

① شبانه‌زی

سوال ۲) ب) کراس انتروپی برای دو توزیع نرمال:

$$p(x) = N(x | \mu, \Sigma) \text{ و } q(x) = N(x | m, L)$$

$$H(p, q) = - \int p(x) \ln q(x) \cdot dx$$

$$= \int N(x | \mu, \Sigma) \frac{1}{\gamma} (D \ln(\gamma \pi) + \ln |L| + (x-m)^T L^{-1} (x-m)) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} (D \ln(\gamma \pi) \int p(x) dx + \ln |L| \cdot \int p(x) dx + \int (x-m)^T L^{-1} (x-m) \cdot p(x) \cdot dx)$$

$$= \frac{1}{\gamma} (D \ln(\gamma \pi) + \ln |L| + \int (x-m)^T L^{-1} (x-m) \cdot p(x) \cdot dx)$$

بسط دادن جمله سوم:

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} (D \ln(\gamma \pi) + \ln |L| + \int (x^T \cdot L^{-1} \cdot x - m^T \cdot L^{-1} \cdot x - x^T \cdot L^{-1} \cdot m + m^T \cdot L^{-1} \cdot m) \cdot p(x) \cdot dx)$$

$$= \frac{1}{\gamma} (D \ln(\gamma \pi) + \ln |L| + E_{x \sim p(x)} [x^T \cdot L^{-1} \cdot m] + E_{x \sim p(x)} [m^T \cdot L^{-1} \cdot m])$$

$$= \frac{1}{\gamma} (D \ln(\gamma \pi) + \ln |L| + E [x^T \cdot L^{-1} \cdot x] - m^T \cdot L^{-1} \cdot E [x] - E [x^T] \cdot L^{-1} \cdot m + m^T \cdot L^{-1} \cdot m)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} (D \ln(\gamma \pi) + \ln |L| + E_{x \sim p(x)} [\underbrace{x^T \cdot L^{-1} \cdot x}_{\text{یک عدد حقیقی}}] - m^T \cdot L^{-1} \cdot \mu - \mu^T \cdot L^{-1} \cdot m + m^T \cdot L^{-1} \cdot m)$$

در مرحله بعد امید ریاضی میانجی را بسط می دهیم

* عبارت $x^T \cdot L^{-1} \cdot x$ در واقع یک عدد حقیقی است. در نتیجه:

$$E [x^T \cdot L^{-1} \cdot x] = E [\text{trace}(x^T \cdot L^{-1} \cdot x)] = E [\text{trace}(L^{-1} x x^T)]$$

$$\Rightarrow \text{Trace}(E [L^{-1} x x^T]) \xrightarrow[\text{در نتیجه}]{E \text{ و Tr خطی هستند}} \text{Trace}(L^{-1} E [x x^T])$$

ادام (سوال ۲) ب) :

سمبازی ۷

با توجه به توضیحات بالا :

$$\begin{cases} \text{Cov}(x) = E[x x^T] - E[x] \cdot E[x]^T \\ \Sigma = E[x x^T] - \mu \cdot \mu^T \text{ فرض} \end{cases}$$

بنابراین $E[x^T L^{-1} x] = \text{trace}(L^{-1}(\mu \cdot \mu^T + \Sigma))$