun y . Sementara itu, fg_4 berkaitan dengan korelasi pada jarak seperempat ukuran kisi ($L/4$). Pengukuran ini memberikan wawasan tentang bagaimana spin-spin saling berkorelasi pada jarak menengah hingga jauh dalam sistem, yang penting untuk memahami sifat-sifat kritis dan transisi fase. Output fg_2 dan fg_4 yang didapat akan digunakan untuk mencari rasio korelasi (Q_L) (Jufrin, 2015).

$$Q_L = \frac{g(L/2)}{g(L/4)} \quad (2.6)$$

- e. **Energi Rata-rata per Spin ($\langle E \rangle$):** Energi internal rata-rata sistem, dihitung sebagai rata-rata energi total sistem per spin. Energi total sistem (E) adalah jumlah interaksi antara semua pasangan spin tetangga:

$$E = \sum_{\langle i,j \rangle} E_{ij} = - \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \quad (2.7)$$

maka, energi rata-rata per spin adalah:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N \cdot N_{mcs}} \sum_{k=1}^{N_{mcs}} E^k \quad (2.8)$$

- f. **Panas jenis (c_v):** Mengukur fluktuasi energi sistem terhadap suhu. Panas spesifik pada volume konstan dapat dihitung dari fluktuasi energi internal menggunakan hubungan:

$$C_v = \frac{1}{k_B T^2} (\langle E \rangle^2 - \langle E^2 \rangle) \quad (2.9)$$

di mana $\langle E^2 \rangle$ adalah rata-rata kuadrat energi total. Puncak pada kurva panas spesifik seringkali mengindikasikan transisi fase.

- g. **Panjang Korelasi (ξ) (corr):** Mengukur sejauh mana orientasi spin saling berkorelasi. Pada titik transisi fase, panjang korelasi cenderung divergen. Dalam simulasi Monte Carlo, panjang korelasi dapat diestimasi dari fluktuasi magnetisasi atau dari fungsi korelasi spasial. Formula yang digunakan dalam kode:

$$\xi = \frac{1}{2 \sin \pi/L} \sqrt{\frac{\langle M^2 \rangle}{C_L}} \quad (2.10)$$

ini adalah estimasi panjang korelasi dari fluktuasi magnetisasi atau *susceptibility*.

2.6 Simulasi Monte Carlo

Simulasi komputer merupakan metode komputasi yang berperan penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan fisika, terutama sistem kompleks yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Metode ini memungkinkan eksplorasi dan analisis sistematis terhadap sifat-sifat fisika sistem. Selain itu, simulasi komputer bertindak sebagai eksperimen virtual, yang memungkinkan kita memahami respons atau perubahan sistem terhadap kondisi tertentu tanpa perlu eksperimen langsung. Dengan demikian, simulasi komputer menghubungkan teori dan eksperimen praktis.

Salah satu metode umum dalam menangani sistem fisika kompleks, seperti sistem multipartikel, adalah simulasi Monte Carlo. Metode ini menggunakan teknik pengambilan sampel statistik yang menggunakan bilangan acak untuk mengevaluasi perilaku sistem dalam konteks probabilitas. Bilangan acak yang digunakan dalam simulasi ini biasanya berupa bilangan pseudo-acak yang dihasilkan oleh algoritma komputer deterministik (Surungan, 2000).

Dalam mekanika statistik, besaran fisika suatu sistem dihitung dengan mencari nilai termal rata-rata dari berbagai konfigurasi mikro yang dapat terjadi pada suhu

tertentu. Karena itu, jika terdapat sejumlah M *microstates*, maka rerata termal dari suatu besaran Q dapat didefinisikan sebagai berikut (Surungan, 2000)

$$\langle Q \rangle_T \equiv \sum_{j=1}^M Q_j p_j, \quad (2.11)$$

dimana Q_j adalah besar nilai Q pada konfigurasi ke- j , sedangkan $j = 1, \dots, M$, misalnya untuk model Ising, $M = 2^N$ dan tanda $\langle \dots \rangle$ menyimbolkan rerata ensemble (majelis). p_j adalah probabilitas kemunculan konfigurasi ke- j tersebut dalam suatu sistem, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$p_j \equiv \frac{e^{-\beta E_j}}{Z}; \quad Z \equiv \sum_j e^{-\beta E_j} \quad (2.12)$$

dimana E_j adalah energi dari konfigurasi ke- j , yang dihitung menggunakan persamaan Hamiltonian. Z merupakan fungsi partisi, sedangkan $1/\beta = kT$, dengan k adalah tetapan Boltzmann dan T adalah variabel temperatur.

2.6.1 Algoritma Wolff

Dalam algoritma Wolff, satu langkah Monte Carlo (MCS) mencakup kunjungan secara berurutan maupun acak ke seluruh spin pada kisi, lalu memperbarui masing-masing spin menurut probabilitas tertentu. Inti metode Wolff adalah memproyeksikan spin planar ke suatu sumbu acak sehingga prosedur Kosterlitz–Thouless (KT) pada spin Ising bisa diterapkan. Transisi KT sendiri merupakan transisi orde-tinggi: energi dalam sistem tetap mulus hingga turunan ke- n . Transisi semacam ini muncul, misalnya, pada model XY yang memiliki grup simetri $O(2)$.

Algoritma Wolff memudahkan identifikasi sekelompok spin yang, setelah proyeksi, berperilaku seperti spin Ising dengan orientasi sama. Kelompok spin ini kemudian diperbarui serempak sesuai suhu menggunakan probabilitas $p = 1 - e^{-\beta \Delta E}$. Spin yang orientasinya tidak selaras dengan spin Ising tersebut akan diperbarui pada MCS berikutnya.

Pada konfigurasi awal (dipilih acak), kisi terpecah menjadi kluster-kluster tak berhubungan. Tiap kluster diperlakukan sebagai satu unit selama beberapa siklus pembaruan. Setelah satu MCS selesai, kita memperoleh konfigurasi spin baru; interaksi spin dikembalikan ke orientasi semula, dan proses diulang. Dalam praktiknya, pengukuran fisik biasanya dilakukan setelah sejumlah langkah Monte Carlo misalnya setiap 10 MCS untuk memperoleh data statistik yang andal (Surungan & Okabe, 2017).

Simulasi dibagi menjadi dua fase utama:

- a. **Fase Ekuilibrase (nmcs1):** Pada fase ini, sistem dibiarkan berevolusi selama sejumlah langkah Monte Carlo yang ditentukan (nmcs1) tanpa melakukan pengukuran. Tujuannya adalah untuk memastikan sistem mencapai keadaan setimbang termal pada suhu yang diberikan, sehingga konfigurasi awal tidak lagi memengaruhi hasil pengukuran.
- b. **Fase Pengukuran (nmcs2):** Setelah ekuilibrase, pengukuran sifat-sifat termodinamika dilakukan selama sejumlah langkah Monte Carlo tambahan

(nmcs2). Data yang dikumpulkan pada fase ini digunakan untuk menghitung nilai rata-rata termodinamika dan fluktuasinya.

Karena hasil observasi bersifat stokastik, pengukuran dilakukan dengan rata-rata ensemble dari banyak iterasi konfigurasi spin. Pendekatan ini sejalan dengan prinsip ergodik dalam statistika, yang menyatakan bahwa rata-rata waktu dapat digantikan oleh rata-rata ensemble.

2.7 Alat Penelitian

Alat yang digunakan pada penelitian, yaitu:

1. Laptop yang mempunyai sistem operasi Linux Ubuntu versi 6.11.0
2. Paket aplikasi compiler bahasa C (General Collection Compiler (GCC) dan GNUPLOT)

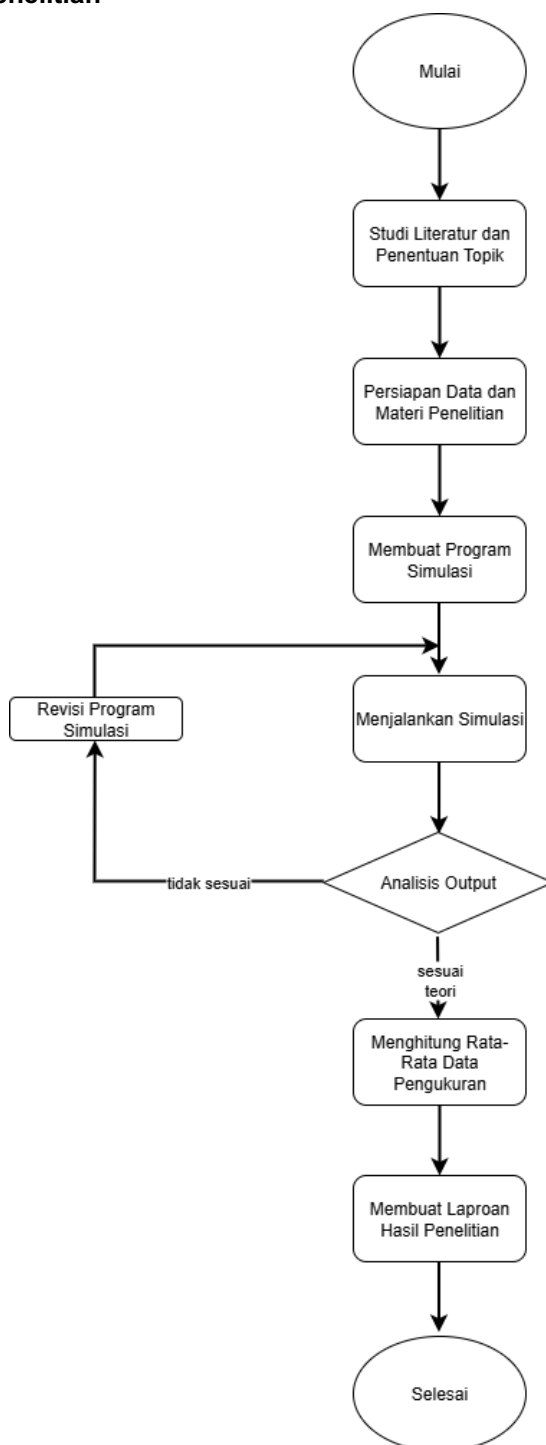
2.8 Prosedur Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode simulasi Monte Carlo dengan Algoritma Wolff, lazim disebut *single-cluster (spin update)*. Algoritma Wolff bekerja dengan pedoman memilih suatu spin secara acak dan kemudian membentuk satu kluster, dengan pengujian ikatan yang berdekatan. Jumlah langkah yang diambil disebut *mcs* (*Monte Carlo Step*) tergantung pada kecepatan sistem mencapai keseimbangan. Masing-masing titik data diperoleh dari rerata jumlah *mcs*

Simulasi akan dijalankan melalui langkah-langkah berikut :

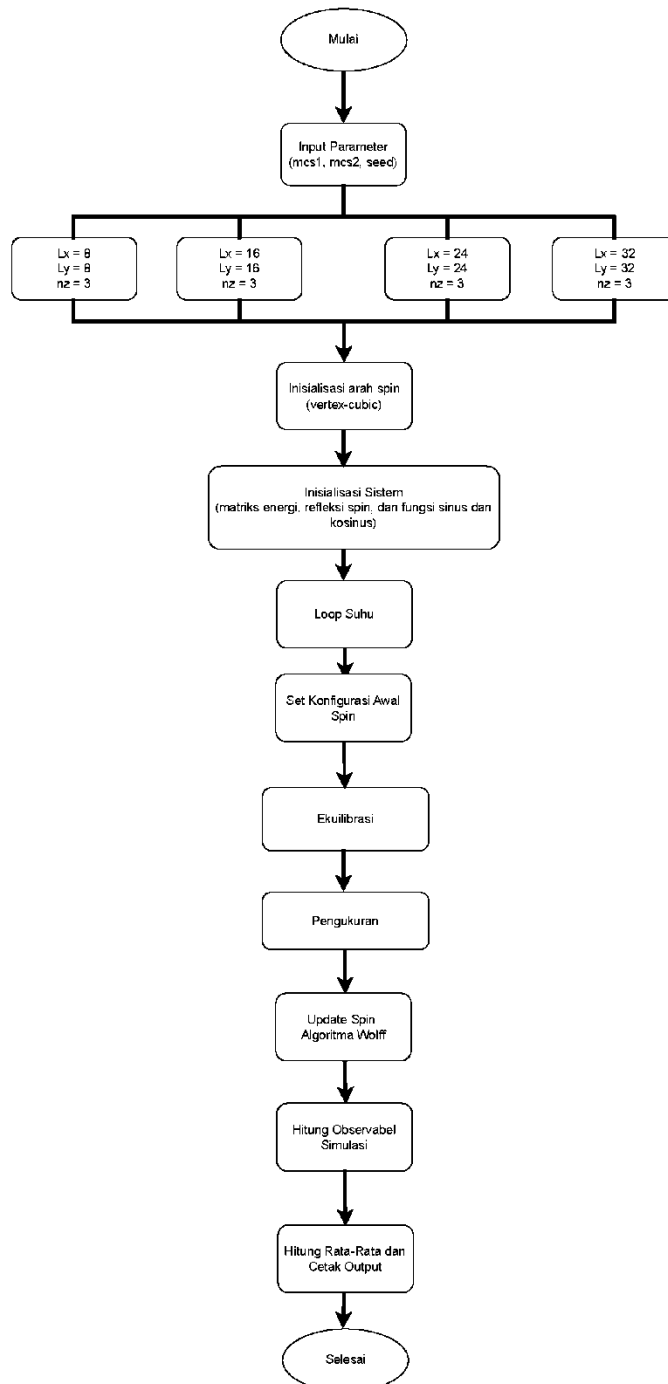
1. Membaca parameter input (ekuilibrisasi, pengukuran, dan seed)
2. Menginisialisasi generator bilangan acak khusus.
3. Menentukan dimensi panjang dan lebar untuk membangun kisi dua dimensi berlapis.
4. Menetapkan kondisi batas periodik dan hubungan antar tetangga terdekat.
5. Mengatur 8 orientasi spin kubik.
6. Membuat matriks energi interaksi antar spin.
7. Membentuk tabel transformasi refleksi spin.
8. Menetapkan temperatur awal dan perubahan temperatur (t dan Δt).
9. Menginisialisasi konfigurasi awal spin secara seragam.
10. Mengeksekusi proses ekuilibrisasi atau pemanasan sebanyak *step* yang ditentukan agar sistem dalam keadaan setimbang
11. Memperbaharui orientasi spin dengan sistem *cluster* pada titik kisi yang dipilih secara acak berdasarkan probabilitas $p = 1 - e^{-\beta \Delta E}$
12. Mengeksekusi proses pengukuran dengan langkah yang sama seperti proses ekuilibrisasi
13. Menghitung observabel seperti magnetisasi, energi dalam, korelasi orde jarak jauh dan menengah, dsb.
14. Mengulang langkah (9) hingga (13) untuk setiap temperatur.
15. Menghitung dan mengakumulasi rata-rata dari setiap output yang telah diatur dalam program simulasi.
16. Mencetak rata-rata hasil observasi.

2.9 Bagan Alir Penelitian



Gambar 9. Bagan Alir Penelitian

2.10 Bagan Alir Simulasi



Gambar 10. Bagan Alir Simulasi

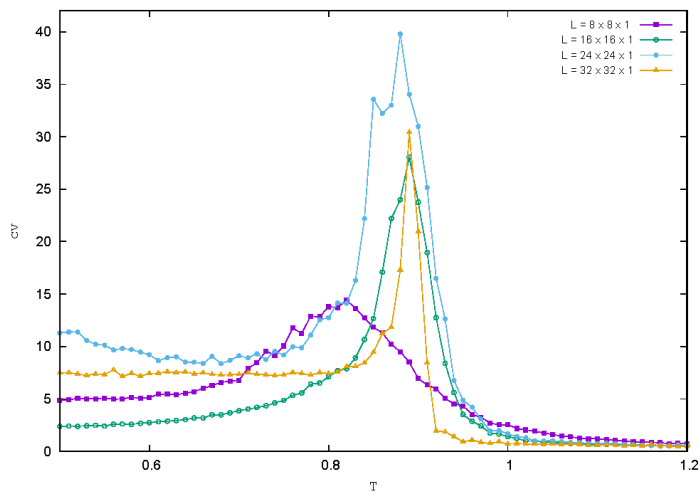
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Perbandingan Observabel antara Ukuran Kisi

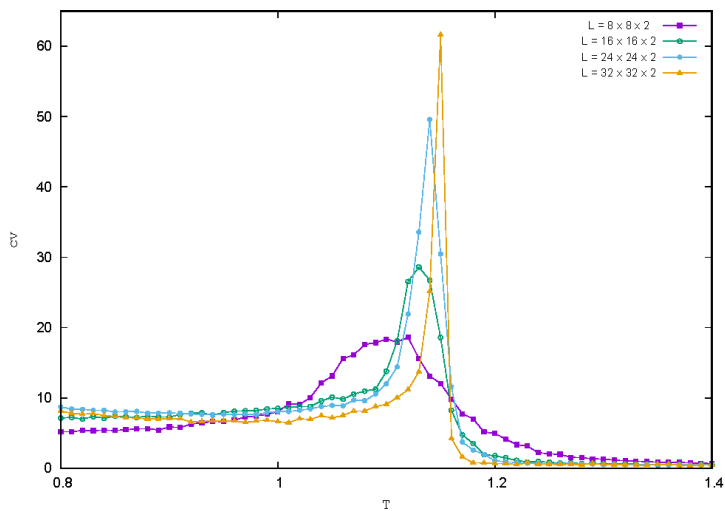
Pada bagian ini dianalisis pengaruh ukuran kisi L terhadap perilaku sistem untuk setiap jumlah lapisan. Tiga observabel utama yang dibandingkan adalah panas jenis C_v , energi internal $\langle E \rangle$, dan rasio momen magnetik (U_L).

3.1.1 Panas Jenis (C_v)

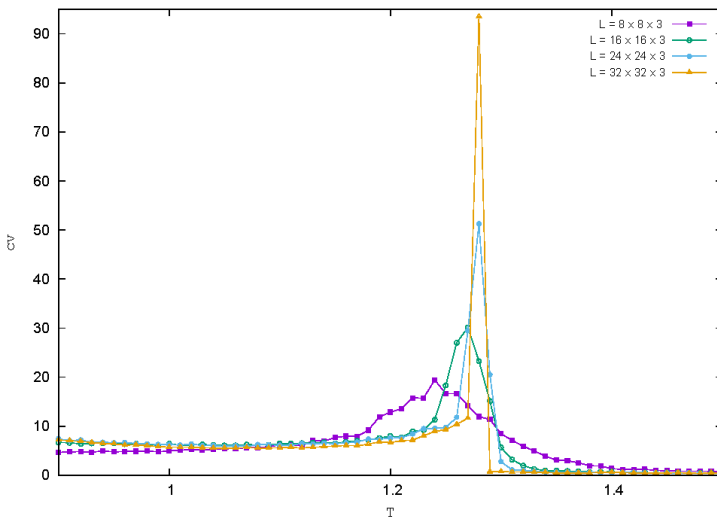
Langkah pertama dalam menemukan kemungkinan perubahan fase yaitu menghitung panas jenis yang telah didefinisikan pada Persamaan (2.9).



Gambar 11.a Grafik C_v vs Suhu pada Kisi Satu Lapis



Gambar 11.b Grafik C_v vs Suhu pada Kisi Dua Lapis



Gambar 11.c Grafik C_v vs Suhu pada Kisi Tiga Lapis

Gambar 11.a hingga Gambar 11.c memperlihatkan perilaku panas jenis per spin C_v sebagai fungsi suhu T untuk sistem dengan $n = 1, 2$, dan 3 lapisan, masing-masing pada empat ukuran kisi kuadrat $L = 8, 16, 24$, dan 32. Hasil simulasi menunjukkan bahwa untuk semua jumlah lapisan, kurva panas jenis menampilkan puncak yang semakin tinggi dan tajam seiring bertambahnya ukuran kisi, yang merupakan ciri khas transisi fasa orde kedua.

Pada sistem satu lapis (Gambar 11.a), puncak C_v teramati berada di sekitar suhu $T \approx 0,88$ untuk $L = 24$, dengan lebar puncak yang relatif besar. Kenaikan C_v terhadap L tampak tidak monoton, di mana nilai maksimum pada $L = 32$ justru sedikit lebih rendah daripada $L = 24$, yang kemungkinan disebabkan oleh fluktuasi statistik atau efek finite-size yang belum tereduksi secara signifikan.

Pada sistem dua lapis (Gambar 11.b), puncak panas jenis mengalami pergeseran menuju suhu lebih tinggi, yakni di sekitar $T \approx 1,12$, dan menunjukkan peningkatan nilai maksimum secara lebih konsisten terhadap L . Bentuk puncak juga menjadi lebih tajam, menunjukkan bahwa penambahan satu lapisan tambahan meningkatkan kekuatan fluktuasi energi dalam sistem.

Sistem tiga lapis (Gambar 11.c) menunjukkan karakteristik paling menonjol. Puncak C_v pada $L = 32$ mencapai nilai lebih dari 90 pada suhu sekitar $T \approx 1,25$, jauh lebih tinggi dibandingkan sistem dua atau satu lapis. Peningkatan tajam dalam nilai maksimum serta pergeseran suhu kritis yang lebih signifikan mengindikasikan bahwa efek kopling antarlapisan memperkuat korelasi antar spin dan memperjelas fenomena kritis.

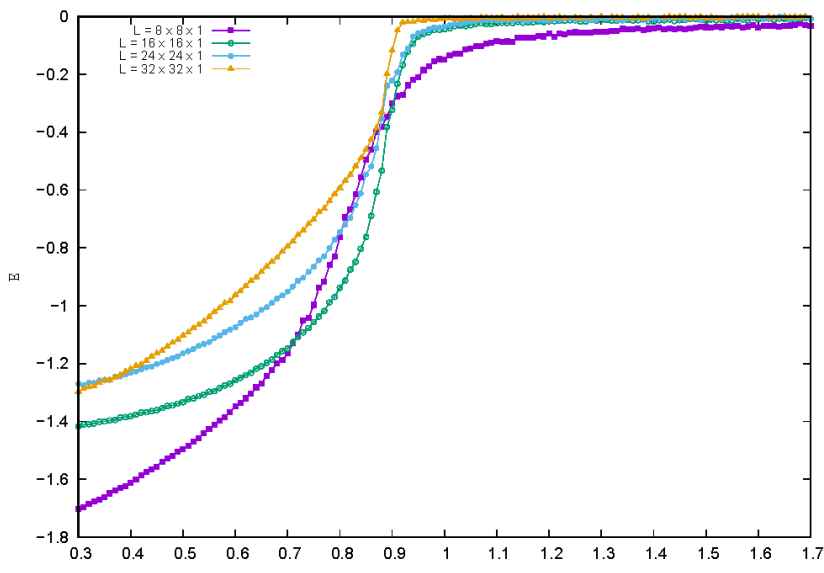
Secara umum, terdapat dua tren utama yang dapat disimpulkan bahwa peningkatan ukuran kisi L menghasilkan peningkatan nilai puncak C_v , konsisten dengan prediksi teori ukuran hingga (*finite-size scaling*) untuk transisi fasa orde

kedua. Penambahan jumlah lapisan n menghasilkan pergeseran suhu kritis ke arah nilai lebih tinggi serta pertumbuhan puncak C_v yang lebih tajam, menandakan bahwa sistem mendekati perilaku tiga dimensi secara efektif.

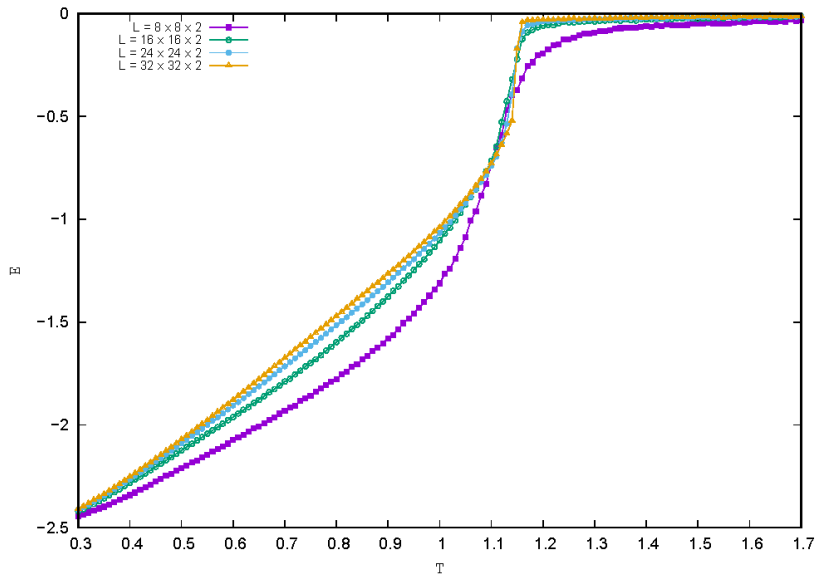
Hasil ini menunjukkan bahwa model spin vertex-kubik berlapis menangkap secara akurat sifat kolektif yang muncul akibat interaksi termal dan spasial dalam sistem quasi-tiga dimensi. Analisis lanjutan diperlukan untuk mengkuantifikasi eksponen kritis melalui scaling $C_v^{max}(L) \sim L^{\alpha/\nu}$ dan untuk mengestimasi suhu kritis T_c secara lebih presisi dari puncak-puncak ini.

3.1.2 Energi Internal $\langle E \rangle$

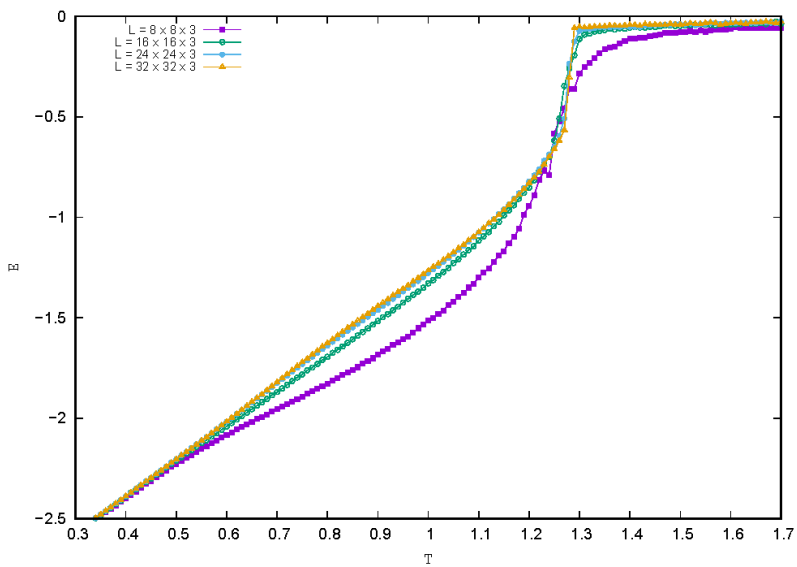
Gambar 12.a hingga Gambar 12.c menunjukkan perilaku energi internal rata-rata per spin $\langle E \rangle$ sebagai fungsi suhu T untuk sistem dengan jumlah lapisan $n = 1, 2$, dan 3 , masing-masing pada empat ukuran kisi $L = 8, 16, 24$, dan 32 . Dalam semua kasus, energi internal meningkat secara monoton terhadap suhu, dari nilai minimum pada suhu rendah menuju nilai mendekati nol pada suhu tinggi. Pola ini konsisten dengan peluruhan orde spin akibat eksitasi termal.



Gambar 12.a Grafik E vs Suhu pada Kisi Satu Lapis



Gambar 12.b Grafik E vs Suhu pada Kisi Dua Lapis



Gambar 12.c Grafik E vs Suhu pada Kisi Tiga Lapis

Pada sistem satu lapis (Gambar 12.a), transisi energi tampak terjadi secara lebih bertahap dibanding sistem dengan lapisan lebih banyak. Untuk $L = 8$, kurva energi terlihat lebih landai, mencerminkan pelemahan fluktuasi energi akibat ukuran sistem yang kecil. Sementara itu, pada ukuran $L = 24$, gradien perubahan energi lebih

curam di sekitar $T \approx 0,9$, mendekati lokasi transisi fasa seperti yang diamati pada puncak panas jenis sebelumnya.

Pada sistem dua lapis (Gambar 12.b), nilai energi minimum menjadi lebih rendah dibanding sistem satu lapis, mengindikasikan bahwa penambahan interaksi antarlapisan memperkuat keteraturan spin pada suhu rendah. Transisi energi terjadi lebih tajam untuk semua ukuran kisi, terutama pada $L = 24$, menunjukkan bahwa sistem mengalami reorganisasi konfigurasi energi yang lebih signifikan dalam kisaran suhu kritis $T \sim 1,1$.

Perilaku energi pada sistem tiga lapis (Gambar 12.c) menunjukkan gradasi perubahan energi paling curam di sekitar $T \approx 1,25$, konsisten dengan lokasi puncak C_v sebelumnya. Gradien energi meningkat tajam dalam interval suhu sempit, mengindikasikan bahwa sistem mendekati perilaku limit termodinamik di mana perubahan energi bersifat non-analitik pada suhu kritis.

Secara umum, dapat disimpulkan bahwa energi internal minimum ($T \rightarrow 0$) menurun seiring bertambahnya jumlah lapisan, mencerminkan penambahan kontribusi energi dari kopling antarlapisan. Gradien $\partial E / \partial T$ meningkat dengan bertambahnya L dan n , menandakan fluktuasi energi yang lebih besar di sekitar suhu transisi, serta letak perubahan energi paling tajam bergeser ke suhu lebih tinggi dengan bertambahnya n , konsisten dengan pergeseran T_c yang diamati pada data panas jenis.

Hasil ini mendukung interpretasi bahwa sistem berlapis memperkuat korelasi spasial dalam arah z , dan berperilaku lebih mendekati sistem tiga dimensi seiring meningkatnya ketebalan. Energi internal sebagai fungsi suhu merupakan indikator yang halus namun penting untuk mengidentifikasi karakteristik makroskopik sistem dan mendeteksi adanya anomali termodinamika

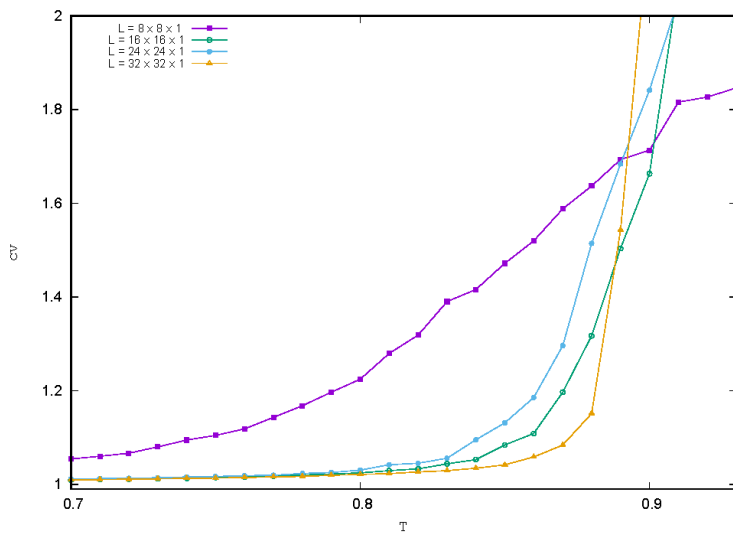
3.1.3 Rasio Momen Magnetik (U_L)

Rasio momen magnetik, atau Binder cumulant, merupakan kuantitas tak berdimensi yang didefinisikan sebagai:

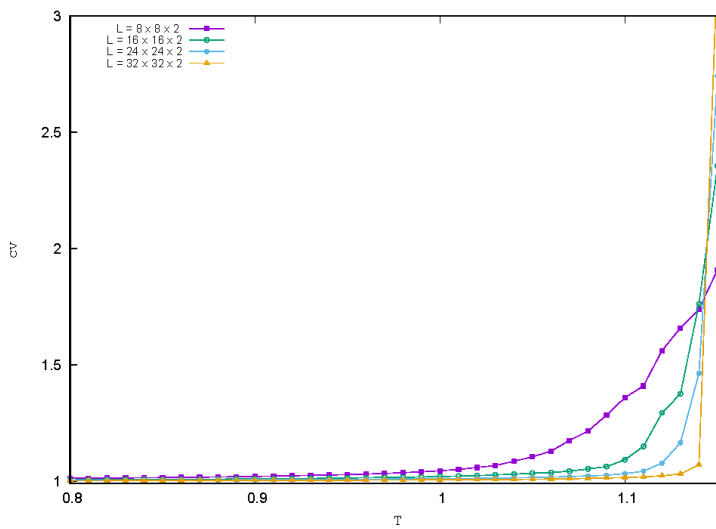
$$U_L = \frac{\langle M^4 \rangle}{\langle M^2 \rangle^2}$$

dan berfungsi sebagai indikator kritis untuk mendeteksi transisi fasa secara akurat. Salah satu keunggulan U_L dibanding observabel lain seperti C_v adalah keberadaan titik potong antar-kurva untuk berbagai ukuran sistem L di sekitar suhu kritis T_c , yang relatif bebas dari efek ukuran hingga (*finite-size effects*).

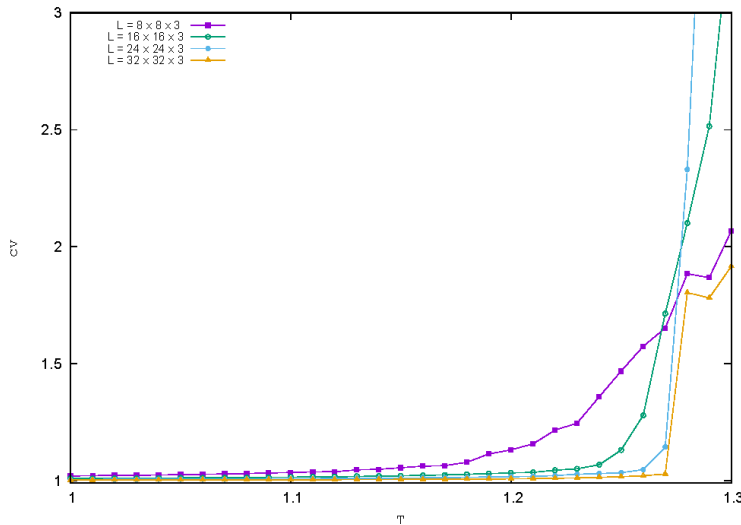
Gambar 13.a hingga 13.c menunjukkan kurva U_L terhadap suhu T untuk masing-masing sistem dengan satu, dua, dan tiga lapisan. Pada sistem satu lapis, kurva dari ukuran $L = 8$ hingga $L = 32$ menunjukkan potongan yang cukup konsisten di sekitar $T \approx 0,89$. Potongan tersebut terjadi dalam rentang sempit dan dengan gradien yang cukup jelas, menandakan bahwa transisi fasa dapat diidentifikasi secara stabil bahkan untuk sistem berukuran terbatas.



Gambar 13.a Grafik U_L vs Suhu pada Kisi Satu Lapis



Gambar 13.b Grafik U_L vs Suhu pada Kisi Dua Lapis



Gambar 13.c Grafik U_L vs Suhu pada Kisi Tiga Lapis

Pada sistem dua lapis, karakteristik yang sama juga diamati, dengan titik potong kurva berpindah ke $T \approx 1,12$. Perpotongan antar ukuran kisi menjadi lebih tajam, yang mengindikasikan bahwa sistem mengalami fluktuasi kritis yang lebih kuat. Kurva U_L juga menjadi lebih terpisah di suhu rendah dan tinggi, mengonfirmasi bahwa perbedaan antara fase terurut dan tak terurut lebih tegas.

Sistem tiga lapis menunjukkan perilaku paling menonjol. Titik potong antar-kurva terjadi pada $T \approx 1,25$, dan gradien perubahan nilai U_L terhadap suhu menjadi sangat tinggi pada wilayah kritis. Hal ini mempertegas bahwa peningkatan jumlah lapisan memperkuat ketegasan transisi dan mengurangi pengaruh efek ukuran hingga. Selain itu, konvergensi nilai U_L pada suhu tinggi mendekati nol, dan pada suhu rendah mendekati nilai mendekati $2/3$, sesuai dengan ekspektasi teoritis sistem diskrit simetris dengan dua keadaan dominan (*bimodal distribution* dari magnetisasi).

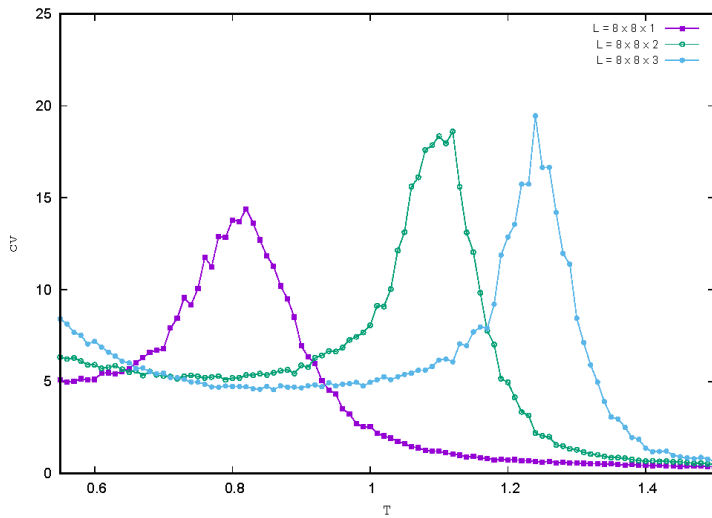
Dengan demikian, dari sudut pandang karakteristik U_L , diperoleh bukti tambahan yang memperkuat hasil analisis sebelumnya: sistem dengan lebih banyak lapisan tidak hanya memiliki suhu kritis yang lebih tinggi, tetapi juga menunjukkan transisi yang lebih tajam dan mudah dideteksi. Selain itu, titik potong U_L memberikan estimasi suhu kritis T_c yang lebih akurat dan bebas bias dibanding estimasi dari puncak C_v atau hilangnya magnetisasi.

3.2 Perbandingan antara Jumlah Lapisan pada Ukuran Kisi Tetap

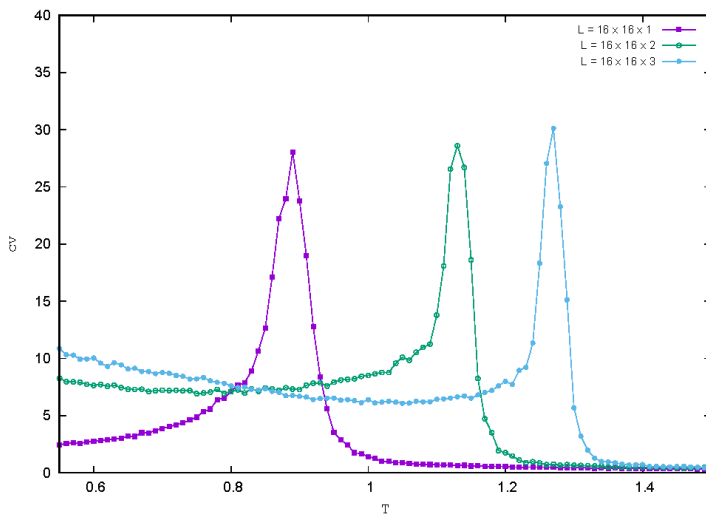
3.2.1 Panas Jenis (C_v)

Gambar 14.a hingga 14.d memperlihatkan perilaku panas jenis C_v terhadap suhu T untuk masing-masing ukuran kisi $L = 8, 16, 24$, dan 32 dengan variasi jumlah lapisan $n = 1, 2$, dan 3 . Tujuan dari analisis ini adalah untuk menginvestigasi bagaimana

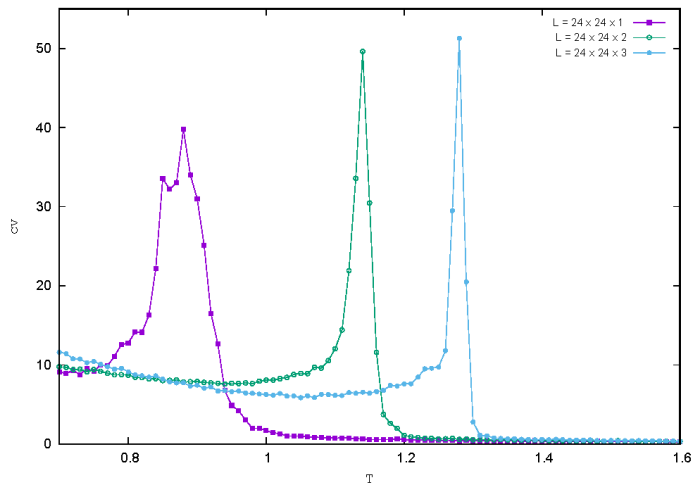
pertambahan lapisan memengaruhi perilaku termal sistem pada volume lateral tetap, dan apakah efek dimensi tambahan (arah z) memperkuat ciri-ciri transisi fasa.



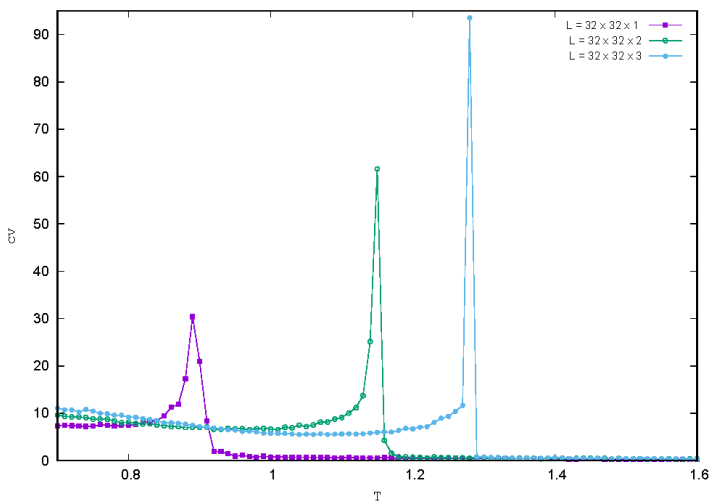
Gambar 14.a Grafik C_v vs Suhu pada Kisi 8×8



Gambar 14.b Grafik C_v vs Suhu pada Kisi 16×16



Gambar 14.c Grafik C_v vs Suhu pada Kisi 24×24



Gambar 14.d Grafik C_v vs Suhu pada Kisi 32×32

Secara umum, semua grafik menunjukkan bahwa peningkatan jumlah lapisan n menyebabkan pergeseran puncak panas jenis ke suhu yang lebih tinggi serta pertumbuhan tajam pada nilai maksimum C_v . Perubahan ini terjadi secara sistematis dari sistem satu lapis ke tiga lapis. Pada kisi kecil $L = 8$, efek ini masih tampak, tetapi kurang tajam karena pengaruh fluktuasi besar dan efek ukuran hingga yang signifikan. Pada $L = 16$ dan terutama pada $L = 24$, tren ini menjadi lebih jelas dan bersifat kuantitatif.

Pada semua ukuran L , kurva $C_v(T)$ untuk sistem satu lapis menampilkan puncak yang paling rendah dan paling lebar, yang menunjukkan transisi yang lebih melandai. Untuk sistem dua lapis, puncak menjadi lebih tajam dan bergeser ke suhu lebih tinggi. Sistem tiga lapis menunjukkan pertumbuhan puncak C_v yang sangat signifikan

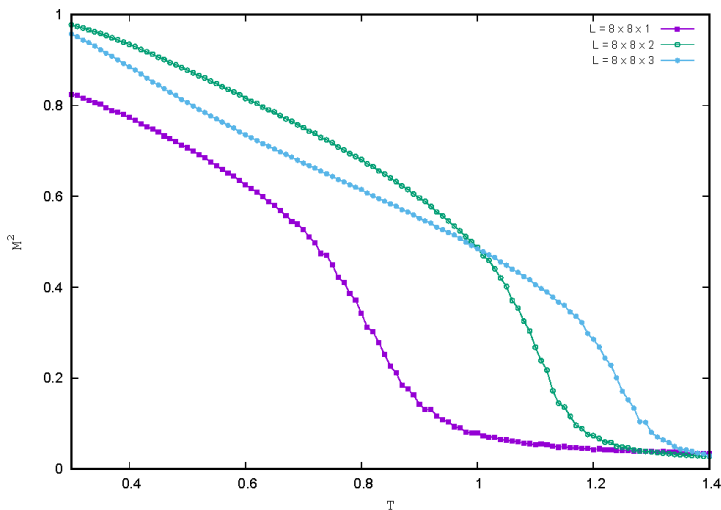
dengan bentuk kurva yang nyaris vertikal di sekitar suhu transisi. Hal ini menunjukkan bahwa kopling antarlapisan memperkuat korelasi spin dalam arah z , dan bahwa sistem berlapis mulai meniru perilaku sistem tiga dimensi meskipun masih dalam struktur diskrit terbatas.

Perubahan tajam nilai C_v terhadap T pada sistem tiga lapis untuk $L = 24$ dan $L = 32$ mendukung interpretasi bahwa sistem mengalami reorganisasi makroskopik spin secara serempak di sekitar suhu transisi. Ini konsisten dengan perilaku tipikal dari sistem yang mengalami transisi fasa orde kedua, di mana fluktuasi energi menjadi sangat besar dan divergen dalam batas termodinamik.

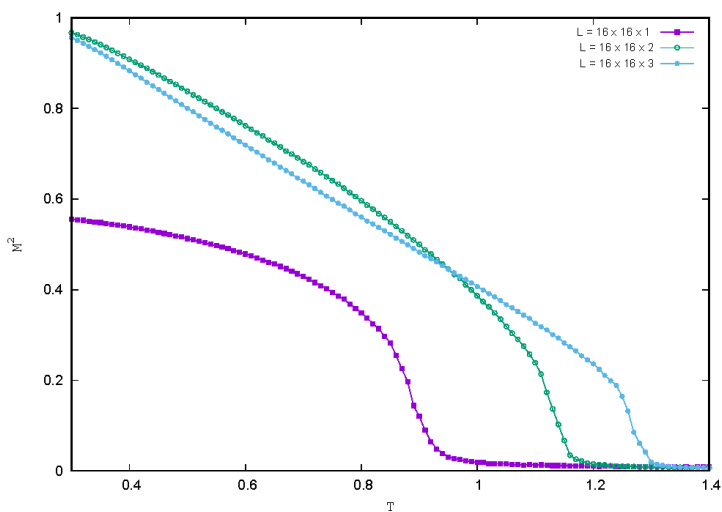
Secara keseluruhan, analisis ini memperkuat kesimpulan bahwa peningkatan jumlah lapisan, pada ukuran kisi tetap, mendorong sistem menuju perilaku kritis yang lebih tajam dan eksplisit. Peningkatan ini tidak hanya menaikkan suhu kritis T_c , tetapi juga meningkatkan amplitudo dan ketajaman fluktuasi termal, sehingga memperjelas sifat kritis sistem secara keseluruhan.

3.2.2 Magnetisasi Kuadrat Rata-Rata $\langle M^2 \rangle$

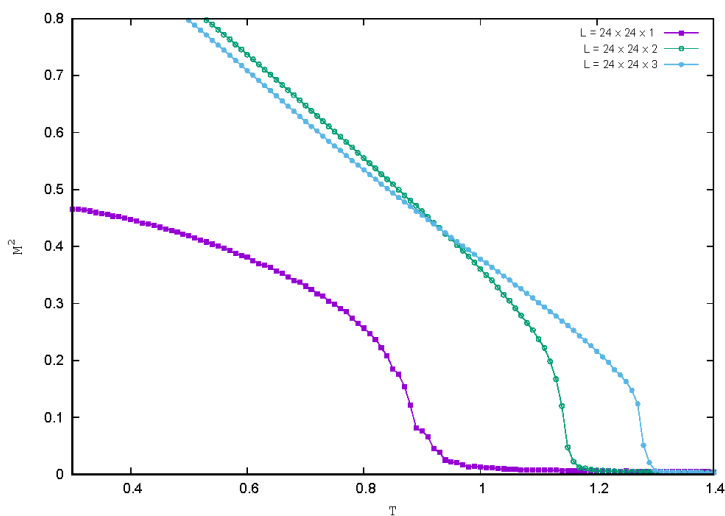
Gambar 15.a hingga Gambar 15.d menunjukkan perilaku magnetisasi kuadrat rata-rata $\langle M^2 \rangle$ terhadap suhu T untuk sistem dengan jumlah lapisan $n = 1, 2, \text{ dan } 3$ pada masing-masing ukuran kisi $L = 8, 16, 24, 32$. Observabel ini mencerminkan kekuatan orde magnetik dalam sistem dan sangat berguna untuk mengidentifikasi suhu transisi serta menilai kestabilan fasa terurut.



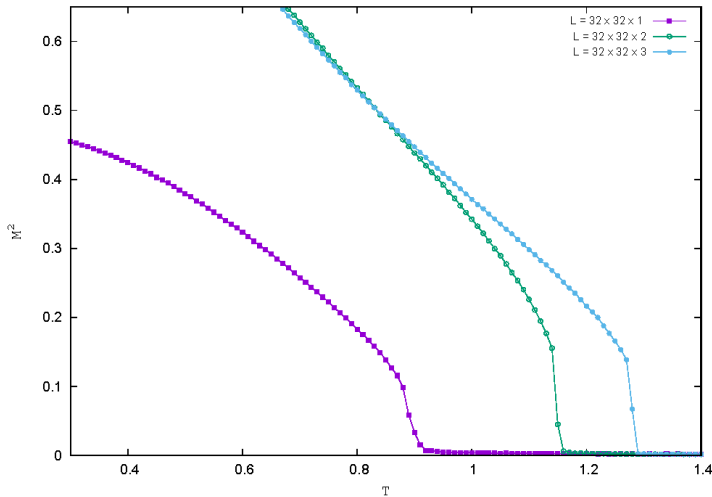
Gambar 15.a Grafik M^2 vs Suhu pada Kisi 8×8



Gambar 15.b Grafik M^2 vs Suhu pada Kisi 16×16



Gambar 15.c Grafik M^2 vs Suhu pada Kisi 24×24



Gambar 15.d Grafik M^2 vs Suhu pada Kisi 32×32

Untuk seluruh ukuran kisi, kurva $\langle M^2 \rangle$ menurun seiring meningkatnya suhu. Sistem satu lapis menunjukkan penurunan yang lebih halus dan melandai, dengan titik peluruhan magnetisasi yang relatif rendah. Sebaliknya, sistem dua dan tiga lapis mengalami penurunan yang lebih tajam di suhu yang lebih tinggi, mencerminkan peningkatan stabilitas orde spin akibat adanya kopling antarlapisan.

Pada $L = 8$, meskipun kurva relatif halus, tetap terlihat bahwa sistem tiga lapis mempertahankan nilai $\langle M^2 \rangle$ yang lebih tinggi pada suhu rendah dan mengalami peluruhan lebih lambat dibanding dua lapis dan satu lapis. Perbedaan ini menjadi lebih menonjol untuk $L = 16$, di mana transisi dari keadaan terurut ke tak terurut tampak lebih jelas dan lebih curam, khususnya pada sistem tiga lapis.

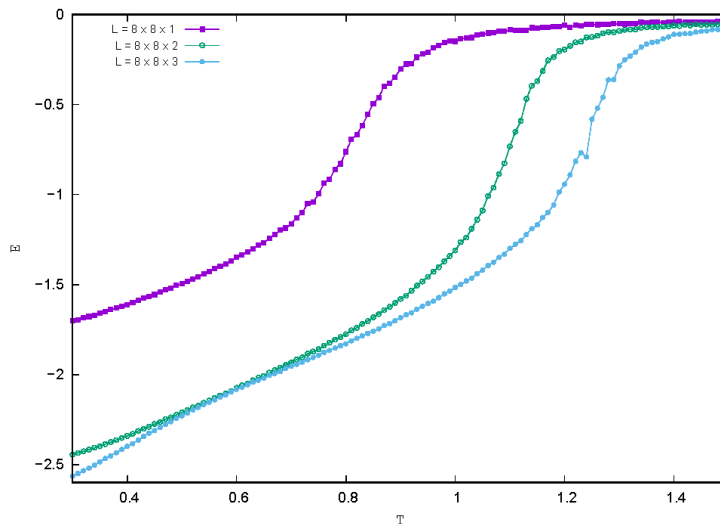
Pola ini semakin tegas untuk $L = 24$ dan $L = 32$, di mana $\langle M^2 \rangle$ hampir konstan hingga suhu tertentu, lalu menurun sangat tajam ke nol. Pergeseran suhu kritis ke arah lebih tinggi untuk sistem tiga lapis dibanding dua dan satu lapis menunjukkan bahwa ketebalan sistem memperkuat kestabilan magnetik hingga suhu lebih tinggi. Hal ini konsisten dengan hasil sebelumnya dari panas jenis dan rasio momen magnetik.

Perilaku $\langle M^2 \rangle$ ini juga memperlihatkan efek ukuran sistem bahwa semakin besar L , semakin curam penurunan magnetisasi, menandakan bahwa sistem mulai merepresentasikan perilaku limit termodinamik. Transisi fasa menjadi semakin tajam dan nilai $\langle M^2 \rangle$ semakin mendekati nol secara simultan untuk seluruh konfigurasi kisi besar, konsisten dengan ekspektasi teoritis sistem spin diskrit yang mengalami transisi orde kedua.

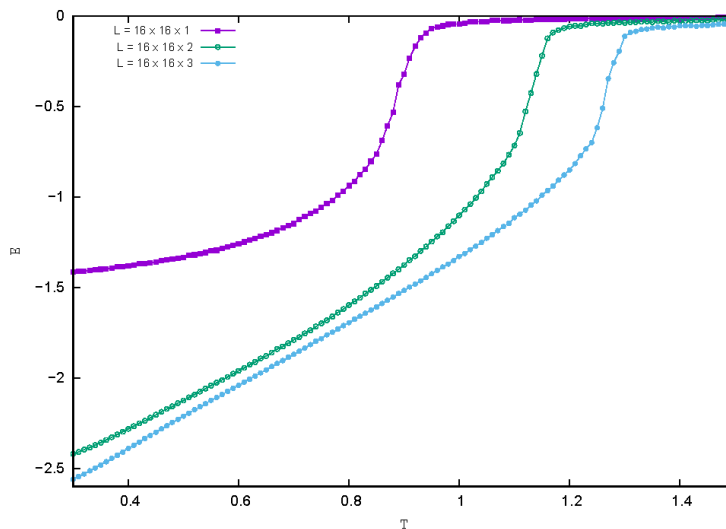
Dengan demikian, magnetisasi kuadrat rata-rata memberikan bukti pelengkap yang konsisten terhadap hasil observabel lainnya. Transisi orde magnetik menjadi lebih jelas dan stabil untuk sistem dengan lapisan lebih banyak dan ukuran lebih besar, memperkuat kesimpulan bahwa sistem vertex-kubik berlapis merepresentasikan fasa terurut dan tak terurut dengan sangat baik.

3.2.3 Energi Internal $\langle E \rangle$

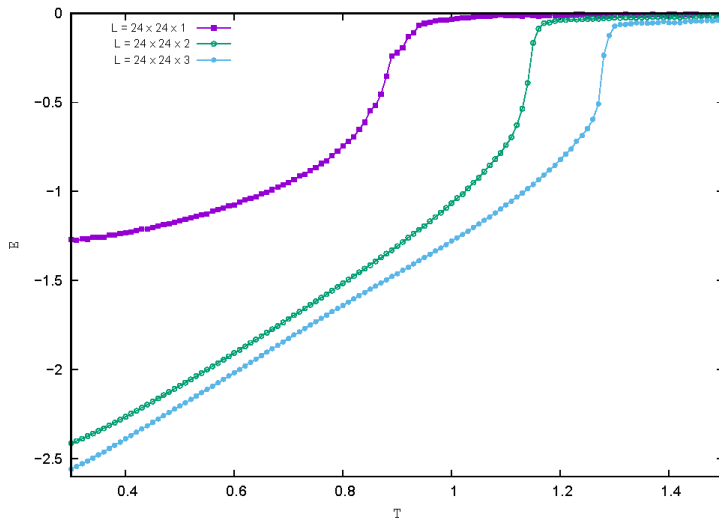
Gambar 16.a hingga Gambar 16.d menampilkan kurva energi internal rata-rata per spin $\langle E \rangle$ terhadap suhu T untuk sistem berukuran tetap $L = 8, 16, 24$, dan 32 dengan variasi jumlah lapisan $n = 1, 2$, dan 3 . Tujuan dari analisis ini adalah untuk mengevaluasi pengaruh dimensi tambahan (arah z) terhadap kestabilan energi dan dinamika peluruhan orde spin dalam sistem *vertex-cubic*.



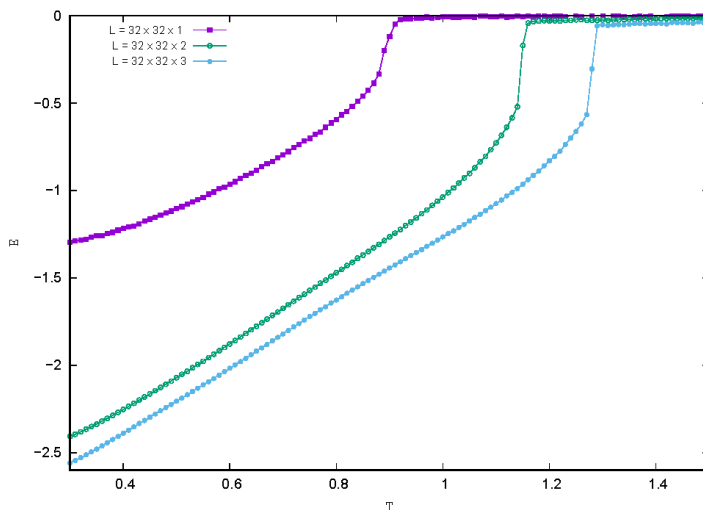
Gambar 16.a Grafik E vs Suhu pada Kisi 8×8



Gambar 16.b Grafik E vs Suhu pada Kisi 16×16



Gambar 16.c Grafik E vs Suhu pada Kisi 24×24



Gambar 16.d Grafik E vs Suhu pada Kisi 32×32

Secara umum, seluruh grafik menunjukkan bahwa energi meningkat secara monoton terhadap suhu, dari nilai negatif minimum pada suhu rendah menuju nol mendekati suhu tinggi, yang mencerminkan peluruhan keteraturan spin karena eksitasi termal. Namun, laju perubahan energi dan bentuk kurva sangat bergantung pada jumlah lapisan.

Pada sistem satu lapisan, transisi energi berlangsung lebih gradual dan melandai, dengan perubahan energi yang menyebar dalam rentang suhu yang lebih luas. Hal ini menunjukkan bahwa fluktuasi energi dalam sistem 2D relatif tersebar dan tidak menunjukkan lonjakan tajam dalam reorganisasi keadaan spin. Sebaliknya, pada sistem dua lapisan, perubahan energi menjadi lebih curam, terutama di sekitar suhu

transisi yang juga telah diidentifikasi dari puncak panas jenis sebelumnya. Sistem tiga lapis menunjukkan perubahan energi yang paling tajam, dengan titik infleksi yang sangat jelas dan terjadi dalam rentang suhu yang sempit.

Pola ini konsisten di seluruh ukuran kisi. Untuk $L = 8$, efek ukuran hingga masih cukup besar, sehingga kurva energi tampak lebih halus dan transisinya tidak terlalu tajam. Namun pada $L = 16$, perubahan energi menjadi lebih eksplisit. Hal ini semakin diperkuat untuk $L = 24$ dan $L = 32$, di mana gradien energi untuk sistem dua dan tiga lapis menunjukkan reorganisasi energi yang sangat cepat di sekitar suhu transisi. Kurva sistem tiga lapis, khususnya, memperlihatkan transisi energi yang nyaris diskontinu dalam rentang suhu sempit, mengindikasikan bahwa sistem semakin dekat pada perilaku sistem termodinamik kontinu berdimensi lebih tinggi.

Selain itu, nilai energi minimum pada suhu rendah semakin menurun seiring bertambahnya jumlah lapisan. Ini menunjukkan bahwa konfigurasi dasar sistem berlapis memiliki energi lebih rendah akibat kopling tambahan antarlapisan yang memperkuat keteraturan global spin. Hal ini memperkuat hasil dari observabel magnetisasi yang juga menunjukkan kestabilan fasa terurut yang lebih kuat pada sistem berlapis tebal.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa peningkatan jumlah lapisan n , meskipun pada ukuran kisi tetap L , memperkuat karakteristik transisi fasa yang tercermin pada perubahan energi internal sistem. Transisi menjadi lebih tajam, nilai energi minimum lebih rendah, dan reorganisasi spin lebih simultan, semuanya mengarah pada konsistensi bahwa sistem berlapis memperlihatkan sifat kritis yang semakin kuat.

3.3 Estimasi Temperatur Kritis dari Observabel Termal

Tabel 3. merangkum estimasi temperatur kritis T_c untuk berbagai ukuran kisi $L = 8, 16, 24, \text{ dan } 32$ dan jumlah lapisan $n = 1, 2, \text{ dan } 3$. Estimasi ini diperoleh dari lokasi puncak panas jenis C_v , perubahan tajam energi internal $\langle E \rangle$, serta titik peluruhan magnetisasi kuadrat rata-rata $\langle M^2 \rangle$.

Tabel 3. Estimasi Temperatur Kritis

L x L	T_c		
	$(n = 1)$	$(n = 2)$	$(n = 3)$
8 x 8	0.83	1.12	1.23
16 x 16	0.85	1.14	1.25
24 x 24	0.88	1.17	1.27
32 x 32	0.88	1.19	1.28

Secara umum, terdapat dua tren utama yang tampak jelas dari tabel tersebut. Pertama, untuk setiap jumlah lapisan tetap, nilai T_c meningkat seiring dengan ukuran kisi L . Hal ini merupakan konsekuensi dari efek ukuran hingga (*finite-size effect*), di

mana sistem berukuran kecil belum sepenuhnya mampu memanifestasikan perilaku transisi fasa dalam limit termodinamik. Dengan kata lain, nilai T_c yang terukur pada sistem kecil cenderung lebih rendah dibandingkan nilai asimptotiknya saat $L \rightarrow \infty$. Namun, untuk sistem satu lapis, peningkatan T_c relatif stagnan di sekitar 0.88 pada $L = 24$ dan $L = 32$, mengindikasikan bahwa sistem mulai mendekati nilai kritis sebenarnya pada ukuran tersebut.

Kedua, dan lebih signifikan secara fisika, adalah pengaruh jumlah lapisan terhadap nilai T_c . Teramati bahwa untuk setiap ukuran kisi tetap, peningkatan jumlah lapisan dari $n = 1$ ke $n = 3$ menyebabkan pergeseran T_c secara konsisten ke arah suhu yang lebih tinggi. Sebagai contoh, pada $L = 16$, nilai T_c meningkat dari 0.85 untuk sistem satu lapis menjadi 1.25 untuk sistem tiga lapis. Pola ini mencerminkan efek dimensionalitas tambahan yang muncul dari struktur berlapis: penambahan lapisan memperkenalkan interaksi antar- z yang meningkatkan kestabilan fasa terurut terhadap eksitasi termal, sehingga suhu transisi menjadi lebih tinggi.

Fenomena ini mengkonfirmasi bahwa sistem berlapis—meskipun dibangun dari lapisan-lapisan dua dimensi—secara efektif mulai menunjukkan perilaku mendekati sistem tiga dimensi ketika n bertambah. Efek ini tampak paling signifikan pada sistem tiga lapis dengan ukuran kisi besar, seperti $L = 32$, yang memiliki estimasi $T_c \approx 1.28$, hampir 50% lebih tinggi dibanding sistem satu lapis berukuran sama. Fakta bahwa nilai T_c menjadi semakin stabil pada $L = 24$ dan $L = 32$ untuk setiap n juga menunjukkan bahwa sistem telah mendekati batas skala termodinamik, sehingga estimasi ini cukup representatif untuk perilaku kritis sesungguhnya.

Dengan demikian, data dalam tabel tidak hanya memperlihatkan pergeseran numerik nilai T_c , tetapi juga memberikan gambaran konsisten mengenai bagaimana pengaruh dimensi tambahan dari sistem berlapis memengaruhi transisi fasa. Estimasi ini dapat dijadikan dasar untuk analisis lanjutan, seperti ekstraksi eksponen kritis melalui metode scaling terhadap L dan komparasi terhadap nilai teoritik dari model-model spin klasik berdimensi 2 dan 3.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Penelitian mengenai sifat termodinamika model magnetik kubik pada kisi kuasi tiga dimensi telah berhasil dilakukan. Model ini mengadopsi orientasi spin yang menunjuk ke salah satu dari 8 arah vektor *vertex-cubic*, yang merupakan representasi diskrit dari model Heisenberg dan termasuk dalam kategori simetri polihedral. Melalui simulasi Monte Carlo dengan implementasi Algoritma Wolff, sifat-sifat termodinamika sistem telah diamati secara cermat.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa:

1. Simulasi menunjukkan bahwa peningkatan ukuran kisi mempertegas sifat transisi fase sistem. Puncak panas jenis menjadi lebih tajam, peluruhan magnetisasi lebih jelas, dan perubahan energi internal lebih curam. Hal ini menunjukkan bahwa sistem yang lebih besar merepresentasikan perilaku termodinamika dengan lebih akurat.
2. Peningkatan jumlah lapisan menghasilkan transisi fase yang lebih eksplisit dan stabil. Semakin besar jumlah lapisan yang ditumpuk, semakin tinggi suhu kritis yang dicapai, dan semakin kuat orde spin yang dipertahankan hingga suhu transisi tercapai. Hal ini menunjukkan bahwa kopling antar lapisan memainkan peran penting dalam memperkuat fase yang teratur.
3. Suhu kritis diidentifikasi secara konsisten melalui beberapa faktor yang dapat diamati, seperti puncak panas jenis, *Binder Cumulant* minimum, dan peluruhan magnetisasi. Tren yang diperoleh menunjukkan bahwa suhu kritis meningkat seiring bertambahnya ukuran kisi dan jumlah lapisan, dan lebih stabil dalam sistem besar dengan lapisan tebal.
4. Rasio magnetisasi akar-rata-rata-kuadrat dan momen magnetik menunjukkan bahwa orde spin lebih stabil dalam sistem berlapis, bahkan pada suhu yang mendekati transisi. Potongan *Binder Cumulant* menjadi lebih tajam seiring dengan peningkatan L dan n , yang menunjukkan perilaku kritis yang lebih kuat dan lebih jelas.
5. Model spin *vertex-cubic* berlapis memberikan deskripsi yang relevan tentang sistem fisik berdimensi menengah, seperti film magnetik tipis atau struktur berlapis lainnya. Pendekatan ini telah terbukti efektif untuk mempelajari transisi fase dan fenomena kritis dalam sistem dengan orientasi diskrit dan interaksi spasial terbatas. Dengan demikian, tujuan penelitian telah tercapai secara menyeluruh, baik dalam mengidentifikasi transisi fasa berdasarkan parameter termodinamika, maupun dalam mengevaluasi pengaruh ukuran sistem terhadap perilaku kritis dari model spin ikosahedral.

4.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, beberapa saran untuk penelitian selanjutnya adalah:

1. Meninjau simetri polihedral lain (misalnya, tetrahedron, oktahedron, icosahedron atau dodekahedron) untuk memahami bagaimana perbedaan simetri memengaruhi sifat termodinamika dan transisi fasa.
2. Mencoba menggunakan elemen geometri dari model polihedral lain, seperti spin yang menunjuk ke arah pusat sisi atau rusuk, untuk mengeksplorasi konfigurasi interaksi yang lebih kompleks.
3. Memvariasikan struktur kisi (misalnya, kisi heksagonal, segitiga, atau kisi tiga dimensi) untuk mengamati pengaruhnya terhadap sifat termodinamika dan fenomena transisi fasa.
4. Melakukan analisis yang lebih mendalam terhadap eksponen kritis untuk mengklasifikasikan universalitas transisi fasa yang diamati.

DAFTAR PUSTAKA

- Binder, K. (1981). Finite size scaling analysis of ising model block distribution functions. *Zeitschrift Für Physik B Condensed Matter*, 43(2), 119–140. <https://doi.org/10.1007/BF01293604>
- Cardy, J. (1996). *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*.
- Chandler, D., 1987. *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. New York: Oxford University Press.
- Ertaş, M., Kantar, E., & Keskin, M. (2014). Dynamic behaviors of spin-1/2 bilayer system within Glauber-type stochastic dynamics based on the effective-field theory. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 358–359(April), 56–64. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2014.01.025>
- Heine, M., Hellman, O., & Broido, D. (2021). Temperatur-dependent renormalization of magnetic interactions by thermal, magnetic, and lattice disorder from first principles. *Physical Review B*, 103(18), 1–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.184409>
- Jufrin, M., 2015. *Sifat Kritis Model Magnetik Simetri Polyhedral pada Kisi Segitiga (Triangular)*. Skripsi, Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Makassar.
- Nishimori, H., & Ortiz, G. (2011). *Elements of phase transitions and critical phenomena*. Oxford University Press.
- Pathria, R. K., 1996. *Statistical Mechanics*. 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann.
- Ščepka, T. (2016). *Noninvasive control of magnetic state in ferromagnetic nanodots by Hall probe magnetometry* (Dissertation Thesis). Slovak University of Technology in Bratislava.
- Sčepka, T. (2016). *by Hall probe magnetometry Noninvasive Tomáš Ščepka* (Issue April).
- Surungan, T. 2011. *Fisika Statistik*, Departemen Fisika Universitas Hasanuddin, Makassar.
- Surungan, T., & Okabe, Y. (2017). *Study of spin models with polyhedral symmetry on square lattice*. September. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1709.03720>

- Surungan, T., Kawashima, N. and Okabe, Y. (2008). Critical properties of the edge-cubic spin model on a square lattice. *Phys. Rev. B* 77, 214401. doi: [10.1103/PhysRevB.77.214401](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.214401).
- Sutiono, A., 2013. *Studi Perubahan Fase Model Magnetik Spin Kubik pada Struktur Kisi Berlapis*. Skripsi Sarjana, Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Makassar
- Tokura, Y., Yasuda, K., & Tsukazaki, A. (2019). Magnetic topological insulators. *Nature Reviews Physics*, 1(2), 126-143. <https://doi.org/10.1038/s42254-018-0011-5>
- Ueda, H., Okunishi, K., Krčmár, R., Gendiar, A., Yunoki, S., & Nishino, T. (2017). Critical behavior of the two-dimensional icosahedron model. *Physical Review E*, 96(6), 4–9. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.062112>
- Yesiana, E., 2021. *Studi Sifat Kritis Model Jam 6-Keadaan Antiferomagnet pada Kisi 2 Dimensi menggunakan Algoritma Wang-Landau*. Skripsi, Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Makassar.
- Yunita, S., Rahmat, R., & Surungan, T. (2022). Phase diagram of the dodecahedron spin model on square lattice with diluted bonds. *Journal of Physics: Conference Series*, 2207(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2207/1/012015>