09_Konvexitaet

Martin Reißel

27. Juni 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Konvexität

1.1 Überblick

- konvexe Mengen und Funktionen spielen eine wichtige Rolle in der Optimierung
- konvexe Optimierungsprobleme lassen sich sowohl theoretisch als auch algorithmisch relativ gut behandeln
- in diesem Kapitel werden einige elementare Ergebnisse aus diesem Bereich hergeleitet

1.2 Konvexe Mengen und konvexe Funktionen

Definition: $X \subset \mathbb{R}^d$ heißt konvex, falls

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in X \quad \forall x,y \in X \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

gilt.

Sind X_i, $i \in I$ konvex, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} X_i$ konvex.

Um Konvexität von Funktionen zu untersuchen, führen wir einige Begriffe ein. Wir betrachten $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$, wobei $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}^d$ der Definitionsbereich von f ist.

Definition:

- $\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{dom}(f)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$
- $\mathrm{epi}(f) = \{(x,y) \mid y \geq f(x),\ x \in \mathrm{dom}(f)\}$, ist der *Epigraph* von f

Definition:

- $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ ist *konvex*, falls $\mathrm{dom}(f)$ konvex ist und

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \quad \forall x,y \in \mathrm{dom}(f) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

- $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ ist *strikt konvex*, falls $\mathrm{dom}(f)$ konvex ist und

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) < (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \quad \forall x \neq y \in \mathrm{dom}(f) \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

- f ist *μ-konvex*, $\mu > 0$, falls
$$f(x) - \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2$$
konvex ist

Beispiel:

- alle Normen sind konvex (Dreiecksungleichung)
- Least Square Loss
- $f(x) = x^T Qx + b^T x + c$ mit Q symmetrisch positiv semidefinit, also insbesondere auch für $Q = 0$ und somit alle linear affinen Funktionen $f(x) = b^T x + c$
- $f(x) = x^T Qx + b^T x + c$ mit Q symmetrisch positiv definit ist μ konvex für $0 < \mu \le \lambda_{\min}(Q)$

Rechenregeln:

- sind f, g konvex dann gilt dies auch für
  - αf mit $\alpha \ge 0$
  - $f + g$
  - $f(Ax + b)\ \forall A, b$
  - $h(x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$
- mit $f(x, y)$ ist auch $g(x) = \min_y f(x, y)$ konvex
- für f, g konvex ist $f \circ g$ i.d.R. nicht konvex
- $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn $\mathrm{epi}(f)$ konvex ist (Beweis: siehe Übung)
- Jensen-Ungleichung: $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ konvex, $x_i \in \mathrm{dom}(f)$, $i = 1, \ldots, n$, dann gilt
$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \le \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad \forall \lambda_i \ge 0 \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$
(Beweis: siehe Übung)

1.3 Eigenschaften konvexer Funktionen

Satz: Ist f konvex, dann sind lokale Minima immer globale Minima.

Beweis:

- sei x ein lokales Minimum, d.h.
$$f(x) \le f(y) \quad \forall y \quad \text{mit} \quad \|y - x\| < r,$$
r hinreichend klein
- Annahme: es existiert $\bar{x} \in \mathrm{dom}(f)$ mit $f(\bar{x}) < f(x)$
- für $\lambda > 0$ sei
$$y = x + \lambda(\bar{x} - x) = (1 - \lambda)x + \lambda\bar{x}$$
- damit ist
$$\|y - x\| = \lambda\|x - \bar{x}\|$$
- da $\mathrm{dom}(f)$ konvex ist, ist $y \in \mathrm{dom}(f)$ für $\lambda \in [0, 1]$ und somit
$$\begin{aligned} f(y) &\le (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(\bar{x}) \\ &= f(x) + \lambda\big(\underbrace{f(\bar{x}) - f(x)}_{<0}\big) \\ &< f(x) \end{aligned}$$
für alle $\lambda \in (0, 1]$

- wählt man jetzt $\lambda \in (0,1]$ klein genug, so dass $\|y-x\| < r$ gilt, so erhalten wir einen Widerspruch dazu, dass x ein lokales Minimum ist

□

Bemerkung: Konvexe Funktionen müssen keine lokalen oder globalen Minima besitzen, z.B. $f(x) = e^x$.

Satz: Ist f strikt konvex, dann gibt es höchstens ein Minimum.

Beweis:

- es seien $x \neq y$ Minima, d.h.
$$f(x) = f(y) = f_* = \inf_x f(x)$$
- mit der Konvexität von f folgt
$$z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in \operatorname{dom}(f)$$
und
$$f(z) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = f_*$$
was ein Widerspruch zur Minimalität von f_* ist

□

Für die Glattheit konvexer Funktionen liefert das folgende Lemma einen Hinweis.

Lemma: Es sei f konvex, $\bar{B}_\delta(x) \subset \operatorname{dom}(f)$ und f beschränkt auf $\bar{B}_\delta(x)$. Dann ist f Lipschitz-stetig auf $\bar{B}_\delta(x)$.

Beweis:

- mit $y \in \bar{B}_\delta(x)$, $x \neq y$, ist $0 < \|x-y\| \leq \delta$
- wir setzen nun
$$\begin{aligned} z &= x + \underbrace{\frac{\delta}{\|x-y\|}}_{\alpha}(x-y) \\ &= x + \alpha(x-y) \\ &= (1+\alpha)x - \alpha y \end{aligned}$$
und erhalten
$$\|z-x\| = \frac{\delta}{\|x-y\|} \cdot \|y-x\| = \delta,$$
also $z \in \partial\bar{B}_\delta(x)$, bzw.
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1+\alpha}(z+\alpha y) \\ &= \frac{1}{1+\alpha}z + \frac{\alpha}{1+\alpha}y \\ &= \big(\underbrace{1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}}_{1-\beta}\big)z + \underbrace{\frac{\alpha}{1+\alpha}}_{\beta}\,y \end{aligned}$$
- wegen $\alpha > 0$ gilt $\beta \in [0,1]$ und aus der Konvexität von f folgt
$$\begin{aligned} f(x) &\leq (1-\beta)f(z) + \beta f(y) \\ &= \frac{1}{1+\alpha}f(z) + \frac{\alpha}{1+\alpha}f(y) \end{aligned}$$

und somit

$$f(x) - f(y) \le \frac{1}{1+\alpha} f(z) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(y) - f(y)$$
$$= \frac{1}{1+\alpha}\big(f(z) - f(y)\big)$$

- f ist beschränkt auf $\bar{B}_\delta(x)$, d.h.
$$|f(u)| \le M \quad \forall u \in \bar{B}_\delta(x)$$
- wegen $z, y \in \bar{B}_\delta(x)$ erhalten wir
$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\le \frac{2M}{1+\alpha} \\ &= \frac{2M}{1 + \frac{\delta}{\|x-y\|}} \\ &= \frac{2M\|x-y\|}{\delta + \|x-y\|} \\ &\le \frac{2M}{\delta}\|x-y\| \end{aligned}$$
- durch vertauschen von x und y folgt schließlich
$$|f(x) - f(y)| \le \frac{2M}{\delta}\|x-y\|$$

□

Ist f also konvex und beschränkt, dann ist es immer lokal Lipschitz-stetig.

Ist X ein endlichdimensionaler normierter Raum, so kann man zeigen, dass jede konvexe Funktion $f : X \supset \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ auf jeder Kugel $\bar{B}_\delta(x) \subset \mathrm{dom}(f)$ beschränkt ist, so dass wir in diesem Fall auf die zusätzliche Voraussetzung der Beschränktheit verzichten können.

Wie sieht es mit der Differenzierbarkeit konvexer Funktionen aus?

Lemma: $f : \mathbb{R}^d \supset \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ konvex, $\mathrm{dom}(f)$ konvex, offen, ist fast überall differenzierbar, d.h.

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{x} \in \mathrm{dom}(f) \quad \text{mit } \|\tilde{x} - x\| < \varepsilon$$

und f ist differenzierbar in $\tilde{x}$.

Es gibt stetige Funktionen, die nirgends differenzierbar sind. Die Konvexität sorgt also für ein gewisses Maß an Regularität.

1.4 Differenzierbare konvexe Funktionen

Bei differenzierbarem f besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Konvexität und den Eigenschaften der Ableitungen.

Lemma: $f : \mathbb{R}^d \supset \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. f ist konvex genau dann wenn $\mathrm{dom}(f)$ konvex ist und

$$f(y) \ge f(x) + f'(x)(y-x) \quad \forall x, y \in \mathrm{dom}(f).$$

Beweis:

“⇒”

- ist f konvex, so ist $\mathrm{dom}(f)$ konvex und
$$f\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t)f(x) + tf(y) \quad \forall t \in [0,1]$$

- für $t \in (0,1)$ gilt dann

$$\begin{aligned} f\big(x + t(y-x)\big) &= f\big((1-t)x + ty\big) \\ &\leq (1-t)f(x) + tf(y) \\ &= f(x) + t\big(f(y) - f(x)\big) \end{aligned}$$

  und somit

$$f(y) \geq f(x) + \frac{f\big(x + t(y-x)\big) - f(x)}{t} \qquad \forall t \in (0,1)$$

- durch Grenzübergang $t \downarrow 0$ erhält man

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

"$\Leftarrow$"

- es gilt $\mathrm{dom}(f)$ konvex und

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \quad \forall x, y \in \mathrm{dom}(f)$$

- für $t \in [0,1]$ setzen wir

$$z = (1-t)x + ty$$

- dann ist $z \in \mathrm{dom}(f)$ und

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(z) + f'(z)(x-z) \\ f(y) &\geq f(z) + f'(z)(y-z) \end{aligned}$$

- multiplizieren wir die erste Ungleichung mit $1-t$ und die zweite mit t und addieren die Ergebnisse, dann erhalten wir

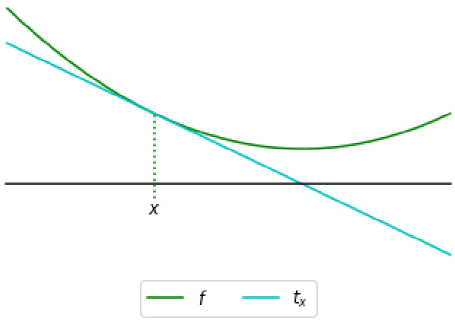
$$\begin{aligned} (1-t)f(x) + tf(y) &\geq (1-t)\big(f(z) + f'(z)(x-z)\big) \\ &\quad + t\big(f(z) + f'(z)(y-z)\big) \\ &= f(z) + f'(z)\big(\underbrace{(1-t)x + ty}_{z} - z\big) \\ &= f(z) \\ &= f\big((1-t)x + ty\big) \end{aligned}$$

□

Bemerkung: $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) =: t_x(y)$, d.h. der Graph von f liegt immer oberhalb der Tangenten t_x.

```
import sympy as sy
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

%matplotlib inline

fsize = 12

x = sy.symbols('x')
f  = sy.Lambda(x, x*x/2 + 1/2)
f1 = sy.Lambda(x, f(x).diff(x))

x0 = -1

tx = sy.Lambda(x, f(x0) + f1(x0)*(x-x0) )

tx = sy.lambdify(x, tx(x))
f  = sy.lambdify(x, f(x))

x = np.linspace(-2,1)
xmin = x.min()
xmax = x.max()
```

```
plt.plot(x, f(x) , 'g', label = '$f$')
plt.plot(x, tx(x), 'c', label = '$t_{x}$')
plt.axis('off')
#
tic = 0.2
plt.plot([xmin, xmax], [0,0], 'k')
#
plt.text(x0, -tic, '$x$', ha = 'center', va = 'top', fontsize=fsize)
plt.plot([x0,x0], [-tic,f(x0)], 'g:')
#
plt.legend(loc='lower center', ncol=3, fontsize=fsize)
plt.ylim(xmin, f(xmin));
```



Alternativ zeigt man

Lemma: $f : \mathbb{R}^d \supset \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. f ist konvex genau dann wenn $\mathrm{dom}(f)$ konvex ist und

$$\big(f'(y) - f'(x)\big)(y - x) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathrm{dom}(f).$$

Beweis:

"⇒"

- ist f konvex und differenzierbar, dann gilt

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$$

  bzw.

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$$

- durch Addition der Ungleichungen erhält man

$$f(y) + f(x) \geq f(x) + f(y) + \big(f'(x) - f'(y)\big)(y - x)$$

  und somit

$$\big(f'(y) - f'(x)\big)(y - x) \geq 0$$

"⇐"

- es gelte jetzt

$$\big(f'(y) - f'(x)\big)(y - x) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathrm{dom}(f)$$

- da $\mathrm{dom}(f)$ konvex ist, ist für $s, \lambda \in [0, 1]$ die Funktion

$$g(s) = f\big(x + s\lambda(y - x)\big)$$

  wohldefiniert

- es ist
$$g(0) = f(x), \quad g(1) = f\big(x + \lambda(y-x)\big)$$
und mit f ist auch g differenzierbar mit
$$g'(s) = \lambda f'\big(x + s\lambda(y-x)\big)(y-x)$$

- damit folgt
$$\begin{aligned} f\big(x + \lambda(y-x)\big) - f(x) &= g(1) - g(0) \\ &= \int_0^1 g'(\sigma)\, d\sigma \\ &= \int_0^1 \lambda f'\big(x + \sigma\lambda(y-x)\big)(y-x)\, d\sigma \end{aligned}$$

- aus der Voraussetzung folgt
$$\begin{aligned} 0 &\le \Big(f'\big(x+\sigma(y-x)\big) - f'\big(x+\sigma\lambda(y-x)\big)\Big)\Big(x+\sigma(y-x) - \big(x+\sigma\lambda(y-x)\big)\Big) \\ &= \sigma(1-\lambda)\Big(f'\big(x+\sigma(y-x)\big) - f'\big(x+\sigma\lambda(y-x)\big)\Big)(y-x) \end{aligned}$$

- für $\sigma, \lambda \in (0,1)$ ist $\sigma(1-\lambda) > 0$ und damit
$$f'\big(x+\sigma\lambda(y-x)\big)(y-x) \le f'\big(x+\sigma(y-x)\big)(y-x)$$

- benutzen wir diese Abschätzung im Integral von oben, so erhalten wir wegen $\lambda \in (0,1)$
$$\begin{aligned} f\big(x + \lambda(y-x)\big) - f(x) &= \lambda \int_0^1 f'\big(x + \sigma\lambda(y-x)\big)(y-x)\, d\sigma \\ &\le \lambda \int_0^1 f'\big(x + \sigma(y-x)\big)(y-x)\, d\sigma \\ &= \lambda\big(f(y) - f(x)\big) \end{aligned}$$
und damit
$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

- für $\lambda = 0$ bzw. $\lambda = 1$ gilt die Ungleichung trivialerweise

□

Bemerkung: $\big(f'(y) - f'(x)\big)(y-x) \ge 0$ bedeutet, das f' monoton wachsend ist.

Oben haben wir gesehen, dass bei konvexem f lokale Minima *immer* globale Minima sind.

Lemma: $f : \mathbb{R}^d \supset \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ konvex, differenzierbar, $\mathrm{dom}(f)$ offen. $x \in \mathrm{dom}(f)$ ist globales Minimum von f genau dann wenn $f'(x) = 0$

Beweis:

"⇒"

- $\mathrm{dom}(f)$ ist offen, also ist x auch ein lokales Minimum und somit gilt $f'(x) = 0$

"⇐"

- $f(y) \ge f(x) + f'(x)(y-x) = f(x) \quad \forall y \in \mathrm{dom}(f)$

□

Jetzt betrachten wir zweite Ableitungen von f.

Lemma: $f : \mathbb{R}^d \supset \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ sei C^2, $\mathrm{dom}(f)$ offen. f ist konvex genau dann wenn $\mathrm{dom}(f)$ konvex ist und
$$f''(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom}(f)$$

gilt ($f''(x) \geq 0$ bedeutet $f''(x)$ ist positiv semidefinit).

Beweis:

"$\Rightarrow$"

- da $\mathrm{dom}(f)$ offen ist gilt für hinreichend kleines $t \geq 0$

$$x + tv \in \mathrm{dom}(f) \quad \forall v \in \bar{B}_1(0)$$

- da f konvex und damit f' monoton wachsend ist erhält man für beliebiges $v \in \bar{B}_1(0)$

$$\begin{aligned} v^T f''(x)v &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{\big(f'(x+tv) - f'(x)\big)v}{t} \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{\big(f'(x+tv) - f'(x)\big)tv}{t^2} \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{\big(f'(x+tv) - f'(x)\big)(x+tv-x)}{t^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$"

- da $\mathrm{dom}(f)$ konvex ist, ist für $t \in [0,1]$ und $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ die Funktion

$$g(t) = f'\big(x + t(y-x)\big)(y-x)$$

wohldefiniert und auf $(0,1)$ differenzierbar mit Ableitung

$$g'(t) = (y-x)^T f''\big(x + t(y-x)\big)(y-x)$$

- aus dem Mittelwertsatz folgt dann

$$\begin{aligned} \big(f'(y) - f'(x)\big)(y-x) &= g(1) - g(0) \\ &= g'(\tau) \\ &= (y-x)^T f''\big(x + \tau(y-x)\big)(y-x) \end{aligned}$$

mit $\tau \in (0,1)$

- da $\mathrm{dom}(f)$ konvex ist, gilt für alle $\tau \in (0,1)$ und für alle $x, y \in \mathrm{dom}(f)$

$$\xi = x + \tau(y-x) \in \mathrm{dom}(f)$$

also

$$\big(f'(y) - f'(x)\big)(y-x) = (y-x)^T f''(\xi)(y-x) \geq 0$$

womit f' monoton wachsend und damit f konvex ist

□

Bemerkung:

- ist $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathrm{dom}(f)$ (positiv definit), dann ist f strikt konvex
- die Umkehrung der letzten Aussage ist falsch, denn $f(x) = x^4$ ist strikt konvex auf $\mathbb{R}$, aber $f''(0) = 0$

1.5 Restringierte konvexe Minimalprobleme

Problemstellung:

- gegeben sei $f : \mathbb{R}^d \supset \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ konvex, sowie

$$\emptyset \neq X \subset \mathrm{dom}(f) \quad \text{konvex}$$

- bestimme $x_* = \mathrm{argmin}_{x \in X} f(x)$

Satz: f, X wie in der Problemstellung, $\mathrm{dom}(f)$ offen, f sei C^1. Dann gilt

$$x_* \in X \quad \text{ist Minimierer} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_*)(x - x_*) \geq 0 \quad \forall x \in X$$

Beweis:

"$\Rightarrow$"

- sei $x_* \in X$ Minimierer, und $x \in X$ mit
$$f'(x_*)(x - x_*) < 0$$

- wir betrachten die Funktion

$$g(t) = f\big(x_* + t(x - x_*)\big),$$
$$g'(t) = f'\big(x_* + t(x - x_*)\big)(x - x_*)$$

- wegen

$$g(0) = f(x_*),$$
$$g'(0) = f'(x_*)(x - x_*) < 0$$

  existiert ein $t > 0$ mit
$$f\big(x_* + t(x - x_*)\big) = g(t) < g(0) = f(x_*)$$

- da X konvex ist, ist $x_* + t(x - x_*) \in X$, so dass x_* kein Minimierer in X sein kann

"$\Leftarrow$"

- f ist konvex, weshalb
$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x) \quad \forall x, y \in \mathrm{dom}(f)$$

  gilt

- mit $x = x_*$ folgt dann mit der Voraussetzung

$$f(y) - f(x_*) \geq f'(x_*)(y - x_*) \geq 0 \quad \forall y \in X \subset \mathrm{dom}(f)$$

  so dass $x_* \in X$ Minimierer ist

□

Bemerkung: $f'(x_*)(x - x_*)$ sind alle "zulässigen" Richtungsableitungen, d.h. solche die "nicht aus X hinaus gehen".

Wann existiert nun ein Minimierer x_*? Ist X kompakt, dann folgt aus der Stetigkeit von f die Existenz. Ist X nicht kompakt, dann kann $\inf_{x \in X} f(x) > -\infty$ sein, es muss aber kein x_* existieren, wie. z.B. bei $f(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$.

Das ist in der Praxis oft nicht schlimm, man gibt sich für eine vorgegebene Toleranz $\varepsilon > 0$ mit einem x_ε mit

$$f(x_\varepsilon) - f(x_*) \leq \varepsilon$$

zufrieden.

Für den Fall $X = \mathbb{R}^d$ erhalten wir hinreichende Existenzaussagen.

Definition: $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dann heißt

$$f^{\leq\alpha} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) \leq \alpha\}$$

α-Sublevel-Menge von f.

Satz: Ist $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ konvex und existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass $f^{\leq\alpha}$ nichtleer und beschränkt ist, dann besitzt f einen globalen Minimierer x_*.

Beweis:

- f ist stetig und $f^{\leq\alpha}$ ist das Urbild von $(-\infty, \alpha] \subset \mathbb{R}$
- $(-\infty, \alpha]$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, also ist $f^{\leq\alpha}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$
- $f^{\leq\alpha}$ ist nach Voraussetzung auch beschränkt und somit kompakt
- da f stetig ist, nimmt es auf $f^{\leq\alpha}$ sein Minimum an, d.h. $\exists x_* \in f^{\leq\alpha}$ mit

$$x_* = \operatorname{argmin}_{x \in f^{\leq\alpha}} f(x), \quad f(x_*) \leq \alpha$$

- für $x \notin f^{\leq\alpha}$ gilt

$$f(x) \geq \alpha \geq f(x_*)$$

  und somit ist x_* globaler Minimierer

□

1.6 Zusammenfassung

- bei konvexen Funktionen sind lokale auch immer globale Minima
- Konvexität kann bei differenzierbarem f geprüft werden über die Monotonie des Gradienten f' bzw. die positive Semidefinitheit der Hesse-Matrix f''
- ist f konvex und differenzierbar, dann ist

$$f'(x_*) = 0$$

  hinreichend und notwendig dafür, dass x_* globales Minimum ist
- bei restringierter Optimierung konvexer, differenzierbarer Funktionen f über konvexen Mengen X ist

$$f'(x_*)(x - x_*) \geq 0 \quad \forall x \in X$$

  hinreichend und notwendig dafür, dass x_* globales Minimum ist