



# Análisis Frecuencial y Criterio de Estabilidad de Nyquist

Alejandro S.  
Ghersin



## 10.3 Introduction to the Nyquist Criterion

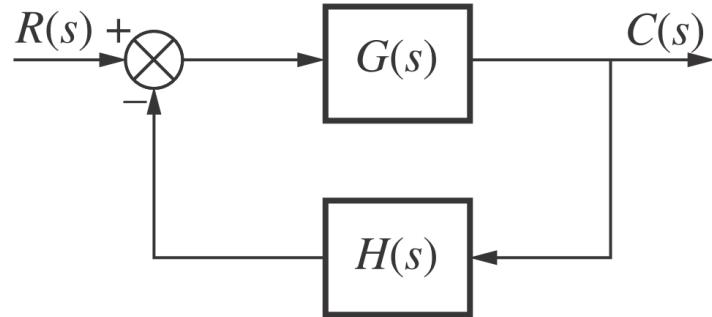
$$G(s) = \frac{N_G}{D_G}$$

$$H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

$$G(s)H(s) = \frac{N_G N_H}{D_G D_H}$$

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N_G N_H}{D_G D_H} = \frac{D_G D_H + N_G N_H}{D_G D_H}$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{N_G D_H}{D_G D_H + N_G N_H}$$

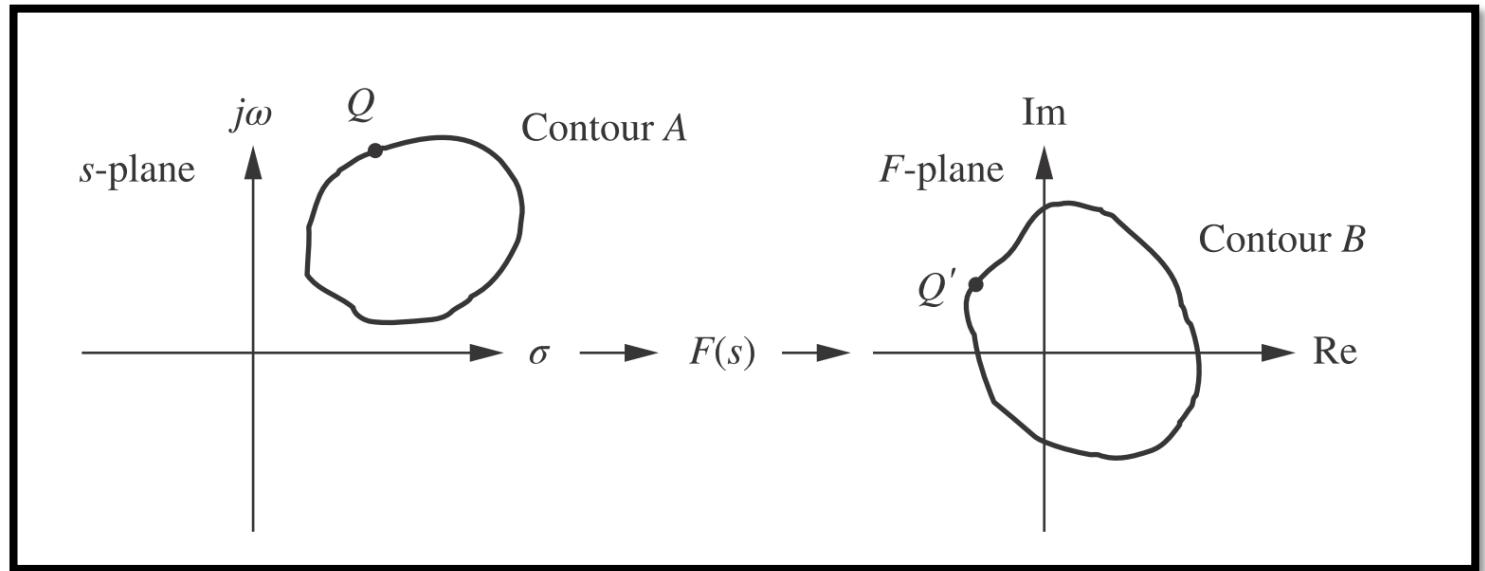


**FIGURE 10.20** Closed-loop control system

From Eqs. (10.38), we conclude that (1) *the poles of  $1 + G(s)H(s)$  are the same as the poles of  $G(s)H(s)$ , the open-loop system, and (2) the zeros of  $1 + G(s)H(s)$  are the same as the poles of  $T(s)$ , the closed-loop system.*

# Aplicaciones (mappings)

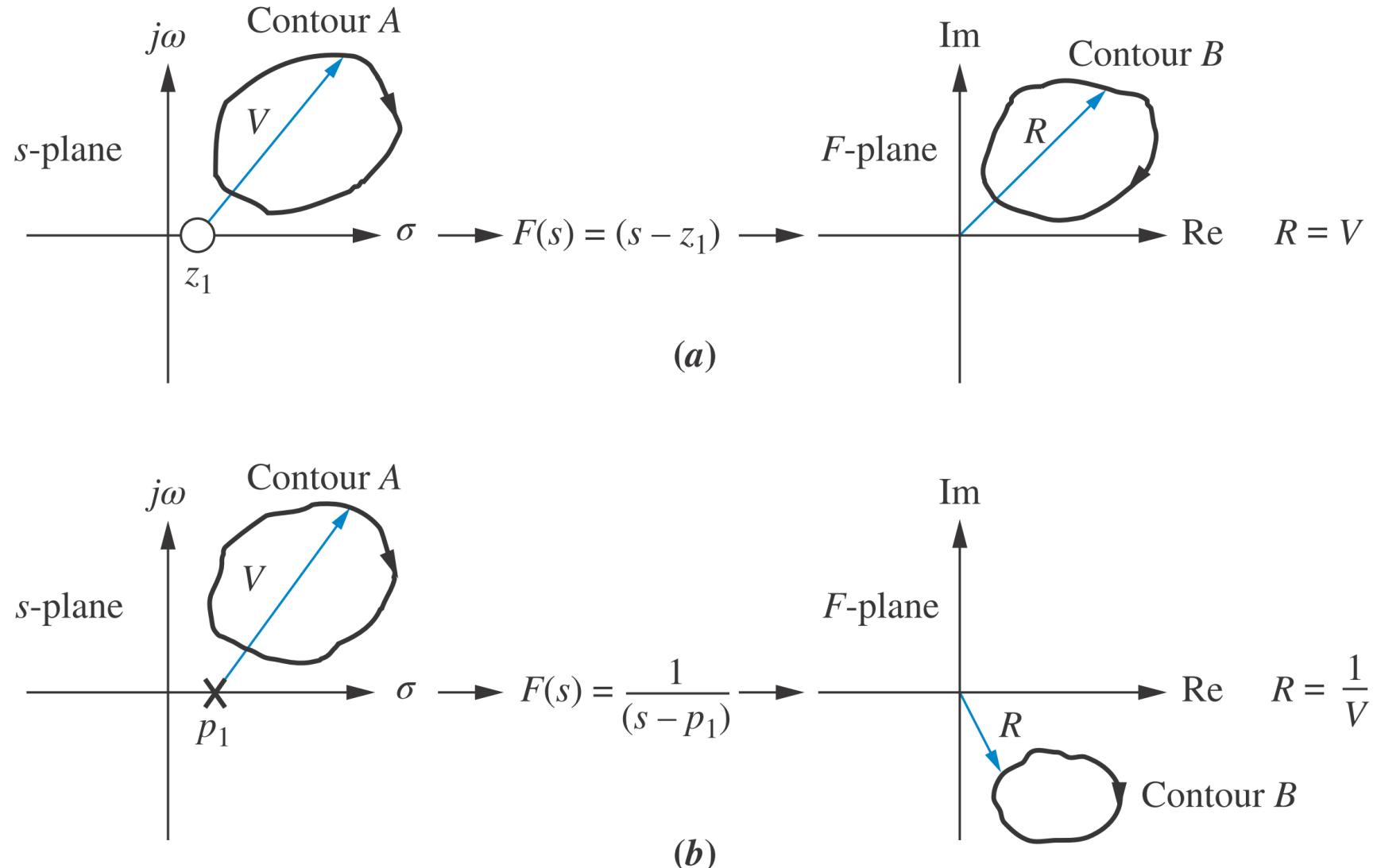
$$F(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots}{(s - p_1)(s - p_2)\dots}$$



- Nos interesa ver que sucede con la transferencia  $F(s)$  como transformación del plano-*s* al plano-*F*.

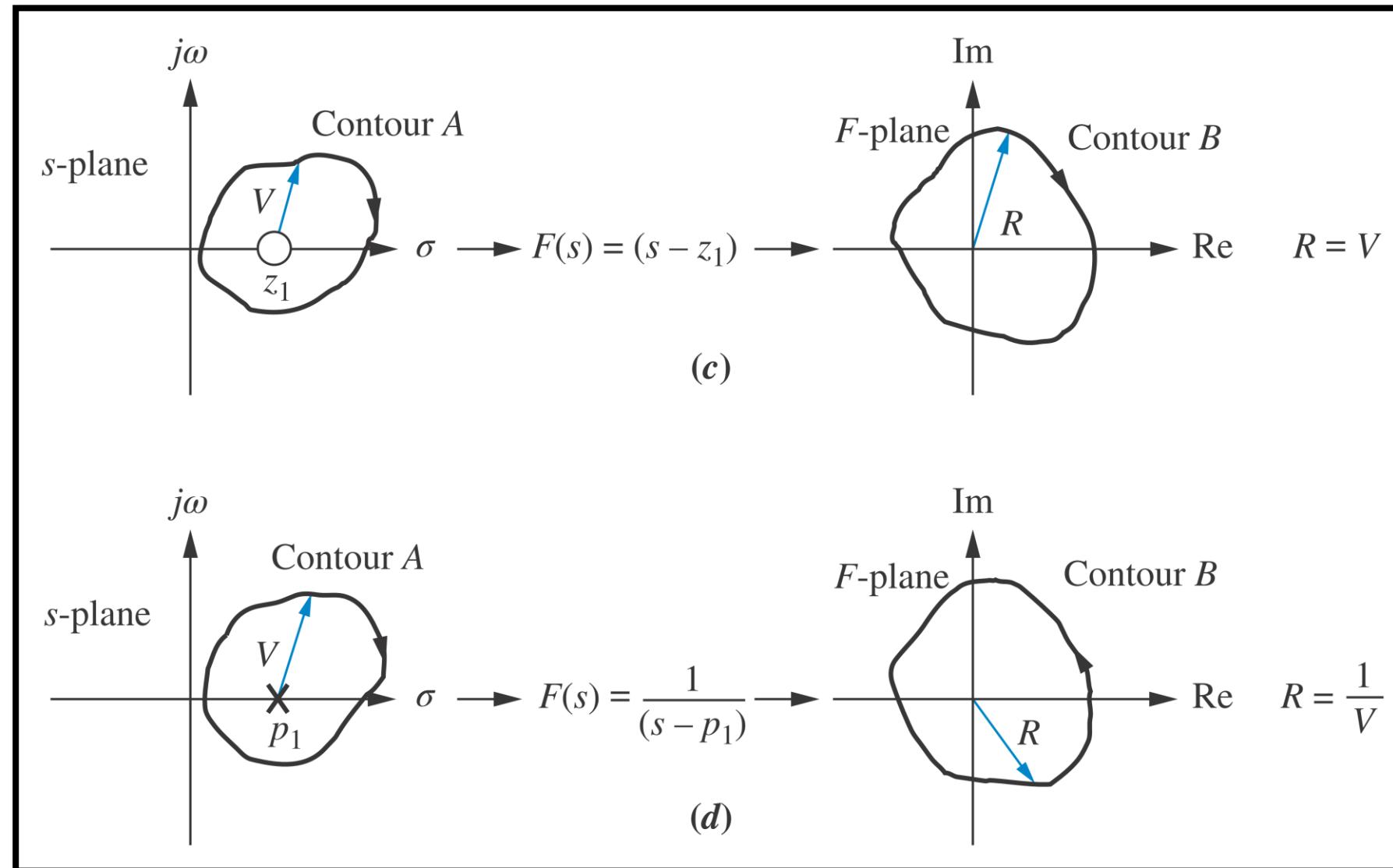
# Aplicaciones (mappings)

- Cero y polo simples afuera del contorno.
- En ninguno de los dos casos, el vector “R” tiene un cambio de fase neto de 360 grados.

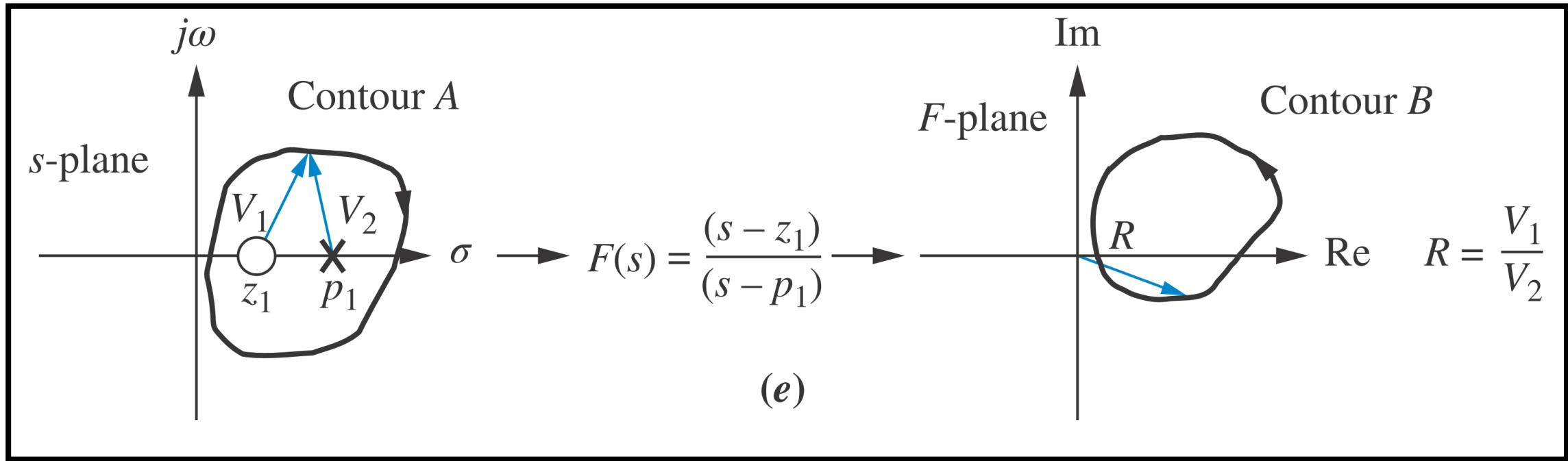


# Aplicaciones (mappings)

- Cero y polo simples adentro del contorno.
- En ambos casos, el vector “R” tiene un cambio de fase neto de 360 grados.
- Por la cantidad de giros puedo identificar cuántas singularidades tiene  $F(s)$  dentro del contorno y de qué tipo son.

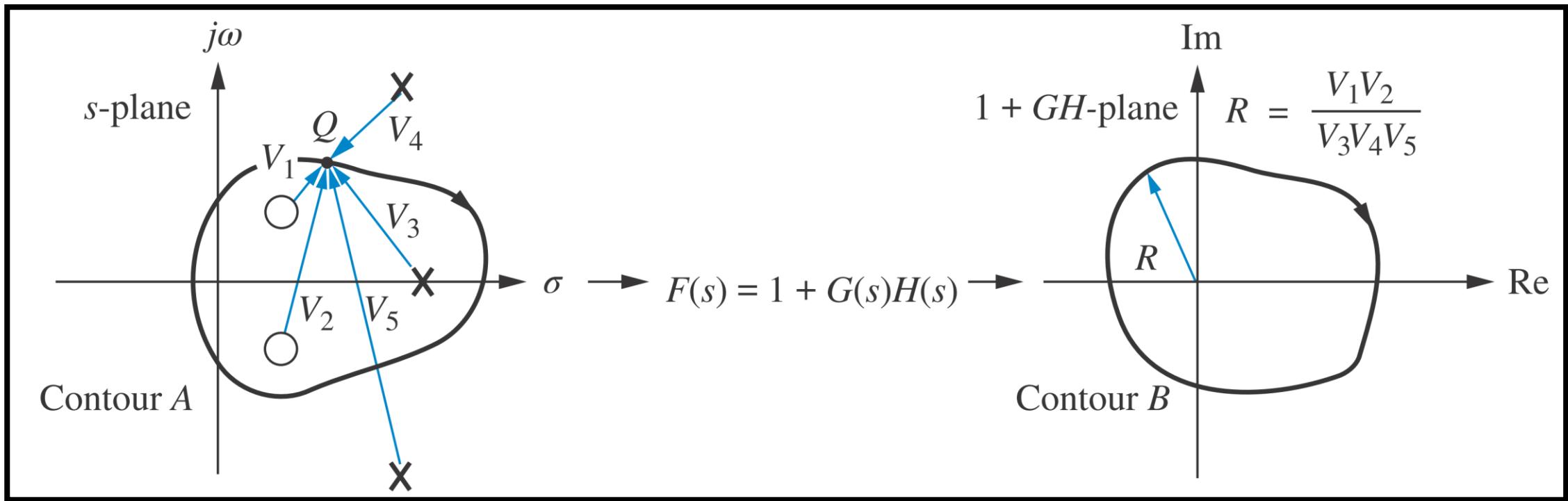


# Aplicaciones (mappings)



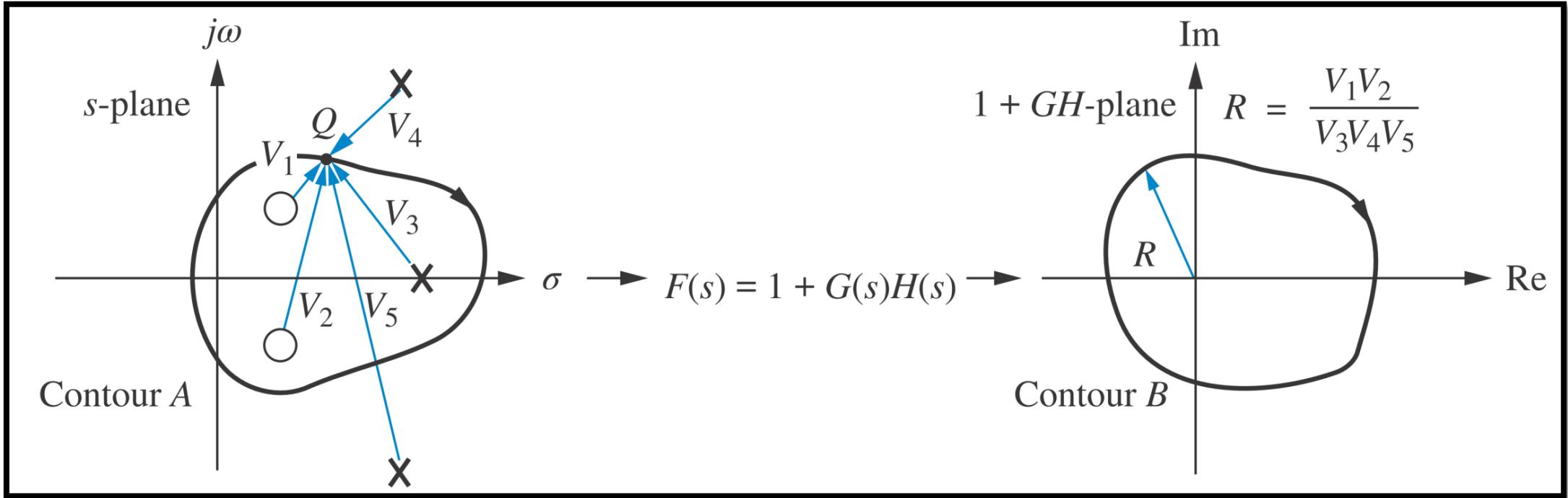
- Ahora la misma  $F(s)$  tiene un cero y un polo simples adentro del contorno.
- La fase de cada uno se “contrapone” y no hay giro neto en el plano-*F*.

# Aplicaciones (mappings)



- Tres polos y un cero simples adentro del contorno:
- Un solo giro neto antihorario en el plano-F.

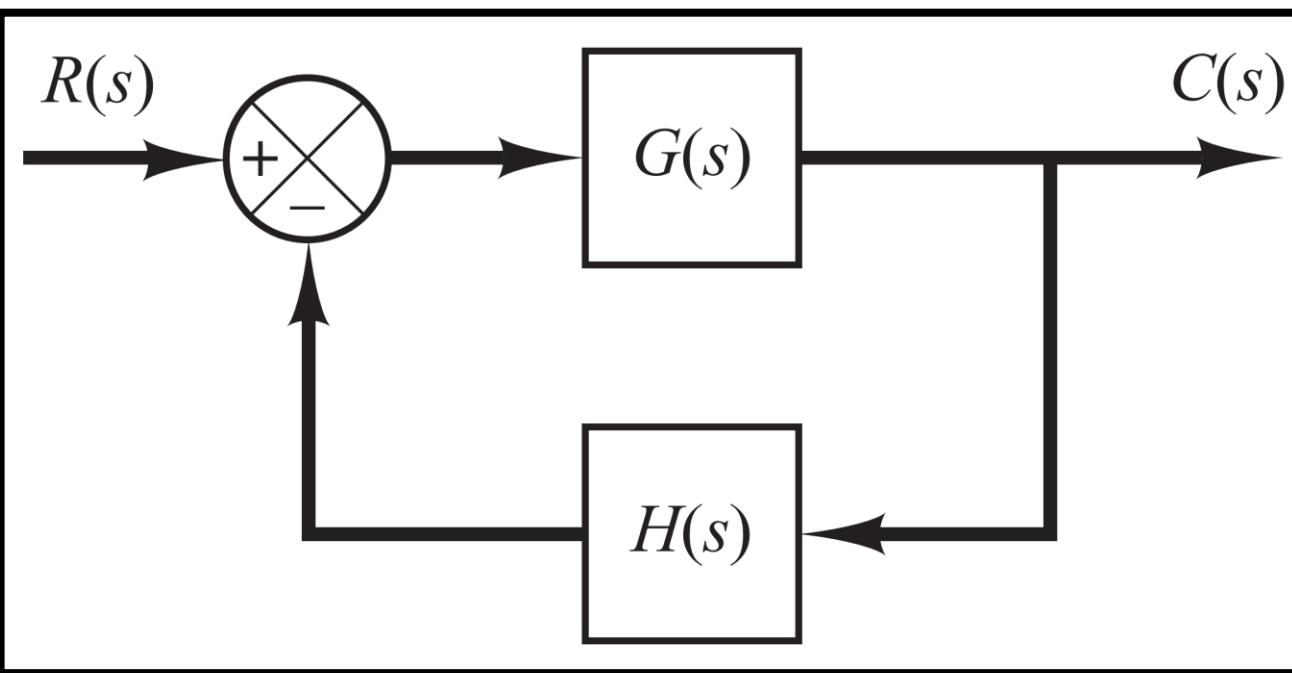
# Aplicaciones (mappings)



- $N$ : cantidad de circulaciones antihorarias al contorno. Si las circulaciones resultan horarias, entonces  $N$  se cuenta como número negativo.
- $P =$  cantidad de polos de  $1+G(s)H(s)$  en el interior del contorno.
- $Z =$  cantidad de ceros de  $1+G(s)H(s)$  en el interior del contorno.
- $N=P-Z$
- El número que importa es  $Z$ . Analizar con el ejemplo.

# Criterio de Estabilidad de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist determina la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto y los polos en lazo abierto.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Polos y ceros de  $F(s) = 1 + L(s)$

$$1 + G(s)H(s) = 1 + G(s)K(s) = 1 + P(s)C(s) =$$

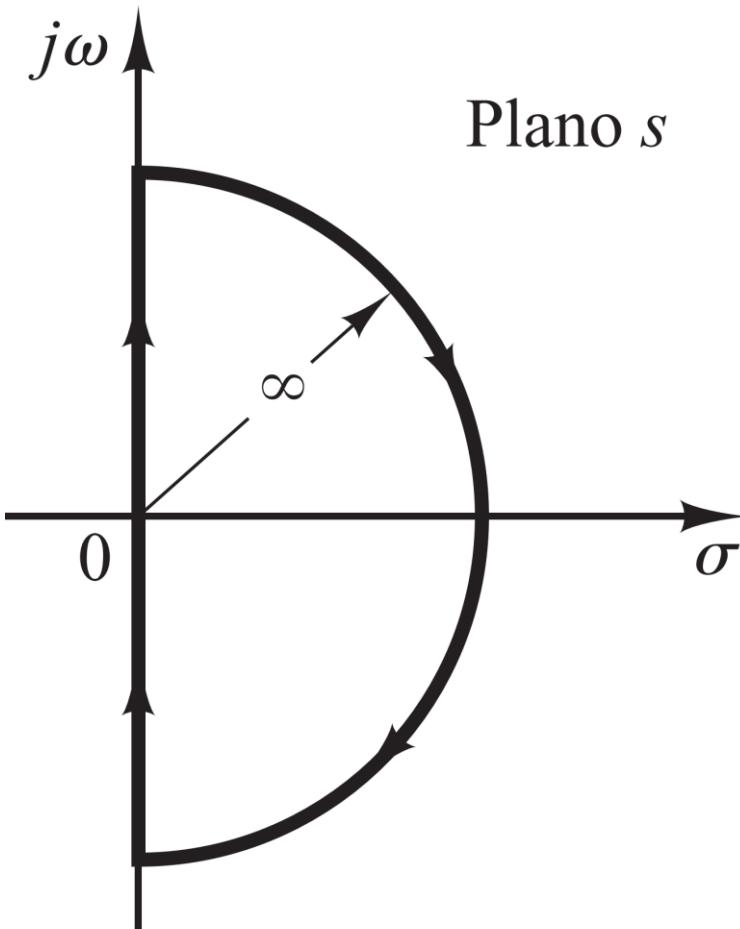
$$= 1 + L(s) = 1 + \frac{k \cdot b(s)}{a(s)} = \frac{a(s) + k \cdot b(s)}{a(s)}$$

# Criterio de Estabilidad de Nyquist

**Teorema de la transformación.** Supóngase que  $F(s)$  es el cociente de dos polinomios en  $s$ . Supóngase también que  $P$  es el número de polos y  $Z$  el número de ceros de  $F(s)$  que se encuentran en cierto contorno cerrado en el plano  $s$ , considerada una multiplicidad de polos y ceros. Supóngase, por último, que este contorno es tal que no pasa a través de ningún polo ni cero de  $F(s)$ . Este contorno cerrado en el plano  $s$  se transforma después dentro del plano  $F(s)$  como una curva cerrada. El número total  $N$  de rodeos del origen del plano  $F(s)$  en el sentido de las agujas del reloj, conforme un punto representativo traza el contorno completo en el sentido de las agujas del reloj, es igual a  $Z - P$ . (Obsérvese que, mediante este teorema de la transformación, no se encuentra el número de ceros y de polos sino su diferencia.)

# Criterio de Estabilidad de Nyquist

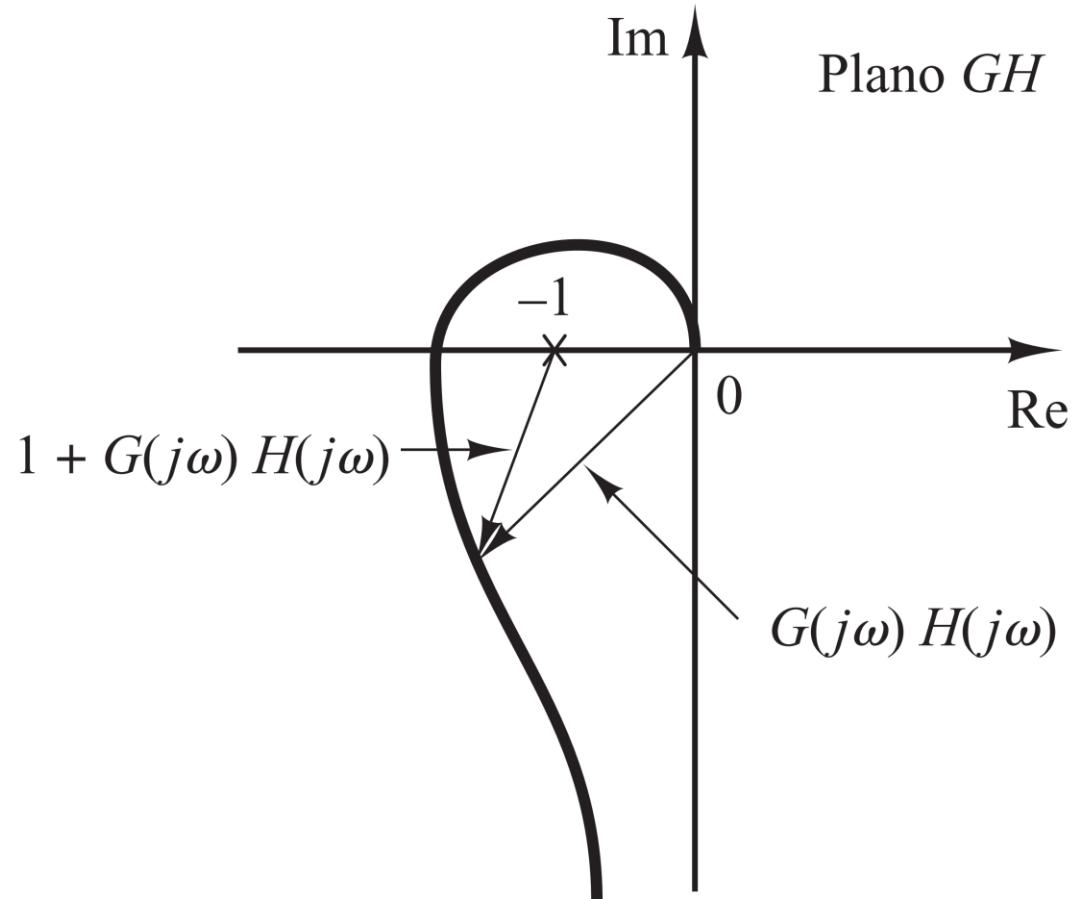
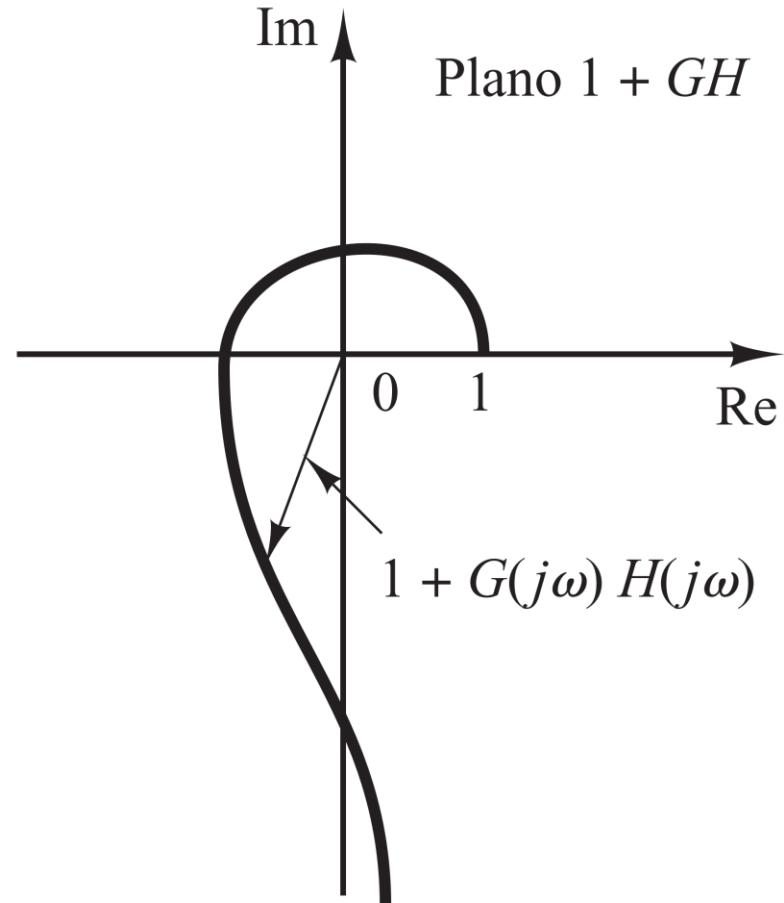
## Contorno del Semiplano Derecho



$$\lim_{s \rightarrow \infty} [1 + G(s)H(s)] = \text{constante}$$

# Criterio de Estabilidad de Nyquist

## Corrimiento del plano $1 + G(s)H(s)$



# Criterio de Estabilidad de Nyquist

*Criterio de estabilidad de Nyquist [para un caso especial cuando  $G(s)H(s)$  no tiene polos ni ceros sobre el eje  $j\omega$ ]:* en el sistema de la Figura 7-44, si la función de transferencia en lazo abierto  $G(s)H(s)$  tiene  $k$  polos en el semiplano derecho del plano  $s$  y  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = \text{constante}$ , para la estabilidad, el lugar geométrico  $G(j\omega)H(j\omega)$ , conforme  $\omega$  varía de  $-\infty$  a  $\infty$ , debe rodear  $k$  veces el punto  $-1 + j0$  en sentido contrario al de las agujas del reloj.

# OBSERVACIONES

- Este criterio se expresa como

$$Z = N + P$$

donde  $Z$  = número de ceros de  $1 + G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$

$N$  = número de rodeos en el sentido de las agujas del reloj del punto  $-1 + j0$

$P$  = número de polos de  $G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$

Si  $P$  no es cero, para un sistema de control estable, se debe tener  $Z = 0$  o  $N = -P$ , lo cual significa que se deben tener  $P$  rodeos del punto  $-1 + j0$  en el sentido de las agujas del reloj.

**ERROR!!!!**

Si  $G(s)H(s)$  no tiene polos en el semiplano derecho del plano  $s$ , entonces  $Z = N$ . Por tanto, para la estabilidad no se debe rodear el punto  $-1 + j0$  mediante el lugar geométrico  $G(j\omega)H(j\omega)$ . En este caso, no es necesario considerar el lugar geométrico para el eje  $j\omega$  completo, sino sólo para la parte de frecuencia positiva. La estabilidad de este sistema se determina observando si el punto  $-1 + j0$  se rodea mediante el diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)H(j\omega)$ . La región encerrada mediante el diagrama de Nyquist aparece en la Figura 7-49. Para la estabilidad, el punto  $-1 + j0$  debe encontrarse fuera de la región sombreada.

OBSERVACIONES: Hay un error de traducción (el correcto es en inglés).

1. This criterion can be expressed as

$$Z = N + P$$

where  $Z$  = number of zeros of  $1 + G(s)H(s)$  in the right-half  $s$  plane

$N$  = number of clockwise encirclements of the  $-1 + j0$  point

$P$  = number of poles of  $G(s)H(s)$  in the right-half  $s$  plane

If  $P$  is not zero, for a stable control system, we must have  $Z = 0$ , or  $N = -P$ , which means that we must have  $P$  counterclockwise encirclements of the  $-1 + j0$  point.

If  $G(s)H(s)$  does not have any poles in the right-half  $s$  plane, then  $Z = N$ . Thus, for stability there must be no encirclement of the  $-1 + j0$  point by the  $G(j\omega)H(j\omega)$  locus. In this case it is not necessary to consider the locus for the entire  $j\omega$  axis, only for the positive-frequency portion. The stability of such a system can be determined by seeing if the  $-1 + j0$  point is enclosed by the Nyquist plot of  $G(j\omega)H(j\omega)$ . The region enclosed by the Nyquist plot is shown in Figure 7-49. For stability, the  $-1 + j0$  point must lie outside the shaded region.

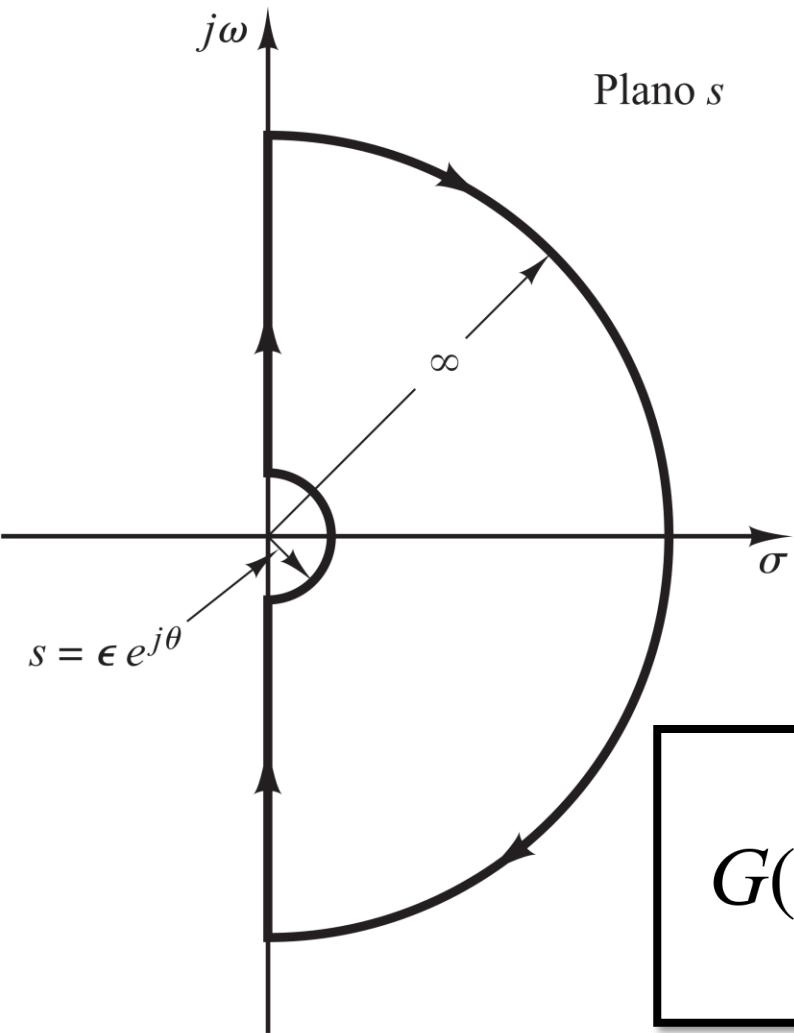
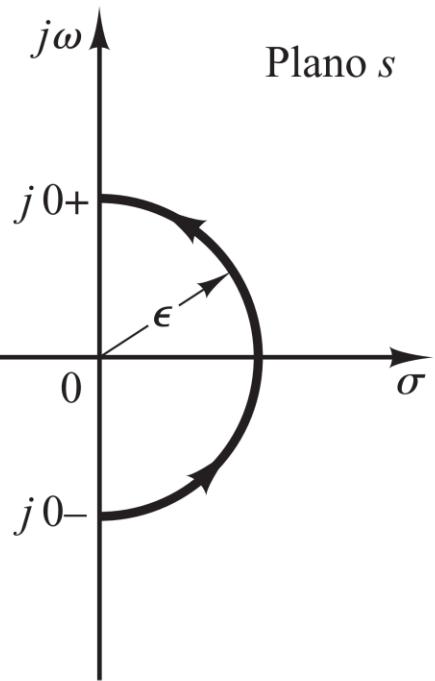
# OBSERVACIONES ( NO TAN IMPORTANTES )

2. Debe tenerse cuidado en el momento de probar la estabilidad de sistemas multilazo, debido a que pueden incluir polos en el semiplano derecho del plano  $s$ . (Obsérvese que, aunque un lazo interno puede ser inestable, el sistema en lazo cerrado completo se estabiliza mediante un diseño adecuado.) Una simple revisión de los rodeos del punto  $-1 + j0$  mediante el lugar geométrico  $G(j\omega)H(j\omega)$  no es suficiente para detectar la inestabilidad en los sistemas multilazo. Sin embargo, en tales casos, si un polo de  $1 + G(s)H(s)$  está en el semiplano derecho del plano  $s$ , se determina con facilidad aplicando el criterio de estabilidad de Routh al denominador de  $G(s)H(s)$ .

Si se incluyen en  $G(s)H(s)$  funciones trascendentes, tales como el retardo de transporte  $e^{-Ts}$ , deben aproximarse mediante una expansión en serie antes de aplicar el criterio de estabilidad de Routh.

3. Si el lugar geométrico de  $G(j\omega)H(j\omega)$  pasa por el punto  $-1 + j0$ , entonces los ceros de la ecuación característica, o los polos en lazo cerrado, se localizan sobre el eje  $j\omega$ . Esto no es conveniente para sistemas de control prácticos. Para un sistema en lazo cerrado bien diseñado, ninguna de las raíces de la ecuación característica debe encontrarse sobre el eje  $j\omega$ .

Caso polos y/o ceros en el eje “ $j\omega$ ”:  
Contorno “ $s$ ” modificado.



$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

$$s = \varepsilon e^{j\theta}$$

$\theta$  varía de  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$

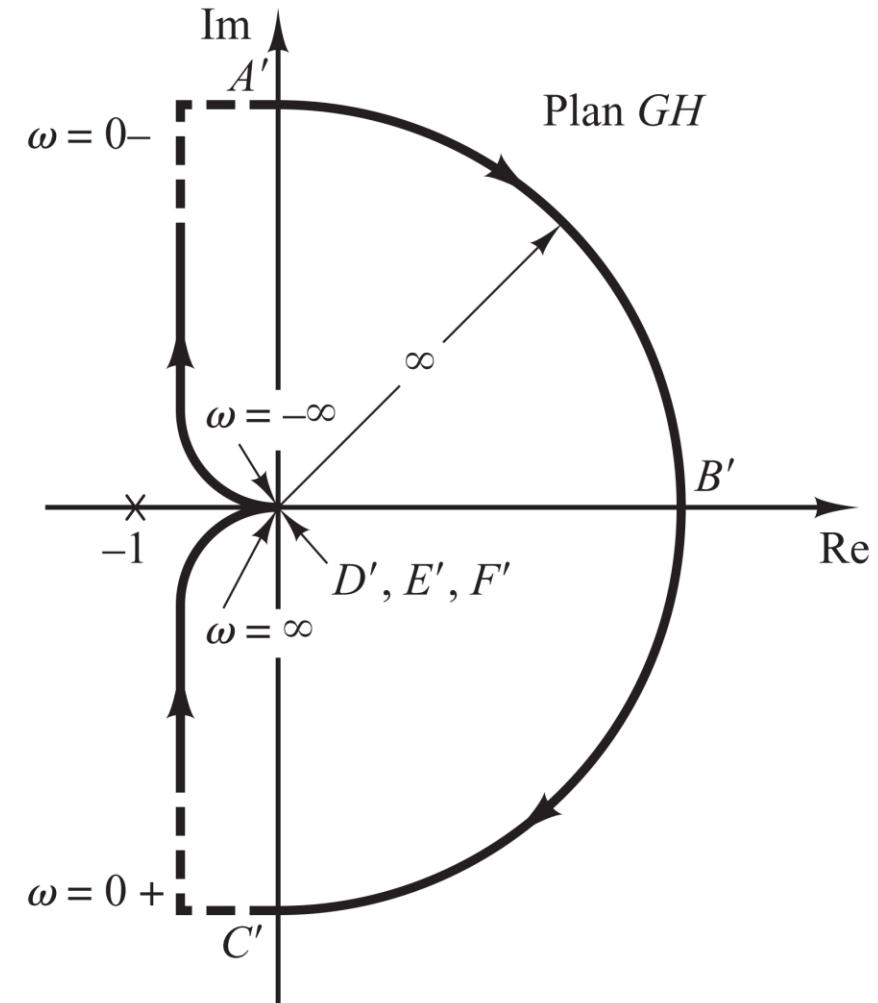
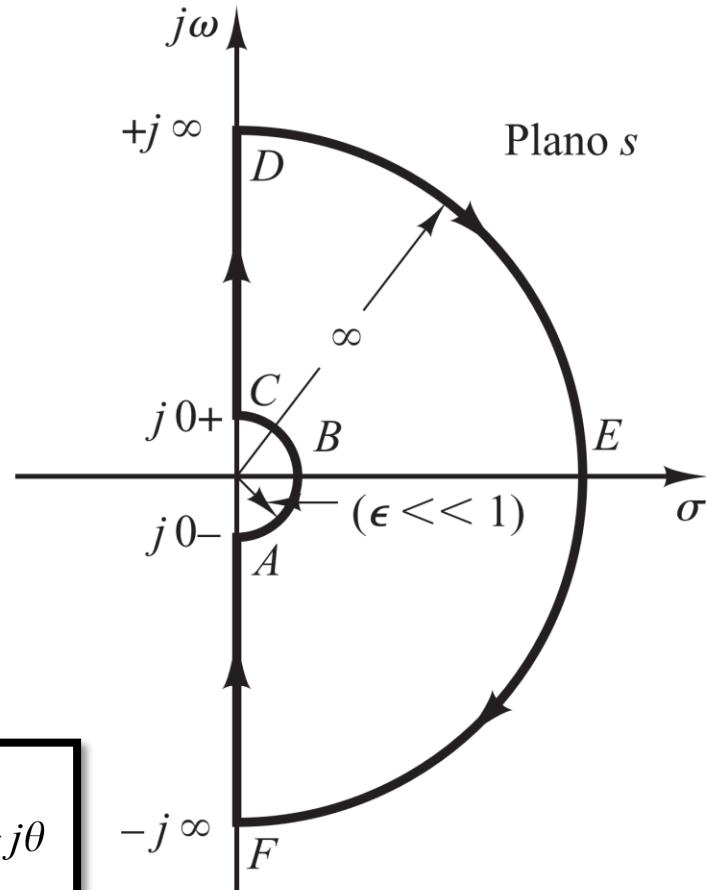
$$G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon} e^{-j\theta}$$

# Caso polos y/o ceros en el eje “ $j\omega$ ”: Contorno “ $s$ ” modificado.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

$$s = \varepsilon e^{j\theta}$$

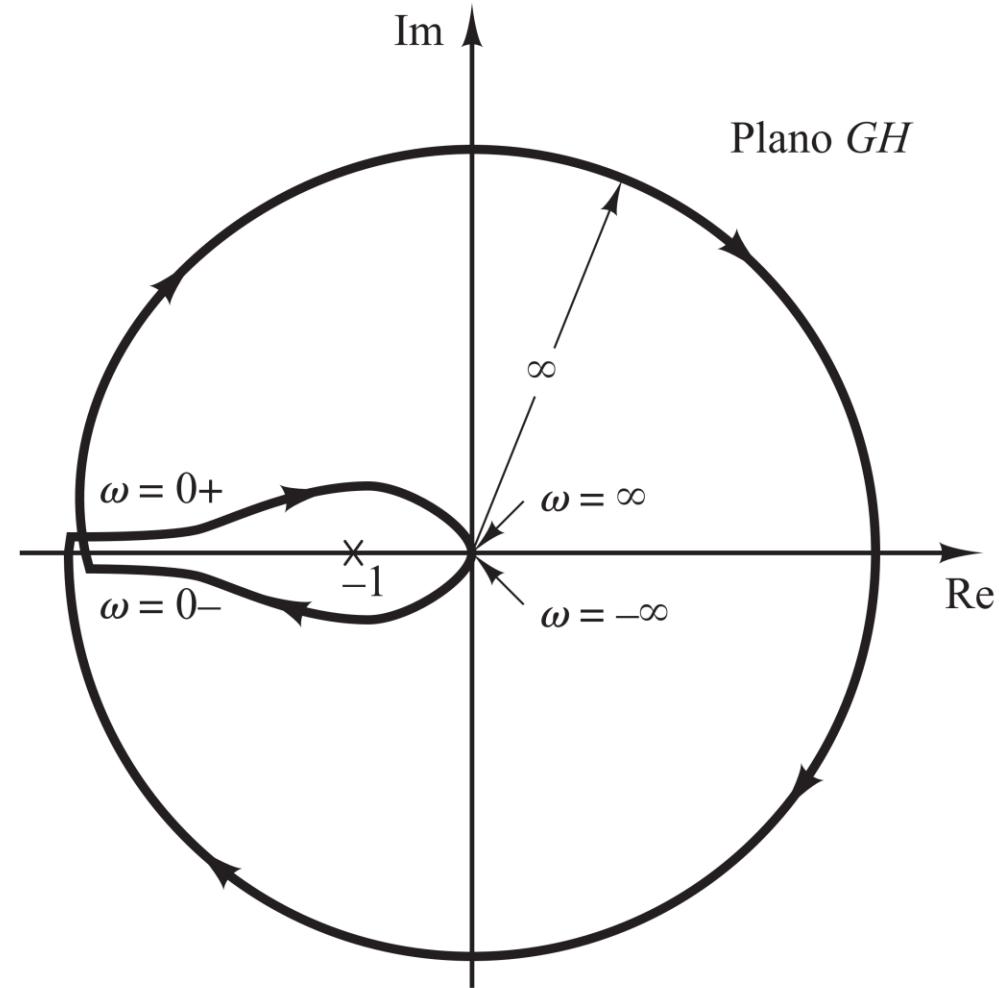
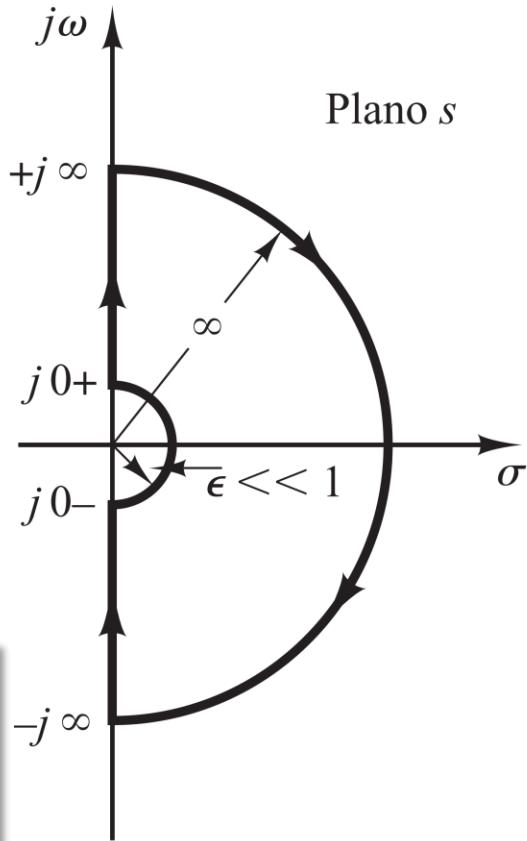
$$G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon} e^{-j\theta}$$



# Caso polos y/o ceros en el eje “ $j\omega$ ”: Contorno “ $s$ ” modificado.

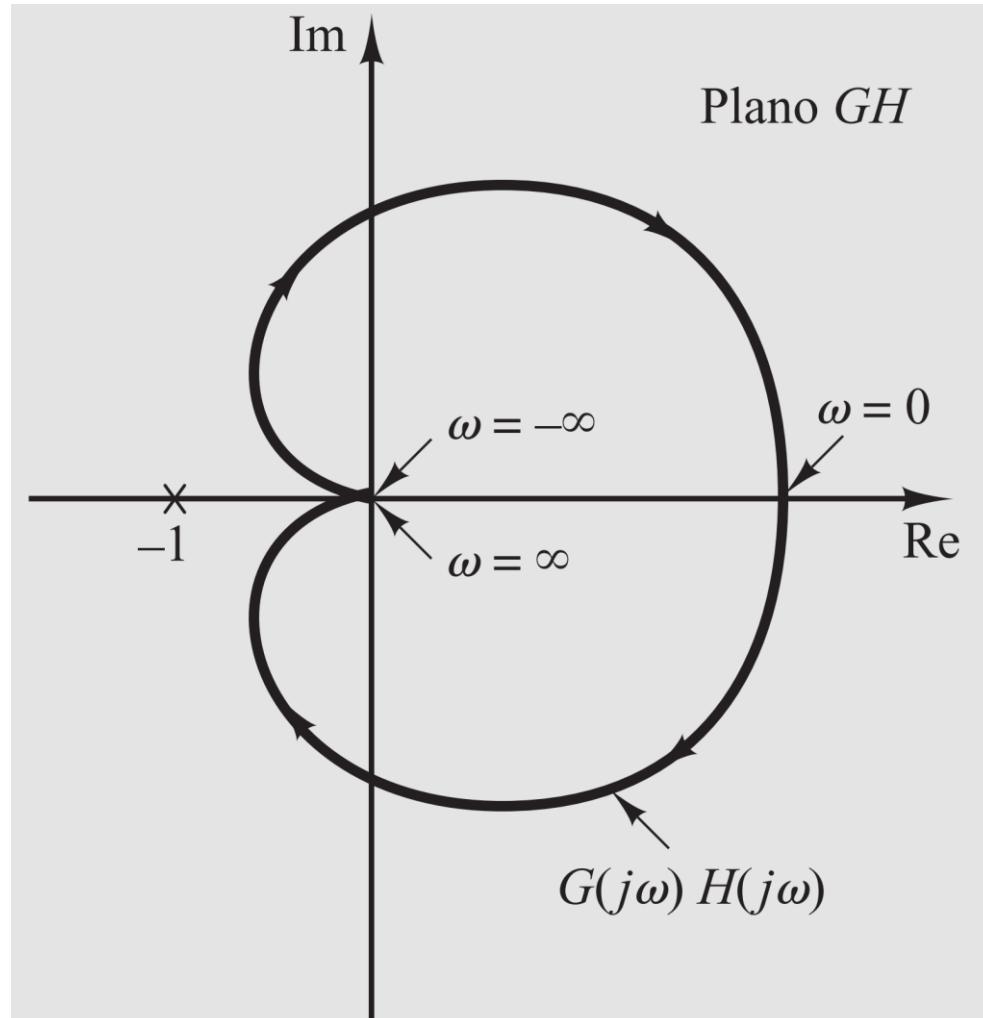
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)}$$

$$\lim_{s \rightarrow \varepsilon e^{j\theta}} G(s)H(s) = \frac{K}{\varepsilon^2 e^{2j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon^2} e^{-2j\theta}$$



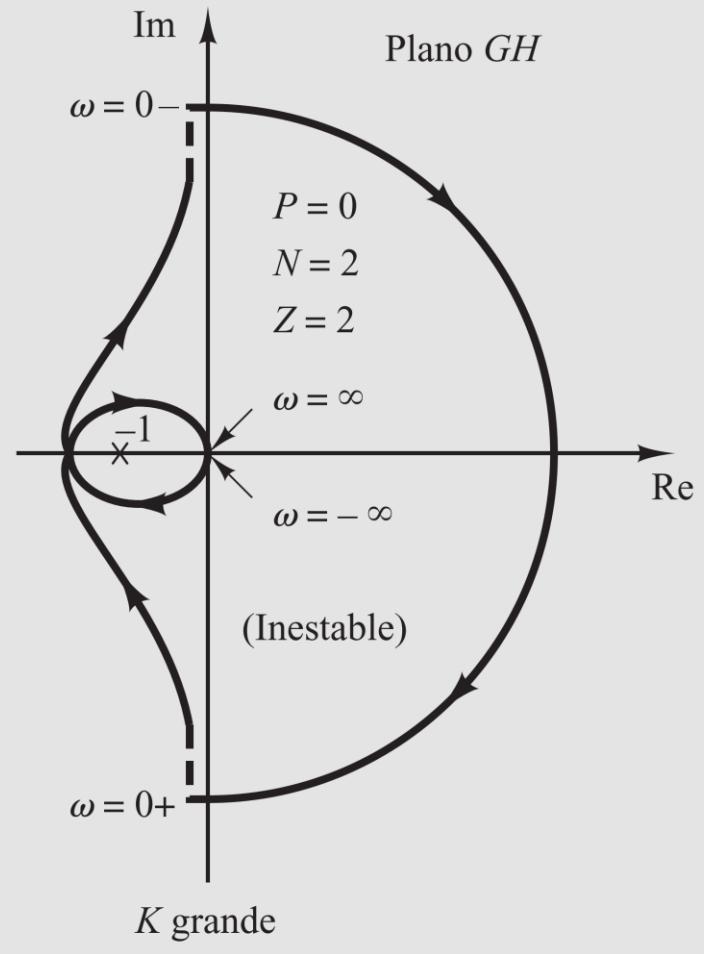
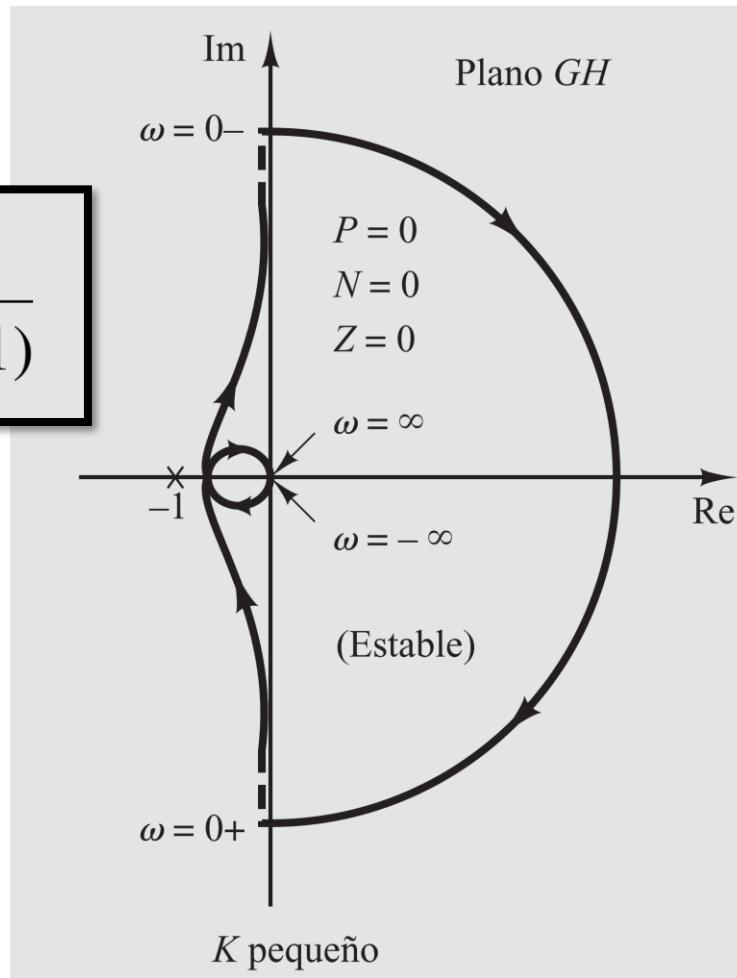
# Ejemplo

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$



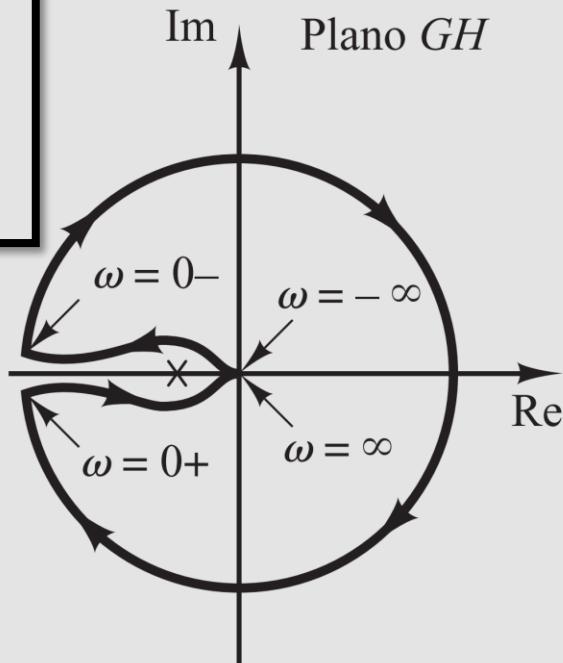
# Ejemplo

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

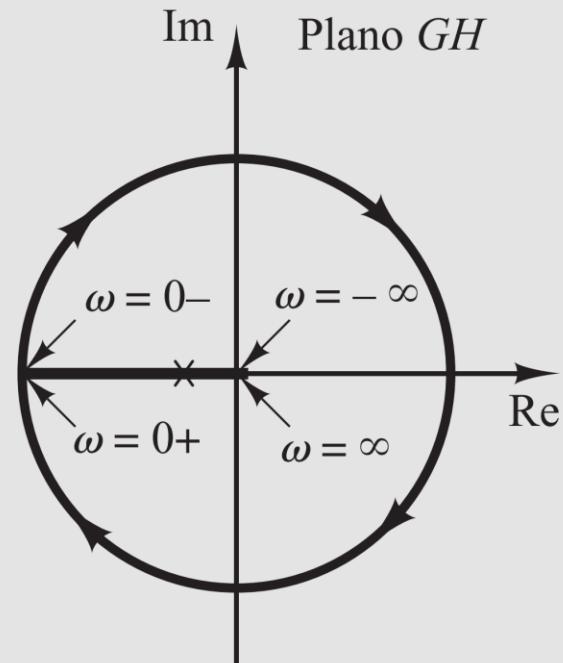


# Ejemplo

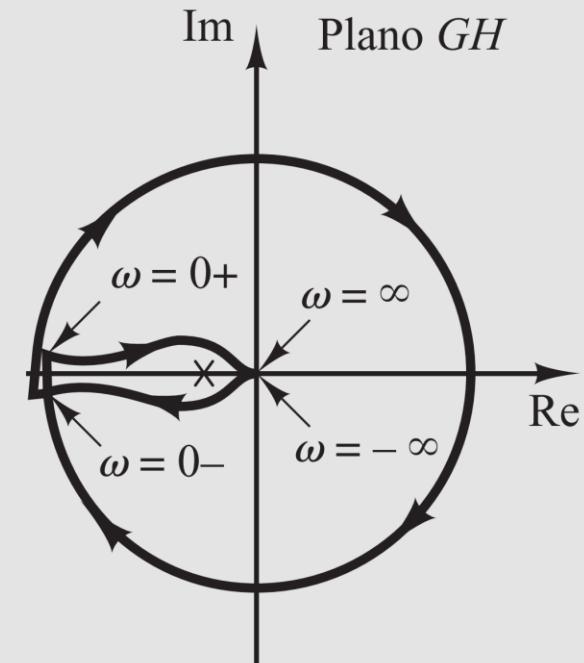
$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$



$T_1 < T_2$   
(Estable)



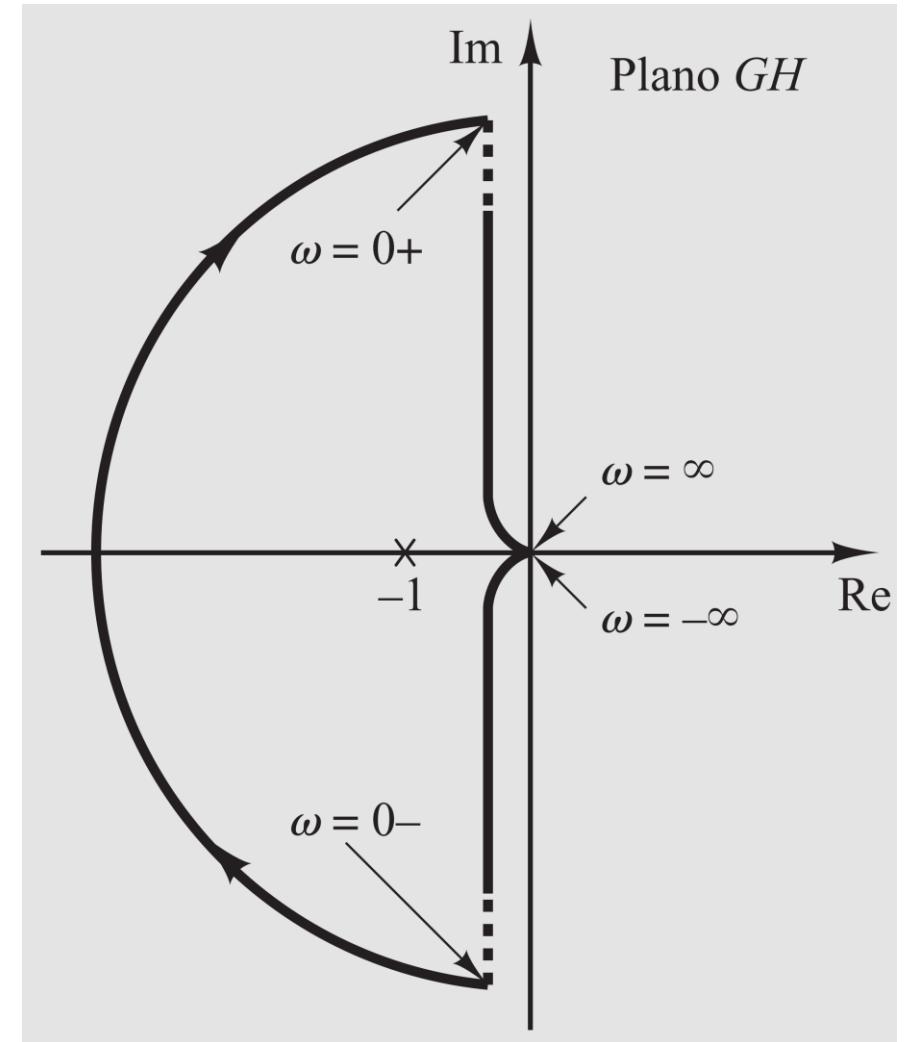
$T_1 = T_2$   
El lugar de  $G(j\omega) H(j\omega)$  pasa  
por el punto  
 $-1 + j0$



$T_1 > T_2$   
(Inestable)

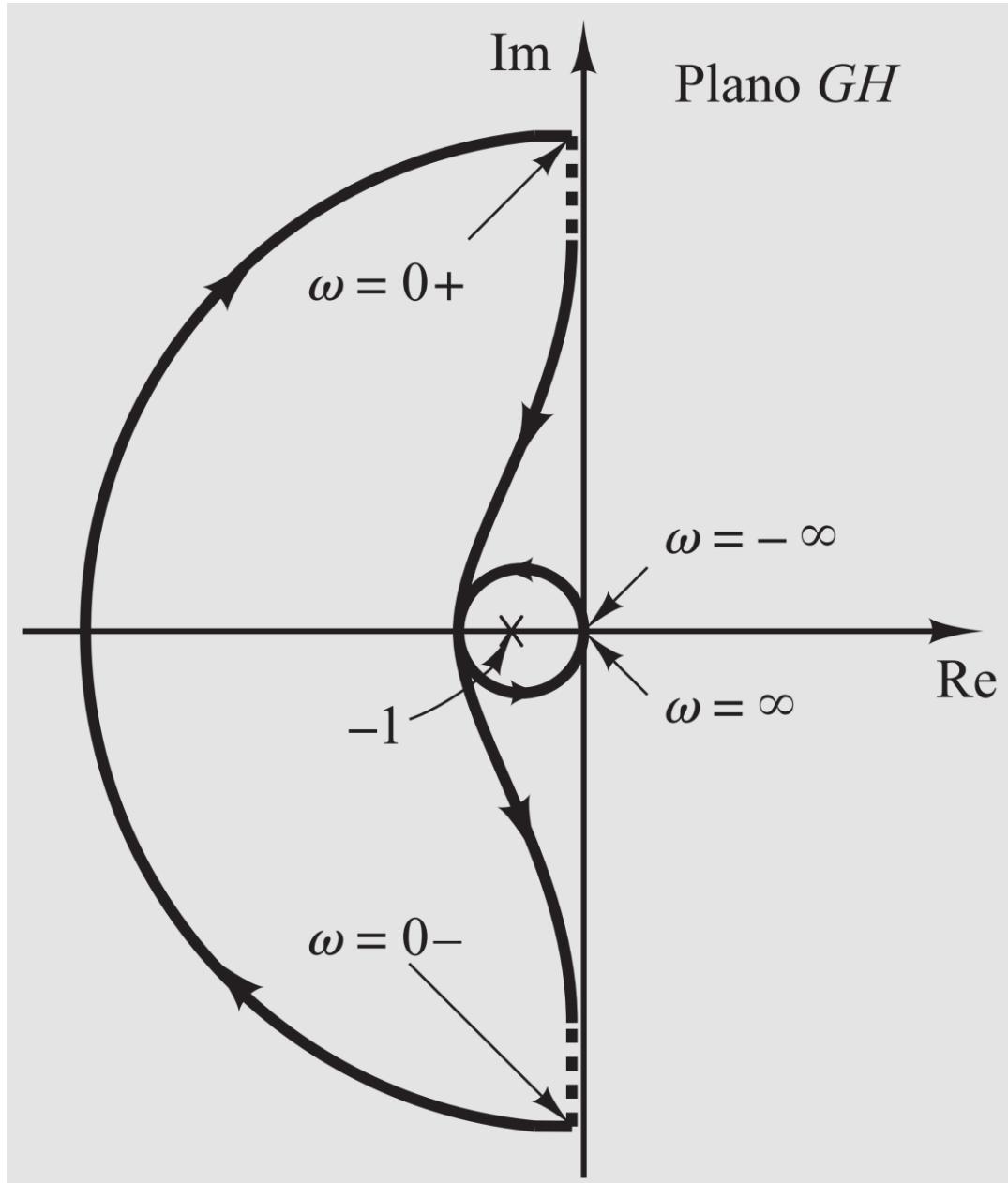
# EJEMPLO

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$



# EJEMPLO

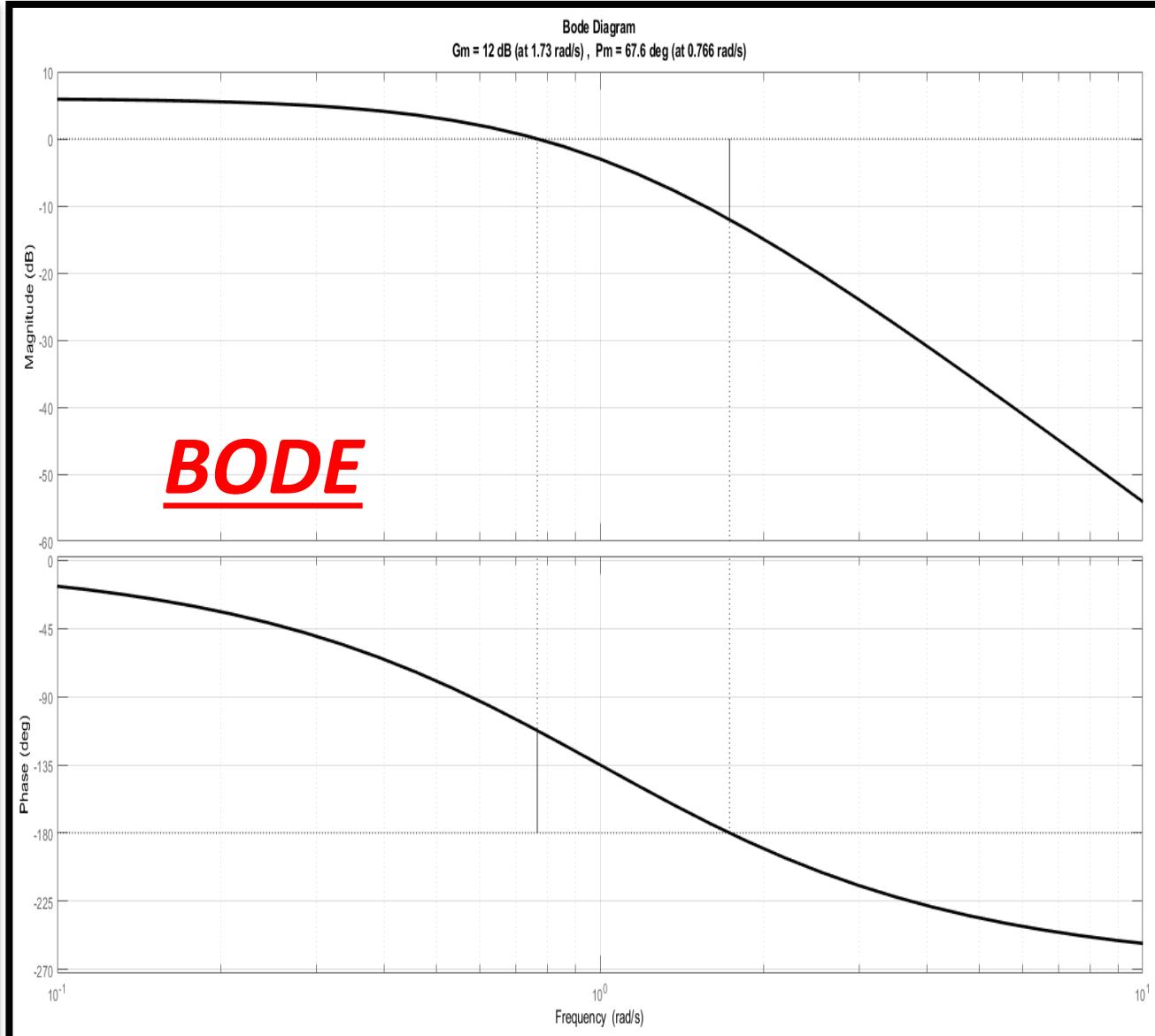
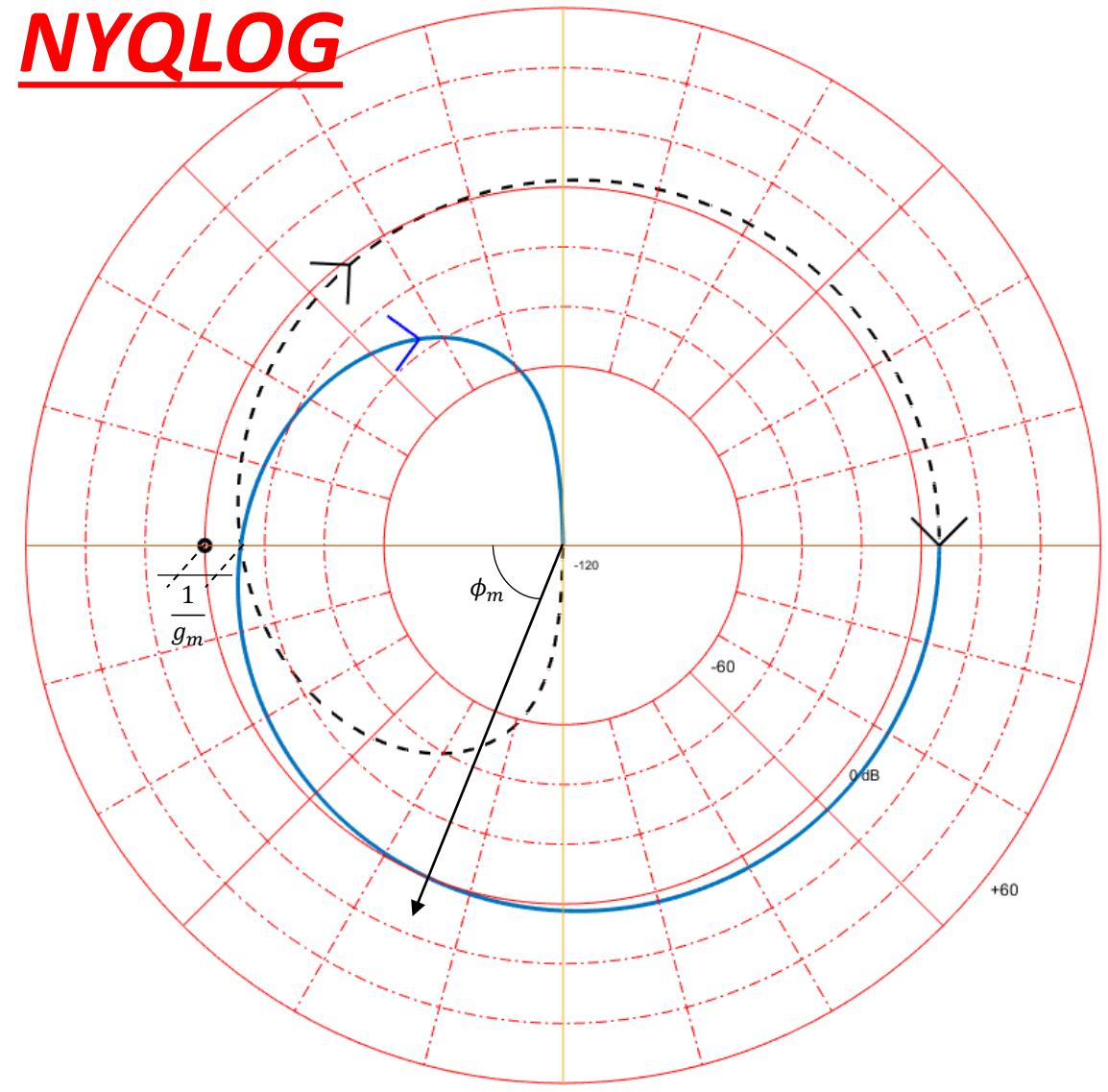
$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 3)}{s(s - 1)} \quad (K > 1)$$



# Márgenes de FASE y GANANCIA

$$L = \frac{2}{(s + 1)^3}$$

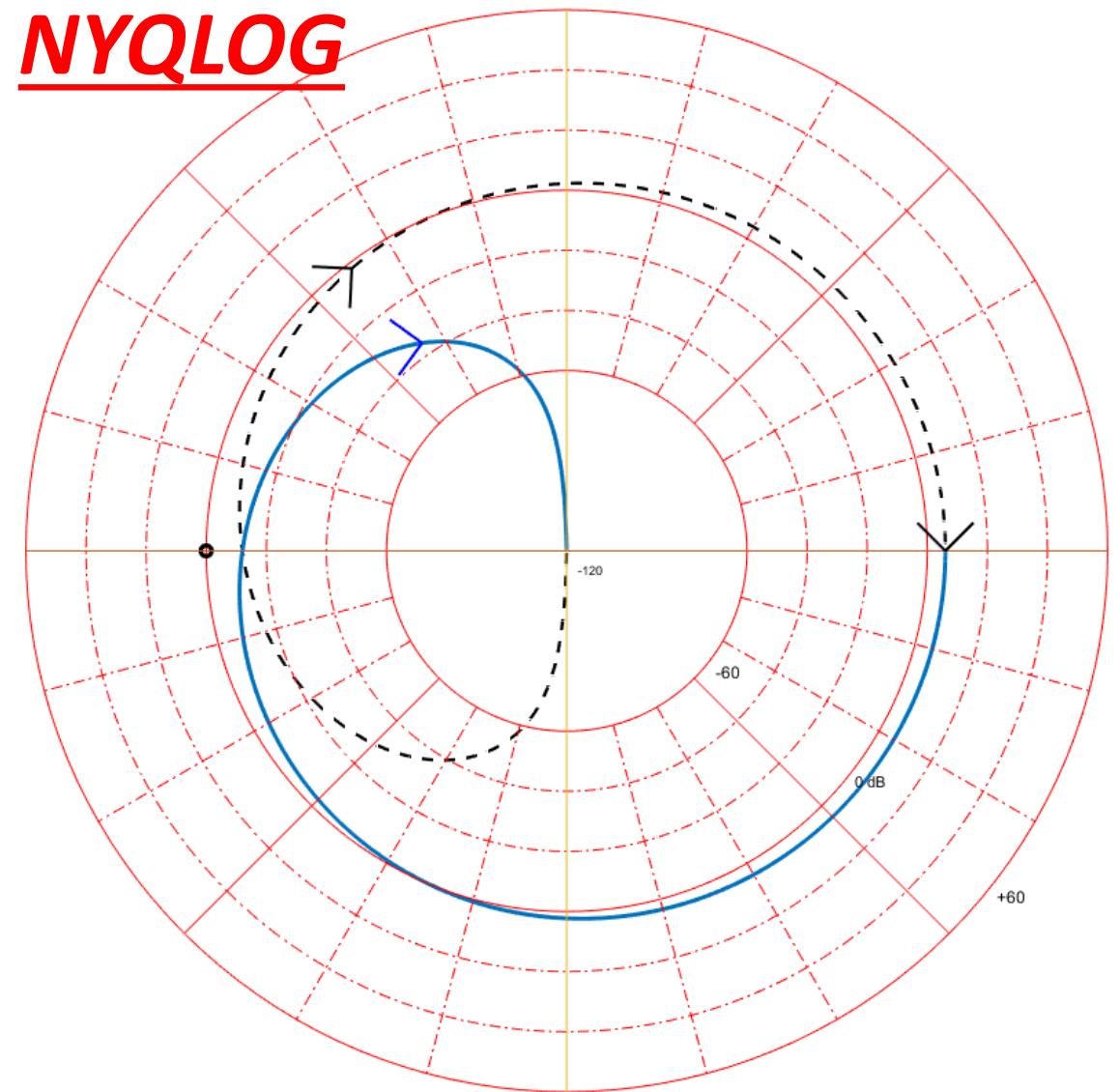
**NYQLOG**



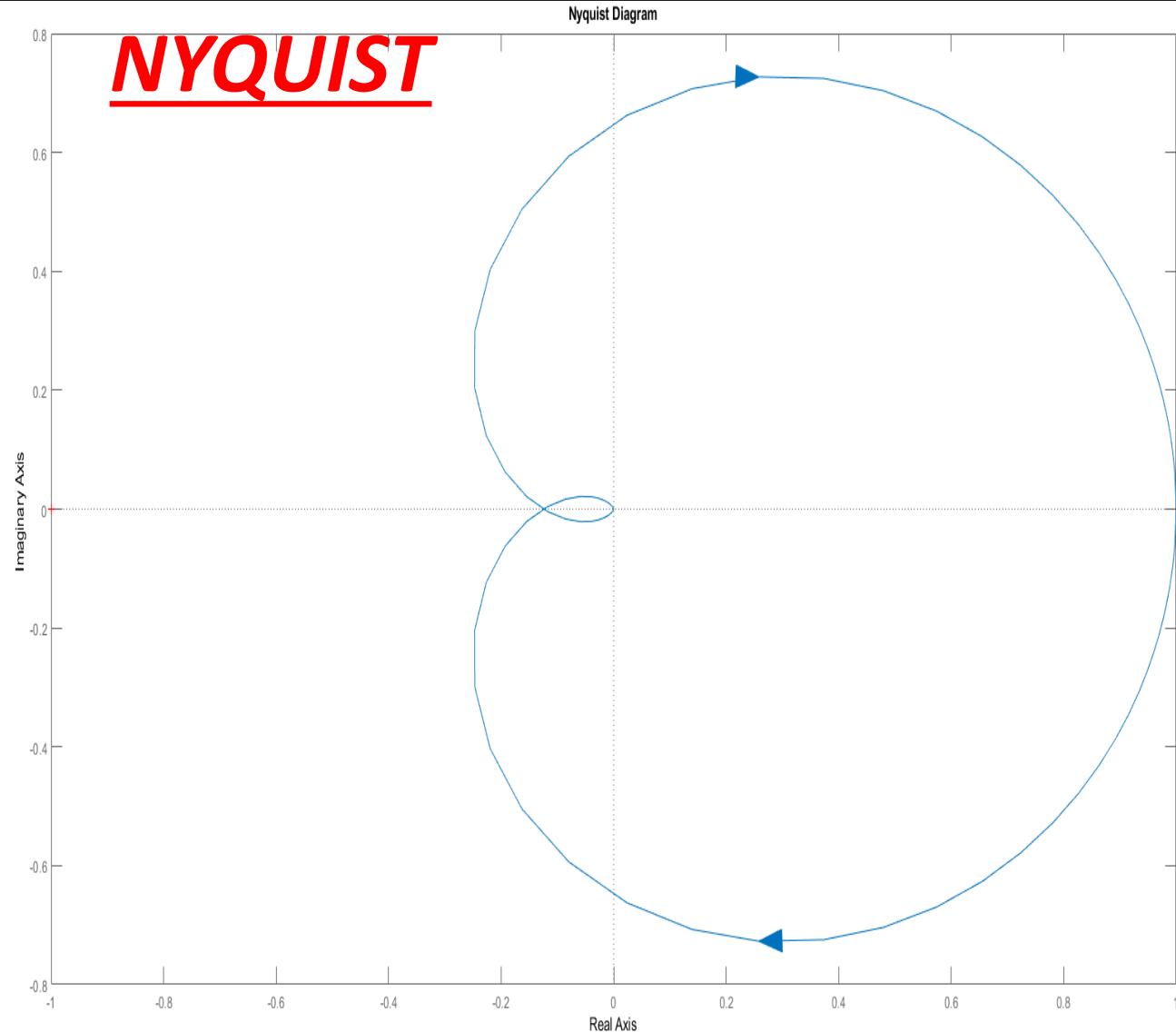
# Márgenes de FASE y GANANCIA

$$L = \frac{2}{(s + 1)^3}$$

**NYQLOG**



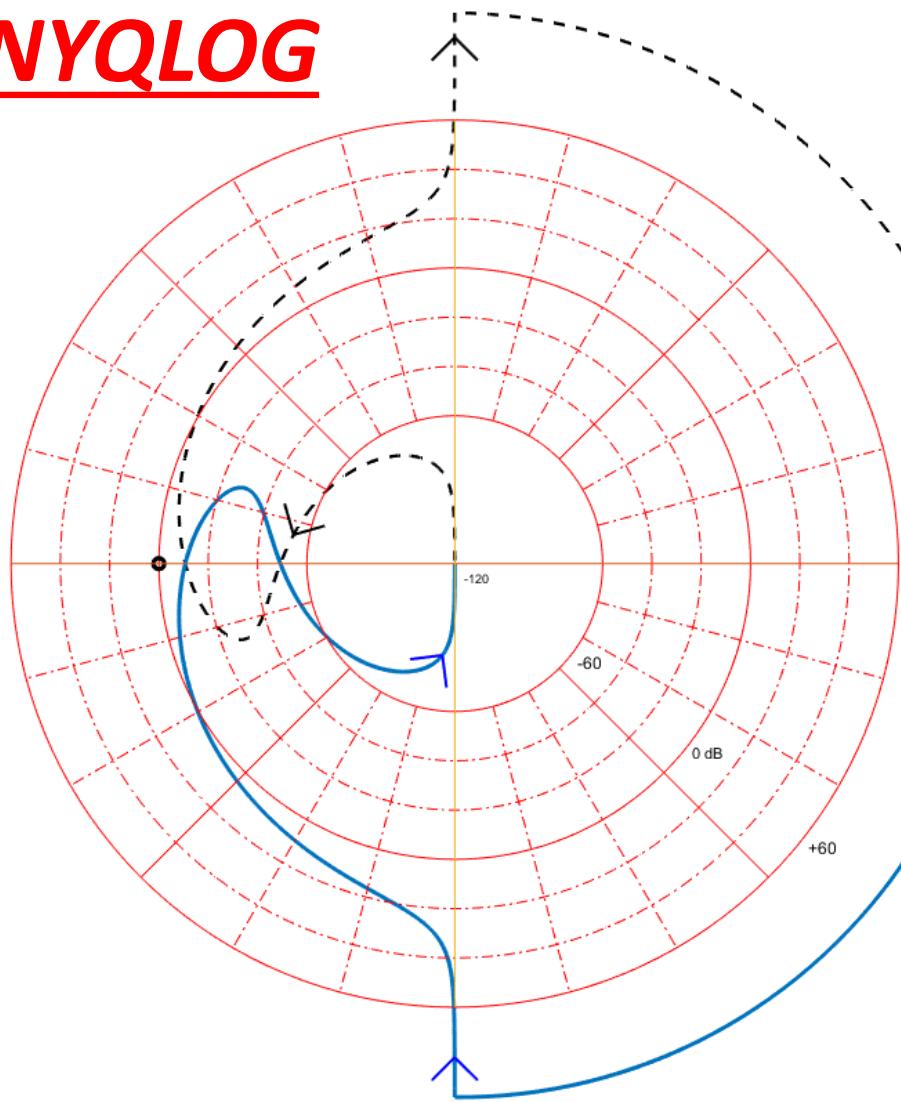
**NYQUIST**



# Estabilidad Condicional:

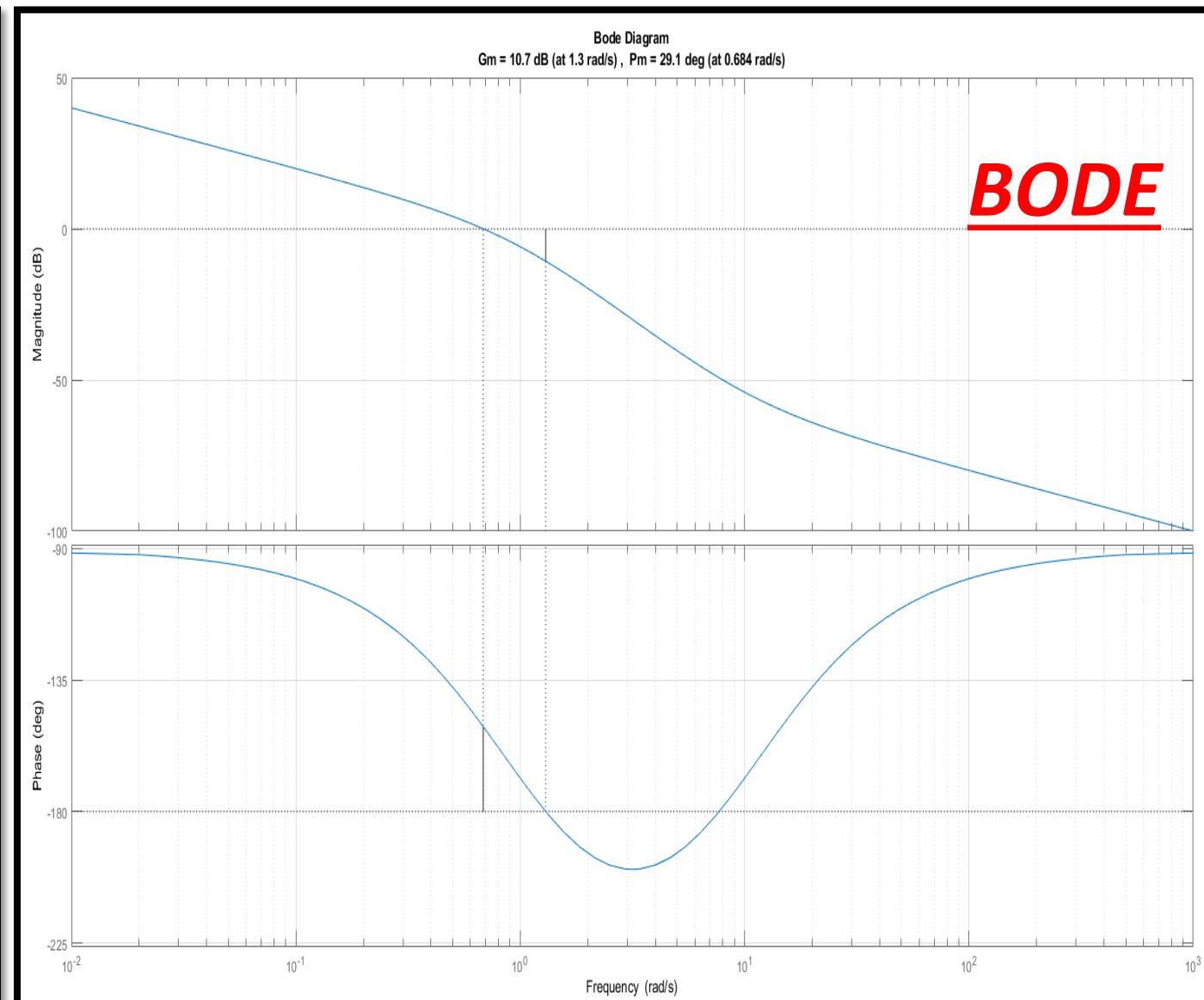
$$L = \frac{k}{100} \frac{(s + 10)^2}{s(s + 1)^2}$$

**NYQLOG**



Bode Diagram  
G<sub>m</sub> = 10.7 dB (at 1.3 rad/s), P<sub>m</sub> = 29.1 deg (at 0.684 rad/s)

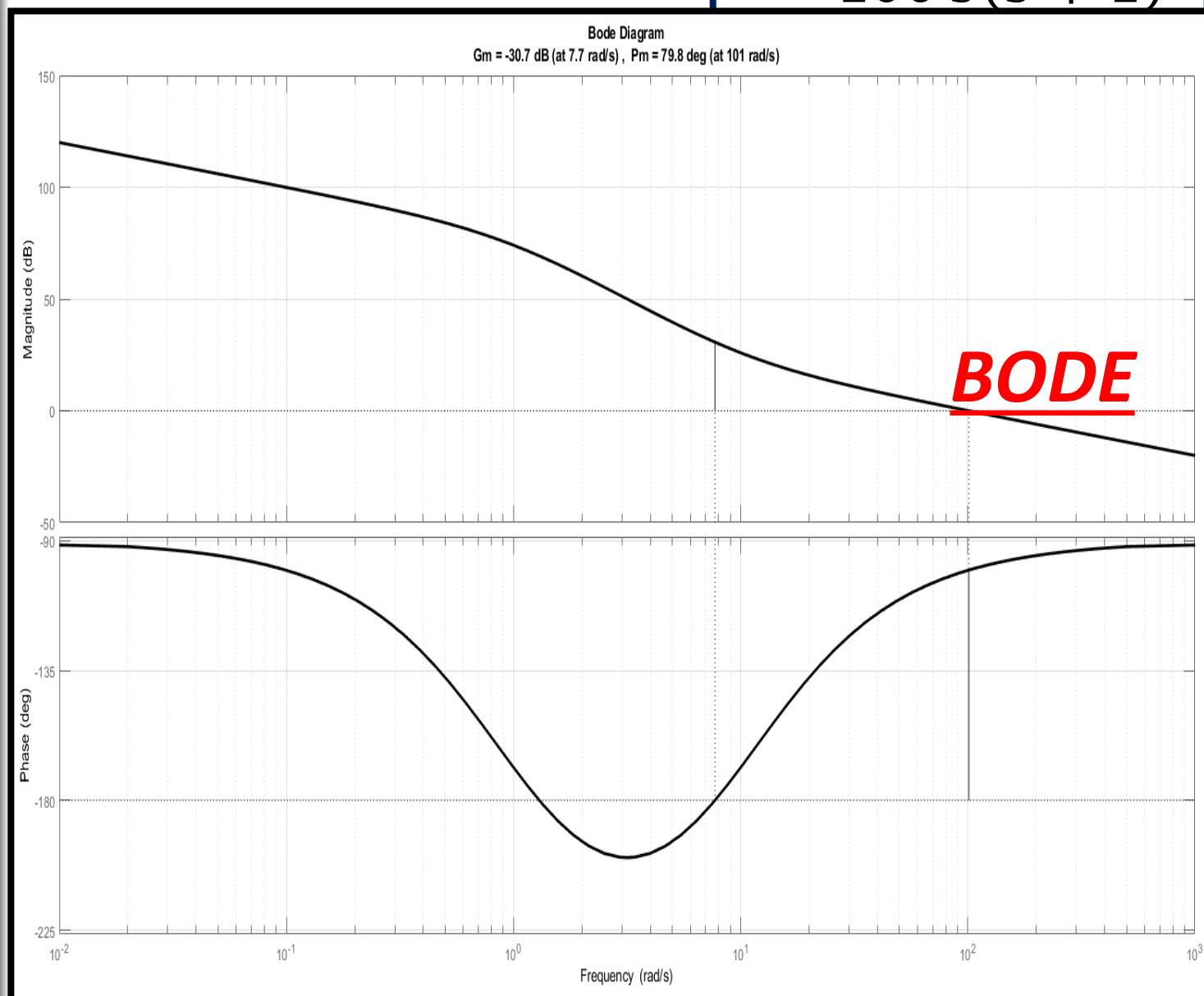
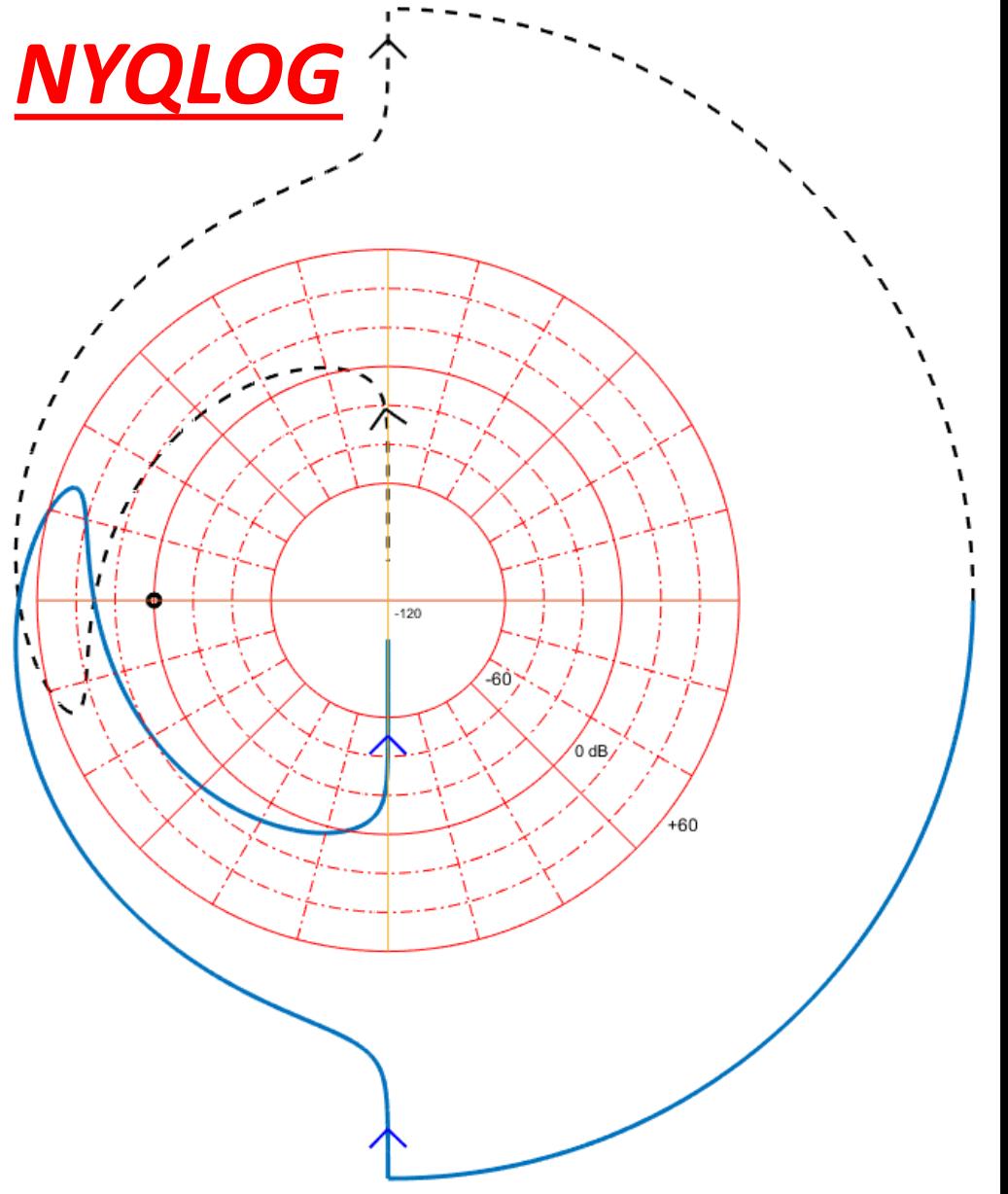
**BODE**



# Estabilidad Condicional:

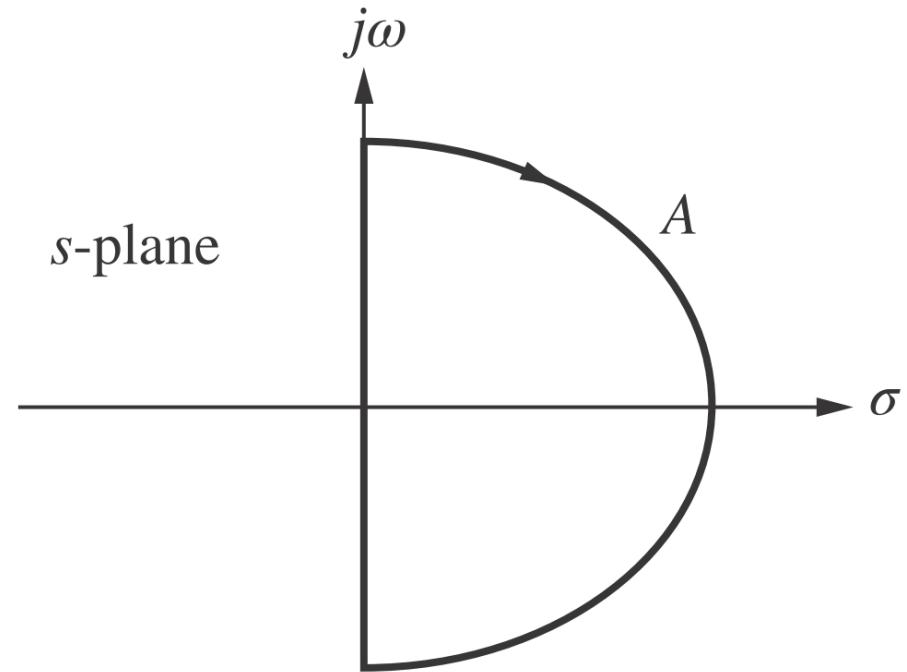
$$L = \frac{k}{100} \frac{(s + 10)^2}{s(s + 1)^2}$$

**NYQLOG**

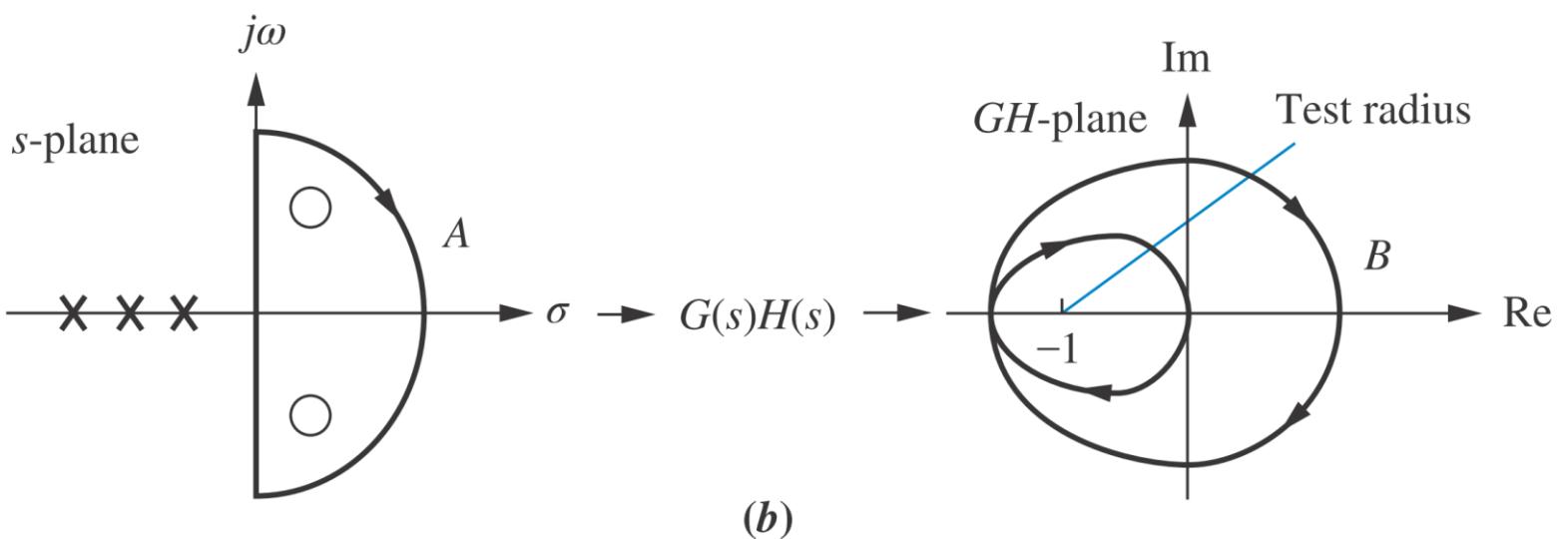
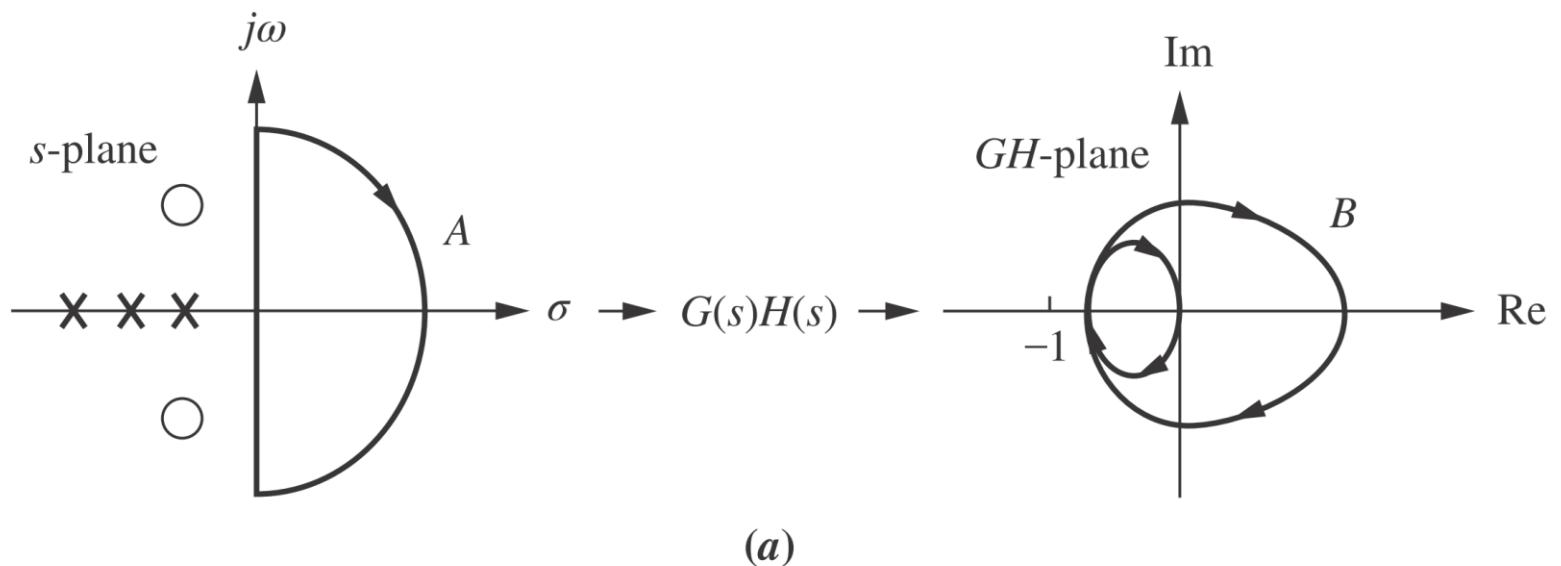


# Criterio de Nyquist (NISE-2015):

- Si el contorno “A” que circula el semiplano derecho entero, es mapeado a través de  $F(s)H(s)$ , entonces el número “Z”, de polos inestables que tendrá el sistema a lazo cerrado es igual al número de polos inestables de lazo abierto “P” menos el número de circulaciones antihorarias “N” alrededor del “punto crítico”  $s=-1$ . Es decir:  $Z=P-N$ . A este mapeo se le llama diagrama de Nyquist de  $L(s)=G(s)H(s)$



# Ejemplos:



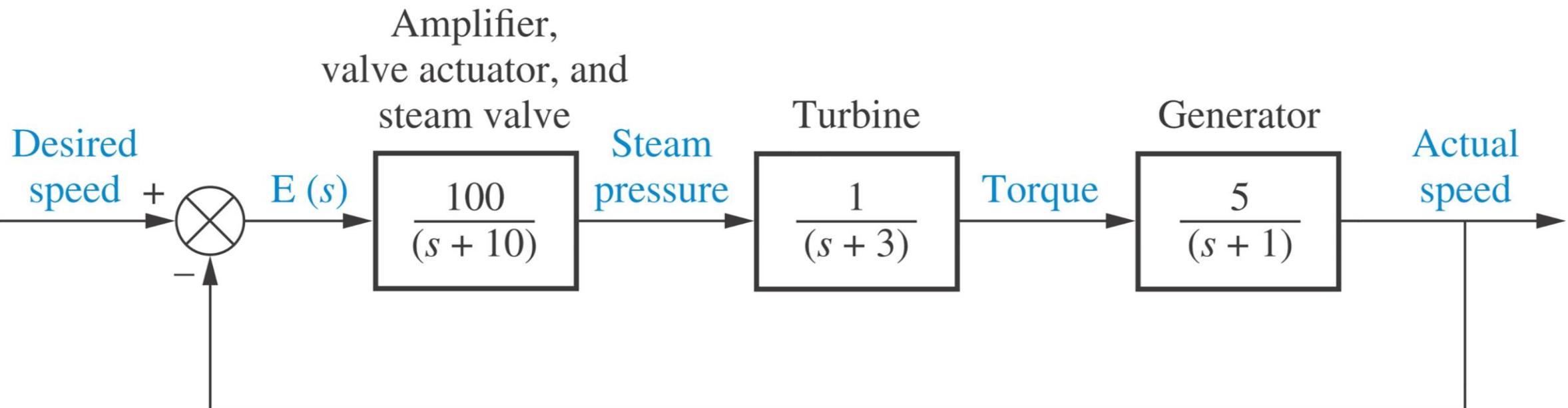
$\bigcirc$  = zeros of  $1 + G(s)H(s)$   
 = poles of closed-loop system  
 Location not known

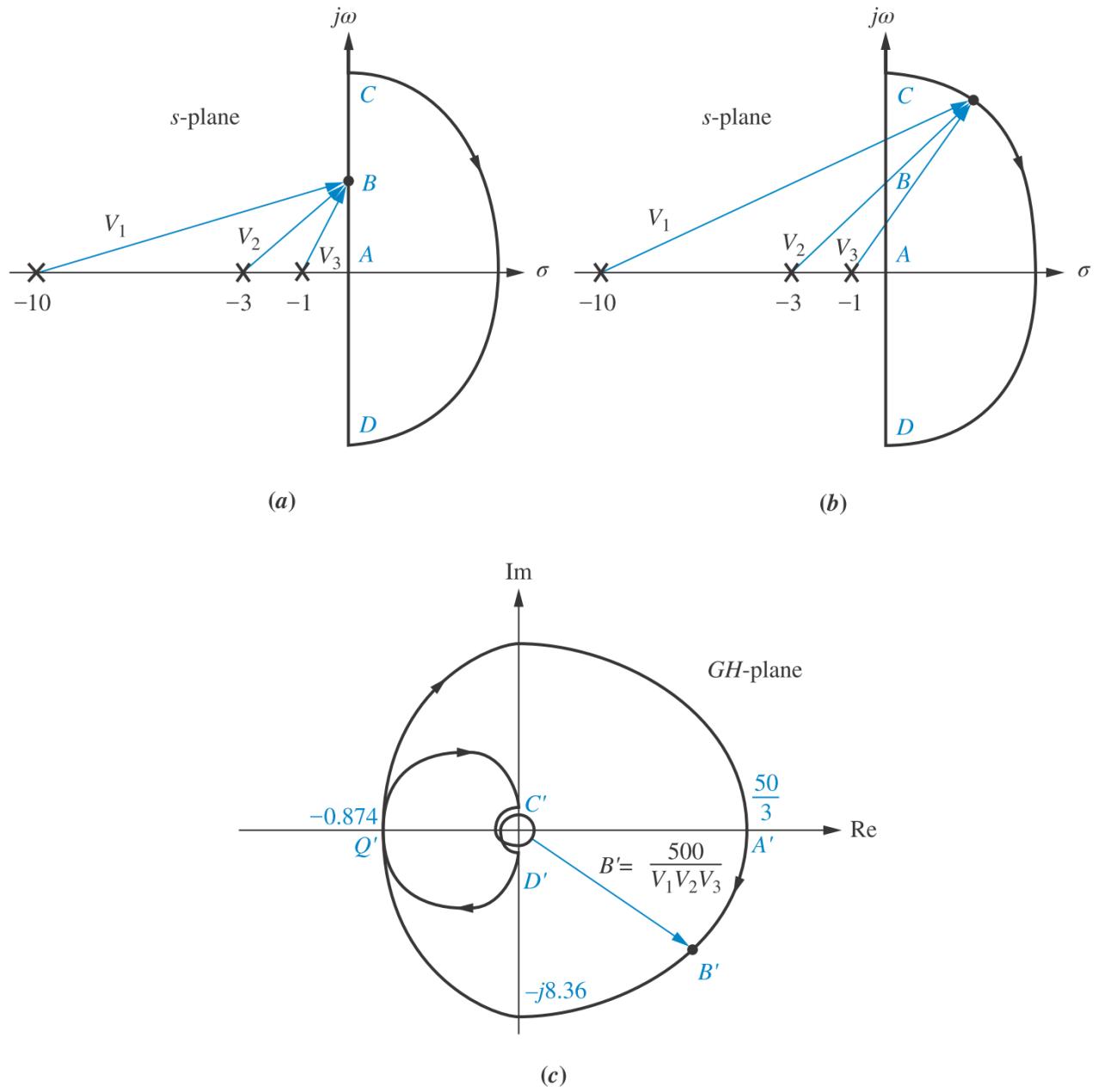
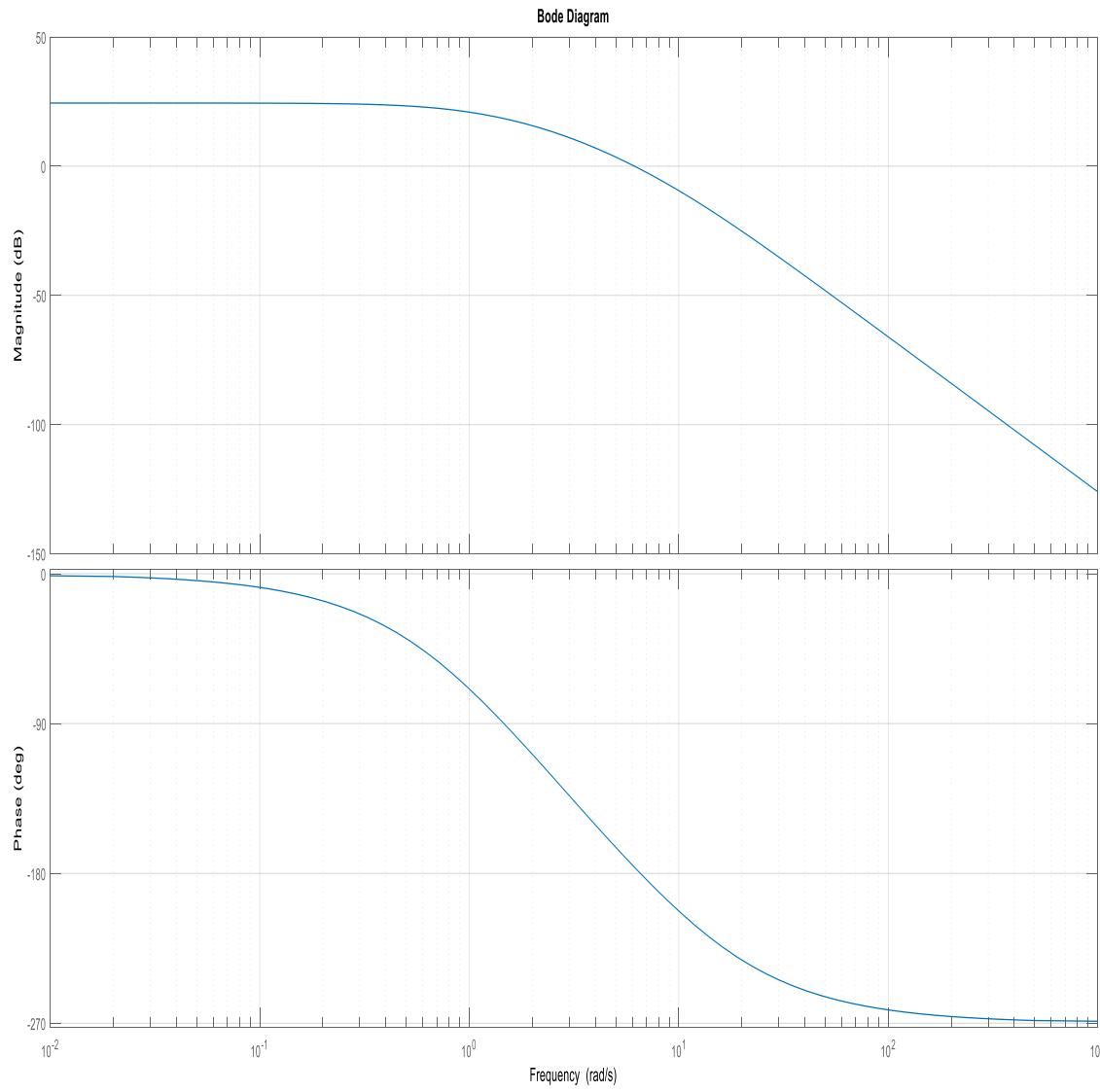
$\times$  = poles of  $1 + G(s)H(s)$   
 = poles of  $G(s)H(s)$   
 Location is known

# 10.4 Sketching the Nyquist Diagram

## Example 10.4

### Sketching a Nyquist Diagram





**FIGURE 10.27** Vector evaluation of the Nyquist diagram for Example 10.4: **a.** vectors on contour at low frequency; **b.** vectors on contour around infinity; **c.** Nyquist diagram

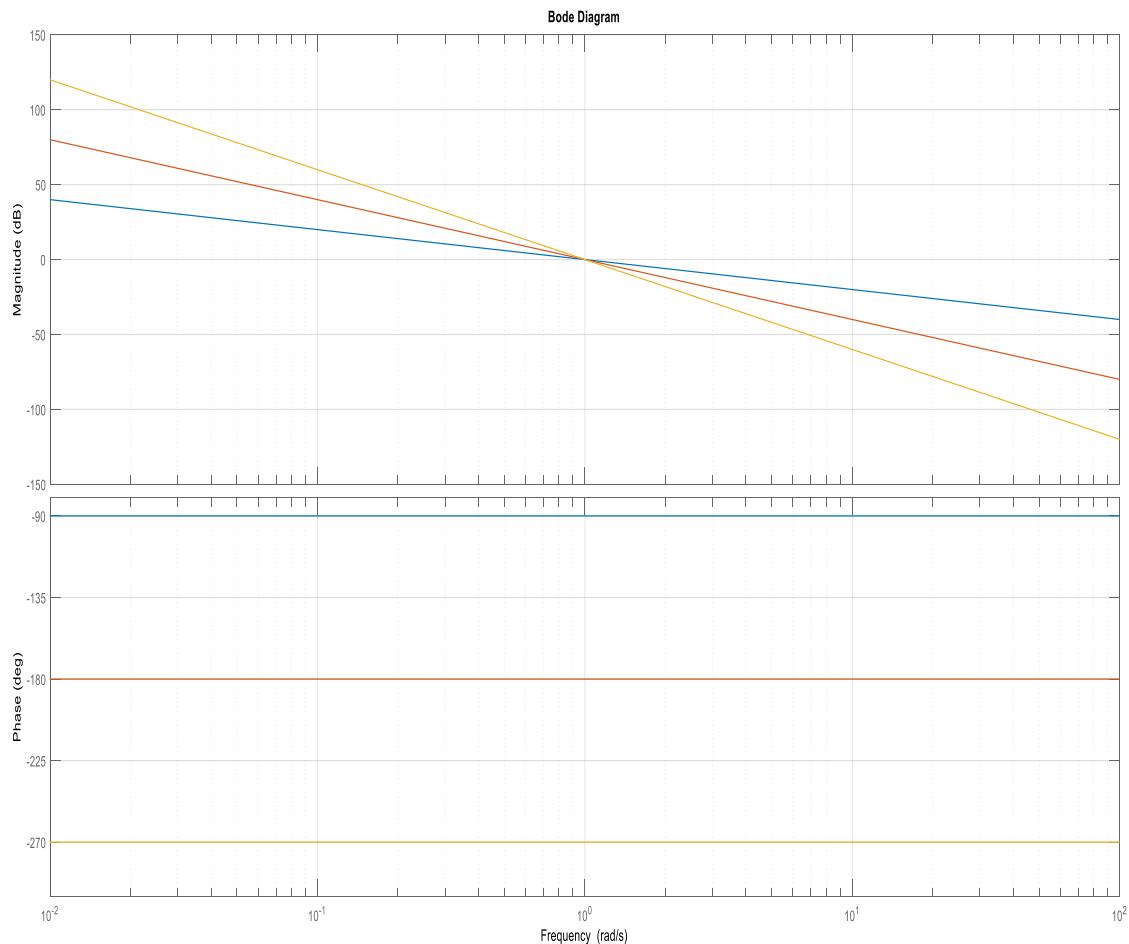
# Más Ejemplos Básicos: Qué se hace con las singularidades en el eje “ $j\omega$ ”?

- Trazar el diagrama de Nyquist de:  $\frac{1}{s}$ ,  $\frac{1}{s^2}$  y  $\frac{1}{s^3}$ .
- En el contorno infinitesimal del origen:

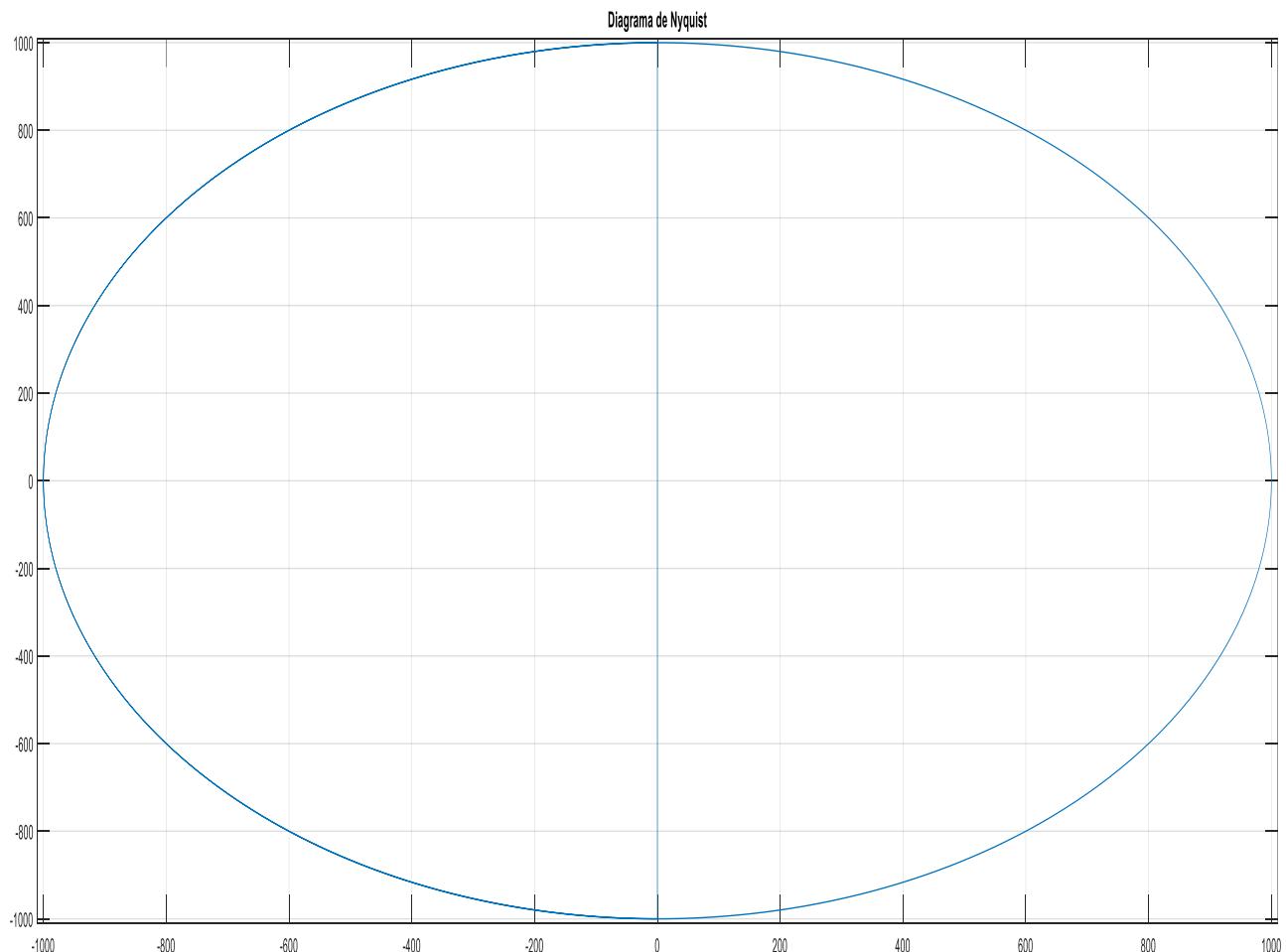
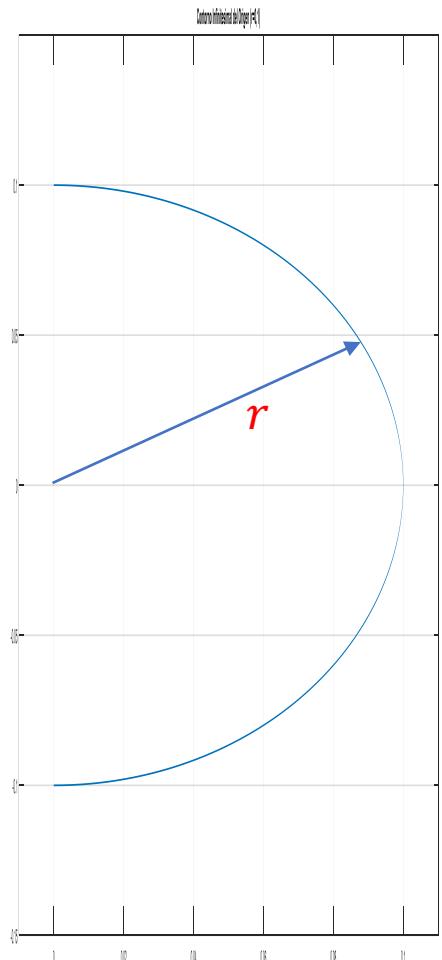
$$\left. \frac{1}{s} \right|_{s=r.e^{j\phi}} = \frac{1}{r.e^{j\phi}} = \frac{1}{r} e^{-j\phi}$$

$$\left. \frac{1}{s^2} \right|_{s=r.e^{j\phi}} = \frac{1}{r^2.e^{j2\phi}} = \frac{1}{r^2} e^{-j2\phi}$$

$$\left. \frac{1}{s^3} \right|_{s=r.e^{j\phi}} = \frac{1}{r^3.e^{j3\phi}} = \frac{1}{r^3} e^{-j3\phi}$$



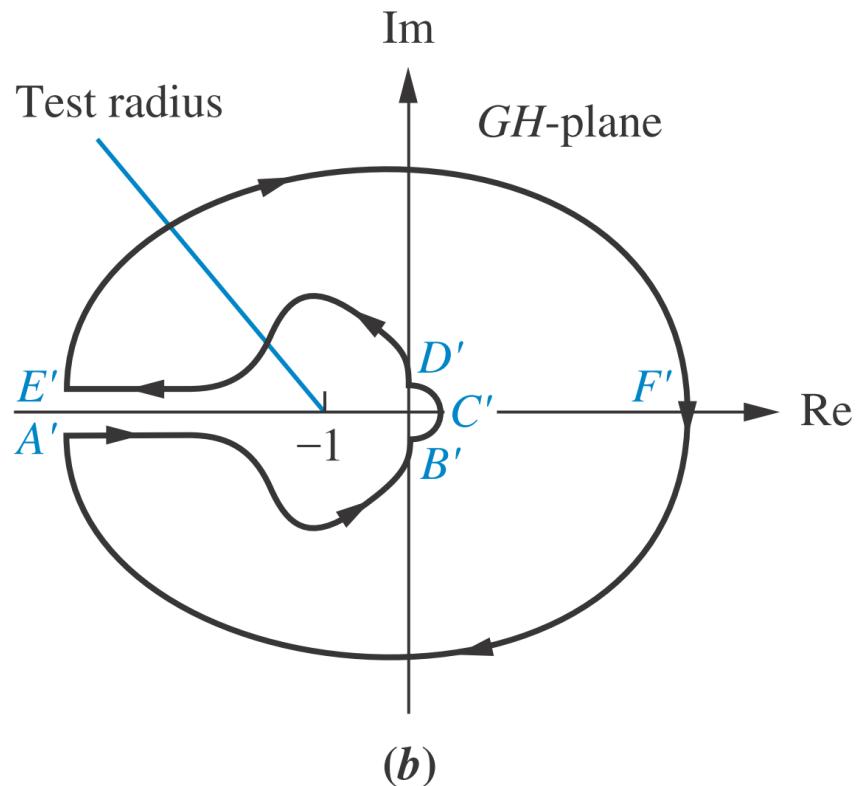
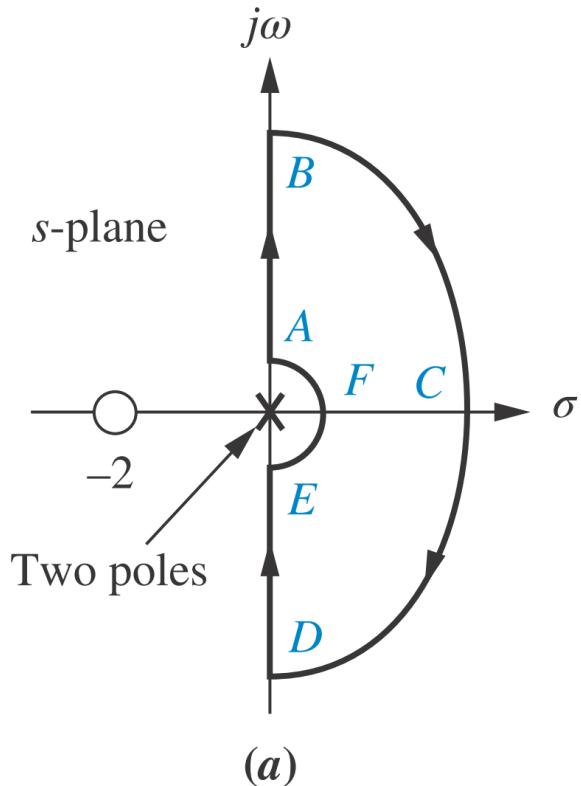
$$\frac{1}{s^3} \Big|_{s=r.e^{j\phi}} = \frac{1}{r^3.e^{j3\phi}} = \frac{1}{r^3} e^{-j3\phi}$$

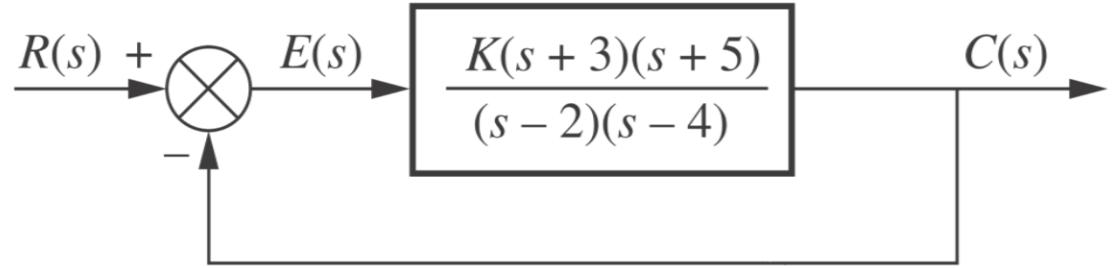


## Example 10.5

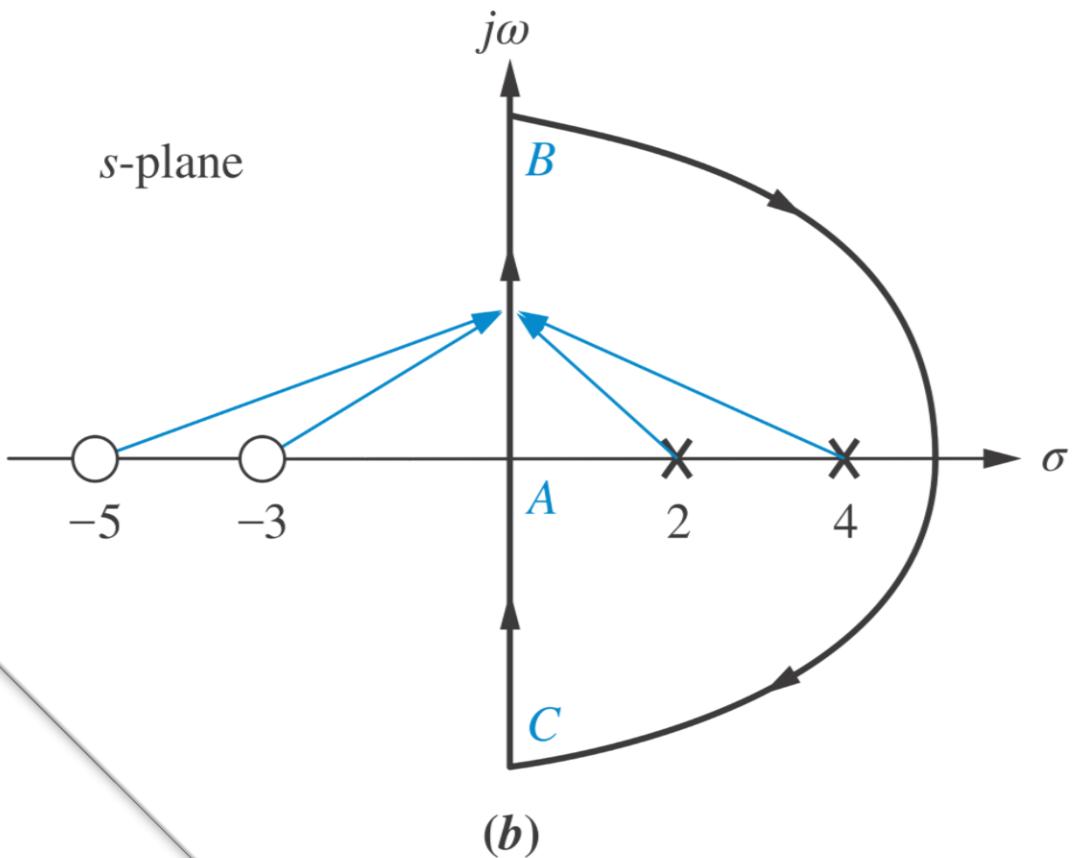
### Nyquist Diagram for Open-Loop Function with Poles on Contour

**PROBLEM:** Sketch the Nyquist diagram of the unity feedback system of Figure 10.10, where  $G(s) = (s + 2)/s^2$ .

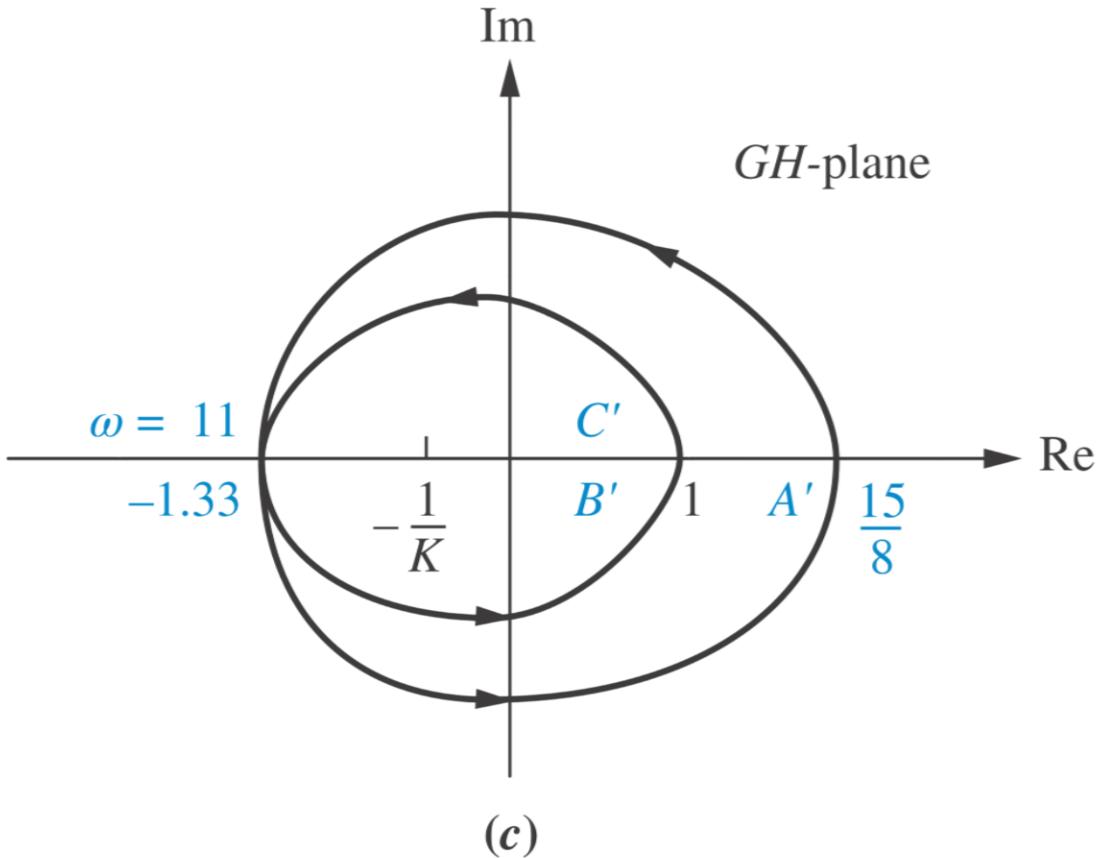




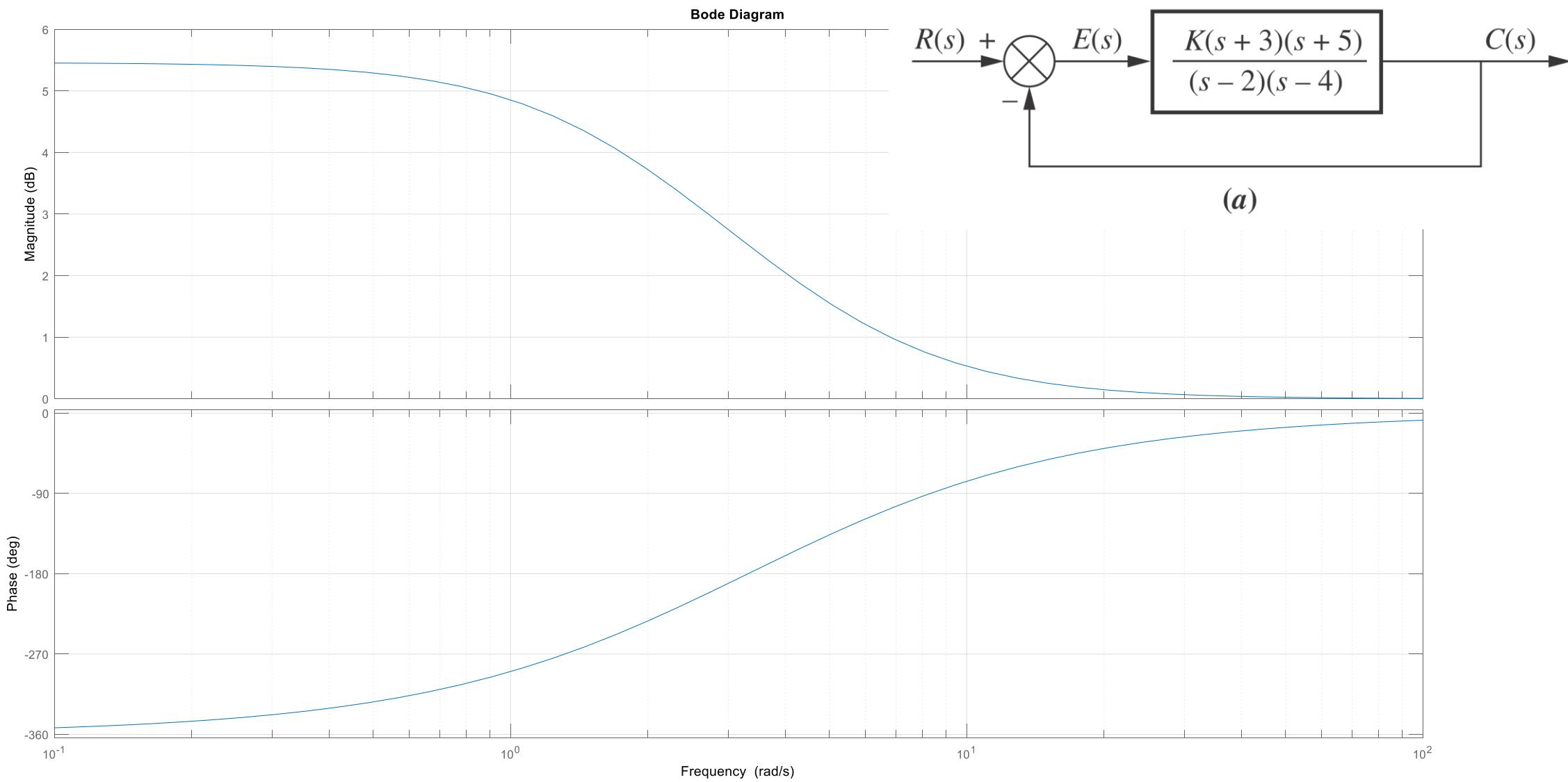
(a)



(b)



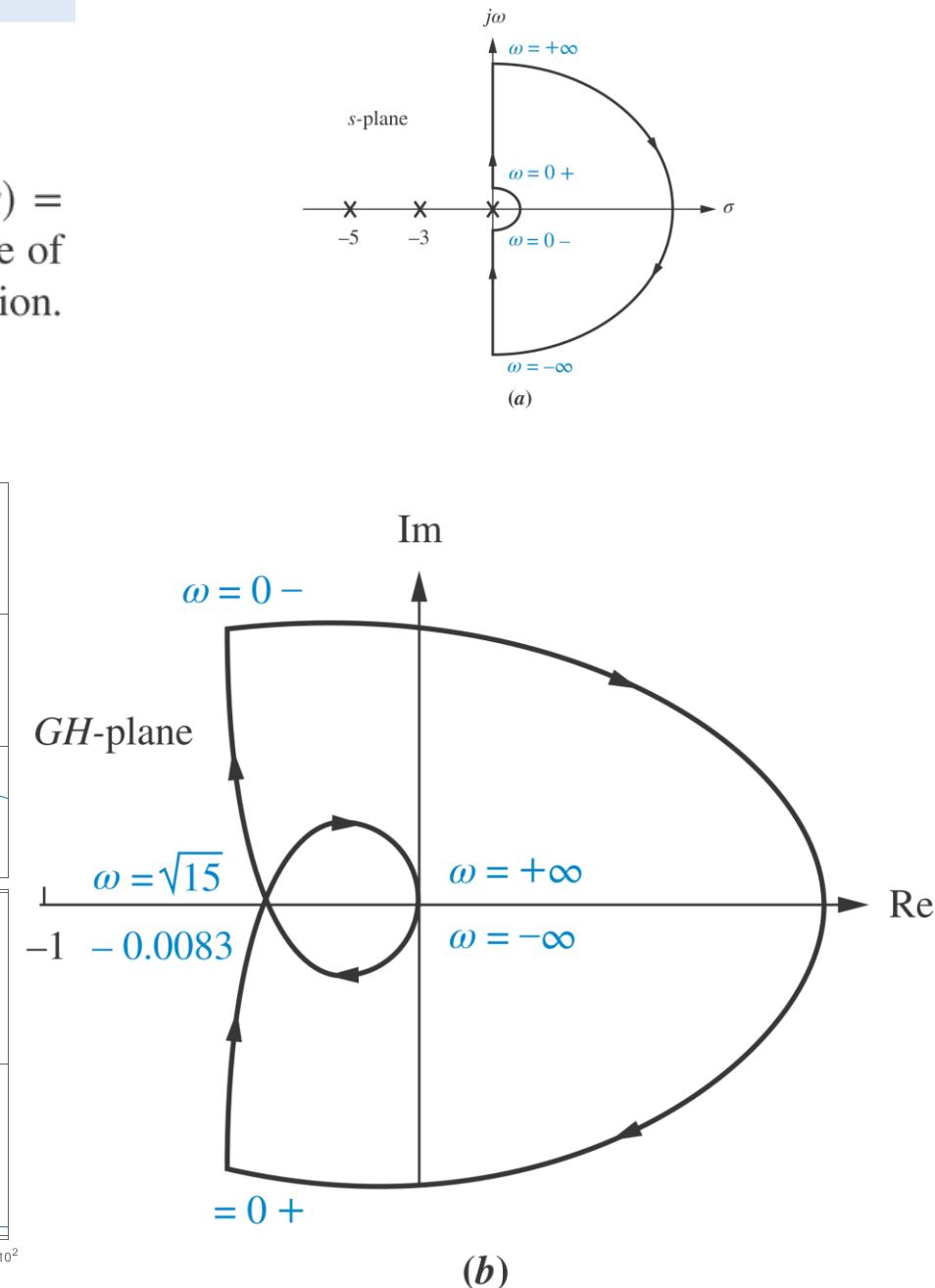
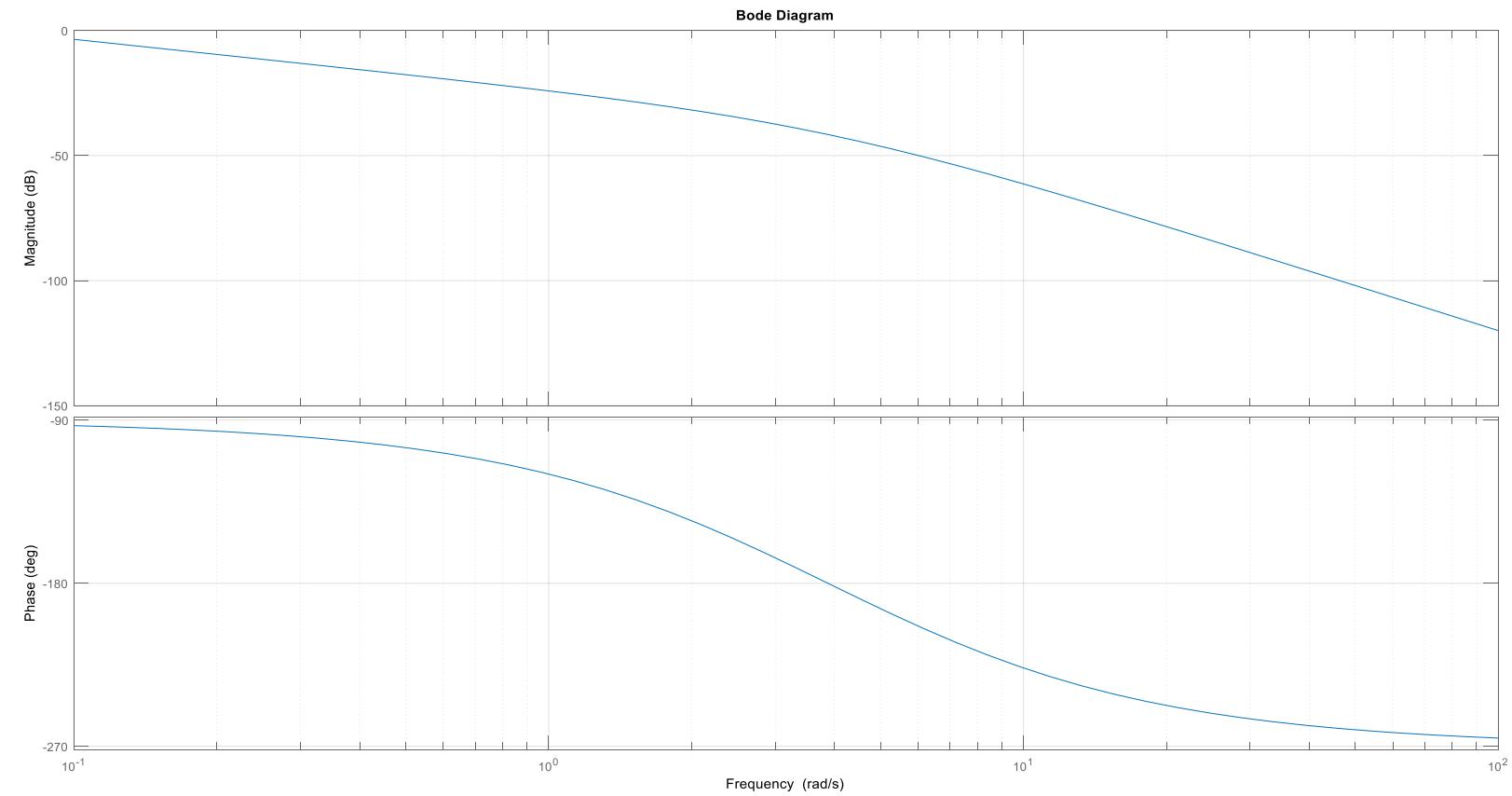
(c)



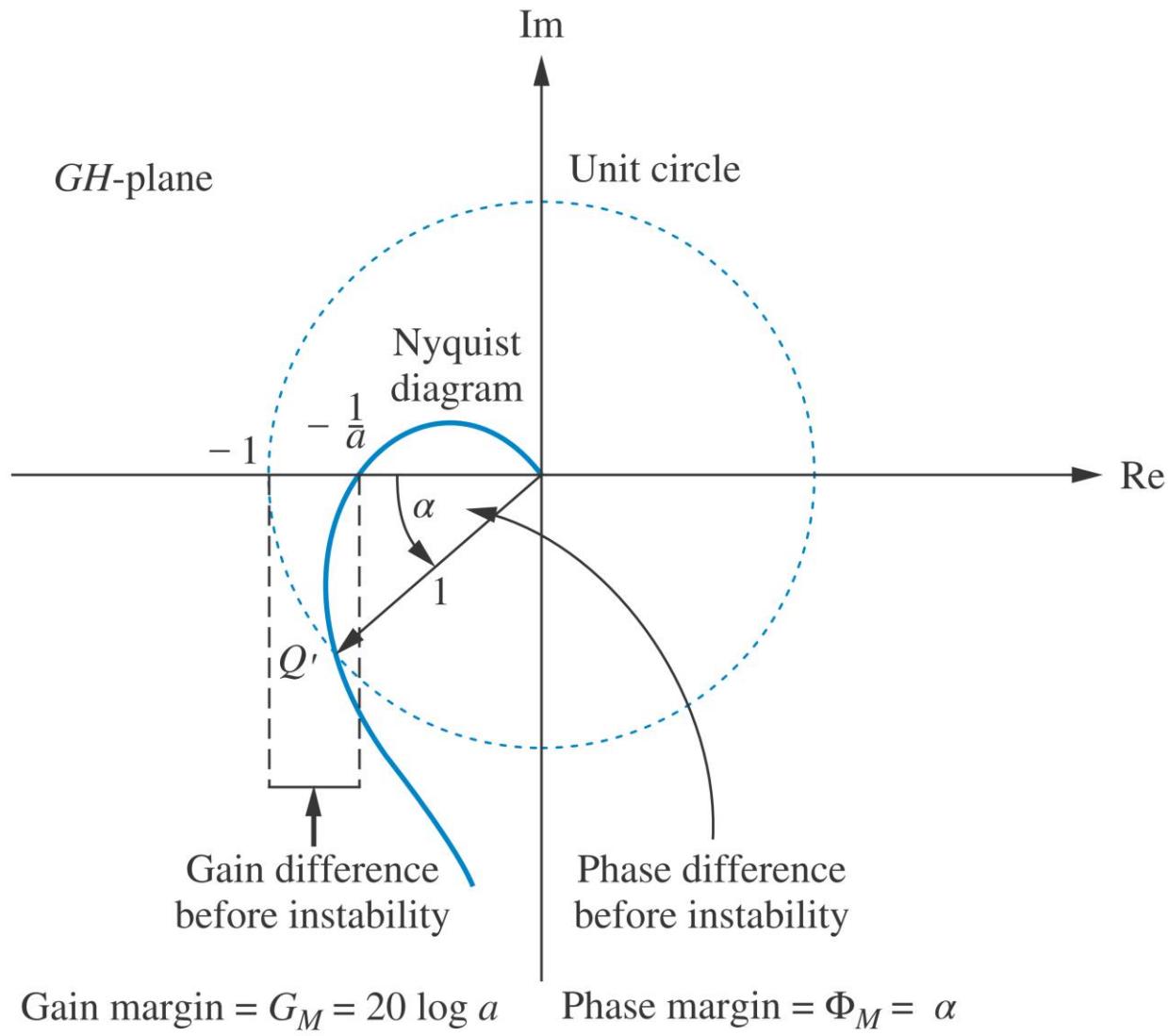
## Example 10.6

### Range of Gain for Stability via the Nyquist Criterion

**PROBLEM:** For the unity feedback system of Figure 10.10, where  $G(s) = K/[s(s + 3)(s + 5)]$ , find the range of gain,  $K$ , for stability, instability, and the value of gain for marginal stability. For marginal stability also find the frequency of oscillation. Use the Nyquist criterion.

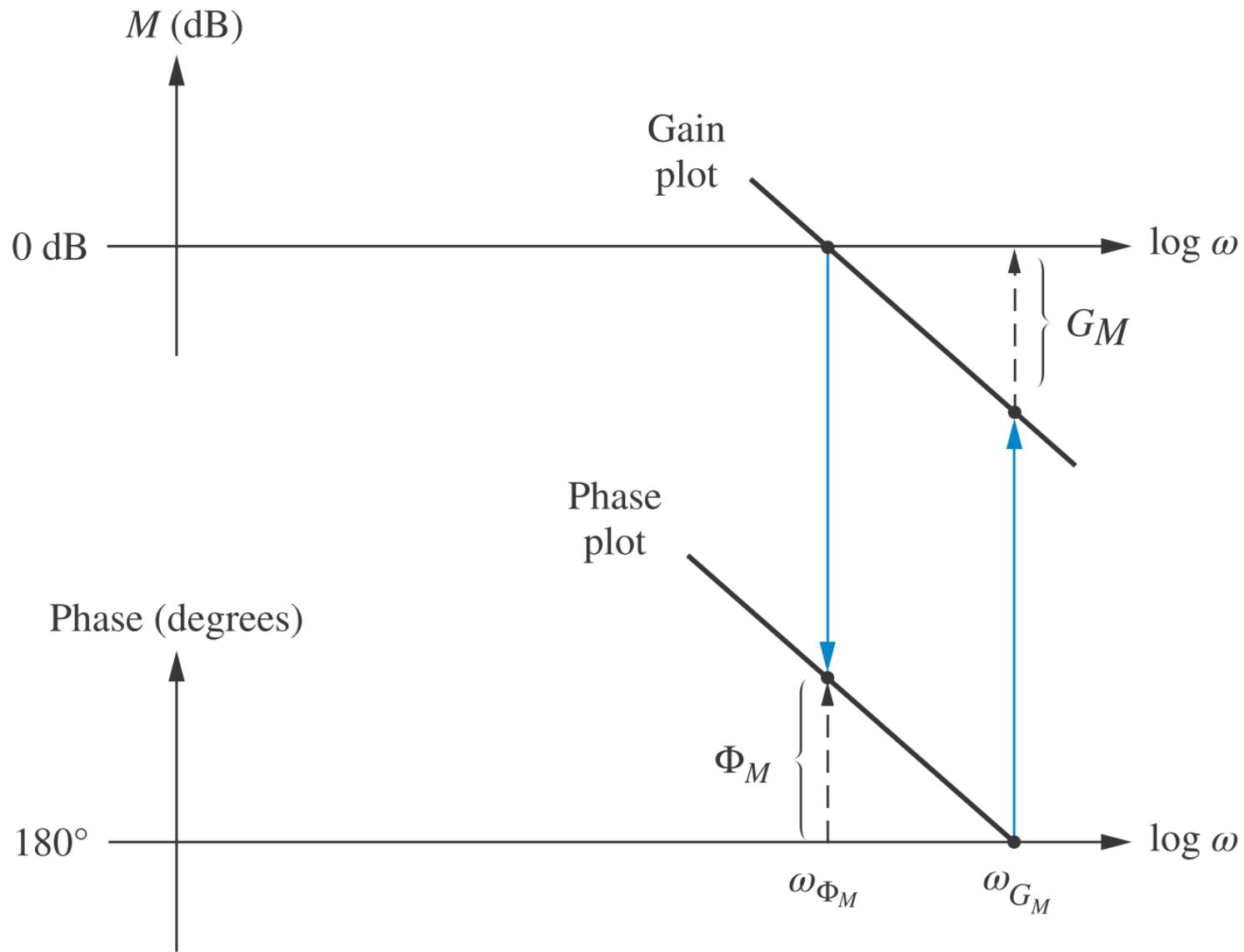


## 10.6 Gain Margin and Phase Margin via the Nyquist Diagram



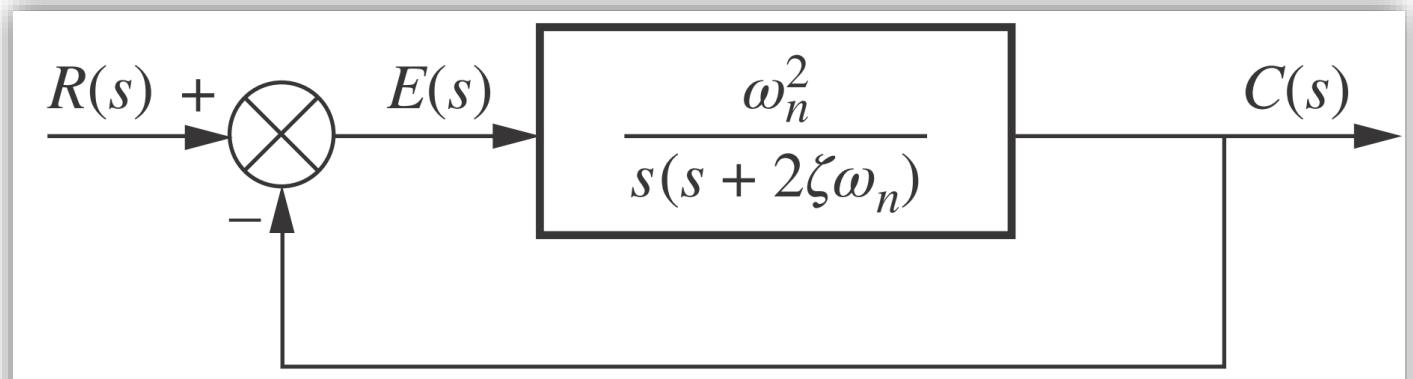
**FIGURE 10.35** Nyquist diagram showing gain and phase margins

## 10.7 Stability, Gain Margin, and Phase Margin via Bode Plots



## 10.8 Relation Between Closed-Loop Transient and Closed-Loop Frequency Responses

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

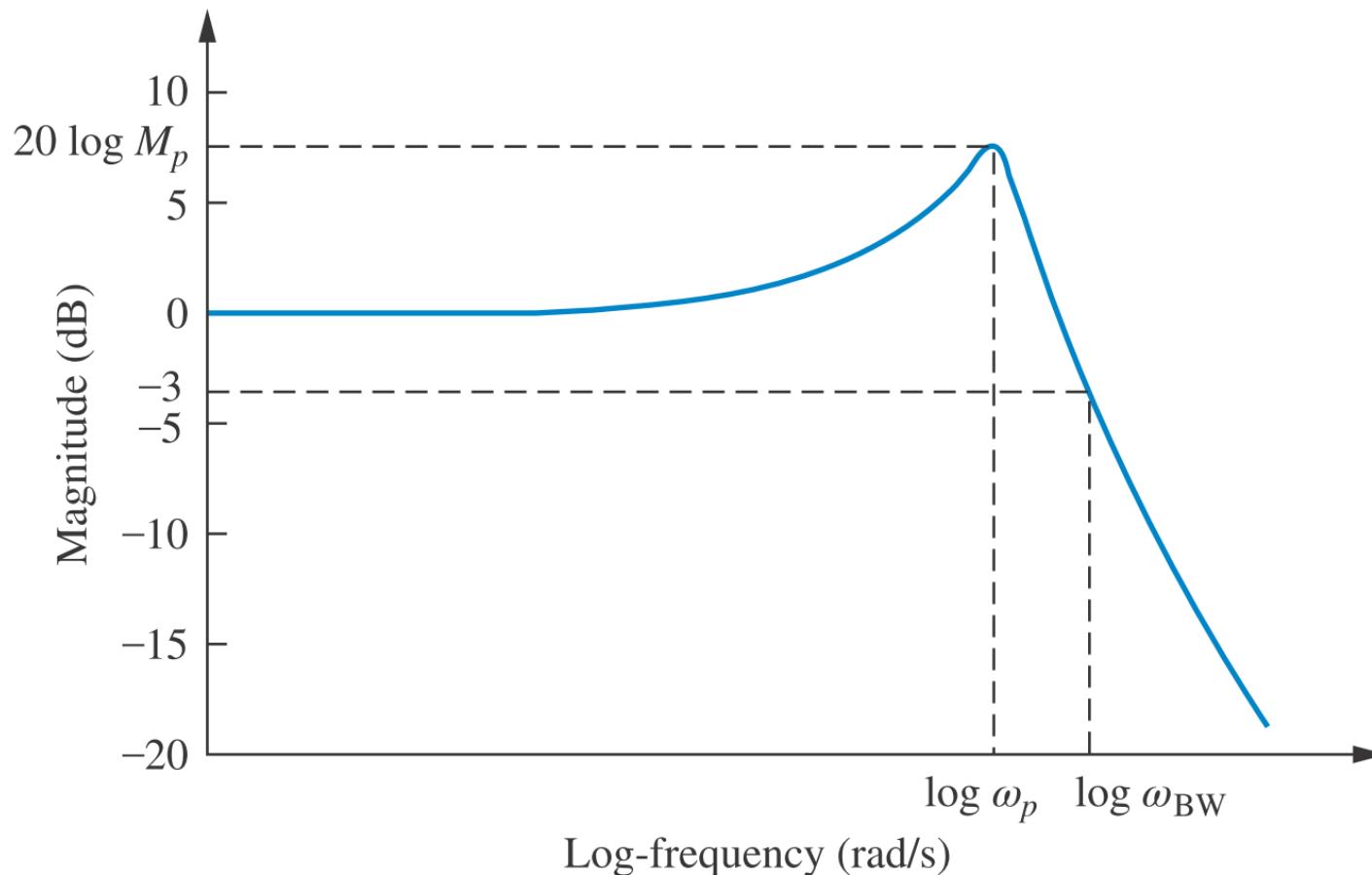


**FIGURE 10.38** Second-order closed-loop system

$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

## 10.8 Relation Between Closed-Loop Transient and Closed-Loop Frequency Responses

$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



## 10.8 Relation Between Closed-Loop Transient and Closed-Loop Frequency Responses

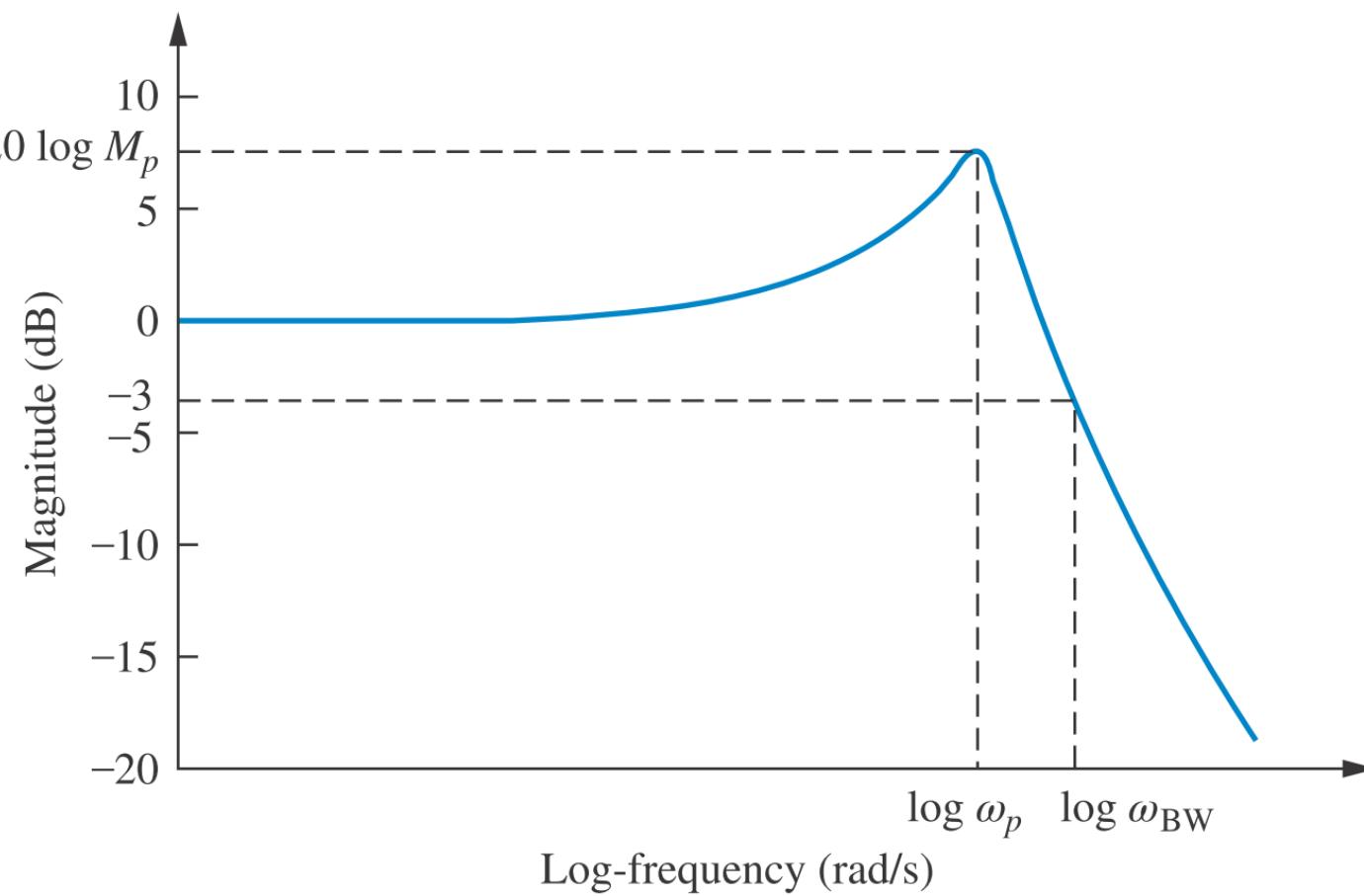
$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$M = |T(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

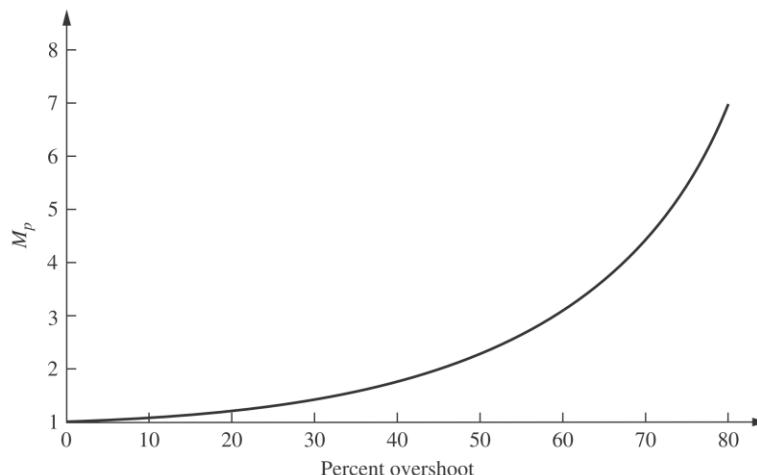
$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$



$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \zeta} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

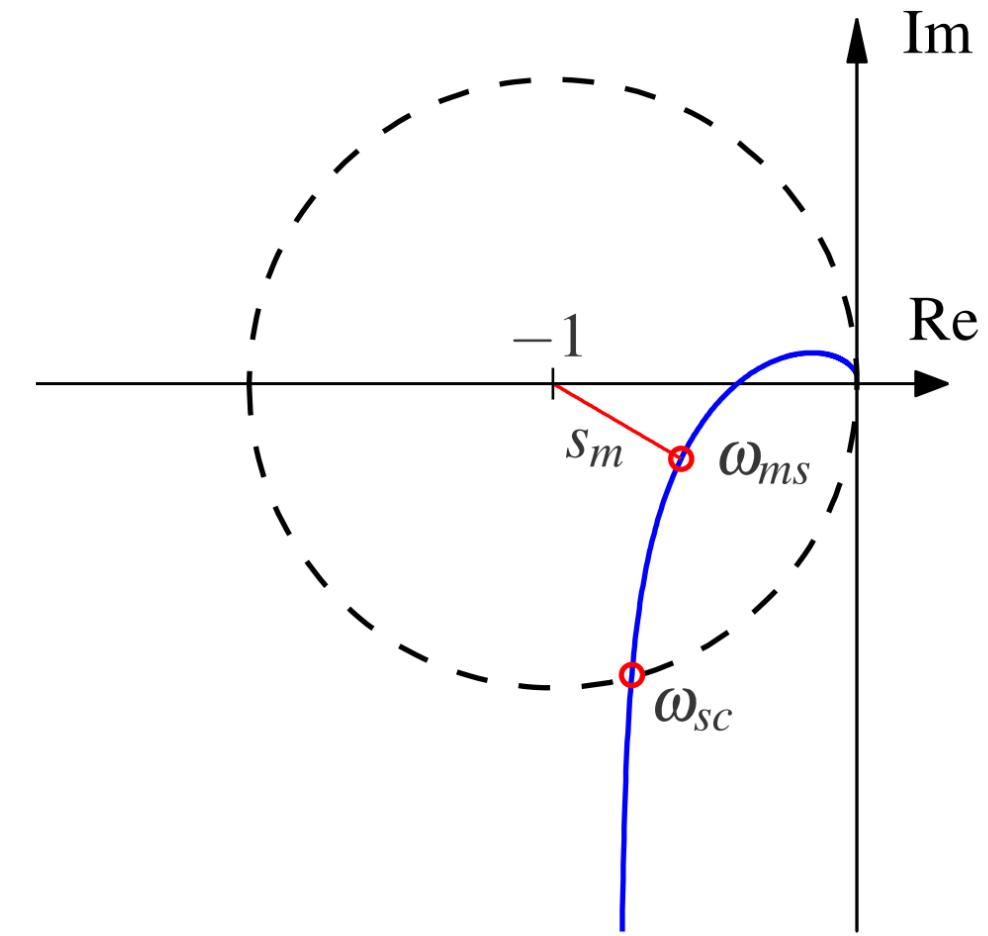
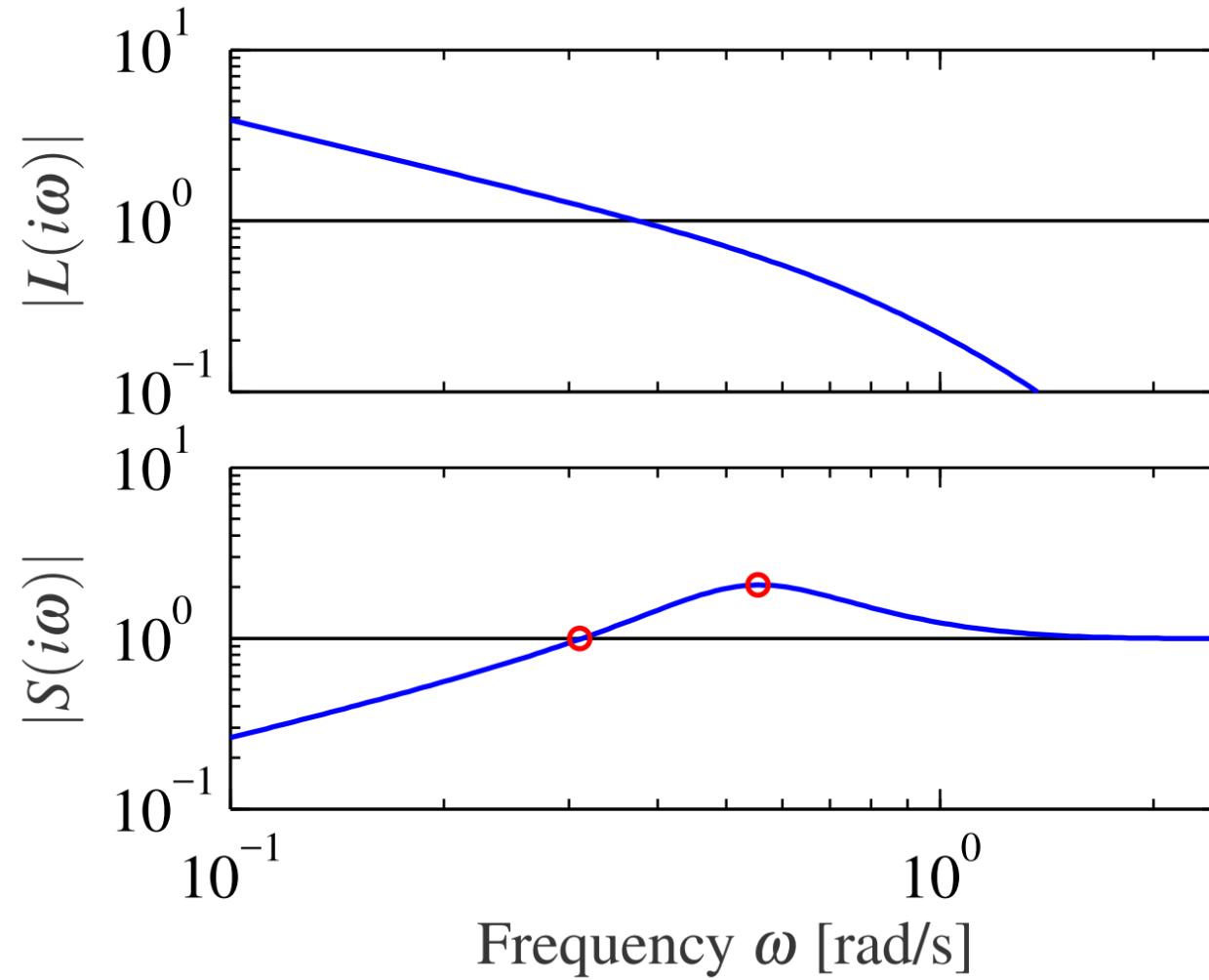
$$\omega_{BW} = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$\omega_n = 4/T_s \zeta$$



**FIGURE 10.40** Closed-loop frequency response peak vs. percent overshoot for a two-pole system

# Márgenes de Fase y Ganancia y Robustez



# Frecuencias de cruce

- $M_p, M_t$ : Complementary Sensitivity Peak (NISE, A&M)
- $\omega_p, \omega_{mt}$ : Complementary Sensitivity Peak frequency (NISE, A&M).
- $\omega_{BW}, \omega_b$ : Complementary Sensitivity -3dB frequency (NISE, A&M).
- $\omega_{tc}$ : Complementary Sensitivity Cross Over Frequency.
- $\omega_{sc}$ : Sensitivity Cross Over Frequency
- $M_s$ : Sensitivity Peak (Astrom & Murray).  $M_s = \frac{1}{s_m}$
- $s_m = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$
- $\omega_{gc}$ : Loop Gain Cross Over Frequency,
- $\omega_{pc}$ : Loop Gain Cross Over Frequency,
- $g_m = \left| \frac{1}{L(j\omega_{pc})} \right|$
- $\varphi_m = \angle \frac{1}{L(j\omega_{gc})}$ . A veces aparece como  $\phi_m$ .
- $t_r \omega_b \approx 2$
- Si  $\varphi_m = 60^\circ$ ,  $\omega_{sc} = \omega_{gc} = \omega_{tc} \approx \omega_b$

# Relaciones para sistemas de 2ndo Orden

**Table 7.1:** Properties of the step response for a second-order system with  $0 < \zeta \leq 1$ .

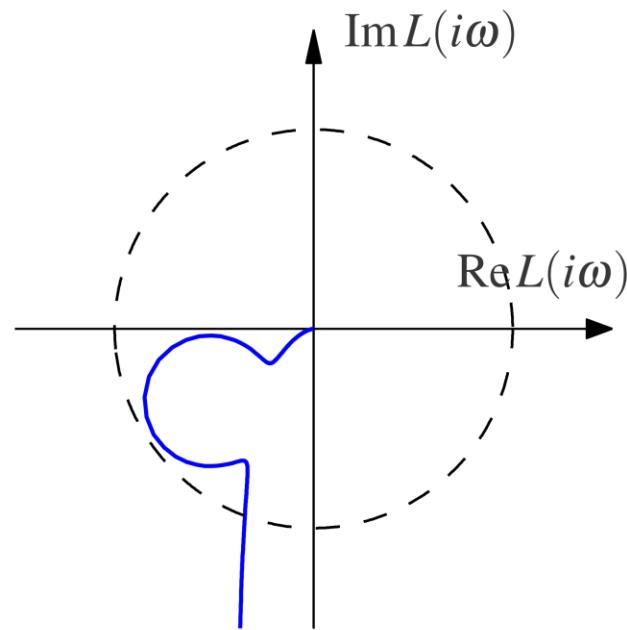
Property	Value	$\zeta = 0.5$	$\zeta = 1/\sqrt{2}$	$\zeta = 1$
Steady-state value	$k$	$k$	$k$	$k$
Rise time (inverse slope)	$T_r = e^{\varphi / \tan \varphi} / \omega_0$	$1.8/\omega_0$	$2.2/\omega_0$	$2.7/\omega_0$
Overshoot	$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$	16%	4%	0%
Settling time (2%)	$T_s \approx 4/\zeta\omega_0$	$8.0/\omega_0$	$5.6/\omega_0$	$4.0/\omega_0$

**Table 7.2:** Properties of the frequency response for a second-order system with  $0 < \zeta \leq 1$ .

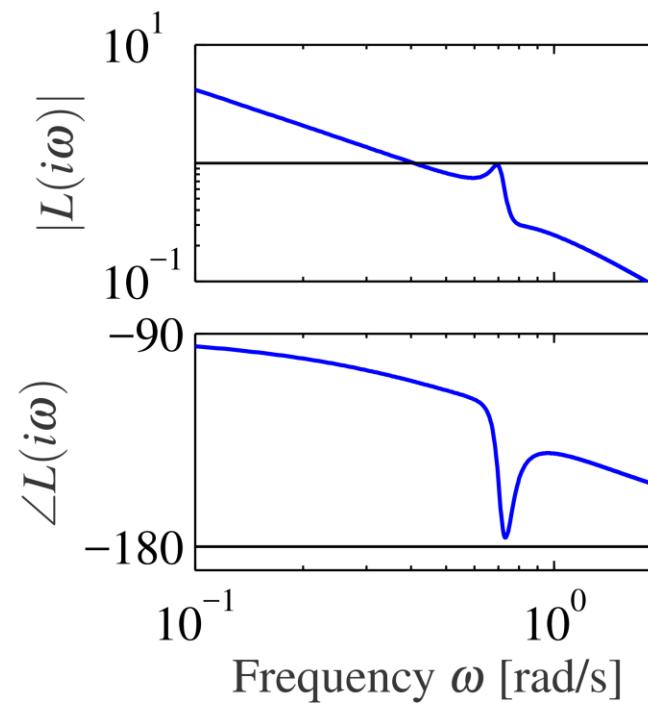
Property	Value	$\zeta = 0.1$	$\zeta = 0.5$	$\zeta = 1/\sqrt{2}$
Zero frequency gain	$M_0$	$k$	$k$	$k$
Bandwidth	$\omega_b = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{(1 - 2\zeta^2)^2 + 1}}$	$1.54\omega_0$	$1.27\omega_0$	$\omega_0$
Resonant peak gain	$M_r = \begin{cases} k/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}) & \zeta \leq \sqrt{2}/2, \\ N/A & \zeta > \sqrt{2}/2 \end{cases}$	$5k$	$1.15k$	$k$
Resonant frequency	$\omega_{mr} = \begin{cases} \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2} & \zeta \leq \sqrt{2}/2, \\ 0 & \zeta > \sqrt{2}/2 \end{cases}$	$\omega_0$	$0.707\omega_0$	$0$

# Márgenes de Fase y Ganancia y Robustez

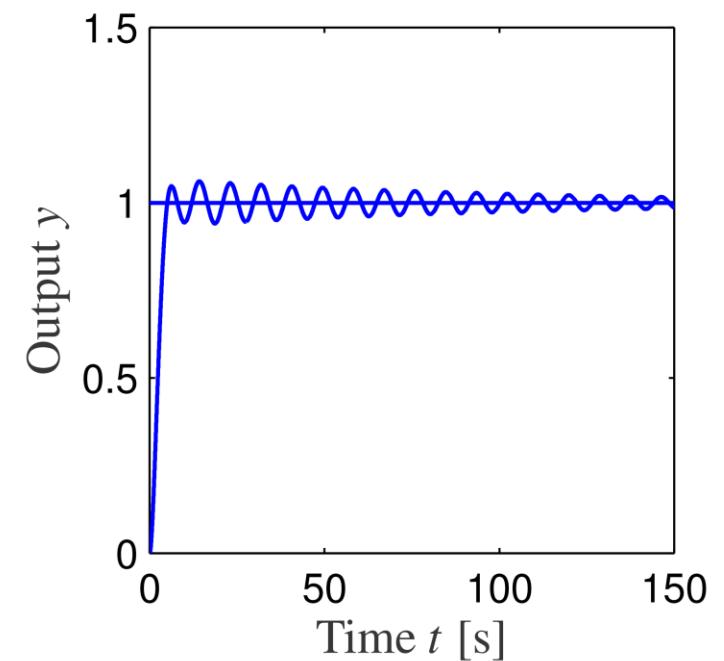
$$L(s) = \frac{0.38(s^2 + 0.1s + 0.55)}{s(s + 1)(s^2 + 0.06s + 0.5)}$$



(a)

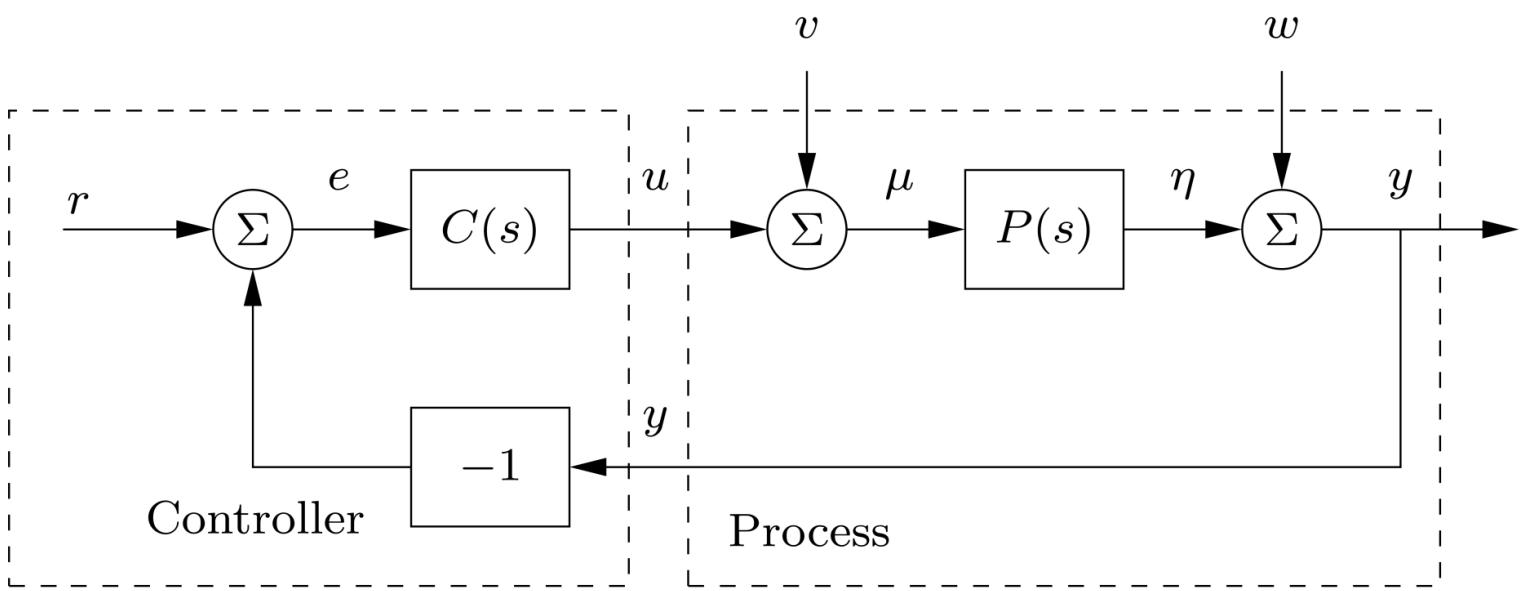
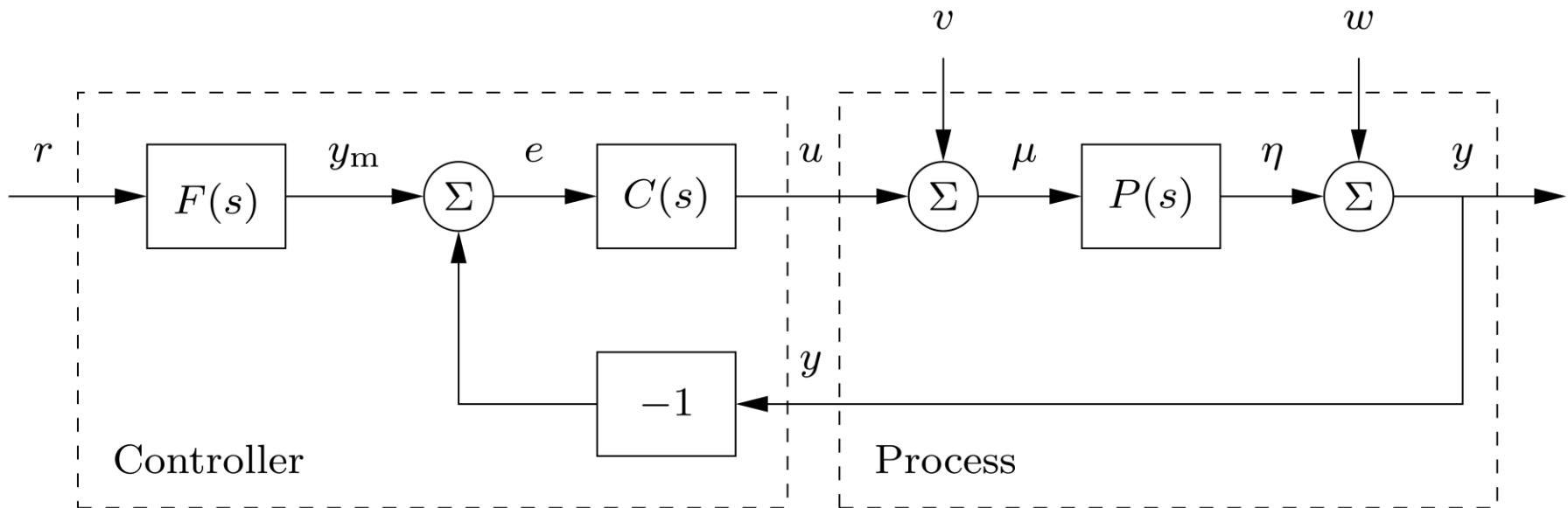


(b)

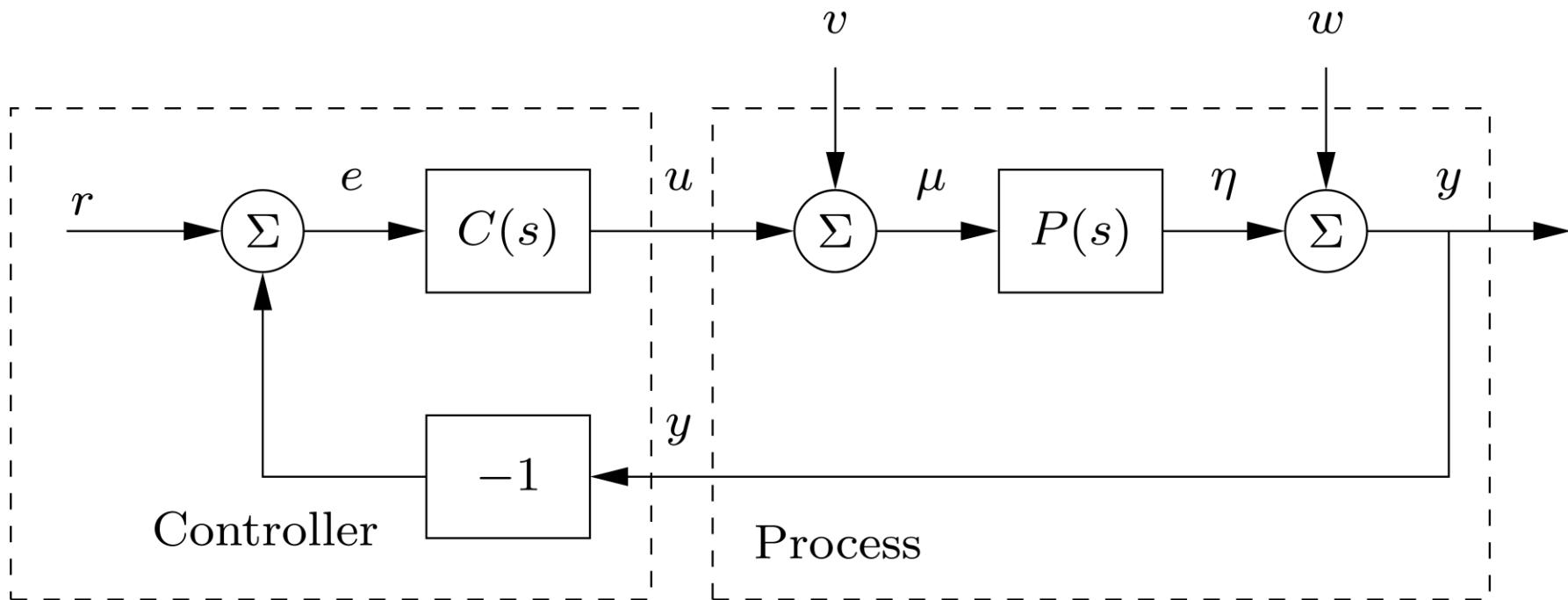


(c)

# Funciones de Sensibilidad

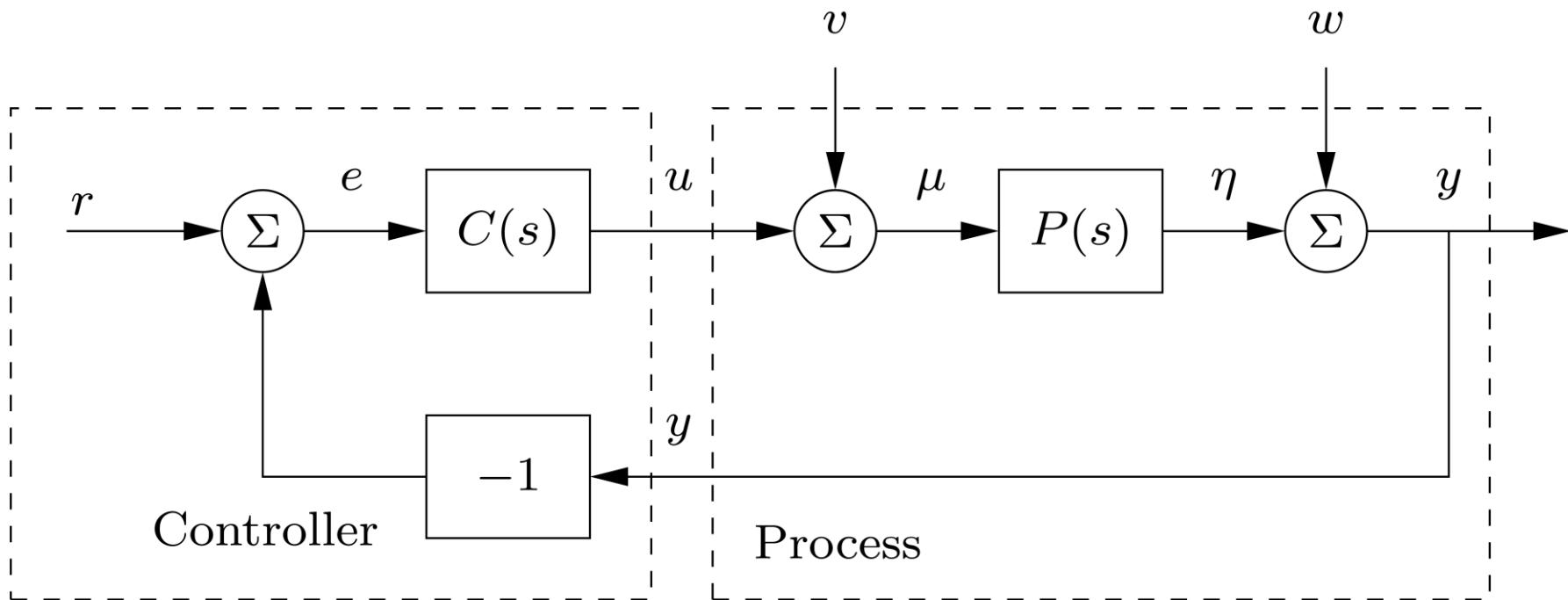


# Funciones de Sensibilidad



$y$	$u$	$e$	$\mu$	$\eta$	
$\frac{PC}{1 + PC}$	$\frac{C}{1 + PC}$	$\frac{1}{1 + PC}$	$\frac{C}{1 + PC}$	$\frac{PC}{1 + PC}$	$r$
$\frac{P}{1 + PC}$	$\frac{-PC}{1 + PC}$	$\frac{-P}{1 + PC}$	$\frac{1}{1 + PC}$	$\frac{P}{1 + PC}$	$v$
$\frac{1}{1 + PC}$	$\frac{-C}{1 + PC}$	$\frac{-1}{1 + PC}$	$\frac{-C}{1 + PC}$	$\frac{-PC}{1 + PC}$	$w$

# Funciones de Sensibilidad



$$-G_{uv} = \frac{PC}{1 + PC},$$

$$G_{yv} = \frac{P}{1 + PC},$$

$$-G_{uw} = \frac{C}{1 + PC},$$

$$G_{yw} = \frac{1}{1 + PC}.$$

$$S = \frac{1}{1 + PC}$$

sensitivity function

$$T = \frac{PC}{1 + PC}$$

complementary sensitivity function

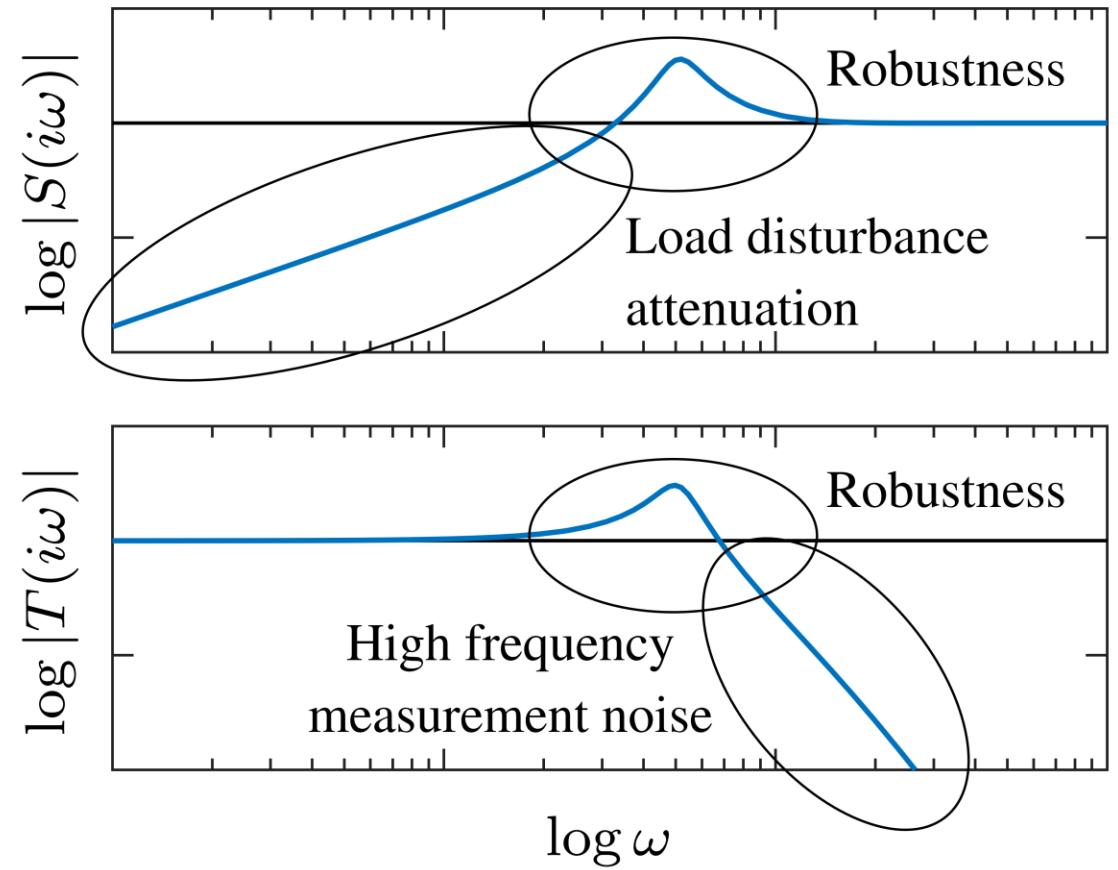
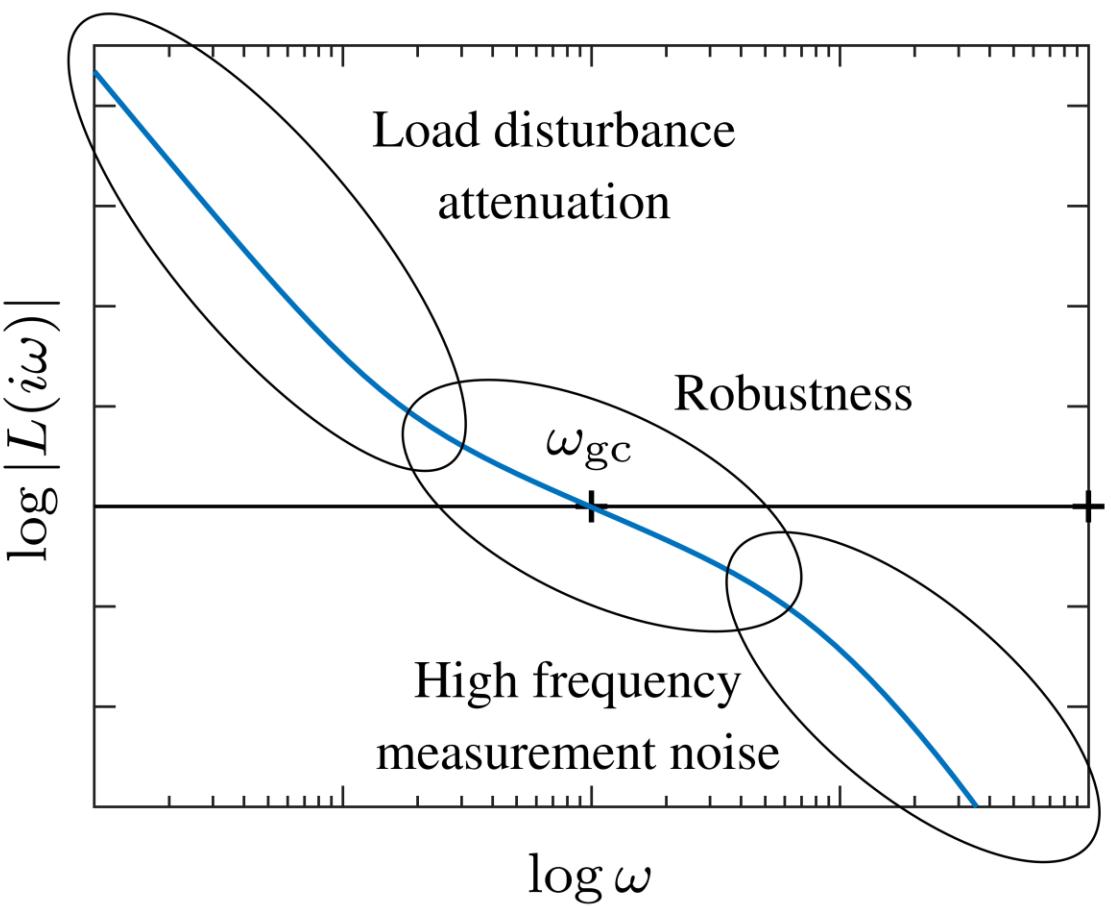
$$PS = \frac{P}{1 + PC}$$

load (or input) sensitivity function

$$CS = \frac{C}{1 + PC}$$

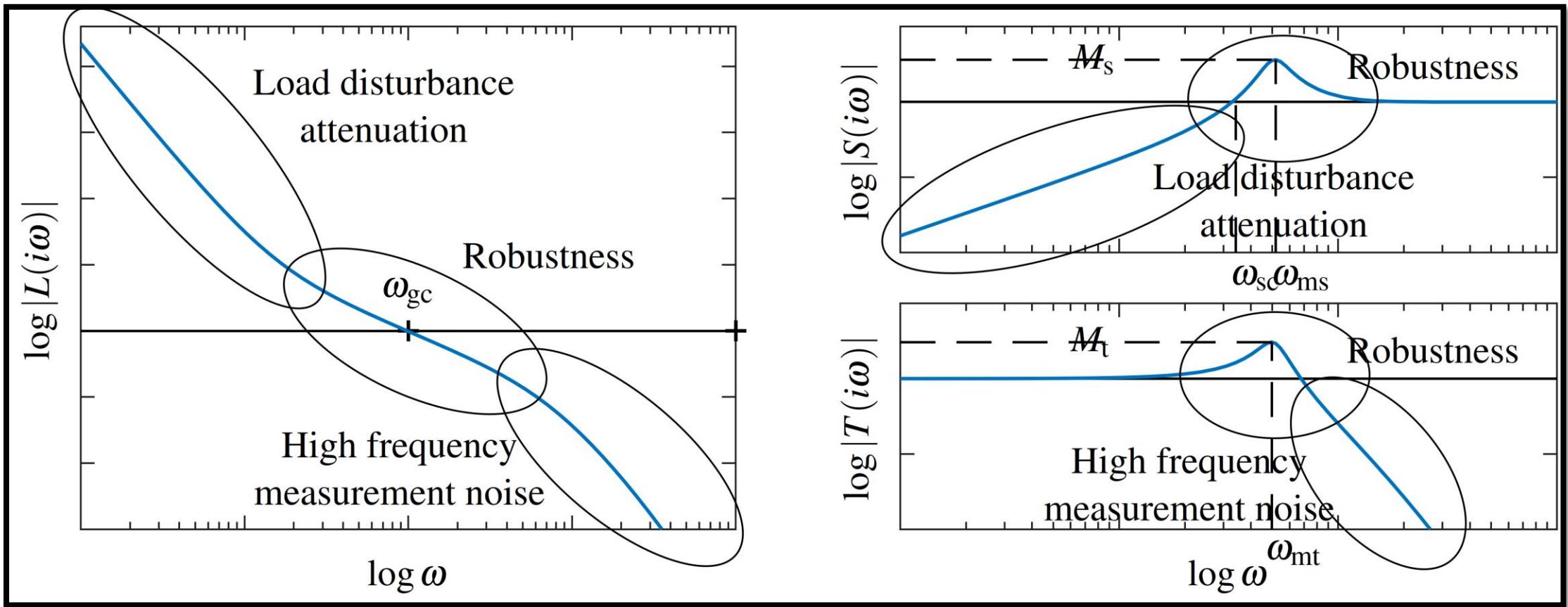
noise (or output) sensitivity function

# LoopShaping



$$(R(s) \mapsto E(s)) = S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (V(s) \mapsto Y(s)) = PS(s) = \frac{P(s)}{1 + L(s)}$$

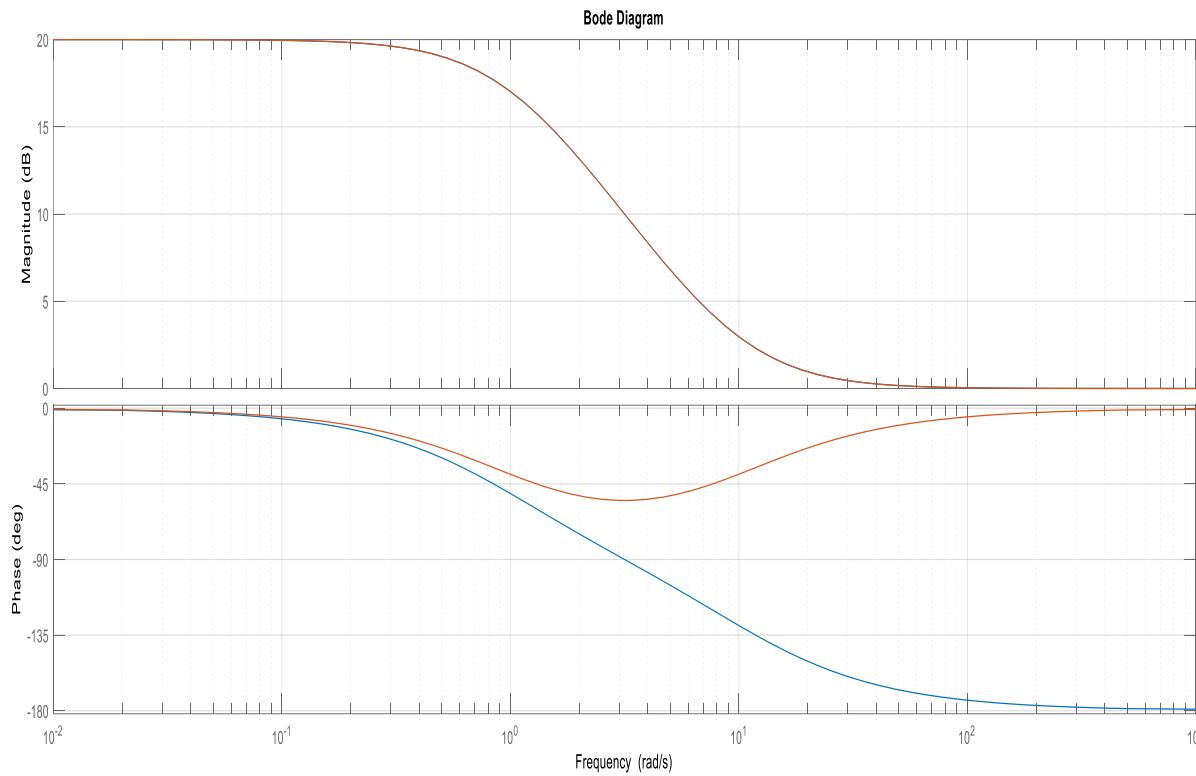
# LoopShaping



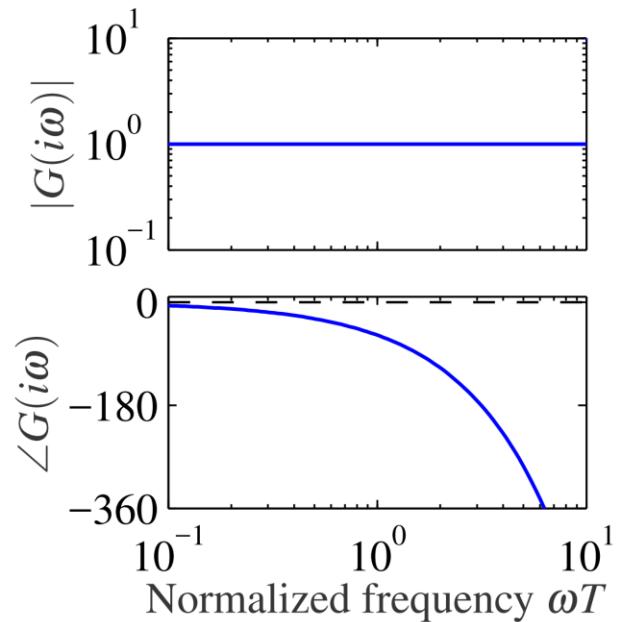
$$(R(s) \mapsto E(s)) = S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (V(s) \mapsto Y(s)) = PS(s) = \frac{P(s)}{1 + L(s)}$$

# Sistemas de Fase Mínima

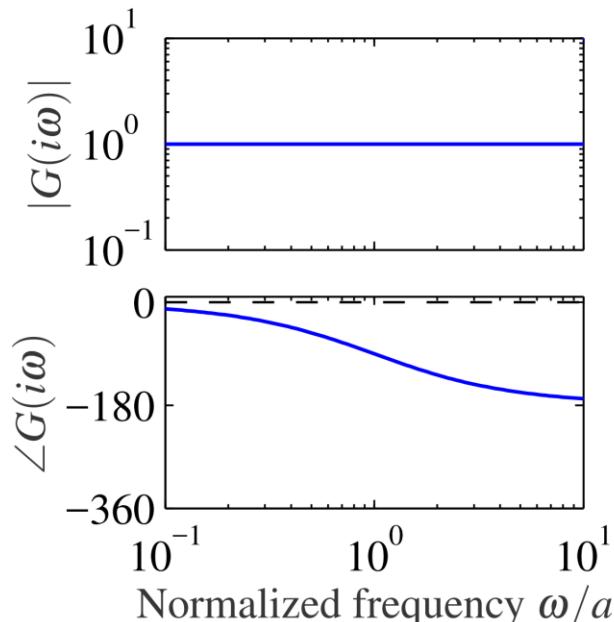
- Sistema lineal en el que la curva de fase, para valores negativos de la fase, toma valores absolutos los más pequeños posibles, para una curva de ganancia dada. Un sistema con fase mínima no incluye elementos de retardo o elementos de ganancia a altas frecuencias no nula.
- $\frac{10-s}{s+1}$  vs  $\frac{10+s}{s+1}$
- Por ej.  $G(s)=1$  es fase mínima,  $G(s)=-1$ , no.
- Finalmente llamaremos sistemas de fase mínima a aquellos para los cuales se cumple la relación fase/ganancia de Bode.



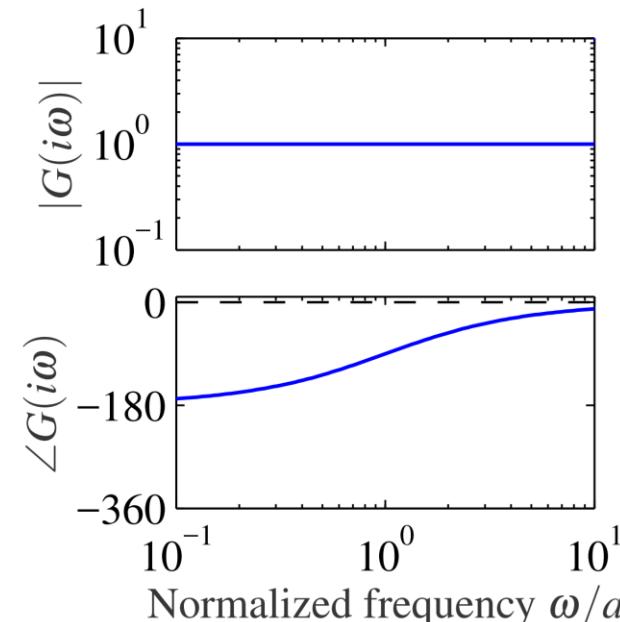
# Sistemas de Fase NO Minima: Ejemplos



(a) Time delay



(b) RHP zero



(c) RHP pole

**Figure 10.13:** Bode plots of systems that are not minimum phase. (a) Time delay  $G(s) = e^{-sT}$ , (b) system with a right half-plane (RHP) zero  $G(s) = (a - s)/(a + s)$  and (c) system with right half-plane pole. The corresponding minimum phase system has the transfer function  $G(s) = 1$  in all cases, the phase curves for that system are shown as dashed lines.

# Relación Fase Ganancia de Bode (R.F.G.B.)

- Sistemas de Fase Mínima: Para estos sistemas se cumple esta relación entre la pendiente de la magnitud y la fase:

$$\arg G(i\omega_0) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty f(\omega) \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} d \log \omega \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \log |G(i\omega_0)|}{d \log \omega_0}$$

- $f(\omega)$  es el núcleo de la integral:

$$f(\omega) = \frac{2}{\pi^2} \log \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right|, \quad \text{and} \quad \int_0^\infty f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = 1$$

- El signo aproximadamente igual vale como igual cuando la pendiente está “bien” establecida *i.e.* una década para atrás y una más para delante del punto  $\omega_0$  en el cual se está evaluando la cuenta.

## Ejemplo:

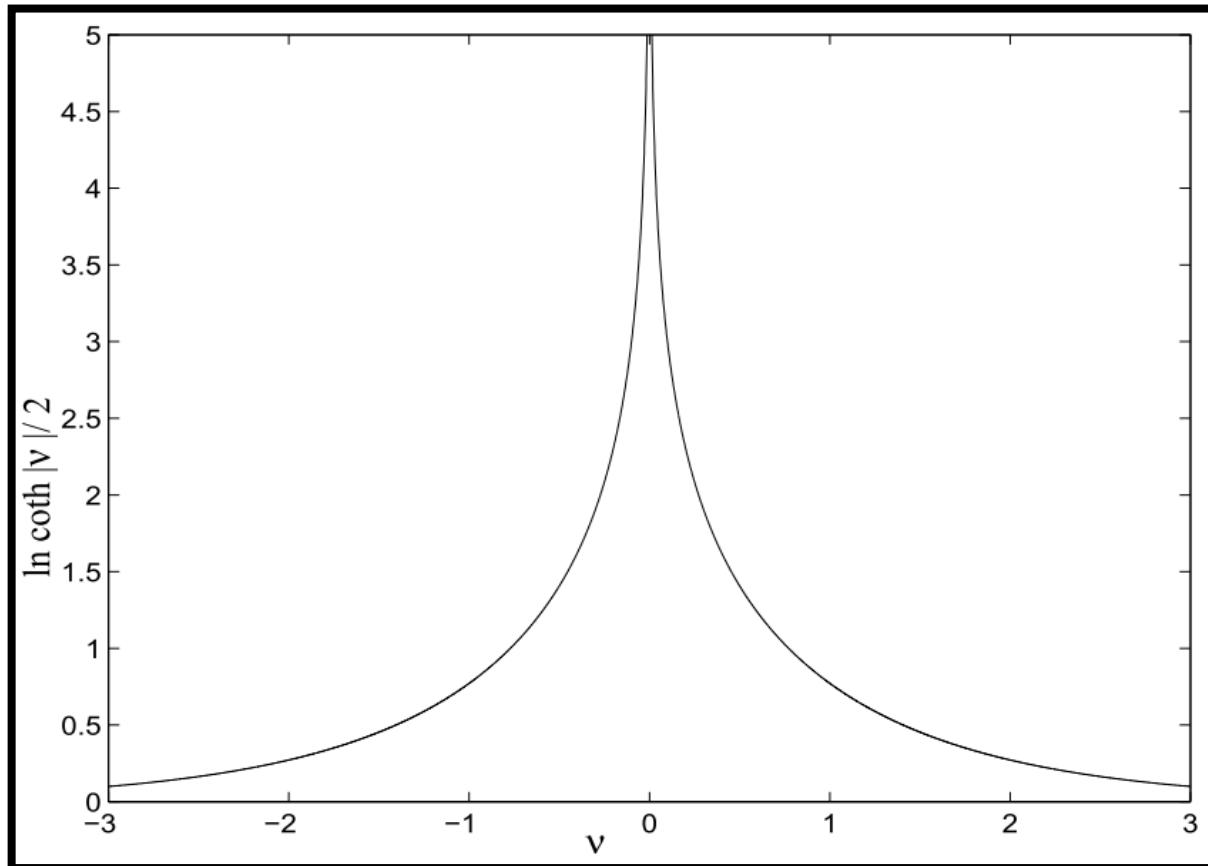
### Example 10.10 Phase of $G(s) = s^n$

We have  $\log G(s) = n \log s$  and hence  $d \log G(s) / d \log s = n$ . Equation (10.8) then gives

$$\arg G(i\omega_0) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty f(\omega) \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty n f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = n \frac{\pi}{2},$$

where the last equality follows from equation (10.9). If the gain curve has constant slope  $n$ , the phase curve is a horizontal line  $\arg G(i\omega) = n\pi/2$ .  $\nabla$

# Sobre el núcleo de la integral $f(\omega)$



$$\nu := \ln(\omega/\omega_0)$$

# ¿De qué sirve la RFGB en el Loop Shaping?

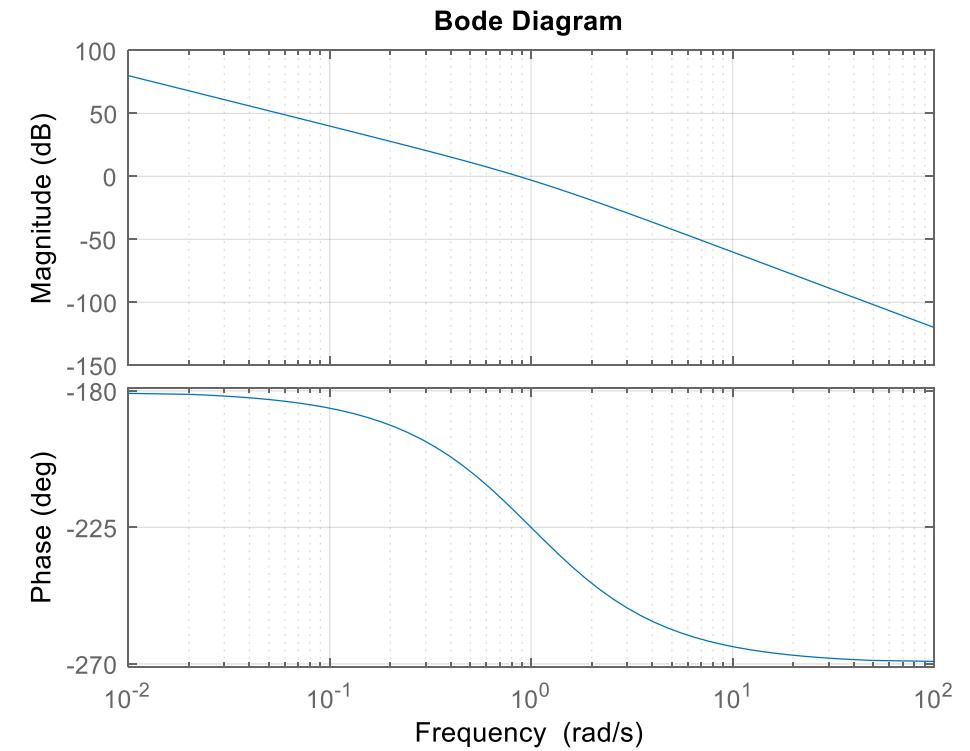
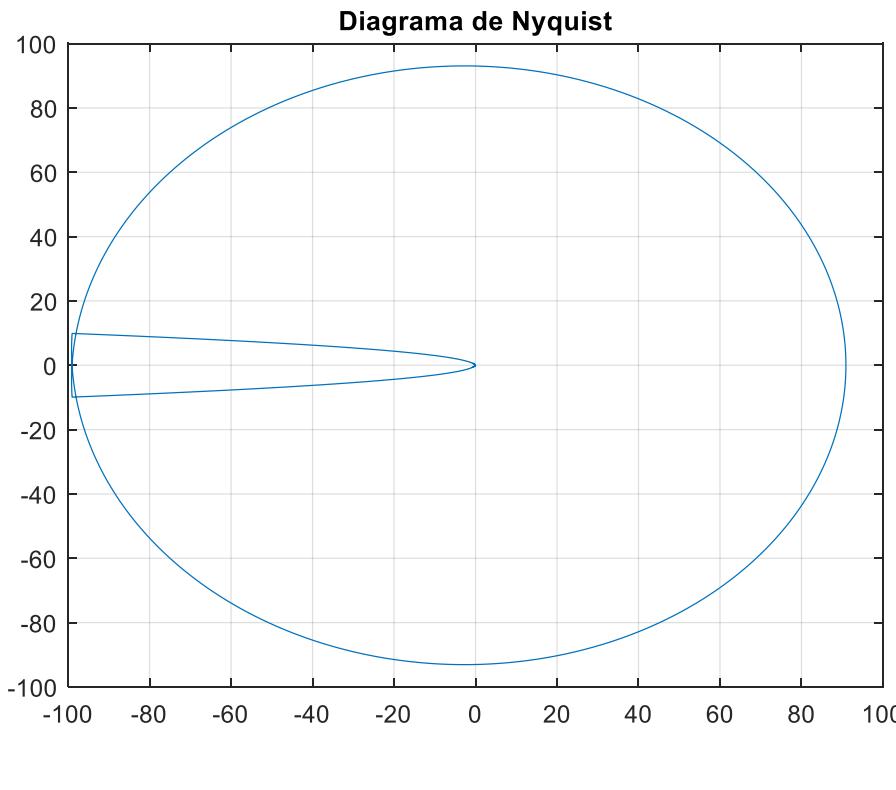
- Ejemplo fase mínima  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ . Se requiere que el sistema tenga si o si, acción integral:
- $\tilde{G}(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$  que tiene el término “ $s^2$ ” en el denominador debido al polo en el origen de la planta más la acción integral.
- $\tilde{G}(s)$  cumple con la relación fase ganancia de Bode.
- ¿En qué frecuencia crítica voy a aplicar la RFGB?



En la frecuencia de Cruce “ $\omega_{gc}$ ”, que es donde se analiza el margen de fase.

# Diseño para la nueva “planta” $\tilde{G}(s)k = \frac{k}{s^2(s+1)}$

- Queda claro del Nyquist, que solamente ajustando “ $k$ ” no se podrá estabilizar la planta. En el Nyquist se ven dos circulaciones que implican dos polos inestables a lazo cerrado. En el Bode se ve que la fase está siempre por debajo de  $-180^\circ$ .
- La compensación necesaria precisa “levantar la fase” en una parte conveniente de la respuesta en frecuencia.

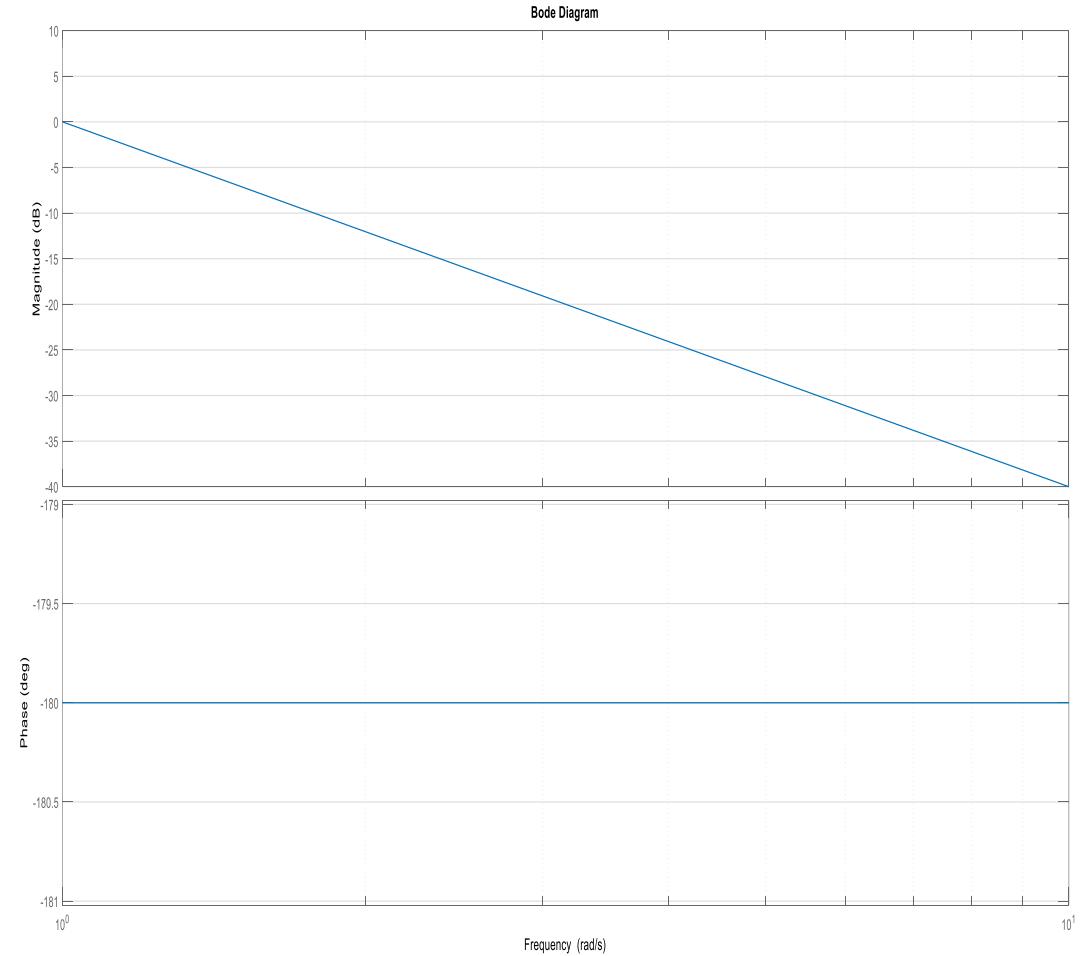


# Diseño para la nueva “planta” $\tilde{G}(s)k = \frac{k}{s^2(s+1)}$

- Solución “Quick & Dirty”: Cancelo el polo estable y me fijo que pasa:

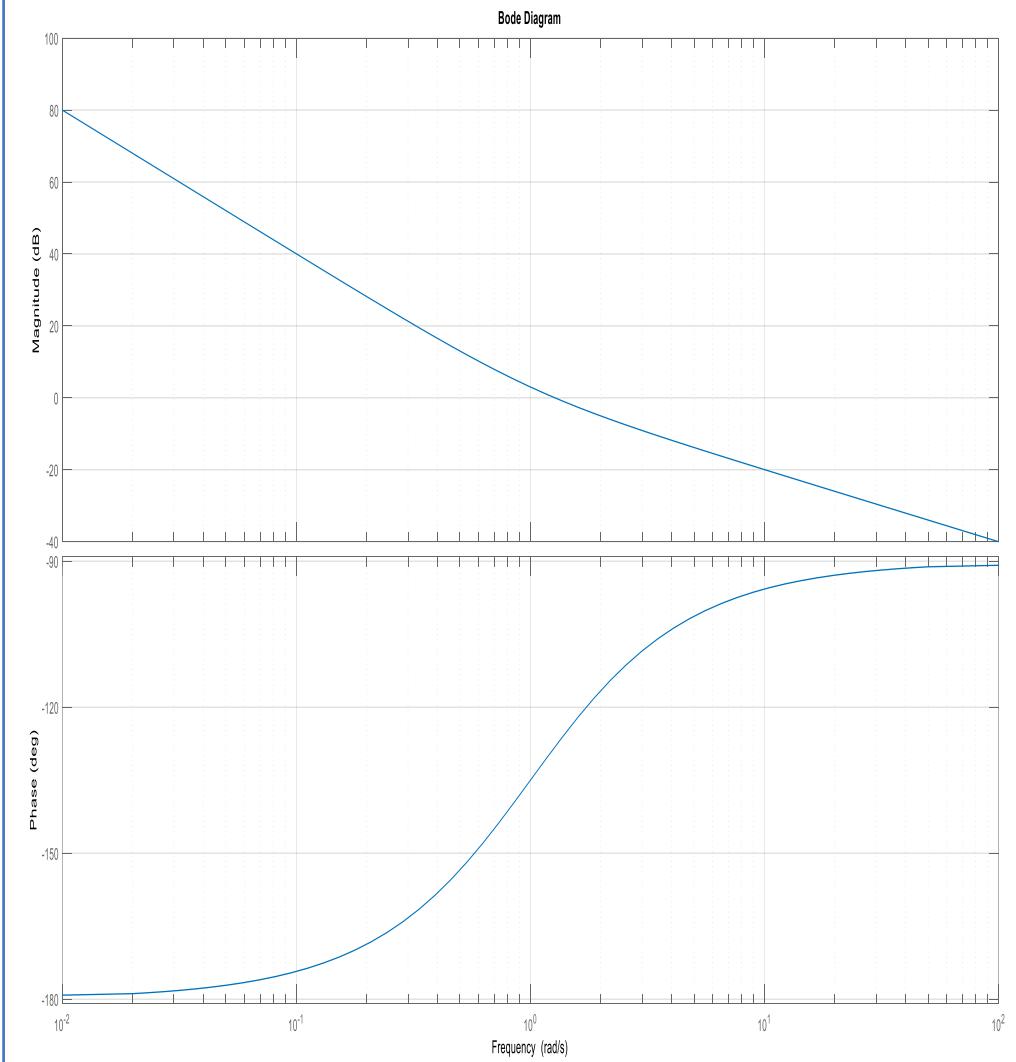
$$\tilde{G}(s)k(s+1) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+1)} = \frac{k}{s^2}$$

- Ahora compensaré  $\frac{k}{s^2}$ .
- Todavía le falta un adelanto de fase más, porque además es muy pronunciada la pendiente de la magnitud, i.e.: no se puede estabilizar así!



# Diseño para $\frac{k}{s^2}$

- Si le agrego un cero más:  $\frac{k(s+z)}{s^2}$ , probemos por ejemplo con  $z = 1$ .
- Ahora tengo posibilidad de darle a  $k$  un valor tal que la frecuencia de cruce sea tal que la fase esté por arriba de  $-180^\circ$ .
- Finalmente  $K(s) = \frac{k(s+1)^2}{s}$ , que es de tipo PID.
- $L(s) = \frac{k(s+1)^2}{s} * \frac{1}{s(s+1)} = \frac{k(s+1)}{s^2}$
- Encontrar  $k$  para margen de fase  $60^\circ$ .



# ¿Qué pasa si tengo polos y/o ceros tales que la RFGB no se cumple?

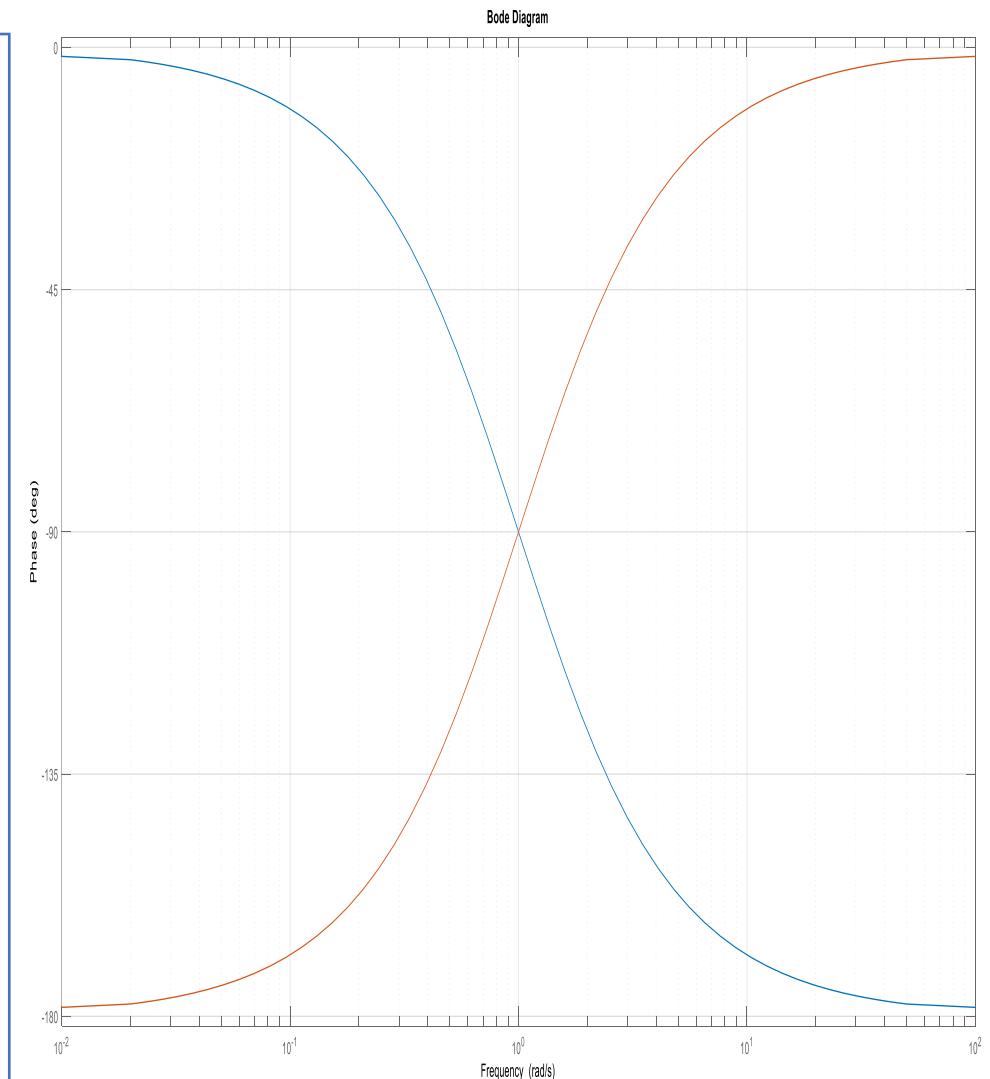
- Factorizo la planta en parte “MP” y parte “AP” (la planta puede ser “ $P(s)$ ” o “ $G(s)$  según el libro”):

$$P(s) = P_{mp}(s)P_{ap}(s)$$

- Ejemplo 1:  $P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2} \frac{(s+1)}{(s-1)}$

- Ejemplo 2:  $P(s) = \frac{(1-s)}{s} = \frac{(s+1)}{s} \frac{(1-s)}{(s+1)}$

- Notar que las  $P_{ap}(s)$  se formatean de forma tal de que la fase sea negativa en ambos casos.



# Análisis de Fase en “ $\omega_{gc}$ ”, $P(s) = P_{mp}(s)P_{ap}(s)$

- La fase lazo abierto en “ $\omega_{gc}$ ”:

$$\arg L(i\omega_{gc}) = \arg P_{ap}(i\omega_{gc}) + \arg P_{mp}(i\omega_{gc}) + \arg C(i\omega_{gc}) \geq -\pi + \varphi_m$$

- $n_{gc}$  es la pendiente de la RFGB:

$$n_{gc} = \left. \frac{d \log |L(i\omega)|}{d \log \omega} \right|_{\omega=\omega_{gc}} = \left. \frac{d \log |P_{mp}(i\omega)C(i\omega)|}{d \log \omega} \right|_{\omega=\omega_{gc}}$$

- Por Causa de la RFGB, se cumple que:

$$\arg P_{mp}(i\omega) + \arg C(i\omega) \approx n_{gc} \frac{\pi}{2}$$

- “ $\varphi_{ap}$ ” es el retraso adicional que introduce la parte pasa todo.

- “ $\bar{\varphi}_{ap}$ ” es el retraso pasatodo admisible.

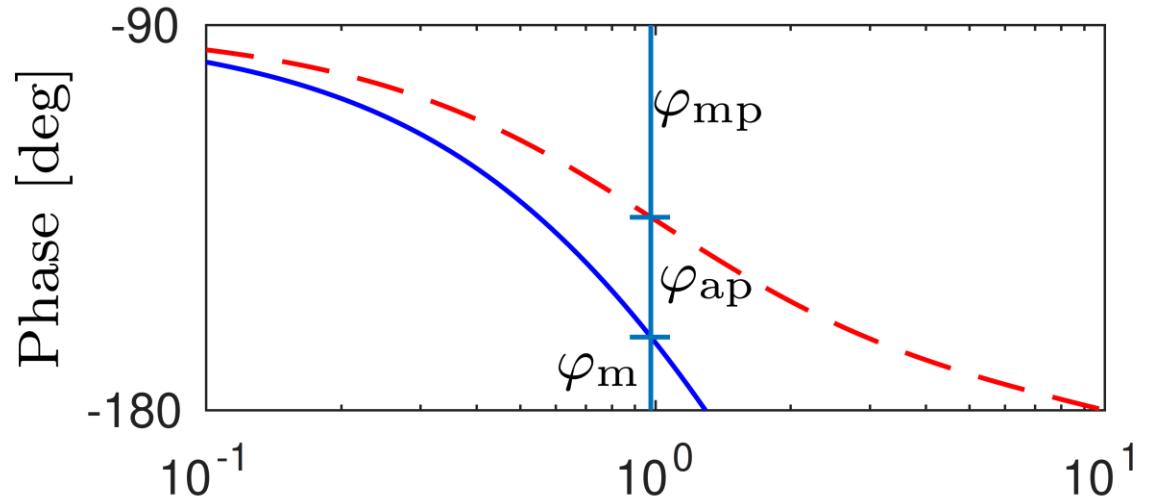
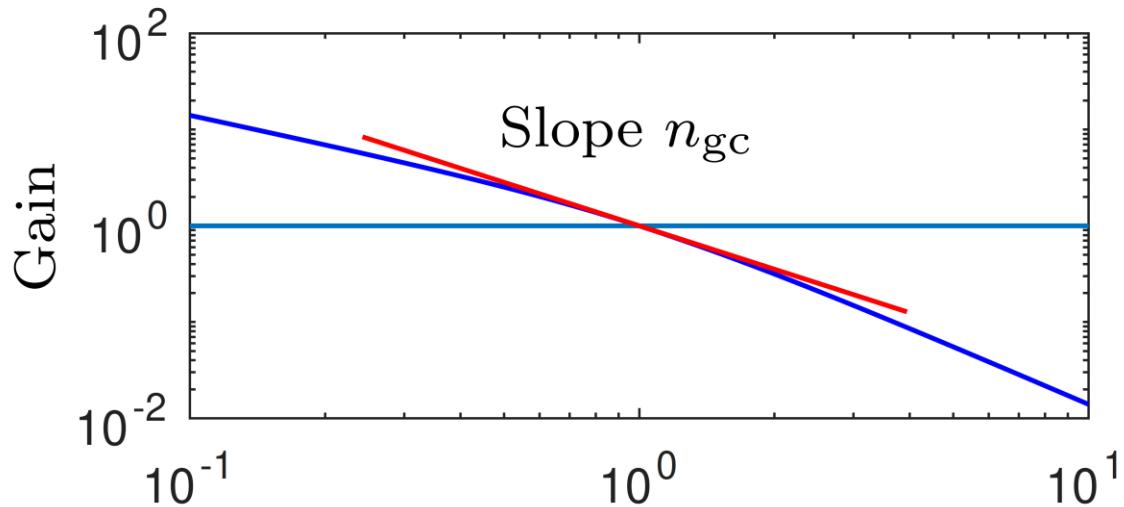
$$\varphi_{ap} := -\arg P_{ap}(i\omega_{gc}) \leq \pi - \varphi_m + n_{gc} \frac{\pi}{2} := \bar{\varphi}_{ap}$$

**Theorem 14.4** (Gain crossover frequency inequality). Let  $P(s) = P_{mp}(s)P_{ap}(s)$  where  $P_{ap}$  is an all-pass transfer function containing the non-minimum phase portion of  $P(s)$ . If  $C(s)$  is a stabilizing compensator for the closed loop system with no right half-plane poles and zeros and with phase margin  $\varphi_m$ , gain crossover frequency  $\omega_{gc}$ , and gain crossover slope  $n_{gc}$ , then the allowable phase lag for the all-pass transfer function must satisfy the inequality

$$\varphi_{ap} := -\arg P_{ap}(i\omega_{gc}) \leq \pi - \varphi_m + n_{gc} \frac{\pi}{2} := \bar{\varphi}_{ap}. \quad (14.10)$$

$\bar{\varphi}_{ap}$	$\varphi_m$	$n_{gc}$	$\pi - \varphi_m + n_{gc} \frac{\pi}{2}$
$30^\circ$	$60^\circ$	$-1$	$180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$
$90^\circ$	$45^\circ$	$-1/2$	$180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$

Ejemplos: Si podemos tolerar un menor margen de fase, entonces podemos aceptar un lag de la parte de no mínima fase algo mayor.



$\bar{\varphi}_{ap}$	$\varphi_m$	$n_{gc}$	$\pi - \varphi_m + n_{gc} \frac{\pi}{2}$
$30^\circ$	$60^\circ$	-1	$180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$
$90^\circ$	$45^\circ$	$-1/2$	$180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$

Ejemplos: Si podemos tolerar un menor margen de fase, entonces podemos aceptar un lag de la parte de no mínima fase algo mayor.

# Limitaciones de Diseño

$$P_{\text{ap}}(s) = \frac{z - s}{z + s}$$

$$\varphi_{\text{ap}} = -\arg P_{\text{ap}}(i\omega) = 2 \arctan \frac{\omega}{z}$$

$$\omega_{\text{gc}} \leq z \tan(\bar{\varphi}_{\text{ap}}/2)$$

$$P_{\text{ap}}(s) = \frac{s + p}{s - p}$$

$$\varphi_{\text{ap}} = -\arg P_{\text{ap}}(i\omega) = 2 \arctan \frac{p}{\omega}$$

$$\omega_{\text{gc}} \geq \frac{p}{\tan(\bar{\varphi}_{\text{ap}}/2)}$$

$\bar{\varphi}_{ap} = 30^\circ$	$\bar{\varphi}_{ap} = 30^\circ$
$\omega_{gc} < 0,6z$	$\omega_{gc} > 1,7p$

# Ejercicios:

- Simples:  $\frac{1}{s}$ ,  $\frac{1}{s^2}$  y  $\frac{1}{s^3}$ .
- $\frac{1}{(s+1)(s-1)}$ , con y sin acción integral.
- $\frac{(s-1)^2}{(s+3)^2}$
- Problema del Astrom Murray:  $L(s) = \frac{3(s+6)^2}{s(s+1)^2}$ .

Para ver más claramente este problema con las tres “zonas” de ganancia tales que sucesivamente el lazo es estable, luego inestable, y finalmente vuelve a ser estable, conviene modificar el problema ligeramente a:

$$L(s) = \frac{(s + 20)^2}{s(s + 1)^2}$$

En ese caso se ve cómo la fase tiene dos cruces por  $-180^\circ$ .

- Problema con Cero/Polos en el Semiplano derecho con acción integral:

$$G(s) = \frac{100 - s}{s(s - 1)}$$

- Ver cómo se complica este:

$$G(s) = \frac{1 - s}{s(s - 100)}$$

el cual no sale con este método.

- Recordar que siempre debe verificarse la estabilidad interna viendo los polos de lazo cerrado y/o el Nyquist.

Ejercicios  $G(s) = \frac{100-s}{s(s-1)}$ :

- Problema con Cero y Polo en el Semiplano derecho con más característica integral.
- Así se ve en el bode el retraso de fase que introduce una combinación polo inestable con un cero NMP en el caso favorable (la freq. del cero es más alta en módulo que la del polo).
- Existe una frecuencia (10 rad/s) que es más favorable como frecuencia de cruce porque es donde menos magnitud tendría  $\varphi_{ap}$ .

